

5.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	261
5.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .	263
5.2.6	Zur Ermittlung von $k$ aus den Daten . . . . .	265
5.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	266
5.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	275
5.5	Verzögertes Wachstum . . . . .	281
5.6	Systeme von Differenzgleichungen . . . . .	291

## II Analysis 2 295

<b>6</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	<b>297</b>
6.1	Unendliche Integrationsintervalle . . . . .	299
6.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	301
6.3	Absolute Konvergenz . . . . .	303
6.4	Weitere Konvergenzkriterien . . . . .	304
6.4.1	Unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	304
6.4.2	Unbeschränkte Integranden . . . . .	305
6.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .	309
<b>7</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>311</b>
7.1	Grundbegriffe . . . . .	311
7.2	Rechnen in Vektorräumen . . . . .	311
7.3	Metrische Räume . . . . .	312
7.4	Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	313
7.5	Das Skalarprodukt . . . . .	316
7.6	Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	320
7.6.1	Offene Mengen . . . . .	320
7.6.2	Abgeschlossene Mengen . . . . .	321
7.7	Beschränktheit und Ordnung . . . . .	321
7.8	Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	322
7.9	Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	324
7.10	Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	326
7.10.1	Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	326
7.10.2	Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .	327
7.10.3	Partielle Ableitungen . . . . .	327
7.10.4	Stetigkeit . . . . .	329
7.10.5	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .	332
7.10.6	Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	333
7.10.7	Der Gradient . . . . .	334
7.10.8	Die Tangentialebene . . . . .	335
7.10.9	Die Richtungsableitung . . . . .	337
7.11	Das vollständige Differential . . . . .	343
7.11.1	Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	344
7.11.2	Der relative Fehler . . . . .	345

7.11.3	Parametrische Funktionen . . . . .	346
7.11.4	Die Kettenregel . . . . .	347
7.11.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .	348
7.11.6	Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	350
7.12	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	352
7.12.1	Divergenz und Rotation . . . . .	353
7.13	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	356
7.13.1	Eindimensional . . . . .	356
7.13.2	Zweidimensional . . . . .	357
7.14	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	360
7.14.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	360
7.15	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	361
7.15.1	Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	366
7.15.2	Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	368
7.15.3	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .	369
7.15.4	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	370
7.15.5	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End) . . . . .	373
7.16	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse . . . . .	376
7.16.1	Approximation von Funktionen . . . . .	382
7.17	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	383
7.17.1	Lagrange Multiplikatoren . . . . .	384
7.18	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	392
7.18.1	Der Tangentenvektor . . . . .	392
7.18.2	Kurvenintegrale . . . . .	393
7.18.3	Die Potentialfunktion . . . . .	400
<b>8</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>405</b>
8.1	Einleitung . . . . .	405
8.2	Berechnung der Integrale . . . . .	409
8.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	410
8.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .	411
8.2.3	Weitere Anwendungen . . . . .	413
8.3	Integration in Polarkoordinaten . . . . .	415
8.3.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	419
8.3.2	Numerische Berechnung von Doppelintegralen . . . . .	421
8.4	Dreifachintegrale . . . . .	422
8.4.1	Schwerpunktsberechnungen . . . . .	424
<b>9</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>427</b>
9.1	Einleitung . . . . .	427
9.1.1	Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . . .	428
9.1.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	431
9.2	Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	433
9.2.1	Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	434
9.2.2	Substitution . . . . .	437

9.2.3	Anwendung: Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	440
9.2.4	Lineare DGL'en . . . . .	441
9.2.5	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	445
9.2.6	Die Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .	449
9.2.7	Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .	451
9.2.8	Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten . . . . .	454
9.2.9	Potenzreihenansätze . . . . .	455
9.3	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	457
9.4	Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .	464
9.5	Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	467
9.6	Anwendung 1: Die harmonische Schwingung . . . . .	476
9.7	Anwendung 2: Abkühlung von Milchkaffee . . . . .	481
9.8	Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	485
9.9	Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	486

**Teil II**

# **Analysis 2**



## Kapitel 6

# Uneigentliche Integrale

Zur Wiederholung: Sei  $f(x)$  beschränkt auf  $[a, b]$  mit  $-\infty < a \leq b < \infty$ , so heißt die eindeutig bestimmte Zahl

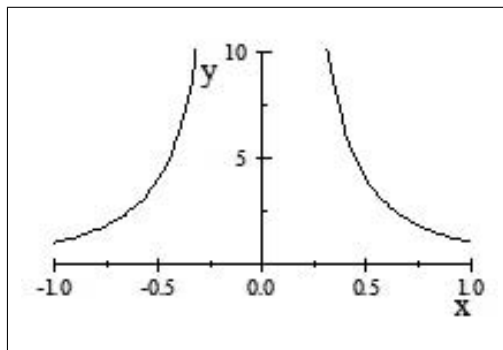
$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

das bestimmte Integral von  $f$  über  $[a, b]$ . Dieses Integral ist eine Flächenmaszahl - zu beachten ist, dass sich positive und negative Flächen dabei auslöschen können. Ohne diese Grenzen suchen wir eine Funktion deren Ableitung  $f(x)$  ist - eine Stammfunktion - und sprechen vom unbestimmten Integral.

Bestimmte und unbestimmte Integrale heissen **eigentliche Integrale**, da wir den Grenzübergang von Ober- und Untersummen bilden können. Wichtig ist also die Beschränktheit des Intervalls und der Funktion.

Die Theorie scheitert jedoch wenn eine oder beide dieser Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Bsp.: Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$



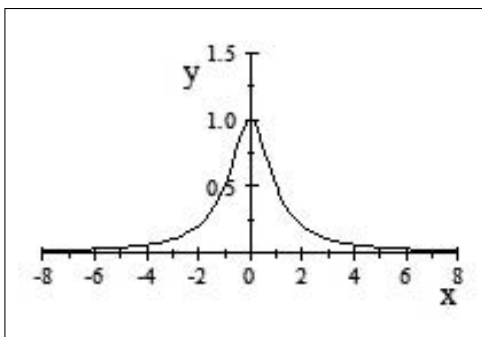
Für die offensichtlich nicht negative Fläche erhalten wir bei der Anwendung des bisher gelernten

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - (-(-1)) = -2$$

und somit ein unsinniges Ergebnis.

Den Fall der unbeschränkten Integrationsintervalle erhalten wir insbesondere bei der Berechnung von Gesamtflächen unter einer Funktion. Dies ist insbesondere auch in der Statistik von grosser Bedeutung.

Bsp.:  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



und es stellen sich die Fragen: Ist die Fläche endlich? Wie groß? Also: Ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$$

endlich? Dies ist wiederum gleichbedeutend damit, dass beide Summanden endlich sind und das Problem reduziert sich auf die Frage, wie unendlich in einer Integrationsgrenze zu behandeln ist. Einsetzen in die Stammfunktion lässt sich dieser Wert so zumindest nicht.

Schliesslich ergibt sich der Fall, dass beide oben beschriebenen Varianten zusammen auftreten. Z.B. um die Frage nach der Gesamtfläche unter der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

zu beantworten, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Alle diese Integrale heissen **uneigentliche Integrale** und es ergeben sich die Fälle

	$f(x)$ auf $[a, b]$ beschr.	$f(x)$ auf $[a, b]$ unbeschr.
$[a, b]$ endl.	Eigentl. Integral	B
$[a, b]$ unendl.	A	C

Wir betrachten zunächst die Fälle A: unendliche Integrationsintervalle und anschliessend B: unbeschränkte Integranden. Der Fall C wird schliesslich nur kurz als Kombination der beiden vorigen Fälle erläutert.

## 6.1 Unendliche Integrationsintervalle

Wurde bisher das Intervall in Teilintervalle aufgeteilt, so benutzen wir hier die Definition

$$[a, \infty) := \lim_{R \rightarrow \infty} [a, R]$$

und damit

**Definition 202** Sei  $f(x)$  beschränkt auf  $\mathbb{R}$ , dann definieren wir

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &: = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^b f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^c f(x) dx$$

$c$  kann hierbei beliebig gewählt werden.

**Definition 203** Die Integrale heissen **konvergent**, wenn die Grenzwerte existieren (endlich sind), sonst heissen sie **divergent**.

Im letzten Fall müssen **beide** Grenzwerte existieren.

Eine etwas schwächere Definition ist

**Definition 204** Der Wert  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$  heisst *Cauchy-Hauptwert* des Integrals.

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} dx &: = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{-R} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \cos(x) dx & : = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos(x) dx \\
 & = \lim_{R \rightarrow \infty} [\sin(x)]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \sin(R) \\
 & \text{ex. nicht}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \frac{1}{x} dx & : = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx \\
 & = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) \\
 & \text{ex. nicht}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx & : = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx \\
 & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{R} + 1 \\
 & = 1
 \end{aligned}$$

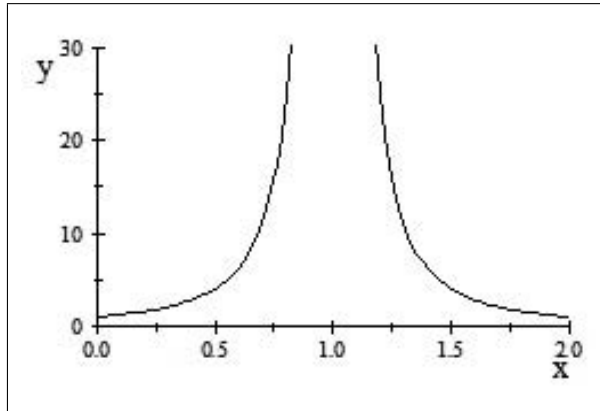
5.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx & = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{2x}{1+x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 & = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(1+R^2) - \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(1+(-R)^2) \\
 & \text{ex. nicht}
 \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2} dx & = \ln(1+R^2) - \ln(1+(-R)^2) = 0 \\
 & \text{und damit} \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2} dx & = 0 \text{ (Cauchy Hauptwert)}
 \end{aligned}$$

## 6.2 Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen



Unbeschränktheit bedeutet damit

$$\begin{aligned} \exists y &\in [a, b] \text{ mit} \\ f(y) &> M \quad \forall M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wir definieren das Integral, welches einen unbeschränkten Integranden hat, nun wie folgt:

**Definition 205** Sei  $f(x)$  in  $c \in [a, b]$  unbeschränkt, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx := r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

falls die Grenzwerte existieren.

Der Wert

$$CHW := r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

heißt **Cauchy-Hauptwert**.

Bem.: Liegt der Wert  $c$  am Rand des Intervalls, also  $c \in \{a, b\}$ , so braucht nur ein Grenzwert berechnet zu werden, also z.B. für  $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx := r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Der Cauchy Hauptwert ist also ein schwächeres Kriterium, d.h. es kann ein Hauptwert existieren ohne dass das Integral konvergiert. Umgekehrt wird, wenn der Hauptwert nicht existiert, aber das Integral nicht konvergieren können.

Bsp.: 1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 1 - r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} = 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(x)]_{\varepsilon}^1 \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(\varepsilon) \\
&\text{divergent}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} - 1 + r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -1 + \frac{1}{\varepsilon} \\
&\text{divergent}
\end{aligned}$$

Cauchy-HW

$$r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} - 1 + -1 + \frac{1}{\varepsilon} = -2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon}$$

existiert nicht

4.

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx \text{ divergent, da } \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ divergent}$$

Cauchy-HW

$$\begin{aligned}
CHW &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( [\ln |x|]_{-2}^{-\varepsilon} + [\ln |x|]_{\varepsilon}^1 \right) \\
&= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\varepsilon) - \ln(2) - \ln(\varepsilon)) \\
&= -\ln(2)
\end{aligned}$$

## 6.3 Absolute Konvergenz

Wir erinnern uns zunächst an die absolute Konvergenz von Reihen:

Eine Reihe  $\sum a_k$  hiess absolut konvergent, wenn  $\sum |a_k|$  konvergiert. Analog definieren wir für Integrale:

**Definition 206** Sei  $\int_a^b f(x)dx$  eigentliches oder uneigentliches Integral. Konvergiert

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

so heisst  $\int_a^b f(x)dx$  **absolut konvergent**.

**Satz 207** Ist  $\int_a^b f(x)dx$  absolut konvergent, so ist  $\int_a^b f(x)dx$  konvergent.

Bew.: Es ist

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

also

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

und damit

$$0 \leq \int_a^b f(x) + |f(x)| dx \leq 2 \int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

also ist

$$\int_a^b f(x) + |f(x)| dx < \infty$$

und damit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x) + |f(x)| dx - \int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

q.e.d.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Hierzu betrachten wir das uneigentliche Integral

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^R \frac{\sin(x)}{x} dx$$

1. Das Integral ist konvergent, denn :

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^R \frac{\sin(x)}{x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\cos(R)}{R} + \frac{\cos(\pi)}{\pi} \right] - \int_{\pi}^R \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} - \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^R \frac{\cos(x)}{x^2} dx}_I \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_{\pi}^R \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \leq \int_{\pi}^R \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx \\ &\leq \int_{\pi}^R \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\pi}^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{\pi} \rightarrow \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

und damit ist das Integral konvergent.

2. Es ist jedoch nicht absolut konvergent, denn:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \\ &\text{divergent} \end{aligned}$$

## 6.4 Weitere Konvergenzkriterien

### 6.4.1 Unbeschränkte Integrationsintervalle

**Satz 208** a) Sei  $0 \leq |f(x)| \leq g(x) \ \forall x \in [a, \infty)$  und konvergiert  $\int_a^{\infty} g(x) dx$ , dann konvergiert  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  und es gilt

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$$

b) Ist  $0 \leq g(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a, \infty)$  und divergiert  $\int_a^{\infty} g(x) dx$ , so divergiert auch  $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Bew.: zu a) Sei  $|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^R |f(x)| dx \leq \int_a^R g(x) dx$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx = M$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^\infty |f(x)| dx \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergiert (sogar absolut)}$$

zu b) Es ist zunächst  $\int_a^\infty g(x) dx = \int_a^\infty |g(x)| dx$

Ann.:  $\int_a^\infty f(x) dx$  konvergiert  $\Rightarrow \int_a^\infty g(x) dx = \int_a^\infty |g(x)| dx$  konvergiert

q.e.d.

Bsp:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 3x + 7} dx$$

Es ist für  $x \geq 7$

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 7} = \frac{1}{x + 3 + \frac{7}{x}} \geq \frac{1}{x + 4}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 3x + 7} dx &= \int_0^7 \frac{x}{x^2 + 3x + 7} dx + \int_7^\infty \frac{x}{x^2 + 3x + 7} dx \\ &\geq \int_0^7 \frac{x}{x^2 + 3x + 7} dx + \int_7^\infty \frac{1}{x + 4} dx \\ &\text{divergent} \end{aligned}$$

### 6.4.2 Unbeschränkte Integranden

Entsprechend gilt:

**Satz 209** a) Sei  $0 \leq |f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ . Dann: Konvergiert  $\int_a^b g(x) dx$ , so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

b) Ist  $0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$  und divergiert  $\int_a^b g(x) dx$ , so divergiert auch  $\int_a^b f(x) dx$

Bem.: Zum Vergleich werden i.A. die Funktionen  $\frac{1}{x^\alpha}$  heran gezogen (unbeschränkt bei  $x = 0$ )

Dazu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left( 1 - r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} \right)\end{aligned}$$

Fall 1:  $\alpha < 1$  :

$$\frac{1}{1 - \alpha} \left( 1 - r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} \right) \text{ konvergent}$$

Fall 2:  $\alpha > 1$  :

$$\frac{1}{1 - \alpha} \left( 1 - r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} \right) \text{ divergent}$$

Im Fall  $\alpha = 1$  ist das Integral ebenfalls divergent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = r - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln |x|]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\ln |\varepsilon|] \text{ divergent}\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx &\text{ konvergiert für } \alpha < 1 \\ \int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx &\text{ divergiert für } \alpha \geq 1\end{aligned}$$

Anwendung:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx \text{ konvergiert, da für } x \in [0, 1] :$$

$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x+1}{x^{1/3}} \leq \frac{2}{x^{1/3}}$$

Also  $\alpha = \frac{1}{3}$  und damit Konvergenz.

Folgerung:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &\text{ divergiert stets bzw.} \\ \int_0^\infty \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx &\text{ divergiert stets}\end{aligned}$$

Für die Divergenz bezüglich unbeschränkter Integrationsintervalle gilt analog für  $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} R^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right]_1^R \end{aligned}$$

Dieses konvergiert falls

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-\alpha} < \infty$$

welches der Fall ist für

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &< 0 \\ \alpha &> 1 \end{aligned}$$

Divergenz liegt vor für

$$\alpha < 1$$

und für

$$\alpha = 1$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &\text{ konvergiert genau dann wenn } \alpha > 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &\text{ konvergiert genau dann wenn } \alpha < 1 \end{aligned}$$

Bem.: Eine besondere Rolle spielt die

**Definition 210** *Gamma-Funktion:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Es gilt:

**Satz 211**  $\Gamma(\alpha)$  konvergiert stets für  $\alpha > 0$  und es gilt

$$\begin{aligned} \alpha &\in \mathbb{R} : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\ n &\in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)! \end{aligned}$$



Bem.: Die Gammafunktion ist also eine Verallgemeinerung der Fakultäten auf reelle Zahlen.

Bew.:

Bem.: Es ist zunächst für  $\alpha > 0$  mit  $[\alpha] = n$  und  $(n+1)$ -maligem Anwenden der Regeln von L'Hospital

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^\alpha}{e^R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha R^{\alpha-1}}{e^R} = \dots = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot R^{\alpha-n-1}}{e^R} = 0$$

Es ist für  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^{\alpha+1-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^\alpha e^{-x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [-x^\alpha e^{-x}]_1^R + \alpha \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-x^\alpha e^{-x}]_\varepsilon^1 + \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{R^\alpha}{e^R} + e^{-1} \right) + \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-e^{-1} + e^{-\varepsilon} \varepsilon^\alpha) + \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{R^\alpha}{e^R} + e^{-1} \right) + \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + -e^{-1} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

und hiermit induktiv für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \text{ (s.o.)}$$

und

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

q.e.d.

## 6.5 Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen

**Satz 212** Sei  $f$  eine auf  $[m, \infty)$  monoton fallende Funktion mit  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [m, \infty)$ , dann ist die Reihe

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

genau dann konvergent, wenn

$$\int_m^{\infty} f(x) dx$$

existiert. Es gilt bei Konvergenz

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leq \int_{m-1}^{\infty} f(x) dx$$

Bew.: Zu  $\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n)$

Es ist zur Zerlegung  $x_k = k$  die Untersumme

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{n=m}^{\infty} f(n+1) \cdot 1 = \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \\ &\text{und} \\ O_n &= \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \cdot 1 = \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \end{aligned}$$

1. Ist die Reihe  $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$  divergent, so ist auch  $\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n)$  divergent. Wegen der Monotonie ist dies aber Gerade die Untersumme und auch das Integral muss somit divergent sein.

2. Ist die Reihe  $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$  konvergent, so also die Obersumme und auch das Integral muss konvergieren.

Aus  $\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx$  folgt dann durch Addition von  $f(m)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} f(n) &\leq f(m) + \int_m^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{m-1}^m f(m) dx + \int_m^{\infty} f(x) dx \\ &\leq \int_{m-1}^m f(x) dx + \int_m^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{m-1}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

Dies kann nun in beide Richtungen angewandt werden:

Bsp.:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx \text{ ist divergent, da } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ ist konvergent, da } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert}$$

oder eben umgekehrt.

## Kapitel 7

# Funktionen mehrerer Veränderlicher

### 7.1 Grundbegriffe

**Definition 213** Das kartesische Produkt  $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$  heißt ***n*-dimensionaler Vektorraum** und wird mit dem  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Die Elemente

$$x = \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

heißen **Vektoren** des Raumes und  $x_i$  heißt die ***i*-te Komponente** des Vektors.

### 7.2 Rechnen in Vektorräumen

Folgende Gesetze gelten stets in Vektorräumen: Sind  $\vec{x}, \vec{y}, z \in V$ ,  $V$  Vektorraum, so gilt

1.  $\vec{x} + \vec{y} \in V$  (Abgeschlossenheit)
2.  $\vec{x} + (\vec{y} + z) = (\vec{x} + \vec{y}) + z$  (Assoziativität)
3.  $\exists \vec{0}$  mit  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$  (Nullelement)
4.  $\forall \vec{x} \exists \vec{y}$  mit  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$  (Inverses Element)
5.  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (Kommutativität)

Weiterhin gilt für die Multiplikation mit reellen Zahlen  $a, b$  (allgemein mit Elementen eines Körpers, über den der Vektorraum definiert wird):

1.  $a \cdot \vec{x} \in V$
2.  $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = b \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$
3.  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

und die Verknüpfungsgesetze

1.  $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$
2.  $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$

Definiert man nun die Addition und Multiplikation komponentenweise, also

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n)^T + (y_1, \dots, y_n)^T \\ &: = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T\end{aligned}$$

$$a \cdot \vec{x} := (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)^T$$

so liefert der  $\mathbb{R}^n$  wie oben bereits erwähnt einen Vektorraum.

**Definition 214** *Der Ausdruck*

$$\sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k$$

heißt *Linearkombination der Vektoren*. Vektoren heißen *linear abhängig*, falls sich einer als *Linearkombination der anderen darstellen läßt*.

**Definition 215** *Die Vektoren*

$$\vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)^T$$

(*k*-te Komponente 1) heißen *kanonische Einheitsvektoren*.

## 7.3 Metrische Räume

**Definition 216** *Eine Funktion  $d$  auf einem Vektorraum  $V$  mit*

$$\begin{aligned}d &: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ &d(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}$$

heißt *Metrik*, falls gilt

$$\begin{aligned}d(\vec{x}, \vec{y}) &= 0 \iff x = y \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z})\end{aligned}$$

Bem.: Ein Vektorraum und eine Metrik heissen zusammen metrischer Raum.

In einem metrischen Raum gilt stets

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &\geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= d(\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ |d(\vec{x}, \vec{z}) - d(\vec{y}, \vec{z})| &\leq d(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \end{aligned}$$

Denn:

$$\begin{aligned} 0 &= d(\vec{x}, \vec{x}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{x}, \vec{z}) = 2d(\vec{x}, \vec{z}) \\ \text{also} &: d(\vec{x}, \vec{z}) \geq 0 \\ \text{bzw. } d(\vec{x}, \vec{y}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Aussage 2: Mit  $\vec{x} = \vec{z}$  gilt

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{x}) + d(\vec{y}, \vec{x}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \\ d(\vec{y}, \vec{x}) &\leq d(\vec{y}, \vec{y}) + d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Die dritte Aussage können Sie zur Übung beweisen.

Metriken können dabei vielfältig definiert werden, z.B.

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k| \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \end{aligned}$$

Bem. Für diese gebräuchlichen Metriken gilt

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, \vec{0})$$

## 7.4 Normen im $\mathbb{R}^n$

**Definition 217** Sei  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Eine Norm ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| \\ \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

1.  $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2.  $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (Dreiecksungleichung)

Folgerungen:

1. (aus 2. mit  $\alpha = -1$ )

$$\|\vec{x}\| = \|-\vec{x}\|$$

- 2.

$$\|\vec{x}\| \geq 0$$

denn:

$$\begin{aligned} 0 &= \|\vec{x} - \vec{x}\| \leq \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\| \\ &= 2\|\vec{x}\| \end{aligned}$$

Die wichtigsten Normen sind

$$\begin{aligned} \text{Euklidische Norm} &: \|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \\ \text{Maximum-Norm} &: \|\vec{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \\ \text{Summen-Norm} &: \|\vec{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k| \end{aligned}$$

Bem: Der Grund, weshalb die Betrachtung der Normen erst in diesem zweiten Teil der Analysis auftaucht, ist der folgende: Für  $n = 1$  ist  $\vec{x} = x$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{x^2} = |x| \\ \|\vec{x}\|_\infty &= |x| \\ \|\vec{x}\|_1 &= |x| \end{aligned}$$

Also ist dort jede Norm der Betrag der Zahl.

Im  $\mathbb{R}^2$ , also für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ (eukl. Abstand)} \\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|) \\ \|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

Eine Norm dient zur Bestimmung von Größen eines Vektors. Welcher Vektor der größte ist, ist damit jedoch auch normabhängig.

Bsp.: Betrachte

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \vec{y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

So ist:

in der euklidischen Norm

$$\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2 = 5$$

in der Maximum-Norm

$$4 = \|\vec{x}\|_\infty < \|\vec{y}\|_\infty = 5$$

und in der Summen-Norm

$$7 = \|\vec{x}\|_1 > \|\vec{y}\|_1 = 5$$

**Satz 218** Jeder Vektorraum mit einer Metrik  $d$  ist normierbar, falls

$$d(a \cdot \vec{x}, 0) = |a| \cdot d(\vec{x}, 0)$$

und

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, \vec{0})$$

Eine Norm wird dann definiert gemäß

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{x}, \vec{0})$$

Bew.: Es sind die Normeigenschaften zu überprüfen:

1.  $\|\vec{x}\| = 0 \iff d(\vec{x}, \vec{0}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2.  $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = d(\alpha \cdot \vec{x}, 0) = |\alpha| \cdot d(\vec{x}, 0) = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| = d(\vec{x} + \vec{y}, \vec{0}) = d(\vec{x}, -\vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{0}) + d(-\vec{y}, \vec{0}) = d(\vec{x}, \vec{0}) + d(\vec{y}, \vec{0}) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (Dreiecksungleichung)

**Definition 219** Der Wert

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| := d(\vec{x}, \vec{y})$$

heißt **Abstand** von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ . Dieser Wert hängt von der gewählten Norm ab.

Im obigen Beispiel ist

$$\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

war der Abstand

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \vec{y}\|_2 &= \sqrt{90} \\ \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty &= 9 \\ \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 &= 12\end{aligned}$$

Dennoch sind Normen nicht willkürlich. Dies liefert



**Definition 220** Zwei Normen  $\|\vec{x}\|_a$  und  $\|\vec{x}\|_b$  heißen **äquivalent**, falls  $\forall \vec{x}$  positive Konstanten  $m$  und  $M$  existieren (also unabhängig von  $\vec{x}$ ), so daß

$$m \|\vec{x}\|_a \leq \|\vec{x}\|_b \leq M \|\vec{x}\|_a$$

**Satz 221** Im  $\mathbb{R}^n$  sind alle Normen äquivalent und es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} a) \quad \|\vec{x}\|_\infty &\leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_\infty \\ b) \quad \|\vec{x}\|_\infty &\leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty \\ c) \quad \|\vec{x}\|_2 &\leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_2 \end{aligned}$$

Bew. zu b)

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|\vec{x}\|_1 \\ \|\vec{x}\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = n \|\vec{x}\|_\infty \end{aligned}$$

## 7.5 Das Skalarprodukt

**Definition 222** Ein **Skalarprodukt** ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \times \vec{y} &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \\ \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}_1 \pm \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle \pm \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &\geq 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 0 \iff \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Bem.: Es ist stets

$$\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} - \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$$

Bsp.: Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$$

ein (und auch das normalerweise stets verwendete) Skalarprodukt. Bew. Übung. Der Zusammenhang zur euklidischen Norm ist hier auch ersichtlich:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \|\vec{x}\|_2^2$$

**Satz 223** *Schwarz Ungleichung* Sei  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\vec{x}, \vec{y})$  Skalarprodukt, dann gilt

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$$

Z.B. gilt im obigen Beispiel

$$\sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

Bew.: Ist  $\vec{x} = \vec{0}$  oder  $\vec{y} = \vec{0}$  so ist nichts zu zeigen. Sei nun  $\vec{x} \neq \vec{0}$  und damit  $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ . Dann existiert

$$a = -\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\vec{x} + a\vec{y}, \vec{x} + a\vec{y}) = a^2 (\vec{x}, \vec{x}) + 2a (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})^2} (\vec{x}, \vec{x}) - 2 \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})} (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} - 2 \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= -\frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} + (\vec{y}, \vec{y}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} (\vec{y}, \vec{y}) &\geq \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} \\ (\vec{y}, \vec{y}) \cdot (\vec{x}, \vec{x}) &\geq (\vec{x}, \vec{y})^2 \end{aligned}$$

Ist  $(\vec{x}, \vec{y}) < 0$ , so gilt sowieso

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

und für  $(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$  enthält obige Gleichung nur positive Größen und die Wurzel erhält die Relation

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

q.e.d.

Bem.: Eigentlich gilt damit sogar

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

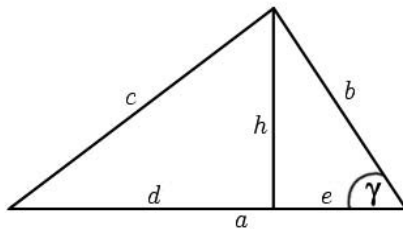
Es sei noch bemerkt, dass ein Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst keine Norm ist, denn

$$(\vec{x}, \vec{x}) = a^2 (\vec{x}, \vec{x})$$

während bei Normen gilt

$$\|a\vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$$

Aber es gilt:



**Satz 224** Für ein beliebiges Skalarprodukt ist

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

eine Norm.

Für diese Norm lautet dann die Schwarz Ungleichung

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Bem. Es gilt weiterhin

**Satz 225** der Cosinussatz

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \gamma$$

wobei  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  ist.

Bew.:

Teil 1: Wir betrachten zunächst das (nicht vektorielle) Dreieck mit  $\gamma < 90^\circ$ , für  $\gamma = 90^\circ$  ist dies der Satz des Pythagoras. (Übung: Wie ändert sich der Beweis für  $\gamma > 90^\circ$ ? Bem.: Es ist  $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos(\gamma)$ )

Hier gilt:

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - e^2 \\ d^2 &= (a - e)^2 \\ c^2 &= d^2 + h^2 \\ &= (a - e)^2 + b^2 - e^2 \\ &= a^2 - 2ae + e^2 + b^2 - e^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ae \end{aligned}$$

Wg.

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{e}{b} \\ e &= b \cos \gamma \end{aligned}$$

und damit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Teil 2: Nun betrachten wir die Grössen weiterhin als Vektoren ( $\vec{c}$  und  $\vec{a}$  starten links unten,  $\vec{b}$  endet im Winkel  $\gamma$ ) und sehen:  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ . Damit ist obige Gleichung:

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \gamma$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 &= \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

und damit

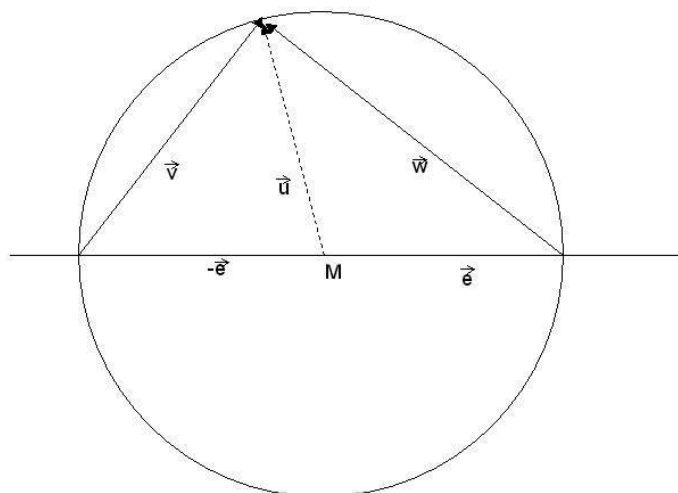
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \gamma$$

q.e.d.

Insbesondere ist

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

Bsp.: Der Satz des Thales: Wir betrachten einen Kreis mit Radius  $r = \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\|$



Es ist

$$\begin{aligned}\vec{e} + \vec{w} &= \vec{u} \\ -\vec{e} + \vec{v} &= \vec{u}\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} - \vec{e} \\ \vec{v} &= \vec{u} + \vec{e}\end{aligned}$$

und für das Skalarprodukt gilt

$$\begin{aligned}< \vec{v}, \vec{w} > &= < \vec{u} + \vec{e}, \vec{u} - \vec{e} > \\ &= < \vec{u}, \vec{u} > - < \vec{e}, \vec{e} >\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}< \vec{u}, \vec{u} > &= \|\vec{u}\|^2 = r^2 \\ < \vec{e}, \vec{e} > &= \|\vec{e}\|^2 = r^2\end{aligned}$$

und damit

$$< \vec{v}, \vec{w} > = r^2 - r^2 = 0$$

Als kleine Zusammenfassung der Begriffe sei erwähnt:

1. Für jede Metrik  $d(\vec{x}, \vec{y})$ , welche zusätzlich erfüllt  $d(a \cdot \vec{x}, 0) = |a| \cdot d(\vec{x}, 0)$  und  $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, \vec{0})$ , ist  $d(\vec{x}, 0)$  eine Norm.

2. Für jedes Skalarprodukt ist  $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$  eine Norm.

## 7.6 Mengen im $\mathbb{R}^n$

### 7.6.1 Offene Mengen

**Definition 226**  $\varepsilon$ -Umgebung: Sei  $\|\cdot\|$  Norm im  $\mathbb{R}^n$ , dann heißt

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{x}_0$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|$ .

Einerseits sind damit zwar  $\varepsilon$ -Umgebungen normabhängig, andererseits gilt im  $\mathbb{R}^n$  wegen der Äquivalenz aller Normen Normunabhängigkeit in sofern, dass die Elemente einer  $\varepsilon$ -Umgebung in einer Norm in einer  $\varepsilon^*$ -Umgebung mit  $\varepsilon^* = k\varepsilon$  bzgl. einer zweiten Norm liegen.

Bsp.: Wir betrachten nun den  $\mathbb{R}^2 = (x, y)$  und  $U_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{0}\| = \|\vec{x}\| < 1\}$

1.  $\|\vec{x}\|_2 :$

$$\begin{aligned} U_1(\vec{0}) &= \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\} \\ &= \left\{ x^2 + y^2 < 1 \right\} \end{aligned}$$

2.  $\|\vec{x}\|_\infty :$

$$U_1(\vec{0}) = \{\max(|x|, |y|) < 1\}$$

3.  $\|\vec{x}\|_1 :$

$$U_1(\vec{0}) = \{|x| + |y| < 1\}$$

Wir definieren analog zum  $\mathbb{R}^1$

**Definition 227** Sei  $D$  Menge,  $\|\cdot\|$  Norm. Dann:

1.  $\vec{x}_0$  heißt **innerer Punkt** von  $D$ , falls  $\exists \varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \in D$ .
2.  $D$  heißt **offene Menge**, falls alle Punkte von  $D$  innere Punkte sind.

## 7.6.2 Abgeschlossene Mengen

**Definition 228** Sei  $D$  Menge,  $\|\cdot\|$  Norm. Dann:

1.  $\vec{x}_0$  heißt **Häufungspunkt** von  $D$ , falls  $\forall \varepsilon > 0$   $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$  einen Punkt  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$  enthält.
2.  $D$  heißt **abgeschlossene Menge**, falls Sie alle Häufungspunkte von  $D$  enthält.

## 7.7 Beschränktheit und Ordnung

**Definition 229** Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, falls es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\|\vec{x}\| < M \quad \forall \vec{x} \in D$$

Existiert eine solche Schranke nicht, so heißt die Menge **unbeschränkt**.

**Definition 230** Gilt für einen Vergleichsoperator  $\leq$

1.  $\vec{x} \leq \vec{x}$
2.  $\vec{x} \leq \vec{y} \wedge \vec{y} \leq \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \leq \vec{z}$
3.  $\vec{x} \leq \vec{y} \wedge \vec{y} \leq \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

so heißt der Operator **Halbordnung**.

Bem.: Dieser Operator ist jedoch i.A. nicht für alle Elemente definiert. Betrachte:

$$\vec{x} \leq \vec{y} :\Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

aber:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Existiert eine Halbordnung für alle Elemente, so sprechen wir von einer Ordnung, d.h. es gilt stets

$$\vec{x} \leq \vec{y} \text{ oder } \vec{y} \leq \vec{x}$$

Fazit: Die Zahlen in  $\mathbb{R}$  bilden einen Zahlkörper und die Elemente unterliegen einer Ordnung. Im  $\mathbb{R}^n$  sind die Elemente Vektoren (kein Körper) und diese unterliegen einer Halbordnung.

Bem.: Durch zusätzliche Bedingungen können auch Vektoren in eine Ordnung gebracht werden. Die wichtigste Ordnung ist hierbei die lexikographische Ordnung. Hierbei wird der Vektor komponentenweise betrachtet und die erste verschiedene Komponente wird auf ihre Größe hin untersucht. Formal:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\leq \vec{y} :\Leftrightarrow \\ x_i &= y_i \quad i = 1, \dots, l \text{ und } x_{l+1} < y_{l+1} \end{aligned}$$

z.B. beim Datumsvektor (Jahr, Monat, Tag, Std, Min, Sek)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2008 \\ 3 \\ 14 \\ 13 \\ 25 \\ 38 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2008 \\ 3 \\ 14 \\ 14 \\ 08 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

## 7.8 Folgen im $\mathbb{R}^n$

**Definition 231** 1. Sei  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \in \mathbb{R}^n$ , dann heißt  $\vec{x}_n$  **Folge im  $\mathbb{R}^n$** , kurz:  $\langle \vec{x}_n \rangle$

2.  $\langle \vec{x}_n \rangle$  heißt **konvergent** gegen  $\vec{x}$  (den **Grenzwert**), falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$  so dass  $\forall n > n_0(\varepsilon)$  gilt:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

3.  $\langle \vec{x}_n \rangle$  heißt **Cauchy-Folge** gegen  $\vec{x}$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$  so dass  $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$  gilt:

$$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \varepsilon$$

Bem.:

1. Da im  $\mathbb{R}^n$  alle Normen äquivalent sind, reicht Konvergenz für eine Norm zu zeigen.

2. Folgen im  $\mathbb{R}^n$  bedeuten Folgen in jeder Vektorkomponente. Konvergenz bedeutet dann, dass alle Komponenten konvergieren.

