Analysis 2

Hausaufgabenblatt 07

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 16. Mai 2021

1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen
   (a) $y' + (1+x) \cdot y = 0$

Lösung:
Umwandeln in explizite Darstellung:

$$y' + (1+x) \cdot y = 0 \quad \equiv \quad y' = \underbrace{-y}_{g(y)} \cdot \underbrace{(1+x)}_{f(x)}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& y' && = -y \cdot (1+x) \\
\equiv \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = -y \cdot (1+x) \\
\equiv \quad & -\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = (1+x)\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int -\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = \int (1+x)\,\mathrm{d} \\
\equiv \quad & -\ln|y| - c_2 && = x + \frac{x^2}{2} + c_1 \\
\equiv \quad & |y| && = e^{-(x+\frac{x^2}{2}+c_1+c_2)} \\
\equiv \quad & y && = e^{-(c_1+c_2)} e^{-\frac{x}{2}(x+2)} \\
\equiv \quad & y && = ce^{-\frac{x}{2}(x+2)}
\end{aligned}$$

□

(b) $y' = 2x \cdot y$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& y' && = 2x \cdot y \\
\equiv\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = 2x \cdot y \\
\equiv\ & \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = 2x\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \ln|y| + c_2 && = x^2 + c_1 \\
\equiv\ & |y| && = e^{x^2+c_1-c_2} \\
\equiv\ & y && = e^{c_1-c_2}e^{x^2} \\
\equiv\ & y && = ce^{x^2}
\end{aligned}
$$

□

(c) $x \cdot y' = 4y, \quad x > 0$

Lösung:
Umwandeln in explizite Darstellung:

$$x \cdot y' = 4y \quad \equiv \quad y' = 4y \cdot \frac{1}{x}$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& y' && = 4y \cdot \frac{1}{x} \\
\equiv\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = 4y \cdot \frac{1}{x} \\
\equiv\ & \frac{1}{4y}\,\mathrm{d}y && = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \frac{1}{4}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \frac{1}{4} \cdot \ln(y) + \frac{c_2}{4} && = \ln(x) + c_1 \\
\equiv\ & \ln y && = 4(\ln(x) + c_1) - c_2 \\
\equiv\ & y && = e^{4(\ln(x)+c_1)-c_2} \\
\equiv\ & y && = e^{-c_2}\left(e^{\ln(x)+c_1}\right)^4 \\
\equiv\ & y && = e^{-c_2}\left(xe^{c_1}\right)^4 \\
\equiv\ & y && = e^{-c_2}e^{4c_1}x^4 \\
\equiv\ & y && = cx^4
\end{aligned}
$$

□

2. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

   (a) $y' = xe^{-y}, \quad y(0) = 3$

Lösung:
Berechnen der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
& y' && = xe^{-y} \\
\equiv\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = xe^{-y} \\
\equiv\ & e^y \,\mathrm{d}y && = x \,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \int e^y \,\mathrm{d}y && = \int x \,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & e^y + c_2 && = \frac{x^2}{2} + c_1 \\
\equiv\ & e^y && = \frac{x^2}{2} + c_1 - c_2 \\
\equiv\ & y && = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c_1 - c_2\right) \\
\equiv\ & y && = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right)
\end{aligned}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$y(0) = 3 \iff 3 = \ln\left(\frac{0}{2} + c\right) = \ln c \iff c = e^3$$

Damit gilt:

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + e^3\right)$$

$\square$

(b) $y' = -\frac{x}{y}, \quad y(1) = 3$

Lösung:
Berechnen der allgmeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
& y' && = -\frac{x}{y} \\
\equiv\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = -\frac{x}{y} \\
\equiv\ & -y\,\mathrm{d}y && = x\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \int -y\,\mathrm{d}y && = \int x\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & -\frac{y^2}{2} + c_2 && = \frac{x^2}{2} + c_1 \\
\equiv\ & y^2 && = -x^2 + c_1 - c_2 \\
\equiv\ & y && = \sqrt{-x^2 + c_1 - c_2} \\
\equiv\ & y && = \sqrt{c - x^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$y(1) = 3 \iff 3 = \sqrt{c-1} \implies 9 = c - 1 \iff c = 10$$

Damit gilt:

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

$\square$

3. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution ($x \neq 0$)
   (a) $y' = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}$

Lösung:
Sei $u = \frac{y}{x}$ ($\implies u' = \frac{xy'-y}{x^2} \iff y' = u + xu'$). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y' && = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x} \\
\equiv\ & u + xu' && = \frac{1}{\sin u} + u \\
\equiv\ & xu' && = \frac{1}{\sin u} \\
\equiv\ & \frac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && = \frac{1}{\sin u} \\
\equiv\ & \sin u\,\mathrm{d}u && = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & \int \sin u\,\mathrm{d}u && = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\equiv\ & -\cos(u) + c_2 && = \ln|x| + c_1 \\
\equiv\ & \cos(u) && = -\ln|x| - c_1 + c_2 \\
\equiv\ & u && = \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\
\equiv\ & \frac{y}{x} && = \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\
\equiv\ & y && = x\arccos(c - \ln|x|)
\end{aligned}$$

