Analysis 2

Hausaufgabenblatt 10

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 06. Juni 2021

1. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{5x}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Lösung:

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' - 6y' + 9y = 0 \\ \implies\quad & \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \\ \implies\quad & \alpha = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 9} \\ \equiv\quad & \alpha = 3 \\ \implies\quad & y_h = \lambda_1 e^{3x} + \lambda_2 x e^{3x} \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} & y_p = ce^{5x} \\ \implies\quad & y_p' = 5ce^{5x} \\ \implies\quad & y_p'' = 25ce^{5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 2e^{5x} \\ \equiv\quad & 25ce^{5x} - 30ce^{5x} + 9ce^{5x} = 2e^{5x} \\ \equiv\quad & 4ce^{5x} = 2e^{5x} \\ \implies\quad & c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt für die allgemeine Gleichung:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{3x} + \lambda_2 x e^{3x} + \frac{e^{5x}}{2} \quad \implies \quad y' = 3\lambda_1 e^{3x} + 3\lambda_2 x e^{3x} + \lambda_2 e^{3x} + \frac{5e^{5x}}{2}$$

Mit den Anfangswerten gilt dann:

$$\begin{aligned} & y(0) && = 0 \\ \equiv\quad & \lambda_1 e^0 + \lambda_2 e^0 \cdot 0 + \frac{e^0}{2} && = 0 \\ \equiv\quad & \lambda_1 && = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & y'(0) && = 1 \\ \equiv\quad & 3\lambda_1 e^0 + 3\lambda_2 e^0 \cdot 0 + \lambda_2 e^0 + \frac{5e^0}{2} && = 1 \\ \equiv\quad & 3\lambda_1 + \lambda_2 && = -\frac{3}{2} \\ \equiv\quad & \lambda_2 && = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = \frac{e^{3x}\left(e^{2x} - 1\right)}{2}$$

□

2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung

   (a) $y'' + 9y' = 12x + 18 + 54x^2$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' + 9y' = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \alpha^2 + 9\alpha = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \alpha = -\frac{9}{2} \pm \frac{9}{2} \\ \equiv \quad & \alpha \in \{-9, 0\} \\ \Longrightarrow \quad & y_h = \lambda_1 e^{-9x} + \lambda_2 \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} & y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ \Longrightarrow \quad & y_p' = 3ax^2 + 2bx + c \\ \Longrightarrow \quad & y_p'' = 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' + 9y_p' && = 12x + 18 + 54x^2 \\ \equiv \quad & 6ax + 2b + 9 \cdot (3ax^2 + 2bx + c) && = 12x + 18 + 54x^2 \\ \equiv \quad & 27ax^2 + (6a + 18b)x + (2b + 9c) && = 12x + 18 + 54x^2 \\ \Longrightarrow \quad & a = 2 \quad \wedge \quad b = 0 \quad \wedge \quad c = 2 \quad \wedge \quad d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-9x} + \lambda_2 + 2x^3 + 2x + d = \lambda_1 e^{-9x} + \lambda_2 + 2x^3 + 2x$$

$\square$

(b) $y'' - 6y' + 18y = 27e^{3x}$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y'' - 6y' + 18y = 0 \\
\implies\quad & \alpha^2 - 6\alpha + 18 = 0 \\
\implies\quad & \alpha = 3 \pm \sqrt{3^2 - 18} \\
\equiv\quad & \alpha = 3 \pm \sqrt{-9} \\
\equiv\quad & \alpha = 3 \pm 3i \\
\implies\quad & y_h = e^{3x}\left(\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)\right)
\end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}
& y_p = ce^{3x} \\
\implies\quad & y_p' = 3ce^{3x} \\
\implies\quad & y_p'' = 9ce^{3x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_p'' - 6y_p' + 18y_p = 27e^{3x} \\
\implies\quad & 9ce^{3x} - 18ce^{3x} + 18ce^{3x} = 27e^{3x} \\
\implies\quad & 9ce^{3x} = 27e^{3x} \\
\implies\quad & c = 3
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = e^{3x}\left(\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)\right) + 3e^{3x}$$