3. Cauchy-Folgen bedeuten entsprechend Cauchy-Folgen in allen Komponenten.

$$\text{Bsp.: } \vec{x}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n^2} \\ \frac{\sin(n)}{n} \end{pmatrix} \text{ ist konvergent gegen } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Definition 232** Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn die Menge aller Folgenglieder in jeder Komponente beschränkt ist.

**Definition 233**  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Häufungspunkt** von  $\langle \vec{x}_n \rangle$ , falls  $\forall \varepsilon > 0$  unendlich viele  $\vec{x}_n$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{x}$  liegen.

Weiterhin gelten analog zum  $\mathbb{R}^1$  :

**Satz 234** (Bolzano-Weierstraß für Folgen):

1. Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungspunkt
2. Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mind. eine konvergente Teilfolge

**Satz 235** Jede unendliche beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn Sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

**Satz 236** Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Wir betrachten nun Funktionen

$$\begin{array}{rcl} \vec{f}: & D & \rightarrow W \\ & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

Kurz:  $\vec{f}(\vec{x})$

Diese Funktionen haben Sie in linearer Form bereits in der linearen Algebra kennengelernt ( $A$  sei  $m \times n$ ,  $\vec{x}$  sei  $n \times 1$  und  $\vec{b}$   $m \times 1$ )

$$\vec{f}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Häufig ist der Fall  $m = 1$  vorkommend, also in Abhängigkeit von  $n$  Eingabewerten wird ein (skalarer) Wert  $f(\vec{x})$  berechnet. Damit ist

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$



## 7.9 Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Anschaulich darstellbar sind die Fälle  $n = 1$  (Analysis 1),  $n = 2$  (Analysis 2) und mit Einschränkungen  $n = 3$ .

Zur Notationsvereinfachung betrachten wir nun Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und können somit mit den Komponenten des Vektors rechnen.

Betrachten wir also den Fall  $n = 2$  :

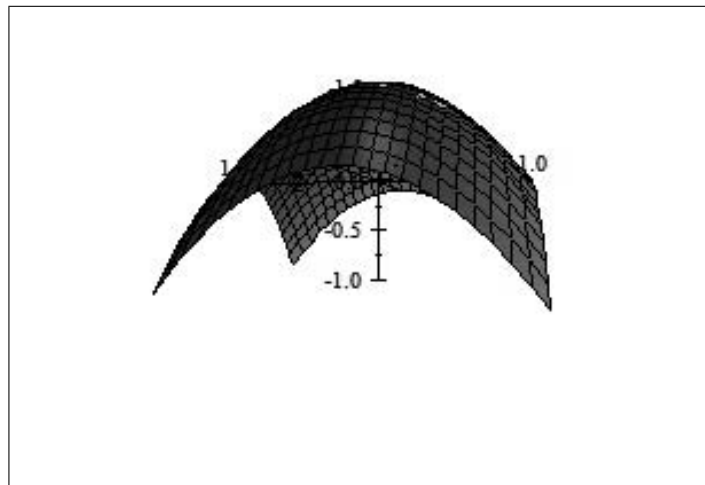
$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightarrow z \end{array}$$

**Definition 237** Die Menge  $G(f) = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  heisst **Graph** der Funktion.

Gezeichnet wird dieses in dem wir 2 Koordinatenachsen als Definitionsbereich verwenden und die dritte als Funktionsachse betrachten. Wir erhalten somit ein Oberflächendiagramm.

Beispiel: Sei

$$\begin{array}{rcl} D & = & \mathbb{R}^2 \\ f(x, y) & = & z = 1 - x^2 - y^2 \end{array}$$



Eine weitere übliche Darstellung für Funktionen der Gestalt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Verwendung von Höhenlinien (Isobaren). Hierzu werden diejenigen Punkte  $(x, y)$  dargestellt, die einen festen Funktionswert  $z_0 = f(x, y)$  annehmen.

Im obigen Fall sind dies also alle Punkte, die erfüllen

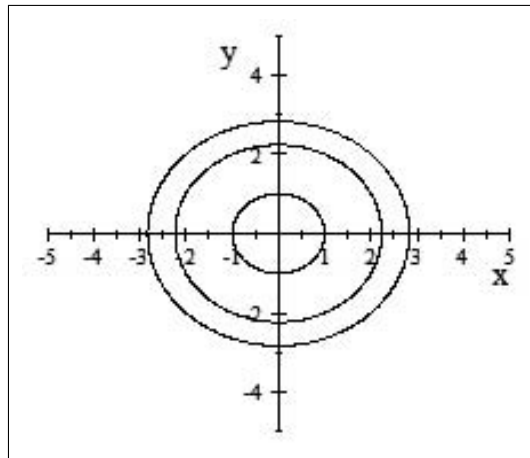
$$z_0 = 1 - x^2 - y^2$$

Betrachten wir beispielsweise die Höhenlinie zu  $z_0 = 0$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

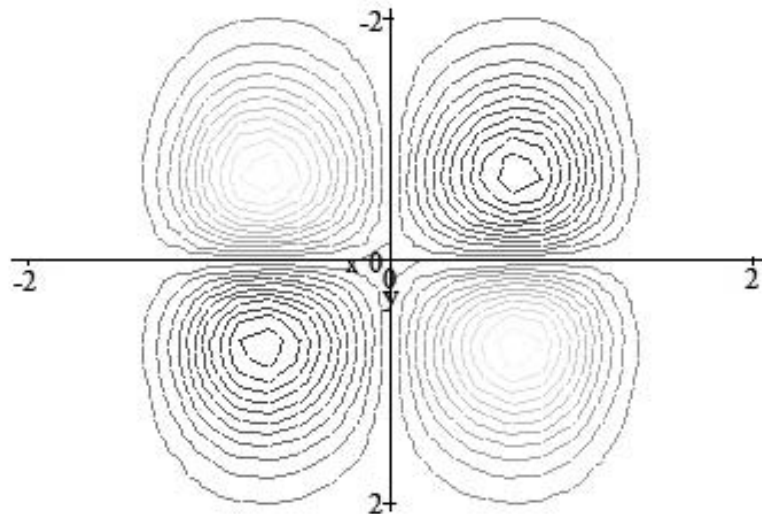
und damit den Einheitskreis. Zu beliebigem  $z_0$  erhalten wir analog

$$x^2 + y^2 = 1 - z_0$$



also den Kreis mit Radius  $\sqrt{1 - z_0}$  um den Ursprung.

Ein Höhenlinienbild liefert also eine Konturdarstellung in einem zweidimensionalen Koordinatensystem



Allgemein erhalten wir die Höhenlinien aus dem Oberflächendiagramm durch einen Schnitt in Höhe  $z_0$  durch die Funktion. Diese Schnittkontur wird dann in ein zweidimensionales Diagramm übertragen.

## 7.10 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

### 7.10.1 Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$

**Definition 238** Wir bezeichnen mit dem Grenzwert  $g$

$$g = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$$

den Grenzwert jeder gegen  $\vec{x}_0$  konvergenten Folge  $\vec{x}_n$ , falls dieser existiert und damit insbesondere eindeutig ist.

Alternativ:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0 \exists \delta(\varepsilon, \vec{x}_0), \\ \text{so dass } \forall \|\vec{x} - \vec{x}_0\| &< \delta \text{ gilt} \\ \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Die beliebige Annäherung an die Stelle  $\vec{x}_0$  bedeutet, dass wir uns auf einem beliebigen Pfad dem Punkt annähern.

### 7.10.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)

Tragen wir die Oberfläche  $z = f(x, y)$  auf, so können wir die Funktion in  $z$ -Richtung schneiden und erhalten die Höhenlinien der Funktion. Schneiden wir entlang der Koordinatenachsen entweder entlang der  $x$ -Achse oder der  $y$ -Achse, so erhalten wir ebenfalls Funktionen - die Schnittfunktionen - in  $x$  oder  $y$ , also

**Definition 239** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2, f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_1 : x \rightarrow g(x) = f(x, y_0)$$

heißt **Schnittfunktion** bei  $y = y_0$  durch  $x$ .  
und entsprechend

$$f_2 : y \rightarrow h(y) = f(x_0, y)$$

**Schnittfunktion** bei  $x = x_0$  durch  $y$ .

Allgemeiner:

**Definition 240** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_i : x_i \rightarrow g_i(x_i) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

heißt **Schnittfunktion** durch  $x_i$ .

Bsp.: Sei

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 5x_1 + x_2 \cdot x_3 \\ x_1^{(0)} &= 2 \\ x_2^{(0)} &= 3 \\ x_3^{(0)} &= 5 \end{aligned}$$

Die Schnittfunktionen sind

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = 5x_1 + 15 \\ f_2(x_2) &= f(x_1^{(0)}, x_2, x_3^{(0)}) = 10 + 5x_2 \\ f_3(x_3) &= f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3) = 10 + 5x_3 \end{aligned}$$

### 7.10.3 Partielle Ableitungen

Offensichtlich können wir nun im obigen Beispiel die (Schnitt-)Funktionen eindimensional differenzieren, also z.B.

$$f_2'(x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 5$$

Zur gegebenen Funktion gibt es somit jedoch nicht nur eine erste Ableitung, sondern gleich drei erste Ableitungen.

Daher definieren wir

**Definition 241** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in U$ ,  $f$  heißt in  $\vec{x}_0$  **partiell differenzierbar nach**  $x_i$  wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i + h, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{h}$$

existiert. Der Wert  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  heisst dann die **partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$** .

Bem.:

1. Alternativ kann mit

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \text{1 i-te Komponente} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

verwendet werden

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

2. Die partielle Ableitung ist also die Ableitung der Schnittfunktion in  $x_i$  und gibt die Steigung der Tangente in  $x_i$ -Richtung an.

3. Es gibt somit allgemein  $n$  erste Ableitung einer Funktion in  $n$  Unbekannten.

4. Wir schrieben auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}$$

**Definition 242** Eine Funktion heißt (partiell) **differenzierbar** wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

Beispiel 1:

$$f(x, y, z) = x^2y + z^3 + 2$$

ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2xy \\ f_y(x, y, z) &= x^2 \\ f_z(x, y, z) &= 3z^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Mit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \neq (0, \dots, 0)^T$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \|\vec{x}\|_2 \\ &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

ist  $f$  differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\ &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|_2} \end{aligned}$$

### 7.10.4 Stetigkeit

Wir definieren analog zum eindimensionalen

**Definition 243** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in U$ ,  $f$  heißt in  $\vec{x}_0$  **stetig**, wenn

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) \\ &= f\left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{x}\right) \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  Grenzwert jeder gegen  $\vec{x}$  konvergenten Folge  $\vec{x}_n$  ist. Formal:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)$$

**Definition 244**  $f$  heißt **stetig in  $U$** , wenn die Funktion für jedes  $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in U$  stetig ist.

Bem.:

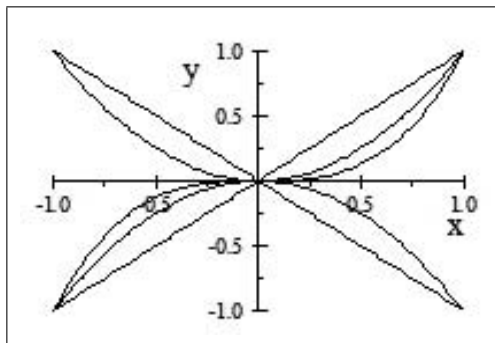
1. Stetigkeit bedeutet somit Stetigkeit in allen Komponenten.
2. Eine Verkettung stetiger Funktionen ist wie im  $\mathbb{R}^1$  wieder stetig.

Bsp.:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - \sin(y^2) \text{ ist stetig} \\ f(x, y) &= \sin(x + y) \text{ ist stetig} \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

Bem.: Um Stetigkeit nachzuweisen muss man sich dem Punkt  $\vec{x}_0$  aus allen Richtungen annähern, nicht nur wie im  $\mathbb{R}^1$  von links und rechts.

Dazu betrachten wir beispielsweise den Ursprung  $\vec{x}_0 = (0, 0)^T$



Eine Folge ist dann

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Bsp.: Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (0, 0) \end{cases}$$

Dann ist mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

nun zum Aufzeigen der Unstetigkeit **eine** Folge gesucht, deren Grenzwert nicht  $f(0, 0) = 0$  ist.

Also: Betrachte nun

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2 \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

### Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$ über Polarkoordinaten

Alternativ können wir die Folge in polaren Koordinaten beschreiben. Dann hat ein Punkt  $(x, y)$  die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_n &= r_n \cos \varphi_n \\ y_n &= r_n \sin \varphi_n \end{aligned}$$

Damit wir gegen den Ursprung konvergieren, muss gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Umgekehrt gilt auch dass für beliebige  $\varphi_n$  für Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  die Folge gegen den Ursprung konvergiert.

Damit gilt:

1.  $f$  ist in  $\vec{x}_0 = (0, 0)^T$  stetig, falls

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) &= 0 \\ \text{bzw. } \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= f(0, 0) \end{aligned}$$

2. Umgekehrt ist für die Unstetigkeit zu zeigen, dass wir uns auf einem Pfad dem Ursprung nähern können, wo eben nicht gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = f(0, 0)$ , also  $f$  ist in  $\vec{x}_0 = (0, 0)^T$  unstetig, falls

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) = h(\varphi) \neq 0$$

z.B. wenn wir uns auf einer Geraden, also mit einem konstanten Winkel  $\varphi$  uns dem Ursprung nähern und dabei gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) = h(\varphi) \neq 0$

Bsp.: Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (0, 0) \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

und damit beispielsweise für  $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) = \frac{1}{2}$$

und damit Unstetigkeit.

Andererseits ist

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (0, 0) \end{cases}$$



stetig, da

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \varphi \sin \varphi \\ &= 0\end{aligned}$$

Weitere Methoden zum Nachweis von Stetigkeit und Unstetigkeit sind:

1. Unstetigkeit: Grenzwerte entlang der Kurven:

Wir nähern uns dem Ursprung nun aus verschiedenen Richtungen

Entlang der y-Achse:  $x = 0, \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$

Entlang der x-Achse  $y = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$

Entlang einer oder mehrerer Funktionen mit  $g(0) = 0 : y = g(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x, g(x))$

Existiert einer der Grenzwerte nicht oder erhält man zwei verschiedene Grenzwerte, so ist die Funktion unstetig.

Bsp.:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Betrachte die Annäherung auf verschiedenen Geraden:

$y = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$y = 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

und damit Unstetigkeit.

2. Stetigkeit: Abschätzung durch eine stetige Funktion. Hierbei schätzen wir mit  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium den Betrag durch eine stetige Funktion ab. z.B.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dann ist

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{xy^2}{x^4 + y^2} \right| < \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x|$$

Wg  $x \rightarrow 0$  ist auch  $|x| \rightarrow 0$  und dies liefert die Stetigkeit.

### 7.10.5 Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit

**Definition 245** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (aber unabhängig von  $\vec{x}_0$ ) gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

Gleichmässige Stetigkeit ist wegen der Unabhängigkeit von  $\vec{x}_0$  insbesondere Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich  $D$ .

Es gilt:

**Satz 246** Ist eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und abgeschlossen, so ist  $f$  gleichmässig stetig.

**Definition 247** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante  $L$  gibt (unabhängig von  $\vec{x}_0$ ), so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq L \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Ist  $L < 1$  so heisst die Abbildung **Kontraktion**.

Bem: Für  $\vec{y} = \vec{x}_0$  lautet die Bedingung

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq L \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Bsp.: Sei

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ f(\vec{x}) &= x^2 + y^2 \\ D &= [0, 2] \times [0, 2] \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  Lipschitz stetig auf  $D$ , denn

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| &\leq |x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2| \\ &\leq |x_1^2 - x_2^2| + |y_1^2 - y_2^2| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| + |y_1 - y_2| \cdot |y_1 + y_2| \\ &\leq 4 \cdot (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= 4 \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \end{aligned}$$

mit der Lipschitz-Konstante  $L=4$ .

**Satz 248** Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig, dann ist  $f$  auf  $D$  gleichmässig stetig und in jedem Punkt stetig.

### 7.10.6 Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$

**Definition 249** Ein Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  heisst **Nullstelle** einer Funktion  $\vec{f}$ , falls

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

Damit ergibt sich

**Definition 250** Ein Punkt  $\vec{x}^* \in D$  heißt **Fixpunkt** einer Funktion  $\vec{\varphi}$ , falls

$$\vec{\varphi}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$$

Damit gilt analog zum  $\mathbb{R}^1$

**Satz 251** (Fixpunktsatz von Banach) Sei  $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\|\vec{\varphi}(\vec{x}) - \vec{\varphi}(\vec{y})\| \leq L \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

und  $L < 1$ , dann hat  $\vec{\varphi}$  genau einen Fixpunkt.

### Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Während im  $\mathbb{R}^1$  alle differenzierbaren Funktionen auch stetig waren, gilt dies im  $\mathbb{R}^n$  nicht.

Bsp.:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (0, 0) \end{cases}$ . Wir betrachten die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$ . Dort gilt zunächst  $f(x, 0) = f(0, y) = 0 = f(0, 0)$

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Aber die Funktion ist wie oben gesehen dort unstetig.

Eine Verschärfung der Differenzierbarkeit liefert damit:

**Definition 252**  $f$  heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in  $x_i$  stetige Funktionen (und insbesondere beschränkt) in  $x_i$  sind.

Denn in diesem Fall gilt (ohne Beweis):

**Satz 253** Ist  $f$  in  $U$  partiell differenzierbar und in  $\vec{x}_0 \in U$  stetig partiell differenzierbar, so ist  $f$  in  $\vec{x}_0$  stetig.

### 7.10.7 Der Gradient

Wir haben bereits kennengelernt, dass ein Vektor in  $n$  Unbekannten  $n$  erste Ableitungen hat. Diese Ableitungen werden in einem Vektor zusammengefasst:

**Definition 254** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar,  $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in U$ , dann heißt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{pmatrix} &= : \nabla f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ &= \text{grad } f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{aligned}$$

der **Gradient von  $f$  in  $\vec{x}_0$** .

Der Operator  $\nabla f$  heißt der **Nabla-Operator**. Kurz: Nabla  $f$ .

Bsp.: Sei  $\vec{x}_0 = (1, 2, 3)^T$ ,  $f(x, y, z) = x^2y + z^3 + 2$ , dann ist

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\text{grad } f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix}$$

**Satz 255** *Rechenregeln für Gradienten: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt:*

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g) \quad (7.1)$$

$$\text{grad}(\alpha f) = \alpha \cdot \text{grad}(f) \quad (7.2)$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(g) \quad (7.3)$$

Bew.: Komponentenweises Differenzieren liefern direkt das Ergebnis.

### 7.10.8 Die Tangentialebene

Wir betrachten nun wieder eine Funktion in zwei Unbekannten  $z = f(x, y)$  sowie einen festen Punkt  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Wir gehen weiterhin davon aus, dass  $f$  stetig partiell differenzierbar ist. Betrachten wir nun in  $(x_0, y_0, z_0)$  alle Tangenten, so haben diese alle den gleichen Normalenvektor und bilden somit eine Ebene

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

wobei  $\vec{v}_i$  nun zwei beliebige, verschiedene Tangentenvektoren sind. Betrachten wir die Tangenten entlang der Koordinatenachsen so erhalten wir

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Statt der vektoriellen Darstellung können wir auch den Ansatz verwenden

$$T(x, y) = a + b \cdot (x - x_0) + c \cdot (y - y_0)$$

Die Tangentialebene hat zunächst den gleichen Funktionswert

$$z_0 = f(x_0, y_0) = T(x_0, y_0) = a$$

und die gleiche Steigung in die Koordinatenrichtungen

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= T_x(x_0, y_0) = b \\ f_y(x_0, y_0) &= T_y(x_0, y_0) = a \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Gleichung der Tangentialebene

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Bsp.: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 4x^2y + xy^2 + 1$$

und den Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

Die Tangentialebene ergibt sich aus den Werten

$$\begin{aligned} z_0 &= f(x_0, y_0) = 8 + 4 + 1 = 13 \\ f_x(x, y) &= 8xy + y^2 \\ f_x(x_0, y_0) &= 16 + 4 = 20 \\ f_y(x, y) &= 4x^2 + 2xy \\ f_y(x_0, y_0) &= 4 + 4 = 8 \\ T(x, y) &= 13 + 20 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (y - 2) \end{aligned}$$

bzw vektoriell

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Tangentialebene im  $\mathbb{R}^n$  wird einer Funktion in  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  mit

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

an der Stelle

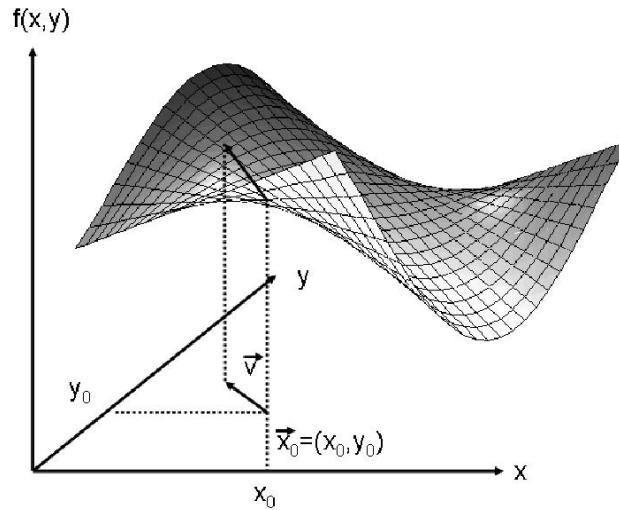
$$\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

analog definiert durch

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + f_{x_1}(\vec{x}_0) \cdot (x_1 - x_1^{(0)}) + f_{x_2}(\vec{x}_0) \cdot (x_2 - x_2^{(0)}) + \dots + f_{x_n}(\vec{x}_0) \cdot (x_n - x_n^{(0)}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \sum f_{x_k}(\vec{x}_0) \cdot (x_k - x_k^{(0)}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \nabla f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

### 7.10.9 Die Richtungsableitung

Bisher betrachten wir Schnitte und damit auch die Steigungen nur entlang der Koordinatenachsen. Also beispielsweise war  $f_x$  die Steigung in Richtung des ersten Einheitsvektors  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Entsprechend  $f_y$  die Steigung in Richtung des zweiten Einheitsvektors  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Sei nun  $\vec{v} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$  ein Vektor der Länge 1, d.h.  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ , dann sprechen wir ebenfalls von einem Einheitsvektor. Nun schneiden wir entlang dieses Vektors die Funktion und beobachten den Anstieg der Funktion in dieser Richtung.



Und wir definieren:

**Definition 256** Die Ableitung in Richtung des Vektors  $\vec{v} = (e_1, \dots, e_n)^T$  mit  $\|\vec{v}\| = 1$  heißt **Richtungsableitung**  $D_v(f)$  von  $f$  in Richtung von  $\vec{v}$ . Es ist

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + he_1, \dots, x_n + he_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

Häufig wird die Richtungsableitung auch notiert mit

$$D_v(f) =: \frac{\partial f}{\partial v}$$

Falls die vorgegebene Suchrichtung nicht die Länge eins hat, lässt sich zu einem beliebigen Vektor  $\vec{w} \neq \vec{0}$  der Vektor  $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$  ein Vektor mit gleicher

Richtung (da er nur mit einem positiven Skalar multipliziert wird) und der Länge

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \left\| \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{w}\|} \|\vec{w}\| = 1\end{aligned}$$

erzeugen.

Bsp.: Wir betrachten

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 - y \\ x_0 &= y_0 = 1 \\ \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}D_v(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h/\sqrt{2}, y_0 + h/\sqrt{2}) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})(1 + \frac{h}{\sqrt{2}} - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Diese Berechnung erweist sich i.A. als umständlich. Daher werden wir eine alternative Berechnung herleiten.

Wir betrachten nun die Zerlegung des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und die Tangentialebene im Punkt  $(x_0, y_0)$

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Also liegen zunächst einmal die Vektoren  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  und  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  in der Ebene. Weiterhin aber auch der Vektor  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ D_v(f) \end{pmatrix}$ .

Da die drei Vektoren in einer Ebene liegen, muss gelten

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = 0$$

also wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ D_v(f) \end{pmatrix} = -f_x(x_0, y_0) \cdot e_1 - f_y(x_0, y_0) \cdot e_2 + D_v(f) = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} D_v(f) &= f_x(x_0, y_0) \cdot e_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot e_2 \\ &= \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Also im obigen Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{grad } f(x_0, y_0) &= \text{grad } f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ D_v(f) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun zu jeder vorgegebenen Suchrichtung  $\vec{v}$  der Länge 1 - bei anderen Suchrichtung muss zunächst normiert werden - berechnen, wie groß die Steigung in dieser Suchrichtung ist. Hier stellt sich nun die Frage, welche Suchrichtung diejenige mit der größten Steigung ist. Hier hilft eine andere Definition des Skalarproduktes. Es ist zum einen mit der Scharz-Ungleichung

$$D_v(f) = \text{grad } f \cdot \vec{v} \leq \|\text{grad } f\| \cdot \|\vec{v}\| = \|\text{grad } f\|$$

oder mit Hilfe des Cosinus-Satz noch genauer

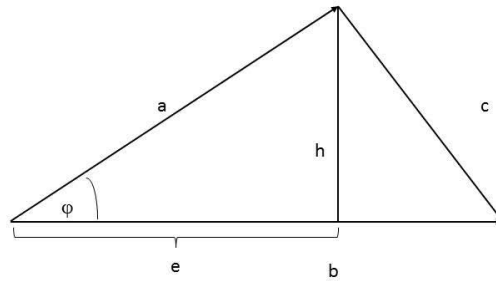
$$\begin{aligned} D_v(f) &= \text{grad } f \cdot \vec{v} \\ &= \|\text{grad } f\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi \\ &= \|\text{grad } f\| \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$



wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

Beweis zum Cosinus-Satz:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$ .

Wir betrachten das folgende Dreieck (für Winkel größer als 90 Grad ist der Beweis leicht zu modifizieren) :



Wir bezeichnen dann mit den nicht vektoriellen Größen die Längen, also  $a = \|\vec{a}\|$ . Zunächst betrachten wir die Seitenlängen skalar, also nicht vektoriell, und erhalten mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - e)^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2eb + e^2 + a^2 - e^2 \\ &= b^2 - 2eb + a^2 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt gemäss Definition des Cosinus

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e}{a} \\ e &= \cos \varphi \cdot a \end{aligned}$$

und damit

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \varphi$$

Vektoriell ergibt sich für die eingezeichneten Vektoren

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \|\vec{c}\|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} \\
 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\
 &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\
 &= \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= b^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \varphi \\
 &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Damit wird der Wert maximal für  $\cos \varphi = 1$ , d.h.  $\varphi = 0$ . Dies bedeutet aber das Suchrichtung und Gradient in die gleiche Richtung zeigen und sich nur in der Länge unterscheiden. Also muß dann gelten

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$$

und der maximale Wert ist dann

$$D_v(f) = \|\text{grad } f\|$$

Andererseits wird die Steigung minimal - also der größtmögliche Abfall der Funktion - für  $\cos \varphi = -1$ , d.h.  $\varphi = \pi$ .

Dort ist dann

$$\vec{v} = -\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$$

und der maximale Wert ist dann

$$D_v(f) = -\|\text{grad } f\|$$

Insgesamt gilt falls wir nur die Richtung - also ohne Normierung - betrachten:

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} f(\vec{x}_0) \text{ ist die Richtung des steilsten Anstiegs von } f$$

und ebenso umgekehrt:

$$\vec{v} = -\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} f(\vec{x}_0) \text{ ist die Richtung des steilsten Abstiegs von } f$$

Bsp.:  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$  in  $x_0 = 1, y_0 = 1$

In welcher Richtung wächst die Funktion im gewählten Punkt am stärksten an?

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + 2y & \implies f_x(1, 1) &= 4 \\ f_y(x, y) &= 2x + 3y^2 & \implies f_y(1, 1) &= 5 \end{aligned}$$

$$\implies \text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 3y^2 \end{pmatrix} \implies \text{grad } f(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ also ist}$$

$$\vec{v} = \frac{\text{grad} f(1, 1)}{\|\text{grad} f(1, 1)\|} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{41}} \\ \frac{5}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

die Richtung des stärksten Anstiegs.

Bem.: Aus zwei bekannten Richtungsableitungen kann im Übrigen auch der Gradient oder die partiellen Ableitungen ohne Kenntnis der Funktion berechnet werden. Sei  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} D_{v_1}(f) &= e_1 \cdot f_x + e_2 \cdot f_y \\ D_{v_2}(f) &= e_3 \cdot f_x + e_4 \cdot f_y \end{aligned}$$

erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in den beiden Unbekannten  $f_x$  und  $f_y$ .

Bespiel: Habe eine Funktion im Punkt (1,1) die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} D_{v_1}(f) &= 3 \text{ für } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \text{und} \\ D_{v_2}(f) &= 2 \text{ für } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y \\ 2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} f_y = \sqrt{2} \cdot f_y \\ \text{also} &: f_y(1, 1) = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und

$$1 = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x$$

also:  $f_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

## 7.11 Das vollständige Differential

Wir betrachten nun wieder die Gleichung der Tangentialebene

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (7.4)$$

bzw.

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ \Delta z &= f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (7.6)$$

**Definition 257** Unter dem *vollständigen Differential* der Funktion  $z = f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  versteht man den Ausdruck

$$dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy \quad (7.7)$$

Also: Ändert sich der Input-Wert  $x$  zu  $x_0$  ( $\Delta x = x - x_0$ ) und  $y$  zu  $y_0$  ( $\Delta y = y - y_0$ ), so ändert sich der Funktionswert von  $z = f(x_0, y_0)$  um  $\Delta z$ . Damit ist der neue Funktionswert (der Tangentialebene)  $z + \Delta z$ .

$$\text{Bsp: } f(x, y) = x^2 + y^2 \quad x_0 = 3; y_0 = 2$$

$$z = f(x_0, y_0) = 9 + 4 = 13$$

$$\begin{aligned} f_x = 2x &\implies f_x(x_0, y_0) = 6 \\ f_y = 2y &\implies f_y(x_0, y_0) = 4 \end{aligned}$$

$$(\text{Tangentialebene: } f_1(x, y) = 13 + 6 \cdot (x - 3) + 4 \cdot (y - 2))$$

$$\text{Differential: } dz = 6dx + 4dy$$

Wie wird sich der Funktionswert ändern, wenn man zum Punkt  $x_1 = 2, 5$ ,  $y_1 = 2, 5$  geht?

$$\text{Damit } dx = -0, 5 \text{ } dy = 0, 5 \text{ und damit } dz = 6 \cdot (-0, 5) + 4 \cdot 0, 5 = -1$$

$$\text{Näherung: } z + dz = 13 - 1 = 12$$

$$\text{Exakt: } z = 12, 5$$

**Definition 258** Unter dem *vollständigen Differential* einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  versteht man

$$dz = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \cdot dx_i \quad (7.8)$$

$$= f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2 + f_{x_3} \cdot dx_3 + \dots + f_{x_n} \cdot dx_n \quad (7.9)$$

Bem.: Schreibweise als Skalarprodukt

$$dz = \left( \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \right) = \langle \text{grad } f, \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \rangle \quad (7.10)$$

### 7.11.1 Anwendung: Fehlerrechnung

Betrachten wir das Differential

$$dz = f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2 + f_{x_3} \cdot dx_3 + \dots + f_{x_n} \cdot dx_n$$

und kennen für die Fehler  $dx_i$  nur den Bereich ohne Vorzeichen, z.B.  $\pm 0,01$ , so wird stets der ungünstigste Fall aufsummiert, in dem nur die Beträge betrachtet werden. Da auch die Ableitungen negativ werden können, müssen auch hier die Beträge gebildet werden:

$$\Delta z_{\max} \leq |f_{x_1}| \cdot |\Delta x_1| + |f_{x_2}| \cdot |\Delta x_2| + \dots + |f_{x_n}| \cdot |\Delta x_n|$$

Beispiel: Die Hypotenusenlänge eines Dreiecks mit den Kathetenlängen  $x$  und  $y$  werde berechnet gemäß

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir messen mit einer Genauigkeit von 0,1cm die Werte

$$x = 4\text{cm}$$

$$y = 3\text{cm}$$

Die berechnete Kathetenlänge ist 5cm. Wie genau ist dieser Wert angesichts der Eingabefehler?

Es ist

$$\Delta z_{\max} \leq |f_x| \cdot |\Delta x| + |f_y| \cdot |\Delta y|$$

mit

$$|\Delta x| = |\Delta y| = 0,1\text{cm}$$

und

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

also

$$\begin{aligned} f_x(4,3) &= \frac{4}{5} \\ f_y(4,3) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Also

$$\Delta z_{\max} \leq \frac{4}{5} \cdot 0,1 + \frac{3}{5} \cdot 0,1 = 0,14$$

Der wahre Wert liegt somit im Intervall  $[4,86; 5,14]$

### 7.11.2 Der relative Fehler

Wir haben im vorigen Abschnitt die Größe  $\Delta z_{\max}$  berechnet - den absoluten Fehler. Eine weitere wichtige Größe ist der relative Fehler

$$\frac{\Delta z}{z}$$

anhand der möglichen relativen Eingabefehler

$$\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$$

Hier kann kein allgemeingültiges Verfahren angegeben werden. Jedoch am Beispiel wird klar, was zu tun ist:

Sei  $z = f(x, y) = x^2 y^3$ . Dann ist  $f_x(x, y) = 2xy^3$  und  $f_y(x, y) = 3x^2 y^2$ . Es ist  $\Delta z \leq |2xy^3| |\Delta x| + |3x^2 y^2| |\Delta y|$  und daher

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{z} &\leq \frac{|2xy^3| \cdot |\Delta x| + |3x^2 y^2| \cdot |\Delta y|}{|x^2 y^3|} \\ &= \frac{2}{|x|} |\Delta x| + \frac{3}{|y|} |\Delta y| \\ &= 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + 3 \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \end{aligned}$$

Dieses Verfahren lässt sich auf Funktionen der Gestalt

$$z = f(x, y) = c \cdot x^a \cdot y^b$$

verallgemeinern und dort gilt

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + b \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

Beispiel: Sie möchten das Volumen eines Quaders mit den Seitenlängen a, b und c, welche mit relativen Meßfehlern  $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = \varepsilon$  behaftet sind, mit

einer Genauigkeit von  $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq 0,01 = 1\%$  berechnen gemäß  $z = a \cdot b \cdot c$ . Wie groß darf der Eingangsfehler  $\varepsilon$  maximal sein?

Es ist

$$\begin{aligned} z &= f(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \\ f_a &= b \cdot c \\ f_b &= a \cdot c \\ f_c &= a \cdot b \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta z &\leq |f_a| \cdot |\Delta a| + |f_b| \cdot |\Delta b| + |f_c| \cdot |\Delta c| \\ &= |b \cdot c| \cdot |\Delta a| + |a \cdot c| \cdot |\Delta b| + |a \cdot b| \cdot |\Delta c| \\ \frac{\Delta z}{z} &\leq \frac{|\Delta a|}{|a|} + \frac{|\Delta b|}{|b|} + \frac{|\Delta c|}{|c|} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right| \leq 3\varepsilon \leq 0,01 \end{aligned}$$

Also ist zulässig

$$\varepsilon \leq \frac{0,01}{3}$$

### 7.11.3 Parametrische Funktionen

Bsp.: Wir möchten nun alle Punkte des Einheitskreises, also alle Punkte mit

$$x^2 + y^2 = 1$$

als Funktion beschreiben. Auflösen dieser Gleichung nach  $y$  liefert

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

und wir erhalten zwei (algebraische) Funktionen. Die Berechnung erscheint etwas umständlich und es ist auch uneinsichtig, warum gerade  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  und nicht umgekehrt gezeichnet wurde. Einsichtiger wäre das Zeichnen des Einheitskreises als eine zeitliche Funktion, bei der zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Stift sich an einer Koordinate  $(x(t), y(t))$  befindet. Somit liesse sich ein beliebiger Pfad durch die  $x-y$ -Ebene beschreiben und man wäre nicht an den engen Funktionsbegriff  $y = f(x)$  gebunden. Dies liefert:

**Definition 259** Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  in  $t$  stetige Funktionen. Die Menge

$$\{(x, y) | x = x(t), y = y(t), t \in \mathbb{R} \text{ (oder } t \in [a, b])\}$$

heißt **Kurve**. Die Darstellung  $t \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

**Parameterdarstellung der Kurve.**

Analog wird eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$  beschrieben durch

$$\{(x, y, z) | x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \mathbb{R} \text{ (oder } t \in [a, b])\}$$

Bem. Aus dem Endresultat - dem Graphen der Kurve - erkennt man jedoch nicht wie schnell die Kurve gezeichnet wurde, also wie die Ableitung der Funktion nach der Zeit ist.

Übung: Skizzieren Sie hierzu den Graphen

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

an den Zeitpunkten  $t = 0, 1, 2$

Bem.: Die Funktionen  $y = f(x)$  erhalten wir aus der Abbildung

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Schliesslich sei nun noch bemerkt wie der Einheitskreis beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ t &= [0, 2\pi] \end{aligned}$$

denn es ist zu jedem Zeitpunkt  $x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

**7.11.4 Die Kettenregel**

Betrachten wir nun Funktionen  $x = x(t), y = y(t)$  und  $z = f(x(t), y(t)) = g(t)$  so liefert das Differential

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Division durch  $dt$  liefert nun

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Bem.: Die Kettenregel lässt sich somit auch auf beliebig viele Unbekannte erweitern.