□

(b) $xy' = y + 4x$

Lösung:
Umwandeln in explizite Darstellung:

$$xy' = y + 4x \quad \equiv \quad y' = \frac{y}{x} + 4$$

Sei $u = \frac{y}{x}$ ($\implies u' = \frac{xy'-y}{x^2} \iff y' = u + xu'$). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y' && = \frac{y}{x} + 4 \\
\equiv \quad & u + xu' && = u + 4 \\
\equiv \quad & xu' && = 4 \\
\equiv \quad & \frac{x \,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && = 4 \\
\equiv \quad & 1 \,\mathrm{d}u && = \frac{4}{x} \,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int 1 \,\mathrm{d}u && = 4 \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & u + c_2 && = 4 \ln|x| + 4c_1 \\
\equiv \quad & u && = 4 \ln|x| + 4c_1 - c_2 \\
\equiv \quad & \frac{y}{x} && = 4 \ln|x| + 4c_1 - c_2 \\
\equiv \quad & y && = x(4 \ln|x| + 4c_1 - c_2) \\
\equiv \quad & y && = 4x \ln|x| + cx
\end{aligned}$$

$\square$

4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x-2)\cdot y' = y + 2(x-2)^3$$

Lösung:

Umwandeln in allgemeine Darstellung:

$$(x-2)\cdot y' = y + 2(x-2)^3 \quad \equiv \quad y' = \frac{y}{x-2} + 2(x-2)^2 \quad \equiv \quad y' - \frac{1}{x-2}\cdot y = 2(x-2)^2$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y_h' - \frac{1}{x-2}\cdot y_h && = 0 \\
\equiv \quad & y_h' && = \frac{1}{x-2}\cdot y_h \\
\equiv \quad & \frac{1}{y_h}\,\mathrm{d}y_h && = \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int \frac{1}{y_h}\,\mathrm{d}y_h && = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \ln(y_h) + c_2 && = \ln(x-2) + c_1 \\
\equiv \quad & (y_h) && = e^{\ln(x-2)+c_1-c_2} \\
\equiv \quad & y_h && = c(x-2)
\end{aligned}$$

Lösen der Störfunktion:

$$\begin{aligned}
& y && = c(x)\cdot(x-2) \\
\Longrightarrow \quad & y' && = c'(x)(x-2) + c(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y' - \frac{1}{x-2}\cdot y && = 2(x-2)^2 \\
\equiv \quad & \underbrace{c'(x)(x-2) + c(x)}_{y'} - \frac{1}{x-2}\cdot \underbrace{c(x)\cdot(x-2)}_{y} && = 2(x-2)^2 \\
\equiv \quad & c'(x)(x-2) && = 2(x-2)^2 \\
\equiv \quad & c'(x) && = 2(x-2) \\
\equiv \quad & \int 1\,\mathrm{d}c && = 2\int x\,\mathrm{d}x - 4\int 1\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & c(x) && = x^2 - 4x + c_1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$y = (x^2 - 4x + c)(x-2) = c(x-2) + (x-4)(x-2)x$$

$\square$

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem (gebremstes Wachstum - Parasiten-Modell)

$$y' = ky - a, \quad y(0) = y_0$$

mit Variation der Konstanten.

Lösung:
Umwandeln in allgemeine Darstellung:

$$y' = ky - a \quad \equiv \quad y' - ky = -a$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y_h' - ky_h && = 0 \\
\equiv \quad & y_h' && = ky_h \\
\equiv \quad & \frac{1}{y_h}\,\mathrm{d}y_h && = k\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int \frac{1}{y_h}\,\mathrm{d}y_h && = k\int 1\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \ln|y_h| + c_2 && = kx + c_1 \\
\equiv \quad & \ln|y_h| && = kx + c_1 - c_2 \\
\equiv \quad & |y_h| && = e^{kx+c_1-c_2} \\
\equiv \quad & y_h && = ce^{kx}
\end{aligned}$$

Lösen der Störfunktion:

$$\begin{aligned}
& y && = c(x)e^{kx} \\
\implies \quad & y' && = c'(x)e^{kx} + kc(x)e^{kx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y' - ky && = -a \\
\equiv \quad & \underbrace{c'(x)e^{kx} + kc(x)e^{kx}}_{y'} - k\underbrace{c(x)\cdot e^{kx}}_{y} && = -a \\
\equiv \quad & c'(x)e^{kx} && = -a \\
\equiv \quad & 1\,\mathrm{d}c && = -\frac{a}{e^{kx}}\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int 1\,\mathrm{d}c && = -a\int e^{-kx}\,\mathrm{d}x \\
\equiv \quad & c(x) + c_2 && = \frac{ae^{-kx}}{k} - ac_1 \\
\equiv \quad & c(x) && = \frac{ae^{-kx}}{k} + c_3
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$y = \left(\frac{ae^{-kx}}{k} + c\right)\cdot e^{kx} = \frac{a}{k} + ce^{kx}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$y(0) = y_0 \implies y_0 = \frac{a}{k} + c \iff c = y_0 - \frac{a}{k}$$

Damit gilt:

$$y = \frac{a}{k} + \left(y_0 - \frac{a}{k}\right)e^{kx}$$

$\square$