

# Analysis 2

## Hausaufgabenblatt 02

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 11. April 2021

1. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen

(a)  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$  an der Stelle  $(1, 1)$ .

**Lösung:**

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$f_x = e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2)$$

$$f_y = 2xye^{x^2+y^2}$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten  $\nabla f$  an der Stelle  $(1, 1)$  mit:

$$\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} f_x(1, 1) \\ f_y(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2 \\ 2e^2 \end{pmatrix}$$

□

(b)  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$  an der Stelle  $(1, 2, 3)$ .

**Lösung:**

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$ :

$$f_x = 3x^2$$

$$f_y = 2y$$

$$f_z = 1$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten  $\nabla f$  an der Stelle  $(1, 2, 3)$  mit:

$$\nabla f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} f_x(1, 2, 3) \\ f_y(1, 2, 3) \\ f_z(1, 2, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)^2$$

Geben Sie die Tangentialebene in den folgenden Punkten  $(x_0, y_0)$  an:

(a)  $(1, 0)$

**Lösung:**

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 - 2)$$

$$f_y = 4y(x^2 + y^2 - 2)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 0) = 1$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von  $f$  am Punkt  $(1, 0)$  mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

(b)  $(0, 2)$

**Lösung:**

Wir haben die partiellen Ableitungen bereits in Aufgabenteil (a) berechnet.

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von  $f$  am Punkt  $(0, 2)$  mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

3. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2y - y^3x + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  in Richtung  $\vec{v}$  ( $\|\vec{v}\| = 1$ ) ist gegeben mit

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle$$

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - y^3 \implies f_x(x_0, y_0) = f_x(1, 2) = -4 \\ f_y &= x^2 - 3y^2x \implies f_y(x_0, y_0) = f_y(1, 2) = -11 \end{aligned}$$

Sei nun  $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ :

$$\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun die Richtungsableitung wie folgt bilden:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}(f) &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{-12 - 22}{\sqrt{13}} \\ &= -\frac{34}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

□

4. Eine Funktion  $f$  habe in Richtung des Vektors  $\vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  eine Steigung von  $D_{\vec{v}_1}(f) = 20$  und in Richtung des Vektors  $\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  eine Steigung von  $D_{\vec{v}_2}(f) = 15\sqrt{2}$ .

(a) Wie lautet der Gradient dieser Funktion?

**Lösung:**

Es sind folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
 D_{\vec{v}_1}(f) &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v}_1 \rangle \\
 &\equiv 20 = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 20 = \frac{1}{5} \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 100 = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 100 = 3f_x(x_0, y_0) + 4f_y(x_0, y_0) \quad (1)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 D_{\vec{v}_2}(f) &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v}_2 \rangle \\
 &\equiv 15\sqrt{2} = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 15\sqrt{2} = \frac{1}{2} \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 30\sqrt{2} = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\equiv 30\sqrt{2} = \sqrt{2}f_x(x_0, y_0) + \sqrt{2}f_y(x_0, y_0) \\
 &\equiv 30 = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \\
 &\equiv 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Aus (1) – (2) folgt:

$$\begin{aligned}
 100 - 90 &= 3f_x(x_0, y_0) + 4f_y(x_0, y_0) - (3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0)) \\
 &\equiv 10 = f_y(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Einsetzen in (2) liefert dann:

$$\begin{aligned}
 90 &= 3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0) \\
 &\equiv 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 30 \\
 &\equiv 20 = f_x(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Damit gilt für den Gradienten  $\nabla f$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

□

- (b) Welches ist die größtmögliche Steigung, die die Funktion in diesem unbekannten Punkt annehmen kann?

**Lösung:**

Die maximale Steigung einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $(x_0, y_0)$  ist gegeben mit

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\|$$

Für unser Beispiel gilt damit

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = 10\sqrt{5}$$

□

- (c) Welchen Winkel hat der Vektor  $\vec{v}_1$  zum Gradienten?

**Lösung:**

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{v}_1, \nabla f(x_0, y_0) \rangle}{\|\vec{v}_1\| \|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{D_{\vec{v}_1}(f)}{\|\vec{v}_1\| \|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{D_{\vec{v}_1}(f)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Damit gilt  $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.4636$ .

□

5. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = (x^2 - y^3)^{\frac{1}{2}}$  und  $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$ . Bestimmen Sie

(a) den Gradienten von  $f$ .

**Lösung:**

Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^3}}$$

$$f_y = -\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 - y^3}}$$

Der Gradient  $\nabla f(x_0, y_0)$  ist dann gegeben mit

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^3}} \\ -\frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^2 - y_0^3}} \end{pmatrix}$$

□

(b) die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Lösung:**

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 1$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von  $f$  am Punkt  $(\sqrt{2}, 1)$  mit:

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

□

(c) die Richtungsableitung an der Stelle  $(x_0, y_0)$  in die Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

**Lösung:**

Die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  in Richtung  $\vec{v}$  ( $\|\vec{v}\| = 1$ ) ist gegeben mit

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}$$

□

- (d) die Richtung, in der die Steigung im Punkt  $(x_0, y_0)$  am größten ist und den Wert der größten Steigung.

**Lösung:**

Die Richtung, in der die Steigung am größten ist, entspricht dem Gradienten von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(\sqrt{2}, 1) \\ f_y(\sqrt{2}, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Der Wert der Steigung ist dann

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

□

- (e) die Richtung, in der die Steigung im Punkt  $(x_0, y_0)$  gleich Null ist.

**Lösung:**

Die Richtung, in der die Steigung im Punkt  $(x_0, y_0)$  gleich Null ist, entspricht einem Vektor  $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$  mit  $\vec{w} \perp \nabla f(x_0, y_0)$ .

Wir können ohne weiteren Beweis  $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  wählen.

□