Bsp.:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = x^2 y + y^2 + 1 \\ x(t) &= e^t \\ y(t) &= t^2 \end{aligned}$$



Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 + 2y \\ \frac{dx}{dt} &= e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 2t\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2xy \cdot e^t + (x^2 + 2y) \cdot 2t \\ &= 2e^t t^2 + (e^{2t} + 2t^2) \cdot 2t \\ &= 2t^2 e^{2t} + 2te^{2t} + 4t^3\end{aligned}$$

Bem.: Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir zunächst einsetzen und dann differenzieren

$$\begin{aligned}z &= f(x, y) = x^2 y + y^2 + 1 \\ &= e^{2t} t^2 + t^4 + 1 \\ \frac{dz}{dt} &= 2e^{2t} t^2 + 2te^{2t} + 4t^3 \\ &= 2t^2 e^{2t} + 2te^{2t} + 4t^3\end{aligned}$$

Allgemein lautet damit die Kettenregel im  $\mathbb{R}^n$

**Satz 260** Sei  $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(t))$ ,  $\vec{x}(t)$  stetig in jeder Komponente  $x_k$ . Dann ist

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$$

Bsp.: Sei  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = e^t$ ,  $z(t) = 5t$ , dann ist

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2x \cdot 2t + 2y \cdot e^t + 2z \cdot 5 \\ &= 2t^2 \cdot 2t + 2e^t \cdot e^t + 2 \cdot 5t \cdot 5 \\ &= 4t^3 + 2e^{2t} + 50t\end{aligned}$$

### 7.11.5 Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Analog erhalten wir für Funktionen

$$\begin{aligned}f(x, y) \\ x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v)\end{aligned}$$

durch das Differential - in dem wir durch  $du$  und  $dv$  dividieren -

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du} \\ \frac{dz}{dv} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dv}\end{aligned}$$

bzw in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{du} \\ \frac{dz}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Bsp.: Sei  $z = f(x, y) = x^2 y^3$ ,  $x = x(u, v) = u^2 - v$ ,  $y = y(u, v) = v^2 + 2u$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du} \\ &= 2xy^3 \cdot 2u + 3x^2 y^2 \cdot 2 \\ &= 4(u^2 - v)(v^2 + 2u)^3 u + 6(u^2 - v)^2 (v^2 + 2u)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dv} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dv} \\ &= 2xy^3(-1) + 3x^2 y^2 \cdot 2v \\ &= -2(u^2 - v)(v^2 + 2u)^3 + 6(u^2 - v)^2 (v^2 + 2u)^2 v\end{aligned}$$

Bem. Beim Übergang einer Funktion zu Polarkoordinaten ergibt sich somit für eine Funktion  $f(x, y)$  mit

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{df}{dr} \\ \frac{df}{d\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diese Umrechnung ist auch für Punkte ausserhalb des Ursprungs - also  $r > 0$  - eindeutig da

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

ist.

Analog lässt sich für Funktionen in 3 Unbekannten  $f(x, y, z)$  durch Einführung von Kugelkoordinaten  $r, \varphi, \theta$  ( $\varphi$  Drehwinkel,  $\theta$  Kippwinkel) mit

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta \\y &= r \sin \varphi \sin \theta \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

berechnen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{df}{dr} \\ \frac{df}{d\varphi} \\ \frac{df}{d\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} & \frac{dz}{dr} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dz}{d\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 7.11.6 Anwendung: Implizite Differentiation

Betrachte die Funktion  $z = F(x, y(x)) = 0$  als Höhenlinie einer zweidimensionalen Funktion  $F(x, y)$  zum Wert 0 und einen Punkt auf dieser Höhenlinie mit  $z_0 = F(x_0, y_0) = 0$ , dann gilt gemäss Kettenregel

$$\frac{dz}{dx} = 0 = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (7.11)$$

$$= F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} \quad (7.12)$$

$\implies$  und insbesondere in  $(x_0, y_0)$

$$0 = F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} \quad (7.13)$$

$$y' = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \quad (7.14)$$

Bem.: Häufig wird auch die folgende Schreibweise verwendet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

Beispiel: Geg.  $x^2 + y^2 = 1 \implies F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Wie lautet die Tangentensteigung in  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ?

Zeige zunächst: Der Punkt erfüllt die Voraussetzung  $F(x, y) = 0$  :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad (7.15)$$

Dann:

$$F_x(x_0, y_0) = 2x_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$F_y(x_0, y_0) = 2y_0 = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$$

Bem.:

1. Die implizite Differentiation kann also insbesondere angewendet werden, wenn sich eine Funktion  $F(x, y) = 0$  nicht oder nicht einfach nach  $y$  auflösen lässt.

2. Die Funktion muss ggf. auf die Form  $F(x, y) = 0$  gebracht werden.

3. Es ist immer zu testen, ob der vorgegebene Punkt die Bedingung  $F(x, y) = 0$  erfüllt.

4. Die Rechnung kann an einem beliebigen Punkt  $(x_0, y_0)$  durchgeführt werden und somit auch eine Ableitungsfunktion berechnen.

Anwendungsbeispiel:

Wir betrachten die Van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (7.16)$$

als Funktion von  $p$  und  $V$  (der Rest sei hier konstant).

1. Wie lautet der Wert  $\frac{\partial p}{\partial V}$ ?

Wir betrachten die Gleichung

$$F(p, V) = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0 \quad (7.17)$$

und differenzieren implizit:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial p}} \quad (7.18)$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -(V-b) \frac{2a}{V^3} + p + \frac{a}{V^2} \quad (7.19)$$

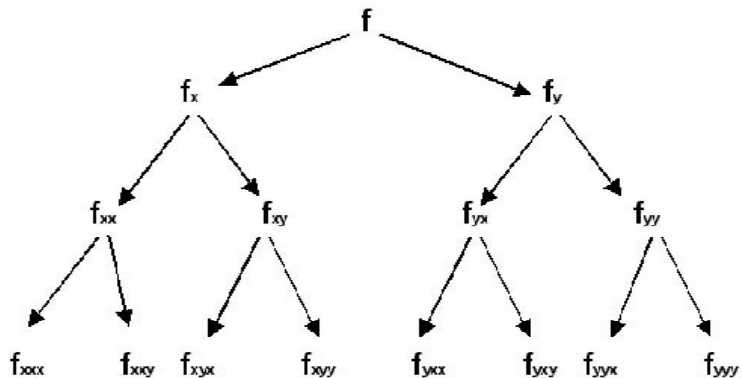
$$\frac{\partial F}{\partial p} = V - b \quad (7.20)$$

und damit

$$\frac{\partial p}{\partial V} = - \frac{-(V-b) \frac{2a}{V^3} + p + \frac{a}{V^2}}{V-b} \quad (7.21)$$

## 7.12 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Analog zum eindimensionalen Fall kann eine Funktion mehrmals hintereinander differenziert werden  $(f, f', f'', f^{(3)}, \dots)$ . Die Anzahl der Ableitungen wird mit der Ordnung der Ableitung bezeichnet. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung erhält man durch mehrmaliges partielles differenzieren. Es gibt jedoch mehrere partielle Ableitungen einer bestimmten Ordnung (so gibt es nicht EINE zweite Ableitung, sondern man kann entweder zweimal nach  $x$ , zweimal nach  $y$ , oder je einmal nach  $x$  und  $y$  differenzieren).



Ist es dabei von Bedeutung, ob zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$  differenziert wird oder umgekehrt?

Beispiel:  $f(x, y) = x^2y + 3y - x + y^2$

1. Ordnung:  $f_x = 2xy - 1$        $f_y = x^2 + 3 + 2y$

$$2. \text{ Ordnung: } f_{xx} = 2y \quad f_{xy} = 2x \quad f_{yx} = 2x \quad f_{yy} = 2$$

Wir sehen hier  $f_{xy} = f_{yx}$  Zufall?

**Satz 261** *Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung einer Funktion stetige Funktionen, so darf die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht werden.*

$$\text{D.h.: } f_{xy} = f_{yx} \quad f_{xxxy} = f_{yxyx} \quad f_{xyz} = f_{zyx}$$

Bew.: für 2 Unbekannte und die zweite Ableitung:

Es ist

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

und damit - Vertauschbarkeit der Grenzwerte ist erlaubt, da alle Grenzwerte existieren:

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + l) - f_x(x_0, y_0)}{l} \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} (f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0) - (f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0))) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0)}{l} - \frac{f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{l} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0)}{l} - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{l} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

### 7.12.1 Divergenz und Rotation

Wir betrachten nun Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

also

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \vec{f}$$

Den Gradienten verallgemeinern wir nun für vektorwertige Funktionen

$$\text{grad } \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen nun mit dem Nabla Operator (oder dem Gradienten ohne Argument)

$$\vec{\nabla} = \text{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Notation können wir definieren:

**Definition 262** Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{f} &: = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x, y, z) \end{aligned}$$

**die Divergenz von  $\vec{f}$  und mit**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{f} &: = \vec{\nabla} \times \vec{f} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} f_2(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} f_3(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**die Rotation von  $\vec{f}$**

Bem.: Die Divergenz ist also ein Skalar, die Rotation ein Vektor.

**Definition 263** Die Punkte mit  $\text{div } \vec{f} > 0$  heißen **Quellen** des Vektorfeldes,  $\text{div } \vec{f} < 0$  heißen **Senken**. Gilt stets  $\text{div } \vec{f} = 0$ , so heißt die Funktion quellenfrei.

Physikalisch bedeutet dies: Ist in einem Punkt  $\text{div } \vec{f} > 0$ , so wird in diesem Punkt die vorhandene Menge nicht erhalten, sondern zusätzlich zugeführt, bei Senken verschwindet diese Grösse. Die Rotation beschreibt hingegen, ob und wie schnell sich ein mitschwimmender Körper drehen würde. Da das Ergebnis vektoriell ist, gibt dieser auch die Drehachse mit an.

Bem. Es ist

1.

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(f) = 0$$

2.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$$

Bem.: Es ist als Berechnungshilfe für die Rotation mit den i-ten Einheitsvektoren geeignet:

$$\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{f}$$

**Definition 264** Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* von  $\vec{f}$ .

Bem. Die Jacobi-Matrix beinhaltet alle Werte, die zur Berechnung der Rotation, Divergenz und des Gradienten nötig sind.

Bsp.:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x^2 - yz \\ xyz \\ x^2 - y^2 - z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -z & -y \\ yz & xz & xy \\ 2x & -2y & -1 \end{pmatrix}$$

und damit ist der Gradient die Diagonale, also

$$\operatorname{grad} \vec{f} = \begin{pmatrix} 2x \\ xz \\ -1 \end{pmatrix}$$



Die Divergenz ist die Summe der Gradientenkomponenten, also

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{f} &: = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x, y, z) \\ &= 2x + xz - 1\end{aligned}$$

und schliesslich die Rotation

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{f} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} f_2(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} f_3(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2y - xy \\ -y - 2x \\ yz + z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 7.13 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$

Zur Erinnerung:

### 7.13.1 Eindimensional

Zur Wiederholung:

Stelle eine Funktion  $f(x)$  als Polynom um einen vorgegeben Entwicklungspunkt  $x_0$  dar, also:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots$$

Es gilt:

$$a_0 = f(x_0)$$

Nun berechnet man die Ableitungen  $f^{(k)}(x)$  und wertet diese an der Stelle  $x_0$  aus.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots$$

und somit

$$a_1 = f'(x_0)$$

Weiterhin:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots \text{ und damit } f''(x_0) = 2a_2 \text{ bzw.}$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f^{(3)}(x_0) = 6a_3 \text{ bzw. } a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{6} \text{ usw.}$$

Allgemein gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

und damit für die Reihenentwicklung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Besonders gut geeignet sind die Taylorreihenentwicklungen in der Nähe von  $x_0$ . Daher betrachten wir nun  $x = x_0 + h$  und es ergibt sich:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Insbesondere ergibt sich bei Abbruch der Reihe nach dem quadratischen Glied die oben verwendete Formel:

$$f_2(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)$$

### 7.13.2 Zweidimensional

Völlig analog zum eindimensionalen Fall wird die Funktion  $f(x, y)$  als Polynom in  $x$  und  $y$  um einen Entwicklungspunkt  $(x_0, y_0)$  beschrieben.

$$\begin{aligned} f(x, y) = & a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) \\ & + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2 \\ & + a_{30}(x - x_0)^3 + a_{21}(x - x_0)^2(y - y_0) \\ & + a_{12}(x - x_0)(y - y_0)^2 + a_{03}(y - y_0)^3 \\ & + \dots \end{aligned}$$

und damit:

$$f(x_0, y_0) = a_{00}$$

$$f_x(x, y) = a_{10} + 2a_{20}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0) + 3a_{30}(x - x_0)^2 + \dots$$

$\Rightarrow$

$$f_x(x_0, y_0) = a_{10}$$

analog:

$$f_y(x_0, y_0) = a_{01}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2a_{20} + 6a_{30}(x - x_0) + \dots \\ \implies f_{xx}(x_0, y_0) &= 2a_{20} \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$a_{20} = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{2}$$

Wiederum analog:

$$a_{02} = \frac{f_{yy}(x_0, y_0)}{2}$$

und für die gemischte Ableitung:

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= a_{11} + 2a_{21}(x - x_0) + 2a_{12}(y - y_0) + \dots \\ \implies f_{xy}(x_0, y_0) &= a_{11} \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 \\ &+ f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{f_{yy}(x_0, y_0)}{2} (y - y_0)^2 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Wiederum für Werte in der Nähe  $x = x_0 + h$  und  $y = y_0 + l$ :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + l) &= f(x_0, y_0) + h \cdot f_x(x_0, y_0) + l \cdot f_y(x_0, y_0) \\ &+ \frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0) + \dots \end{aligned}$$

Bsp.: Approximieren Sie die Funktion  $f(x, y) = \cos(x) \cdot e^y$  im Punkt  $x_0 = 0, y_0 = 0$  bestmöglich durch eine quadratische Funktion.

$$\text{Ansatz: } f_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{f_{yy}(x_0, y_0)}{2} \cdot (y - y_0)^2$$

Also sind die Größen  $f(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), f_{xx}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_0)$  und  $f_{yy}(x_0, y_0)$  zu bestimmen.

a)  $f(0, 0) = 1$

b)  $f_x(x, y) = -\sin x \cdot e^y \Rightarrow f_x(0, 0) = 0$

c)  $f_y(x, y) = \cos x \cdot e^y \Rightarrow f_y(0, 0) = 1$

d)  $f_{xx}(x, y) = -\cos x \cdot e^y \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = -1$

e)  $f_{xy}(x, y) = -\sin x \cdot e^y \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 0$

f)  $f_{yy}(x, y) = \cos x \cdot e^y \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 1$

Und damit:  $f_2(x, y) = 1 + 1 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot y^2$

Bem.: Betrachtet man

$$f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (7.22)$$

so erhält man die Gleichung der Tangentialebene. Im obigen Beispiel ist die Tangentialebene im Ursprung gegeben durch  $f(x, y) = 1 + y$ .

Weiteres Beispiel:  $f(x, y) = x^2 \cos y + x + y^2, x_0 = 1, y_0 = \frac{\pi}{2}$

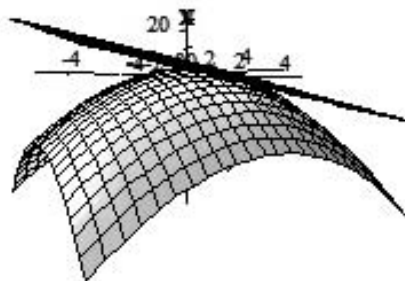
$$f(1, \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$$

$$f_x = 2x \cos y + x \quad f_x(1, \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f_y = -x^2 \sin y + 2y \quad f_y(1, \frac{\pi}{2}) = -1 + \pi$$

Tangentialebene:  $f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$   
 $= 1 + \frac{\pi^2}{4} + 1 \cdot (x - 1) + (\pi - 1) \cdot (y - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}\pi^2 + x + (\pi - 1)(y - \frac{1}{2}\pi)$

Folgende Graphen zeigt die Tangentialebene im Punkt  $(1, 1)$  und die Funktion  $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$



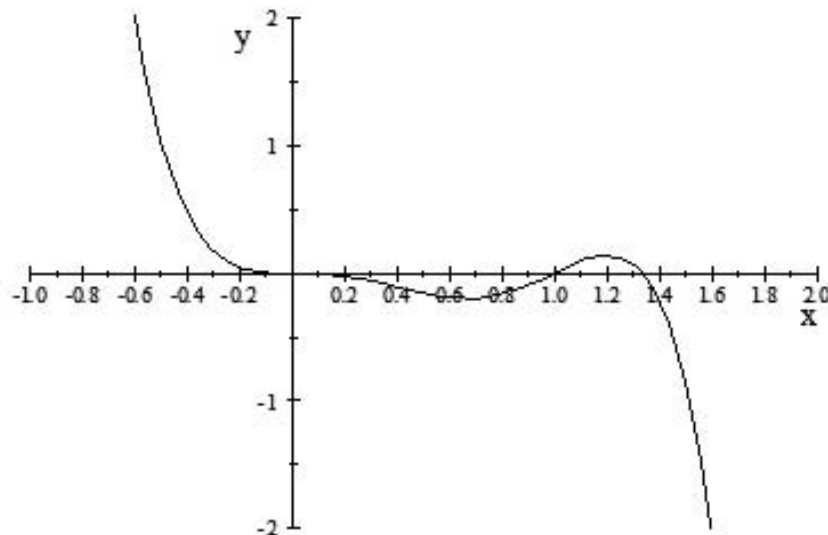
## 7.14 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen

### 7.14.1 Der eindimensionale Fall

Wir erinnern uns zunächst an den eindimensionalen Fall:

$x_0$  ist ein lokales Minimum (Maximum) von  $f$ , wenn in einer Umgebung von  $x_0$   $f$  immer größer (kleiner) als der Wert  $f(x_0)$  ist. Formal:

Finde eine Stelle  $x_0$  und ein  $\varepsilon > 0$   
 so daß  $f(x_0) < f(x_0 + h) \quad \forall \quad |h| < \varepsilon$



Wenn solche Funktionen Kosten oder Gewinne beschreiben, liefert die Lösung solcher Optimierungsverfahren geeignete Konstellationen, um den Gewinn zu maximieren bzw. die Kosten zu minimieren. Die Lösung wissen wir bereits:

**Algorithmus 265** Lokales Minimum von  $f(x)$

1. Berechne  $f'(x)$  und suche diejenigen Stellen  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

Diese Stellen sind die **Kandidaten** für lokale Minima.

2. Berechne für jeden Kandidaten  $x_0$  die Ableitung  $f''(x_0)$ .
  - a. Ist  $f''(x_0) > 0$ , so ist in  $x_0$  ein lokales Minimum
  - b. Ist  $f''(x_0) < 0$ , so ist in  $x_0$  ein lokales Maximum
  - c. Ist  $f''(x_0) = 0$ , so muß die erste von Null verschiedene Ableitung  $f^{(k)}(x_0)$  berechnet werden.

- c1. Ist  $k$  ungerade so liegt ein Sattelpunkt vor.  
 c2. Ist  $k$  gerade und  $f^{(k)}(x_0) > 0$ , so ist  $x_0$  Minimum  
 c3. Ist  $k$  gerade und  $f^{(k)}(x_0) < 0$ , so ist  $x_0$  Maximum

## 7.15 Lokale Extrema bei zwei Unbekannten

In diesem Fall hängt die Funktion nun von zwei Variablen z.B.  $x$  und  $y$  ab. "Berge" und "Täler" werden in sofern realistischer, da wir eine Darstellung in drei Dimensionen erhalten  $(x, y, f(x, y))$ . Formal ist nun ein lokales Extremum definiert als:

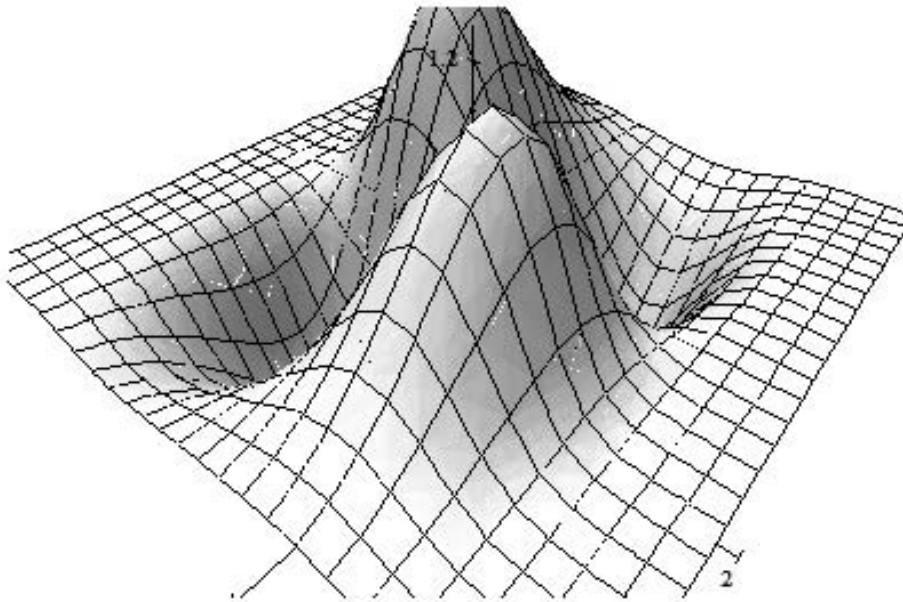
Minimiere  $f(x, y)$ , d.h. finde eine Stelle  $(x_0, y_0)$ , sowie ein  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{so daß } f(x_0, y_0) < f(x_0 + h, y_0 + l) \quad \forall \quad |h| < \varepsilon \wedge |l| < \varepsilon$$

Leider darf man sich hierbei nicht auf den Fall  $h = l$  beschränken, also  $f(x_0 + h, y_0 + h)$ , da man in diesem Fall nur auf einer Geraden Richtung  $(x_0, y_0)$  die Funktion analysiert und nicht in ihrem gesamten Umkreis um diesen Punkt.

Beispiel:

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot \exp(-x^2 - y^4) + 1$$



Lokale Extrema von  $f(x, y) = x \cdot y \cdot \exp(-x^2 - y^4) + 1$

Kommen wir zunächst wieder zu den notwendigen Voraussetzungen für ein lokales Extremum.

In den Extremalstellen muß insbesondere die partielle Ableitung in x- bzw. y-Richtung verschwinden, also analog zum eindimensionalen Fall:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0; \quad f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Bem.:

1. Wie im eindimensionalen Fall ist dies also notwendige Voraussetzung, daß die Tangentialebene horizontal verläuft.

2. Das Auffinden der Kandidaten führt in der Regel zur Lösung eines nicht-linearen Gleichungssystems von 2 Gleichungen in 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}$$

Hier können keine, eine, mehrere oder sogar unendlich viele Lösungen entstehen, welche alle separat zu untersuchen sind.

Auch hier betrachten wir nun die Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + l) \approx & f(x_0, y_0) + h \cdot f_x(x_0, y_0) + l \cdot f_y(x_0, y_0) \\ & + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (7.23)$$

und im Kandidaten gilt hier

$$f(x_0 + h, y_0 + l) \approx f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0)$$

Hinreichend für ein Minimum ist in diesem Fall:

$$\frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \quad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Für ein Maximum muß entsprechend gelten:

$$\frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \quad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Beachte hierbei, daß die Ableitungen für festes  $(x_0, y_0)$  Konstanten sind und  $h$  und  $l$  variabel. Die Frage ist nun, ob für gegebene Konstanten die quadratische Funktion in  $h$  und  $l$  immer positiv bzw. negativ ist. Betrachtet werde im Folgenden vorerst nur der Fall " $>0$ ", also den des Minimums. Die Gleichung vereinfacht sich bei Multiplikation mit  $2/l^2$  zu:

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \cdot \underbrace{f_{xx}(x_0, y_0)}_A + 2 \cdot \frac{h}{l} \cdot \underbrace{f_{xy}(x_0, y_0)}_B + \underbrace{f_{yy}(x_0, y_0)}_C > 0 \quad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Mit  $z := \frac{h}{l}$  verbleibt nun eine quadratische Ungleichung in einer Unbekannten:

$$A \cdot z^2 + 2 \cdot B \cdot z + C > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Es verbleibt die Frage:

Für welche Zahlen  $A, B$  und  $C$  ist  $A \cdot z^2 + 2 \cdot B \cdot z + C$

- a) eine nach oben geöffnete Parabel und
- b) stets positiv; d.h. es existieren keine reellen Nullstellen?

Einfach ist der Teil a): Für  $A > 0$  ist die Parabel nach oben geöffnet.

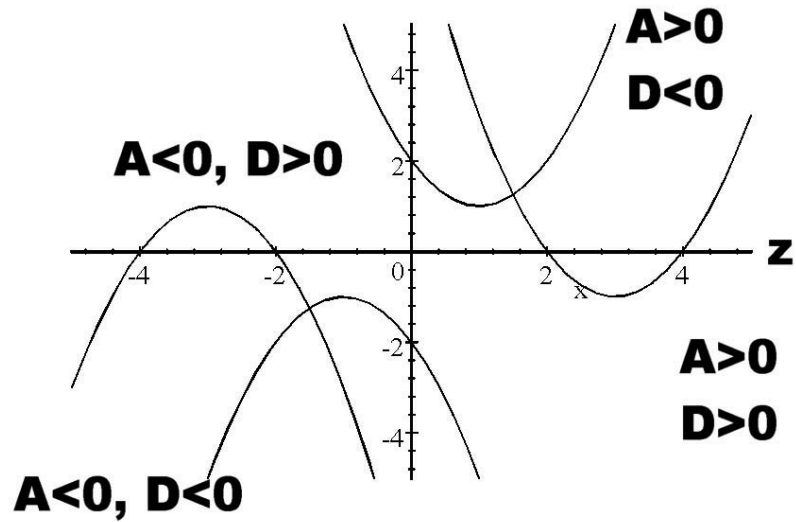
Zu Teil b) müssen über die quadratische Ergänzung/p-q-Formel die Nullstellen berechnet werden.

Die Nullstellen sind:

$$z_{1,2} = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}}_D}$$

Die Diskriminante  $D$  gibt Aufschluß über die Anzahl der Nullstellen:





Keine reellen Nullstellen gibt es für  $D < 0$ , da dann der Wert unter Wurzel negativ wird.

Eine weitere Umformung ergibt:

$$\begin{aligned}
 D &< 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} &< 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{B^2 - AC}{A^2} &< 0 \\
 \Leftrightarrow AC - B^2 &> 0
 \end{aligned}$$

Also:

Hinreichend für ein Minimum ist:

$$\begin{aligned}
 A &:= f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\
 AC - B^2 &:= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für

$$\begin{aligned}
 A &:= f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \\
 AC - B^2 &:= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0
 \end{aligned}$$

ein lokales Maximum.

Zusammengefaßt ergibt sich:

**Algorithmus 266** *Lokales Minimum von  $f(x, y)$*

1. Berechne  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  und suche diejenigen Stellen  $(x_0, y_0)$  mit

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0}$$

Diese Stellen sind die **Kandidaten** für lokale Minima.

2. Berechne für jeden Kandidaten  $(x_0, y_0)$  die Werte  $f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0)$ ,  $f_{xy}(x_0, y_0)$  und daraus den Wert

$$\boxed{d := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2}$$

- a) Ist  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ,  $d > 0 \Rightarrow$  **Lokales Minimum**
- b) Ist  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ,  $d > 0 \Rightarrow$  **Lokales Maximum**
- c) Ist  $d < 0 \Rightarrow$  **Sattelpunkt**
- d) Ist  $d = 0 \Rightarrow$  **Höhere Ableitung entscheidet**

Bemerkt sei, daß  $d$  hier gerade das entgegengesetzte Vorzeichen der eben verwendeten Diskriminante  $D$  hat. Im Vergleich zum eindimensionalen gilt: Für eine positives  $d$  sind die Extrema in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleichgerichtet (Beides Maxima oder beides Minima) und wir können die Kriterien nur für  $x$  wie im eindimensionalen Fall betrachten. Ist  $d < 0$ , so liegt ein Minimum in der einen Koordinate und ein Maximum in der anderen vor und es entsteht ein Sattelpunkt. Die unten stehende Grafik zeigt, woher der Name stammt.

Beispiel:

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

1. Kandidaten

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y &= 2y \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

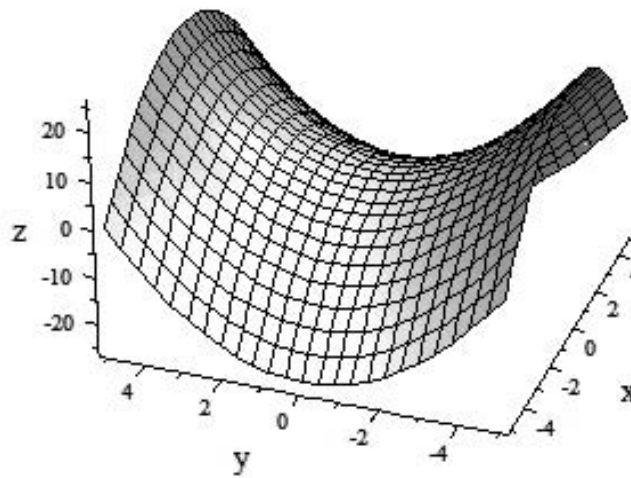
liefert  $x_0 = 0, y_0 = 0$

2. Berechne für den Kandidaten

In  $(0, 0)$  gilt:

$$f_{xx}(0, 0) = -2, f_{yy}(0, 0) = 2, f_{xy}(0, 0) = 0$$

und somit  $d := -4 < 0$  (Fall 2c), also existieren keine Extremwerte.



$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

(woran die Bedeutung des Wortes Sattelpunkt ersichtlich wird).

### 7.15.1 Schreibweise als Hesse-Matrix

Um sich die Bedingungen leichter merken zu können (und um die Erkenntnisse auch auf mehr als zwei Unbekannte erweitern zu können), kann man die Hesse-Matrix zu Hilfe ziehen:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $d = \det H$

**Satz 267** *Ist  $H$  positiv definit, so liegt ein Minimum vor, ist  $H$  negativ definit ein Maximum und bei indefinitem  $H$  ein Sattelpunkt.*

Dabei entsprechen die Definitionen von positiv definit, negativ definit und indefinit gerade oben stehenden Bedingungen:

$H$  ist negativ definit  $\iff f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \det H > 0$

$H$  ist positiv definit  $\iff f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \det H > 0$

$H$  ist indefinit  $\iff \det H < 0$

Weitere Beispiele:

$$f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$$

1. Kandidaten

$$f_x = -2x \stackrel{!}{=} 0$$

$$f_y = -2y \stackrel{!}{=} 0$$

liefert  $x_0 = 0, y_0 = 0$

2. Hesse Matrix

$f_{xx} = -2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 0$  und damit

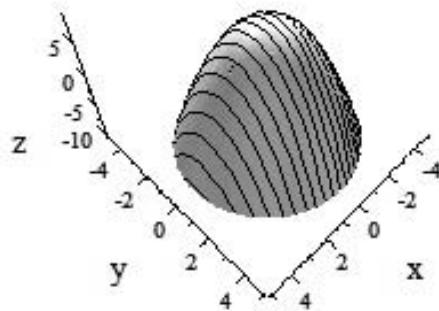
$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mit  $d := \det H = 4$

3. Es ist  $f_{xx} < 0$  und  $\det H > 0$ , somit liegt in  $(0, 0)$  ein lokales Maximum vor.

Wert:  $f(0, 0) = 8$

Graph:



Weiteres Beispiel:

$$f(x, y) = y^2 - 2y + x^3 - 3x$$

1. Kandidaten

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0 \implies x = 1 \text{ oder } x = -1$$

$$f_y(x, y) = 2y - 2 \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 1$$

liefert 2 Kandidaten:

A)  $x_0 = 1, y_0 = 1$

B)  $x_0 = -1, y_0 = 1$

Zu A)

2. Hesse Matrix

$$f_{xx}(1, 1) = 6x_0 = 6,$$

$$f_{yy}(1, 1) = 2$$

$$f_{xy}(1, 1) = 0$$

und damit

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit  $d := \det H = 12$

3. Es ist  $\det H > 0$ , somit liegt in  $(1, 1)$  ein lokales Minimum vor.

Wert:  $f(1, 1) = 1 - 2 - 1 - 3 = -3$

Zu B)

2. Hesse Matrix

$$f_{xx}(-1, 1) = 6x_0 = -6,$$

$$f_{yy}(-1, 1) = 2$$

$$f_{xy}(-1, 1) = 0$$

und damit

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit  $d := \det H = -12$

3. Es ist  $f_{xx} > 0$  und  $\det H < 0$ , somit liegt in  $(-1, 1)$  ein Sattelpunkt vor.

### 7.15.2 Extremwerte im $\mathbb{R}^n$

Im  $\mathbb{R}^n$  wird die Kandidatensuche (auch: Kritische Punkte) völlig analog durchgeführt. Kandidaten sind diejenigen Stellen  $(x_1, \dots, x_n)$ , an denen die erste Ableitung verschwindet. Hinreichend zur Bestimmung von Extremwerten sind dann

für Minima die positiv Definitheit, für Maxima die negativ Definitheit der Hesse-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Wobei die Positiv Definitheit bedeutet, dass alle Unterdeterminanten links oben beginnend stets positiv sind. Negativ definit ist die Matrix, falls die Unterdeterminanten stets abwechselndes Vorzeichen, beginnend mit einem negativen, besitzen.

Bsp.:

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ist hinreichend für ein Maximum, da

$$\begin{aligned} D_1 &= -3 < 0 \\ D_2 &= 6 > 0 \\ D_3 &= -24 < 0 \end{aligned}$$

### 7.15.3 Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten

Nicht immer muss oder kann die zweite Ableitung herangezogen werden, um die Extrema zu analysieren. Hier helfen weitere Verfahren:

1. Analyse der Umgebung: Wir betrachten den Funktionswert am Kandidaten  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$

$$f(x_0, y_0)$$

und Punkte in einer kleinen Umgebung, also Punkte mit  $\vec{x} = (x, y)^T$

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon$$

und betrachten die Änderung der Funktion

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Ist der Ausdruck für alle Werte positiv (negativ), so liegt ein Minimum (Maximum) vor. Gibt es jedoch in jeder Umgebung noch eine Richtung, z.B. entlang der Koordinatenachsen, wo es sowohl positive als auch negative Änderungen gibt, so ist der Punkt Sattelpunkt.

Bsp.:

1.

$$f(x, y) = y^4 - x^3 + 1$$

Der Kandidat ist

$$(0, 0)$$

mit

$$f(0, 0) = 1$$

Für jede beliebig kleine Umgebung gilt jedoch

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, 0) - f(0, 0) &= -\varepsilon^3 < 0 \\ f(-\varepsilon, 0) - f(0, 0) &= \varepsilon^3 > 0 \end{aligned}$$

Daher ist der Punkt Sattelpunkt.

Andererseits:

1.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$$

Es ist für jeden Punkt in der Umgebung

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 > 0$$

und daher liegt ein lokales Minimum vor.

Bem.: Wichtig ist noch zu erwähnen, dass stetig differenzierbare Funktionen, die ein lokales Extremum haben im  $\mathbb{R}^n$  an dieser Stelle nicht zwangsläufig auch den global kleinsten Wert annehmen.

In der Anwendung entstehen hierbei häufig bereits Problem im Auffinden der Kandidaten. Abschliessend hier noch zwei Anwendungsbeispiele:

#### 7.15.4 Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen

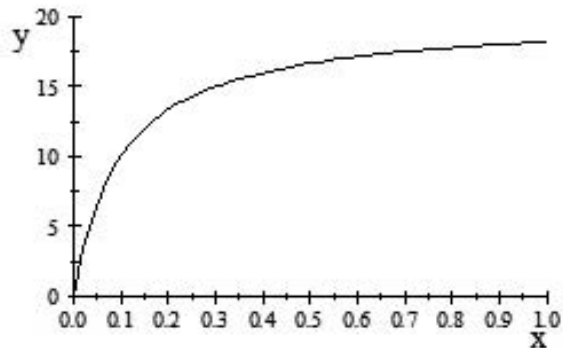
Die Nektarmenge, die eine Biene in einer Zeit  $x$  an einer Trachtstelle sammelt, sei gegeben durch die Michaelis-Menten Funktion

$$f(x) = k \cdot \frac{x}{x + K}$$

Insbesondere gilt  $f(0) = 0$ ;  $f$  ist monoton steigend und die Sättigung (also die max. Ertragsmenge) ist:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

$k$  ist hierbei eine von der Ertragsstelle abhängige Konstante,  $K$  ist für alle (verschiedenen) Ertragsstellen gleich.  $k, K$  sind hier stets positive Größen.

