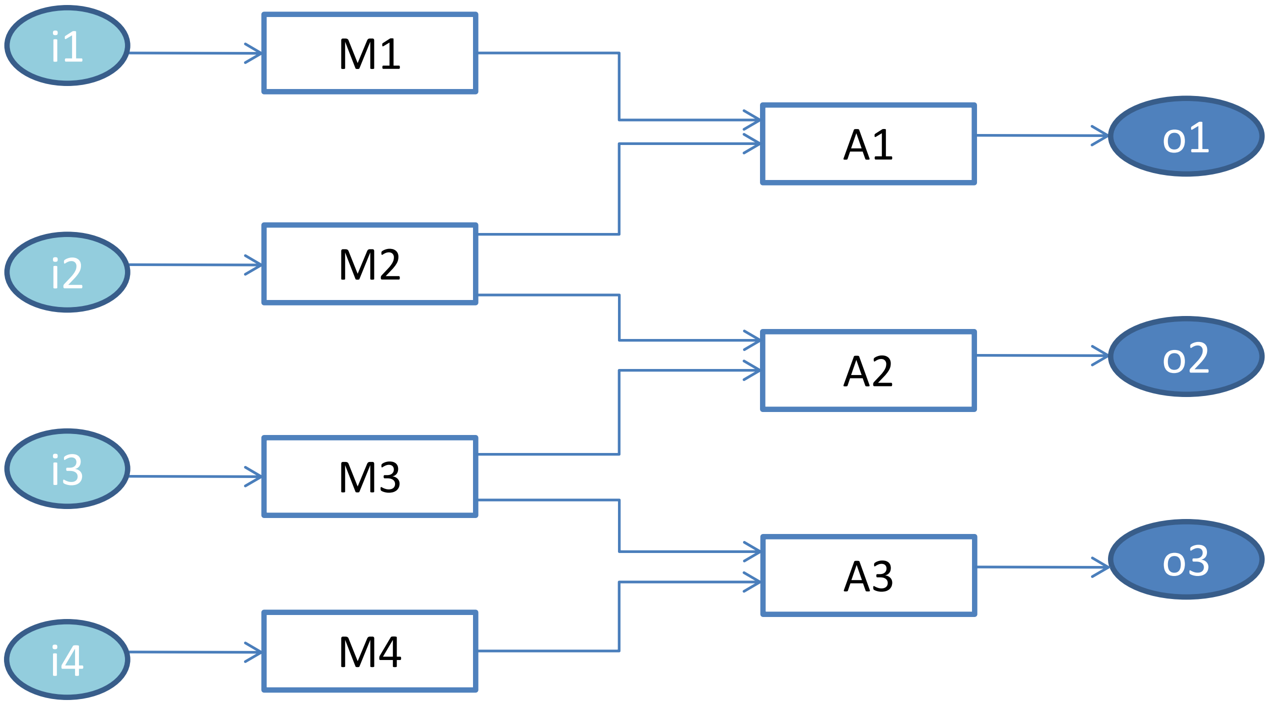
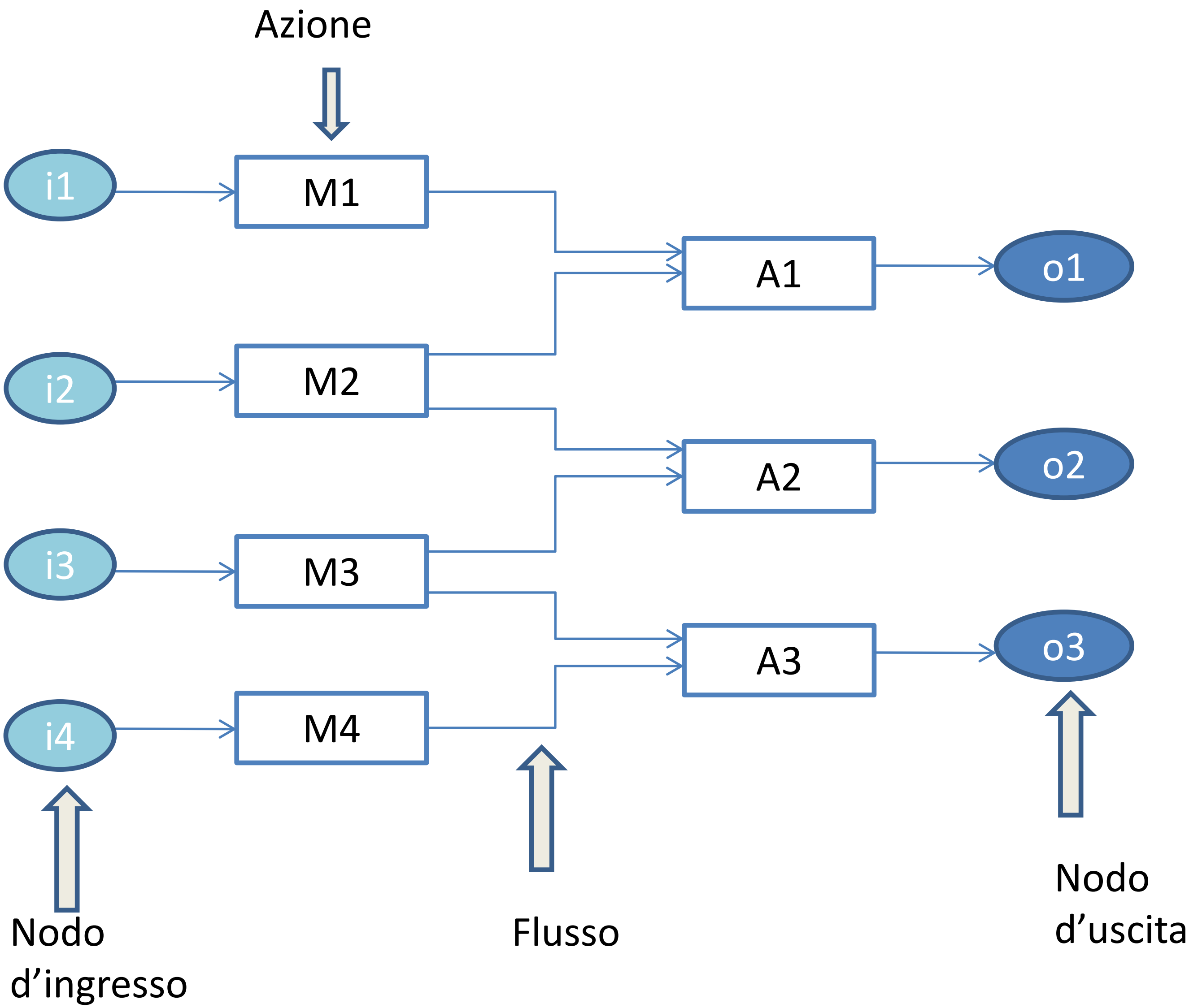
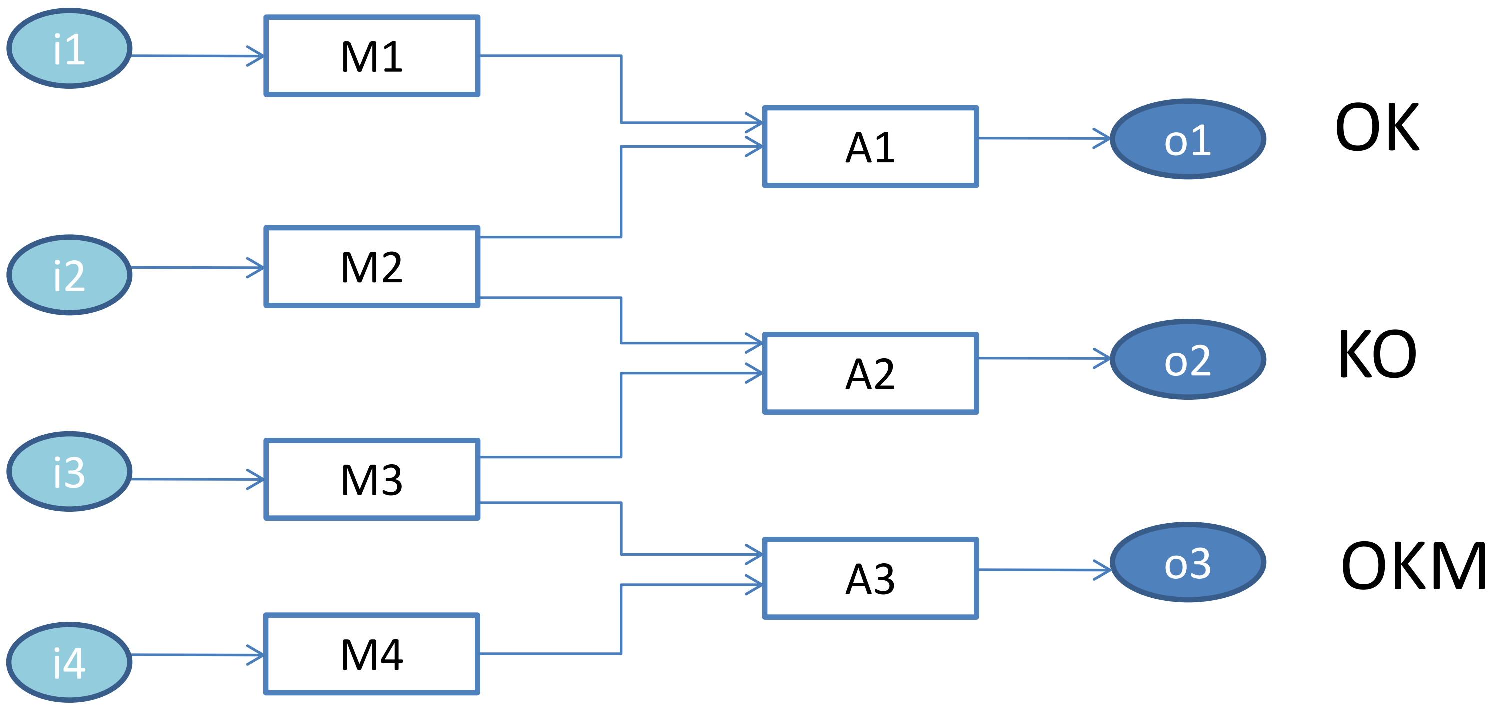
Modello topologico di un sistema



