Analysis 2

Hausaufgabenblatt 11

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 13. Juni 2021

1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 2x \cdot y + x$$

Lösung:

Es gilt:

$$y' = 2x \cdot y + x \quad \iff \quad \frac{1}{2y+1} \cdot y' = x$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2y+1} \cdot y' && = x \\
\equiv \quad & \frac{1}{2y+1} \, \mathrm{d}y && = x \, \mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \int \frac{1}{2y+1} \, \mathrm{d}y && = \int x \, \mathrm{d}x \\
\overset{1}{\equiv} \quad & \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u && = \int x \, \mathrm{d}x \\
\equiv \quad & \frac{1}{2} \ln |u| + c_1 && = \frac{x^2}{2} + c_2 \\
\equiv \quad & \ln |u| && = x^2 + c_3 \\
\equiv \quad & u && = e^{x^2 + c_3} \\
\equiv \quad & u && = c_4 e^{x^2} \\
\equiv \quad & 2y + 1 && = c_4 e^{x^2} \\
\equiv \quad & y && = c e^{x^2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

[1] $u := 2y + 1 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2 \iff \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u$

2. Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$3y' + y = \frac{1}{y^2} \quad ?$$

Lösung:

Es gilt:

$$3y' + y = \frac{1}{y^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' + \frac{1}{3} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot y^{-2} = 0$$

Wir sehen, dass es sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung handelt.

Wir substituieren:

$$\begin{aligned} & z = y^{1-\alpha} = y^3 && \Longrightarrow z' = 3y^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & y = \sqrt[3]{z} && \Longrightarrow y' = \frac{z'}{3\sqrt[3]{z^2}} \end{aligned}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} & y' + \frac{1}{3} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot y^{-2} && = 0 \\ \equiv \quad & \frac{z'}{3\sqrt[3]{z^2}} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{z} - \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} && = 0 \\ \equiv \quad & \frac{z' + z - 1}{3\sqrt[3]{z^2}} && = 0 \\ \equiv \quad & z' + z && = 1 \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$z_h = ce^{-x}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$z_p = \lambda \quad \Longrightarrow \quad z_p' = 0$$

$$\begin{aligned} & z_p' + z_p = 1 \\ \equiv \quad & \lambda = 1 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$z = z_h + z_p = ce^{-x} + 1$$

Rücksubstituieren ergibt dann:

$$y = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{ce^{-x} + 1}$$

□

3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' + 5y = 8x - 5e^{-5x} - \cos(2x) + 12\sin(2x) - 21\sin(3x) + 20x^2 + 35\cos(3x)$$

Lösung:

$$y' + 5y = \underbrace{20x^2 + 8x}_{y_{p_1}} \underbrace{- \cos(2x) + 12\sin(2x)}_{y_{p_2}} \underbrace{-21\sin(3x) + 35\cos(3x)}_{y_{p_3}} \underbrace{-5e^{-5x}}_{y_{p_4}}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = ce^{-5x}$$

Berechnen der partikulären Lösungen:

$$\boxed{y_{p_1} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_1} = 2\alpha x + \beta}$$

$$\begin{aligned}
& y'_{p_1} + 5y_{p_1} && = 20x^2 + 8x \\
\equiv \quad & 2\alpha x + \beta + 5\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) && = 20x^2 + 8x \\
\equiv \quad & (5\alpha)x^2 + (2\alpha + 5\beta)x + (\beta + 5\gamma) && = 20x^2 + 8x \\
\Longrightarrow \quad & \alpha = 4 \quad \wedge \quad \beta = 0 \quad \wedge \quad \gamma = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_{p_2} = \delta\cos(2x) + \epsilon\sin(2x) \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_2} = -2\delta\sin(2x) + 2\epsilon\cos(2x)}$$

$$\begin{aligned}
& y'_{p_2} + 5y_{p_2} && = -\cos(2x) + 12\sin(2x) \\
\equiv \quad & -2\delta\sin(2x) + 2\epsilon\cos(2x) + 5\left(\delta\cos(2x) + \epsilon\sin(2x)\right) && = -\cos(2x) + 12\sin(2x) \\
\equiv \quad & (5\delta + 2\epsilon)\cos(2x) + (5\epsilon - 2\delta)\sin(2x) && = -\cos(2x) + 12\sin(2x) \\
\Longrightarrow \quad & \delta = -1 \quad \wedge \quad \epsilon = 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_{p_3} = \zeta\cos(3x) + \eta\sin(3x) \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_3} = -3\zeta\sin(3x) + 3\eta\cos(3x)}$$

$$\begin{aligned}
& y'_{p_3} + 5y_{p_3} && = -21\sin(3x) + 35\cos(3x) \\
\equiv \quad & -3\zeta\sin(3x) + 3\eta\cos(3x) + 5\left(\zeta\cos(3x) + \eta\sin(3x)\right) && = -21\sin(3x) + 35\cos(3x) \\
\equiv \quad & (5\eta - 3\zeta)\sin(3x) + (5\zeta + 3\eta)\cos(3x) && = -21\sin(3x) + 35\cos(3x) \\
\Longrightarrow \quad & \zeta = 7 \quad \wedge \quad \eta = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_{p_4} = \theta x e^{-5x} \quad \Longrightarrow \quad y'_{p_4} = \theta e^{-5x} - 5\theta x e^{-5x}}$$

$$\begin{aligned}
& y'_{p_4} + 5y_{p_4} && = -5e^{-5x} \\
\equiv \quad & \theta e^{-5x} - 5\theta x e^{-5x} + 5\theta x e^{-5x} && = -5e^{-5x} \\
\equiv \quad & \theta e^{-5x} && = -5e^{-5x} \\
\Longrightarrow \quad & \theta = -5
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$y = y_h + \sum y_{p_i} = ce^{-5x} + 4x^2 + 2\sin(2x) - \cos(2x) + 7\cos(3x) - 5xe^{-5x}$$

