Analysis 2

Hausaufgabenblatt 03

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 18. April 2021

1. Gegeben seien $f(x,y) = xy^2 - (2x+3y)^2$ und der Punkt $(x_0, y_0) = (2, -2)$. Berechnen Sie das vollständige Differential.

Lösung:

Das vollständige Differential von $z = f(x,y)$ ist gegeben mit

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}y = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es gilt für den Gradienten $\nabla f(x_0, y_0)$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^2 - 4(2x_0 + 3y_0) \\ 2x_0 y_0 - 6(2x_0 + 3y_0) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir insgesamt das vollständige Differential am Punkt $(x_0, y_0) = (2, -2)$ mit

$$\mathrm{d}z = f_x(2, -2) \cdot \mathrm{d}x + f_y(2, -2) \cdot \mathrm{d}y = 12\mathrm{d}x + 4\mathrm{d}y$$

$\square$

2. Bei der Berechnung einer Fläche $f(x,y) = 5x^2 \cdot y$ werde ein relativer Messfehler von 10% in x und 3% in y gemacht. Wie ist der relative Fehler des Ergebnisses?

Lösung:

$z := f(x,y) = 5x^2 \cdot y \qquad \left(c \cdot x^a \cdot y^b\right)$

Es ist der relative Fehler gegeben mit

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + b \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = 2 \cdot 10\% + 1 \cdot 3\% = 23\%$$

$\square$

3. Differenzieren Sie die gegebene Funktion $f(x, y)$ nach dem Parameter t (längst der Kurve C)

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y \qquad C : \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

(a) unter Verwendung der Kettenregel,

Lösung:
$z := f(x, y)$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &&= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \equiv\ & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &&= (2x + 2y) \cdot 2t + (2x + 2) \cdot (-2) \\ \equiv\ & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &&= \left(2t^2 - 4t\right) \cdot 2t + \left(2t^2 + 2\right) \cdot (-2) \\ \equiv\ & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &&= 4t^3 - 12t^2 - 4 \end{aligned}$$

□

(b) nach Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

Lösung:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y \implies f(t) = t^4 - 4t^3 - 4t$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 4t^3 - 12t^2 - 4$$

□

4. Berechnen Sie den Gradient der Funktion:

$$f(r,s,t) = r \cdot \cos(t + s^2)$$

Lösung:

$$\nabla f(r,s,t) = \begin{pmatrix} f_r(r,s,t) \\ f_s(r,s,t) \\ f_t(r,s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + s^2) \\ -2rs \cdot \sin(t + s^2) \\ -r \cdot \sin(t + s^2) \end{pmatrix}$$

$\square$

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und Sattelpunkte:
   (a) $g(x, y) = (x^2 + y)^2 + 4xy - x$

Lösung:
Wir berechnen zuerst die potentiellen Kandidaten. Für diese muss gelten

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} &= \vec{0} \\
\implies \begin{pmatrix} 4x(x^2+y) + 4y - 1 \\ 2(x^2+y) + 4x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} x(x^2+y) + y - \frac{1}{4} \\ x^2 + 2x + y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} x(x^2+y) + y - \frac{1}{4} \\ -x^2 - 2x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir haben offensichtlich zwei Gleichungen gegeben.
Setzen wir die II. Gleichung in die I. Gleichung ein, erhalten wir

$$x(x^2+y) + y - \frac{1}{4} = x(x^2 - x^2 - 2x) - x^2 - 2x - \frac{1}{4} = \ldots = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0 \implies x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} \iff x_{1,2} = \frac{-2 \pm 1}{6}$$

Setzen wir diese Ergebnisse dann wieder in Gleichung II ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -x_1^2 - 2x_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \\
y_2 &= -x_2^2 - 2x_2 = -\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{3} = \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

Unsere Kandidatentupel sind dann gegeben mit $(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ und $(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{11}{36}\right)$.
Wir bilden nun die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}
f_x &= 4x^3 + 4xy + 4y - 1 \\
f_{xx} &= 12x^2 + 4y \\
f_{xy} &= 4x + 4 \\
f_y &= 2x^2 + 2y + 4x \\
f_{yy} &= 2
\end{aligned}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y & 4x + 4 \\ 4x + 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt $(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ gilt damit:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} & 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist H_1 positiv definit $\implies$ Minimum.
Für den Punkt $(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{11}{36}\right)$ gilt:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 12 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \cdot \frac{11}{36} & 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 4 \\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

H_2 ist indefinit $\implies$ Sattelpunkt. $\square$

(b) $v(x, y, z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2)$

Lösung:
$v(x, y, z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) = xy - z^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$
Wir berechnen zuerst die potentiellen Kandidaten. Für diese muss gelten

$$\begin{aligned}
\nabla v(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} &= \vec{0} \\
\implies \begin{pmatrix} y - 4x \\ x - 4y \\ -4z^3 + 4z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z^3 + z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z(z^2 + 1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir haben offensichtlich drei Gleichungen gegeben.
Wir erkennen aus III direkt, dass $z \in \{-1, 0, 1\}$ gelten muss und aus II und I, dass $x = y = 0$.
Damit erhalten wir die drei Kandidatentupel:

- $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1)$,
- $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$,
- $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$.

Wir bilden nun die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= -4 & f_{xy} &= 1 & f_{xz} &= 0 \\
f_{yx} = f_{xy} &= 1 & f_{yy} &= -4 & f_{yz} &= 0 \\
f_{zx} = f_{xz} &= 0 & f_{zy} = f_{yz} &= 0 & f_{zz} &= 12z^2 + 4
\end{aligned}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -12z^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt für die Unterdeterminanten:

$$\begin{aligned}
\det H_1 &= -4 \\
\det H_2 &= 15 \\
\det H &= (-12z^2 + 4) \cdot \det H_2 = (-12z^2 + 4) \cdot 15 = -180z^2 + 60
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin

$$\det H \leq 0 \iff -180z^2 + 60 \leq 0 \iff z^2 \leq \frac{1}{3}$$

Damit ist die Hesse-Matrix für alle $|z| \leq \frac{1}{9}$ indefinit und sonst negativ definit.
Damit sind die Kandidatentupel $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1)$ und $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$ Maxima und $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$ ein Sattelpunkt. □