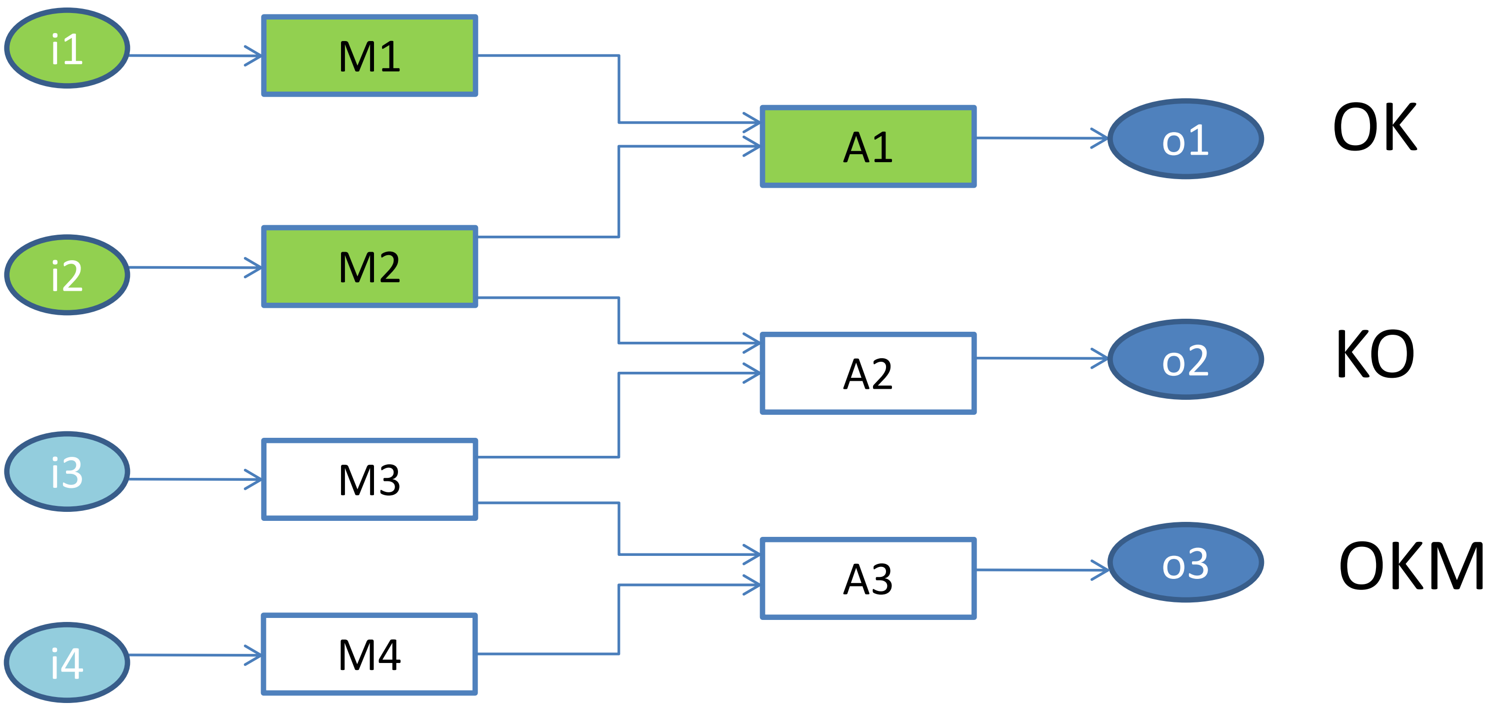
Modello topologico di un sistema



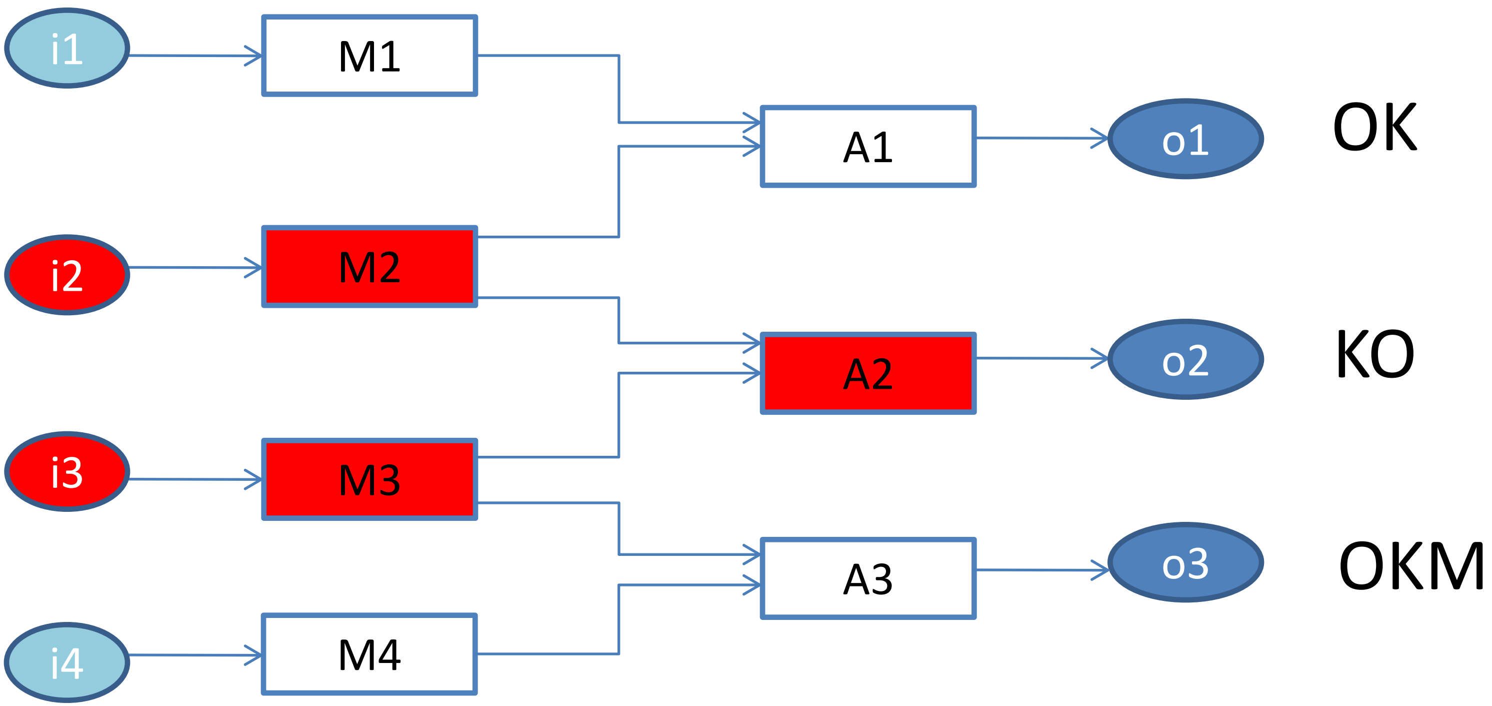
Osservazione del sistema



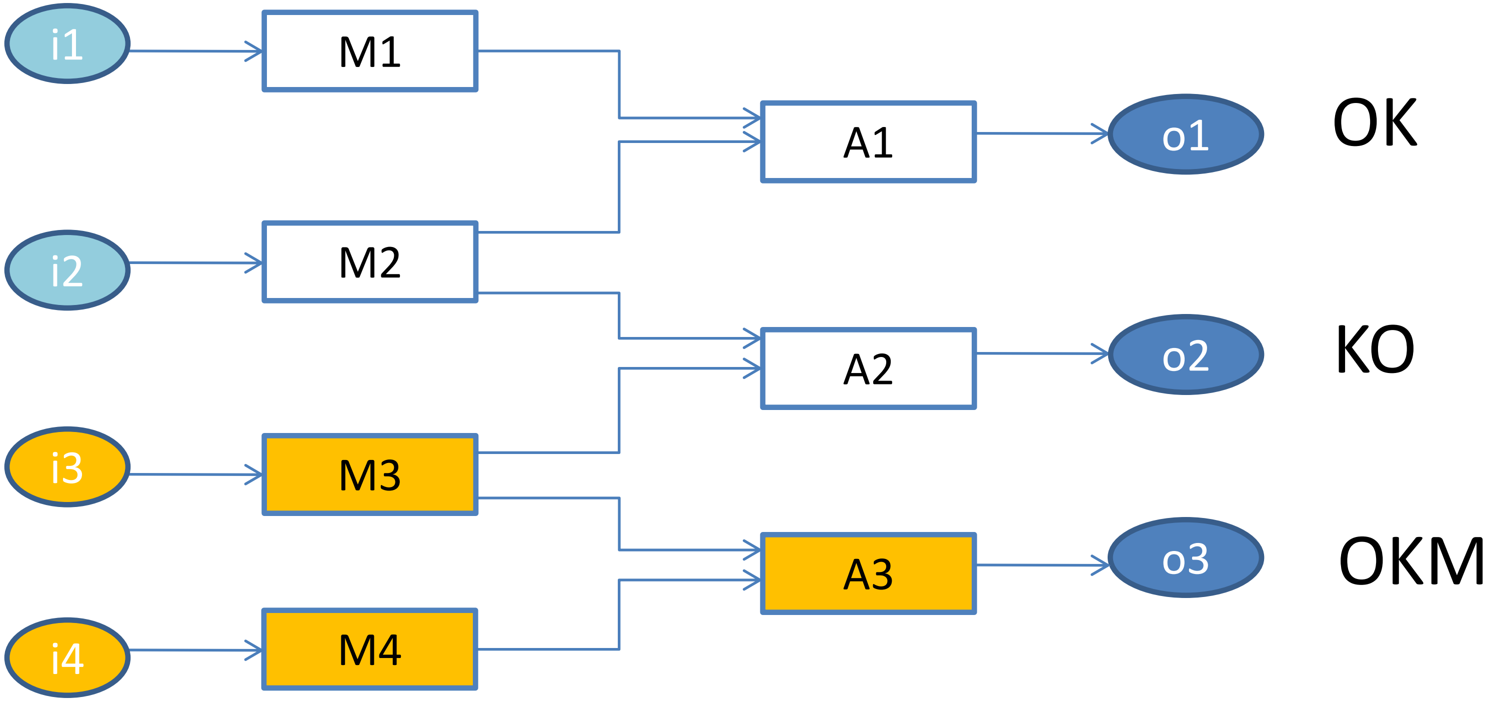
Sottoinsieme interno (IS_1)



