Analysis 2

Hausaufgabenblatt 04

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 25. April 2021

1. Bestimmen Sie die Kandidaten für relative Extrema der Funktionen

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y+1}$$

Lösung:

Für die relativen Extrema muss gelten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+y+1)^2} \\ \frac{1}{(x+y+1)^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt aus den beiden Gleichungen für $x, y \neq 0$:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} \implies x = \pm y$$

Einsetzen von $x = y$ in Gleichung I ergibt:

$$\frac{1}{(y+y+1)^2} = \frac{1}{y^2} \iff \frac{1}{4y^2+4y+1} = \frac{1}{y^2} \implies 4y^2+4y+1 = y^2 \iff y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$$

Einsetzen in die *pq*-Formel ergibt:

$$y_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \implies y \in \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$$

Damit ergeben sich die Kandidaten $(x_1, y_1) = (-1, -1)$ und $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
Einsetzen von $x = -y$ in Gleichung II ergibt:

$$\frac{1}{(-y+y+1)^2} = \frac{1}{(-y)^2} \iff 1 = \frac{1}{y^2} \iff y^2 = 1 \implies y \in \{-1, 1\}$$

Damit ergeben sich die Kandidaten $(x_3, y_3) = (1, -1)$ und $(x_4, y_4) = (-1, 1)$.

2. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy$$
Bestimmen Sie alle Punkte, die auf der Kreislinie (Nebenbedingung)
$$x^2 + y^2 = 1$$
liegen und untersuchen Sie die Funktion auf Extrema.

Lösung:

Die Nebenbedingung ist gegeben mit:
$$g(x) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
Wir bilden die Lagrange-Funktion mit
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) = 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 4x^2 - 3xy + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda$$
und bilden dann den Gradienten von L mit
$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} L_x(x,y,\lambda) \\ L_y(x,y,\lambda) \\ L_\lambda(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 3y + 2\lambda x \\ -3x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(\lambda+4) - 3y \\ -3x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$
Zum Ermitteln der Kandidaten setzen wir $\nabla L = \vec{0}$:
$$\begin{aligned} & \nabla L(x,y,\lambda) && = \vec{0} \\ \iff & \begin{pmatrix} 2x(\lambda+4) - 3y \\ -3x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies & \begin{pmatrix} 2x(\lambda+4) \\ -3x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 3y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies & \begin{pmatrix} x \\ -3x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} \frac{3y}{2(\lambda+4)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Einsetzen von $x = \frac{3y}{2(\lambda+4)}$ in Gleichung II ergibt ($y \neq 0$, $\lambda \neq -4$):
$$-\frac{9y}{2(\lambda+4)} + 2\lambda y = 0 \iff 2\lambda y = \frac{9y}{2(\lambda+4)} \iff 2\lambda = \frac{9}{2(\lambda+4)} \iff \lambda^2 + 4\lambda - \frac{9}{4} = 0$$
Einsetzen in die *pq*-Formel liefert:
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = -2 \pm \frac{5}{2} \implies \lambda \in \left\{-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Fall 1:
Einsetzen von $\lambda = -\frac{9}{2}$ in Gleichung I ergibt:

$$2x\left(-\frac{9}{2}+4\right) - 3y = 0 \iff -x - 3y = 0 \iff x = -3y$$

Einsetzen von $x = -3y$ in Gleichung III:

$$(-3y)^2 + y^2 - 1 = 0 \iff y^2 = \frac{1}{10} \implies y \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$$

Damit erhalten wir die Kandidatentupel

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{2}\right), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{2}\right)$$

Fall 2:
Einsetzen von $\lambda = \frac{1}{2}$ in Gleichung I ergibt:

$$2x\left(\frac{1}{2}+4\right) - 3y = 0 \iff 9x - 3y = 0 \iff x = \frac{y}{3}$$

Einsetzen von $x = \frac{y}{3}$ in Gleichung III:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + y^2 - 1 = 0 \iff y^2 = \frac{9}{10} \implies y \in \left\{-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right\}$$

Damit erhalten wir die Kandidatentupel

$$(x_3, y_3, \lambda_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}\right)$$

Wir bilden nun die Hesse-Matrix mit

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda+4) & -3 & 2x \\ -3 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\det H = -8(\lambda x^2 + 3xy + (\lambda+4)y^2)$$

Einsetzen der Tupel ergibt:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1, \lambda_1) &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{2}\right) && \implies \det H = 40 && > 0 \implies \text{Maximum} \\
(x_2, y_2, \lambda_2) &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{2}\right) && \implies \det H = 40 && > 0 \implies \text{Maximum} \\
(x_3, y_3, \lambda_3) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}\right) && \implies \det H = -40 && < 0 \implies \text{Minimum} \\
(x_4, y_4, \lambda_4) &= \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}\right) && \implies \det H = -40 && < 0 \implies \text{Minimum}
\end{aligned}$$

$\square$

3. Gegeben sei die Kurve $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Arbeit im Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ z + xy \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve.

