Università degli Studi di Brescia, Facoltà di Ingegneria
Corso di Teoria dei Segnali
Laboratorio di Matlab, A.A. 2010/2011

Lezione N.8, 06/05/2011

Questa sessione di laboratorio conclude la parte deterministica, occupandosi di distanze, norme, prodotti scalari e correlazioni e le relazioni che le legano e di proiezioni di segnali su basi. Si prenda come asse temporale **t=-10:0.01:10**.

[Esercizio 1] DISTANZE, NORME, PRODOTTI SCALARI

Date le definizioni e le relazioni seguenti (valide per segnali di energia, estendibili nel solito modo ai segnali di potenza):

$$
\begin{aligned}
\|\underline{x}\| &= \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = d_2(\underline{x}, \underline{0}) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = W_x \\
d_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x} - \underline{y}\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = W_{x-y} \\
\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle &= \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos\left(\angle(\underline{x}, \underline{y})\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \\
d_2^2(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\right\} \\
|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| &\leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \quad \text{(dis. Schwarz)}
\end{aligned}
$$

verificarle usando i segnali (meglio costruirsi le funzioni **myNorm**, **myScalarProduct** e **myDistance**):

(i) $x_1(t) = 3 \cdot \mathrm{rect}\,(t)\,; \quad y_1(t) = \mathrm{tri}\,(t);$

(ii) $x_2(t) = \mathrm{tri}\,(t)\,; \quad y_2(t) = \mathrm{tri}\,(t-1);$

(iii) $x_3(t) = 2 \cdot \mathrm{sinc}\,(t)\,; \quad y_3(t) = j \cdot \mathrm{tri}\,(t).$

[Esercizio 2] CORRELAZIONE

Date le definizioni e le relazioni seguenti (valide per segnali di energia, estendibili nel solito modo ai segnali di potenza; vedere anche le definizioni dell'Esercizio 1):

$$
\begin{aligned}
\varphi_{xy}(\tau) &= \varphi_{yx}^*(-\tau) = \langle \underline{y}_{\tau}, \underline{x} \rangle = x^*(-\tau) * y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \\
\varphi_x(\tau) &= \varphi_x^*(-\tau) = \langle \underline{x}_{\tau}, \underline{x} \rangle = x^*(-\tau) * x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \\
\Phi_x(f) &= \mathcal{F}[\varphi_x(\tau)] \\
|\varphi_{xy}(0)| &\leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \\
\varphi_x(0) &= \|\underline{x}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df \\
d_2^2(\underline{x}, \underline{y}_{\tau}) &= \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{\varphi_{xy}(\tau)\right\}
\end{aligned}
$$

ed inoltre, per segnali periodici di periodo comune T, la definizione di crosscorrelazione (e autocorrelazione) circolare:

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)y(t+\tau)dt \\ \varphi_{x}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)x(t+\tau)dt\end{aligned}$$

verificarle usando i segnali:

(i) Relazioni "cross" lineari: $x_4(t) = 3 \cdot \mathrm{sinc}(2t)$ e $y_4(t) = j \cdot \mathrm{tri}(t+1)$; ripetere con $y_4(t) = \mathrm{tri}(t+1)$;

(ii) Relazioni "auto" lineari: $x_p(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2}) - \mathrm{rect}(t - \frac{3}{2})$;

(iii) Relazioni "auto" circolari: $x_T(t) = x_p(t) * \delta_T(t-1)$, ripetizione periodica di $x_p(t)$ con passo $T = 2$ (meglio costruirsi la funzione **mycircshift**).

[Esercizio 3] PROIEZIONE SU BASI

In questo esercizio si calcola l'approssimazione costante a tratti di un dato segnale che sia ottima in norma quadratica (ovvero che minimizzi l'energia dell'errore di approssimazione). L'approssimazione viene calcolata proiettando il segnale originale in uno spazio vettoriale generato dai segnali costituenti una base. Definiamo $x(t) = 10\sin(t) \cdot (1 + \sqrt{|t|})$.

