

# Analysis 2

## Hausaufgabenblatt 08

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 24. Mai 2021

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung.

(a)  $y' - 4y = 14x + 2 - 12x^2$

**Lösung:**

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung ( $y'_h + ay_h = 0$ ):

$$y'_h - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{-4x} = ce^{4x}$$

Bestimmen der partikulären Lösung ( $y_p = ax^2 + bx + c$ ):

$$y_p = ax^2 + bx + c \implies y'_p = 2ax + b$$

Wir setzen die partikuläre Lösung entsprechend ein:

$$\begin{aligned} y' - 4y &= 14x + 2 - 12x^2 \\ \equiv 2ax + b - 4(ax^2 + bx + c) &= -12x^2 + 14x + 2 \\ \equiv -4ax^2 + (2a - 4b)x + (b - 4c) &= -12x^2 + 14x + 2 \end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$a = 3 \quad \wedge \quad b = -2 \quad \wedge \quad c = -1,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} + 3x^2 - 2x - 1.$$

□

(b)  $y' - 8y = -6e^{5x}$

**Lösung:**

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung:

$$y'_h - 8y_h = 0 \implies y_h = ce^{8x}$$

Bestimmen der partikulären Lösung ( $y_p = c_0 e^{5x}$ ):

$$y_p = c_0 e^{5x} \implies y'_p = 5c_0 e^{5x}$$

Wir setzen die partikuläre Lösung entsprechend ein:

$$\begin{aligned}
y' - 8y &= -6e^{5x} \\
\equiv 5c_0 e^{5x} - 8c_0 e^{5x} &= -6e^{5x} \\
\equiv -3c_0 e^{5x} &= -6e^{5x}
\end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$c_0 = 2,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{8x} + 2e^{5x}.$$

□

(c)  $y' + 2y = 8\sin(x) - \cos(x)$

**Lösung:**

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y'_h + 2y_h = 0 \implies y_h = ce^{-2x}$$

Mit der partikulären Lösung ( $y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)$ )

$$y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x) \implies y'_p = c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= 8\sin(x) - \cos(x) \\
\equiv c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x) + 2(c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)) &= 8\sin(x) - \cos(x) \\
\equiv (c_0 + 2c_1) \cos(x) + (2c_0 - c_1) \sin(x) &= 8\sin(x) - \cos(x) \\
\implies c_0 + 2c_1 = -1 \quad \wedge \quad 2c_0 - c_1 = 8 \\
\implies c_0 = 3 \quad \wedge \quad c_1 = -2
\end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{-2x} + 3\sin(x) - 2\cos(x).$$

□

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen

(a)  $y' - 4y = 15e^x$

**Lösung:**

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y'_h - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{4x}$$

Mit der partikulären Lösung ( $y_p = c_0e^x$ )

$$y_p = c_0e^x \implies y'_p = c_0e^x$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} y' - 4y &= 15e^x \\ \equiv c_0e^x - 4c_0e^x &= 15e^x \\ \equiv -3c_0e^x &= 15e^x \\ \implies c_0 &= -5 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} - 5e^x$$

□

(b)  $y' - y = 9e^x$

**Lösung:**

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y'_h - y_h = 0 \implies y_h = ce^x$$

Mit der partikulären Lösung ( $y_p = c_0xe^x$ )

$$y_p = c_0xe^x \implies y'_p = c_0(e^x + xe^x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} y' - y &= 9e^x \\ \equiv c_0(e^x + xe^x) - c_0xe^x &= 9e^x \\ \equiv c_0e^x(1 + x - x) &= 9e^x \\ \implies c_0 &= 9 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^x + 9e^xx$$

□

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y}, \quad y(1) = 1$$

**Lösung:**

Wir haben eine Bernoulli-DGL 1. Ordnung  $(y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \cdot y^\alpha)$  gegeben mit:

$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y} \quad \stackrel{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^2 \cdot \sqrt{y}$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y} &\implies z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \Longleftrightarrow y = z^2 &\implies y' = 2zz' \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x} \cdot y &= x^2 \cdot \sqrt{y} \\ \equiv 2zz' - \frac{2}{x} \cdot z^2 &= x^2 \cdot \sqrt{z^2} \\ \equiv 2z' - \frac{2}{x} \cdot z &= x^2 \\ \equiv z' - \frac{1}{x} \cdot z &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} z' - \frac{1}{x} \cdot z &= 0 \\ \equiv \frac{z'}{z} &= \frac{1}{x} \\ \equiv \int \frac{1}{z} dz &= \int \frac{1}{x} dx \\ \equiv \ln |z| + c_1 &= \ln |x| + c_2 \\ \equiv |z| &= e^{|x|+c_2-c_1} \\ \equiv z &= cx \end{aligned}$$

