Analysis 2 Hausaufgabenblatt 01

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 05. April 2021

- 1. Berechnen Sie die 1. Ableitungen von
 - (a) $f(x) = \sin(\cos(x))$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\cos(x))$$
$$= -\sin(x)\cdot\cos(\cos(x))$$

(b) $g(x) = e^{x^3 - \sin^2(x)}$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^3 - \sin^2(x)}$$
$$= (3x^2 - \cos(x) \cdot 2\sin(x)) \cdot e^{x^3 - \sin^2(x)}$$

(c) $h(x) = 3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4)$$
$$= 6x + 4 - 2x \cdot 4(3 - x^2)^3$$
$$= -8x(3 - x^2)^3 + 6x + 4$$

(d) $k(x) = \frac{1}{\tan(\arcsin(x))}$

Lösung:

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\tan(\arcsin(x))} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\cos(\arcsin(x)}{\sin(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}x} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sin(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}x} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \\ &= \frac{-2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot x - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - (1 - x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}} \end{split}$$

(e) $l(x) = e^{3\ln(x^2)}$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{3\ln(x^2)}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^{\ln(x^2)} \right)^3$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^2 \right)^3$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^6$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 6x^5$$

 $^{1\}cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \implies \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

Hausaufgabenblatt 01 Analysis 2

(f)
$$m(x) = e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x} + 17)} \cdot e^{x \cdot \cos^2(5\sqrt{x} + 17)}$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x} + 17)} \cdot e^{x \cdot \cos^2(5\sqrt{x} + 17)}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \cdot \sin^2(5\sqrt{x} + 17) + x \cdot \cos^2(5\sqrt{x} + 17)}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x (\sin^2(5\sqrt{x} + 17) + \cos^2(5\sqrt{x} + 17))}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x$$

$$= e^x$$

Hausaufgabenblatt 01 Analysis 2

2. Berechnen Sie die Normen $\left\|\cdot\right\|_1,\,\left\|\cdot\right\|_2$ und $\left\|\cdot\right\|_\infty$ für die folgenden Vektoren:

(a)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b)
$$\begin{pmatrix} 2\\3\\4 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 5\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10\\2\\0 \end{pmatrix}$

Hausaufgabenblatt 01

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = -\frac{y}{x^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = \frac{1}{x \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(b) $f(x,y) = \tan(x^2 + y^2)$

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tan(x^2 + y^2) = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \tan(x^2 + y^2) = \frac{2y}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$

(c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Lösung:

$$\begin{split} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{9-x^2-y^2} = -\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{9-x^2-y^2} = -\frac{2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \end{split}$$

Analysis 2

- 4. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:
 - (a) $f(x,y) = 2x^2 3xy 4y^2$

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = 4x - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = -8y - 3x$$

(b) $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}, x \neq 0, y \neq 0$

Lösung:

$$\begin{split} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \end{split}$$

(c) $f(x,y) = \sin(2x + 3y)$

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sin(2x + 3y) = 2\cos(2x + 3y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\sin(2x + 3y) = 3\cos(2x + 3y)$$

Hausaufgabenblatt 01 Analysis 2

5. Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

(a)
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^8}$$

Lösung:

Sei die Kurve $x = y^4$ gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^4 y^2}{y^8 + y^8} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{2y^2} = \infty$$

Damit ist f im Nullpunkt nicht stetig.

(b) $f(x,y) = \frac{x^3 + x^2 - y^4 + y^2}{x^2 + y^2}$

Lösung:

fist genau dann stetigergänzbar im Nullpunkt, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ existiert.

$$\begin{split} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 - y^4 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) - r^4 \sin^4(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 0 + 1 - 0 + 0 = 1 \end{split}$$

Damit ist f im Nullpunkt stetig ergänzbar mit f(0,0) = 1.