Analysis 2

Hausaufgabenblatt 09

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 30. Mai 2021

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0$$

Lösung:

Es gilt:

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \quad \iff \quad \underbrace{(3xy + 2y^2)}_{p(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{q(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x + 4y \quad \neq \quad 2x + 2y = q_x \quad \lightning$$

Integrierenden Faktor (Euler-Multiplikator) $\mu(x) = e^{\int m(x)\,\mathrm{d}x}$ bzw. $\mu(y) = e^{\int m(y)\,\mathrm{d}y}$ bestimmen:

- Untersuchung, ob μ nur von y abhängt:

$$m = \frac{q_x - p_y}{p} = \frac{2x + 2y - (3x + 4y)}{3xy + 2y^2} = \frac{-x - 2y}{3xy + 2y^2} \quad \lightning$$

- Untersuchung, ob μ nur von x abhängt:

$$m = \frac{p_y - q_x}{q} = \frac{3x + 4y - (2x + 2y)}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x(x + 2y)} = \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

Damit erhalten wir den integrierenden Faktor mit:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = cx \qquad (\text{sei } c = 1)$$

Einsetzen in die DGL:

$$\underbrace{(3x^2y + 2xy^2)}_{p(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^3 + 2x^2y)}_{q(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x^2 + 4xy \quad = \quad 3x^2 + 4xy = q_x \quad \checkmark$$

Wir wissen:

$$\underbrace{F = \int q\,\mathrm{d}y = x^3y + x^2y^2 + c(x)}_{F_y = q} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{3x^2y + 2xy^2 + c'(x) = 3x^2y + 2xy^2}_{F_x = p} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = c$$

Und insgesamt gilt damit:

$$F = x^3y + x^2y^2 + c$$

$\square$

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \sin(x) \cdot y = e^{x-\cos(x)} \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{e}$$

Lösung:
Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = e^{\int \sin(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_h = ce^{-\cos(x)}$$

Variation der Konstanten:

$$y = c(x) \cdot e^{-\cos(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = c'(x) \cdot e^{-\cos(x)} + c(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y' - \sin(x) \cdot y && = e^{x-\cos(x)} \\
\equiv \quad & c'(x) \cdot e^{-\cos(x)} + c(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)} - \sin(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\cos(x)} && = e^{x-\cos(x)} \\
\equiv \quad & c'(x) \cdot e^{-\cos(x)} && = e^{x-\cos(x)} \\
\equiv \quad & c'(x) && = e^{x} \\
\equiv \quad & \int 1 \,\mathrm{d}c && = \int e^{x} \,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & c(x) + c_1 && = e^{x} + c_2 \\
\equiv \quad & c(x) && = e^{x} + \tilde{c}
\end{aligned}$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung der DGL mit:

$$y = (e^x + \tilde{c}) \cdot e^{-\cos(x)} = ce^{-\cos(x)} + e^{x-\cos(x)}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$\frac{1}{e} = ce^{-\cos(0)} + e^{0-\cos(0)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{e} = \frac{c}{e} + \frac{1}{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 0$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = e^{x-\cos(x)}$$

□

3. Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = g(x)$$

für die Störfunktionen

(a) $g(x) = x + 1$

Lösung:
Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{\int 1 \, \mathrm{d}x} = ce^x$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = c_1 x + c_2$):

$$y_p = c_1 x + c_2 \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c_1$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y_p' - y_p && = x + 1 \\ \equiv \quad & c_1 - (c_1 x + c_2) && = x + 1 \\ \equiv \quad & (-c_1)x + (c_1 - c_2) && = x + 1 \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = -1 \quad \wedge \quad c_2 = -2 && \end{aligned}$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = y_h + y_p = ce^x - x - 2$$

□

(b) $g(x) = e^x$

Lösung:
Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{\int 1 \, \mathrm{d}x} = ce^x$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = c_1 x e^x$):

$$y_p = c_1 x e^x \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c_1 e^x + c_1 x e^x$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y_p' - y_p && = e^x \\ \equiv \quad & c_1 e^x + c_1 x e^x - c_1 x e^x && = e^x \\ \equiv \quad & c_1 e^x && = e^x \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = 1 && \end{aligned}$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = y_h + y_p = ce^x + xe^x$$

□

(c) $g(x) = \cos(x)$

Lösung:
Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{\int 1 \, \mathrm{d}x} = ce^x$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$):

$$y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c_2 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y_p' - y_p && = \cos(x) \\ \equiv \quad & c_2 \cos(x) - c_1 \sin(x) - (c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) && = \cos(x) \\ \equiv \quad & (c_2 - c_1) \cos(x) + (c_1 - c_2) \sin(x) && = \cos(x) \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = y_h + y_p = ce^x + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$$

□

(d) $g(x) = x \cdot e^{-x}$

Lösung:
Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{\int 1 \, \mathrm{d}x} = ce^x$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x}$):

$$y_p = c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c_1 e^{-x} - c_1 xe^{-x} - c_2 e^{-x}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y_p' - y_p && = xe^{-x} \\ \equiv \quad & c_1 e^{-x} - c_1 xe^{-x} - c_2 e^{-x} - \left(c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x}\right) && = xe^{-x} \\ \equiv \quad & (-2c_1) xe^{-x} + (c_1 - 2c_2) e^{-x} && = xe^{-x} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad c_2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = y_h + y_p = ce^x - \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}$$

□

4. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$x \cdot y' - y = x^2 \cdot \cos(x) \quad \text{mit} \quad y(\pi) = 2\pi$$

Lösung:

Wir formen um:

$$x \cdot y' - y = x^2 \cdot \cos(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \cos(x)$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = e^{\int x^{-1}\,\mathrm{d}x} = e^{\ln|x| + \tilde{c}} = cx$$

Variation der Konstanten:

$$y = c(x) \cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y' - \frac{1}{x} \cdot y && = x \cdot \cos(x) \\
\equiv\ & c'(x) \cdot x + c(x) - \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x && = x \cdot \cos(x) \\
\equiv\ & c'(x) \cdot x && = x \cdot \cos(x) \\
\overset{x \neq 0}{\equiv}\ & c'(x) && = \cos(x) \\
\equiv\ & \int 1\,\mathrm{d}c && = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & c(x) + c_1 && = \sin(x) + c_2 \\
\equiv\ & c(x) && = \sin(x) + \tilde{c}
\end{aligned}$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung der DGL mit:

$$y = (\sin(x) + \tilde{c})x = cx + x\sin(x)$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$2\pi = c\pi + \pi\sin(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 2$$

Und insgesamt gilt damit:

$$y = x(\sin(x) + 2)$$

$\square$