Bestimmen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} z = c(x) \cdot x &\implies z' = c'(x)x + c(x) \\ z' - \frac{1}{x} \cdot z &= \frac{x^2}{2} \\ \equiv c'(x)x + c(x) - \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x &= \frac{x^2}{2} \\ \equiv c'(x) &= \frac{x}{2} \\ \equiv \int 1 dc &= \frac{1}{2} \int x dx \\ \equiv c(x) + c_1 &= \frac{x^2}{4} + c_2 \\ \equiv c(x) &= \frac{x^2}{4} + c_0 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$z = c(x) \cdot x = \left( \frac{x^2}{4} + c_0 \right) x = \frac{x^3}{4} + c_1 x \implies y = z^2 = \left( \frac{x^3}{4} + c_1 x \right)^2$$

Mit dem Anfangswert  $y(1) = 1$  folgt:

$$y(1) = \left( \frac{1}{4} + c_1 \right)^2 \implies c_1 \in \left\{ \frac{3}{4}, -\frac{5}{4} \right\} \iff c_1 = -\frac{1}{4} \pm 1$$

und damit schlussendlich

$$y = z^2 = \left( \frac{x^3}{4} + \left( -\frac{1}{4} \pm 1 \right) x \right)^2$$

bzw.

$$y_1 = \left( \frac{x^3}{4} + \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{x^2 (x^2 + 3)^2}{16}$$

und

$$y_2 = \left( \frac{x^3}{4} - \frac{5x}{4} \right)^2 = \frac{x^2 (x^2 - 5)^2}{16}$$

□

4. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - 2y = (2 \sin(x) + 5 \cos(x)) \cdot e^{-3x}$$

**Lösung:**

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y'_h - 2y_h = 0 \quad \implies \quad y_h = ce^{2x}$$

Mit der partikulären Lösung ( $y_p = (c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) \cdot c_0 e^{-3x}$ )

$$y_p = c_0 e^{-3x} (c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) \quad \implies \quad y'_p = c_0 e^{-3x} ((c_1 - 3c_2) \cos(x) + (-3c_1 - c_2) \sin(x))$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} y'_p - 2y_p &= (2 \sin(x) + 5 \cos(x)) e^{-3x} \\ \equiv \dots &= (2 \sin(x) + 5 \cos(x)) e^{-3x} \\ \equiv c_0 e^{-3x} ((c_1 - 5c_2) \cos(x) + (-5c_1 - c_2) \sin(x)) &= (2 \sin(x) + 5 \cos(x)) e^{-3x} \\ \equiv c_0 (c_1 - 5c_2) \cdot \cos(x) + c_0 (-5c_1 - c_2) \cdot \sin(x) &= 2 \sin(x) + 5 \cos(x) \end{aligned}$$

Wir erhalten das LGS:

$$\begin{cases} c_0(c_1 - 5c_2) &= 5 \\ c_0(-5c_1 - c_2) &= 2 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} c_1 &= -\frac{5}{26c_0} \\ c_2 &= -\frac{27}{26c_0} \end{cases}$$

Damit erhalten wir unsere partikuläre Lösung:

$$y_p = c_0 e^{-3x} (c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) = -e^{-3x} \left( \frac{5}{26} \sin(x) + \frac{27}{26} \cos(x) \right)$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = ce^{2x} - e^{-3x} \left( \frac{5}{26} \sin(x) + \frac{27}{26} \cos(x) \right)$$

□

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -y + x \cdot e^{-x} + 1$$

**Lösung:**

Es gilt ganz offensichtlich:

$$y' = -y + x \cdot e^{-x} + 1 \quad \equiv \quad y' + y = x \cdot e^{-x} + 1$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{-x}$$

Wir müssen zwei partikuläre Lösungen erhalten:

$$y_{p_1} = c_1 \cdot x^2 \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad y_{p_2} = c_2$$

Es gilt:

$$y_{p_1} = c_1 x^2 e^{-x} \quad \implies \quad y'_{p_1} = 2c_1 x e^{-x} - c_1 x^2 e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y_{p_1} + y'_{p_1} &= x e^{-x} \\ \equiv c_1 x^2 e^{-x} + 2c_1 x e^{-x} - c_1 x^2 e^{-x} &= x e^{-x} \\ \equiv 2c_1 x e^{-x} &= x e^{-x} \\ \implies c_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$y_{p_2} = c_2 \quad \implies \quad y'_{p_2} = 0$$

$$\begin{aligned} y_{p_2} + y'_{p_2} &= 1 \\ \equiv c_2 + 0 &= 1 \\ \implies c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = ce^{-x} + \frac{x^2 e^{-x}}{2} + 1$$

□