□

4. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(x \cdot y^2 - y^3) + (1 - x \cdot y^2) \cdot y' = 0$$

Lösung:
Es gilt:

$$(x \cdot y^2 - y^3) + (1 - x \cdot y^2) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x \cdot y^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (1 - x \cdot y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

Wir haben also offensichtlich eine exakte Differentialgleichung gegeben.
Prüfen der Integratibilitätsbedingung:

$$p(x,y) = x \cdot y^2 - y^3 \implies p_y = 2xy - 3y^2 \quad \overset{!}{=} \quad -y^2 = q_x \impliedby 1 - x \cdot y^2 = q(x,y) \quad ↯$$

Integrierenden Faktor (Euler-Multiplikator) $\mu(x) = e^{\int m(x)\,\mathrm{d}x}$ bzw. $\mu(y) = e^{\int m(y)\,\mathrm{d}y}$ bestimmen:

- Untersuchung, ob μ nur von x abhängt:

$$m = \frac{p_y - q_x}{q} = \frac{2xy - 3y^2 + y^2}{1 - x \cdot y^2} = \frac{2xy - 2y^2}{1 - x \cdot y^2} \quad ↯$$

- Untersuchung, ob μ nur von y abhängt:

$$m = \frac{q_x - p_y}{p} = \frac{-y^2 - \left(2xy - 3y^2\right)}{x \cdot y^2 - y^3} = -\frac{2}{y} \quad \checkmark$$

Damit erhalten wir den integrierenden Faktor mit:

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y} = cy^{-2} \qquad (\text{sei } c = 1)$$

Einsetzen in die DGL:

$$(x - y)\,\mathrm{d}x + (y^{-2} - x)\,\mathrm{d}y = 0$$

Prüfen der Integratibilitätsbedingung:

$$p(x,y) = x - y \implies p_y = -1 \quad \overset{!}{=} \quad -1 = q_x \impliedby y^{-2} - x = q(x,y) \quad \checkmark$$

Wir wissen:

$$\underbrace{F = \int p\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - xy + c(y)}_{F_x = p} \quad \implies \quad \underbrace{-x + c'(y) = y^{-2} - x}_{F_y = q} \quad \implies \quad c(y) = -\frac{1}{y} + c$$

Und insgesamt gilt damit:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} + c$$

□

5. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= y + 2z \\ z' &= 2y + z - 2e^x \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = -3$ und $z(0) = 4$.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung:

Wir leiten y' ab:

$$\begin{aligned} & y' = y + 2z \quad \iff \quad z = \frac{y' - y}{2} \\ \implies \quad & y'' = y' + 2z' \\ \iff \quad & y'' - y' - 2z' = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von z':

$$\begin{aligned} & y'' - y' - 2z' = 0 \\ \iff \quad & y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von z:

$$\begin{aligned} & y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x = 0 \\ \iff \quad & y'' - y' - 4y - 2 \cdot \frac{y' - y}{2} + 4e^x = 0 \\ \iff \quad & y'' - y' - 4y - y' + y + 4e^x = 0 \\ \iff \quad & y'' - 2y' - 3y = -4e^x \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 3y = 0 \\ \implies \quad & \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \\ \implies \quad & \alpha = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} \\ \equiv \quad & \alpha = 1 \pm 2 \\ \equiv \quad & \alpha \in \{-1, 3\} \\ \implies \quad & y_h = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$y_p = ce^x \quad \implies \quad y_p' = ce^x \quad \implies \quad y_p'' = ce^x$$

$$\begin{aligned} & y_p'' - 2y_p' - 3y_p && = -4e^x \\ \equiv \quad & ce^x - 2ce^x - 3ce^x && = -4e^x \\ \equiv \quad & -4ce^x && = -4e^x \\ \implies \quad & c = 1 \end{aligned}$$

Dann gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x$$

und

$$z = \frac{y' - y}{2} = \frac{\left(-\lambda_1 e^{-x} + 3\lambda_2 e^{3x} + e^x\right) - \left(\lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x\right)}{2} = \lambda_2 e^{3x} - \lambda_1 e^{-x}$$

Mit den Anfangswerten gilt dann:

$$\begin{aligned} & y(0) && = -3 \\ \equiv \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + 1 && = -3 \\ \equiv \quad & \lambda_1 + \lambda_2 && = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z(0) && = 4 \\ \equiv \quad & \lambda_2 - \lambda_1 && = 4 \end{aligned}$$

$$\implies \lambda_1 = -4 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 0$$

Insgesamt gilt also:

$$y = e^x - 4e^{-x} \quad \wedge \quad z = 4e^{-x}$$

$\square$