Analysis 2

Hausaufgabenblatt 05

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 02. Mai 2021

1. Berechnen Sie das folgende Volumen über dem Gebiet G. Die angegebenen Gleichungen in G stellen die Ränder des Integrationsgebiets dar.

   (a) $\int\int_G x \cdot y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $G = \{(x,y) \ \mid y^2 = 2x, x = 2\}$

Lösung:
Wir haben also den Integrationsbereich A gegeben mit

$$A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x}\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\int_A x \cdot y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} x \cdot y^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\left[\frac{xy^3}{3} \right]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x\sqrt{2x}^3}{3} - \frac{-x\sqrt{2x}^3}{3} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{4\sqrt{2}x^{5/2}}{3} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_0^2 x^{5/2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left[\frac{2x^{7/2}}{7} \right]_0^2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^{7/2}}{7} \\
&= \frac{128}{21}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) $\int\int_G x \cdot e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $G = \{(x,y) \ \mid x = 0, y = 0, 2x + y = 1\}$

Lösung:
Wir haben also den Integrationsbereich A gegeben mit

$$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le 1 - 2x\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\int_G x \cdot e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} x \cdot e^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\left[x \cdot e^{x+y}\right]_0^{1-2x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot e^{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot e^{x}\,\mathrm{d}x \\
&= e\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot e^{x}\,\mathrm{d}x \\
&= e\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x}\,\mathrm{d}x \right) - \left(\left[xe^{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= e\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}} - \left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \left[e^{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= e\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}} - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \right) \right) - \left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \left(\sqrt{e} - 1\right) \right) \\
&= e\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \right) - 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} \\
&= e\left(1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right) - 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} \\
&= e - \frac{3e}{2\sqrt{e}} - 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} \\
&= e - \frac{3e}{2\sqrt{e}} - 1 + \frac{e}{2\sqrt{e}} \\
&= e - \sqrt{e} - 1
\end{aligned}$$

$\square$

2. Gegeben seien folgende zwei Funktionen:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - x^2$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die durch die Funktionen begrenzt wird.

Lösung:
Es ist die Flächenmaßzahl der Grundfläche gegeben mit:

$$F = \int_A 1 \mathrm{d}A = \int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{1-x^2} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} [y]_{x+1}^{1-x^2} \, \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \left(x^2 + x\right) \, \mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$$

Dann ist der Schwerpunkt der Fläche mit den Schwerpunktskoordinaten (x_s, y_s) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F} \int_A x \, \mathrm{d}A = 3 \int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{1-x^2} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 6 \int_{-1}^{0} x \int_{x+1}^{1-x^2} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 6 \int_{-1}^{0} -x \left(x^2 + x\right) \, \mathrm{d}x \\
&= -6 \int_{-1}^{0} x^3 + x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= -6 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} \\
&= -6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{F} \int_A y \, \mathrm{d}A = 6 \int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{1-x^2} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 6 \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x+1}^{1-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 3 \int_{-1}^{0} \left((1 - x^2)^2 - (x + 1)^2\right) \, \mathrm{d}x \\
&= 3 \int_{-1}^{0} \left(x^4 - 3x^2 - 2x\right) \, \mathrm{d}x \\
&= 3 \left[\frac{x^5}{5} - x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= 3 \left(\frac{1}{5} + 1 - 1\right) \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Damit befindet sich der Schwerpunkt an den Koordinaten $(x_s, y_s) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$. □

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale auf den angegebenen Gebieten

(a) $\int\int_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $A: 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x,y \ge 0$

Lösung:
Sei $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$. Dann gilt:

$$\int\int_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_A (r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int\int_A r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Einsetzen des Integrationsgebiets ergibt:

$$\int\int_A r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{4}\,\mathrm{d}\phi = \left[\frac{15\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{8}$$

□

(b) $\int\int_A e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $A: x^2+y^2 \le 4,\ x,y \ge 0$

Lösung:
Sei $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$. Dann gilt:

$$\int\int_A e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_A e^{-r^2} \frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int\int_A re^{-r^2}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Einsetzen des Integrationsgebiets ergibt:

$$\begin{aligned}
& \int\int_A re^{-r^2}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
= \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi \int_0^2 re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \qquad \left(u = -r^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -2r \iff \mathrm{d}r = -\frac{\mathrm{d}u}{2r}\right) \\
= \quad & -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi \int_{r=0}^2 e^u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\phi \\
= \quad & -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\,[e^u]_{r=0}^2\,\mathrm{d}\phi \\
= \quad & -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\left(\frac{1}{e^4} - 1\right)\mathrm{d}\phi \\
= \quad & -\frac{e^{-4}-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \qquad \left(u = \sin\phi \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = \cos\phi \iff \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}u}{\cos\phi}\right) \\
= \quad & \frac{1-e^{-4}}{2}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} u\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \frac{1-e^{-4}}{2}\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
= \quad & \frac{1-e^{-4}}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
= \quad & \frac{1-e^{-4}}{4}
\end{aligned}$$

□

4. Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das uneigentliche mehrdimensionale Integral

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Lösung:

Sei $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Wir substituieren

$$u = -r^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -2r \iff \mathrm{d}r = -\frac{\mathrm{d}u}{2r}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & -\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & -\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \left[e^{u}\right]_0^{\infty}\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & -\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & -\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (0-1)\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\phi \\ = \quad & \frac{1}{2}\left[\phi\right]_0^{2\pi} \\ = \quad & \pi \end{aligned}$$

□

5. Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\int_1^4 \int_1^3 \int_0^2 (x^2 - 2yz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \int_1^4 \int_1^3 \int_0^2 (x^2 - 2yz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
= & \int_1^4 \int_1^3 \left[x^2 z - yz^2\right]_0^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
= & \int_1^4 \int_1^3 \left(2x^2 - 4y\right) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
= & \int_1^4 \left[2x^2 y - 2y^2\right]_1^3 \,\mathrm{d}x \\
= & \int_1^4 \left(6x^2 - 18 - (2x^2 - 2)\right) \,\mathrm{d}x \\
= & \int_1^4 \left(4x^2 - 16\right) \,\mathrm{d}x \\
= & \left[\frac{4x^3}{3} - 16x\right]_1^4 \\
= & \left(\frac{256}{3} - 64 - \left(\frac{4}{3} - 16\right)\right) \\
= & \ 36
\end{aligned}$$

$\square$