Conflitto strutturale (C2)



Conflitto strutturale con mascheramento (C3)



Specifica (operazionale) di diagnosi minimale con mascheramento

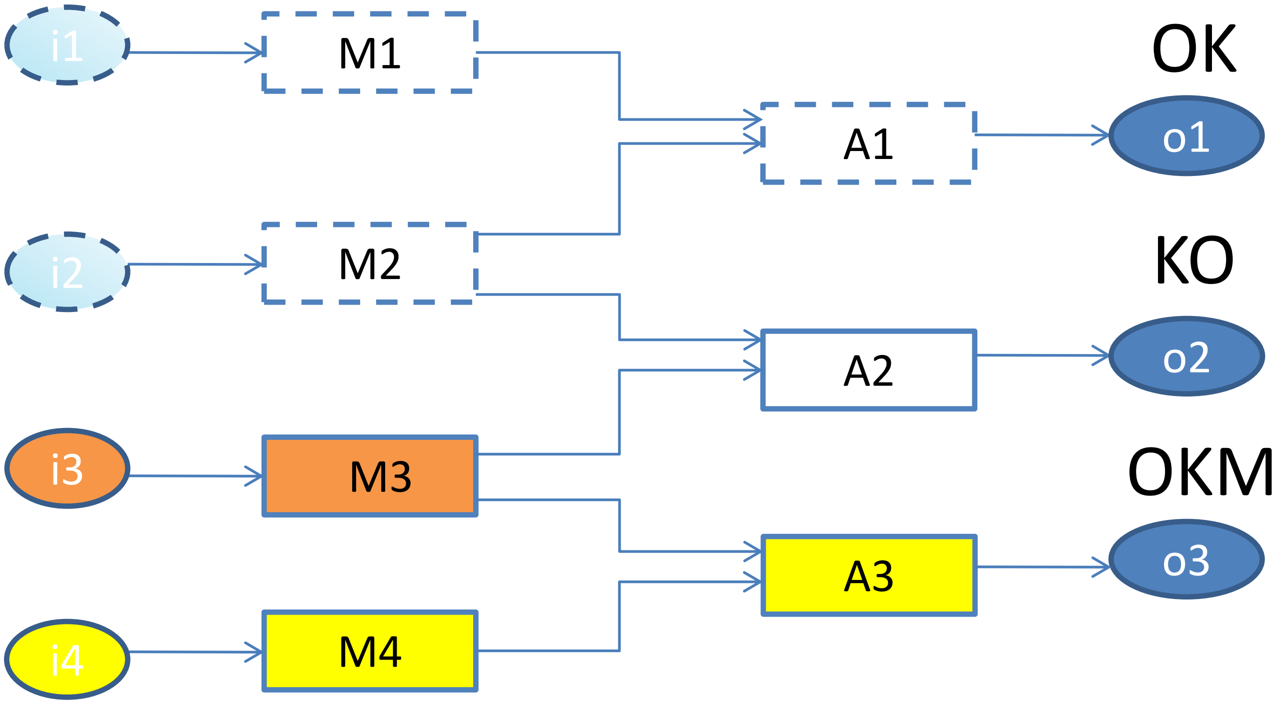
a) Sottrarre ($\cup$IS) a tutti i Ci e CMj, ottenendo $\underline{\mathrm{Ci}}$ e $\underline{\mathrm{CMj}}$

b) $\forall$ $\underline{\mathrm{CMj}}$, calcolare almeno un $\underline{\mathrm{CMj}}\backslash\underline{\mathrm{Ci}}$ non vuoto (e il $\underline{\mathrm{CMj}} \cap \underline{\mathrm{Ci}}$ non vuoto relativo)

c) Calcolare gli hitting set minimali (MHS) della collezione costituita da tutti gli insiemi di cui al punto precedente e da tutti gli eventuali $\underline{\mathrm{Ch}}$ che non hanno concorso a creare gli insiemi del punto precedente (ciascun MHS è una diagnosi minimale con mascheramento)

DIAGNOSI (MINIMALI) COMPRENSIVE DEGLI INGRESSI

Diagnosi (minimali) con mascheramento



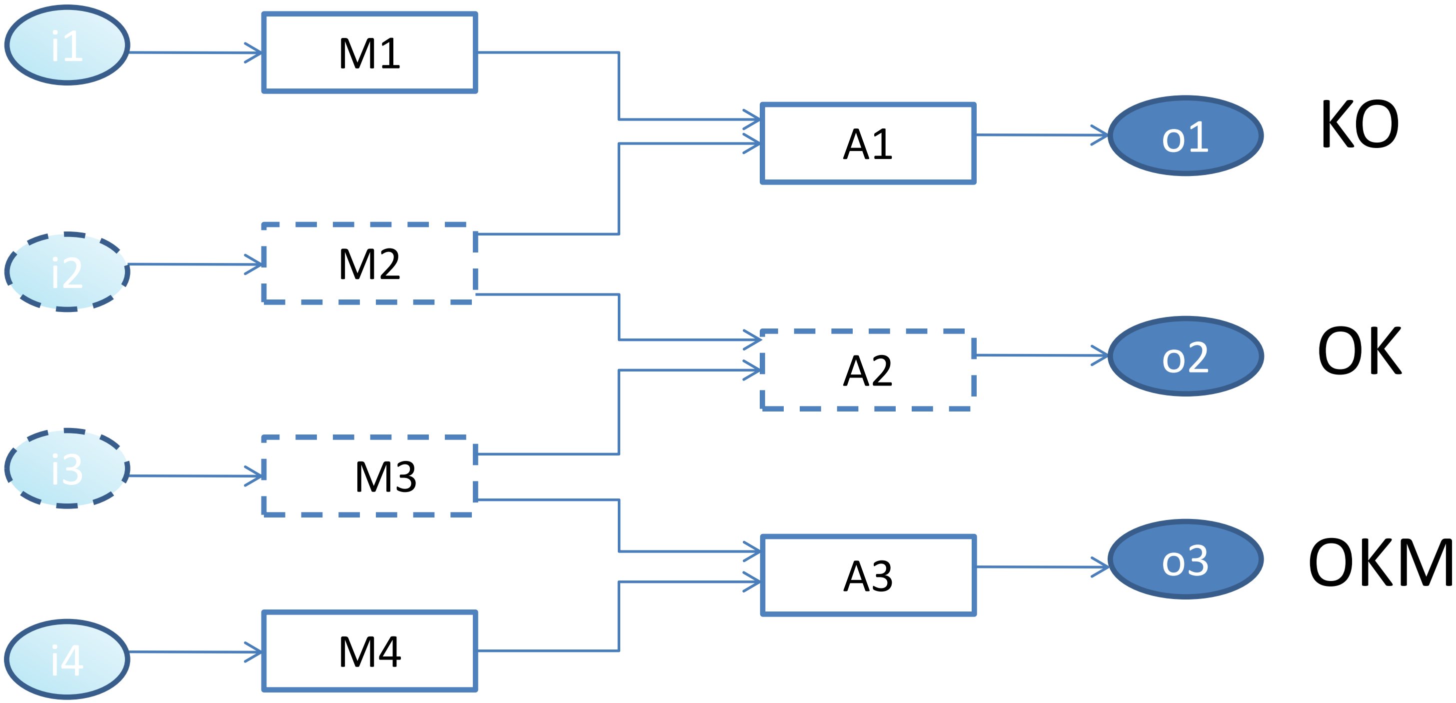
$\underline{C_2} \cap \underline{CM_3}$

$\underline{CM_3} \backslash \underline{C_2}$

{A3,M3}
{A3,i3}
{M3,M4}
{i3,M4}
{M3,i4}
{i3,i4}

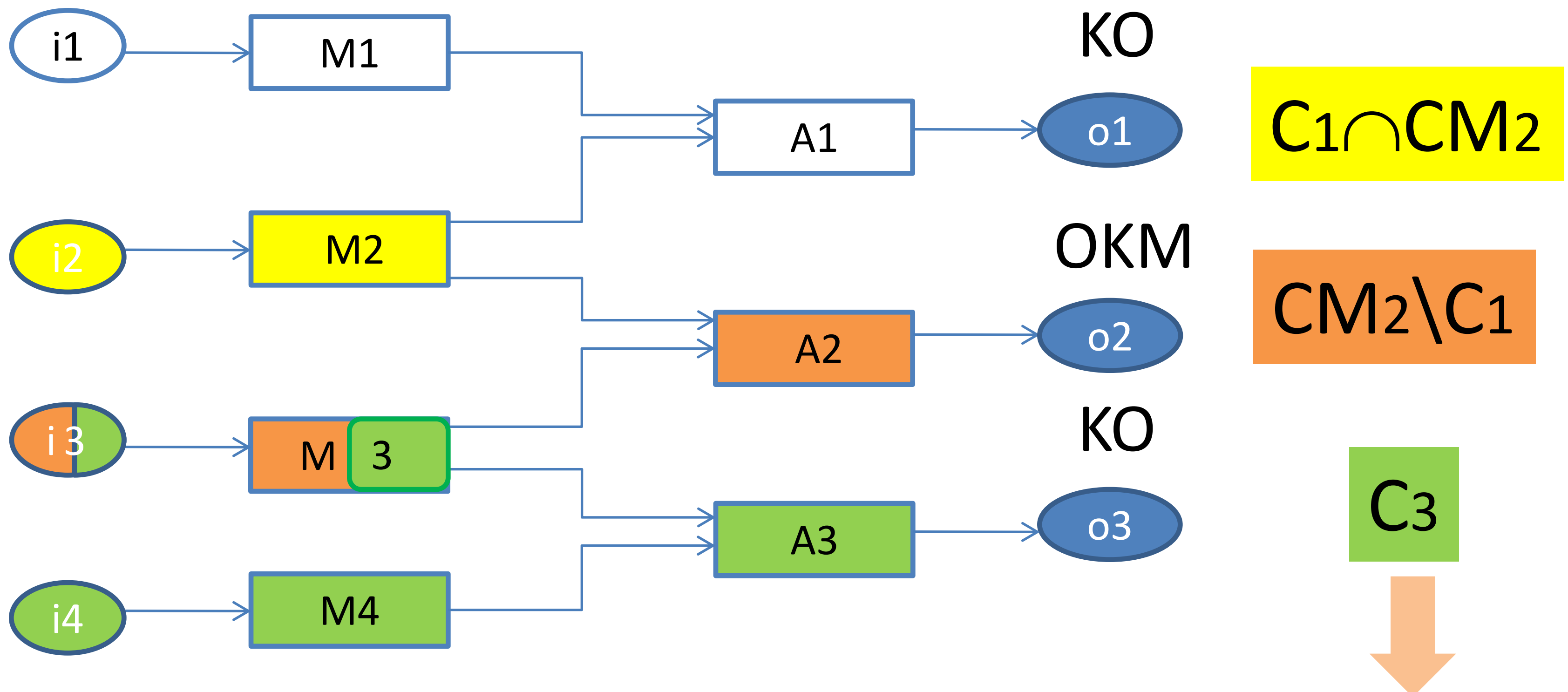
MHS: ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento.
L'insieme di queste diagnosi candidate è l'unico possibile per il problema diagnostico (sistema+osservazione) dato

