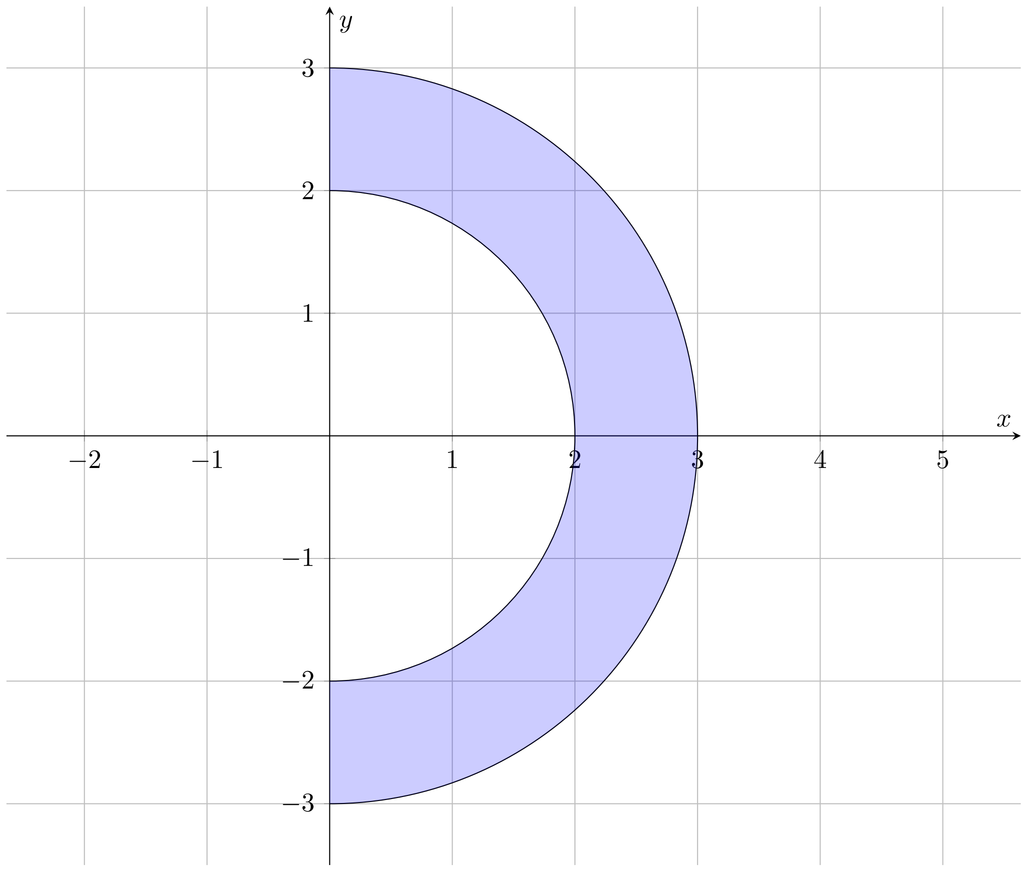
2. Berechnen Sie folgendes Integral unter Verwendung der Polarkoordinaten

$$\int_A \left(3\sqrt{x^2+y^2}+4\right) x \,\mathrm{d}A$$

für den halben Kreisring A, dessen Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegt, den inneren Radius 2 und den äußeren Radius 3 besitzt, und durch $x \geq 0$ bestimmt ist.

Lösung:



Wir erkennen den Integrationsbereich:

$$A = \left\{(r,\phi) \mid (2 \leq r \leq 3) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Umwandeln des gegebenen Integrals in Polarkoordinaten ergibt:

$$\int_A \left(3\sqrt{x^2+y^2}+4\right) x \,\mathrm{d}A = \int_A \left(3\sqrt{r^2}+4\right) r\cos\phi \cdot r \,\mathrm{d}A = \int_A \left(3r^3+4r^2\right)\cos\phi \,\mathrm{d}A$$

Einsetzen der Integralgrenzen:

$$
\begin{aligned}
\int_A \left(3r^3 + 4r^2\right) \cos\phi \,\mathrm{d}A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \left(3r^3 + 4r^2\right) \cos\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \int_2^3 \left(3r^3 + 4r^2\right) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \left[\frac{3r^4}{4} + \frac{4r^3}{3}\right]_2^3 \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \left(\frac{243}{4} + \frac{108}{3} - \left(\frac{48}{4} + \frac{32}{3}\right)\right) \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \cdot \frac{889}{12} \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{889}{12} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{889}{12} \left[\sin\phi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{889}{12} (1 + 1) \\
&= \frac{889}{6}
\end{aligned}
$$

$\square$