$\square$

(c) $y'' + 6y' + 25y = 183\sin(2x) + 21\cos(2x)$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y'' + 6y' + 25y = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \alpha^2 + 6\alpha + 25 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \alpha = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 25} \\
\equiv\quad & \alpha = -3 \pm \sqrt{-16} \\
\equiv\quad & \alpha = -3 \pm 4i \\
\Longrightarrow\quad & y_h = e^{-3x}\left(\lambda_1 \cos(4x) + \lambda_2 \sin(4x)\right)
\end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}
& y_p = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x) \\
\Longrightarrow\quad & y_p' = 2\alpha\cos(2x) - 2\beta\sin(2x) \\
\Longrightarrow\quad & y_p'' = -4\alpha\sin(2x) - 4\beta\cos(2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'' + 6y' + 25y && = 183\sin(2x) + 21\cos(2x) \\
\equiv\quad & \ldots && = 183\sin(2x) + 21\cos(2x) \\
\equiv\quad & 3 \cdot ((7\alpha - 4\beta)\sin(2x) + (4\alpha + 7\beta)\cos(2x)) && = 183\sin(2x) + 21\cos(2x) \\
\equiv\quad & (7\alpha - 4\beta)\sin(2x) + (4\alpha + 7\beta)\cos(2x) && = 61\sin(2x) + 7\cos(2x) \\
\Longrightarrow\quad & \alpha = 7 \quad \wedge \quad \beta = -3
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = e^{-3x}\left(\lambda_1\cos(4x) + \lambda_2\sin(4x)\right) + 7\sin(2x) - 3\cos(2x)$$

$\square$

3. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung

(a) $y'' - 6y' + 25y = 157 - 159x + 175x^2$

Lösung:

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y'' - 6y' + 25y = 0 \\
\implies \quad & \alpha^2 - 6\alpha + 25 = 0 \\
\implies \quad & \alpha = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 25} \\
\equiv \quad & \alpha = 3 \pm \sqrt{-16} \\
\equiv \quad & \alpha = 3 \pm 4i \\
\implies \quad & y_h = e^{3x} \left(\lambda_1 \cos(4x) + \lambda_2 \sin(4x)\right)
\end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}
& y_p = ax^2 + bx + c \\
\implies \quad & y_p' = 2ax + b \\
\implies \quad & y_p'' = 2a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_p'' - 6y_p' + 25y_p && = 157 - 159x + 175x^2 \\
\equiv \quad & 2a - 6 \cdot (2ax + b) + 25 \cdot (ax^2 + bx + c) && = 157 - 159x + 175x^2 \\
\equiv \quad & (25a)x^2 + (25b - 12a)x + (2a - 6b + 25c) && = 157 - 159x + 175x^2 \\
\equiv \quad & a = 7 \quad \wedge \quad b = -3 \quad \wedge \quad c = 5
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = e^{3x} \left(\lambda_1 \cos(4x) + \lambda_2 \sin(4x)\right) + 7x^2 - 3x + 5$$

$\square$

(b) $y'' - 8y' + 16y = -14e^{4x}$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' - 8y' + 16y = 0 \\ \implies\quad & \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0 \\ \implies\quad & \alpha = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 16} \\ \equiv\quad & \alpha = 4 \\ \implies\quad & y_h = \lambda_1 e^{4x} + \lambda_2 x e^{4x} \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} & y_p = cx^2 e^{4x} \\ \implies\quad & y_p' = 4cx^2 e^{4x} + 2cxe^{4x} \\ \implies\quad & y_p'' = 16cx^2 e^{4x} + 16cxe^{4x} + 2ce^{4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' - 8y_p' + 16y_p && = -14e^{4x} \\ \equiv\quad & 16cx^2e^{4x} + 16cxe^{4x} + 2ce^{4x} - 8 \cdot (4cx^2e^{4x} + 2cxe^{4x}) + 16cx^2e^{4x} && = -14e^{4x} \\ \equiv\quad & 2ce^{4x} = -14e^{4x} \\ \implies\quad & c = -7 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{4x} + \lambda_2 x e^{4x} - 7x^2 e^{4x}$$

$\square$

(c) $y'' + y' = 6\cos(2x) - 2\sin(2x)$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' + y' = 0 \\ \implies & \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \implies & \alpha = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ \equiv & \alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \\ \equiv & \alpha \in \{-1, 0\} \\ \implies & y_h = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} & y_p = \alpha \sin(2x) + \beta \cos(2x) \\ \implies & y_p' = 2\alpha \cos(2x) - 2\beta \sin(2x) \\ \implies & y_p'' = -4\alpha \sin(2x) - 4\beta \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' + y_p' && = 6\cos(2x) - 2\sin(2x) \\ \equiv & -4\alpha \sin(2x) - 4\beta \cos(2x) + 2\alpha \cos(2x) - 2\beta \sin(2x) && = 6\cos(2x) - 2\sin(2x) \\ \equiv & 2((-2\alpha - \beta)\sin(2x) + (\alpha - 2\beta)\cos(2x)) && = 6\cos(2x) - 2\sin(2x) \\ \equiv & (-2\alpha - \beta)\sin(2x) + (\alpha - 2\beta)\cos(2x) && = 3\cos(2x) - \sin(2x) \\ \implies & \alpha = 1 \quad \wedge \quad \beta = -1 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 + \sin(2x) - \cos(2x)$$