Die Funktion sieht für  $K = 0.1, k = 20$  wie folgt aus:



Michaelis Menten Funktion

Hat nun die Biene wiederum eine Zeiteinheit zur Verfügung, jedoch drei gleiche (Ergiebigkeit  $k$ ) Sammelstellen so ergibt sich als Ertragsfunktion:

$$g(x, y, z) = k \cdot \frac{x}{x+K} + k \cdot \frac{y}{y+K} + k \cdot \frac{z}{z+K} \quad \text{mit} \quad x + y + z = 1$$

Wegen  $z = 1 - x - y$  läßt sich die Funktion in zwei Unbekannten schreiben.  
Mit  $\frac{x}{x+K} = \frac{x+K-K}{x+K} = 1 - \frac{K}{x+K}$  ist :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= k \cdot \frac{x}{x+K} + k \cdot \frac{y}{y+K} + k \cdot \frac{(1-x-y)}{1-x-y+K} \\ &= k \cdot \left( 1 - \frac{K}{x+K} + 1 - \frac{K}{y+K} + 1 - \frac{K}{1-x-y+K} \right) \\ &= k \cdot \left( 3 - K \cdot \left( \frac{1}{x+K} - \frac{1}{y+K} - \frac{1}{1-x-y+K} \right) \right) \end{aligned}$$

mit  $x, y \geq 0, x + y \leq 1$

Führen wir die oben erarbeiteten Schritte durch:

Ableitung in x-Richtung = 0

$$f_x(x, y) = k \cdot K \cdot \left( \frac{1}{(x+K)^2} - \frac{1}{(1-x-y+K)^2} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (x+K)^2 = (1-x-y+K)^2 \Rightarrow 2x = 1-y$$



$$\implies \boxed{\mathbf{y} = \mathbf{1} - 2\mathbf{x}}$$

Ableitung in y-Richtung = 0

$$f_y(x, y) = k \cdot K \cdot \left( \frac{1}{(y+K)^2} - \frac{1}{(1-x-y+K)^2} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies (y+K)^2 = (1-x-y+K)^2$$

$$\implies \boxed{2\mathbf{y} = \mathbf{1} - \mathbf{x}}$$

Bestimmung des/der Kandidaten

$$\implies 2 \cdot (1 - 2x) = 1 - x$$

$$\iff 2 - 4x = 1 - x \iff 1 = 3x \iff \boxed{\mathbf{x} = \frac{1}{3} \implies \mathbf{y} = \frac{1}{3} \implies \mathbf{z} = \frac{1}{3}}$$

Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen im Kandidaten liefert im Kandidaten  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 1 - x - y = \frac{1}{3}$ :

$$f_{xx}(x, y) = k \cdot K \cdot \left( -2 \cdot \frac{1}{(x+K)^3} + (-2) \cdot \frac{1}{(1-x-y+K)^3} \right)$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-4k \cdot K}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^3}$$

$$f_{yy}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-4k \cdot K}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = k \cdot K \cdot \left( (-2) \cdot \frac{1}{(1-x-y+K)^2} \right)$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-2k \cdot K}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^3}$$

Analyse von  $A$  und  $d$

$$A := f_{xx} < 0;$$

$$d := f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{xy} = 16 \frac{k^2 \cdot K^2}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^6} - 4 \frac{k^2 \cdot K^2}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^6} = 12 \frac{k^2 \cdot K^2}{\left(\frac{1}{3} + K\right)^6} > 0$$

Damit hat die Funktion ein lokales Maximum.

Die Biene erwirtschaftet also den optimalen Ertrag, wenn Sie an jeder Trachtstelle ein Drittel ihrer Zeit verbringt.

Der Gesamtertrag ist dabei  $\frac{k}{K + \frac{1}{3}}$ . Würde die Biene die gesamte Zeit an

einer Stelle verbringen, so wäre der Ertrag  $\frac{k}{K + 1}$ .

### 7.15.5 Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)

C.J. Pennycuik gab für den Energieverbrauch von Zugvögeln, die mit der Geschwindigkeit  $x$  gegen die umgebende Luft fliegen, die Formel

$$E(x, y) = x^3 \cdot A \cdot y + \frac{G^2}{Bxy}$$

an.  $G$  ist die Masse des Vogels,  $y$  die Luftdichte,  $A$  und  $B$  Konstanten, die von Gestalt und Physiologie des Vogels abhängen.

Der Term  $x^3 \cdot A \cdot y$  ist die Energie, die zur Aufrechterhaltung der Fluggeschwindigkeit  $x$  nötig ist, der zweite Term ist die Energie die zur Beibehaltung der Höhe nötig ist.

Der erste Term ist somit die Energie, um den Gegenwind zu überwinden: Steigende Reibung bei steigender Geschwindigkeit führt zum Term  $x^3$ . Da die Reibung mit der Luftdichte ansteigt, ist auch hier ein Faktor  $y$  vorhanden. Die Aufrechterhaltung der Höhe verbraucht desto mehr Energie desto kleiner die Geschwindigkeit ist (wg. fallendem Auftrieb) und ist auch umgekehrt proportional zur Luftdichte, da mit höherer Luftdichte der Auftrieb höher und die Energie somit kleiner wird.

Folgende Fragen mögen von Interesse sein:

- a) Gibt es zu einer vorgegeben Geschwindigkeit  $x$  eine optimale Höhe/Luftdichte  $y$ , bei der der Energie bedarf am geringsten ist?
- b) Gibt es bei einer gegebenen Luftdichte eine optimale Geschwindigkeit, bei der der Energie bedarf am geringsten ist?
- c) Gibt es ein lokales Minimum, d.h. eine Konstellation bei der ein Geschwindigkeit-Luftdichte-Konzentration optimal ist?

Die ersten beiden Fragen können mit Hilfe der eindimensionalen Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial y} &= x^3 \cdot A - \frac{G^2}{Bxy^2} = 0 \implies G^2 = x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2 \quad (7.24) \\ \implies y &= \sqrt{\frac{G^2}{A \cdot B \cdot x^4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= 3x^2 \cdot A \cdot y - \frac{G^2}{Bx^2y} = 0 \implies G^2 = 3x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2 \quad (7.25) \\ \implies x &= \sqrt[4]{\frac{G^2}{3A \cdot B \cdot y^2}}\end{aligned}$$

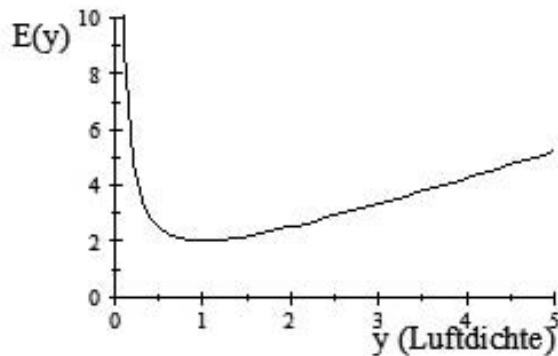
Die zweiten Ableitungen in  $x$  und  $y$  sind positiv

$$E_{yy} = \frac{2G^2}{Bxy^3} \quad (7.26)$$

$$E_{xx} = 6x^3Ay + \frac{2G^2}{Bxy^3} \quad (7.27)$$

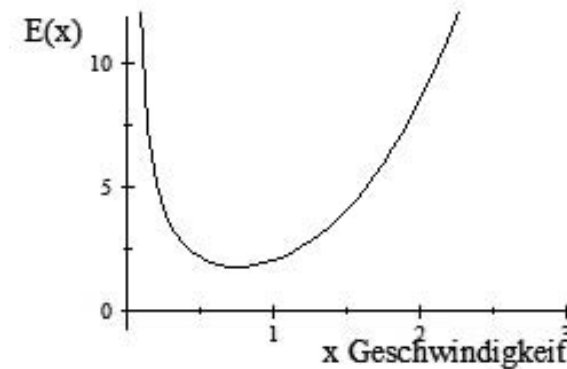
Somit lassen sich a) und b) positiv beantworten und die optimalen Werte angeben.

Zunächst kann für festes  $x$  das Optimum berechnet werden (zur Vereinfachung sind in den folgenden Grafiken alle Konstanten zu eins gesetzt, da Sie keinen Einfluß auf die Charakteristik, sondern nur auf die Lage einiger Parameter haben): In der folgenden Grafik wäre derjenige Wert, bei der die Funktion den minimalen Wert annimmt, das Optimum. Zu einer vorgegebenen Geschwindigkeit kann somit der Vogel seine Flughöhe/Luftdichte  $y$  so wählen, daß sein Energieverbrauch minimal ist.



Anpassung der Höhe (Luftdichte)

Ebenso kann für festes  $y$  (Flughöhe/Luftdichte) eine optimale Geschwindigkeit berechnet werden. An dieser Stelle  $x$  hätte der Vogel seine optimale Flugeschwindigkeit, also zu seiner Physiologie und in seiner gewählten Luftdichte (Flughöhe) den minimalen Energieverbrauch.



Anpassung der Geschwindigkeit

Wie verändert sich nun die Aufgabenstellung, wenn der Vogel gleichzeitig Flughöhe und Geschwindigkeit anpassen könnte? Gibt es ein Optimum, also eine bevorzugte Konstellation aus Geschwindigkeit und Höhe, bei der sein Energieverbrauch ein lokales Minimum annimmt?

Um ein lokales Minimum zu erhalten, müßten beide partiellen Ableitungen Null werden. Da aber nun nach (7.24) und (7.25) gleichzeitig

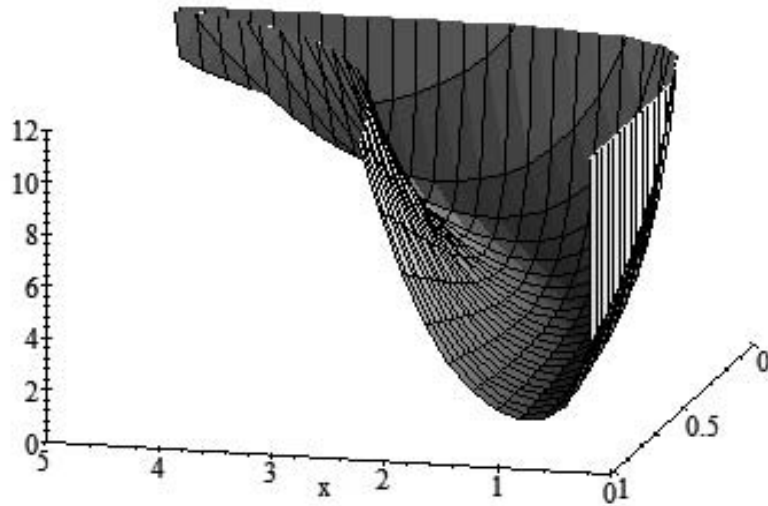
$$G^2 = x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2$$

und

$$G^2 = 3x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2$$

gelten müßte, ist dies ein Widerspruch (Gewicht gleich Null sei ausgeschlossen).

Wir wollen uns grafisch veranschaulichen, warum dies so ist:



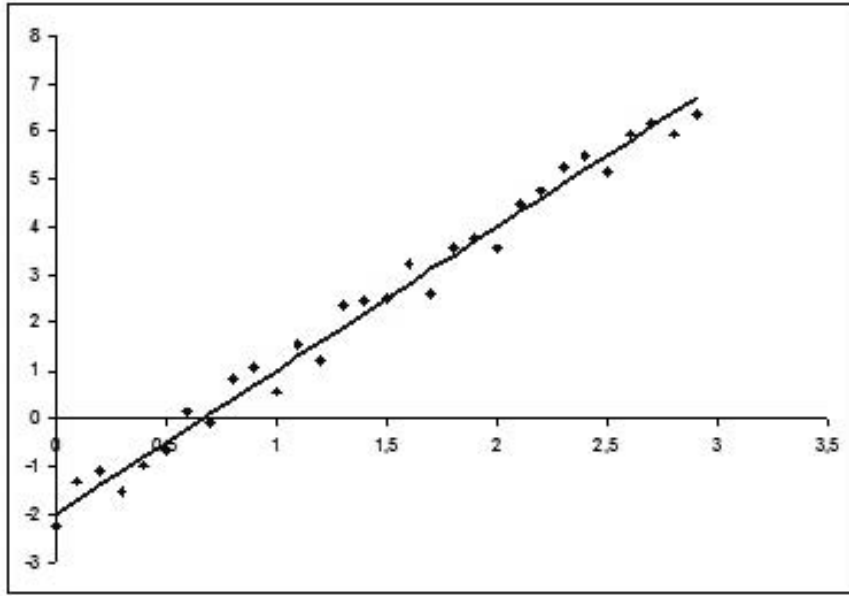
Diese "Bobbahn" zeigt: Obwohl es bei Schnitten jeweils ein Optimum in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung gibt, gibt es kein "Tal" bei der ein lokales Minimum erreicht wird.

### 7.16 Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse

Vorgegeben sind nun  $n$  Meßwerte  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  und der Zusammenhang dieser Meßwerte wird als linear angenommen, d.h. bis auf Meßfehler oder äußere Einflüsse ist der Zusammenhang von  $x$  und  $y$  gegeben durch

$$y = a + bx \quad (7.28)$$

wobei jedoch die Parameter der Geraden zwar fest aber unbekannt sind.



Dabei sind  $a$  und  $b$  so zu berechnen, dass die Abstände zur Geraden möglichst minimal werden. Hier wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwandt, d.h. die Abstände werden zunächst quadriert und dann alle Abstände aufsummiert.

Der Abstand (Fehler) am Meßwert  $x_k$  ist dabei die Differenz aus Meßwert und Geradenwert an dieser Stelle:

$$\varepsilon_k = y_k - a - bx_k \quad (7.29)$$

und damit ist das Fehlerquadrat (damit nur positive Werte addiert werden) gegeben durch

$$F_k(a, b) = \varepsilon_k^2 = (y_k - a - bx_k)^2$$

Der Gesamtfehler  $F$  ist dann

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \sum_{k=1}^n F_k(a, b) \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - a - bx_k)^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Je nach Wahl von  $a$  und  $b$  ändert sich der Gesamtfehler. Welches ist nun die optimale Wahl dieser Parameter, d.h. wann wird dieser Gesamtfehler minimal?

Hierzu muß das lokale Extremum von  $F(a, b)$  bestimmt werden. Aber Achtung: Die "Unbekannten" sind hier NICHT  $x$  und  $y$ , sondern  $a$  und  $b$ .

1. Finden der Kandidaten. Notwendige Bedingung:

Teil 1:  $F_a(a, b) = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= (-1) \cdot \sum_{k=1}^n 2(y_k - a - bx_k) \\ &= (-2) \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n a - \sum_{k=1}^n bx_k \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n a + \sum_{k=1}^n bx_k \\ \sum_{k=1}^n y_k &= a \cdot n + b \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

Teil 2:  $F_b(a, b) = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= \sum_{k=1}^n (-x_k) \cdot 2(y_k - a - bx_k) \\ &= (-2) \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k a - \sum_{k=1}^n bx_k^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{k=1}^n x_k a + \sum_{k=1}^n bx_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k &= a \cdot \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{aligned}$$

Somit ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Bem.:

Damit ist auch  $F_{aa}(a, b) = -2 \cdot (-\sum_{k=1}^n 1) = 2n > 0$ . Zur Entscheidung ob Minimum oder Maximum müssen nun weitere Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} F_{bb}(a, b) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ F_{ab}(a, b) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

und für ein lokales Maximum muss gelten

$$2n \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = 4 \cdot \left( n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right) > 0$$

also ist z. Zeigen für  $n \geq 2$ :

$$n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 > 0$$

Bew.: Induktion

Induktionsanfang:  $n=2, x_1 \neq x_2$  dann ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2 &= (n+1) \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 + x_{n+1}^2 \right) - \left( \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right)^2 \\ &= n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n x_k^2 + x_{n+1}^2 \\ &\quad - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k - x_{n+1}^2 \\ &= n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ &> \sum_{k=1}^n x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_k + x_k^2) = \sum_{k=1}^n (x_{n+1} - x_k)^2 > 0 \end{aligned}$$



( $x_{n+1}$  ist mindestens einmal ungleich  $x_k$ , da bereits  $x_1 \neq x_2$  gilt) q.e.d.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} x_k & 1 & 2 \quad 9 \\ y_k & 1 & 3 \quad 8 \end{array}$$

Damit:

$$n = 3,$$

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1 + 2 + 9 = 12$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1 + 4 + 81 = 86$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = 1 + 3 + 8 = 12$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 8 = 79$$

Zu Lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 79 \end{pmatrix}$$

$$\text{Liefert: } a = \frac{14}{19}, b = \frac{31}{38}$$

Damit ist die Regressionsgerade

$$y = \frac{14}{19} + \frac{31}{38}x$$

Formal noch zu beantworten: Minimum oder Maximum?

$$F_a = \frac{\partial F}{\partial a} = (-1) \cdot \sum_{k=1}^n 2(y_k - a - bx_k)$$

$$F_{aa} = (-2) \cdot (-n) = 2n = 6 > 0$$

$$F_{ab} = 2 \sum_{k=1}^n x_k = 24$$

$$F_{bb} = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = 172$$

$\implies$  Hesse - Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 24 & 172 \end{pmatrix} = 1038 - 576 > 0 \quad (7.32)$$

Wegen  $F_{aa} = 6 > 0$  ist dies ein Minimum.

Wenn die Werte jedoch nicht linear zusammenhängen, muß ein anderer Ansatz gewählt werden.

Wie sieht die Matrix bei einem beliebigen Funktionenansatz  $y = a + b \cdot f(x)$  aus? Fast wörtlich kann obige herleitung übernommen werden:

Der Abstand (Fehler) am Meßwert  $x_k$  ist dabei die Differenz aus Meßwert und Funktionswert an dieser Stelle:

$$\varepsilon_k = y_k - a - b \cdot f(x_k) \quad (7.33)$$

und damit ist das Fehlerquadrat (damit nur positive Werte addiert werden) gegeben durch

$$F_k(a, b) = \varepsilon_k^2 = (y_k - a - b \cdot f(x_k))^2$$

Der Gesamtfehler  $F$  ist dann

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \sum_{k=1}^n F_k(a, b) \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - a - b \cdot f(x_k))^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

1. Finden der Kandidaten. Notwendige Bedingung:

$$\text{Teil 1: } F_a(a, b) = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= (-1) \cdot \sum_{k=1}^n 2(y_k - a - b \cdot f(x_k)) \\ &= (-2) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n a - \sum_{k=1}^n b \cdot f(x_k)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n a + \sum_{k=1}^n b \cdot f(x_k) \\ \sum_{k=1}^n y_k &= a \cdot n + b \sum_{k=1}^n f(x_k) \end{aligned}$$

$$\text{Teil 2: } F_b(a, b) = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= \sum_{k=1}^n (-f(x_k)) \cdot 2(y_k - a - b \cdot f(x_k)) \\ &= (-2) \cdot (\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot y_k - \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot a - \sum_{k=1}^n b \cdot f(x_k)^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot y_k &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot a + \sum_{k=1}^n b \cdot f(x_k)^2 \\ \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot y_k &= a \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) + b \sum_{k=1}^n f(x_k)^2 \end{aligned}$$

Somit ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n 1 & \sum_{k=1}^n f(x_k) \\ \sum_{k=1}^n f(x_k) & \sum_{k=1}^n f(x_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot y_k \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

### 7.16.1 Approximation von Funktionen

Motivation: Welche Gerade  $g(x) = a + bx$  approximiert die Funktion  $h(x) = \sqrt{x}$  im Intervall  $[0; 1]$  bestmöglich? Im Gegensatz zum vorigen Beispiel sind hier nicht diskrete Meßwerte gegeben, sondern der Abstand der Funktion soll nun kontinuierlich gemessen werden. Daher verwenden wir hier als Maß das Integral des quadratischen Abstandes zwischen den Funktionen

$$F(a, b) = \int_0^1 \underbrace{(a + bx - \sqrt{x})^2}_{f(a, x) \text{ bzw. } f(b, x)} dx$$

Das Minimum erhalten wir in dem wir zunächst die Kandidaten bestimmen. Nach der Leibniz Regel (s.o.) gilt für Integrale mit konstanten Grenzen das Differentiation und Integration vertauscht werden darf, also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a} dx \\ &= \int_0^1 2(a + bx - \sqrt{x}) dx \\ &= \left[ 2ax + bx^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2a + b - \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial b} dx \\ &= \int_0^1 2x(a + bx - \sqrt{x}) dx \\ &= \dots = a + \frac{2}{3}b - \frac{4}{5} = 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem liefert die Lösung

$$a = \frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}$$

und damit die gesuchte Funktion

$$g(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$$

Verbleibt die Frage nach Minimum und Maximum. Es sind alle zweiten Ableitungen konstant (und entsprechen daher den Werten im Kandidaten)

$$\begin{aligned} F_{aa}(a, b) &= 2 \\ F_{ab}(a, b) &= 1 \\ F_{bb}(a, b) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit gilt  $\det(H) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$   
 $F_{aa}(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}) = 2 > 0$

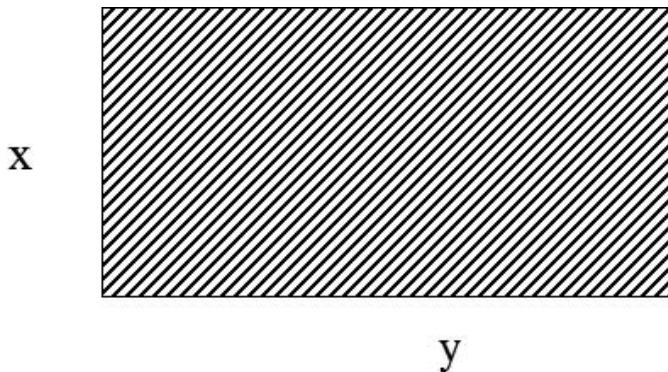
und damit liegt ein lokales Minimum vor.

## 7.17 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Entgegen der im letzten Abschnitt behandelten "freien" Extremwertaufgaben, existieren in der Realität häufig Restriktionen - sog. "Nebenbedingungen" - z.B. physikalischer Art (positive Größen) oder Maximierung unter Einhaltung eines gewissen Materialvorrats.

Beispiel: Wir wollen mit einem Zaun der Länge 40m ein möglichst großes rechteckiges Gebiet abzäunen.

Skizze:



Maximiere  $f(x, y) = x \cdot y$  (Fläche) unter der Nebenbedingung

$$2x + 2y = 40$$

bzw.

$$2x + 2y - 40 = 0$$

Während wir im bisherigen zur Lösung dieses Problems aus der Nebenbedingung  $y$  eliminiert haben und dies in  $f$  eingesetzt haben, geht dies bei komplexeren Zusammenhängen in der Regel nicht.

Eine allgemeine Methode zur Lösung solcher Probleme liefern die

### 7.17.1 Lagrange Multiplikatoren

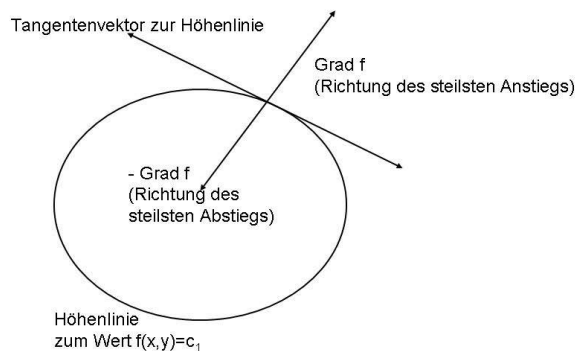
Zu Lösen:

- Maximiere oder Minimiere  $f(x, y)$
- Für Werte, welche  $g(x, y) = 0$  erfüllen

Zunächst beschäftigen wir uns noch einmal mit der Richtungsableitung

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \text{grad } f \cdot \vec{v} \\ &= \|\text{grad } f\| \cos \varphi \end{aligned}$$

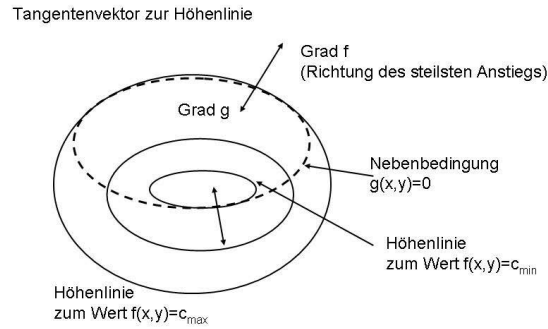
Wir hatten oben bereits gesehen, dass die Richtungsableitung dort maximal wurde, wo der Winkel zwischen Gradient und Richtung  $0^\circ$  ist und minimal bei  $180^\circ$ . Wir sehen weiterhin, dass es auch stets zwei Richtungen mit der Richtungsableitung Null gibt, nämlich die Beiden zum Gradienten senkrechten Vektoren. Die Richtungsableitung Null bedeutet aber, dass wir uns in eine Richtung mit gleichem Funktionswert bewegen. In dieser Richtung verläuft also die Höhenlinie. Grafisch bedeutet dies, falls wir zunächst eine Höhenlinie zu  $f(x, y) = c_1$  betrachten:



In Richtung des Gradienten verlaufen nun die Höhenlinien zu grösseren Funktionswerten, in Richtung von  $-\text{grad } f$  die Höhenlinien zu kleineren Funktionswerten. In der aussenliegenden Ebene müssen somit alle Funktionswerte anwachsen. Würde die Funktion an anderen Stellen fallen, gäbe es auch weitere Werte zur gleichen Höhenlinie.

Bem. Sollte der Gradient nach innen zeigen, dreht sich das Szenario gerade um.

Nun betrachten wir die Höhenlinie zu  $g(x, y) = 0$ .



In einem maximalen (oder minimalen) Funktionswert dieser Punkte zur Funktion  $f(x, y)$  müssen sich die Funktionen in einem Punkt berühren, und somit müssen die Tangenten parallel sein und damit für die Gradienten gelten

$$\text{grad } f = \tilde{\lambda} \cdot \text{grad } g$$

bzw. mit  $\lambda = -\tilde{\lambda}$

$$\text{grad } f + \lambda \cdot \text{grad } g = 0$$

Zunächst sei ein Sonderfall erwähnt: Gibt es Punkte, in denen die Nebenbedingung erfüllt ist und deren Gradient von  $g$  zum Nullvektor wird, so ist dieser Punkt ebenfalls kritischer Punkt und muss gesondert betrachtet werden. Dies ist die sog. Rangbedingung. Zeigen wir, dass die Punkte, in denen der  $\text{grad } g = \vec{0}$  wird, nicht die Nebenbedingung erfüllt, so sind wir dieses Problem bereits los.

Für alle anderen Punkte gilt:

Der Wert  $\lambda$  heisst Lagrange-Parameter. Dies ist aber gerade die Ableitung der Funktion (Lagrange-Funktion) nach  $x$  und  $y$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \quad (7.36)$$

Leiten wir die Funktion nach  $\lambda$  ab, so erhalten wir zusätzlich gerade die Nebenbedingung

$$g(x, y) = 0$$

Andererseits gilt für Punkte, welche die Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  erfüllen, die Gleichheit von ursprünglicher Funktion und Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) \quad (7.37)$$

für beliebiges  $\lambda$ .

Wir wenden nun das Verfahren wie folgt an:

Zunächst betrachten wir die Lagrange-Funktion  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$  und bestimmen die Kandidaten wie in freien Optimierungen

$$\text{grad } L = \vec{0} \quad (7.38)$$

d.h.

$$f_x + \lambda \cdot g_x = 0 \quad (7.39)$$

$$f_y + \lambda \cdot g_y = 0 \quad (7.40)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (7.41)$$

Die dritte notwendige Bedingung für die Kandidaten stellt sicher, daß bei der Lösung dieses Problems nur Kandidaten herauskommen, welche auch die geforderte Nebenbedingung erfüllen. Da für solche Punkte aber  $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$  gilt, erhalten wir die optimale Lösung des ursprünglichen Problems. Die ersten beiden Bedingungen sorgen dafür, dass nur Punkte betrachtet werden, bei denen Funktion und Nebenbedingung parallele Gradienten haben.

Zur Entscheidung, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt, ist die Hesse-Matrix für die drei Unbekannten aufzustellen.

Die "geränderte" Hesse-Matrix hat in diesem Fall die Gestalt:

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

und die Determinante dieser Matrix gibt Aufschluß über die Art des Extremums:

$$\det(H) > 0 \implies \text{Maximum} \quad (7.43)$$

$$\det(H) < 0 \implies \text{Minimum} \quad (7.44)$$

$$\det(H) = 0 \implies \text{Keine Entscheidung möglich} \quad (7.45)$$

Bem.: Erhalten wir eine Determinante ungleich Null, so ist insbesondere  $\text{grad } g \neq 0$ , und damit der eingangs erwähnte kritische Fall ausgeschlossen.

Wir haben somit die Optimierung bei 2 Unbekannten mit einer Nebenbedingung auf eine freie Optimierungsaufgabe in drei Unbekannten zurückgeführt. Der Parameter  $\lambda$  dient dabei nur als Hilfsmittel und wird hier nicht weiter benötigt.

Zurück zum Beispiel:

$$f(x, y) = x \cdot y \quad g(x, y) = 2x + 2y - 40 = 0 \\ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= xy + \lambda \cdot (2x + 2y - 40) \end{aligned}$$

Notwendig:

$$\begin{aligned} L_x &= y + 2\lambda = 0 \\ L_y &= x + 2\lambda = 0 \\ L_\lambda &= 2x + 2y - 40 = 0 \end{aligned}$$

liefert:  $x = y = 10, \lambda = \frac{-y}{2} = -5$  (Kandidat)

Hesse Matrix:

$$L_{xx} = L_{yy} = 0, L_{xy} = 1, g_x = 2, g_y = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\det(H) = 4 + 4 = 8 > 0$

Also: Maximum mit Fläche  $f(10, 10) = 100$  FE

Beispiel 2:

Welche lokalen Extrema hat die Funktion  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  unter der Nebenbedingung  $x + y = 3$  bzw.  $g(x, y) = x + y - 3 = 0$ ?

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (x + y - 3) \end{aligned}$$

Notwendig:

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda = 0 \\ L_y &= 4y + \lambda = 0 \\ L_\lambda &= x + y - 3 = 0 \end{aligned}$$

liefert:  $x = 2, y = 1, \lambda = -4$  (Kandidat)

Hesse Matrix:



$$L_{xx} = 2, L_{yy} = 4, L_{xy} = 0, g_x = 1, g_y = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \det(H) = -2 - 4 = -6 < 0$$

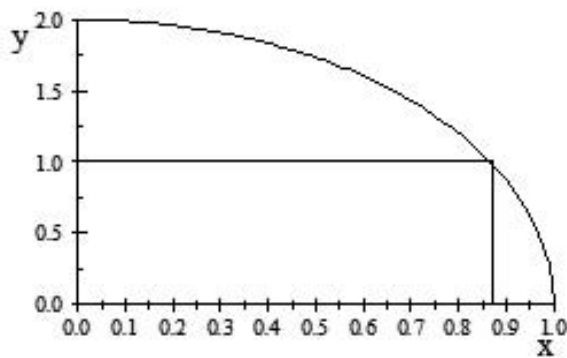
Also: Minimum mit  $f(2, 1) = 6$

Beispiel 3: Gesucht ist es das grösstmögliche Rechteck, welches in eine Ellipse um den Ursprung gezeichnet werden kann.

Die allgemeine Form der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es reicht aus Symmetriegründen den ersten Quadranten zu betrachten, womit nur positive Größen für  $x, y, a$  und  $b$  zugelassen werden.



Für die Fläche des Rechtecks gilt

$$f(x, y) = x \cdot y$$

Und die Randbedingung ist für den Eckpunkt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es ergibt sich als Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= x \cdot y + \lambda \cdot \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Kandidaten

$$\begin{aligned} L_x &= y + \frac{\lambda}{a^2} \cdot 2x = 0 \\ L_y &= x + \frac{\lambda}{b^2} \cdot 2y = 0 \\ L_\lambda &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = -\frac{\lambda}{a^2} \cdot 2x$$

bzw.

$$\lambda = -\frac{a^2 y}{2x}$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} x - \frac{a^2 y}{2x} \cdot \frac{2y}{b^2} &= 0 \\ x - \frac{a^2 y^2}{x b^2} &= 0 \\ x^2 b^2 &= a^2 y^2 \\ y &= \frac{b}{a} x \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a^2} x^2}{b^2} - 1 \\ &= 2 \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \\ 2x^2 &= a^2 \\ x &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und damit

$$y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Die Fläche im ersten Quadranten ergibt sich damit zu

$$xy = \frac{ab}{2}$$

Im Übrigen ist dann die Gesamtfläche des Rechtecks in allen vier Quadranten

$$F = 4 \frac{ab}{2} = 2ab$$

Da  $\lambda = -\frac{a^2 y}{2x}$  ist

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{a^2 y}{2x} \\ &= -\frac{a^2 \frac{b}{a} x}{2x} \\ &= -\frac{ab}{2}\end{aligned}$$

Ob sich nun ein Maximum oder Minimum einstellt, liefert die Hesse Matrix:

$$H = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \frac{2}{a^2} & 1 & \frac{2x}{g^2} \\ 1 & \lambda \cdot \frac{2}{b^2} & \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Kandidaten  $\lambda = -\frac{ab}{2}$ ,  $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ,  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  liefert

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{a} \\ 1 & -\frac{a}{b} & \frac{\sqrt{2}}{b} \\ \frac{\sqrt{2}}{a} & \frac{\sqrt{2}}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -\frac{b}{a} & 1 \\ 1 & -\frac{a}{b} \\ \frac{\sqrt{2}}{a} & \frac{\sqrt{2}}{b} \end{matrix}$$

Mit der Determinante

$$\det H = \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} = \frac{8}{ab} > 0$$

erhalten wir, dass sich hier ein Maximum befindet.

Bem.: Sind absolute Extrema einer Funktion unter der Nebenbedingung der Form

$$\tilde{g}(x, y) \leq c$$

gesucht, so muss zunächst die Funktion auf lokale Extrema im Innern untersucht werden. Danach muss der Rand  $\tilde{g}(x, y) - c = g(x, y) = 0$  betrachtet werden.

Bsp.: Gesucht sind die absoluten Extrema innerhalb des Einheitskreises der Funktion

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2$$

Zunächst ergibt sich als lokales Extremum

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 8x = 0 \\ f_y(x, y) &= 4y = 0\end{aligned}$$

nur ein Kandidat in  $(0, 0)$ .

Wegen

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist dort ein lokales Minimum mit

$$f(0, 0) = 0$$

Auf dem Rand gilt schliesslich

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} L_x &= 8x + 2\lambda x = 0 \\ x &= 0 \text{ oder } \lambda = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_y &= 4y + 2\lambda y = 0 \\ y &= 0 \text{ oder } \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Dies liefert die Kandidaten

$$\begin{aligned} (0, 1, -2) \\ (0, -1, -2) \\ (1, 0, -4) \\ (-1, 0, -4) \end{aligned}$$

Die geränderte Hesse Matrix ist

$$H = \begin{pmatrix} 8 + 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4 + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\det H = -4x^2(4 + 2\lambda) - 4y^2(8 + 2\lambda)$$

Damit ist für die ersten beiden Kandidaten

$$\det H = -16 < 0$$

also ein lokales Minimum mit

$$f(0, \pm 1) = 2$$

Dieser Wert ist kleiner als das lokale Minimum und damit kein absolutes Minimum.

Für die anderen beiden ist

$$\det H = 16 > 0$$

und ein lokales Maximum mit

$$f(\pm 1, 0) = 4$$

An diesen Stellen liegt damit auch der absolut grösste Wert.

Bem. Sind  $n$  Nebenbedingungen  $g_1(x, y) = g_2(x, y) = \dots = g_n(x, y) = 0$  gegeben, so wird die Lagrange-Funktion analog gebildet

$$L(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(x, y) + \lambda_1 \cdot g_1(x, y) + \lambda_2 \cdot g_2(x, y) + \dots + \lambda_n \cdot g_n(x, y)$$

## 7.18 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

### 7.18.1 Der Tangentenvektor

Parametrische Funktionen beschreiben also nun einen zeitabhängigen Verlauf durch die x-y-Ebene. Wie können wir anhand einer parametrischen Funktion nun Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit der Bewegung beschreiben?

Die Geschwindigkeit ist ja bekanntlich die Änderung des Ortes. Hierzu betrachten wir die Aufenthaltspunkte zum Zeitpunkt  $t_0$  :  $\vec{X}(t_0)$  und  $t_0 + h$  :  $\vec{X}(t_0 + h)$ . Ggf bezeichnen wir auch  $\Delta t := h$ , um explizit auf die Änderung der Zeit hinzuweisen.

Die Richtung der Bewegung lässt sich nun ermitteln aus

$$\frac{\vec{X}(t_0 + h) - \vec{X}(t_0)}{h}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$  ist

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t_0 + h) - \vec{X}(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} =: \vec{X}'(t_0) \end{aligned}$$

**Definition 268** Der Vektor  $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  heißt **Tangentenvektor** der Kurve  $\vec{X}(t)$ . Die Gerade

$$T(t) = \vec{X}(t) + \lambda \cdot \vec{X}'(t)$$

heißt **Tangente**.

