Analysis 2

Hausaufgabenblatt 08

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 23. Mai 2021

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung.
   (a) $y' - 4y = 14x + 2 - 12x^2$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung ($y_h' + ay_h = 0$):

$$y_h' - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{-ax} = ce^{4x}$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = ax^2 + bx + c$):

$$y_p = ax^2 + bx + c \implies y_p' = 2ax + b$$

Wir setzen die partikuläre Lösung entsprechend ein:

$$\begin{aligned} & y' - 4y && = 14x + 2 - 12x^2 \\ \equiv\ & 2ax + b - 4(ax^2 + bx + c) && = -12x^2 + 14x + 2 \\ \equiv\ & -4ax^2 + (2a - 4b)x + (b - 4c) && = -12x^2 + 14x + 2 \end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$a = 3 \quad \wedge \quad b = -2 \quad \wedge \quad c = -1,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} + 3x^2 - 2x - 1$$

$\square$

(b) $y' - 8y = -6e^{5x}$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung:

$$y_h' - 8y_h' = 0 \implies y_h = ce^{8x}$$

Bestimmen der partikulären Lösung ($y_p = c_0 e^{5x}$):

$$y_p = c_0 e^{5x} \implies y_p' = 5ce^{5x}$$

Wir setzen die partikuläre Lösung entsprechend ein:

$$\begin{aligned} & y' - 8y && = -6e^{5x} \\ \equiv \quad & 5c_0 e^{5x} - 8c_0 e^{5x} && = -6e^{5x} \\ \equiv \quad & -3c_0 e^{5x} && = -6e^{5x} \end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$c_0 = 2,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{8x} + 2e^{5x}$$

$\square$

(c) $y' + 2y = 8\sin(x) - \cos(x)$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' + 2y_h = 0 \implies y_h = ce^{-2x}$$

Mit der partikulären Lösung ($y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)$)

$$y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x) \implies y_p' = c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' + 2y && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \equiv \quad & c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x) + 2(c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)) && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \equiv \quad & (c_0 + 2c_1)\cos(x) + (2c_0 - c_1)\sin(x) && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \implies \quad & c_0 + 2c_1 = -1 \quad \wedge \quad 2c_0 - c_1 = 8 \\ \implies \quad & c_0 = 3 \quad \wedge \quad c_1 = -2 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{-2x} + 3\sin(x) - 2\cos(x)$$

$\square$

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen
   (a) $y' - 4y = 15e^x$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{4x}$$

Mit der partikulären Lösung ($y_p = c_0 e^x$)

$$y_p = c_0 e^x \implies y_p' = c_0 e^x$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' - 4y && = 15e^x \\ \equiv \quad & c_0 e^x - 4c_0 e^x && = 15e^x \\ \equiv \quad & -3c_0 e^x && = 15e^x \\ \implies \quad & c_0 && = -5 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} - 5e^x$$

□

   (b) $y' - y = 9e^x$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - y_h = 0 \implies y_h = ce^x$$

Mit der partikulären Lösung ($y_p = c_0 x e^x$)

$$y_p = c_0 x e^x \implies y_p' = c_0(e^x + xe^x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' - y && = 9e^x \\ \equiv \quad & c_0(e^x + xe^x) - c_0 x e^x && = 9e^x \\ \equiv \quad & c_0 e^x (1 + x - x) && = 9e^x \\ \implies \quad & c_0 && = 9 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^x + 9e^x x$$

□

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:
$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y}, \quad y(1) = 1$$

Lösung:
Wir haben eine Bernoulli-DGL 1. Ordnung ($y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \cdot y^\alpha$) gegeben mit:
$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y} \quad \overset{x \neq 0}{\iff} \quad y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^2 \cdot \sqrt{y}$$
Wir substituieren
$$\begin{aligned} & z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y} && \implies z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \iff \quad & y = z^2 && \implies y' = 2zz' \end{aligned}$$
Daraus folgt:
$$\begin{aligned} & y' - \frac{2}{x} \cdot y && = x^2 \cdot \sqrt{y} \\ \equiv \quad & 2zz' - \frac{2}{x} \cdot z^2 && = x^2 \cdot \sqrt{z^2} \\ \equiv \quad & 2z' - \frac{2}{x} \cdot z && = x^2 \\ \equiv \quad & z' - \frac{1}{x} \cdot z && = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$
Lösen der homogenen Gleichung:
$$\begin{aligned} & z' - \frac{1}{x} \cdot z && = 0 \\ \equiv \quad & \frac{z'}{z} && = \frac{1}{x} \\ \equiv \quad & \int \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z && = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & \ln|z| + c_1 && = \ln|x| + c_2 \\ \equiv \quad & |z| && = e^{|x| + c_2 - c_1} \\ \equiv \quad & z && = cx \end{aligned}$$
Bestimmen der partikulären Lösung:
$$z = c(x) \cdot x \quad \implies \quad z' = c'(x)x + c(x)$$
$$\begin{aligned} & z' - \frac{1}{x} \cdot z && = \frac{x^2}{2} \\ \equiv \quad & c'(x)x + c(x) - \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x && = \frac{x^2}{2} \\ \equiv \quad & c'(x) && = \frac{x}{2} \\ \equiv \quad & \int 1 \, \mathrm{d}c && = \frac{1}{2} \int x \, \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & c(x) + c_1 && = \frac{x^2}{4} + c_2 \\ \equiv \quad & c(x) && = \frac{x^2}{4} + c_0 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$z = c(x) \cdot x = \left(\frac{x^2}{4} + c_0\right) x = \frac{x^3}{4} + c_1 x \implies y = z^2 = \left(\frac{x^3}{4} + c_1 x\right)^2$$

