Metody optymalizacji. Lista 1

Piotr Berezowski, 236749

12 kwietnia 2020

1 Zadanie 1

1.1 Opis zadania

Zadanie polegało na zapisaniu modelu w *GNU MathProg* i następnie użyciu *glpsol* do rozwiązania go i sprawdzenia dla jakich n zwracany wynik jest dokładny do co najmniej 2 cyfr. Model miał opisywać jeden z testów używanych do weryfikowania dokładności i odporności algorytmów LP.

1.2 Model

Szukamy:

$$\min c^T x$$

Przy spełnionych warunkach:

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ i,j = 1,\ldots,n$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1},\ i = 1,\ldots,n$$

Wiemy, że rozwiązaniem opisanego wyżej zagadnienia jest $x_i = 1,\ i = 1,\ldots,n$, a macierz A występująca w zadaniu powoduje złe uwarunkowanie zadania już dla małych n.

1.3 Rozwiązanie

Zaimplementowany model znajduje się w dołączonych do sprawozdania kodach źródłowych w pliku *zad1.mod*. Został on podzielony na dwie części, gdzie jedna zawiera opis modelu, a druga dane - wartość n dla której chcemy znaleźć rozwiązanie.

Poniższa tabela **??** zawiera wartość błędu względnego obliczonego dla kolejnych wartości n. Błąd względny był obliczany według wzoru:

$$\delta = \frac{||x - \tilde{x}||_2}{||x||_2}$$

n	**Błąd względny** (δ)
1	0
2	$1.053 * 10^{-15}$
3	$3.67158 * 10^{-15}$
4	$3.27016 * 10^{-13}$
5	$3.3514 * 10^{-12}$
6	$6.83336 * 10^{-11}$
7	$1.67869 * 10^{-8}$
8	0.514059
9	0.682911
10	0.990388

Tabela 1: Wyniki dla zadania 1

Widzimy, że wyniki są obliczane z akceptowalną dokładnością dla wartości $n \leq 7$. Powyżej tej wartości n błąd względny jest większy niż 0.01.

2 Zadanie 2

2.1 Opis zadania

Celem zadania było zapisanie modelu programowania liniowego w *GNU MathProg* dla przedstawionego problemu i rozwiązanie go używając *glpsol*.

2.2 Model

Zdefiniujmy zbiór miast, w których zlokalizowane są przedstawicielstwa firmy $M = \{\text{Warszawa, Gdańsk, } \ldots, \text{Budapeszt}\}$ oraz zbiór dostępnych typów camperów $T = \{\text{Standard, VIP}\}$. Niech δ_{ij} oznacza odległość między i-tą i j-tą lokalizacją firmy.

Następnie niech $d_t(m)$ oznacza niedobór campera typu t w mieście m, a $s_t(m)$ oznacza nadmiar campera typu t w mieście m.

Na końcu zdefiniujmy c_t jako koszt przemieszczenia kampera typu t o 1 km.

2.2.1 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne wyznaczające ilość samochodów typu t transportowanych z lokacji i do j definiujemy jako:

$$x_{t_{ij}} \geq 0,\ t \in T,\ i, j \in M$$

2.2.2 Ograniczenia

- Ilość camperów typu t, która wyjeżdża z miasta m nie może przekroczyć podaży (nadmiaru) camperów w tym mieście:

$$\sum_{j \in M} x_{t_{mj}} \leq s_t(m), \ t \in T, m \in M$$

- Ilość wszystkich camperów, które są dostarczane do miasta m musi być co najmniej równa niedoborowi wszystkich camperów w tym mieście:

$$\sum_{i \in M} \sum_{t \in T} x_{t_{im}} \geq \sum_{t \in T} d_t(m), \ m \in M$$

- Ilość camperów typu VIP, które są dostarczane do miasta m musi być co najmniej równa niedoborowni camperów typu VIP w tym mieście:

$$\sum_{i \in M} x_{t_{im}} \geq d_t(m), \ t = VIP, m \in M$$

2.2.3 Funkcja celu

Funkcja celu opisuje taki plan transportu camperów, którego koszt całkowity jest najmniejszy. Przyjmuje następującą postać:

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} x_{t_{ij}} c_t \delta_{ij}$$

Wyrażenie $c_t \delta_{ij}$ określa koszt transportu jednego campera typu t z miasta i do miasta j.