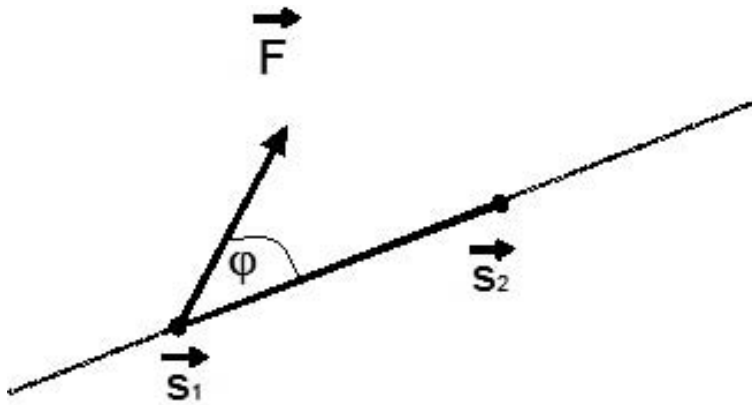
Bem.:  $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$  hat damit die Geschwindigkeit (Ableitung)  $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$  und die Tangente ist

$$\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

### 7.18.2 Kurvenintegrale

#### Arbeit einer Kraft

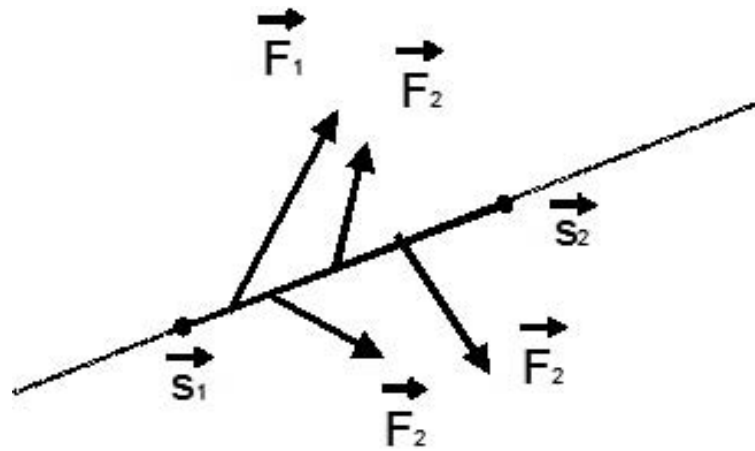
Skizze 1:



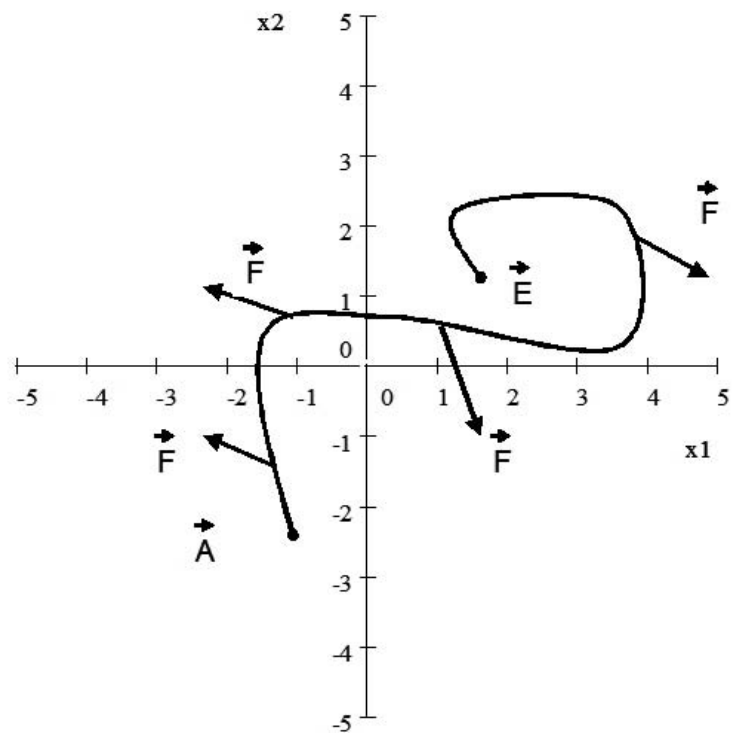
$\vec{F}$  greift an einem Punkt  $m$  in  $\vec{s}_1$  an und bewegt den Massenpunkt zu  $\vec{s}_2$ . Welche Arbeit wird geleistet?

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos \varphi \\ &= \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}_2 - \vec{s}_1\| \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist jedoch nicht anwendbar, wenn  $\vec{F}$  nicht konstant und/oder der Weg nicht gradlinig ist.



Skizze:



Der Weg vom Anfangspunkt  $\vec{A}$  zum Endpunkt  $\vec{E}$  wird zunächst beschrieben durch  $\vec{X} : t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  für  $t \in [a, b]$ . Wenn die Funktion nun zum

Startzeitpunkt  $a$  im Punkt  $\vec{A}$  und zum Endzeitpunkt  $b$  in  $\vec{E}$  sein soll, so ist

$$\vec{X}(a) = \vec{A} \quad (7.46)$$

$$\vec{X}(b) = \vec{E} \quad (7.47)$$

Wir zerlegen nun das Zeitintervall in kleine Stücke

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad (7.48)$$

und betrachten  $\vec{F}$  auf jeder der zugehörigen Wegstrecken  $\vec{X}(t_i) - \vec{X}(t_{i-1})$  als konstant zu  $\vec{F}(\vec{X}(t_{i-1}))$ .

Für kleine Zeitdifferenzen (wir betrachten schliesslich den Grenzübergang  $t \rightarrow 0$ ) ist weiterhin

$$\frac{\vec{X}(t_i) - \vec{X}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \vec{X}'(t_{i-1}) \quad (7.49)$$

Damit erhalten wir

$$\vec{X}(t_i) - \vec{X}(t_{i-1}) = \vec{X}'(t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (7.50)$$

Die Arbeit  $W_i$  auf dem Wegstück von  $t_{i-1}$  zu  $t_i$  ist dann

$$\begin{aligned} W_i &= (\text{Kraft}) \times (\text{Weg}) \\ &= \vec{F}(\vec{X}(t_{i-1})) \cdot (\vec{X}(t_i) - \vec{X}(t_{i-1})) \\ &= \vec{F}(\vec{X}(t_{i-1})) \cdot \vec{X}'(t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gesamtarbeit

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{X}(t_{i-1})) \cdot \vec{X}'(t_{i-1}) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t} \end{aligned} \quad (7.51)$$

und durch den Übergang  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt} \quad (7.52)$$

(Arbeit ist also das Kurvenintegral des Vektorfeldes entlang des Weges).



Die Vorgehensweise ist also wie folgt:

Gegeben ist

- ein Vektorfeld  $\vec{F}(x, y)$  für jeden Punkt der Ebene (z.B. ein Magnetfeld)
- ein Weg  $\vec{X}(t)$  vom Zeitpunkt  $t = a$  bis  $t = b$  durch dieses Vektorfeld.

Zur Berechnung der Arbeit (also gegen die Kräfte vom Punkt  $\vec{X}(a)$  zu  $\vec{X}(b)$  zu gelangen) ist zunächst zu berechnen:

1. die Ableitung des Weges nach der Zeit (Geschwindigkeit)  $\vec{X}'(t)$  durch Ableiten der x- und y-Komponente nach  $t$

Resultat: Vektor in  $t$

2. Berechnung der Kraft zum Zeitpunkt  $t$  durch Berechnung des Ortes in Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $t$  und dann Einsetzen in das Kraftfeld  $\vec{F}(x, y) = \vec{F}(\vec{X}(t))$

Resultat: Vektor in  $t$

3. Berechnung des Skalarproduktes  $\vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)$ , also der in 1. und 2. berechneten Größen

Resultat: Skalare Funktion in  $t$

4. Berechnung des Integrals  $W = \int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$  durch Einsetzen der Funktion aus 3. und des Start- und Endzeitpunktes.

Beispiel:  $\vec{F}$  sei ein Kraftfeld, dessen Stärke im Punkt  $(x, y)$  gegeben ist durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - x \\ 2 + x \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

Beachte: Dieses Feld ist in jedem Punkt definiert, die spezielle Kurve kommt nun:

Wir betrachten die Kurve

$$\vec{X} : t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

und betrachten den Zeitraum  $t = 0$  bis  $t = 2$ :

Die Kuve beginnt also in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und endet in  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Dort wirken beispielweise die Kräfte  $\vec{F}(x = 0, y = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{F}(x = 2, y = 4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Allgemein lässt sich die Kraft zum Zeitpunkt  $t$  ausrechnen (bedenken Sie, zum Zeitpunkt  $t$  befinden wir uns in  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ):

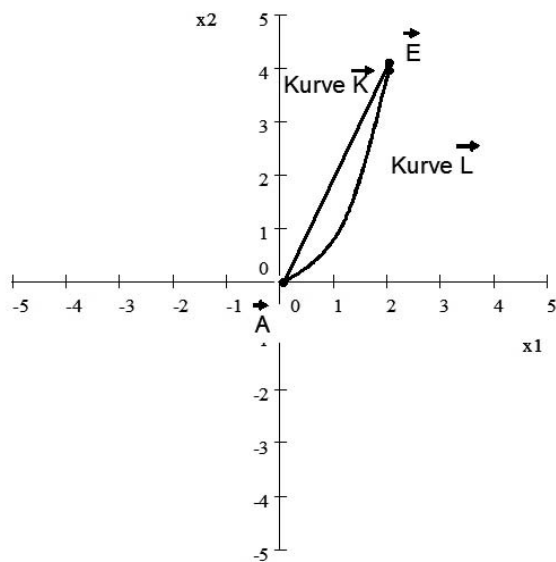
$$\vec{F}(\vec{X}(t)) = \vec{F}(x=t, y=t^2) = \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ 2 + t \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Zur exakten Berechnung brauchen wir weiterhin  $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$  und können nun das Integral aufstellen

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt & (7.56) \\ &= \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ 2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 (2t^2 - t) \cdot 1 + (2 + t) \cdot 2t \, dt \\ &= \int_{t=0}^2 4t^2 + 3t \, dt \\ &= \left[ \frac{4t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} \right]_{t=0}^2 = \frac{32}{3} + 6 = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

Frage: Wann ist es von Interesse auf welchem Weg wir vom Anfangs- zum Zielpunkt kommen und wann nur, wo diese Punkte liegen?

Beispiel:



Wir betrachten also zwei Wege zum Ziel:

Die Zeitachse sei  $t \in [0, 2]$  :

$$\vec{K} : t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

$$\vec{L} : t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

Beide Wege führen von  $t = 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  zu  $t = 2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  - nur auf verschiedenen Wegen.

Wie sind die Resultate für die Arbeit wenn wir beispielsweise das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

betrachten?

$$\text{Fall 1: } \vec{K}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{F}(\vec{K}(t)) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{K}(t)) \cdot \vec{K}'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 4t^3 + 4t^2 dt = \left[ 4\frac{t^4}{4} + 4\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^2 = 16 + \frac{32}{3} = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Fall 2: } \vec{L}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \vec{F}(\vec{L}(t)) = \begin{pmatrix} t^5 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{L}(t)) \cdot \vec{L}'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} t^5 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 t^5 + 2t^4 dt = \left[ \frac{t^6}{6} + 2\frac{t^5}{5} \right]_{t=0}^2 = \frac{2^6}{6} + 2\frac{2^5}{5} = \frac{352}{15} \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt also in diesem Fall vom speziell zurückgelegten Weg ab.

Immer?

Bei gleichem Weg wird nun das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 1 + x \end{pmatrix}$$

betrachtet:

$$\text{Fall 1: } \vec{K}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{K}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{F}(\vec{K}(t)) = \begin{pmatrix} t + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{K}(t)) \cdot \vec{K}'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} 3t \\ 1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 3t + 2 + 2tdt = \left[ 2t + \frac{5t^2}{2} \right]_{t=0}^2 = 4 + 10 = 14 \end{aligned}$$

$$\text{Fall 2: } \vec{L}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{L}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \vec{F}(\vec{L}(t)) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{L}(t)) \cdot \vec{L}'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \\ 1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 t^2 + t + 2t + 2t^2 dt \\ &= \int_{t=0}^1 3t^2 + 3t dt \\ &= \left[ t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_{t=0}^1 = 8 + 6 = 14 \end{aligned}$$

Also kommt in diesem Falle die gleiche Arbeit heraus. Zufall?

Oder anders gefragt: Wann ist ein Kurvenintegral unabhängig vom zurückgelegten Weg (sondern nur abhängig von Start und Ziel) ?

### 7.18.3 Die Potentialfunktion

**Definition 269** Sei  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar.  $\vec{f}$  heisst Gradientenfeld, wenn es eine skalare Funktion  $V$  gibt, mit

$$\text{grad } V = \vec{f}$$

Die Funktion  $V$  heisst dann Potentialfunktion (oder mehrdimensionale Stammfunktion) von  $\vec{f}$

Beispiel: Zum Gradientenfeld

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist eine entsprechende Potentialfunktion

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

da

$$\text{grad } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}$$

**Satz 270** Sei  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Potentialfunktion von  $\vec{f}$ . Dann gilt:

In  $\mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

In  $\mathbb{R}^3$  :

$$\text{rot}(\vec{f}) = 0$$

In  $\mathbb{R}^n$  für die Jacobimatrix  $J$

$$J = J^t$$

Bew.: Zu a) Da  $V_x = f_1$  und  $V_y = f_2$  ist auch

$$V_{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$V_{yx} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

und wegen des Satzes von Schwarz Gleichheit

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Zur Berechnung der Stammfunktion kann nun obige Gleichheit ausgenutzt werden:

Geg. sei nun

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Zunächst zur Existenz der Potentialfunktion. Wir wissen nun, dass falls

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

gilt, eine Potentialfunktion  $V(x, y)$  existiert mit

$$\text{grad } V = \vec{f}$$

Weiterhin gilt nach Integration von  $V_{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$  nach  $y$  und anschliessend nach  $x$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int f_1(x, y) dx \\ &= F_1(x, y) + c(y) \end{aligned}$$

Differentiation nach  $y$  liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= f_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y) + c(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) + c'(y) \end{aligned}$$

woraus sich  $c'(y)$  und damit  $c(y)$  ergibt.

Bsp.:

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 \\ -4yx + y + 2 \end{pmatrix}$$

Die Existenz der Stammfunktion ist gesichert, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -4y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -4y \end{aligned}$$

Die Stammfunktion selber lässt sich nun aus einem der beiden Komponenten ausrechnen.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int f_1(x, y) dx = \int x^2 - 2y^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x + c(y) \end{aligned}$$

Die Konstante in  $y$  wird nun berechnet über

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= -4yx + c'(y) = f_2(x, y) = -4yx + y + 2 \\ c'(y) &= y + 2 \\ c(y) &= \int y + 2 dy = \frac{1}{2}y^2 + 2y + c \end{aligned}$$

und damit

$$V(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x + \frac{1}{2}y^2 + 2y + c$$

**Satz 271** Gibt es zu  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$  ein Potential  $V(x, y)$  mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= f(x, y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

auf einem Weg von  $\vec{A} = \vec{X}(a)$  nach  $\vec{E} = \vec{X}(b)$ , dann ist

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt \\ &= V(\vec{E}) - V(\vec{A}) \end{aligned}$$

also unabhängig vom speziellen Weg  $\vec{X}(t)$ !

Ein stark vereinfachter Beweis sei hierzu

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt \\
 &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_{\substack{u = \vec{X}(t) \\ du = \vec{X}'(t) dt \\ \vec{X}(a) = A \\ \vec{X}(b) = E}} \vec{F}(u) du = V(u) = V(\vec{X}(t)) \Big|_{t=a}^b \\
 &= V(\vec{X}(b)) - V(\vec{X}(a)) = V(E) - V(A)
 \end{aligned}$$

Bem.: Die Funktion  $V(x, y)$  ist im Gegensatz zur Funktion  $\vec{F}(x, y)$  ein Skalar.

Insbesondere gilt dann auf jedem geschlossenen Weg ( $\vec{E} = \vec{A}$ ):

$$W = V(\vec{E}) - V(\vec{A}) = 0$$

Zum obigen Beispiel: Es war  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 1+x \end{pmatrix}$  und wir benötigen eine Funktion, welche - wenn wir diese nach  $x$  differenzieren - die Ableitung  $x+y$  hat und wenn wir als Unbekannte  $y$  wählen, die Ableitung nach  $y$  dann  $1+x$  ist. Die Potentialfunktion existiert, da

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(1+x)}{\partial y}$$

Damit

$$V(x, y) = \int x + y dx = \frac{x^2}{2} + yx + c(y) \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial y} &= x + c'(y) = f_2(x, y) = 1 + x \\
 c'(y) &= 1 \\
 c(y) &= \int 1 dy = y + c
 \end{aligned}$$

und damit als Potential

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + y$$



Da wir im obigen Beispiel die Arbeit vom Punkt  $\vec{A} = (0, 0)$  (Einsetzen des Startzeitpunktes in einen der Wege) zu  $\vec{E} = (2, 4)$  betrachtet haben, ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= V(x = 2, y = 4) - V(x = 0, y = 0) \\ &= \frac{4}{2} + 2 \cdot 4 + 4 - 0 - 0 = 14 \end{aligned}$$

Beispiel: Potentielle Energie: Ein Körper werde von den Koordinaten  $A = (x_0, y_0)$  um die Höhe  $h$  nach oben und  $l$  nach rechts bewegt, also in den Punkt  $E = (x_0 + l, y_0 + h)$ . Dabei werde ein reibungsfreies Szenario betrachtet, wo die einzige zu überwindende Kraft die Gewichtskraft  $mg$  ( $=\text{const}$ ) ist. Wir haben somit ein Kraftfeld

$$\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

und suchen für das Potential eine Funktion  $V(x, y)$  mit  $\frac{\partial V}{\partial x} = V'(x) = 0$ . Integration liefert

$$V(x, y) = c(y) \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg = c'(y) \quad (7.62)$$

liefert die Lösung  $c(y) = mgy$ , also

$$V(x, y) = mgy \quad (7.63)$$

Nun kann die Arbeit auf jedem beliebigem Weg berechnet werden, der von  $A$  zu  $E$  führt. Zunächst wird das Potential im Anfangs- und Endpunkt berechnet:

$$V(A) = V(x_0, y_0) = mgy_0 \quad (7.64)$$

$$V(E) = V(x_0 + l, y_0 + h) = mg(y_0 + h) \quad (7.65)$$

und nun kann die Arbeit aus der Potentialdifferenz ermittelt werden:

$$W = V(E) - V(A) = mgh \quad (7.66)$$

Dabei spielt also weder die Bewegung in x-Richtung noch der spezielle Weg vom Anfangs- zum Endpunkt eine Rolle.

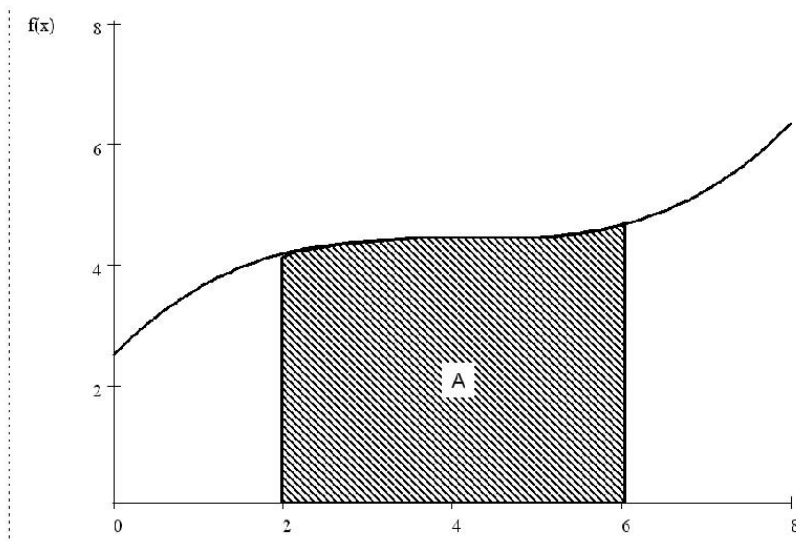
## Kapitel 8

# Mehrdimensionale Integration

*Rechnen können viele, aber der Ingenieur, der fängt beim Integral an!*

### 8.1 Einleitung

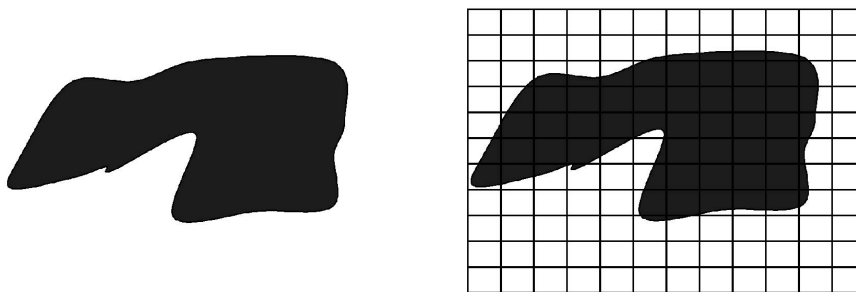
Zunächst wieder zur Erinnerung der eindimensionalen Fall: Gesucht war die Fläche  $A$  unter der Funktion  $f(x)$  :



Die Fläche wurde nun bestimmt, indem das Intervall  $[a, b]$  in Streifen unterteilt wurde und in diesen Streifen die Funktionsfläche durch Rechtecke angenähert wurde.

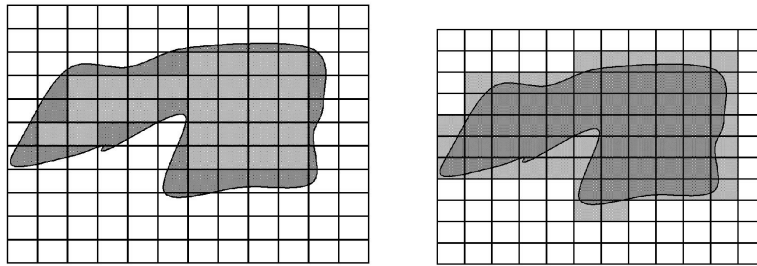
Die Rechtecksumme ist damit  $\sum f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ . Mit  $dx = x_{i+1} - x_i$  erhält man beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  den Wert  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

Wir betrachten zunächst das folgende Problem: Gesucht ist die Wassermenge des Sees im folgenden Bild. Hierzu betrachten wir die Kontur der Seeoberfläche und überdecken diese mit einem rechteckigen Gitter:

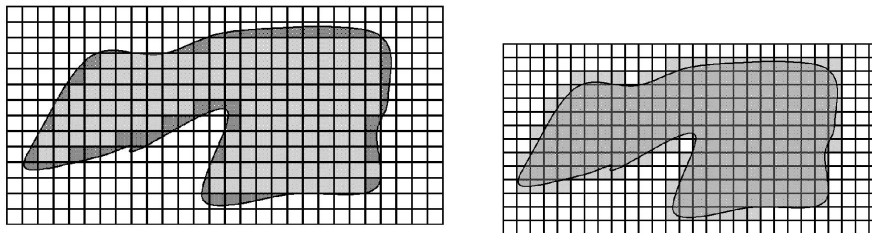


Wenn die Tiefe des Sees in einer Koordinate  $(x, y)$  durch  $f(x, y)$  (in hinreichend kleinen Rechtecken nahezu konstant) gegeben ist, so ist die Wassermenge unterhalb dieses Rechtecks  $f(x, y) \cdot dy \cdot dx$ . Die Fläche des Rechtecks wird auch mit  $dF = dy \cdot dx$  bezeichnet. Insgesamt ergibt sich die Wassermenge also als Summe dieser Wassermengen. Um nun zu entscheiden, welche Rechtecke Beiträge liefern, betrachten wir als untere Schranke der Wassermenge die Summe

der Rechtecke die komplett im See liegen (also vollständig grau sind) und als obere Schranke alle jene Rechtecke, die einen (evtl. noch so kleinen) See-Anteil enthalten.

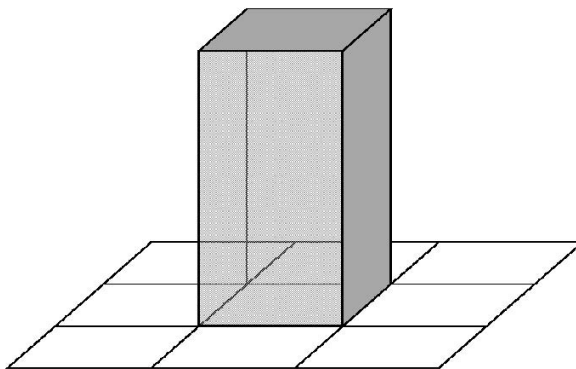


Um nun die Wasserfläche genauer bestimmen zu können, verkleinern wir die Abstände  $dx$  und  $dy$  :



Nachdem wir somit auch krummlinige Gebiete hinreichend annähern können, brauchen wir zur Berechnung der Wassermenge noch  $f(x, y)$ , also das Tiefenprofil des Sees.

Wir berechnen nun die Wassermenge auf den Rechtecke durch Wassersäulen. Diese Wassersäulen haben das Volumen Rechteckfläche mal Tiefe an dieser Rechteckstelle.



Die Addition der Wassersäulen ergibt die gesuchte Wassermenge. Bei der oben beschriebenen Verfeinerung des Gitters wird nun die Wassermenge immer exakter approximiert.

Die Wassermenge der Säule bei  $x_i$  und  $y_j$  wird dabei angenähert durch

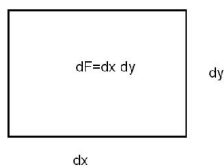
$$f(x_i, y_j) \cdot \Delta y \cdot \Delta x$$

Hat man insgesamt  $n$  Rechtecke, mit Funktionswerten  $f_1, \dots, f_n$  entspricht die Gesamtmenge

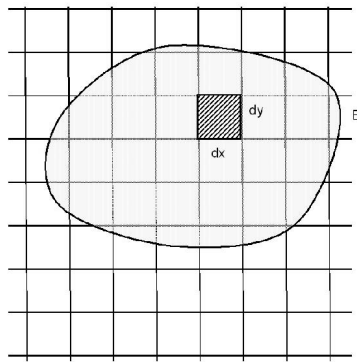
$$\sum_{i=1}^n f_i \cdot \Delta y \cdot \Delta x$$

Nun bilden wir wieder den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  und definieren

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i \cdot \Delta y \cdot \Delta x = \int \int f(x, y) dy dx = \int f \, dF$$



Spezialfall: Summieren wir nun nur die Flächenstücke auf, also  $\sum_{i=1}^n \Delta y \cdot \Delta x$  so erhalten wir als Resultat des Integrals die Fläche des Gebietes. Also  $\int_B \int_B 1 \, dy dx = B$



## 8.2 Berechnung der Integrale

Bezeichnet  $A$  das Rechteck  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ , so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy dx = \int_A f \, dA = \int \int_A f \, dA \quad (8.1)$$

Ist die Grundfläche nicht rechteckig, so wird die Grundfläche wie oben zerlegt in Gebiete  $\Delta A_k$ , die sich zum gesamten Gebiet zusammensetzen:

**Definition 272**  $\int_A f \, dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$  heißt das **Integral** von  $f$  über das Gebiet  $A$ .  $\Delta A_k$  ist dabei eine Zerlegung der Grundfläche in "kleine" Rechtecke.

### 8.2.1 Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten

Die praktische Berechnung erfolgt durch zwei aufeinanderfolgende Integrations-schritte, bei der wie bei der Differentiation die jeweils andere Unbekannte festgehalten wird (als Konstante betrachtet wird).

Hierzu wird zunächst das innere Integral ausgewertet, danach dann das äußere Integral. Also:

$$1. \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy}_{h(x)} dx$$

2.  $\int_{x_0}^{x_1} h(x) dx$  wird dann - wie im eindimensionalen kennengelernt - berechnet.

Bsp.:

$$\begin{aligned} \int_{x_0=0}^{x_1=1} \underbrace{\int_{y_0=1}^{y_1=2} x \cdot y dy}_{h(x)} dx &= \int_{x_0=0}^{x_1=1} \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^2 dx = \int_0^1 2x - \frac{1}{2}x dx = \\ \int_0^1 \frac{3}{2}x dx &= \left[ \frac{3}{4}x^2 \right]_{x=0}^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bem.: Es ist bei rechteckigen Integrationsbereichen egal, in welcher Reihenfolge integriert wird:

$$\begin{aligned} \int_{y_0=1}^{y_1=2} \underbrace{\int_{x_0=0}^{x_1=1} x \cdot y dx}_{h(y)} dy &= \int_{y_0=1}^{y_1=2} \left[ y \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 dy = \int_1^2 \frac{y}{2} dy = \left[ \frac{1}{4}y^2 \right]_{y=1}^2 = \\ 1 - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dies liegt wie gesagt daran, dass der Integrationsbereich rechteckig war. Ist das Integrationsgebiet krummlinig, so darf die Integration i.A. nicht vertauscht werden.

Ist das Integrationsgebiet jedoch rechteckig und lässt sich weiterhin  $f(x, y)$  als Produkt zweier Funktionen, die jeweils nur von  $x$  bzw.  $y$  abhängen, schreiben, also

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \quad (8.2)$$

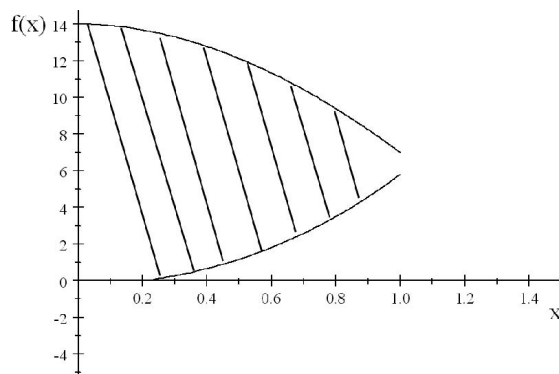
so ist

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy dx &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} g(x) \cdot h(y) dy dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} h(y) dy \end{aligned} \quad (8.3)$$

### 8.2.2 Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Betrachtet man den Fall, dass die Grundfläche sich nicht aus einem Rechteck ergibt, sondern beispielweise aus einer unteren und einer oberen Funktion ( $f_u(x)$  und  $f_o(x)$ ) ergibt, so wird zunächst auf der x-Achse wiederum von  $a$  bis  $b$  integriert, in der zweiten Dimension hängt der Integrationsbereich jedoch vom "aktuellen" x-Wert ab.

Skizze:

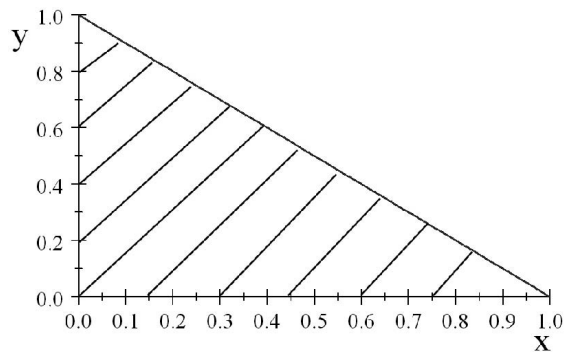


Das zu lösende Integral ist dann:

$$\int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x, y) dy dx$$

Beispiel: Wir betrachten das Gebiet zwischen x-Achse und der Geraden





D.h.  $f_0(x) = 1 - x$   $f_u(x) = 0$  und wir integrieren über die x-Werte von 0 bis 1:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} f(x, y) dy dx \quad (8.4)$$

Betrachten wir nun speziell  $f(x, y) = 1$ , so erhalten wir die Flächenmasszahl des beschriebenen Gebietes:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} 1 dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 [y]_{y=0}^{1-x} dx = \int_{x=0}^1 1 - x dx \\ &= \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

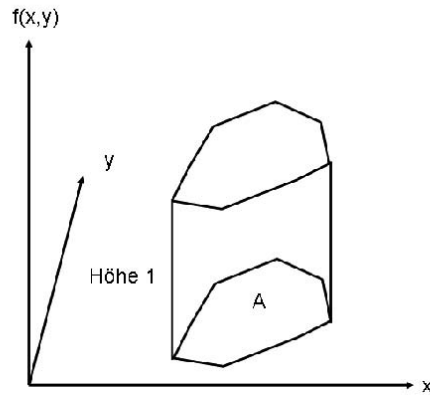
Bem.: Eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge darf hier nicht vorgenommen werden:

$$\int_{y=0}^{1-x} \int_{x=0}^1 1 dx dy = \int_{y=0}^{1-x} [x]_0^1 dy = \int_{y=0}^{1-x} 1 dy = [y]_{y=0}^{1-x} = 1 - x \quad \dots?$$

### 8.2.3 Weitere Anwendungen

1. Wie oben bemerkt: Der Flächeninhalt  $F$  einer Grundfläche  $A$  ergibt sich durch Integration mit  $f(x, y) = 1$ , also

$$F = \int_{(A)} 1 dA \quad (8.5)$$

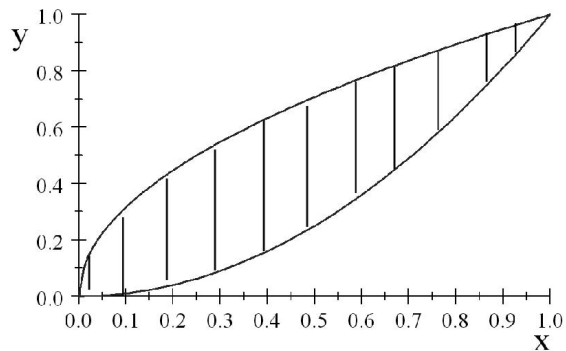


2. Der Schwerpunkt mit den Schwerpunktskoordinaten  $(x_s, y_s)$  einer Fläche mit homogener Dichte ergibt sich (mit  $F$  aus Teil 1) aus:

$$x_s = \frac{1}{F} \int_{(A)} x dA \quad (8.6)$$

$$y_s = \frac{1}{F} \int_{(A)} y dA \quad (8.7)$$

Beispiel: Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die von  $\sqrt{x}$  und  $x^2$  eingeschlossen wird?



Zunächst die Flächenmasszahl:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} 1 dy dx = \int_{x=0}^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Damit ist  $\frac{1}{F} = 3$ . Nun die Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 x_s &= 3 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} x dy dx \\
 &= 3 \int_{x=0}^1 [xy]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 3 \int_{x=0}^1 x\sqrt{x} - x^3 dx \\
 &= 3 \left[ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^1 = 3 \cdot \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{20}
 \end{aligned}$$

und

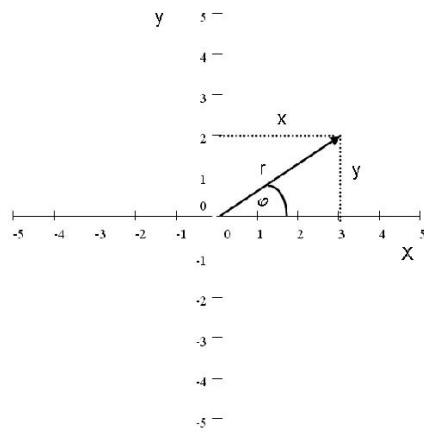
$$\begin{aligned}
 y_s &= 3 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} y dy dx \\
 &= 3 \int_{x=0}^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 3 \int_{x=0}^1 \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^4 dx \\
 &= 3 \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{10} x^5 \right]_{x=0}^1 = 3 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{20}
 \end{aligned}$$

Die Schwerpunktskoordinaten lauten somit

$$(x_s, y_s) = \left( \frac{9}{20}, \frac{9}{20} \right)$$

### 8.3 Integration in Polarkoordinaten

Sind die Integrationsgebiete krummlinig (Kreise, Ellipsen, etc.) so kann zur Beschreibung der Gebiete in Polarkoordinaten gearbeitet werden.



Es gilt bei der Umrechnung

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (8.8)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (8.9)$$

Es ist somit im Funktionsausdruck und in den Grenzen jedes  $x$  bzw.  $y$  mit den obigen Formeln zu substituieren.

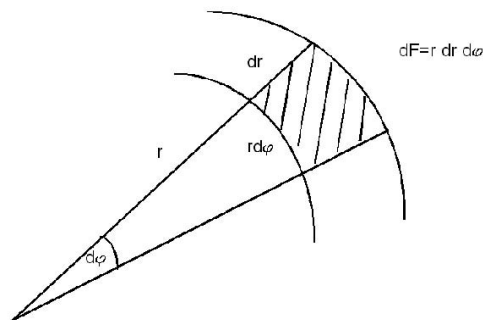
Insbesondere wird der Integrand

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (8.10)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 2y^2 \\ &= (r \cos \varphi)^2 + 2(r \sin \varphi)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi \\ &= r^2 \cdot (1 + \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

Die zuvor rechteckigen Flächenelemente  $dx \cdot dy$  werden nun zu krummlinigen Flächenelementen  $dr d\varphi$ . Während die Größe der rechteckigen Elemente  $dx \cdot dy$  war, ist dies bei den krummlinigen nicht der Fall. Eine Änderung des Drehwinkels um  $d\varphi$  sowie die Änderung des Radius um  $dr$  ergibt nun ein Flächenelement, welches die Grundfläche  $r dr d\varphi$  hat (siehe Abbildung. Die Änderung in  $\varphi$  bewirkt eine Bogenlänge von  $r d\varphi$ ). Beachte: Wir ersetzen also nicht  $dx dy$  durch  $dr d\varphi$  sondern durch  $r dr d\varphi$ .



Merke: Bei der Substitution muß also zusätzlich

$$dy dx = r \cdot dr d\varphi \quad (8.11)$$

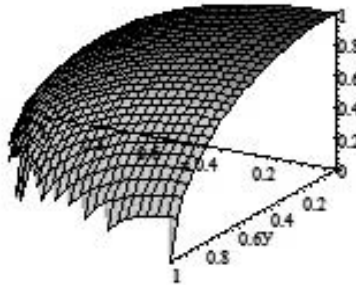
ersetzt werden.

!!! Häufig treten hier Ausdrücke der Form  $x^2 + y^2$  auf. Diese sind zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Bem.: Ist in der Aufgabenstellung bereits zu erkennen, daß die Grundfläche krummlinig ist, so kann die Grundfläche - also die Integrationsgrenzen - direkt in Polarkoordinaten beschrieben werden.

