Dr. Thomas Eifert, Yvonne Albrecht M.Sc. FH Aachen, FB 9; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 05 26./27.04.2021

1. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale

   a) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{1} e^{x+y} \; dx \; dy$ b) $\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} r \cdot (1 - r^2) \; dr \; d\varphi$

2. Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

   a) Berechnen Sie die von den beiden Funktionen begrenzte Fläche.
   b) Bestimmen Sie anschließend den Schwerpunkt der eingeschlossenen Fläche.

   Hinweis: Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind die Nullstellen.

3. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) \; dy \; dx$$

   Tipp: Skizzieren Sie das Integrationsgebiet und wechseln Sie in ein geeignetes Koordinatensystem.

4. **(Präsentation der Lösung)** In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt die Gaußsche Glockenkurve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ bei der Untersuchung normalverteilter Zufallsvariablen eine wichtige Rolle. Jedoch ist das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx$$

   analytisch nicht lösbar, da die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}}$ keine Stammfunktion besitzt. Um das uneigentliche Integral doch zu lösen, berechnen Sie die Lösung des uneigentlichen Doppelintegrals

$$\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx \cdot \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \; dy$$

   und ziehen Sie anschließend aus dem berechneten Ergebnis die Wurzel.

5. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral

$$\iiint\limits_{V} \frac{1}{1-x-y}\, dx\, dy\, dz$$

wenn der Integrationsbereich durch die folgenden Funktionen begrenzt wird

$$x+y+z=1, \quad z=1, \quad x=0, \quad y=0 \quad \text{und} \quad z=0$$