Mit dem Anfangswert $y(1) = 1$ folgt:

$$y(1) = \left(\frac{1}{4} + c_1\right)^2 \implies c_1 \in \left\{\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right\} \iff c_1 = -\frac{1}{4} \pm 1$$

und damit schlussendlich

$$y = z^2 = \left(\frac{x^3}{4} + \left(-\frac{1}{4} \pm 1\right) x\right)^2$$

bzw.

$$y_1 = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{x^2\left(x^2+3\right)}{16}$$

und

$$y_2 = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{5x}{4}\right)^2 = \frac{x^2\left(x^2-5\right)}{16}$$

$\square$

4. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - 2y = (2\sin(x) + 5\cos(x)) \cdot e^{-3x}$$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - 2y_h = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h = ce^{2x}$$

Mit der partikulären Lösung ($y_p = (c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) \cdot c_0 e^{-3x}$)

$$y_p = c_0 e^{-3x}(c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c_0 e^{-3x}((c_1 - 3c_2)\cos(x) + (-3c_1 - c_2)\sin(x))$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y_p' - 2y_p && = (2\sin(x) + 5\cos(x))e^{-3x} \\ \equiv\ & \dots && = (2\sin(x) + 5\cos(x))e^{-3x} \\ \equiv\ & c_0 e^{-3x}((c_1 - 5c_2)\cos(x) + (-5c_1 - c_2)\sin(x)) && = (2\sin(x) + 5\cos(x))e^{-3x} \\ \equiv\ & c_0(c_1 - 5c_2) \cdot \cos(x) + c_0(-5c_1 - c_2) \cdot \sin(x) && = 2\sin(x) + 5\cos(x) \end{aligned}$$

Wir erhalten das LGS:

$$\begin{cases} c_0(c_1 - 5c_2) & = 5 \\ c_0(-5c_1 - c_2) & = 2 \end{cases} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \begin{cases} c_1 & = -\frac{5}{26c_0} \\ c_2 & = -\frac{27}{26c_0} \end{cases}$$

Damit erhalten wir unsere partikuläre Lösung:

$$y_p = c_0 e^{-3x}(c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) = -e^{-3x}\left(\frac{5}{26}\sin(x) + \frac{27}{26}\cos(x)\right)$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = ce^{2x} - e^{-3x}\left(\frac{5}{26}\sin(x) + \frac{27}{26}\cos(x)\right)$$

$\square$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -y + x \cdot e^{-x} + 1$$

Lösung:
Es gilt ganz offensichtlich:

$$y' = -y + x \cdot e^{-x} + 1 \quad \equiv \quad y' + y = x \cdot e^{-x} + 1$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h = e^{-x}$$

Wir müssen zwei partikuläre Lösungen erhalten:

$$y_{p_1} = c_1 \cdot x^2 \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad y_{p_2} = c_2$$

Es gilt:

$$y_{p_1} = c_1 x^2 e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_1} = 2c_1 2xe^{-x} - c_1 x^2 e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
& y_{p_1} + y'_{p_1} && = xe^{-x} \\
\equiv \quad & c_1 x^2 e^{-x} + 2c_1 2xe^{-x} - c_1 x^2 e^{-x} && = xe^{-x} \\
\equiv \quad & 2c_1 2xe^{-x} && = xe^{-x} \\
\Longrightarrow \quad & c_1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und

$$y_{p_2} = c_2 \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_2} = 0$$

$$\begin{aligned}
& y_{p_2} + y'_{p_2} && = 1 \\
\equiv \quad & c_2 + 0 && = 1 \\
\Longrightarrow \quad & c_2 = 1
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = e^{-x} + \frac{x^2 e^{-x}}{2} + 1$$

□