Beispiel: Volumen einer Halbkugel mit  $r=1$ , d.h.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



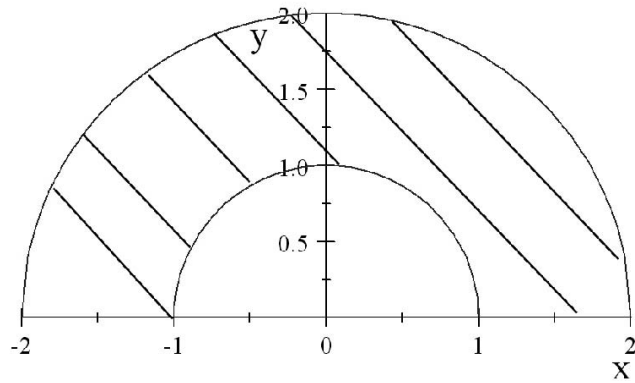
$$\begin{aligned} \iint \sqrt{1 - x^2 - y^2} dy dx &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr d\varphi \\ &= \frac{-1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=1}^0 \sqrt{z} dz d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{z=0}^1 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Damit ist das Volumen einer (Voll-)Kugel  $V = \frac{4}{3}\pi$

Beispiel 2: Volumen eines Zylinders mit der Höhe  $h$  und Radius  $r_0$

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_0} h \cdot r dr d\varphi \\
&= h \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r_0} d\varphi \\
&= \left[ h \frac{r_0^2}{2} \cdot \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2\pi h \frac{r_0^2}{2} = \pi h r_0^2
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Skizze: (Ring zwischen  $r_1$  und  $r_2$  auf der oberen Halbachse)



Integrieren wir beispielsweise die Funktion  $f(r, \varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \varphi$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot \varphi \cdot r dr d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \varphi dr d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\pi} [\ln(r)]_{r=r_1}^{r_2} \cdot \varphi d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} (\ln(r_2) - \ln(r_1)) \cdot \varphi d\varphi \\
&= (\ln(r_2) - \ln(r_1)) \cdot \left[ \frac{\varphi^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \cdot (\ln(r_2) - \ln(r_1))
\end{aligned}$$

### 8.3.1 Uneigentliche Integrale

Häufig wird als Integrationsbereich die gesamte zweidimensionale Ebene benötigt. Alle möglichen Punkte werden dann durch

$$\begin{aligned}
x &\in (-\infty, \infty) \\
y &\in (-\infty, \infty)
\end{aligned}$$

beschrieben.

Wie im eindimensionalen Fall wird die Integration über Grenzwertbildung ermittelt:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx := \lim_{M_1 \rightarrow -\infty} \lim_{M_2 \rightarrow \infty} \lim_{N_1 \rightarrow -\infty} \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \int_{x=M_1}^{M_2} \int_{y=N_1}^{N_2} f(x, y) dy dx \quad (8.12)$$

Der Übergang zu Polarkoordinaten kann auch hier weiterhelfen. Zunächst verdeutliche man sich, dass die Integration in Polarkoordinaten nun die Gestalt

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi \quad (8.13)$$

hat. In diesem Fall taucht der Grenzwert nur noch an einer Stelle - zuvor an 4 Stellen - auf.

Beispiel:

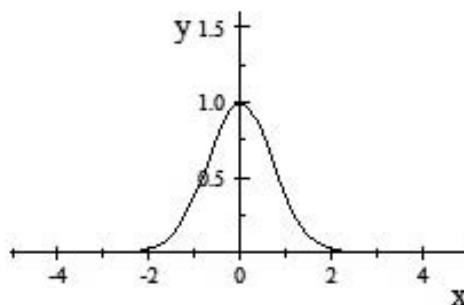


Berechne

$$I = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (8.14)$$

Die Funktion hat keine Stammfunktion und daher ist die klassische Integration hier nicht anwendbar.

Der Funktionsverlauf ist im Übrigen eine Glockenkurve



Wir berechnen das Integral in dem wir zunächst das Integral quadrieren und dann durch Umbenennung der Variablen "künstlich" eine zweidimensionale Integration erzeugen, welche wir durch Transformation auf Polarkoordinaten - Bedenke  $x^2 + y^2 = r^2$  - dann lösen können:

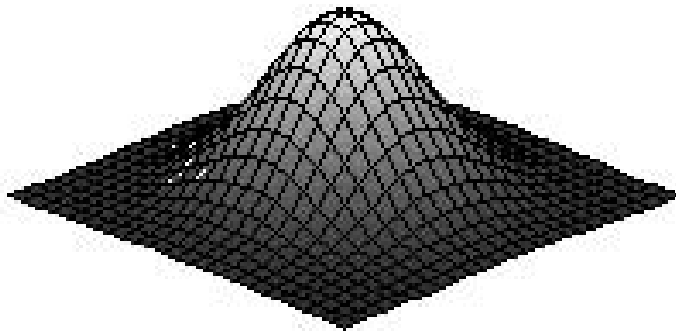
$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \end{aligned}$$

Nun verwenden wir Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \, dr d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \cdot (-2r) \, dr d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{r=0}^M e^{-r^2} \cdot (-2r) \, dr d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{z=0}^{-M^2} e^z \, dz d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} e^z \Big|_{z=0}^{-M^2} d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} (e^{-M^2} - 1) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -1 d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

und damit  $I = \sqrt{\pi}$

Bem.: Wir haben also statt der oben angegebenen Funktion nun die folgende zweidimensionale Funktion  $e^{-x^2-y^2}$  integriert



### 8.3.2 Numerische Berechnung von Doppelintegralen

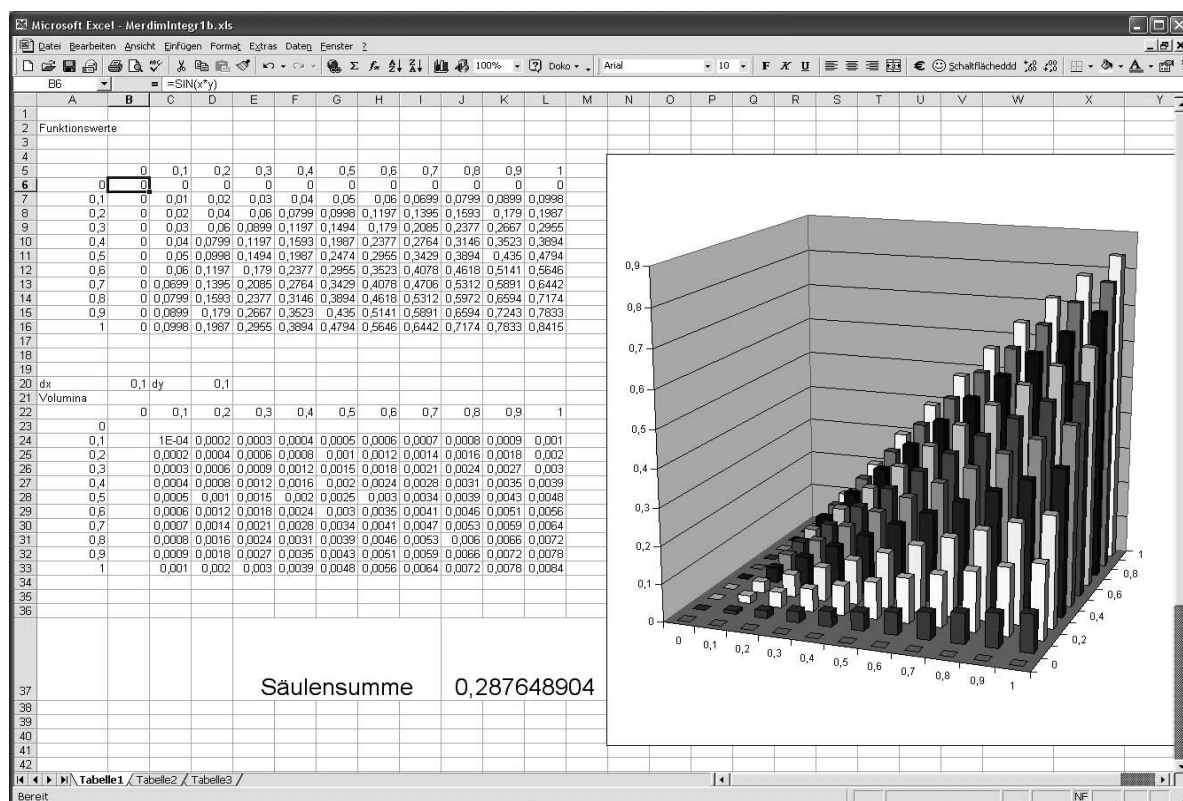
Wie bei der Herleitung kann das Integral approximiert werden, indem die Säulen unterhalb der Funktion und somit die Quadvolumina aufsummiert werden:

$$\int_A f \, dA \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k \quad (8.15)$$

Beispiel: Wir wollen näherungsweise das Integral

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 e^{x^2+y^2} \, dy dx$$

berechnen. Hierzu zerlegen wir das rechteckige Integrationsgebiet mit  $\Delta x = \Delta y = 0,1$  in 100 Rechtecke der Grundfläche  $\Delta A_k = 0,1^2$ . Durch Wahl eines Funktionswertes (Gitterpunktes) als Höhe des Voluminas erhalten wir einen Beitrag zum Integral und durch Aufsummierung die Näherungslösung



## 8.4 Dreifachintegrale

In Anwendungen reichen die oben eingeführten Doppelintegrale häufig noch nicht aus. Eine Summationsgröße über ein dreidimensionales "Gebilde" führt

im nächsten Schritt auf die Dreifachintegrale. Substantiell ist dies jedoch nichts neues mehr, jedoch die anschauliche Vorstellung wird mit wachsender Anzahl der Integrale etwas schwieriger und wird hier nicht weiter verfolgt. Näheres hierzu in [?] und [?].

Definiert wird nun das Integral über einen dreidimensionalen Integrationsbereich statt der "Grundfläche" des letzten Abschnittes. Wir haben somit eine Funktion über den Ortskoordinaten

$$u = f(x, y, z) \quad (8.16)$$

**Definition 273**  $\int_V f \, dV = \int \int \int f dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k$  heißt das **Dreifach-Integral von  $f$  über das dreidimensionale Gebiet  $V$ .**  $\Delta V_k$  ist dabei eine Zerlegung der Grundfläche in "kleine" Volumina.

Die Berechnung des Dreifachintegrals erfolgt analog zur Berechnung der Doppelintegrale

$$\underbrace{\int_{x=a}^b \underbrace{\int_{y=v_u(x)}^{v_o(x)} \underbrace{\int_{z=w_u(x,y)}^{w_0(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx}_{g(x,y)}}_{h(x)} \quad (8.17)$$

Lösung

Wir haben dabei drei Integrationsschritte (vom innersten Integral nach außen):

$$1. \quad \int_{z=w_u(x,y)}^{w_0(x,y)} f(x, y, z) \, dz = g(x, y) \text{ wird berechnet, in dem nach } z \text{ integriert}$$

wird und  $x$  bzw.  $y$  als konstant betrachtet werden. Das Ergebnis ist dann eine Funktion in den verbleibenden Unbekannten  $x$  und  $y$ .

$$2. \quad \int_{y=v_u(x)}^{v_o(x)} g(x, y) \, dy = h(x) \text{ wird berechnet, in dem nach } y \text{ integriert wird}$$

und  $x$  als konstant betrachtet wird. Das Ergebnis ist dann eine Funktion in der verbleibenden Unbekannten  $x$ .

3.  $\int_{x=a}^b h(x)dx$  wird als gewöhnliches eindimensionales Integral gelöst.

Beispiel:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^2 e^x zy^2 dz dy dx \quad (8.18)$$

1. Innere Integration:

$$\int_{z=0}^2 e^x zy^2 dz = e^x y^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^2 = 2e^x y^2 \quad (8.19)$$

2. Mittlere Integration

$$\int_{y=-1}^1 2e^x y^2 dy = 2e^x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{y=-1}^1 = \frac{4}{3}e^x \quad (8.20)$$

3. Äußere Integration

$$\int_{x=0}^1 \frac{4}{3}e^x dx = \frac{4}{3} [e^x]_{x=0}^1 = \frac{4}{3}(e - 1) \quad (8.21)$$

### 8.4.1 Schwerpunktsberechnungen

Wir haben gesehen, daß der Schwerpunkt einer beliebigen Fläche über

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{F} \iint x dA \\ y_s &= \frac{1}{F} \iint y dA \end{aligned}$$

berechnet werden kann. Dieses kann analog erweitert werden, um Schwerpunkte beliebiger dreidimensionaler Körper zu berechnen.

Auch hier wird der Integrand zur Volumenberechnung zu  $f(x, y, z) = 1$  gesetzt und wir erhalten das Volumen eines Körpers  $V$  gemäß

$$V = \iiint_{(V)} 1 dV \quad (8.22)$$

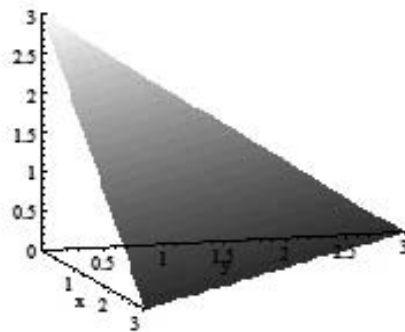
und den Schwerpunkt gemäß

$$x_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV \quad (8.23)$$

$$y_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV \quad (8.24)$$

$$z_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV \quad (8.25)$$

Anwendung: Volumen eines Tetraeders (dreiseitige Pyramide - Kantenlänge  $a=3$ ). Beschrieben wird dieser durch  $x + y + z \leq 3$



Zunächst: wodurch wird das Volumen beschrieben:

1. Die  $x$ -Werte durchlaufen die Zahlen von  $x = 0 \dots 3$
2. Die  $y$ -Werte auf der Grundfläche durchlaufen für festes  $x$  die Werte von  $y = 0 \dots 3 - x$
3. Die  $z$ -Werte durchlaufen für festes  $x$  und  $y$  die Werte von  $z = 0 \dots 3 - x - y$

und damit ist das Volumen

$$V = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} \int_{z=0}^{3-x-y} 1 dz dy dx \quad (8.26)$$

1.

$$\int_{z=0}^{3-x-y} 1 dz = [z]_{z=0}^{3-x-y} = 3 - x - y \quad (8.27)$$

2.

$$\int_{y=0}^{3-x} 3-x-y dy = \left[ (3-x) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{3-x} = (3-x)^2 - \frac{(3-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(3-x)^2 \quad (8.28)$$

3.

$$\int_{x=0}^3 \frac{1}{2}(3-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^3 (x-3)^2 dx \quad (8.29)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_{x=0}^3 = \frac{1}{6} 3^3 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \quad (8.30)$$

Zur Übung: Berechnen Sie hieraus den Schwerpunkt des Tetraeders.

## Kapitel 9

# Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

*Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben.*

*Galileo Galilei*

### 9.1 Einleitung

Wir verlassen die mehrdimensionale Analysis und betrachten Funktionen einer Unbekannten  $f(x)$  bzw.  $y(x)$  oder kurz:  $y$ . Häufig werden auch zeitabhängige Prozesse  $y(t)$  beschrieben, wodurch sich die Notation entsprechend ändert.

In diesem Kapitel ist nun jedoch nicht die Funktion gegeben, sondern es sind nur Eigenschaften wie z.B. Änderung der Größe pro Zeiteinheit (erste Ableitung) oder höhere Ableitungen gegeben. Die Aufgabe ist nun, anhand dieser Eigenschaften die Funktion selber zu finden oder anzunähern.

Die Aufgabenstellungen unterscheiden sich also je nach gegebener und gesuchter Information:

1. Funktion gegeben, Änderung (Ableitung) gesucht: Differentialrechnung

Die Lösung einer Differentialgleichung ist also nicht ein einzelner Wert, sondern eine Funktion.



- 2. Ableitung gegeben, Funktion gesucht: Integralrechnung
- 3. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung gegeben, Funktion gesucht: Differentialgleichung

### 9.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)

#### Exponentielles Wachstum

Betrachten wir das Wachstum von Bakterien in einer Nährlösung, so ist der Zuwachs proportional zur vorhandenen Menge und zur Zeit  $\Delta t$ . Bezeichnen wir nun die Anzahl der Bakterien mit  $y(t)$ , so gilt also

$$\Delta y = k \cdot y(t) \cdot \Delta t$$

Hierzu hatten wir gesehen, dass im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  die Gleichung übergeht in

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

Eine solche Gleichung heißt **Differentialgleichung (DGL)**. Sie hat - wie ebenfalls oben gesehen - die Lösung

$$y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

Für jedes  $c$  erhalten wir eine Lösungsfunktion  $y(t)$ . Ist nun neben der DGL noch eine **Anfangsbedingung** an einem beliebigen Zeitpunkt - meist  $t = 0$  - gegeben, so lässt sich eine eindeutige Funktion zur Lösung der DGL angeben, z.B. mit gegebenem  $y(0) = y_0$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

DGL und Anfangswert heissen dabei zusammen **Anfangswertproblem (AWP)**.

#### Exponentieller Zerfall

Betrachten wir negative Werte für  $k$ , so hatten wir Zerfallsprozesse, z.B. bei radioaktivem Zerfall. Mit  $k = -\lambda$  lautet die Modellgleichung

$$\Delta y = -\lambda \cdot y(t) \cdot \Delta t$$

mit der Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Die Hälfte der ursprünglichen Substanz wird erreicht für

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} &= y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \\ -\ln(2) &= -\lambda t \\ t &= \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

Diese Zeit heisst die Halbwertszeit eines Stoffes und ist unabhängig von der Menge des Stoffes.

**Beispiel: Räuber-Beute-Modelle**

Wir betrachten die Entwicklung eines Beutetieres (z.B. Gazellen) über die Zeit  $t$ .

Sei

$y(t)$  ... Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt  $t$   
 $y_0$  ... Anzahl der Beutetiere zum Startzeitpunkt (Bekannt)  
 $z_0$  ... Anzahl der Jäger (z.B. Tiger)

Ferner gebe es eine Geburtenrate  $b$  der Beutetiere, d.h.  $\Delta y = b \cdot \Delta t$  falls es keine Todesfälle gäbe. Weiterhin erlegt jeder Jäger  $m$  Beutetiere pro Zeiteinheit  $\Delta t_0$ . Damit gilt für die Population

$$\Delta y = b \cdot \Delta t - m \cdot z_0 \cdot \Delta t \quad (9.1)$$

bzw.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = b - m \cdot z_0 \quad (9.2)$$

und im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$

$$y'(t) = b - m \cdot z_0 \quad (9.3)$$

Integrieren wir diese Gleichung erhalten wir

$$\int y'(t) dt = y(t) = (b - m \cdot z_0) \cdot t + C \quad (9.4)$$

Aus  $y(0) = y_0$  folgt  $C = y_0$  und damit ist die Lösungsfunktion

$$y(t) = (b - m \cdot z_0) \cdot t + y_0 \quad (9.5)$$

Für  $b > m \cdot z_0$  gibt es mehr Geburten als Todesfälle und die Anzahl der Beutetiere wächst linear, für  $b < m \cdot z_0$  überwiegen die getöteten Tiere und bei  $b = m \cdot z_0$  bleibt die Anzahl konstant  $y_0$ .

Die hier gemachte Annahme einer konstanten Anzahl Jäger beschreibt den Vorgang jedoch nicht hinreichend. Mit wachsender Anzahl Beutetiere vermehren sich auch die Jäger und deren Anzahl ergibt sich nun aus  $z(t)$ .

Eine geeignete Gleichung für die Anzahl der Jäger verwendet, dass, so lange mehr als eine Grenzzahl  $g$  Beutetiere  $y(t)$  vorhanden sind, sich die Jäger um ein

Vielfaches  $v$  dieser Differenz  $y(t) - g$  vermehren; wenn weniger als  $g$  Beutetiere vorhanden sind, verringert sich die Anzahl. Dies wird durch die Gleichung

$$z'(t) = v \cdot (y(t) - g) \quad (9.6)$$

beschrieben.

Die Lösung des Systems

$$y'(t) = b - m \cdot z(t) \quad (9.7)$$

$$z'(t) = v \cdot (y(t) - g) \quad (9.8)$$

$$y_0, z_0 \text{ bekannt} \quad (9.9)$$

wird erreicht, in dem wir zunächst die erste Gleichung differenzieren

$$y'' = -m \cdot z'(t)$$

und nun die zweite Gleichung einsetzen

$$y'' = -m \cdot v \cdot (y(t) - g) \quad (9.10)$$

Die Lösung wird weiter unten beschrieben.

**Definition 274** Eine Gleichung der Form  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  heißt **explizite gewöhnliche DGL (Differentialgleichung)  $n$ -ter Ordnung**.

Bem. 1: Ist die Gleichung in der Form  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  gegeben, so heißt die Differentialgleichung **implizit**.

Bem 2.: Die DGL heißt gewöhnlich, da ihre Lösung (die Funktion  $y(x)$ ) nur von einer Unbekannten abhängt. Bei mehreren Unbekannten spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Bem 3: Die Ordnung gibt also die höchste vorkommende Ableitung in der DGL an. Beispielsweise ist obige Gleichung für das Räuber-Beute-Modell eine explizite DGL 2. Ordnung.

**Definition 275** Die Vorgabe einer expliziten DGL und der Werte  $x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$  heißt **Anfangswertproblem (AWP)**.

**Definition 276** Eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $y(x)$ , die die explizite DGL erfüllt, heißt **allgemeine Lösung der Differentialgleichung**. Erfüllt Sie zusätzlich die Bedingungen des Anfangswertproblems aus der vorigen Definition, so heißt Sie **spezielle Lösung des AWP**.

Bem. Beim Beispiel war  $y(t) = \frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2$  die allgemeine Lösung der DGL  $y'' = g$  und  $y(t) = \frac{g}{2}t^2$  spezielle Lösung vom AWP  $y'' = g, y(0) = 0, y'(0) = 0$

Beispiel: Wir betrachten die Reaktion  $2NO_2 \rightarrow 2NO + O_2$  und interessieren uns für die Reaktionskinetik. Bezeichne  $x$  die verstrichene Zeit,  $y(x)$  die Stickstoffdioxidkonzentration zum Zeitpunkt  $x$ . Wenn wir wissen, daß der Stoffumsatz pro Zeiteinheit proportional zum Quadrat der Konzentration  $y^2(x)$  (aber  $y(x)$  unbekannt) ist, lässt sich folgern:

$$y'(x) = -ky^2(x) \quad (9.11)$$

Dies ist eine explizite DGL erster Ordnung. Zur Zeit  $x = 0$  sei die Konzentration  $y(0) = y_0$  gegeben.

Die systematische Lösung dieses Problems wird im folgenden noch detaillierter behandelt. Hat man jedoch die Lösung des Problems gefunden, so lässt sich leicht überprüfen, ob diese die obige DGL erfüllt. Hier ist die Lösung:

$$y(x) = y_0 \cdot \frac{1}{1 + kxy_0}.$$

1. AWP:  $y(0) = y_0$
2. DGL:  $y'(x) = y_0 \cdot \frac{-ky_0}{(1+kxy_0)^2} = -k \frac{y_0^2}{(1+kxy_0)^2} = -k \cdot (y(x))^2$

### Beispiele von Differentialgleichungen

$y' = f(x, y)$	Explizite DGL 1. Ordnung
$y'x + y = f(x)$	Implizite DGL 1. Ordnung
$y^{(2)} \cdot y^{(4)} = xy'$	Implizite DGL 4. Ordnung

Bem.: Sind keine Anfangsbedingungen gegeben, so hat eine DGL erster Ordnung einen freien Parameter in der Lösung und somit unendlich viele Lösungen. Allgemein hat eine DGL n-ter Ordnung n freie Parameter. Für jede spezielle Wahl dieser Parameter erhält man eine Lösungsfunktion der DGL.

### 9.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Zunächst sei erwähnt, dass durch ein Anfangswertproblem nicht stets eine eindeutige Lösung gegeben ist. Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

und die beiden verifizierbaren Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0 \\ y_2(x) &= \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

und wir erhalten somit 2 Lösungen.

Das jedoch immer (mindestens) eine Lösung existiert, liefern die folgenden Sätze:

**Satz 277** *Ist  $y(x)$  ist genau dann eine Lösung des AWP  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , falls*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \\ &\quad (\text{Volterra-Integralgleichung}) \end{aligned}$$

Bew.: Ist  $y(x)$  Lösung des AWP, so ist

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt &= \int_{x_0}^x y' dt \\ &= y(x) - y(x_0) \end{aligned}$$

Umgekehrt sei

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y' &= \frac{d}{dx} \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right) \\ &= f(x, y(x)) \end{aligned}$$

Praktisch ist diese Aussage von eher geringer Bedeutung, aber es liefert die Existenz mindestens einer Lösung falls  $\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$  existiert und es hilft ein Näherungsverfahren zu konstruieren:

### Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren

Wir können mit Hilfe der Volterra-Integralgleichung wie folgt die gesuchte Lösung annähern. Starte mit einer beliebigen Startfunktion, z.B. einer Konstanten sinnvollerweise dem Anfangswert

$$g_0(x) = y_0$$

Bilde nun

$$g_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g_n(t)) dt$$

als nächste Näherung für die gesuchte Funktion  $y(x)$ .

Beispiel:

$$\begin{aligned} y' &= yx \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \\ g_1(x) &= 1 + \int_0^x f(t, 1) dt \\ &= 1 + \int_0^x t dt \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} \\ g_2(x) &= 1 + \int_0^x f(t, 1 + \frac{t^2}{2}) dt \\ &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2} dt \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \end{aligned}$$

u.s.w.

**Satz 278** (Peano): Ist  $f(x, y)$  in  $[a, b] \times \mathbb{R}$  stetig, so ist die DGL  $y' = f(x, y)$  lösbar.

Eine eindeutige Lösung wird nur unter zusätzlichen Bedingungen erreicht. Dazu:

**Definition 279**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Lipschitz-stetig bzgl.  $y$** , falls es eine Konstante  $L > 0$  gibt, mit

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &< L \cdot |y_1 - y_2| \\ \forall (x, y_1), (x, y_2) &\in D \end{aligned}$$

**Satz 280** (Picard-Lindelöf) Sei  $x_0 \in [a, b]$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt,  $f$  Lipschitz stetig in  $y$ . Dann besitzt  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  eine eindeutige Lösung auf  $[a, b]$ .

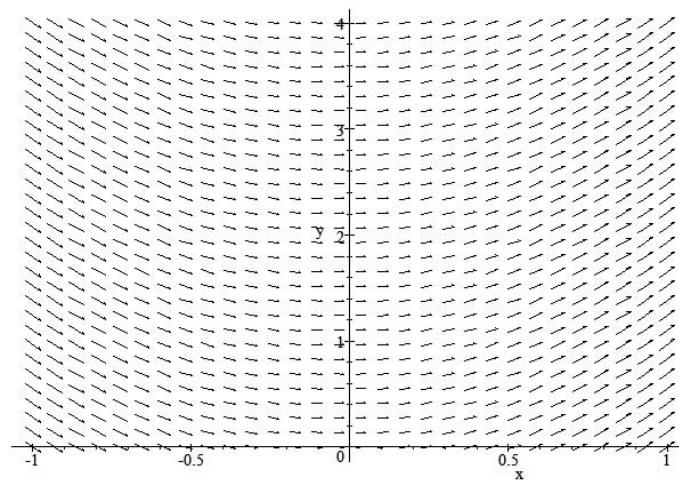
## 9.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung

Zu lösen ist also  $y'(x) = f(x, y(x))$ . Zunächst eine grafische Interpretation.

### 9.2.1 Geometrische Interpretation von $y' = f(x, y)$

Wir betrachten nun die DGL  $y' = f(x, y)$ . Diese Differentialgleichung besagt, daß an jeder Stelle  $(x_0, y_0)$  die Tangentensteigung der noch unbekannten Funktion berechnet werden kann. Wir wissen also - wenn wir einen Punkt der Kurve (näherungsweise) kennen, in welche Richtung die Funktion von dort weiterläuft.

Dieses lässt sich grafisch durch ein Richtungsfeld zeigen, in dem jedem Punkt nun ein kleiner Vektor mit der Steigung dieses Punktes zugeordnet wird.



Beispiel :  $y' = y$

Wird nun ein Anfangswert  $x_0$  und ein zugehöriger Funktionswert  $y_0$  vorgegeben, so ist eine Stelle der Funktion bekannt, z.B.  $y(0) = 1$  und man kann von diesem Punkt die Funktion rekonstruieren, in dem man  $y_1 = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0)$  berechnet dann von diesem Wert aus weiter rechnet.

#### Analytische Behandlung

Ist die DGL von der Gestalt  $y' = f(x)$ , so lässt sich die DGL durch direkte Integration lösen.

Beispiel: Ges:  $y' = 2x$ ;  
 $y(0) = 1$

Zunächst integrieren wir beide Seiten der DGL und erhalten:

$$y = x^2 + c \quad (\text{Allgemeine Lösung der DGL})$$

In diese Gleichung setzen wir nun die Anfangsbedingung ein und erhalten:

$$1 = y(0) = 0^2 + c$$

Und damit  $c = 1$ .

Die spezielle Lösung unseres Problems lautet - in dem man  $c = 1$  nun in die Allgemeine Lösung einsetzt:

$$y = x^2 + 1$$

### Trennung der Variablen

Hat die DGL die Gestalt  $y' = f(x) \cdot g(y)$ , also lassen sich die Variablen trennen (separieren), so kann man die DGL wie folgt lösen. Zunächst dividieren wir durch  $g(y)$

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

Für die Funktion  $\frac{1}{g(y)}$  ersetzen wir  $h(y)$  mit Stammfunktion  $H(y)$  und erhalten

$$h(y) \cdot y' = f(x)$$

Nun erinnern wir uns das  $y$  eine Funktion  $y(x)$  ist. Integration liefert zunächst

$$\int h(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int f(x) dx$$

und erkennen auf der linken Seite nach der Substitution  $u = y(x)$

$$\begin{aligned} \int h(u) du &= \int f(x) dx \\ H(u) &= F(x) + c \\ H(y(x)) &= F(x) + c \end{aligned}$$



Diese Gleichung lösen wir nach  $y$  auf und erhalten

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

Mathematischer weniger korrekt, aber deutlich einprägsamer ist die folgende Form des Verfahrens:

Wir ersetzen zunächst  $y'$  durch  $\frac{dy}{dx}$  und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{h(y)} dy = \int f(x) dx$$

$$H(y) = F(x) + c$$

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

Löst man nun dies Integral und löst die resultierende Gleichung nach  $y$  auf, so hat man die gesuchte Lösung gefunden.

Bsp. (s.o.):

$$y' = -ky^2 \text{ mit } y(0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky^2$$

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int k dx$$

$$\frac{1}{y} = kx + c$$

$$y = \frac{1}{kx + c}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:  $y_0 = y(0) = \frac{1}{c}$  bzw.  $c = \frac{1}{y_0}$ . Und damit:

$$y = \frac{1}{kx + \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{kxy_0 + 1}$$

### 9.2.2 Substitution

In vielen Fällen kann ein zunächst komplex aussehendes Problem durch eine geeignete Substitution vereinfacht werden.

**DGL'en vom Typ**  $y' = f(ax + b \cdot y(x) + c)$

Mit der **Substitution**  $z(x) = ax + by + c$  wird die rechte Seite zu  $f(z)$  und es ergibt sich  $y = \frac{z(x) - ax - c}{b}$ . Dieses kann am Ende genutzt werden um aus der Lösung  $z(x)$  wiederum die ursprünglich gesuchte Funktion  $y(x)$  zu ermitteln. Es gilt für den Wert der Ableitung von  $y(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{b} \cdot (z'(x) - a) \quad (9.12)$$

**Einsetzen** in die DGL ergibt

$$\frac{1}{b} \cdot (z'(x) - a) = f(z) \quad (9.13)$$

bzw.

$$\boxed{z'(x) = a + b \cdot f(z)} \quad (9.14)$$

Diese Gleichung in der neuen Variablen  $z$  kann nun durch Integration **gelöst** werden. Die Lösung dieses Problems sei  $z(x)$ . Andererseits ergibt sich die **Rücksubstitution**

$$y(x) = \frac{z(x) - a \cdot x - c}{b} \quad (9.15)$$

wobei für  $z(x)$  nun die zuvor gefundene Lösung eingesetzt wird.

*Bsp:*  $y' = (x + y(x))^2$

*Im obigen Beispiel ist damit  $a = 1, b = 1, c = 0$  und  $f(z) = z^2$*

1. Substituieren

$$\begin{aligned} z(x) &= x + y(x) \\ y(x) &= z(x) - x \\ y'(x) &= z'(x) - 1 \end{aligned} \tag{9.16}$$

2. Einsetzen in die DGL

$$z'(x) - 1 = z(x)^2$$

3. Lösen der DGL

$$\begin{aligned} z' &= 1 + z^2 \\ \int \frac{1}{1 + z^2} dz &= \int 1 dx \\ \operatorname{atan}(z) &= x + c \\ z &= \tan(x + c) \end{aligned}$$

4. Rücksubstitution mit (9.16):

$$\begin{aligned} x + y(x) &= \tan(x + c) \\ y(x) &= \tan(x + c) - x \end{aligned}$$

$c$  ist dabei ein freier Parameter, der sich aus der Anfangsbedingung ergibt.

**DGL'en vom Typ**  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Mit der **Substitution**  $z(x) = \frac{y}{x}$  gilt zunächst  $y(x) = z(x) \cdot x$  und damit  $y' = z(x) + z'(x) \cdot x$  (Produktregel!)

**Einsetzen** in die DGL ergibt

$$\boxed{z(x) + z'(x) \cdot x = f(z)} \quad \text{bzw} \tag{9.17}$$

$$z'(x) = \frac{f(z) - z(x)}{x}$$

Diese Gleichung in der neuen Variablen  $z$  kann nun durch Integration **gelöst** werden. Die Lösung dieses Problems sei wiederum  $z(x)$ . Aus der **Rücksubstitution**

$$y(x) = z(x) \cdot x \quad (9.18)$$

wobei für  $z(x)$  nun die zuvor gefundene Lösung eingesetzt wird.

$$\text{Bsp: } y' = \frac{y(x)}{x} + 1$$

Im obigen Beispiel ist damit  $y' = f(z) = z + 1$

### 1. Substituieren

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y(x)}{x} \\ y(x) &= z(x) \cdot x \\ y'(x) &= z(x) + z'(x) \cdot x \end{aligned}$$

### 2. Einsetzen in die DGL

$$z(x) + z'(x) \cdot x = z(x) + 1$$

### 3. Lösen der DGL

$$\begin{aligned} z' \cdot x &= 1 \\ \int 1 dz &= \int \frac{1}{x} dx \\ z &= \ln|x| + c \end{aligned}$$

### 4. Rücksubstitution mit (9.18):

$$y = (\ln|x| + c) \cdot x$$

$c$  ist dabei ein freier Parameter, der sich aus der Anfangsbedingung ergibt. Beachte: Bei einem speziellen Anfangswertproblem muß am Schluß der Parameter  $c$  durch Einsetzen des Anfangswertes ermittelt werden.

Bem.: Häufig muß die DGL noch umgeformt werden, um eine geeignete Substitution zu erkennen, z.B.

$$\begin{aligned} xy' &= y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Bsp.: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \quad (9.19)$$

mit  $y(0) = y_0$  mit dem Substitutionsverfahren.

### 9.2.3 Anwendung: Freier Fall mit Luftwiderstand

Betrachten wir den freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, so erhalten wir eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit

$$F_R = \rho \cdot v(t)$$

eine Trägheitskraft

$$F_T = m \cdot a(t) = m \cdot v'(t)$$

und eine Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g$$

Insgesamt ergibt sich aus dem Käfiggleichgewicht

$$\begin{aligned} F_T + F_R &= F_G \\ m \cdot v'(t) &= m \cdot g - \rho \cdot v(t) \\ v'(t) &= g - \frac{\rho}{m} \cdot v(t) \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} z(t) &= g - \frac{\rho}{m} \cdot v(t) \\ v(t) &= \frac{m}{\rho} (g - z(t)) \\ v'(t) &= -\frac{m}{\rho} z'(t) \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die neue DGL

$$\begin{aligned} -\frac{m}{\rho} z'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= -\frac{\rho}{m} z(t) \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$z(t) = c \cdot e^{-\frac{\rho}{m} t}$$

und daraus

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{\rho} (g - z(t)) \\ &= \frac{m}{\rho} (g - c \cdot e^{-\frac{\rho}{m} t}) \end{aligned}$$

Gibt es eine Startbedingung

$$v(0) = v_0$$

so ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{m}{\rho}(g - c) \\ g - c &= v_0 \cdot \frac{\rho}{m} \\ c &= g - v_0 \cdot \frac{\rho}{m} \end{aligned}$$

und damit die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{\rho} \left( g - \left( g - v_0 \cdot \frac{\rho}{m} \right) \cdot e^{-\frac{\rho}{m}t} \right) \\ &= \frac{m}{\rho} g + \left( v_0 - g \frac{m}{\rho} \right) \cdot e^{-\frac{\rho}{m}t} \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{m}{\rho} g$$

als Grenzggeschwindigkeit.