2.3 Rozwiązanie

Implementacja modelu znajduje się w dołączonym pliku *zad2.mod*. Dane dla przedstawionego zadania znajdują się w pliku *zad2.dat*.

Tabela **??** zawiera optymalny plan transportu dla zdefiniowanych danych. Koszt całkowity dla wyznaczonego planu wyniósł 20686.2.

Źródło	**Cel**	**#VIP**	**#Standard**
Warszawa	Gdańsk	14	0
Gdańsk	Gdańsk	0	2
Szczecin	Gdańsk	4	0
Szczecin	Berlin	8	4
Wrocław	Warszawa	0	4
Wrocław	Wrocław	0	2
Wrocław	Kraków	0	4
Kraków	Wrocław	6	0
Kraków	Koszyce	4	0
Rostok	Berlin	0	2
Rostok	Rostok	0	2
Lipsk	Berlin	0	3
Lipsk	Lipsk	0	3
Lipsk	Praga	0	4
Praga	Berlin	3	0
Praga	Brno	7	0
Brno	Brno	0	2
Bratysława	Bratysława	0	4
Bratysława	Budapeszt	0	4
Koszyce	Kraków	0	4
Budapeszt	Budapeszt	0	4

Tabela 2: Optymalny plan transportu. Koszt całkowity dla wyznaczonego planu transportu jest równy 20686.2

Wprowadzenie dodatkowego założenia co do całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych $x_{t_{ij}}$ nie jest potrzebne.

3 Zadanie 3

3.1 Opis zadania

Celem zadania było zapisanie modelu programowania liniowego w *GNU MathProg* dla przedstawionego problemu i rozwiązanie go używając *glpsol*. Problem dotyczył planowania produkcji czterech mieszanek (produktów) w pewnej firmie. Produkty są wytwarzane przy użyciu trzech rodzajów surowców. Służą one do produkcji dwóch produktów podstawowych. Podczas wytwarzania produktów podstawowych powstają odpady, które mogą być dalej użyte do produkcji dwóch produktów drugorzędnych, które wymagają również odpowiedniej ilości surowców. Odpady, które nie zostaną zużyte podczas produkcji produktów drugorzędnych muszą zostać zniszczone. Należało wyznaczyć taki plan, który zmaksymalizuje zyski firmy.

3.2 Model

Zdefiniujmy zbiór mieszanek produkowanych przez firmę $M = \{A, B, C, D\}$, oraz zbiór surowców $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Niech $L_i,\ i \in S$ oznacza minimalną ilość i-tego surowca jaką firma musi kupić, a $U_i,\ i \in S$ oznacza maksymalną ilość i-tego surowca jaką firma jest w stanie przetworzyć.

Niech $w_{ij},\ i \in S,\ j \in M$ oznacza współczynnik strat i-tego surowca dla j-tej mieszanki (współczynnik opisujący ilość powstałych odpadów).

Niech $v_i,\ i \in M$ oznacza cenę 1 kg i-tej mieszanki.

Niech $c_i,\ i \in S$ oznacza koszt za 1 kg i-tego surowca.

Niech $u_{ij},\ i \in S,\ j \in M$ oznacza koszt utylizacji odpadów powstałych z i-tego surowca przy produkcji j-tej mieszanki.

3.2.1 Zmienne decyzyjne

- Zmienne decyzyjne wyznaczające ilość i-tego surowca, która została przeznaczona na produkcję j-tej mieszanki:

$$x_{ij} \geq 0,\ i \in S,\ j \in M$$

- Zmienne decyzyjne wyznaczające ilość odpadów i-tego surowca, powstałych przy produkcji mieszanki A, przeznaczonych do produkcji surowca C:

$$y_{Ai} \geq 0,\ i \in S$$

- Zmienne decyzyjne wyznaczające ilość odpadów i-tego surowca, powstałych przy produkcji mieszanki B, przeznaczonych do produkcji surowca D:

$$y_{Bi} \geq 0,\ i \in S$$

3.2.2 Ograniczenia

- Górne i dolne ograniczenie na ilość surowca jaką firma musi zakupić:

$$L_i \leq \sum_{j \in M} x_{ij} \leq U_i,\ i \in S$$

- Ograniczenia modelujące zmienne y_{Ai} oraz y_{Bi}, które warunkują ilość odpadów przeznaczonych do dalszej produkcji:

$$y_{Ai} \leq w_{iA} x_{iA},\ i \in S$$

$$y_{Bi} \leq w_{iB} x_{iB},\ i \in S$$

- Ograniczenia warunkowane przez skład każdej z mieszanek:

