Algebraische Topologie II ff

Ingo Skupin

1. August 2017

9 Homologische Algebra

(9.4) Proposition. Sei G eine abelsche Gruppe und

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Dann is auch die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Hom}(A,G) \xleftarrow[f^*]{} \operatorname{Hom}(B,G) \xleftarrow[g^*]{} \operatorname{Hom}(C,G) \longleftarrow 0$$

exakt. $\operatorname{Hom}(-,G)$ ist *links-exakt.*

Beweis. (i) Exaktheit bei $\operatorname{Hom}(C,G)$. Zeige g^* ist injektiv. Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}(C,G)$ mit $g^*(\varphi) = \varphi \circ g = 0$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[dr, "0"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \Longrightarrow \varphi = 0$$

(ii) Exaktheit bei $\operatorname{Hom}(B,G)$:

(a) $\operatorname{im} g^* \subseteq \ker f^*$, also $f^* \circ g^* = 0$. Aber $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = 0^* = 0$.

(b) $\ker f^* \subseteq \operatorname{im} g^*$: Sei $\varphi\colon B \to G \in \ker f^*$, $0 = f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, two heads, "g"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[drr, two heads, "\pi"] & & C \\ G & & B/\ker g \arrow[ll, "\overline{\varphi}"] \arrow[u, "\overline{g}"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist $\ker g = \operatorname{im} f \subseteq \ker \varphi$ und daraus folgt die eindeutige Existenz eines $\overline{\varphi}\colon B/\ker g \to G$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Ebenso induziert g einen Morphismus $\overline{g}\colon B/\ker g \to C$ mit $\overline{g} \circ \pi = g$. Außerdem ist $\overline{g}$ injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus und somit

$$\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi = \overline{\varphi} \circ \overline{g}^{-1} \circ g = g^*(\overline{\varphi} \circ \overline{g}^{-1}).$$

□

(9.5) Kommentar. Man sagt, dass der kontravariante Funktor $\operatorname{Hom}(-,G) =: F$ links-exakt ist. Beachte, dass F allerdings i.A. nicht exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in exakte Sequenzen überführt.

$$0 \longleftarrow \boxed{\mathrm{Hom}(A,G)} \xleftarrow[f^*]{} \mathrm{Hom}(B,G) \xleftarrow[g^*]{} \mathrm{Hom}(C,G) \longleftarrow 0$$

ist also i.A. nicht exakt.

(9.6) Erinnerung. eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "\theta"] & C \arrow[l, bend left, "r"] \arrow[loop above, "id_C"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit $g \circ r = id_C$ *spaltet.* Äquivalent:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[loop above, "id_A"] & B \arrow[l, bend left, "l"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit $l \circ f = id_A$.

In diesem Fall gilt $B \cong A \oplus C$.

(9.7) Zusatz. Ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

exakt und spaltet, so ist auch

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(A,G) \xleftarrow[f^*]{} \mathrm{Hom}(B,G) \xleftarrow[g^*]{} \mathrm{Hom}(C,G) \longleftarrow 0 \qquad (*)$$

exakt und spaltet.

Beweis. ist $l\colon B \to A$ linksinvers zu f, $l \circ f = id_A$, so ist $id_{\mathrm{Hom}(A,G)} = id_A^* = (l \circ f)^* = f^* \circ l^*$, also ist f^* surjektiv. Außerdem ist nun l^* offenbar rechtsinvers zu f^*, also eine Spaltung von $(*)$. $\square$

(9.8) Definition. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann heißt eine kure exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

eine *freie Auflösung*, wenn F eine frei abelsche Gruppe ist.

(9.9) Kommentar. Als Untergruppe (vie α) von F ist R selbst eine frei abelsche Gruppe. Ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von F, so ist $\varepsilon = (\beta(e_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von A. Und ist $(r_j)_{j\in J}$ eine Basis von R, so erzeugt $(\alpha(r_j))_{j\in J}$ die Relationen von ε (*Relationen auf* ε: $f \in F$ mit $\beta(f) = 0$).

(9.10) Beispiel. 1. ist A selbst frei, s okann man $F = A$ und $\beta = id_A$ wählen (dann $R = (0)$).

2. Ist $A = \mathbb{Z}_4$, so ist

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung.

3. Ist A beliebig, so betrachte A als menge und setze $F = \mathbb{F}(A)$ und $\pi\colon F \to A$ der Homorphismus, der auf der Basis $(i(a))_{a\in A}$ durch $\pi(i(a)) = a$ gegeben ist. Natürlich ist dann $\pi(2 \cdot a) = \pi(1 \cdot (2a)) = 2a$ und $\pi(0_A) = \pi(0_{\mathbb{F}(A)}) = 0_A$. Ist $R = \ker \pi$ und $j\colon R \hookrightarrow F$ die Inklusion, so ist

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

offenbar exakt (weil π surjektiv ist). Das ist die *Standardauflösung* $S(A)$ von A:

$$S(A) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

Ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

exakt, so ist

$$? \longleftarrow \mathrm{Hom}(A, G) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}(B, G) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}(C, G) \longleftarrow 0 \qquad (*)$$

ist exakt, aber f^* i.A. nicht surjektiv. Naheliegend könnte man $(*)$ mit

$$\operatorname{coker} f^* := \mathrm{Hom}(A, G)/\operatorname{im} f^*$$

und

$$\nu\colon \mathrm{Hom}/A, G) \to \operatorname{coker} f^*$$

fortsetzen, was aber so aussieht, dass es von zu vielen Wahlen abhängt.

(9.11) Definition. Seien A und G abelsche Gruppen und $S(A)$ die Standardauflösung von A. Dann nennt man

$$\mathrm{Ext}(A, G) := \operatorname{coker} i^* = \mathrm{Hom}(R, g)/\operatorname{im} i^*,$$
$$i^*\colon \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}/R, G)$$

das *Extensionsprodukt* (kurz: Ext-Produkt) *von A und G.*