Analysis 2

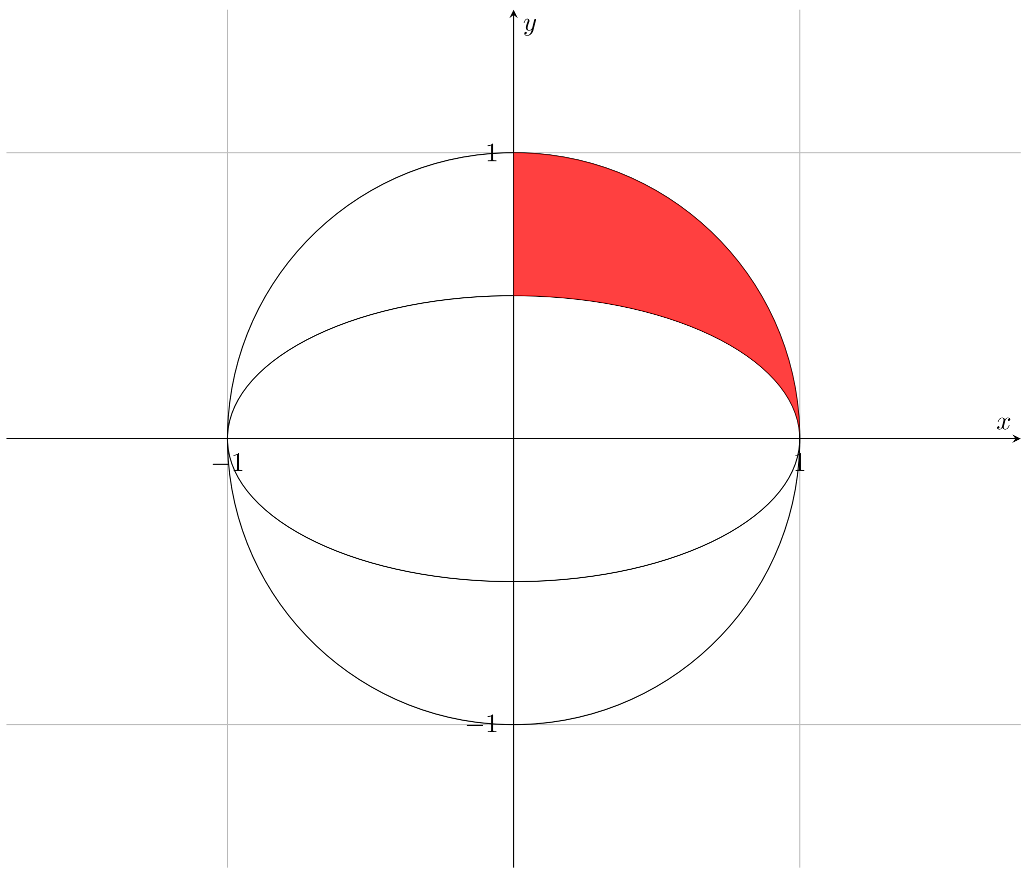
Hausaufgabenblatt 06

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 09. Mai 2021

1. Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x, y) = x + y$ über die Fläche
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$
Skizzieren Sie zunächst die Fläche.

Lösung:



Wir sehen, dass die Ellipsengleichung die untere und die Kreisgleichung die obere Schranke bilden. Damit formen wir unser Integrationsgebiet wie folgt um:
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Dann können wir wie folgt die Fläche berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} - \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1-x^2}{8}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{3(1-x^2)}{8}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{1}{=} -\frac{1}{4}\int_{x=0}^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}\right]_0^1 + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

$\square$

[1] $u = 1 - x^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \iff \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2x}$

2. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_A x \cdot y \, \mathrm{d}A$$

über dem Integrationsgebiet A gegeben durch die Ungleichungen

$$-2 \leq y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

(a) in kartesischen Koordinaten,

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A x \cdot y \, \mathrm{d}A &= \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \cdot y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{y(4-y^2)}{2} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (4y - y^3) \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (4y - y^3) \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

(b) in Polarkoordinaten.

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A x \cdot y \, \mathrm{d}A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos\phi \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \int_0^2 r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\phi \\
&= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&\overset{2}{=} -4 \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \, \mathrm{d}u \\
&= -4 \left[\frac{\cos^2\phi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

3. In einer Bakterienkultur sind zu Beginn einer Beobachtung 6000 Bakterien vorhanden. Dabei ist bekannt, dass sich bei diesen Bakterien die Anzahl in 5 Stunden verdreifacht.

(a) Begründen Sie, dass dieses Wachstum durch die Funktionsgleichung:

$$N(t) = 6.000 \cdot 1.24573^t$$

beschrieben werden kann.

Lösung:
Wir erkennen, dass es sich um ungebremstes Wachstum handelt mit:

- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$,
- $N(0) = 6000$,
- $N(5) = 3 \cdot 6000 = 18000$.

Damit können wir den Wachstumsfaktor k berechnen mit:

$$(N(t) = 6000 \cdot e^{kt}) \wedge (N(5) = 18000) \implies 6000 \cdot e^{5k} = 18000 \iff e^{5k} = 3 \iff k = \frac{\ln(3)}{5}$$

Damit gilt:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\frac{\ln(3)}{5}t} \approx 6000 \cdot 1.24573^t$$

$\square$

(b) Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung:

$$N(3) = 6000 \cdot 1.24573^3 = 11599.066023123102 \approx 11599$$

$\square$

(c) Nach wie viel Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht?