### 9.2.4 Lineare DGL'en

Eine spezielle DGL mit trennbaren Variablen ist

$$\begin{aligned} y' &= g(x) \cdot y \\ \text{bzw. } y' + f(x) \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung wird durch Integration berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= g(x) \cdot y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int g(x) dx \\ \ln(y) &= \int g(x) dx + c \\ y &= e^{\int g(x) dx + c} = c_1 \cdot e^{\int g(x) dx} \end{aligned}$$

wobei  $c_1$  wiederum erst am Ende durch Einsetzen des Anfangswertes berechnet wird.

Bsp.:  $y' = y \cdot \sin(x)$  mit  $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int \sin(x) dx \\ \ln(y) &= -\cos(x) + c \\ y &= c_1 \cdot e^{-\cos(x)} \quad (\text{Allgem. Lösung}) \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cdot e^{-1} = 1 \\ c_1 &= e \end{aligned}$$

und damit die spezielle Lösung

$$y = e \cdot e^{-\cos(x)} = e^{1-\cos(x)}$$

Für den Fall  $y' + f(x) \cdot y = 0$  ergibt sich analog die allgemeine Lösung

$$y = c \cdot e^{\int -f(x) dx} \quad (9.20)$$

**Definition 281** Die Gleichung  $y' + f(x) \cdot y = 0$  heißt **linear homogene DGL 1. Ordnung**.

Bem.: Die linear homogene DGL hat also immer die allgemeine Lösung gemäß 9.20.

Der Name hat die Bestandteile: linear (in  $y$ ), homogen (rechte Seite ist 0) und 1. Ordnung da die höchste auftretende Ableitung  $y'$  ist. Ist die rechte Seite eine Funktion in  $x$ , so greift die folgende Definition:

**Definition 282** Die Gleichung  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  heißt **linear inhomogene DGL 1. Ordnung**.  $g(x)$  heißt die **Störfunktion**.

**Definition 283** Eine DGL der Form

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

heißt **lineare DGL**. Das zugehörige AWP lineares AWP.

**Satz 284** Jedes lineare AWP mit stetigen Funktion  $a(x)$  und  $b(x)$  sowie beschränktem  $a(x)$  hat genau eine Lösung.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned} |a(x)y_1 + b(x) - a(x)y_2 - b(x)| &= |a(x)| \cdot |y_1 - y_2| \\ &\leq M \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Damit ist die lineare Funktion Lipschitz stetig und eine eindeutige Lösung gesichert.

**Lösung der inhomogenen DGL- Variation der Konstanten:**

Ansatz: Betrachte zur Lösung von  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  statt (9.20) den Lösungsansatz

$$y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \quad (9.21)$$

Bildet man hieraus  $y'$  so ergibt sich mit der Produktregel:

$$y' = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} + c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \cdot (-f(x)) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} - f(x) \cdot y \quad (9.22)$$

und damit

$$y' + f(x) \cdot y = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \quad (9.23)$$

Vergleichen wir dieses mit der ursprünglichen Aufgabenstellung 9.2.4 so muß für die Störfunktion gelten

$$g(x) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \quad (9.24)$$

Man erhält also eine neue DGL für  $c(x)$

$$c'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \quad (9.25)$$

Löst man diese DGL und erhält die Funktion  $c(x)$  so kann man mit 9.21 die Lösung des ursprünglichen Systems berechnen.

Folgende Arbeitsschritte sind also nötig um die DGL  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  zu lösen:

1. Löse homogene DGL  $y' + f(x) \cdot y = 0$ . Ergebnis:  $y = c \cdot e^{\int -f(x)dx}$  mit einer Konstanten  $c$
2. Ersetze  $c$  durch  $c(x)$ , also die Konstante durch eine von  $x$  abhängige Funktion.
3. Berechne mit  $y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx}$  den Ausdruck  $y'$  und vergleiche diese Gleichung mit der ursprünglichen mit Störfunktion
4. Bestimme aus der Differentialgleichung für  $c(x)$  die Lösung für  $c$ , welche eine neue Konstante enthält
5. Setze diese Lösung in  $y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx}$  ein.
6. Ist ein Anfangswert gegeben, so berechne hieraus die freie Konstante  $c_1$  und berechne damit die spezielle Lösung.

Bsp.:

$$y' - \cos(x) \cdot y = x \cdot e^{\sin(x)} \quad \text{mit } y(0) = 3$$



1. Löse homogene DGL:  $y' - \cos(x) \cdot y = 0$

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x) \cdot y \\ \frac{y'}{y} &= \cos(x) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \cos(x) dx \\ \ln(y) &= \sin(x) + c_1 \\ y &= c \cdot e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

2. Ersetzen: Ansatz:  $y = c(x) \cdot e^{\sin(x)}$

3. Berechne  $y'$ :

Damit:

$$\begin{aligned} y' &= c'(x) \cdot e^{\sin(x)} + c(x) \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \\ &= c'(x) \cdot e^{\sin(x)} + y \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$y' - y \cdot \cos(x) = c'(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

Vergleich: Ursprünglich  $y' - \cos(x) \cdot y = x \cdot e^{\sin(x)}$

4. Lösen der DGL für  $c(x)$ :

Es muß also gelten  $c'(x) \cdot e^{\sin(x)} = x \cdot e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned} c'(x) &= x \\ c(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c \end{aligned}$$

5. Einsetzen in  $y = c(x) \cdot e^{\sin(x)}$

$$\left( \frac{1}{2}x^2 + c \right) \cdot e^{\sin(x)}$$

6. Berechnung von  $c$  aus  $y(0) = 3$

$$\begin{aligned} y(0) &= c \cdot 1 = 3 \\ \text{damit} &: c = 3 \end{aligned}$$

Und damit ergibt sich als Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \cdot e^{\sin(x)}$$

Kontrolle: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \quad (9.26)$$

mit  $y(0) = y_0$  durch Umstellung mit dem Verfahren "Variation der Konstanten".

### 9.2.5 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

#### Das Superpositionsprinzip

Wir betrachten nun die lineare DGL

$$y' + a \cdot y = g(x) \quad (9.27)$$

Diese DGL hat im Vergleich zum Verfahren der Variation der Konstanten einen Vorfaktor von  $y$ , der von  $x$  unabhängig, also konstant ist.

Die zu dieser DGL gehörende homogene DGL lautet  $y' + a \cdot y = 0$ . Wir bezeichnen nun die allgemeine Lösung der homogenen DGL mit  $y_h$  und irgend eine spezielle Lösung (partikuläre Lösung) von 9.27 mit  $y_p$ . Kombiniert man nun diese beiden Lösungen zu  $y = y_h + y_p$ , so gilt, daß  $y$  nun auch die ursprüngliche inhomogene DGL löst. Dies bedeutet, dass man zu einer Lösung der inhomogenen DGL stets eine beliebige Lösung der homogenen DGL hinzuaddieren darf und man erhält wiederum eine Lösung der inhomogenen DGL.

Denn: Wegen  $y_h$  Lösung der homogenen DGL gilt:  $y_h' + a \cdot y_h = 0$  und da  $y_p$  Lösung der inhomogenen DGL ist, gilt:  $y_p' + a \cdot y_p = g(x)$ . Und damit:

$$\begin{aligned} y' + a \cdot y &= (y_h + y_p)' + a \cdot (y_h + y_p) \\ &= y_h' + y_p' + a \cdot y_h + a \cdot y_p = (y_h' + a \cdot y_h) + (y_p' + a \cdot y_p) \\ &= 0 + g(x) = g(x) \end{aligned}$$

Das Lösungsverfahren lautet damit:

**Verfahren zur Lösung der inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten**

1. Bestimme zunächst die **allgemeine Lösung**  $y_h$  der **homogenen DGL**  $y' + a \cdot y = 0$  ( $y_h$  enthält dabei noch einen freien Parameter)
2. Bestimme **eine** Lösung  $y_p$  der **inhomogenen DGL**  $y' + a \cdot y = g(x)$
3. Die **allgemeine Lösung der inhomogenen DGL** ergibt sich dann gemäß  $y = y_h + y_p$
4. Ist das Problem als AWP gegeben, so wird der freie Parameter in  $y_h$  so bestimmt, daß  $y$  die DGL löst.

Verbleibt die Frage, wie man  $y_h$  und  $y_p$  bestimmen kann.

Zunächst betrachten wir wiederum die homogene DGL  $y' + a \cdot y = 0$  und können deren Lösungsvielfalt durch Trennung der Variablen bestimmen. Diese Lösungsfunktion  $y_h$  ist dann:

$$y_h = c \cdot e^{-ax} \quad (9.28)$$

Wie findet man nun  $y_p$ ? Hier verwendet man das Verfahren:

**Ansatz vom Typ der rechten Seite**

Idee: Man "rät" eine Lösung, in dem man einen Funktionenansatz für  $y$  vom Typ der Störfunktion  $g(x)$  wählt.

Beispiel: AWP:  $y' + 2y = 2x + 13$  mit  $y(0) = 8$

Wir sehen auf der rechten Seite ein Polynom und versuchen den Ansatz:  $y = bx + c$  und damit  $y' = b$ . Diese eingesetzt in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} b + 2(bx + c) &= 2x + 13 \\ 2bx + b + 2c &= 2x + 13 \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die Vorzeichen der Konstanten und des linearen Terms und erhalten die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2b &= 2 \\ b + 2c &= 13 \end{aligned}$$

und damit  $b = 1$  und  $c = 6$ .

Damit haben wir eine Lösung (partikuläre Lösung) der inhomogenen DGL gefunden:  $y_p = x + 6$ . (Probe:  $y' + 2y = 1 + 2x + 12 = 2x + 13$ )

Berechnet man nun noch  $y_h = c \cdot e^{-2x}$ , so ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL gemäß

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c \cdot e^{-2x} + x + 6 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun noch die Bedingung  $y(0) = 8$ , so ergibt diese

$$\begin{aligned} y(0) &= c + 6 \stackrel{!}{=} 8 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

und man erhält die spezielle Lösung  $y = 2 \cdot e^{-2x} + x + 6$ .

Besteht die rechte Seite aus einer Funktion anderer Art, so muß ein analoger Ansatz gemacht werden. Da man den Ansatz in Abhängigkeit von der Störfunktion ("rechte Seite") macht, nennt man diese Verfahren auch **Ansatz vom Typ der rechten Seite**.

Folgende Ansatzfunktionen werden hierbei gemacht (homogene Lösung sei  $y_h = c \cdot e^{-ax}$ )

Störfunktionstyp	Störfunktion $g(x)$	Ansatz für $y_p$
Konstante	$k_0$	$c_0$
Linear	$k_0 + k_1 x$	$c_0 + c_1 x$
Polynom	$\sum_{i=0}^n k_i x^i$	$\sum_{i=0}^n c_i x^i$
Exponentiell	$k \cdot e^{bx}; b \neq -a$	$c_0 \cdot e^{bx}$
	$k \cdot e^{-ax}$	$c_0 \cdot x e^{-ax}$
Trigonometrisch	$k \cdot \sin(bx) + l \cdot \cos(bx);$	$c_0 \cdot \sin(bx) + c_1 \cdot \cos(bx)$

Dabei wird dann jeweils die Ansatzfunktion in die DGL eingesetzt und über Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite, also der Störfunktion, die Parameter  $c_i$  bestimmt. Beachte: in der Ansatzfunktion sind nur die  $c_i$  zu bestimmen, die  $b$  erhalten wir aus der Störfunktion.

Bsp.:  $y' + y = 2 \cdot \sin(3x)$

1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL  $y' + y = 0$ :  $y_h = c \cdot e^{-x}$

2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $y' + y = 2 \cdot \sin(3x)$  :

$$\text{Ansatz: } y_p = c_0 \cdot \sin(3x) + c_1 \cdot \cos(3x) \implies y'_p = 3c_0 \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot \sin(3x)$$

$$\begin{aligned} \text{Damit ist } y'_p + y_p &= 3c_0 \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot \sin(3x) + c_0 \cdot \sin(3x) + c_1 \cdot \cos(3x) \\ &= (c_0 - 3c_1) \cdot \sin(3x) + (c_1 + 3c_0) \cdot \cos(3x) \stackrel{!}{=} 2 \cdot \sin(3x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich von  $\sin(3x)$  und  $\cos(3x)$  liefert nun zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_0 - 3c_1 &= 2 \\ c_1 + 3c_0 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung (nachrechnen)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{5} \\ c_1 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\text{also } y_p = \frac{1}{5} \cdot \sin(3x) - \frac{3}{5} \cdot \cos(3x)$$

3. Summe der Lösungen liefert:  $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{5} \cdot \sin(3x) - \frac{3}{5} \cdot \cos(3x)$

Bsp. 2 :  $y' + 3y = e^{-2x}$

1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL  $y' + 3y = 0$  :  $y_h = c \cdot e^{-3x}$

2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $y' + 3y = e^{-2x}$  :

$$\text{Ansatz: } y_p = Ae^{-2x} \implies y'_p = -2Ae^{-2x}$$

$$\text{Damit ist } y'_p + 3y_p = -2Ae^{-2x} + 3Ae^{-2x} = Ae^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$A = 1$$

$$\text{also } y_p = e^{-2x}$$

3. Summe der Lösungen liefert:  $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-3x} + e^{-2x}$

Bsp. 3 :  $y' + 3y = e^{-3x}$

1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL  $y' + 3y = 0$  :  $y_h = c \cdot e^{-3x}$

2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $y' + 3y = e^{-3x}$  :

$$\text{Ansatz: } y_p = Axe^{-3x} \implies y'_p = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x}$$

$$\text{Damit ist } y'_p + 3y_p = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x} + 3Axe^{-3x} = Ae^{-3x} \stackrel{!}{=} e^{-3x}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$A = 1$$

$$\text{also } y_p = xe^{-3x}$$

3. Summe der Lösungen liefert:  $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-3x} + xe^{-3x}$

Bsp.: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \quad (9.29)$$

mit  $y(0) = y_0$  mit dem Verfahren "Lineare DGL mit konst. Koeffizienten".

### 9.2.6 Die Bernoulli-Differentialgleichung

Wir betrachten nun die DGL

$$y' + a(x) \cdot y = r(x) \cdot y^\alpha$$

mit  $\alpha \neq 1$ . Diese lässt sich nicht mit dem Verfahren Variation der Konstanten lösen, da die rechte Seite noch den Term in  $y$  enthält. Hier hilft folgende Substitution

$$u = y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y &= u^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ y' &= \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot u' \\ &= \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot u' \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot u' + a(x) \cdot u^{\frac{1}{1-\alpha}} &= r(x) \cdot u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot u' + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot u^{\frac{1}{1-\alpha}} &= (1-\alpha) \cdot r(x) \cdot u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ u' + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} &= r(x) \cdot (1-\alpha) \\ u' + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot u &= r(x) \cdot (1-\alpha)\end{aligned}$$

und wir erhalten eine lineare DGL zur Lösung mit einem der obigen Verfahren. Schliesslich liefert

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

die gesuchte Lösung.

Beispiel:

$$y' - \frac{4}{x}y = xy^3$$

hat  $\alpha = 3$ . Die Substitution lautet demnach

$$\begin{aligned}u &= y^{1-3} = y^{-2} \\ y &= u^{-\frac{1}{2}} \\ y' &= -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot u'\end{aligned}$$

und die DGL

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot u' - \frac{4}{x}u^{-\frac{1}{2}} &= xu^{-\frac{3}{2}} \\ u^{-\frac{3}{2}} \cdot u' + \frac{8}{x}u^{-\frac{1}{2}} &= -2xu^{-\frac{3}{2}} \\ u' + \frac{8}{x}u &= -2x\end{aligned}$$

Diese lineare DGL kann nun gelöst werden und man erhält

$$u = c \cdot \frac{1}{x^8} - \frac{1}{5}x^2$$

und anhand dieser Lösung findet nun die Rücksustitution statt

$$\begin{aligned}y &= u^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( c \cdot \frac{1}{x^8} - \frac{1}{5}x^2 \right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

### 9.2.7 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung

$y' = f(x) \cdot g(y)$	Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx}$ ersetzen
$y' = f(ax + by + c)$	Substitution	$z = ax + by + c$
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Substitution	$z = \frac{y}{x}$
$y' + f(x) \cdot y = g(x)$	Variation der Konstanten	
$y' + a \cdot y = g(x)$	Summe $y_h + y_p$	
$y' + a \cdot y = g(x)y^\alpha$	Substitution	

#### Konstante Koeffizienten mit weiteren rechten Seiten

Das Verfahren soll nun an einem Beispiel erläutert werden:

$$y' - y = (x + 1)e^x$$

Zunächst kann auch hier die allgemeine Lösung der homogenen DGL wie üblich ermittelt werden. Es ist

$$y_h = c \cdot e^x$$

Der naheliegende Ansatz wäre nun auch

$$y_p = (ax + b)e^x$$

jedoch sehen wir auch hier, dass der Exponent der homogenen Lösung mit der inhomogenen übereinstimmt und wir müssen den Ansatz wieder modifizieren zu

$$\begin{aligned} y_p &= x(ax + b)e^x \\ &= (ax^2 + bx)e^x \end{aligned}$$

Die Ableitung wird nun formal ausgerechnet zu

$$\begin{aligned} y_p' &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x \\ &= e^x (ax^2 + (2a + b)x + b) \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Terme in die DGL ein und vergleichen die Koeffizienten in  $e^x$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p' - y &= e^x (ax^2 + (2a + b)x + b) - (ax^2 + bx)e^x \\ &= (2ax + b)e^x \\ &= (x + 1)e^x \end{aligned}$$



welches ergibt

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$b = 1$$

also

$$y_p = \left( \frac{1}{2}x^2 + x \right) e^x$$

und damit erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c \cdot e^x + \left( \frac{1}{2}x^2 + x \right) e^x \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel soll nun das Superpositionsprinzip zur Konstruktion von komplexeren rechten Seiten erläutert werden. Hierzu sei zunächst bemerkt, dass mit zwei partikulären Lösung  $y_p^{(1)}$  und  $y_p^{(2)}$  zweier inhomogener DGL'en

$$\begin{aligned} y' + ay &= g^{(1)}(x) \\ y' + ay &= g^{(2)}(x) \end{aligned}$$

auch die Summe dieser beiden Lösungen  $y_p^{(1)} + y_p^{(2)}$  Lösung von

$$y' + ay = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x)$$

(Einsetzen). Dieses kann nun analog auf beliebig viele Funktionen erweitert werden.

Bsp.: Wir suchen die allgemeine Lösung der Funktion

$$y' - 2y = 4(1 + x^2 + e^x) + 5 \sin(3x)$$

mit bereits bekannten partikulären Teillösungen

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 1 + x^2 \\ y_p &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \\ y' - 2y &= e^x \\ y_p &= -e^x \end{aligned}$$

Damit ist zunächst (nachrechnen)

$$y_p = 4\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - e^x\right)$$

auch Lösung von

$$y' - 2y = 4(1 + x^2 + e^x)$$

Auch die homogene Lösung ist leicht zu ermitteln.

$$y_h = ce^{2x}$$

und für die Gesamtlösung brauchen wir nun nur noch eine partikuläre Lösung von

$$y' - 2y = 5 \sin(3x)$$

über den Ansatz

$$y_p = A \sin(3x) + B \cos(3x)$$

mit

$$y'_p = 3A \cos(3x) - 3B \sin(3x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$\begin{aligned} y'_p - 2y_p &= 3A \cos(3x) - 3B \sin(3x) - 2(A \sin(3x) + B \cos(3x)) \\ &= \cos(3x) \cdot (3A - 2B) + \sin(3x) \cdot (-3B - 2A) \\ &= 5 \sin(3x) \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= 0 \\ A &= \frac{2}{3}B \\ -3B - 2A &= 5 \\ -3B - \frac{4}{3}B &= 5 \\ -\frac{13}{3}B &= 5 \\ B &= -\frac{15}{13} \\ A &= -\frac{10}{13} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$y_p = -\frac{10}{13} \sin(3x) - \frac{15}{13} \cos(3x)$$

und die Gesamtlösung

$$y = ce^{2x} + 4\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - e^x\right) - \frac{10}{13} \sin(3x) - \frac{15}{13} \cos(3x)$$

### 9.2.8 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten

Häufig wird auch das Verfahren Variation der Konstanten über das Superpositionsprinzip angewandt. Dabei wird in der Integration der Funktion  $c(x)$  die Integrationskonstante als partikuläre Lösung weggelassen.

Auch für linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten gilt das Superpositionsprinzip, da für eine partikuläre Lösung  $y_p$  gilt

$$y_p' + f(x)y_p = g(x)$$

und für die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen DGL

$$y_h' + f(x)y_h = 0$$

und somit für die Summe der beiden Lösungen  $y = y_h + y_p$

$$\begin{aligned} y' + f(x)y &= (y_h + y_p)' + f(x)(y_h + y_p) \\ &= y_h' + y_p' + f(x)y_h + f(x)y_p \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Somit kann auch bei dieser Art DGL die Lösung zerlegt werden in eine allgemeine Lösung der homogenen DGL (Zu bestimmen wir im ersten Teil beim Verfahren Variation der Konstanten) und eine partikuläre Lösung (Zu bestimmen gemäß Ansatz vom Typ der rechten Seite). Dieser Ansatz kann nun auch für Funktionen, die nicht in die obigen Klassen fallen, verwendet werden.

Auch hier zur Erläuterung des Verfahrens ein Beispiel. Gesucht sei die allgemeine Lösung von

$$y' = -\frac{y}{x} + 1$$

Die homogene DGL ist

$$y' = -\frac{y}{x}$$

mit der Lösung (Trennung der Variablen)

$$y_h = \frac{c}{x}$$

Nun setzen wir an

$$\begin{aligned} y &= \frac{c(x)}{x} \\ y' &= \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} \\ &= \frac{c'(x)}{x} - \frac{1}{x}y \end{aligned}$$

und erhalten

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}$$

Hier können wir nun wieder mit dem inhomogenen Anteil vergleichen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{c'(x)}{x} &= 1 \\ c'(x) &= x\end{aligned}$$

Wir suchen nun nur eine partikuläre Lösung und wählen dazu

$$c(x) = \frac{x^2}{2}$$

und damit

$$y_p = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\ &= \frac{c}{x} + \frac{x}{2}\end{aligned}$$

### 9.2.9 Potenzreihenansätze

Helfen obige Lösungsverfahren nicht, so kann die Funktion ggf. über ihre Potenzreihe hergeleitet werden. Als Entwicklungspunkt wird dabei der Startwert  $x_0$  verwendet oder Null bei der Suche nach einer allgemeinen Lösung. Der Einfachheit halber verwenden wir nun zunächst  $x_0 = 0$ .

Fangen wir mit einem Beispiel an. Wir suchen die Lösung des AWP

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Die Funktion wird nun über ihre Potenzreihe ermittelt, d.h. wir suchen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Zunächst erhalten wir aus dem Startwert

$$1 = y(0) = a_0$$

Wir differenzieren die Funktion und erhalten

$$\begin{aligned}y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

Bilden wir die DGL so gilt damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) \cdot x^n$$

also

$$a_n = a_{n+1} (n+1)$$

Division liefert

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

und fortgesetztes Einsetzen

$$a_{n+1} = \frac{a_0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

oder mit dem Index  $n$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Dies liefert die Lösung

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

Bem.: In der Regel kann keine geschlossene Darstellung der Funktion angegeben werden, sondern nur eine Berechnungsvorschrift für die  $a_n$ .

Bsp:

$$\begin{aligned} y' &= 2y + 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Der Ansatz liefert wieder zunächst  $a_0 = 1$  und die DGL in der Potenzreihenform

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) \cdot x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1$$

und wir vergleichen die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} n &= 0 : a_1 = 2a_0 + 1 = 3 \\ n &= 1 : a_2 \cdot 2 = 2a_1 = 6 \\ a_2 &= 3 \\ n &= 2 : a_3 = \frac{2a_2}{3} = 2 \\ &\dots \\ a_n &= \frac{2}{n} a_{n-1} \text{ für } n > 2 \end{aligned}$$

Damit könnte die Funktion angegeben werden oder auch approximiert werden:

$$y = 1 + 3x + 3x^2 + 2x^3$$

Um die Potenzreihe entwickeln zu können, müssen alle Funktionen, also auch Koeffizienten und Störfunktionen in Potenzreihen dargestellt werden. Brauchbar ist diese Methode von daher vor allem bei Polynomen in  $x$  und  $y$ , da diese bereits ihre Potenzreihen sind.

Hierzu ein abschliessendes Beispiel. Wir suchen die Lösung in Form der ersten drei Summanden der Potenzreihe von der DGL

$$\begin{aligned} y' - 2y &= e^x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

und damit  $a_0 = 1$ . In Potenzreihendarstellung ist dies

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) \cdot x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}(n+1) - 2a_n) \cdot x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} n = 0 : a_1 - 2 &= 1 \rightarrow a_1 = 3 \\ n = 1 : 2a_2 - 2 \cdot 3 &= 1 \rightarrow a_2 = \frac{7}{2} \\ n = 2 : 3a_3 - 2 \cdot \frac{7}{2} &= \frac{1}{2} \rightarrow a_3 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und wir erhalten die Lösung

$$y = 1 + 3x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3$$

## 9.3 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten nun wie beim impliziten Differenzieren die Funktion als Höhenlinie zu  $F(x, y(x)) = 0$  und das Differential

$$\begin{aligned} F_x dx + F_y dy &= 0 \\ p(x, y) dx + q(x, y) dy &= 0 \end{aligned}$$

bzw. nach Division durch  $dx$

$$\begin{aligned} F_x + F_y \cdot y' &= 0 \\ p(x, y) + q(x, y)y' &= 0 \end{aligned}$$

Falls dies ein Differential ist, muss gelten (s.o.)

$$p_y = q_x$$

Daher definieren wir

**Definition 285** *Eine DGL der Form*

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

mit

$$p_y = q_x$$

heißt **exakte DGL**. Die Bedingung  $p_y = q_x$  heißt Integrabilitätsbedingung.

Finden wir nun das Potential, also die mehrdimensionale Stammfunktion, so haben wir eine implizite Darstellung aller Lösungsfunktionen gefunden. Können wir diese noch nach  $y$  auflösen, erhalten wir sogar eine explizite Darstellung der Lösungen.

Bsp.: Wir betrachten die DGL

$$\begin{aligned} (12xy + 3) dx + 6x^2 dy &= 0 \\ (12xy + 3) + 6x^2 y' &= 0 \\ y' &= -\frac{12xy + 3}{6x^2} \end{aligned}$$

Überprüfen wir zunächst die Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned} P_y &= 12x \\ Q_x &= 12x \end{aligned}$$

Damit ist die DGL exakt und es existiert eine Stammfunktion. Diese berechnen wir (s.o.)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int 12xy + 3 dx + c(y) \\ &= 6x^2 y + 3x + c(y) \end{aligned}$$

Differentiation nach  $y$  liefert

$$\begin{aligned} 6x^2 + c'(y) &= 6x^2 \\ c'(y) &= 0 \\ c(y) &= c \end{aligned}$$

und damit

$$F(x, y) = 6x^2 y + 3x + \tilde{c} = 0$$

Damit wird die DGL gelöst von

$$6x^2y + 3x = c$$

In diesem Fall lässt sich die DGL auflösen und wir erhalten die Lösung

$$y = \frac{c - 3x}{6x^2}$$

Bem.: Gegebenenfalls kann eine DGL zu einer exakten erweitert werden. Als Beispiel betrachte man die DGL/das Differential

$$4x + 3y^2dx + 2xydy = 0$$

bzw

$$y' = \frac{4x + 3y^2}{2xy}$$

Diese DGL ist nicht exakt, da  $\frac{\partial}{\partial y}4x + 3y^2 = 6y$  und  $\frac{\partial}{\partial x}2xy = 2y$ .

Erweitern wir jedoch den Bruch mit  $x^2$  so erhalten wir

$$y' = \frac{4x^3 + 3x^2y^2}{2x^3y}$$

und diese erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial y}4x^3 + 3x^2y^2 = 6x^2y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}2x^3y = 6x^2y$$

Damit wird die DGL exakt und somit lösbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int 4x^3 + 3x^2y^2 dx + c(y) \\ &= x^4 + x^3y^2 + c(y) \end{aligned}$$

Differenzieren nach  $y$  liefert

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y = 2x^3y + c'(y)$$

welches liefert

$$\begin{aligned} c'(y) &= 0 \\ c(y) &= \text{const} = c \end{aligned}$$

Und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$F(x, y) = x^4 + x^3y^2 = c$$



bzw explizit

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{x^4 - c}{x^3} = x - \frac{c}{x^3} \\ y &= \pm \sqrt{x - \frac{c}{x^3}} \end{aligned}$$

Verbleibt die Frage, wann so ein Faktor zur Erweiterung des Bruches existiert und wann nicht.

Wir betrachten hierzu das Differential

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

und suchen einen Term  $m(x, y)$  - den integrierenden Faktor oder Euler-Multiplikator - um den wir das Differential erweitern zu

$$m(x, y) \cdot p(x, y)dx + m(x, y) \cdot q(x, y)dy = 0$$

Damit die DGL exakt wird, muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial y} m(x, y) \cdot p(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} m(x, y) \cdot q(x, y)$$

Dies führt mit Hilfe der Produktregel zu

$$m_y \cdot p + m \cdot p_y = m_x \cdot q + m \cdot q_x$$

Dieses ist nun wiederum eine DGL in  $m(x, y)$  und lässt sich mit Hilfe der Theorie der partiellen DGL's lösen. Hier betrachten wir den einfachen Fall, dass ein Faktor bereits existiert, der nur von einer der beiden Unbekannten abhängt. Im Fall  $m(x, y) = m(x)$  gilt dann

$$\begin{aligned} m(x) \cdot p_y &= m_x \cdot q + m(x) \cdot q_x \\ m_x &= \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot (p_y - q_x) \end{aligned}$$

Ist die rechte Seite nun eine Funktion, die ebenfalls nur von  $x$ , also

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = f(x)$$

abhängt, so kann  $m(x)$  durch die Lösung der auftretenden gewöhnlichen DGL in  $m(x)$  bestimmt werden.

Analog, wenn die Funktion  $m(x, y)$  nur von  $y$  abhängt, ist  $m_x = 0$  und es ist

$$m_y \cdot p + m \cdot p_y = m \cdot q_x$$

bzw.

$$\begin{aligned} m_y \cdot p &= m \cdot q_x - m \cdot p_y \\ m_y &= \frac{1}{p} m(y) (q_x - p_y) \end{aligned}$$

und in diesem Fall ist die Funktion zu integrieren, falls

$$\frac{1}{p} (q_x - p_y) = g(y)$$

eine Funktion in  $y$  ist.

Zur Vorgehensweise gehen wir daher gerade umgekehrt vor:

Ist

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x)$$

eine Funktion nur in  $x$ , so suchen wir den Euler-Multiplikator als Funktion ausschliesslich in  $x$  und lösen durch Integration die DGL

$$m_x = \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot (p_y - q_x)$$

Da wir nur eine Lösung dieser DGL benötigen, kann die Konstante vernachlässigt werden. Ist

$$\frac{1}{p} (q_x - p_y)$$

eine Funktion in  $y$  so die DGL

$$m_y = \frac{1}{p} m(y) (q_x - p_y)$$

und erhalten hieraus den Multiplikator. Die DGL wird mit diesem exakt und liefert eine implizite Lösung der Funktion  $y(x)$ .

Bsp.:

Wir betrachten das obige Differential bzw die DGL

$$4x + 3y^2 dx + 2xy dy = 0$$

bzw

$$y' = \frac{4x + 3y^2}{2xy}$$

von der wir bereits gesehen hatten, dass diese nicht exakt ist und der Euler-Multiplikator wurde oben angegeben. Nun wollen wir diesen berechnen:

Es ist

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 4x + 3y^2 \\ q(x, y) &= 2xy \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} p_y &= 6y \\ q_x &= 2y \end{aligned}$$

Zunächst ist zu entscheiden, in welcher Unbekannten der Euler-Multiplikator gewählt werden soll. Es ist

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x}$$

eine Funktion in  $x$ . Bem.: Es wäre

$$\frac{1}{p} (q_x - p_y) = \frac{-4y}{4x + 3y^2}$$

keine Funktion in  $y$  und somit unbrauchbar.

Nun wollen wir den Euler-Multiplikator berechnen. Hierzu stellen wir die DGL auf

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot (p_y - q_x) \\ &= \frac{2}{x} m(x) \end{aligned}$$

und lösen mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{m} dm &= \int \frac{2}{x} dx \\ \ln(m) &= 2 \ln(x) + \tilde{c} \\ m(x) &= cx^2 \end{aligned}$$

Wir wählen  $c = 1$  und erhalten

$$m(x) = x^2$$

und das Differential

$$x^2 (4x + 3y^2) dx + x^2 (2xy) dy = 0$$

als exakte DGL mit oben berechneter Lösung.

Bsp.:2

$$xy^2 + y - xy' = 0$$

bzw

$$\begin{aligned} y' &= \frac{xy^2 + y}{x} \\ &= y^2 + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Als Differential ist dies

$$(xy^2 + y) dx + (-x)dy = 0$$

Also

$$\begin{aligned} p(x, y) &= xy^2 + y \\ q(x, y) &= -x \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} p_y &= 2xy + 1 \\ q_x &= -1 \end{aligned}$$

ist die DGL nicht exakt.

Wir bilden

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = \frac{2xy + 2}{-x}$$

(funktioniert nicht) und

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot (q_x - p_y) &= \frac{-2 - 2xy}{y + xy^2} \\ &= \frac{-2(1 + xy)}{y \cdot (xy + 1)} = \frac{-2}{y} \end{aligned}$$

Damit lautet die DGL

$$m_y = \frac{-2}{y} m(y)$$

und eine spezielle Lösung lautet

$$m(y) = \frac{1}{y^2}$$

Dieser Euler Multiplikator wird nun in das Differential multipliziert

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) dx + \frac{-x}{y^2} dy = 0$$

Nun wird die DGL exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{y^2}$$

Die Lösung erhalten wir wie gehabt

$$\int x + \frac{1}{y} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + c(y)$$

Ableiten nach  $y$  liefert

$$-\frac{x}{y^2} + c'(y) = \frac{-x}{y^2}$$

Also

$$\begin{aligned} c'(y) &= 0 \\ c(y) &= \tilde{c} \end{aligned}$$

und wir erhalten als implizite Lösung

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + \tilde{c} = F(x, y) = 0$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} &= c \\ \frac{x}{y} &= c - \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{y}{x} &= \frac{1}{c - \frac{1}{2}x^2} \\ y &= \frac{x}{c - \frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

## 9.4 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung

Leider können mit den Verfahren im Kapitel 9.2 noch längst nicht alle Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

gelöst werden.

Hier erlangen nun wiederum numerische Verfahren Bedeutung. Hierbei wird nun nicht die Funktion geschlossen (exakt) berechnet, sondern nur näherungsweise an vorgegebenen Stützstellen. Aus der Kenntnis des Wertes  $y_0$  kann nun von dort die Funktion entwickelt werden.

Zur Interpretation sei noch einmal auf das Beispiel 9.2.1 verwiesen. Bekannt ist zunächst  $y(x_0) = y_0$ . Somit kann der Startwert festgelegt werden. Weiterhin kennt man nun die Steigung der Funktion in diesem Punkt durch Einsetzen des bekannten Punktes  $(x_0, y_0)$ :  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

Andererseits gilt näherungsweise mit  $x_1 = x_0 + h$  gemäß Differenzenquotient

$$\frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \approx y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) \\ &= y(x_0) + h \cdot f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Nun lässt sich wiederum durch  $x_1$  und  $y(x_1)$  die Ableitung der gesuchten Funktion aus  $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$  berechnen und hieraus

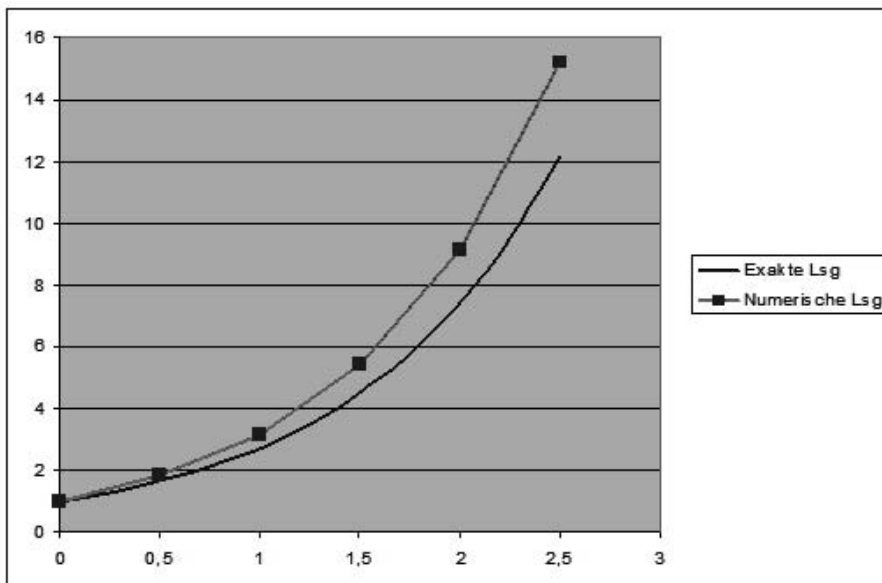
$$y(x_2) = y(x_1 + h) = y(x_1) + h \cdot y'(x_1)$$

usw.

Grafisch ergibt sich der Wert  $y(x_1)$  in dem man die Gerade durch  $x_0$  mit der Steigung  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$  bildet und deren Wert an  $x_1$  ermittelt.