Stesso sistema, osservazione diversa



$\underline{C_1} \cap \underline{CM_3} = \varnothing \rightarrow \nexists$ diagnosi minimali con mascheramento

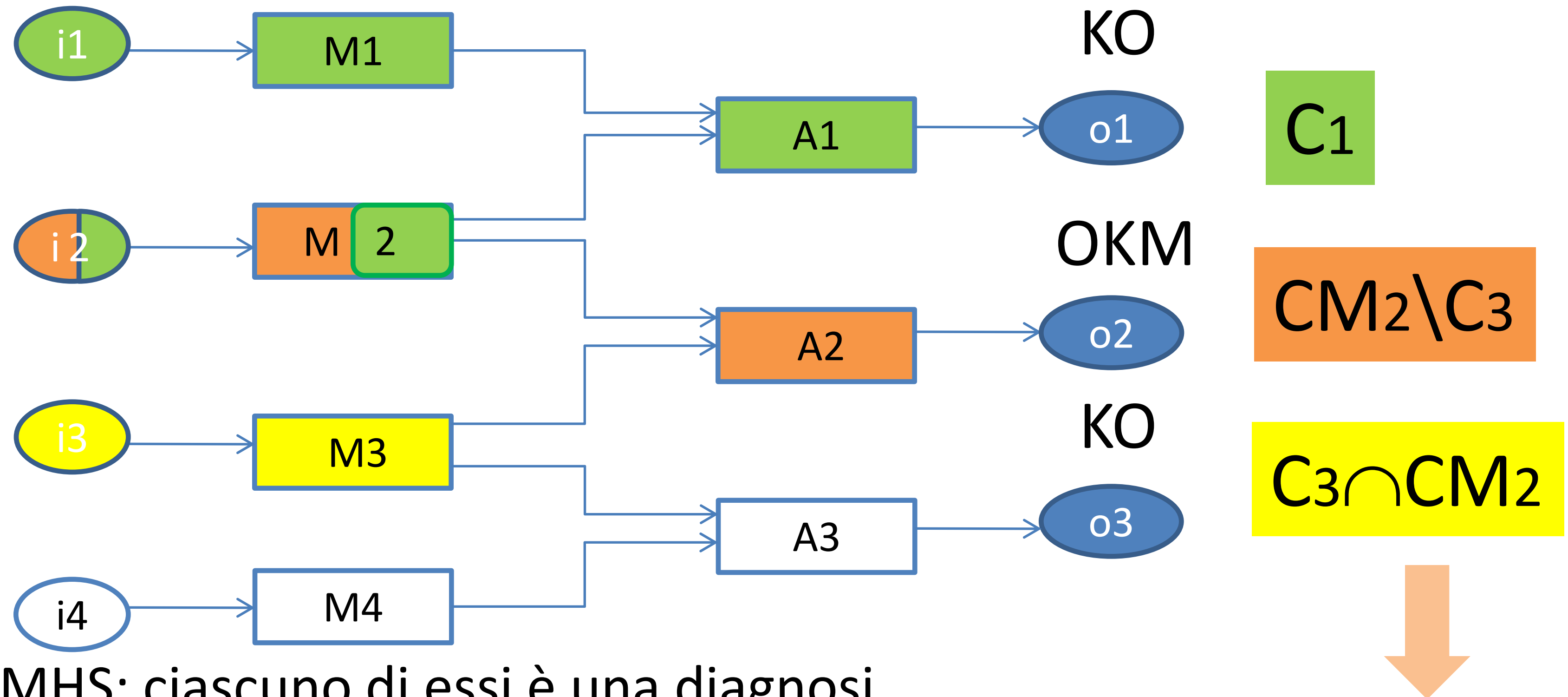
Stesso sistema, altra osservazione



MHS: ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento (l'insieme di queste diagnosi candidate non è l'unico possibile per il problema diagnostico (sistema+osservazione) dato

{M2,M3} {M2,i3} {i2,M3} {i2,i3} {M2,A2,M4} {i2,A2,M4}{M2,A2,A3} {i2,A2,A3} {M2,A2,i4} {i2,A2,i4}

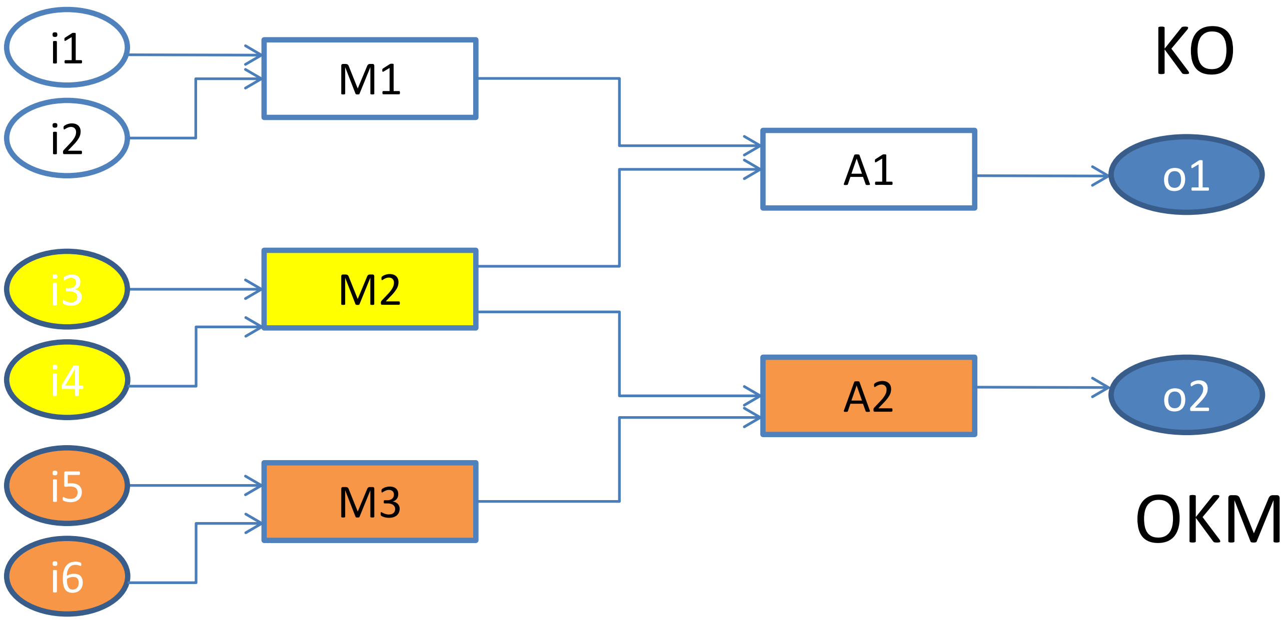
Stesso problema, altre diagnosi



MHS: ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento. L'insieme di queste candidate si aggiunge a quello della pagina precedente (alcune diagnosi sono condivise) per il problema diagnostico (sistema+osservazione) dato

{M2,M3} {i2,M3} {i2,M3} {i2,i3} {M3,A2,M1} {M3,A2,A1} {M3,A2,i1} {i3,A2,M1} {i3,A2,A1} {i3,A2,i1}

