Übungsblatt 03 12./13.04.2020

1. Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y) = 100 \cdot x^3 \cdot y + \frac{1}{y}$$

und der Punkt $P = (x_0, y_0) = (2; 0,1)$. Berechnen Sie:

   a) das vollständige Differential von f an der Stelle P.

   b) die maximale Fehlerfortpflanzung $|\triangle z_{max}|$, wenn x_0 um $0,01$ und y_0 um $0,02$ schwanken.

2. **Präsentation der Lösung** Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

$$f(x,y,z) = x + 2y + z^2 \qquad \text{mit} \qquad x(r,s) = \frac{r}{s}, \quad y(r,s) = r^2 + \ln(s), \quad z(r,s) = 2r$$

nach den Parametern r und s. Verwenden Sie hierzu die Kettenregel.

3. Finden Sie durch implizite Differentiation die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ der durch die folgenden Gleichungen der Form $F(x,y) = 0$ definierten Funktionen:

   a) $x^2y + xy^2 - 6 = 0$

   b) $x + \tan(xy) = 0$

   c) $2y^3 - x^2 - \sin(y) = 0$

4. **Präsentation der Lösung** Rechnen Sie nach, dass für die Funktion

$$f(x,y) = x^y$$

tatsächlich gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

5. **Präsentation der Lösung** Bestimmen Sie die relativen Extrema bzw. die Sattelpunkte folgender Funktionen

   a) $f(x,y) = 10(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

   b) $f(x,y) = x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4$

weitere, zusätzliche Übungsaufgaben

6. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz des jeweiligen Vektorfeldes:

   a) $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz + 2xy \\ -x^2y - x^2 \\ z - 3z^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Berechnen Sie die Taylorreihenentwicklung von

   $$f(x, y) = \sin(x)e^{y-1} + xy - \pi$$

   in $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ bis zum quadratischen Term.

8. Berechnen Sie die Extrema der folgenden Funktionen

   a) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
   b) $h(x, y, z) = g(x, xy, xyz)$

9. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$ für die Punkte:

x_k	-1	0	2	5
y_k	-7	-5	-1	5