Aufgaben zur Veranstaltung
Analysis 2, SoSe 2020

Dr. Thomas Eifert, Yvonne Albrecht M.Sc. FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 12 14./15.06.2021

1. Sind die folgenden Funktionen im Punkt $(0,0)$ stetig?

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen

   a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

   b) $g(x,y) = e^{(x-1)^2+(y-2)^2}$

   c) $h(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

3. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = e^{x-1} \cdot y^2$ und der Punkt $(x_0, y_0) = (1,3)$.

   a) Wie lautet die Richtungsableitung im Punkt (x_0, y_0) in Richtung der Vektoren
   i. $\vec{w}_1 = \binom{1}{1}$ ii. $\vec{w}_2 = \binom{1}{0}$ iii. $\vec{w}_3 = \binom{0}{1}$

   b) In welcher Richtung wird die Steigung maximal und wo minimal? Welche Werte nimmt die Steigung in diesen Richtungen an?

4. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Ableitung der implizit definierten Funktion:
$$F(x,y) = x^3 + y^3 = a$$

5. **(Präsentation der Lösung)** Betrachten Sie die Strömungsgeschwindigkeitsvektoren an den Raumkoordinaten (x,y,z).

   a) Sei zunächst ein Fluss mit dem Geschwindigkeitsvektor
$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Zeigen Sie, dass ein solches Feld quellen- und wirbelfrei ist.

   b) Sei nun das Feld mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit parallel zur x-Achse für $x > 0$ gemäß
$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Zeigen Sie nun, dass dieses Feld Quellen hat, jedoch wirbelfrei ist.