1. Mieszanka A:
$$x_{s_1A} \geq 0.2 \sum_{i \in S} x_{iA}$$
$$x_{s_2A} \geq 0.4 \sum_{i \in S} x_{iA}$$
$$x_{s_3A} \leq 0.1 \sum_{i \in S} x_{iA}$$
2. Mieszanka B:
$$x_{s_1B} \geq 0.1 \sum_{i \in S} x_{iB}$$
$$x_{s_3B} \leq 0.3 \sum_{i \in S} x_{iB}$$
3. Mieszanka C:
$$x_{s_1C} = 0.2(x_{s_1C} + \sum_{i \in S} y_{Ai})$$
$$x_{s_2C} = 0$$
$$x_{s_3C} = 0$$
4. Mieszanka D:
$$x_{s_1D} = 0$$
$$x_{s_2D} = 0.3(x_{s_2D} + \sum_{i \in S} y_{Bi})$$
$$x_{s_3D} = 0$$

3.2.3 Funkcja celu

Funkcja zysku firmy będzie składać się z trzech składowych - kosztu zakupu surowców, kosztu utylizacji odpadów produkcyjnych oraz zysku ze sprzedaży wytworzonych mieszanek. Całkowity zysk możemy więc zapisać jako:

$$F = P - C_s - C_u$$

gdzie P jest całkowitym zyskiem ze sprzedaży mieszanek, C_s jest kosztem zakupu wszystkich surowców, a C_u jest kosztem utylizacji wszystkich odpadów powstałych podczas produkcji.

Koszt zakupu wszystkich surowców zapisujemy jako:

$$C_s = \sum_{i \in S} \sum_{j \in M} c_i x_{ij}$$

Koszt utylizacji odpadów zapisujemy jako:

$$C_u = \sum_{i \in S} \sum_{j \in \{A,B\}} u_{ij}(w_{ij} x_{ij} - y_{ji})$$

Zysk ze sprzedaży mieszanek zapisujemy jako:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_D$$

gdzie P_i oznacza zysk uzyskany ze sprzedaży i-tej mieszanki.

$$P_A = v_A \sum_{i \in S} (1 - w_{iA}) x_{iA}$$

$$P_B = v_B \sum_{i \in S} (1 - w_{iB}) x_{iB}$$

$$P_C = v_C (x_{s_1 C} + \sum_{i \in S} y_{Ai})$$

$$P_D = v_D (x_{s_2 D} + \sum_{i \in S} y_{Bi})$$

Naszym celem jest maksymalizacja zysku, a więc nasza funkcja celu będzie miała postać:

$$\max F = \max P - C_s - C_u$$

3.3 Rozwiązanie

Implementacja modelu, razem z danymi znajduje się w dołączonym pliku *zad3.mod.*

W tabeli **??** przedstawiono ilości poszczególnych surowców jakie powinny zostać użyte do produkcji mieszanek dla optymalnego planu produkcji.

Surowiec	**A**	**B**	**C**	**D**	**Razem**
1	1175.09	4725.03	99.8825	0	6000
2	940.071	4059.93	0	0	5000
3	235.018	3764.98	0	0	4000

Tabela 3: Ilość zakupionych surowców i ich rozkład między poszczególne produkty.

W tabeli **??** przedstawiono ilości odpadów jakie powstały w czasie produkcji mieszanek A i B. Wartość w kolumnie *Użyte* określa ilość odpadów, jaka musi być użyta do produkcji produktów drugorzędnych, z kolei wartość w kolumnie *Zniszczone* przedstawia ilość odpadów jaką należy poddać utylizacji.

Produkt	**Surowiec**	**Użyte**	**Zniszczone**	**Razem**
A	1	117.509	0	117.509
A	2	188.014	0	188.014
A	3	94.0071	0	94.0071
A	1 + 2 + 3	399.53	0	399.53
B	1	0	945.006	945.006
B	2	0	811.986	811.986
B	3	0	1882.49	1882.49
B	1 + 2 + 3	0	3639.48	3639.48

Tabela 4: Ilość odpadów otrzymanych z produkcji mieszanek A i B.

Optymalny zysk dla optymalnego rozwiązania jest równy 2986.89$.

4 Zadanie 4

4.1 Opis zadania

Celem zadania było zapisanie modelu programowania całkowitoliczbowego w *GNU MathProg* dla przedstawionego problemu i rozwiązanie go używając *glpsol*.