Lösung:

$$\begin{aligned} & 10 \cdot N(0) && = N(t') \\ \equiv\ & 60000 && = 6000 \cdot e^{\frac{\ln(3)}{5}t'} \\ \equiv\ & 10 && = e^{\frac{\ln(3)}{5}t'} \\ \equiv\ & \ln(10) && = \frac{\ln(3)}{5}t' \\ \equiv\ & t' && = \frac{5\ln(10)}{\ln(3)} \approx 10.479516\ldots \end{aligned}$$

$\square$

[2] $u = \cos\phi \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi \iff \mathrm{d}\phi = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin\phi}$

4. Die relative Gewichtszunahme einer Fischzucht betrage pro Woche 5%. Anfangs sei insgesamt 1t Fisch im Fischteich. Der Fischer beabsichtigt, wöchentlich 55kg Fisch zu entnehmen.
   (a) Entscheiden Sie, ob damit eine Überfischung gegeben ist.

Lösung:
Um herauszufinden, ob hier um eine Überfischung gegeben ist, berechnen wir:

$$\frac{a}{k} = \frac{55}{0.05} = 1100 \geq 1000 = y_0 \implies \text{exponentielle Abnahme.}$$

Damit wissen wir, dass eine Überfischung gegeben ist. □

   (b) Wann kommt die Produktion ggfls. zum Erliegen?

Lösung:
Wir erkennen[3], dass es sich um (parasitengesteuertes) Wachstum mit *Störung ersten Grades* handelt mit:

- $y_n = (y_0 - \frac{a}{k}) \cdot (1 + k \cdot \Delta t)^n + \frac{a}{k}$,
- $y_0 = 1000$,
- $a = 55$,
- $\Delta t = 1$ Woche.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & y_n && = \left(y_0 - \frac{a}{k}\right) \cdot (1 + k \cdot \Delta t)^n + \frac{a}{k} \\ \implies & 0 && = (1000 - 1100) \cdot 1.05^n + 1100 \\ \equiv & 0 && = -100 \cdot 1.05^n + 1100 \\ \equiv & 100 \cdot 1.05^n && = 1100 \\ \equiv & 1.05^n && = 11 \\ \equiv & n && = \log_{1.05}(11) \approx 49.1471\ldots \end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass in der 50. Woche die Fischpopulation zum Erliegen kommt. □

[3] Wir entscheiden uns hier für *diskretes* Wachstum, da wir des Kontexts wegen von *Wochen* als diskrete Zeiteinheit ausgehen.

5. In einem Zoo bricht unter einer Affenart eine Krankheit aus, für die nur sie anfällig ist. Als dem Personal die Krankheit auffällt, sind bereits 4 Affen der 204 Affen infiziert, nach 4 Wochen sind bereits 24 Affen erkrankt.

   (a) Ermittle anhand der gegebenen Werte eine Funktionsgleichung, mit der sich die Ausbreitung der Krankheit unter den Affen beschreiben lässt.

   Lösung:
   Wir erkennen, dass es sich um (logistisches) Wachstum mit *Störung zweiter Ordnung* handelt mit:

   - $y(t) = \frac{R}{\frac{R-y_0}{y_0} \cdot e^{-kRt} + 1}$,
   - $y(0) = 4$,
   - $R = 204$,
   - $y(4) = 24$.

   Damit können wir den Wachstumsfaktor k berechnen mit:

$$\left(y(t) = \frac{204}{\frac{204-4}{4} \cdot e^{-k \cdot 204 \cdot t} + 1} \right) \wedge (y(4) = 24)$$

$$\implies 24 = \frac{204}{50e^{-816k} + 1} \iff \dots \iff e^{-816k} = \frac{3}{20} \iff k = \frac{\ln(\frac{20}{3})}{816} \approx 0.0023249019$$

   Damit gilt:

$$y(t) = \frac{204}{50e^{-\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t} + 1}$$

   □

   (b) Wann wird die Hälfte der Affen erkrankt sein?

   Lösung:

$$\begin{aligned}
& y(t) && = \frac{204}{50e^{-\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t} + 1} \\
\implies \quad & 102 && = \frac{204}{50e^{-\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t} + 1} \\
\equiv \quad & 50e^{-\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t} + 1 && = 2 \\
\equiv \quad & e^{-\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t} && = \frac{1}{50} \\
\equiv \quad & -\frac{\ln(\frac{20}{3})}{4} t && = \ln\left(\frac{1}{50}\right) \\
\equiv \quad & t && = \frac{4\ln\left(\frac{1}{50}\right)}{-\ln\left(\frac{20}{3}\right)} \\
\equiv \quad & t && = \frac{4\ln(50)}{\ln\left(\frac{20}{3}\right)} \approx 8.2483407198
\end{aligned}$$

   Damit wissen wir, dass in der 9. Woche die Hälfte der Affen erkrankt sind. □

(c) Nach 3 Monaten[4] glaubt ein Arzt, ein Gegenmittel gefunden zu haben. Aus Vorsicht injiziert er es zunächst nur 10% der noch gesunden Affen. Wie vielen Affen wird das Medikament verabreicht?

Lösung:

$$\begin{aligned}
y(12) &= \frac{204}{50e^{-\frac{\ln\left(\frac{20}{3}\right)}{4}\cdot 12}+1} \\
&= \frac{204}{50e^{-3\ln\left(\frac{20}{3}\right)}+1} \\
&= \frac{204}{50\left(e^{\ln\left(\frac{20}{3}\right)}\right)^{-3}+1} \\
&= \frac{204}{50\left(\frac{3}{20}\right)^{3}+1} \\
&= \frac{204}{\frac{27}{160}+1} \\
&= \frac{204}{\frac{187}{160}} \\
&= \frac{1920}{11} \approx 174,55
\end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass 175 Affen erkrankt sind $\implies$ es gibt 29 gesunde Affen $\implies$ 3 Affen bekommend as Medikament verabreicht. □

[4] Seien 3 Monate = 12 Wochen