Altri esempi

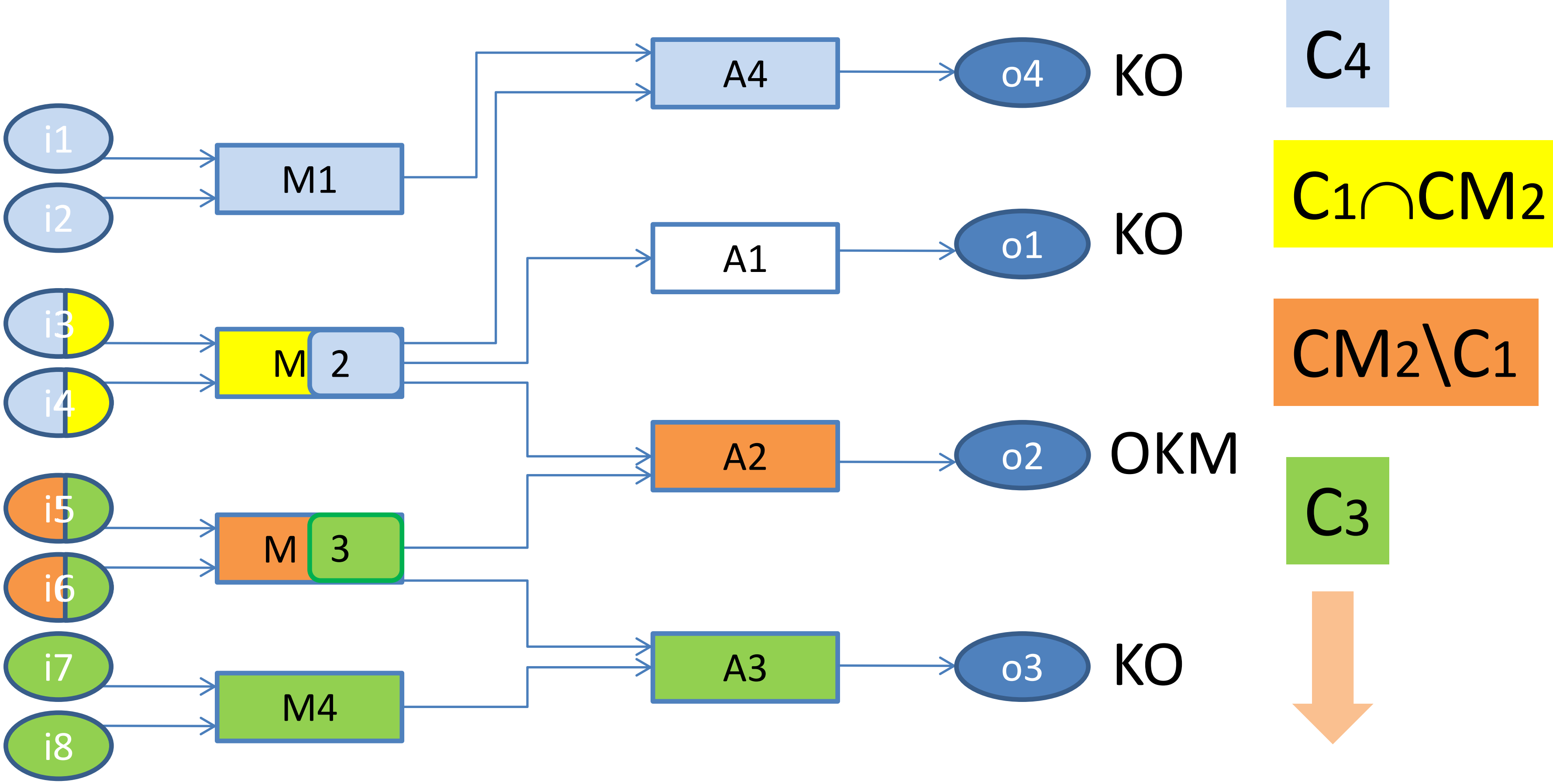


$C_1 \cap CM_2$

$CM_2 \setminus C_1$

MHS (ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento)

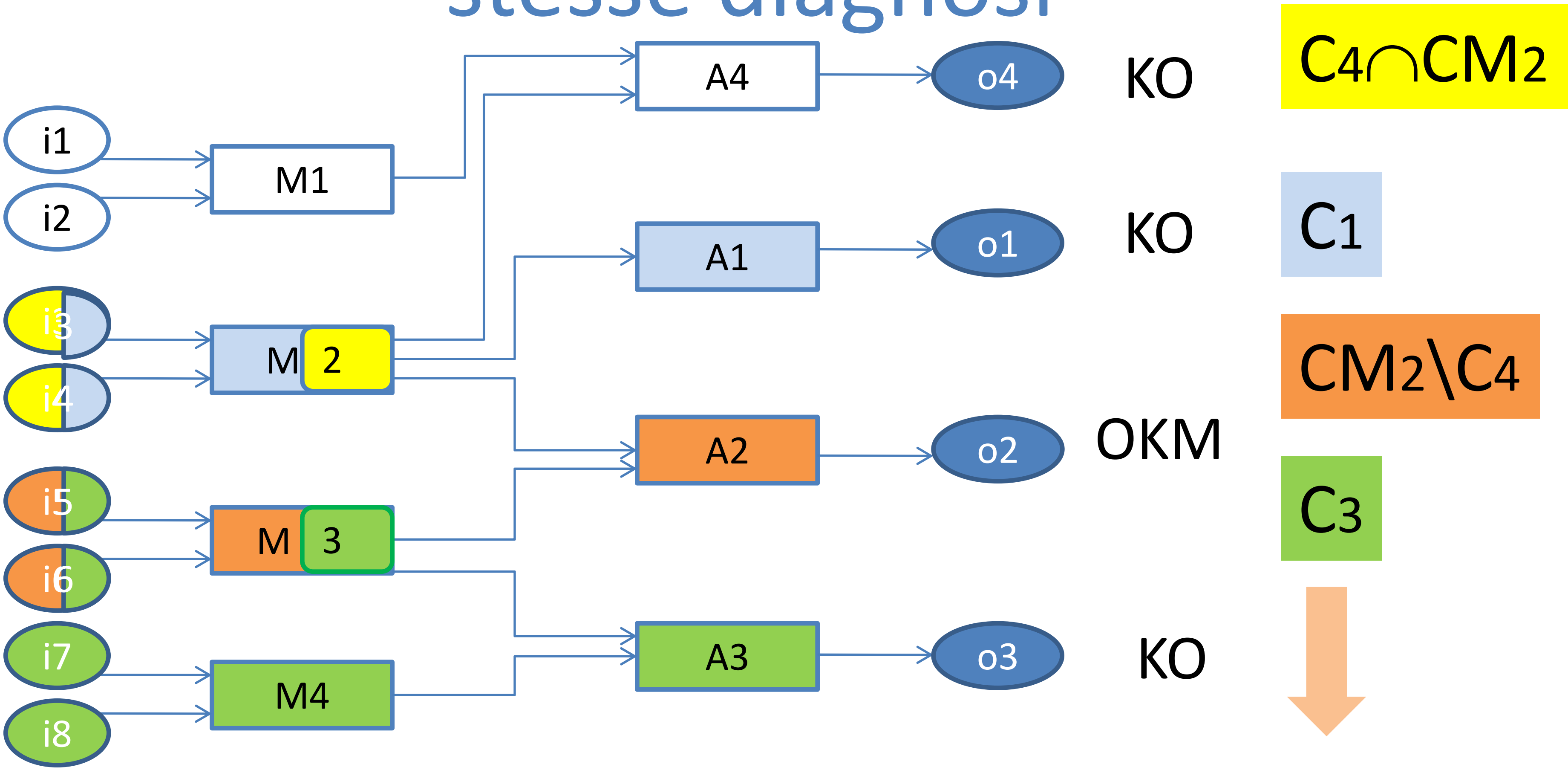
{M2,M3}{M2,A2} {M2,i5}{M2,i6}
{i3,M3}{i3,A2} {i3,i5}{i3,i6}
{i4,M3}{i4,A2}{i4,i5}{i4,i6}



{M2,M3} {M2,i5}{M2,i6}
{i3,M3}{i3,i5}{i3,i6}
{i4,M3}{i4,i5}{i4,i6}
{M2,A2,M4}{i3,A2,M4}{i4,A2,M4}
{M2,A2,A3}{i3,A2,A3}{i4,A2,A3}
{M2,A2,i7}{i3,A2,i7}{i4,A2,i7}
{M2,A2,i8}{i3,A2,i8}{i4,A2,i8}

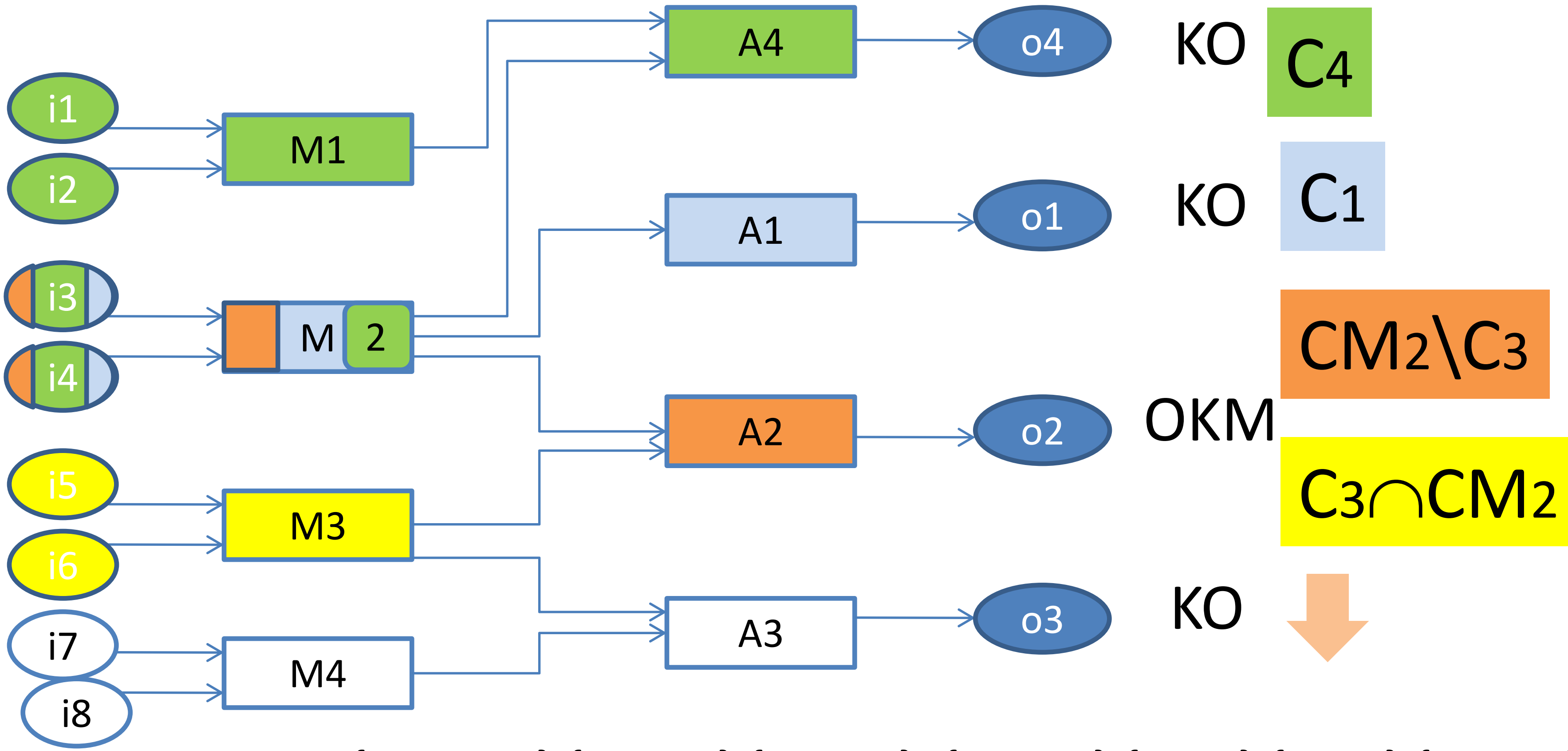
MHS (ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento)

