# Analysis 2

Hausaufgabenblatt 01

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 05. April 2021

1. Berechnen Sie die 1. Ableitungen von

   (a) $f(x) = \sin(\cos(x))$

   **Lösung:**

   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(\cos(x)) \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))\end{aligned}$$

   $\square$

   (b) $g(x) = e^{x^3 - \sin^2(x)}$

   **Lösung:**

   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^3 - \sin^2(x)} \\ &= (3x^2 - \cos(x) \cdot 2\sin(x)) \cdot e^{x^3 - \sin^2(x)}\end{aligned}$$

   $\square$

   (c) $h(x) = 3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4$

   **Lösung:**

   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (3x^2 + 4x + (3 - x^2)^4) \\ &= 6x + 4 - 2x \cdot 4(3 - x^2)^3 \\ &= -8x(3 - x^2)^3 + 6x + 4\end{aligned}$$

   $\square$

(d) $k(x) = \frac{1}{\tan(\arcsin(x))}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\tan(\arcsin(x))} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos(\arcsin(x)}{\sin(\arcsin(x))} \\
&=^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\
&= \frac{-2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \\
&= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\
&= \frac{-x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\
&= \frac{-x^2 - (1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

□

(e) $l(x) = e^{3\ln(x^2)}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{3\ln(x^2)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\ln(x^2)}\right)^3 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right)^3 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^6 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}6x^5
\end{aligned}$$

□

[1] $\cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)} \implies \cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \pm\sqrt{1-x^2}$

(f) $m(x) = e^{x\cdot\sin^2(5\sqrt{x}+17)} \cdot e^{x\cdot\cos^2(5\sqrt{x}+17)}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x\cdot\sin^2(5\sqrt{x}+17)} \cdot e^{x\cdot\cos^2(5\sqrt{x}+17)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x\cdot\sin^2(5\sqrt{x}+17)+x\cdot\cos^2(5\sqrt{x}+17)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x(\sin^2(5\sqrt{x}+17)+\cos^2(5\sqrt{x}+17))} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x} \\
&= e^{x}
\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ für die folgenden Vektoren:

   (a) $\begin{pmatrix}0\\2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\0\\6\\0\end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\5\\1\end{pmatrix}\right\|_1 = |0| + |2| + |5| + |1| = 8 \qquad \left\|\begin{pmatrix}9\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\|_1 = |9| + |0| + |6| + |0| = 15$$

$$\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\5\\1\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30} \qquad \left\|\begin{pmatrix}9\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{9^2 + 0^2 + 6^2 + 0^2} = 3\sqrt{13}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\5\\1\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|0|, |2|, |5|, |1|\} = 5 \qquad \left\|\begin{pmatrix}9\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|9|, |0|, |6|, |0|\} = 9$$

   (b) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\0\end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|_1 = 9 \qquad \left\|\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_1 = 5 \qquad \left\|\begin{pmatrix}10\\2\\0\end{pmatrix}\right\|_1 = 12$$

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{29} \qquad \left\|\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_2 = 5 \qquad \left\|\begin{pmatrix}10\\2\\0\end{pmatrix}\right\|_2 = 2\sqrt{26}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|_\infty = 4 \qquad \left\|\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = 5 \qquad \left\|\begin{pmatrix}10\\2\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = 10$$

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:
   (a) $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{1}{y\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)} = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = -\frac{x}{y^2\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

□

   (b) $f(x,y) = \tan(x^2 + y^2)$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tan(x^2+y^2) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \tan(x^2+y^2) = \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}$$

□

   (c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{9-x^2-y^2} = -\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{9-x^2-y^2} = -\frac{2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

□

4. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - 4y^2$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = 4x - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 - 3xy - 4y^2 = -8y - 3x$$

□

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}, x \neq 0, y \neq 0$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

□

(c) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(2x + 3y) = 2\cos(2x + 3y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(2x + 3y) = 3\cos(2x + 3y)$$

□

5. Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

(a) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^8}$

**Lösung:**
$f$ ist genau dann *stetig ergänzbar* im Nullpunkt, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^8} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\varphi) r^2 \sin^2(\varphi)}{r\cos^2(\varphi) + r\sin^8(\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r\left(\cos^2(\varphi)+\sin^8(\varphi)\right)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+\sin^8(\varphi)} \\ &= \frac{0}{1+0} = 0\end{aligned}$$

Damit ist $f$ im Nullpunkt stetig ergänzbar mit $f(0,0) = 0$. □

(b) $f(x,y) = \frac{x^3+x^2-y^4+y^2}{x^2+y^2}$

**Lösung:**
$f$ ist genau dann *stetig ergänzbar* im Nullpunkt, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2-y^4+y^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) - r^4\sin^4(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2\sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2\sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 0+1-0+0 = 1\end{aligned}$$

Damit ist $f$ im Nullpunkt stetig ergänzbar mit $f(0,0) = 1$. □