Analysis 2

Hausaufgabenblatt 02

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 12. April 2021

1. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen
   (a) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$ an der Stelle $(1,1)$.

Lösung:
Zuerst berechnen wie die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$f_x = e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$$
$$f_y = 2xye^{x^2+y^2}$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten ∇f an der Stelle $(1,1)$ mit:

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} f_x(1,1) \\ f_y(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2 \\ 2e^2 \end{pmatrix}$$

$\square$

   (b) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z$ an der Stelle $(1,2,3)$.

Lösung:
Zuerst berechnen wie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z:

$$f_x = 3x^2$$
$$f_y = 2y$$
$$f_z = 1$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten ∇f an der Stelle $(1,2,3)$ mit:

$$\nabla f(1,2,3) = \begin{pmatrix} f_x(1,2,3) \\ f_y(1,2,3) \\ f_z(1,2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2)^2$$

Geben Sie die Tangentialebene in den folgenden Punkten (x_0, y_0) an:

(a) $(1, 0)$

Lösung:
Zuerst berechnen wie die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 - 2)$$
$$f_y = 4y(x^2 + y^2 - 2)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 0) = 1$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von f am Punkt $(1, 0)$ mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

(b) $(0, 2)$

Lösung:
Wir haben die partiellen Ableitungen bereits in Aufgabenteil (a) berechnet.

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von f am Punkt $(0, 2)$ mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

3. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2y - y^3x + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung $\vec{v}$ ($\|\vec{v}\| = 1$) ist gegeben mit

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle$$

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - y^3 \implies f_x(x_0, y_0) = f_x(1, 2) = -4 \\ f_x &= x^2 - 3y^2x \implies f_y(x_0, y_0) = f_y(1, 2) = -11 \end{aligned}$$

Sei nun $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun die Richtungsableitung wie folgt bilden:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}(f) &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{-12 - 22}{\sqrt{13}} \\ &= -\frac{34}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

□

4. Eine Funktion f habe in Richtung des Vektors $\vec{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ eine Steigung von $D_{\vec{v}_1}(f) = 20$ und in Richtung des Vektors $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ eine Steigung von $D_{\vec{v}_2}(f) = 15\sqrt{2}$.

(a) Wie lautet der Gradient dieser Funktion?

Lösung:
Es sind folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
& D_{\vec{v}_1}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v}_1 \rangle \\
\equiv\quad & 20 = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 20 = \frac{1}{5}\left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 100 = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 100 = 3f_x(x_0, y_0) + 4f_y(x_0, y_0) \qquad (1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& D_{\vec{v}_2}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v}_2 \rangle \\
\equiv\quad & 15\sqrt{2} = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 15\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 30\sqrt{2} = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} \right\rangle \\
\equiv\quad & 30\sqrt{2} = \sqrt{2}f_x(x_0, y_0) + \sqrt{2}f_y(x_0, y_0) \\
\equiv\quad & 30 = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \\
\equiv\quad & 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Aus (1) − (2) folgt:

$$\begin{aligned}
& 100 - 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 4f_y(x_0, y_0) - (3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0)) \\
\equiv\quad & 10 = f_y(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Einsetzen in (2) liefert dann:

$$\begin{aligned}
& 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 3f_y(x_0, y_0) \\
\equiv\quad & 90 = 3f_x(x_0, y_0) + 30 \\
\equiv\quad & 20 = f_x(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Damit gilt für den Gradienten ∇f

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}f_x(x_0, y_0)\\f_y(x_0, y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$$

□

(b) Welches ist die größtmögliche Steigung, die die Funktion in diesem unbekannten Punkt annehmen kann?

Lösung:
D maximale Steigung einer Funktion f an einer Stelle (x_0, y_0) ist gegeben mit

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\|$$

Für unser Beispiel gilt damit

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = 10\sqrt{5}$$

□

(c) Welchen Winkel hat der Vektor $\vec{v}_1$ zum Gradienten?

Lösung:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{v}_1, \nabla f(x_0, y_0) \rangle}{\|\vec{v}_1\| \, \|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{D_{\vec{v}_1}(f)}{\|\vec{v}_1\| \, \|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{D_{\vec{v}_1}(f)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Damit gilt $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.4636$. □

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x^2 - y^3)^{\frac{1}{2}}$ und $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$. Bestimmen Sie

(a) den Gradienten von f.

Lösung:
Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^3}} \\ f_y &= -\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 - y^3}} \end{aligned}$$

Der Gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ ist dann gegeben mit

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^3}} \\ -\frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^2 - y_0^3}} \end{pmatrix}$$

□

(b) die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle (x_0, y_0).

Lösung:

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 1$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von f am Punkt $(\sqrt{2}, 1)$ mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

(c) die Richtungsableitung an der Stelle (x_0, y_0) in die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Lösung:
Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung $\vec{v}$ $(\|\vec{v}\| = 1)$ ist gegeben mit

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}(f) &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

(d) die Richtung, in der die Steigung im Punkt (x_0, y_0) am größten ist und den Wert der größten Steigung.

Lösung:
Die Richtung, in der die Steigung am größten ist, entspricht dem Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0):

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(\sqrt{2}, 1) \\ f_y(\sqrt{2}, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Der Wert der Steigung ist dann

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

□

(e) die Richtung, in der die Steigung im Punkt (x_0, y_0) gleich Null ist.

Lösung:
Die Richtung, in der die Steigung im Punkt (x_0, y_0) gleich Null ist, entspricht einem Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{w} \perp \nabla f(x_0, y_0)$.

Wir können ohne weiteren Beweis $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ wählen. □