Stesso problema, altro calcolo, stesse diagnosi



{M2,M3} {i3,M3} {i4,M3} {M2,i5} {i3,i5} {i4,i5}{M2,i6} {i3,i6} {i4,i6}
{M2,A2,M4} {i3,A2,M4} {i4,A2,M4} {M2,A2,A3} {i3,A2,A3} {i4,A2,A3}
{M2,A2,i7} {i3,A2,i7} {i4,A2,i7} {M2,A2,i8} {i3,A2,i8} {i4,A2,i8}

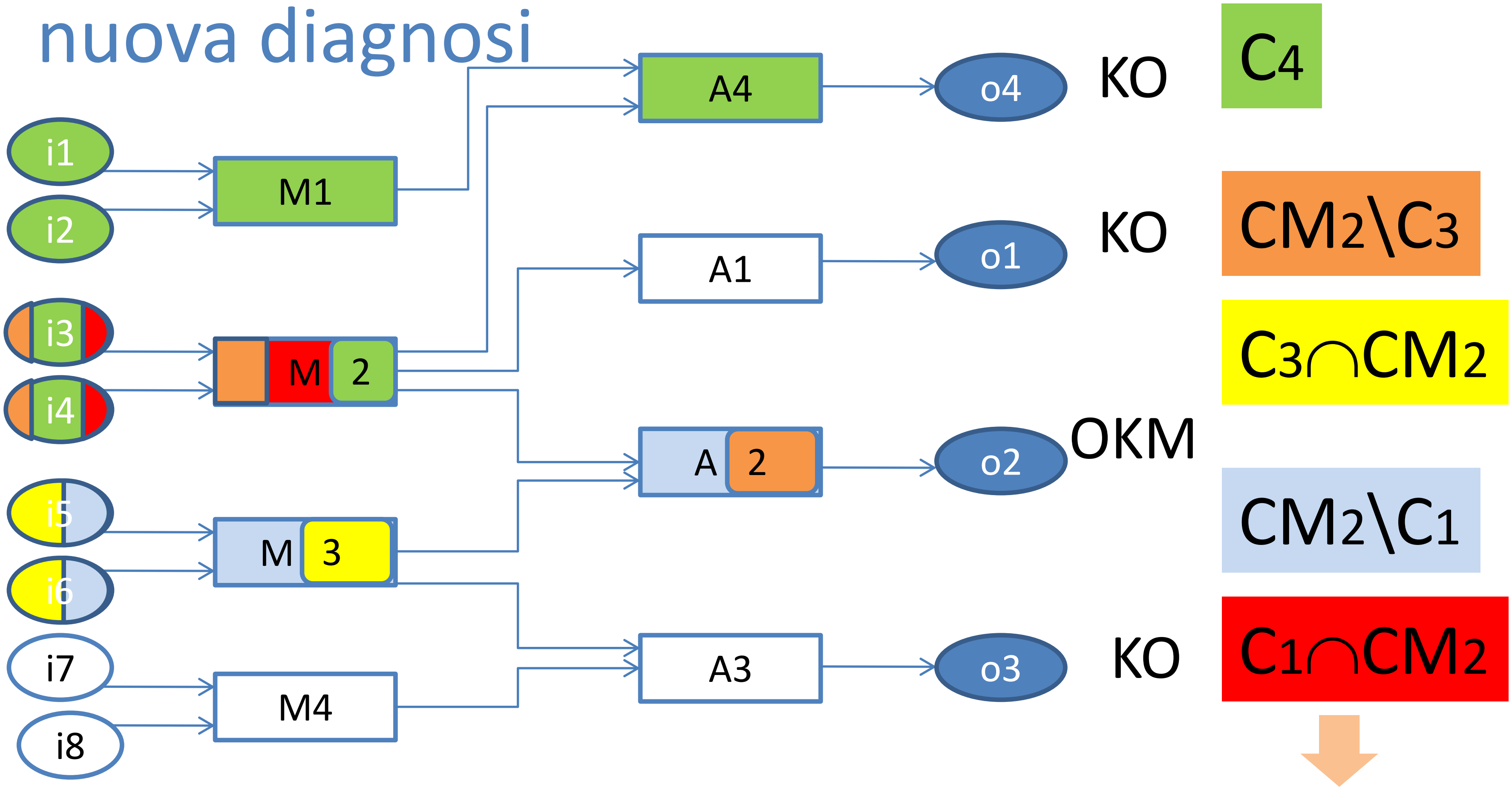
Stesso problema, altre diagnosi



Queste candidate si aggiungono a quelle della pagina precedente

{M2,M3} {i3,M3} {i4,M3} {M2,i5} {i3,i5} {i4,i5} {M2,i6} {i3,i6} {i4,i6} {M1,A1,A2,M3} {M1,A1,A2,i5} {M1,A1,A2,i6} {i1,A1,A2,M3} {i1,A1,A2,i5} {i1,A1,A2,i6} {i2,A1,A2,M3} {i2,A1,A2,i5} {i2,A1,A2,i6}{A4,A1,A2,M3} {A4,A1,A2,i5} {A4,A1,A2,i6}{i1,A1,A2,M3} {i1,A1,A2,i5} {i1,A1,A2,i6}{i2,A1,A2,M3} {i2,A1,A2,i5} {i2,A1,A2,i6}

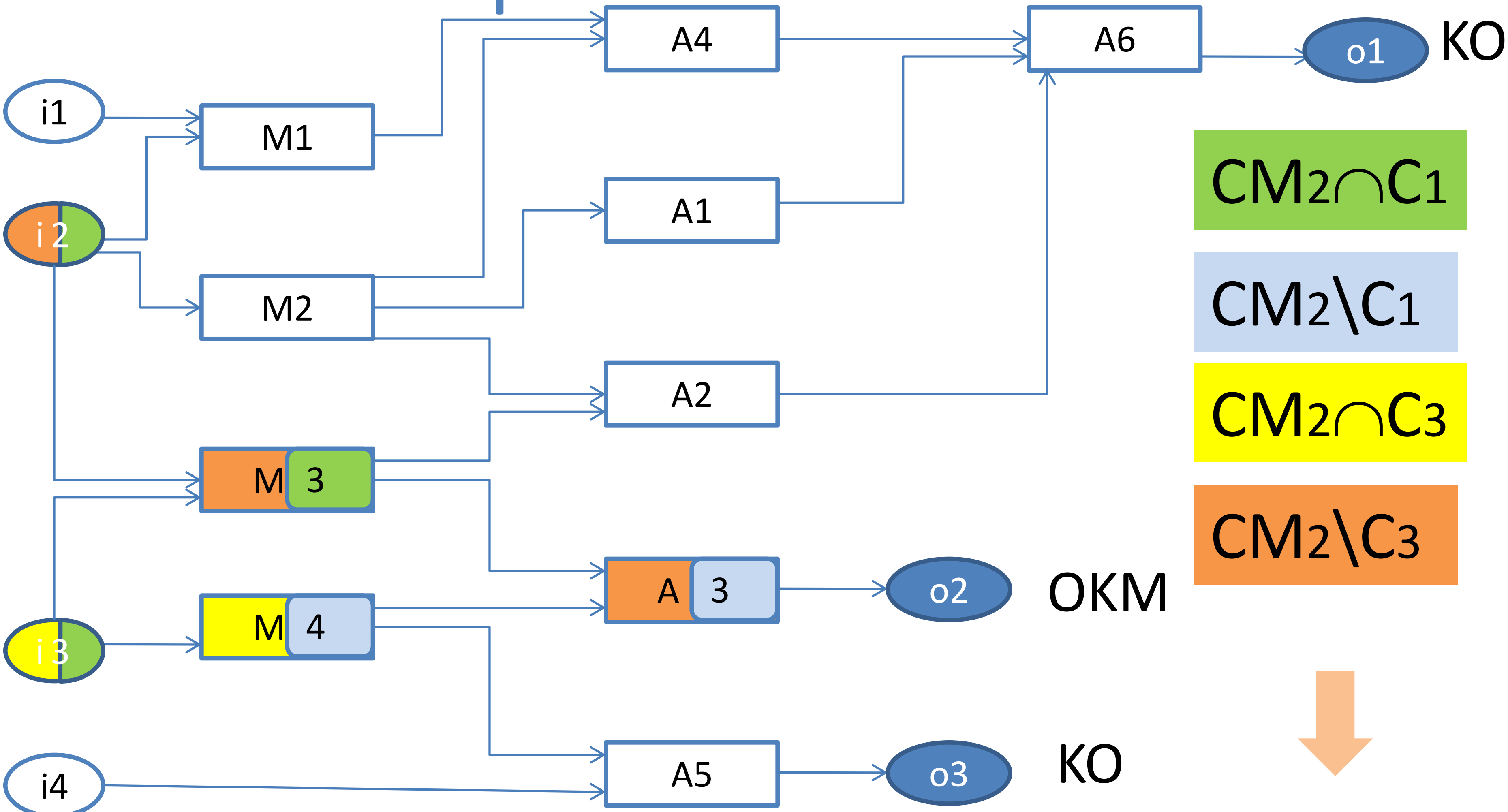
Stesso problema, altro calcolo, nessuna nuova diagnosi