□

4. Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y - 5z + \sin(x) \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} & y' && = z \\ \implies & y'' && = z' \\ \equiv & y'' && = \underbrace{-y - 5z + \sin(x)}_{z'} \\ \equiv & y'' && = -y - 5\underbrace{y'}_{z} + \sin(x) \\ \equiv & y'' + 5y' + y && = \sin(x) \end{aligned}$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' + 5y' + y = 0 \\ \implies & \alpha^2 + 5\alpha + 1 = 0 \\ \implies & \alpha = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} \\ \equiv & \alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \\ \implies & y_h = \lambda_1 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + \lambda_2 e^{\frac{\sqrt{21}-5}{2}x} \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} & y_p = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) \\ \implies & y_p' = \alpha \cos(x) - \beta \sin(x) \\ \implies & y_p'' = -\alpha \sin(x) - \beta \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' + 5y_p' + y_p && = \sin(x) \\ \equiv & -\alpha \sin(x) - \beta \cos(x) + 5(\alpha \cos(x) - \beta \sin(x)) + \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) && = \sin(x) \\ \equiv & 5\alpha \cos(x) - 5\beta \sin(x) && = \sin(x) \\ \implies & \alpha = 0 \quad \wedge \quad \beta = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + \lambda_2 e^{\frac{\sqrt{21}-5}{2}x} - \frac{\cos(x)}{5}$$

und

$$z = y' = -\frac{5+\sqrt{21}}{2}\lambda_1 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + \frac{\sqrt{21}-5}{2}\lambda_2 e^{\frac{\sqrt{21}-5}{2}x} + \frac{\sin(x)}{5}$$

□

5. Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = y + 4z + x$$
$$z' = -4y + 9z + x$$

mit den Anfangswerten $y(0) = z(0) = 1$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ und $z(x)$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& y' && = y + 4z + x \qquad \left(\equiv \quad z = \frac{y' - y - x}{4}\right) \\
\implies \; & y'' && = y' + 4z' + 1 \\
\equiv \; & y'' && = y' + 4\underbrace{(-4y + 9z + x)}_{z'} + 1 \\
\equiv \; & y'' && = y' - 16y + 36z + 4x + 1 \\
\equiv \; & y'' && = y' - 16y + 36 \cdot \underbrace{\frac{y' - y - x}{4}}_{z} + 4x + 1 \\
\equiv \; & y'' && = 10y' - 25y - 5x + 1 \\
\equiv \; & y'' - 10y' + 25y && = -5x + 1
\end{aligned}
$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& y'' - 10y' + 25y = 0 \\
\implies \; & \alpha^2 - 10\alpha + 25 = 0 \\
\implies \; & \alpha = 5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 25} \\
\equiv \; & \alpha = 5 \\
\implies \; & y_h = \lambda_1 e^{5x} + \lambda_2 x e^{5x}
\end{aligned}
$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$
\begin{aligned}
& y_p = ax + b \\
\implies \; & y_p' = a \\
\implies \; & y_p'' = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y_p'' - 10y_p' + 25y_p && = -5x + 1 \\
\equiv \; & -10a + 25(ax + b) && = -5x + 1 \\
\equiv \; & 25ax + 25b - 10a && = -5x + 1 \\
\implies \; & a = -\frac{1}{5} \quad \wedge \quad b = -\frac{1}{25}
\end{aligned}
$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{5x} + \lambda_2 x e^{5x} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$$

und

$$
\begin{aligned}
z = \frac{y' - y - x}{4} &= \frac{1}{4}\left(5\lambda_1 e^{5x} + 5\lambda_2 x e^{5x} + \lambda_2 e^{5x} - \frac{1}{5} - \lambda_1 e^{5x} - \lambda_2 x e^{5x} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25} - x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4\lambda_1 e^{5x} + \lambda_2 e^{5x} + 4\lambda_2 x e^{5x} - \frac{4x}{5} - \frac{4}{25}\right)
\end{aligned}
$$

□

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned} & y(0) && = 1 \\ \equiv\ & \lambda_1 - \frac{1}{25} && = 1 \\ \implies & \lambda_1 && = \frac{26}{25} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & z(0) && = 1 \\ \equiv\ & \frac{1}{4}\left(4\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{4}{25}\right) && = 1 \\ \equiv\ & 4\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{4}{25} && = 4 \\ \equiv\ & 4\lambda_1 + \lambda_2 && = \frac{104}{25} \\ \equiv\ & \frac{104}{25} + \lambda_2 && = \frac{104}{25} \\ \implies & \lambda_2 && = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$y = \frac{26e^{5x}}{25} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$$

und

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{104e^{5x}}{25} - \frac{4x}{5} - \frac{4}{25}\right) = \frac{26e^{5x}}{25} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$$

□