Lösung:

Die Arbeit von Zeitpunkt $t = a$ bis Zeitpunkt $t = b$ ist gegeben mit

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) \mathrm{d}t$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} W = & \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) \mathrm{d}t \\ = & \int_a^b \begin{pmatrix} t + t^5 \\ t^2 + t^4 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ = & \int_a^b \left(t + t^5 + 2t(t^4 + t^2) + 3t^2 \cdot 2t^3 \right) \mathrm{d}t \\ = & \int_a^b \left(9t^5 + 2t^3 + t \right) \mathrm{d}t \\ = & \left[\frac{3t^6}{2} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{3(b^6 - a^6) + b^4 + b^2 - a^4 - a^2}{2} \end{aligned}$$

□

4. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} z^3 + \alpha xy \\ x^2 \\ \beta x z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die reellen Konstanten α und β so, dass $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist.

Lösung:
Es gilt, dass

$$\operatorname{curl}(\vec{v}) = \vec{0} \implies \exists V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \nabla V = \vec{v}$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{curl}(\vec{v}) && = \vec{0} \\
\equiv\quad & \vec{\nabla} \times \vec{v} && = \vec{0} \\
\equiv\quad & \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z^3 + \alpha xy \\ x^2 \\ \beta x z^2 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\equiv\quad & \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \beta x z^2 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 \\ \frac{\partial}{\partial z}(z^3 + \alpha xy) - \frac{\partial}{\partial x} \beta x z^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y}(z^3 + \alpha xy) \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\equiv\quad & \begin{pmatrix} 0 \\ 3z^2 - \beta z^2 \\ 2x - \alpha x \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir sehen direkt, dass $(\alpha, \beta) = (2, 3)$. □

(b) Berechnen Sie für diesen Fall die zugehörige Potentialfunktion.

Lösung:
Es gilt mit $(\alpha, \beta) = (2, 3)$:

$$V(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) \mathrm{d}x = \int (z^3 + 2xy) \mathrm{d}x = z^3 x + x^2 y + C(y, z)$$

$$V_y = x^2 + C'_y(y, z) = f_2(x, y, z) \implies C'_y(y, z) = 0$$

$$V_z = 3z^2 x + C'_z(y, z) = f_3(x, y, z) \implies C'_z(y, z) = 0$$

Damit wissen wir insgesamt, dass mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$V(x, y, z) = xz^3 + x^2 y + c$$

□

5. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}_a(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + \alpha xy \\ e^{x+y} + x^2 \end{pmatrix}$$

mit einem freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Parameter α derart, dass $\vec{F}_a$ ein Potential besitzt. Bestimmen Sie dieses Potential.

Lösung:
Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \equiv \quad e^{x+y} + \alpha x &= e^{x+y} + 2x \end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass $\alpha = 2$ gilt.
Für die Potentielfunktion gilt:

$$V(x,y) = \int f_1(x,y)\mathrm{d}x = e^{x+y} + x^2 y + C(y)$$

$$V_y = e^{x+y} + x^2 + C'(y) = f_2(x,y) \implies C'(y) = 0$$

Damit wissen wir insgesamt, dass für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$V(x,y) = e^{x+y} + x^2 y + c$$

□

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \end{pmatrix}^T$, $t \in [0;1]$ die zu leistende Arbeit.
Hinweis: Klammern Sie in (b) bei der Integration den Faktor $e^{t^2+t^3}$ aus.

Lösung:
Die Arbeit von Zeitpunkt $t = 0$ bis Zeitpunkt $t = 1$ ist gegeben mit

$$W = \int_0^1 \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)\mathrm{d}t$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2+t^3} \\ e^{t^2+t^3} + t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(2te^{t^2+t^3} + 3t^2\left(e^{t^2+t^3} + t^4\right)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(2te^{t^2+t^3} + 3t^2 e^{t^2+t^3} + 3t^6\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(2t + 3t^2\right) e^{t^2+t^3} \mathrm{d}t + 3\int_0^1 t^6 \mathrm{d}t \\ &= \left[e^{t^2+t^3}\right]_0^1 + 3\left[\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = e^2 - 1 + \frac{3}{7} = e^2 - \frac{4}{7} \end{aligned}$$

□