MHS: tutte le diagnosi sono condivise dagli insiemi di candidate già calcolati

{M2,M3} {M2,i5}{M2,i6}
{i3,M3} {i3,i5}{i3,i6}
{i4,M3} {i4,i5}{i4,i6}

Altro esempio



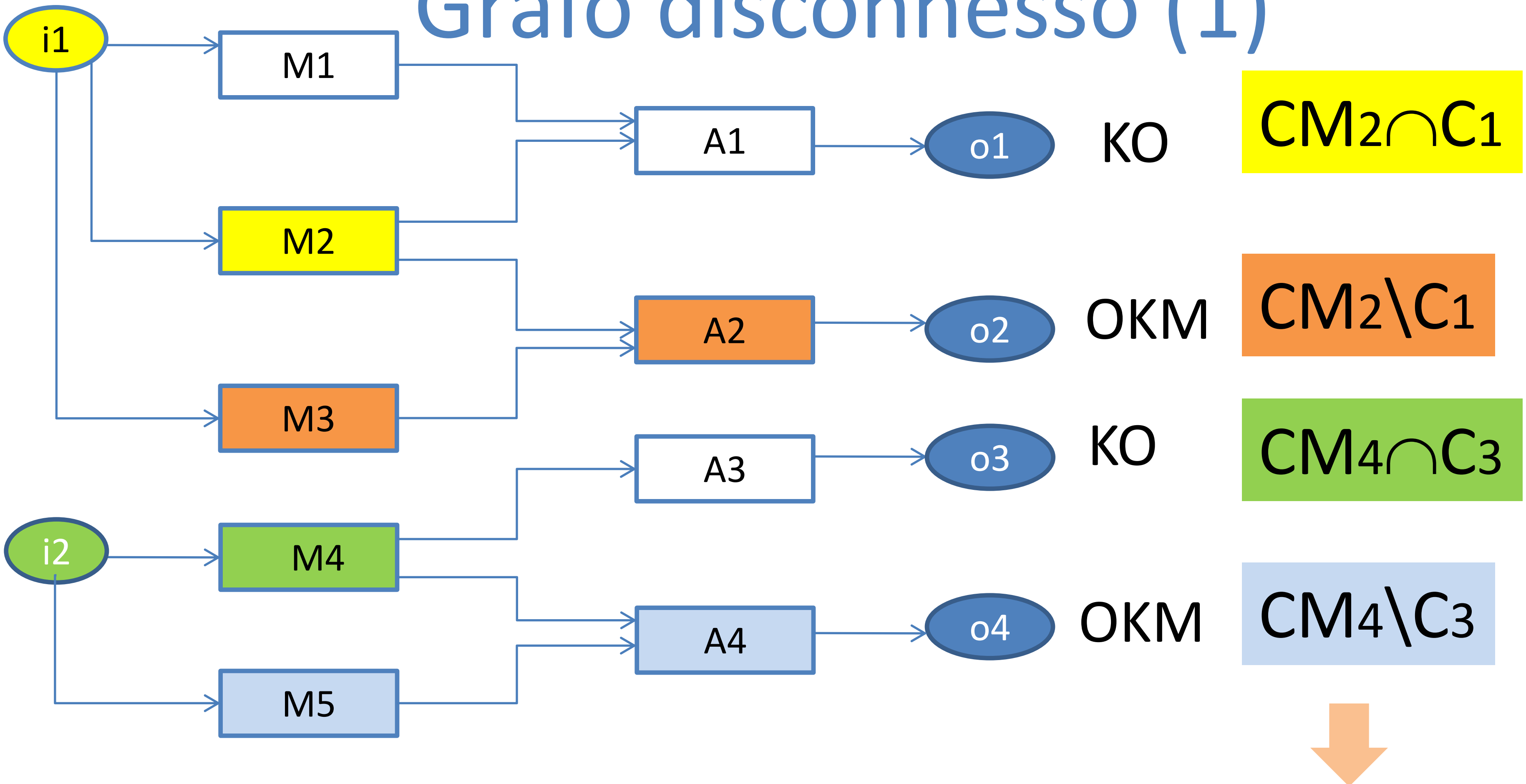
MHS (ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento)

{M3,M4}
{i2,M4}
{A3,i3}

Grafo disconnesso

- La specifica operazionale di diagnosi (minimale) con mascheramento vale anche per grafi disconnessi
- L’insieme delle diagnosi (minimali) con mascheramento relative all’intero sistema è dato dal “prodotto cartesiano” degli insiemi delle diagnosi (minimali) con mascheramento relative ai grafi connessi componenti sse nessuno di essi è vuoto

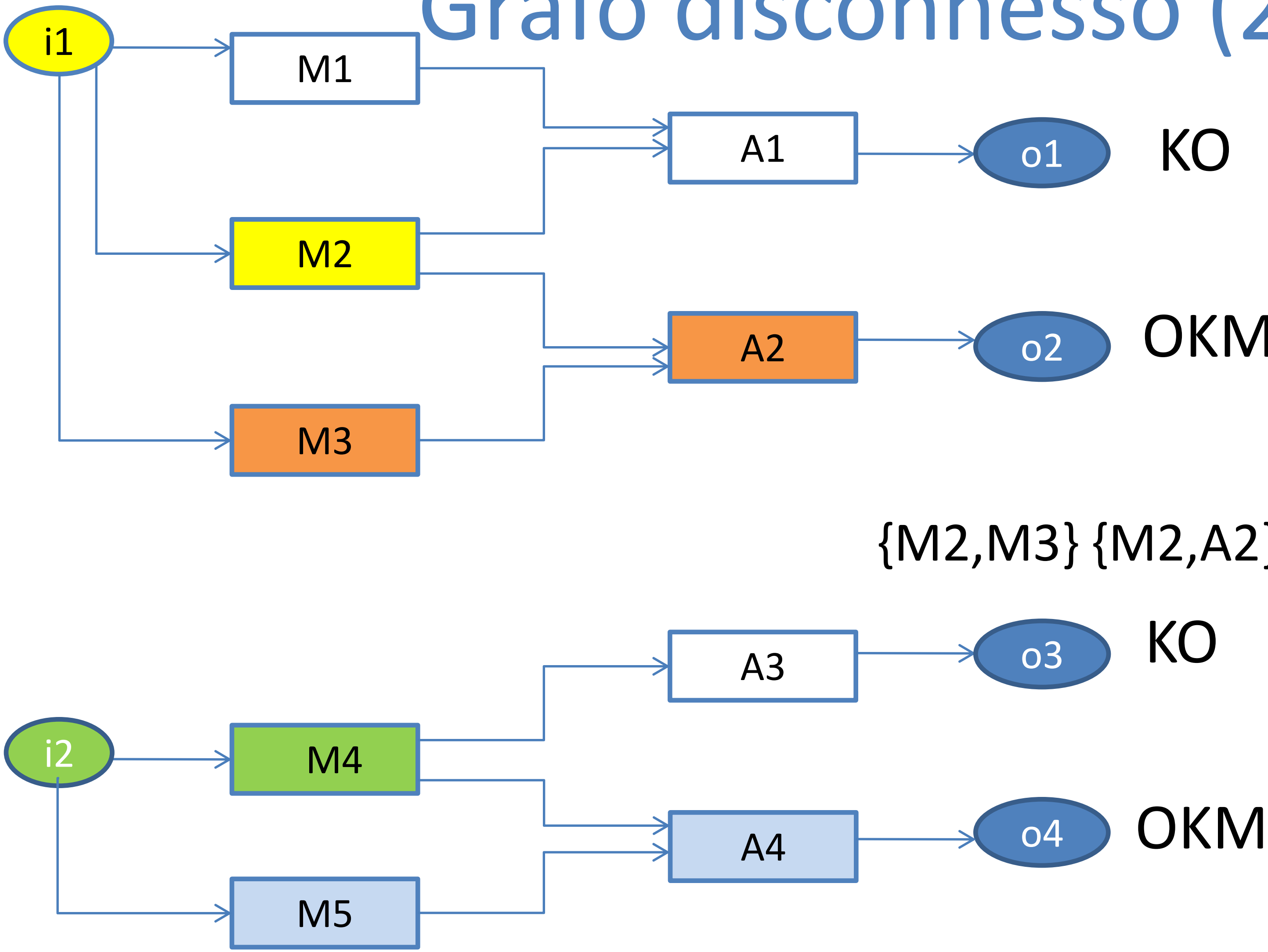
Grafo disconnesso (1)



MHS
(ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento)

{M2,M3,M4,M5} {M2,A2,M4,M5}{M2,M3,M4,A4}
{M2,A2,M4,A4}{i1,M3,M4,M5} {i1,A2,M4,M5}
{i1,M3,M4,A4} {i1,A2,M4,A4} {M2,M3,i2,M5}
{M2,A2,i2,M5}{M2,M3,i2,A4} {M2,A2,i2,A4}
{i1,M3,i2,M5} {i1,A2,i2,M5}{i1,M3,i2,A4} {i1,A2,i2,A4}

Grafo disconnesso (2)



