

Analysis 2

Hausaufgabenblatt 01

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 05. April 2021

1. Berechnen Sie die 1. Ableitungen von

(a) $f(x) = \sin(\cos(x))$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin(\cos(x)) \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))\end{aligned}$$

□

(b) $g(x) = e^{x^3 - \sin^2(x)}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{x^3 - \sin^2(x)} \\ &= (3x^2 - \cos(x) \cdot 2 \sin(x)) \cdot e^{x^3 - \sin^2(x)}\end{aligned}$$

□

(c) $h(x) = 3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx} &= \frac{d}{dx} (3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4) \\ &= 6x + 4 - 2x \cdot 4(3 - x^2)^3 \\ &= -8x(3 - x^2)^3 + 6x + 4\end{aligned}$$

□

(d) $k(x) = \frac{1}{\tan(\arcsin(x))}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \frac{dk}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\tan(\arcsin(x))} \\
 &= \frac{d}{dx} \frac{\cos(\arcsin(x))}{\sin(\arcsin(x))} \\
 &= {}^1 \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\
 &= \frac{-2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \\
 &= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\
 &= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\
 &= \frac{-x^2 - (1-x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\
 &= -\frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

□

(e) $l(x) = e^{3 \ln(x^2)}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{3 \ln(x^2)} \\
 &= \frac{d}{dx} \left(e^{\ln(x^2)} \right)^3 \\
 &= \frac{d}{dx} (x^2)^3 \\
 &= \frac{d}{dx} x^6 \\
 &= \frac{d}{dx} 6x^5
 \end{aligned}$$

□

${}^1 \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \implies \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

(f) $m(x) = e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x}+17)} \cdot e^{x \cdot \cos^2(5\sqrt{x}+17)}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x}+17)} \cdot e^{x \cdot \cos^2(5\sqrt{x}+17)} \\ &= \frac{d}{dx} e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x}+17) + x \cdot \cos^2(5\sqrt{x}+17)} \\ &= \frac{d}{dx} e^{x(\sin^2(5\sqrt{x}+17) + \cos^2(5\sqrt{x}+17))} \\ &= \frac{d}{dx} e^x \\ &= e^x\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ für die folgenden Vektoren:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = |0| + |2| + |5| + |1| = 8$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|0|, |2|, |5|, |1|\} = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 = |9| + |0| + |6| + |0| = 15$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{9^2 + 0^2 + 6^2 + 0^2} = 3\sqrt{13}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|9|, |0|, |6|, |0|\} = 9$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_1 = 9$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{29}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 4$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 = 12$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 2\sqrt{26}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 10$$

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = -\frac{y}{x^2 \left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = \frac{1}{x \left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

□

(b) $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \tan(x^2 + y^2) = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \tan(x^2 + y^2) = \frac{2y}{\cos^2(x^2 + y^2)}\end{aligned}$$

□

(c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{9 - x^2 - y^2} = -\frac{2x}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{9 - x^2 - y^2} = -\frac{2y}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\end{aligned}$$

□

4. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - 4y^2$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = 4x - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = -8y - 3x\end{aligned}$$

□

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}, x \neq 0, y \neq 0$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}\end{aligned}$$

□

(c) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sin(2x + 3y) = 2 \cos(2x + 3y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sin(2x + 3y) = 3 \cos(2x + 3y)\end{aligned}$$

□

5. Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

(a) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^8}$

Lösung:

Sei die Kurve $x = y^4$ gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^2}{y^8 + y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2y^2} = \infty$$

Damit ist f im Nullpunkt nicht stetig. □

(b) $f(x, y) = \frac{x^3+x^2-y^4+y^2}{x^2+y^2}$

Lösung:

f ist genau dann *stetig ergänzbar* im Nullpunkt, wenn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existiert.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2 - y^4 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) - r^4 \sin^4(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 0 + 1 - 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Damit ist f im Nullpunkt stetig ergänzbar mit $f(0, 0) = 1$. □