Dieses Verfahren heißt : **Strecken zugverfahren von Euler**

Grafisch:



Der Algorithmus lautet somit:

1. Gegeben:

$$y' = f(x, y) \quad (9.30)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (9.31)$$

und die Schrittweite  $h$

2. Berechne für  $i = 0, 1, \dots$

$$a) \quad f(x_i, y_i)$$

$$b) \quad y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i) \text{ mit } x_{i+1} = x_i + h$$

Rechenschema:

<b>i</b>	<b><math>\mathbf{x}_i</math></b>	<b><math>\mathbf{y}(\mathbf{x}_i)</math></b>	<b><math>\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)</math></b>	
0	$x_0$	$y_0$	$f(x_0, y_0)$	
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$	$f(x_1, y_1)$	
$\vdots$				

Beispiel:

$$y' = 2 \cdot y \cdot x, \quad x_0 = 0 \quad y(0) = 1 \quad (\text{Exakt: } y = e^{x^2})$$

Berechne  $y(1)$  näherungsweise mit  $h = 0,2$

$i$	$x_i$	$y(x_i)$	$f(x_i, y_i) = 2 \cdot y_i \cdot x_i$	
0	0	1	0	
1	0,2	$y_1 = 1 + 0,2 \cdot 0 = 1$	$2 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,4$	
2	0,4	$1 + 0,2 \cdot 0,4 = 1,08$	$2 \cdot 1,08 \cdot 0,4 = 0,8$	
3	0,6	$1,08 + 0,2 \cdot 0,8 = 1,25$	$2 \cdot 1,25 \cdot 0,6 = 1,5$	
4	0,8	$1,25 + 0,2 \cdot 1,5 = 1,55$	$2 \cdot 1,55 \cdot 0,8 = 2,5$	
5	1	$1,55 + 0,2 \cdot 2,5 = 2,05$	(nicht benötigt)	Exakt : 2,71

Bem.: Die Lösung ist offensichtlich noch recht ungenau. Eine verbesserte Lösung lässt sich erreichen, wenn die Schrittweite  $h$  verkleinert wird. In diesem Fall steigt jedoch auch der Rechenaufwand. Weitere Verfahren (Heun, Runge-Kutta) machen zur Verbesserung der Konvergenzordnung einen Prädiktor-Korrektor Ansatz, d.h. aus einer Vorrausschätzung der Ableitung werden die Werte der Ableitung "frühzeitig" korrigiert. (Papula).

## 9.5 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Wir betrachten nun die lineare DGL, bei der außer den Termen in  $y'$  auch die zweite Ableitung beachtet wird, also:

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (9.32)$$

Es gilt auch hier, daß sich die allgemeine Lösung zusammensetzt aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL  $y_h$  und einer partikulären Lösung  $y_p$ . Schließlich kann die Lösung der DGL gemäß  $y = y_h + y_p$  bestimmt werden.

Zunächst betrachten wir wiederum die Lösung des homogenen Problems

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (9.33)$$

Als Ansatz bietet sich auch hier an:

$$y = e^{\alpha x} \quad (9.34)$$

und damit

$$y' = \alpha e^{\alpha x} \quad (9.35)$$

$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x} \quad (9.36)$$

Wir setzen dies in die homogene DGL und erhalten

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + \alpha a e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0 \quad (9.37)$$

bzw nach Division durch  $e^{\alpha x}$

$$\alpha^2 + \alpha a + b = 0 \quad (9.38)$$

**Definition 286** Die Gleichung  $\alpha^2 + \alpha a + b = 0$  heißt die zur DGL  $y'' + ay' + by = 0$  gehörende **charakteristische Gleichung**. Berechnet man Lösungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der charakteristischen Gleichung, so sind damit  $y_1 = e^{\alpha_1 x}$  und  $y_2 = e^{\alpha_2 x}$  Lösungen der homogenen DGL.

Finden wir zwei Lösungen, so kann dann die Lösungsgesamtheit mit Hilfe des folgenden Satzes berechnet werden.

**Satz 287** Mit zwei Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  sind auch alle Kombinationen  $y_h = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  Lösung der homogenen DGL.



Beweis: Es ist  $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$  und  $y_2'' + ay_2' + cy_2 = 0$  und damit

$$\begin{aligned} y_h'' + ay_h' + by_h &= (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + a \cdot \lambda_1 y_1' + a \cdot \lambda_2 y_2' + b\lambda_1 y_1 + b\lambda_2 y_2 \\ &= \lambda_1 (y_1'' + ay_1' + by_1) + \lambda_2 (y_2'' + ay_2' + cy_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Bem.: Zu beachten ist, dass  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  gewählt werden darf. Dies wird im Weiteren noch verwendet.

Wir wollen nun die Lösungen der charakteristischen Gleichung berechnen

$$\alpha^2 + \alpha a + b = 0$$

liefert

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (9.39)$$

und mit der Diskriminante  $D = \frac{a^2}{4} - b$  liefert nun Aufschluß über die Lösungen der homogenen DGL

1.  $D > 0$

$\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung und man erhält die allgemeine  $y_h$  Lösung der homogenen DGL aus

$$y_h = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad (9.40)$$

$y_h = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x}$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  freie reelle Parameter sind.

2.  $D = 0$

Die charakteristische Gleichung hat nur eine Nullstelle  $\alpha = -\frac{a}{2}$  und somit existiert nur eine Lösung  $y_1 = e^{\alpha x}$ .

In diesem Fall ist jedoch auch  $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}$  Lösung, denn

mit  $y_2' = e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}$  und  $y_2'' = \alpha \cdot e^{\alpha x} + \alpha \cdot (e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}) = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x}$  ergibt sich durch Einsetzen in die DGL mit  $a = -2\alpha$  und wegen  $D = 0$  ist auch  $b = \frac{a^2}{4} = \alpha^2$ :

$$\begin{aligned} &2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} - 2\alpha \cdot (e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}) + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \\ &= e^{\alpha x} \cdot (2\alpha + \alpha^2 \cdot x - 2\alpha - 2\alpha^2 \cdot x + \alpha^2 \cdot x) = 0 \end{aligned}$$

Also ist auch  $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}$  eine Lösung der DGL und wir fassen wieder die Lösungen zusammen:

$$y_h = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \quad (9.41)$$

$$= \lambda_1 \cdot e^{\alpha x} + \lambda_2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \quad (9.42)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x) \cdot e^{\alpha x} \quad (9.43)$$

### 3. $D < 0$

In diesem Fall ist mit  $v = \sqrt{-D} = \text{Im}(\alpha)$  und  $w = -\frac{a}{2} = \text{Re}(\alpha)$  die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \cdot v = w \pm i \cdot v$$

und damit die erste Lösung

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(w+i \cdot v) \cdot x} \\ &= e^{w \cdot x} \cdot e^{i \cdot vx} \\ &= e^{wx} \cdot (\cos(vx) + i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

Die zweite Lösung ist

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{(w+i \cdot v) \cdot x} \\ &= e^{wx} \cdot e^{i \cdot (-vx)} \\ &= e^{wx} \cdot (\cos((-v) \cdot x) + i \cdot \sin((-v) \cdot x)) \\ &= e^{wx} \cdot (\cos(vx) - i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

Bildet man nun alle Kombinationen

$$\begin{aligned} y &= \mu_1 \cdot y_1 + \mu_2 \cdot y_2 \\ &= e^{wx} \cdot (\mu_1 \cdot (\cos(vx) + i \cdot \sin(vx)) + \mu_2 \cdot (\cos(vx) - i \cdot \sin(vx))) \\ &= e^{wx} \cdot ((\mu_1 + \mu_2) \cdot \cos(vx) + (\mu_1 - \mu_2) \cdot i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

als Koeffizienten betrachten wir nun die paarweisen komplexen Werte (für diese erhalten wir gerade die gesuchten reellen Lösungsfunktionen) :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 i}{2} \\ \mu_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 i}{2} \end{aligned}$$

und so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \lambda_1 \\ (\mu_1 - \mu_2) \cdot i &= -\lambda_2 i^2 = \lambda_2 \end{aligned}$$

und damit die reellen Funktionen

$$y_h = e^{wx} \cdot (\lambda_1 \cos(vx) + \lambda_2 \sin(vx))$$

Beachte:  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind stets beliebige frei wählbare Parameter, während sich  $w = -\frac{a}{2}$  (Realteil der Nullstelle) und  $v$  (Imaginärteil der Nullstelle) aus der DGL bzw. deren charakteristischen Gleichung berechnen lassen.

Die Lösung ist dabei eine schwingende Funktion, deren Amplitude von  $w = -\frac{a}{2}$  abhängt. Für positives  $a$  ist dies eine abklingende - also der Null sich nähernde - Amplitude. Für negative  $a$  wird der Ausschlag anwachsen.

*Beispiele:*

1.  $y'' + 2y' + y = 0$

a) Charakteristische Gleichung:  $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$

b) Lösungen:  $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-1}$

c)  $D = 0$  (Fall 2):  $y_h = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}$

2.  $y'' - 4y' + 3y = 0$

a) Charakteristische Gleichung:  $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

b) Lösungen:  $\alpha_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$

c)  $D > 0$  (Fall 1):  $y_h = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x}$

3.  $y'' + 4y' + 40 = 0$

a) Charakteristische Gleichung:  $\alpha^2 + 4\alpha + 40 = 0$

b) Lösungen:  $\alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-40} = 2 \pm \sqrt{-36}$

c)  $D < 0$  (Fall 3)  $w = -\frac{a}{2} = -2, v = \sqrt{-D} = \sqrt{36} = 6: \quad y_h = e^{-2x} \cdot (\lambda_1 \cos(6x) + \lambda_2 \sin(6x))$

Wir haben also nun bestimmt, wie man die allgemeine Lösung der homogenen DGL berechnen kann. Diese Lösung enthält stets zwei freie Parameter und ist damit die vollständige Lösungsmenge. Ist ein homogenes AWP Problem gegeben (Bei inhomogenen darf hier der Parameter nicht bestimmt werden), so sind die Bedingungen in die Lösung einzusetzen und somit die Parameter zu eliminieren.

*Beispiel (Nr 2 von oben):*  $y'' - 4y' + 3y = 0$  mit  $y(0) = 1, y'(0) = -1$

*Allgemeine Lösung:*  $y_h = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x}$

*Damit:*  $y'_h = \lambda_1 e^x + 3\lambda_2 e^{3x}$

*Anfangsbedingungen:*

$$y(0) = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (9.44)$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \quad (9.45)$$

liefern somit ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen und 2 Unbekannten. Hier Lösung:  $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$

und damit die spezielle Lösung  $y_h = 2e^x - e^{3x}$

Verbleibt nun die Frage wie man eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems finden kann. Hier gilt das Superpositionsprinzip derart, dass falls  $y_h$  allgemeine Lösung der homogenen DGL ist und  $y_p$  eine Lösung der inhomogenen DGL, die Summe

$$y = y_h + y_p$$

Lösung der inhomogenen DGL ist (Einsetzen). Auch für eine zusammengesetzte rechte Seite

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

kann analog das Problem darauf reduziert werden, zunächst eine partikuläre Lösung  $y_1$  zur rechten Seite  $g_1(x)$  und dann eine partikuläre Lösung  $y_2$  zur rechten Seite  $g_2(x)$  zu finden. Dann liefert

$$y_p = y_1 + y_2$$

eine partikuläre Lösung für das ursprüngliche System.

Um nun die inhomogene DGL  $y'' + ay' + by = g(x)$  mit einer Störfunktion auf der rechten Seite zu lösen, machen wir wieder einen Ansatz vom Typ der Störfunktion bzw. der rechten Seite:

**Störfunktion**  $g(x)$

$$\sum_{i=0}^n k_i x^i$$

**Ansatz für**  $y_p$

$$\sum_{i=0}^n c_i x^i$$

Fall 1:  $c$  ist keine Nullstelle der char. Gleichung

$$A \cdot e^{cx}$$

Fall 2:  $c$  ist einfache Nullstelle der char. Gleichung

$$A \cdot x \cdot e^{cx}$$

Fall 3:  $c$  ist doppelte Nullstelle der char. Gleichung

$$A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$$

$$k \cdot e^{cx}$$

$$k_1 \cdot \sin(cx) + k_2 \cdot \cos(cx)$$

$$c_1 \cdot \sin(cx) + c_2 \cdot \cos(cx)$$

Weitere Ansatzfunktionen sind je nach Anwendungsfall zu verwenden.

Bem.: Im Falle einer konstanten rechten Seite, also

$$y'' - ay' + by = k$$

gewinnt man eine partikuläre Lösung wegen  $y = A, y' = y'' = 0$  durch

$$\begin{aligned} bA &= k \\ A &= \frac{k}{b} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$1. \quad y'' + 2y' + y = x^3 + 6x^2 + 6x + 1$$

$$\text{Ansatz:} \quad y_p = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$$\text{Damit:} \quad y'_p = 3c_3 x^2 + 2c_2 x + c_1$$

$$\text{und:} \quad y''_p = 6c_3 x + 2c_2$$

$$\text{Eingesetzt in die DGL: } 6c_3 x + 2c_2 x + 2 \cdot (3c_3 x^2 + 2c_2 x + c_1) + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

!

$$= c_3 x^3 + x^2 \cdot (c_2 + 6c_3) + x \cdot (c_1 + 4c_2 + 6c_3) + (c_0 + 2c_1 + 2c_2) \stackrel{!}{=} x^3 + 6x^2 + 6x + 1$$

liefert per Koeffizientenvergleich:

$$x^3: \quad c_3 = 1$$

$$x^2: \quad c_2 + 6c_3 = c_2 + 6 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x: \quad c_1 + 4c_2 + 6c_3 = c_1 + 6 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$1: \quad c_0 + 2c_1 + 2c_2 = c_0 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

und damit die partikuläre Lösung  $y_p = x^3 + 1$

Nachdem wir nun eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung des homogenen Problems bestimmt haben, kann die Lösung angegeben werden:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Sind nun Anfangsbedingungen gegeben, so sind anhand derer die Konstanten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zu bestimmen.

Bem.: Bei einer zusammengesetzten rechten Seite kann wieder das Superpositionsprinzip angewandt werden, um auch die rechten Seiten zusammenzusetzen. Also:

**Satz 288** Sei  $y_p^{(1)}$  Lösung von  $y'' + ay' + by = g_1(x)$  und  $y_p^{(2)}$  Lösung von  $y'' + ay' + by = g_2(x)$ , so ist

$$y_p = y_p^{(1)} + y_p^{(2)}$$

Lösung von

$$y'' + ay' + by = g_1(x) + g_2(x)$$

Bew.: Einsetzen.

### Fortsetzung des Räuber-Beute-Modells

Die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y'(t) &= b - m \cdot z(t) \\ z'(t) &= v \cdot (y(t) - g) \\ y_0, z_0 &\text{ bekannt} \end{aligned} \tag{9.46}$$

wird durch Differentiation der ersten Gleichung und Einsetzen der zweiten erreicht:

$$y'' = -m \cdot z' = -m \cdot v \cdot (y - g)$$

Dies ist äquivalent zu

$$y'' + mv \cdot y = mvg$$

Dies ist eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Eine partikuläre Lösung ist

$$y_p = g \tag{9.47}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems erfordert das charakteristische Polynom. Der lineare Term in  $y'$  fehlt und daher ist dies

$$\alpha^2 + mv = 0$$

und damit

$$\alpha_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-mv} \quad (9.48)$$

Da die Konstanten sämtlich positiv sind, ist die Diskriminante negativ und die Lösung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} y_h &= e^{0 \cdot t} \cdot (\lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t)) \\ &= \lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) \end{aligned}$$

Die Lösungsgesamtheit ist

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + g \end{aligned}$$

Dies ist eine Schwingung um den Gleichgewichtswert  $g$ . Nun müssen noch die Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus den Anfangsbedingungen berechnet werden.

Zunächst zu  $\lambda_1$ : Mit  $y(0) = y_0$  ist

$$\begin{aligned} y_0 &= \lambda_1 + g \\ \lambda_1 &= y_0 - g \end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich nun die Entwicklung der Räuber ermitteln. Aus 9.46 ergibt sich

$$z(t) = \frac{b - y'}{m} \quad (9.49)$$

nun mit  $y' = -(y_0 - g) \cdot \sqrt{mv} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sqrt{mv} \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)$

$$z(t) = \frac{1}{m} \cdot (b + (y_0 - g) \cdot \sqrt{mv} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) - \lambda_2 \cdot \sqrt{mv} \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)) \quad (9.50)$$

Der letzte fehlende Wert  $\lambda_2$  kann schliesslich aus der Anfangsbedingung  $z(0) = z_0$  ermittelt werden:

$$z(0) = z_0 = \frac{b - \lambda_2 \cdot \sqrt{mv}}{m} \quad (9.51)$$

und damit

$$\lambda_2 = \frac{b - z_0 \cdot m}{\sqrt{mv}} \quad (9.52)$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= (y_0 - g) \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \frac{b - z_0 \cdot m}{\sqrt{mv}} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + g \\ z(t) &= \frac{1}{m} \cdot ((y_0 - g) \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) - (b - z_0 \cdot m) \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)) + \frac{b}{m} \end{aligned}}$$

Insbesondere haben die Schwankungen die gleiche Periode. Diese wiederum hängt nur von  $m$  und  $v$  ab. Je größer Fressrate und Vermehrungsfaktor sind, desto schneller oszilliert die Funktion.

Eine weitere Verfeinerung des Modells ist die folgende: Während wir derzeit annehmen, dass pro Zeiteinheit eine feste Anzahl Beutetiergeburten  $b$  hinzukommen, erscheint es realistischer wenn wir die Geburten abhängig von der Anzahl existierender Beutetiere abhängig machen. Wenn die Geburtenrate pro Zeiteinheit und Tier den Wert  $k$  hat, ist somit die Gesamtzahl Geburten  $k \cdot y(t)$  und wir erhalten aus 9.46

$$\begin{aligned} y'(t) &= k \cdot y(t) - m \cdot z(t) \\ z'(t) &= v \cdot (y(t) - g) \\ y_0, z_0 &\text{ bekannt} \end{aligned} \tag{9.53}$$

Dies führt dann zu

$$\begin{aligned} y'' &= ky' - mz' \\ &= ky' - m(v \cdot (y(t) - g)) \\ y'' - k \cdot y' + mvy &= mvg \end{aligned}$$

Ebenfalls eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und partikulärer Lösung

$$y_p = g$$

Das charakteristische Polynom lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \alpha^2 - k \cdot \alpha + mv &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - mv} \end{aligned}$$

Die Diskriminante  $\frac{k^2}{4} - mv$  entscheidet nun über die Lösungsfunktion. Dabei entspricht  $\frac{k^2}{4} - mv > 0$  gerade  $k^2 > 4mv$

Fall 1:  $k^2 > 4mv$  (die Geburtenrate ist groß gegenüber dem Nahrungsbedarf und der Jägerzunahme)

Dann ist:

$$y_h(t) = \lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$$

bzw die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(t) = y_h + y_p = \lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + g$$



und

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{ky - y'}{m} \\ &= \frac{k \cdot (\lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + g) - (\lambda_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t})}{m} \end{aligned}$$

Die Parameter können wiederum aus den Anfangsbedingungen  $y(0) = y_0$

$$y_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + g$$

und  $z(0) = z_0$

$$z_0 = \frac{k \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + g) - (\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2)}{m}$$

berechnet werden. Hier ist dies ein lineares Gleichungssystem in den beiden Unbekannten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

Die Lösung ist dabei eine exponentiell steigende oder exponentiell fallende Funktion (je nach Startwerten).

Fall 2:  $k^2 = 4mv$

Dann ist:

$$y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot e^{k/2 \cdot t}$$

und wir erhalten ebenfalls exponentielles Wachstum.

Schliesslich im Fall  $k^2 < 4mv$

Dann ist:

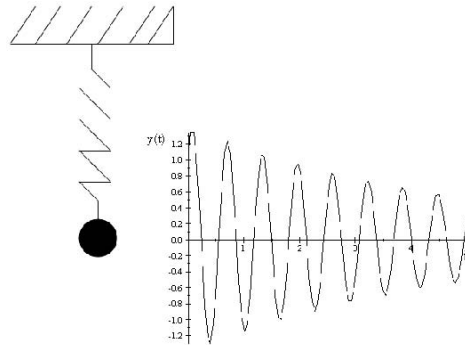
$$y(t) = e^{k/2 \cdot t} (\lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{-\frac{k^2}{4} + mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{-\frac{k^2}{4} + mv} \cdot t)) + g \quad (9.54)$$

die Lösung. Im Gegensatz zum vorigen Modell ist der Realteil der Nullstelle ungleich Null und damit erhält die Sinus-Schwingung einen Vorfaktor, welcher diese Funktion zu einer oszillierenden Funktion mit wachsender Amplitude macht und dies würde somit zwangsläufig zum Aussterben beider Rassen führen. (Daher achtet Mutter Natur stets auf  $k^2 \geq 4mv$ ).

## 9.6 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung

Eine sehr gute Online-Version der Herleitung mit Visualisierung finden Sie unter <http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Schwingu>

Wir betrachten nun die Schwingung eines Federpendels und tragen die vertikale Auslenkung über die Zeit auf.



Es sei also

$t$ ...Zeit

$y(t)$ ...Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt  $t$  (gesucht)

$y'(t)$ ... Geschwindigkeit des Pendels

$y''(t)$ .... Beschleunigung des Pendels

Dabei ist der Weg  $y(t)$  als Unterschied zur Ruhelage der Feder ohne Masse zu sehen.

Um nun die Gleichungen zu ermitteln, bilden wir die Kräftebilanz:

1. Trägheitskraft: Da der Massenpunkt in Bewegung ist, hat er eine Trägheitskraft nach  $m \cdot a$ , wobei  $a$  seine derzeitige Beschleunigung, also  $y''(t)$ , ist.

2. Gewichtskraft (nach unten):  $m \cdot g$

3. Rückstellkraft der Feder (nach oben): Abhängig von der Auslenkung  $y(t)$  und der Federkonstante  $c$ :  $c \cdot y(t)$

4. Reibungsverluste: Abhängig von der Geschwindigkeit (Entgegen der Geschwindigkeit)  $y'(t)$  und der Reibungskonstante  $r$ :  $r \cdot y'(t)$

Wir bilanzieren:

$$\begin{aligned} m \cdot y''(t) + r \cdot y'(t) + c \cdot y(t) &= m \cdot g \\ y''(t) + \frac{r}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) &= g \end{aligned} \quad (9.55)$$

und erhalten als eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Zunächst berechnen wir die partikuläre Lösung  $y_p$ : Mit dem Ansatz  $y(t) = d = konst$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{c}{m} \cdot d &= g \\ y_p &= d = \frac{m \cdot g}{c}\end{aligned}$$

Damit verbleibt die Lösung der homogenen DGL

$$y''(t) + \frac{r}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0 \quad (9.56)$$

Die in der Literatur verwendeten Konstanten sollen nun auch hier verwendet werden: Wir bezeichnen nun die massenabhängige Federkraft mit

$$w^2 = \frac{c}{m} \quad (9.57)$$

und die massenabhängige Reibung (Konstante für den Versuch) mit

$$k = \frac{r}{m} \quad (9.58)$$

und erhalten die Standardform für die harmonische Schwingung

$$y''(t) + k \cdot y'(t) + w^2 \cdot y(t) = 0 \quad (9.59)$$

Die Lösung dieser DGL wird mit den oben genannten Verfahren gelöst:

#### 1. Charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + k\alpha + w^2 = 0 \quad (9.60)$$

Lösung:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{k^2}{4} - w^2}_D} \quad (9.61)$$

#### 2. Fallunterscheidung

a )  $D > 0$ , d.h.  $\frac{k^2}{4} - w^2 > 0$  bzw.  $\frac{k}{2} > w$  : Es existieren zwei reelle Lösungen

$$\alpha_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{D}$$

Bem: Da alle konstanten positiv sind, ist der Wert unter der Wurzel kleiner als  $\frac{k^2}{4}$  und damit sind beide Lösungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  negativ.

Allgem. Lösung:  $y_h(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$

b)  $D=0$ , d.h.  $\frac{k^2}{4} - w^2 = 0$  bzw.  $\frac{k}{2} = w$  : Es existiert eine reelle Lösung  $\alpha_1 = -\frac{k}{2}$

Allgem. Lösung:  $y_h(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot e^{\alpha_1 t}$

c)  $D < 0$ , d.h.  $\frac{k^2}{4} - w^2 < 0$  bzw.  $\frac{k}{2} < w$  : Es existieren keine reellen Lösungen:  
Mit  $b = \sqrt{-D}$

Allgem. Lösung:  $y_h(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot (\lambda_1 \cos(bt) + \lambda_2 \sin(bt))$

Die Konstanten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  werden wiederum aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Bem.: Für die inhomogene DGL muss nun noch  $y_p$  addiert werden, also

$$a) y(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{mg}{c}$$

$$b) y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot e^{\alpha_1 t} + \frac{mg}{c}$$

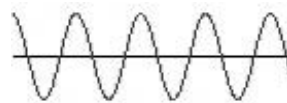
$$c) y(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot (\lambda_1 \cos(bt) + \lambda_2 \sin(bt)) + \frac{mg}{c}$$

In allen Fällen mit  $k > 0$  gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{mg}{c}$ , also ist die partikuläre Lösung der Ruhezustand.

### Spezialfälle/Verlaufsskizzen:

1. Reibungsfreie Schwingung ( $k = r = 0$ ) Damit ist  $D = -w^2 < 0$  und wir erhalten als Lösung:

$$y(t) = \lambda_1 \cos(wt) + \lambda_2 \sin(wt) \quad (9.62)$$



also eine ungedämpfte Sinusschwingung, z.B.

2. Hohe Reibung (z.B. in viskoser Flüssigkeit). Für  $\frac{k}{2} > w$  ist die Lösung  $y(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$  und damit "schwingungsfrei" (keine trigonometrischen Terme). Der Massenpunkt bewegt sich also zu seiner Ruhelage.

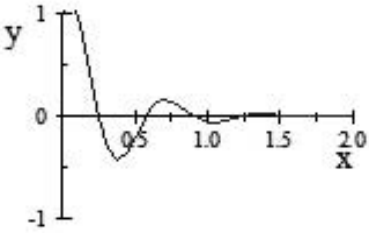
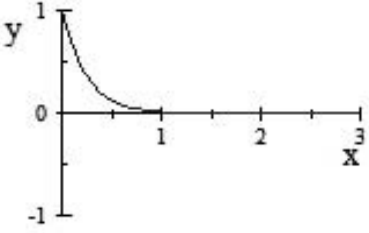
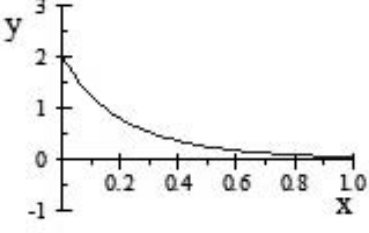
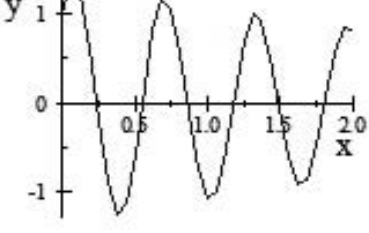


Der Verlauf ist damit annähernd exponentiell

3. Kleine Reibung (z.B. Luft): Hier ist die allgem. Lösung  $y(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot$

$(\lambda_1 \cos(wt) + \lambda_2 \sin(wt))$ , also eine Schwingung dessen Amplitude durch die monoton fallende Funktion  $e^{-\frac{k}{2}t}$  begrenzt wird.

4. Weitere Verlaufsskizzen: Aus den Anfangswerten seien bestimmt  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

k	w	D	Funktion	Graph
6	10	-91	$e^{-3t} \cdot (\cos(\sqrt{91}t) + \sin(\sqrt{91}t))$	
10	5	0	$(1+t)e^{-5t}$	
10	3	16	$e^{-7t} + e^{-3t}$	
0,5	100	-10000	$e^{-0,25t} \cdot (\cos(10t) + \sin(10t))$	

## 9.7 Anwendung 2: Abkühlung von Milchkaffee

Wir betrachten nun die Abkühlung von (Milch-)kaffee. Ein Student hat leider verschlafen und muß nun möglichst zügig zur Vorlesung. Morgens benötigt er dringend eine Tasse Milchkaffee. Er schüttet sich einen Kaffee mit kochendem Wasser auf.



So



oder so

Dieser Kaffee ist zu Beginn zu heiß - auch wenn wir die auf dem Tisch stehende Milch mit der Umgebungstemperatur  $T_{Umgebung}$  hinzugeben. Ist es nun geschickter zunächst den Kaffee abkühlen zu lassen und dann die Milch hinzuzugeben oder erst die Milch hinzuzugeben und dann den Milchkaffee abkühlen zu lassen?

Versuchen wir es strukturiert:

Die Wärmeenergie  $W$  berechnet sich aus

$$W = m \cdot c \cdot T \quad (9.63)$$

wobei  $T$  die Temperatur (hier des Kaffees),  $m$  die Masse des Körpers (hier konstant) und  $c$  die spezifische Wärme (auch konstant und annähernd gleich für Kaffee und Milchkaffee) ist.

Betrachten wir nun den zeitlichen Verlauf der Wärmeenergie  $W(t) = m \cdot c \cdot T(t)$ , so ist  $\frac{dW}{dt} = m \cdot c \cdot T'(t)$ , dabei ist die Änderung der Wärmeenergie proportional zum Temperaturunterschied des Kaffees zur Umgebungstemperatur  $T_{Umgebung}$ , also

$$m \cdot c \cdot T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_{Umgebung}) \quad (9.64)$$

$$T'(t) = -\frac{k}{m \cdot c} \cdot (T(t) - T_{Umgebung}) \quad (9.65)$$

Die Proportionalitätskonstante  $k$  gibt an, wie schnell der Körper die Wärme abgeben kann und hängt im Wesentlichen von der Oberfläche ab, an der die

Verdunstung stattfindet. Auch diese bleibt somit für Kaffee und Milchkaffee gleich.

Dies ist eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung, welche zur Lösung noch eine Nebenbedingung benötigt. Dies ist die Temperatur zu Beginn also  $T(0) = T_0$ .

Fall 1: Wir gießen den Kaffee mit der Temperatur  $T_0$  in die Tasse und lassen diese bis zum Zeitpunkt  $t_0$  abkühlen:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -\frac{k}{m \cdot c} \cdot (T(t) - T_{Umg}) \\ T(t) &= T_{Umg} + c_1 \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t} \end{aligned}$$

Aus  $T(0) = T_0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} T_0 &= T_{Umg} + c_1 \\ c_1 &= T_0 - T_{Umg} \end{aligned}$$

und damit

$$T(t) = T_{Umg} + (T_0 - T_{Umg}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t} \quad (9.66)$$

Hieraus ergibt sich die Temperatur zum Zeitpunkt  $t_0$

$$\boxed{T(t_0) = T_{Umg} + (T_0 - T_{Umg}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0}} \quad (9.67)$$

Nun mischen wir die Milch - welche ja die Umgebungstemperatur hat - hinzu: Aus der Energiebilanz bezüglich der Milchkaffeetemperatur  $T_{MK}$

$$T_{MK} \cdot c \cdot (m + m_{Milch}) = T(t_0) \cdot c \cdot m + T_{Umg} \cdot c \cdot m_{Milch}$$

ergibt sich

$$T_{MK} = \frac{T(t_0) \cdot m + T_{Umg} \cdot m_{Milch}}{m + m_{Milch}} \quad (9.68)$$

$$\begin{aligned} &\left( T_{Umg} + (T_0 - T_{Umg}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0} \right) \cdot m + T_{Umg} \cdot m_{Milch} \\ &= \frac{\quad}{m + m_{Milch}} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_{MK} = T_{Umg} + \frac{(T_0 - T_{Umg})}{m + m_{Milch}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0}} \quad (9.69)$$



Fall 2: Nun betrachten wir die Mischung zu Beginn: Dann ist

$$T_{\text{Beginn}} = \frac{T_0 \cdot m + T_{Umg} \cdot m_{\text{Milch}}}{m + m_{\text{Milch}}} \quad (9.70)$$

der neue Startwert. Wir lösen die Dgl wie oben, in der sich nur die Masse zu  $m + m_{\text{Milch}}$  ändert:

$$T(t) = T_{Umg} + c_1 \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \quad (9.71)$$

Einsetzen des Startwertes ergibt

$$\begin{aligned} T(t) &= T_{Umg} + (T_{\text{Beginn}} - T_{Umg}) \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \\ &= T_{Umg} + \left( \frac{T_0 \cdot m + T_{Umg} \cdot m_{\text{Milch}}}{m + m_{\text{Milch}}} - T_{Umg} \right) \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \\ &= T_{Umg} \\ &\quad + \left( \frac{T_0 \cdot m + T_{Umg} \cdot m_{\text{Milch}} - T_{Umg} \cdot (m + m_{\text{Milch}})}{m + m_{\text{Milch}}} \right) \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \\ &= T_{Umg} + \left( \frac{T_0 \cdot m - T_{Umg} \cdot m}{m + m_{\text{Milch}}} \right) \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \\ &= T_{Umg} + \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{\text{Milch}}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t} \end{aligned}$$

und damit zum Zeitpunkt  $t_0$

$$\boxed{T_{MK2} = T_{Umg} + \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{\text{Milch}}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t_0}} \quad (9.72)$$

Wir vergleichen 9.68 und 9.72 und sehen, dass sich die beiden Terme nur im Exponenten unterscheiden. Wegen

$$m + m_{\text{Milch}} > m \quad (9.73)$$

gilt

$$e^{-\frac{k}{(m + m_{\text{Milch}}) \cdot c} \cdot t_0} > e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0}$$

und damit wegen  $T_0 > T_{Umg}$

$$\begin{aligned} \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{Milch}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{Milch}) \cdot c} \cdot t_0} &> \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{Milch}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0} \\ T_{Umg} + \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{Milch}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{(m + m_{Milch}) \cdot c} \cdot t_0} &> T_{Umg} + \frac{T_0 - T_{Umg}}{m + m_{Milch}} \cdot m \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t_0} \end{aligned}$$

und somit schliesslich

$$T_{MK2} > T_{MK}$$

Also ist es für den Studenten vorteilhafter, den Kaffee zunächst abkühlen zu lassen und erst dann die Milch hinzuzugeben (auch wenn die Berechnung vermutlich länger dauert, als die eigentliche Zubereitung des Kaffees).

## 9.8 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen

Diese mehrseitige Herleitung des kontinuierlichen Modells kann durch die Einführung von Differentialgleichungen erheblich verkürzt werden:

Ausgehend von  $y(0) = y_0$  der Evolutionsgleichung

$$\Delta y = k \cdot y(t) \cdot \Delta t$$

wird die Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t)$$

und der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  gebildet

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t)$$

Diese Gleichung wird nun durch Trennung der Variablen gelöst

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(t)} dy &= \int k dt \\ \ln(y(t)) &= kt + c_0 \\ y(t) &= e^{kt+c_0} = e^{kt} \cdot e^{c_0} \end{aligned}$$

Aus  $y(0) = y_0$  ergibt sich

$$y_0 = e^{c_0}$$

und damit die gleiche Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

Entsprechend kann die Störung erster Ordnung, beschrieben durch

$$y'(t) = k \cdot y(t) - a$$

als linear inhomogene DGL gelöst werden:

$$y'(t) - k \cdot y(t) = -a$$

liefert die homogene Lösung

$$y_h = c \cdot e^{kt}$$

und die partikuläre Lösung

$$y_p = \frac{a}{k}$$

und damit die Gesamtlösung

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c \cdot e^{kt} + \frac{a}{k} \end{aligned}$$

Einsetzen des Anfangswertes ergibt

$$y(0) = c + \frac{a}{k} = y_0$$

liefert die Konstante

$$c = y_0 - \frac{a}{k}$$

und damit wiederum die Lösungsfunktion

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}$$

## 9.9 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung

Zu lösen ist die Gleichung des **logistischen Wachstums (Störung zweiter Ordnung)**

$$y' = k \cdot y \cdot (R - y) \tag{9.74}$$

Mit  $z = \frac{y}{R - y} = -1 + \frac{R}{R - y}$  ist

$$z' = \frac{R}{(R - y)^2} \cdot y' \tag{9.75}$$

und damit

$$\begin{aligned} z' &= \frac{R}{(R-y)^2} \cdot k \cdot y \cdot (R-y) \\ &= \frac{R}{R-y} \cdot k \cdot y \\ &= R \cdot k \cdot z \end{aligned}$$

Lösen durch Trennung der Variablen ergibt wie oben

$$z = z_0 \cdot e^{R \cdot k \cdot t}$$

$$z_0 = \frac{y_0}{R - y_0} \text{ ergibt}$$

$$z = \frac{y_0}{R - y_0} \cdot e^{R \cdot k \cdot t}$$

Aus  $z = -1 + \frac{R}{R-y}$  ergibt sich die Rücksubstitution  $y = \frac{R}{\frac{1}{z} + 1}$  und damit

$$y(t) = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot e^{-R \cdot k \cdot t} + 1}$$

Es ist zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$y(t) = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} + 1} = \frac{R}{\frac{R}{y_0}} = y_0$$

und für  $t \rightarrow \infty$

$$y = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot 0 + 1} = R$$

Zur Anschauung: Funktionsverläufe für  $R = 10, y_0 = 1, k = 0, 1$ , also  $y = \frac{10}{9 \cdot e^{-t} + 1}$ . Untere Schranke ist dann der Startwert  $y_0$ , obere Schranke  $R$ .