Problem dotyczył układania planu zajęć dla studenta. Należało tak ułożyć plan, aby jak najlepiej wpasował się w preferencje studenta.

4.2 Model

Zdefiniujmy zbiór wymaganych kursów jako $C = \{\text{Algebra, Analiza, Fizyka, Chemia min., Chemia org.}\}$.

Zdefiniujmy zbiór dostępnych grup dla każdego z kursów jako $G = \{\text{I, II, III, IV}\}$.

Zdefiniujmy zbiór dni tygodnia jako $D = \{\text{Pn, Wt, Śr, Cz, Pt}\}$.

Zdefiniujmy zbiór dostępnych grup treningowych jako $T = \{t_1, t_2, t_3\}$.

Niech W_{cg} będzie ilością punktów preferencyjnych przyznanych przez studenta g-tej grupie c-tego kursu.

Niech p określa jakiś okres czasu. Wybierzmy wartość p w taki sposób, aby dobę dało się podzielić na całkowitą liczbę okresów długości p oraz, aby każdy z kursów również dał się podzielić na całkowitą ilość okresów długości p.

Niech n określa ilość okresów czasu długości p, które mieszczą się w dobie.

Niech $Z_{cgdi},\ c \in C,\ g \in G,\ d \in D\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$ będzie wartością binarną, która określa czy g-ta grupa c-tego kursu odbywa się d-tego dnia podczas i-tego przedziału czasu.

Analogicznie dla treningów, niech $S_{tdi},\ t \in T,\ d \in D,\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$ będzie wartością binarną, która określa czy trening t odbywa się d-tego dnia podczas i-tego przedziału czasu.

4.2.1 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne opisujące plan zajęć studenta:

$$x_{cg} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli grupa } g \text{ kursu } c \text{ zalicza się do planu studenta} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}, \text{ gdzie } g \in G,\ c \in C$$

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{jeśli trening } t \text{ zalicza się do plan studenta} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}, \text{ gdzie } t \in T$$

4.2.2 Ograniczenia

- Wybieramy dokładnie jedną grupę z każdego kursu:

$$\sum_{g \in G} x_{cg} = 1,\ c \in C$$

- Każdego dnia łączny czas zajęć studenta jest nie większy niż $l * p$:

$$\sum_{c \in C} \sum_{g \in G} \sum_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} x_{cg} Z_{cgdi} \leq lp,\ d \in D$$

- Student ma v przedziałów czasu wolnego między przedziałami l oraz u każdego dnia:

$$\sum_{c \in C} \sum_{g \in G} \sum_{i \in \{l,\ldots,u-1\}} x_{cg} Z_{cgdi} \leq u - l - v,\ d \in D$$

- Zajęcia w planie nie nakładają się czasowo:

$$\sum_{c \in C} \sum_{g \in G} x_{cg} Z_{cgdi} + \sum_{t \in T} y_t S_{tdi} \leq 1,\ d \in D,\ i \in \{0, \ldots, n\}$$

- Student ma minimum jeden trening w tygodniu:

$$\sum_{t \in T} y_t \geq 1$$

4.2.3 Funkcja celu

Dla przedstawionego problemu, chcemy wyznaczyć taki plan zajęć, którego całkowita ilość punktów preferencyjnych będzie maksymalna, przy spełnionych ograniczeniach przedstawionych w poprzedniej sekcji.

Możemy więc zapisać funkcję celu jako:

$$\max \sum_{c \in C} \sum_{g \in G} x_{cg} W_{cg}$$

4.3 Rozwiązanie

Implementacja modelu, razem z danymi znajduje się w dołączonym pliku *zad4.mod*.

W tabeli **??** przedstawiono optymalny plan zajęć spełniający ograniczenia nałożone przez zadanie. Ilość punktów preferencyjnych dla tego planu jest równa 37.

Przedmiot	**Wybrana grupa**
Algebra	III
Analiza	II
Fizyka	IV
Chemia min.	I
Chemia org.	II

Tabela 5: Optymalny plan zajęć dla podstawowych ograniczeń.

Dodatkowo, należało odpowiedzieć na pytanie, czy istnieje taki plan zajęć, dla którego zajęcia zgrupowane byłyby w trzech dniach (poniedziałek, wtorek i czwartek) oraz wszystkie miałyby ocenę wyższą niż 5.

Nie udało się znaleźć plan spełniający dodatkowe ograniczenia.