(i) Si consideri la base di funzioni $\Phi = \{\varphi_k(t)\},\ k = 1, \dots, 20$, dove $\varphi_k(t) = \mathrm{rect}(t - k + 21/2)$. Si generi una matrice $\mathbf{B}$ di 20 righe che contenga nella k-esima riga il segnale $\varphi_k(t)$;

(ii) Si verifichi che Φ è ortonormale, calcolando una matrice $\mathbf{G}$ con i prodotti scalari incrociati tra i vettori della base, $\underline{\underline{G}} = \{\langle \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_h \rangle\}$, e verificando che $\langle \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_h \rangle = \delta_{hk}$, cioè $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{I}}$;

(iii) Si calcoli la proiezione di $\underline{x}$ su Φ, calcolando $\alpha_k = \langle \underline{\varphi}_k, \underline{x} \rangle$ e si costruisca infine il segnale **Appr_x** che rappresenta l'approssimazione $\hat{x}(t)$ di $x(t)$, ottenuta come $\underline{\hat{x}} = \sum_k \alpha_k \cdot \underline{\varphi}_k$, lo si disegni e si calcoli l'energia dell'errore di approssimazione;

(iv) Si consideri la base non ortogonale $\Phi_2 = \{\phi_k(t)\},\ k = 1, \dots, 21$, dove $\phi_k(t) = \mathrm{tri}(t - k + 11)$. In questo caso, bisogna trovare il vettore $\underline{\beta}$ tale che $\underline{\hat{x}} = \sum_k \beta_k \cdot \underline{\phi}_k$ minimizzi l'errore. Facendo il prodotto scalare a sinistra di questa espressione con $\underline{\phi}_h$ si ottiene $\langle \underline{\phi}_h, \underline{\hat{x}} \rangle = \langle \underline{\phi}_h, \sum_k \beta_k \cdot \underline{\phi}_k \rangle = \sum_k \beta_k \langle \underline{\phi}_h, \underline{\phi}_k \rangle$. Chiamando $\underline{\Theta} = \{\langle \underline{\phi}_k, \underline{\hat{x}} \rangle\}$, si ottiene $\underline{\beta} = \underline{\underline{G}}_2^{-1} \cdot \underline{\Theta}$, con $\underline{\underline{G}}_2 = \{\langle \underline{\phi}_k, \underline{\phi}_h \rangle\}$. Si calcoli quindi la proiezione di $\underline{x}$ su Φ_2 e si ripetano i passi dei punti (i)-(iii);

(v) Si ortogonalizzi la base Φ_2, ottenendo $\Phi_3 = \{\psi_k(t)\}$, utilizzando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_1 &= \frac{\underline{\phi}_1}{\|\underline{\phi}_1\|} \\ \underline{v}_k\big|_{k\neq 1} &= \underline{\phi}_k - \sum_{r=1}^{k-1} \langle \underline{\phi}_k, \underline{\psi}_r \rangle \underline{\psi}_r\ , \qquad \underline{\psi}_k\Big|_{k\neq 1} = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}\end{aligned}$$

Si calcoli quindi la proiezione di $\underline{x}$ su Φ_3 e si ripetano i passi dei punti (i)-(iii);

(vi) Costruire la base $\Phi_4 = \{\xi_k(t)\}$ biortogonale a Φ_2. Dato che deve valere $\langle \underline{\phi}_k, \underline{\xi}_h \rangle = \delta_{hk}$ ed esprimendo la nuova base come combinazione lineare di quella vecchia deve valere anche che $\underline{\xi}_h = \sum_j \gamma_{jh} \underline{\phi}_j$, sostituendo la seconda espressione nella prima si ottiene $\langle \underline{\phi}_k, \underline{\xi}_h \rangle = \langle \underline{\phi}_k, \sum_j \gamma_{jh} \underline{\phi}_j \rangle = \sum_j \gamma_{jh}^* \langle \underline{\phi}_k, \underline{\phi}_j \rangle$. Se $\underline{\underline{\Gamma}} = \{\gamma_{jh}\}$, si ottiene $\underline{\underline{\Gamma}} = [\underline{\underline{G}}_2^{-1}]^*$. Si calcoli quindi la proiezione di $\underline{x}$ su Φ_3 e si ripetano i passi dei punti (i)-(iii);

(vii) Provare ad eseguire il programma con $x(t) = 10\sin(2\pi t) \cdot (1 + \sqrt{|t|})$ e provare a giustificare l'accaduto.