$CM_2 \cap C_1$

$CM_2 \setminus C_1$

{M2,M3} {M2,A2} {i1,M3} {i1,A2}

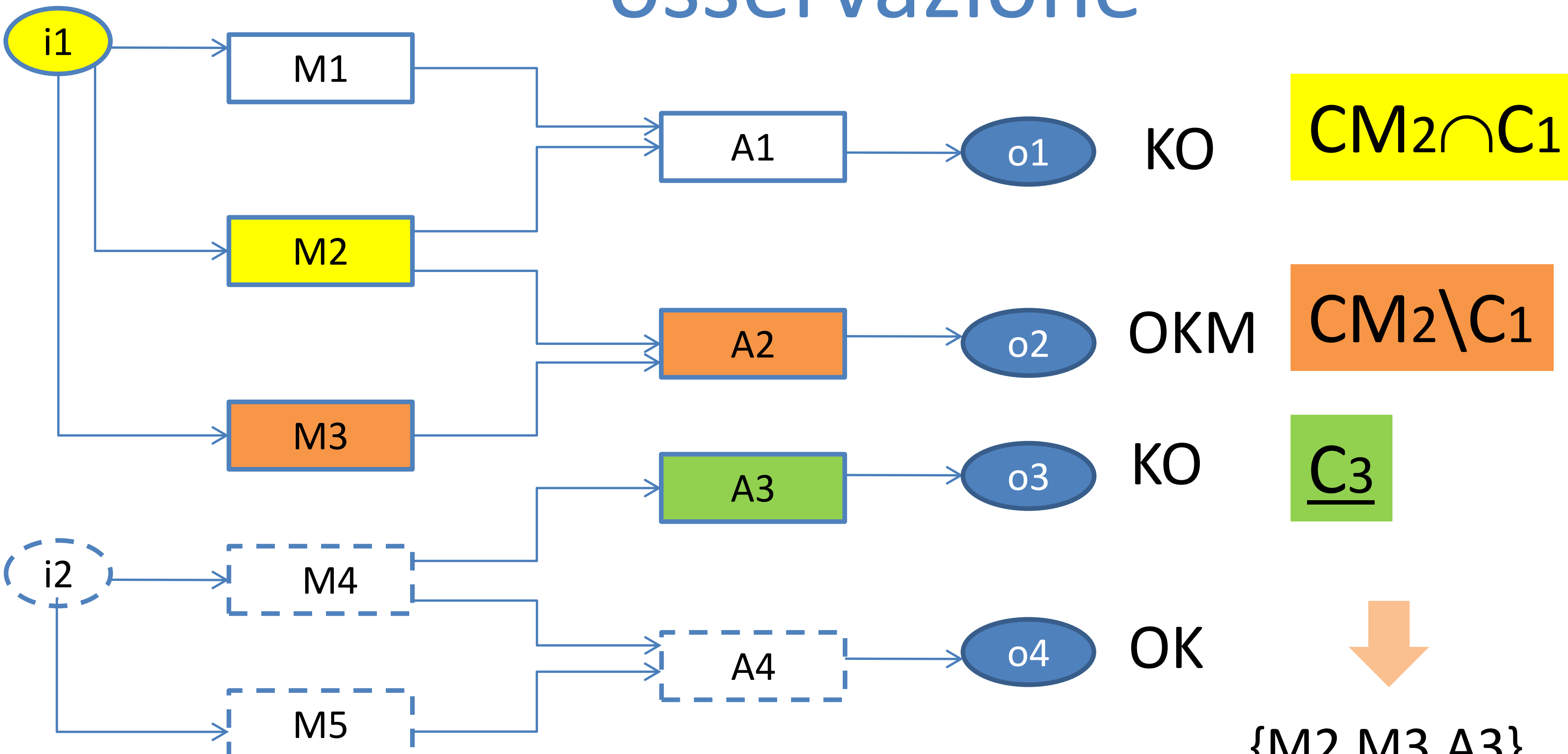
$CM_4 \cap C_3$

$CM_4 \setminus C_3$

{M4,M5} {M4,A4} {i2,M5} {i2,A4}

Le candidate della pagina precedente sono il “prodotto cartesiano” dei due insiemi di candidate di questa pagina

Grafo disconnesso, altra osservazione



MHS (ciascuno di essi è una diagnosi minimale con mascheramento)

{M2,M3,A3}
{M2,A2,A3}
{i1,M3,A3}
{i1,A2,A3}

Calcolo degli hitting set minimali (MHS)

Esempio.

Supponiamo di dovere calcolare i MHS della seguente collezione di insiemi (che costituisce il parametro di ingresso dell’algoritmo):

- {B3,B4}
- {A1,A2,B4}
- {A2,A5,B3,B4}

(La soluzione è: {B4} {A1,B3} {A2,B3})

Strutture dati

Sia A la collezione degli insiemi considerata, N il numero degli insiemi che appartengono alla collezione ed M il numero di elementi (distinti) che compaiono nell'unione di tali insiemi.

Esempio (cont.)

- A: {{B3,B4}, {A1,A2,B4} ,{A2,A5,B3,B4}}
- N = 3, M = 5 = |{A1,A2,B3,B4,A5}|

Strutture dati (cont.)

Ogni elemento degli N insiemi è univocamente identificata da un intero appartenente all’intervallo [1 .. M].

Esempio (cont.)

- {A1,A2,B3,B4,A5}
- 1 2 3 4 5

Strutture dati (cont.)

La collezione A di N insiemi può essere rappresentata come una matrice $A_{N,M}$, dove il valore del componente $a_{i,j}$ della matrice è 1 se l'elemento j appartiene all'insieme i, 0 altrimenti.

Strutture dati (cont.)

Esempio (cont.)

{A1, A2, B3, B4, A5}

	1	2	3	4	5
{B3,B4} 1	0	0	1	1	0
{A1,A2,B4} 2	1	1	0	1	0
{A2,B3,B4,A5} 3	0	1	1	1	1

Algoritmo (*brute force*): passi

- i $\leftarrow$ 1
- CICLO: Generare il sottoinsieme s_i (non vuoto e distinto rispetto a quelli già generati) degli M interi considerati
- Controllare se s_i è un HS (lo è se il vettore somma delle colonne corrispondenti a tutti gli elementi che appartengono a s_i non contiene alcuno 0); se non lo è, goto INC
- (Se lo è,) controllare, nell'elenco degli HS già trovati (inizialmente vuoto), se $\exists$ un HS h tale che $h \subset s_i$; se è così (cioè, se s_i sicuramente non è un MHS), goto INC

Algoritmo (*brute force*): passi (cont.)

- (Se $\nexists$ h $\subset s_i$,) controllare, nell'elenco degli HS già trovati, se $\exists$ degli HS h tali che $s_i \subset$ h; se è così, sostituire cumulativamente nell'elenco degli HS tutti questi h con s_i; goto INC
- (Se non è così,) aggiungere s_i all'elenco degli HS
- INC: $i \leftarrow i + 1$
- Se $i \leq 2^M - 1$, goto CICLO
- FINE

Esempio (cont.)

1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Elenco HS

- {4}
- {1,3}
- {2,3}

Sottoinsiemi generati

- {1}
- {2}
- {3}
- {4}
- {5}
- {1,2}
- {1,3}
- {1,4} ($\{4\} \subseteq \{1,4\}$)
- {1,5}
- {2,3}

Esempio (cont.)

1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Elenco HS

- {4}
- {1,3}
- {2,3}

Sottoinsiemi generati

- {2,4} ($\{4\} \subseteq \{2,4\}$)
- {2,5}
- {3,4} ($\{4\} \subseteq \{3,4\}$)
- {3,5}
- {4,5} ($\{4\} \subseteq \{4,5\}$)
- {1,2,3} ($\{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$)
- {1,2,4} ($\{4\} \subseteq \{1,2,4\}$)
- {1,2,5}
- {1,3,4} ($\{4\} \subseteq \{1,2,4\}$)
- {1,3,5} ($\{1,3\} \subseteq \{1,3,5\}$)
- {1,4,5} ($\{4\} \subseteq \{1,4,5\}$)

Esempio (cont.)

1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Elenco HS

- {4} cioè {B4}
- {1,3} cioè {A1,B3}
- {2,3} cioè {A2,B3}

Alla fine dell'esecuzione, questi sono i MHS

- Sottoinsiemi generati
- {2,3,4} $(\{4\} \subseteq \{2,4\})$
- {2,3,5} $(\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\})$
- {2,4,5} $(\{4\} \subseteq \{2,4,5\})$
- {3,4,5} $(\{4\} \subseteq \{3,4,5\})$
- {1,2,3,4} $(\{4\} \subseteq \{1,2,3,4\})$
- {1,2,3,5} $(\{1,3\} \subseteq \{1,2,3,5\})$
- {1,2,4,5} $(\{4\} \subseteq \{1,2,4,5\})$
- {1,3,4,5} $(\{4\} \subseteq \{1,3,4,5\})$
- {2,3,4,5} $(\{4\} \subseteq \{1,3,4,5\})$
- {1,2,3,4,5} $(\{4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\})$

Osservazione 1

- Se i sottoinsiemi vengono generati in ordine di cardinalità non decrescente, la condizione $s_i \subset h$ è sempre falsa $\rightarrow$ effettuare il controllo relativo è inutile

(Dimostrazione

- $\forall h$ contenuto nell'elenco degli HS, $|s_i| \geq |h|$
- Se $|s_i| = |h| \rightarrow s_i \not\subset h$
  in particolare $h \neq s_i$ perché, per costruzione, s_i è distinto da tutti i sottoinsiemi già generati, fra cui h
- Se $|s_i| > |h| \rightarrow s_i \not\subset h$)

Osservazione 2

Se i sottoinsiemi vengono generati in ordine di cardinalità non decrescente, gli HS che vengono inseriti nell’elenco (nello stesso ordine di generazione) sono MHS

Osservazione 3

Se un singoletto è un HS, esso è un MHS e nessun suo superinsieme è un MHS $\rightarrow$ generare i suoi superinsiemi è inutile

Esempio (cont.)

1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1

h = {4} è un MHS, tutti i suoi superinsiemi s_i sono HS ma nessuno di essi è stato posto nell'elenco degli HS perché $h \subset s_i$

Algoritmo (*brute force*) migliorato: passi

- Generare tutti i sottoinsiemi singoletti degli M interi considerati; salvare ogni singoletto che è un HS, cioè la cui colonna non contiene alcuno 0, in un elenco a parte (distinto da quello degli HS), sottrarre il singoletto dall'insieme degli M interi considerati e rimuovere tale colonna dalla matrice A
- $i \leftarrow 1$
- CICLO: Generare, secondo un ordine di cardinalità non decrescente, il sottoinsieme s_i (non vuoto e distinto rispetto a quelli già generati) degli M' interi rimasti, a partire dalla cardinalità 2

Algoritmo (*brute force*) migliorato: passi (cont.)

- Controllare se s_i è un HS; se non lo è, goto INC
- (Se lo è,) controllare, nell'elenco degli HS già trovati, se $\exists$ un HS h tale che $h \subset s_i$; se è così, goto INC
- (Se non è così,) aggiungere s_i all'elenco degli HS
- INC: $i \leftarrow i + 1$
- Se $i \leq 2^{M'} - M' - 1$, goto CICLO
- (altrimenti) aggiungere all'elenco degli HS l'elenco dei singoletti HS
- FINE

Esempio (cont.)

1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Elenco singoletti HS

- {4}

Elenco HS

- {1,3}
- {2,3}

Sottoinsiemi generati

- {1,2}
- {1,3}
- {1,5}
- {2,3}
- {2,5}
- {3,5}
- {1,2,3} $(\{1,3\} \subseteq \{1,2,3\})$
- {1,2,5}
- {1,3,5} $(\{1,3\} \subseteq \{1,3,5\})$
- {2,3,5} $(\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\})$
- {1,2,3,5} $(\{1,3\} \subseteq \{1,2,3,5\})$

Osservazione 4

La cardinalità massima di un MHS di una collezione di N insiemi è N $\rightarrow$ generare sottoinsiemi (degli M' elementi rimasti) di cardinalità maggiore di N è inutile