Analysis 2

Hausaufgabenblatt 08

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 23. Mai 2021

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung.
   (a) $y' - 4y = 14x + 2 - 12x^2$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung ($y_h' + ay_h = 0$):

$$y_h' - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{-ax} = ce^{4x}$$

Danach lösen wir die partikuläre Gleichung ($y_p = ax^2 + bx + c$):

$$y_p = ax^2 + bx + c \implies y_p' = 2ax + b$$

Wir setzen die partikuläre Gleichung entsprechend ein:

$$\begin{aligned}
& y' - 4y && = 14x + 2 - 12x^2 \\
\equiv \quad & 2ax + b - 4(ax^2 + bx + c) && = -12x^2 + 14x + 2 \\
\equiv \quad & -4ax^2 + (2a - 4b)x + (b - 4c) && = -12x^2 + 14x + 2
\end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$a = 3 \quad \wedge \quad b = -2 \quad \wedge \quad c = -1,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} + 3x^2 - 2x - 1$$

□

(b) $y' - 8y = -6e^{5x}$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung:

$$y_h' - 8y_h' = 0 \implies y_h = ce^{8x}$$

Danach lösen wir die partikuläre Gleichung ($y_p = c_0 e^{5x}$):

$$y_p = c_0 e^{5x} \implies y_p' = 5ce^{5x}$$

Wir setzen die partikuläre Gleichung entsprechend ein:

$$\begin{aligned} & y' - 8y && = -6e^{5x} \\ \equiv \quad & 5c_0 e^{5x} - 8c_0 e^{5x} && = -6e^{5x} \\ \equiv \quad & -3c_0 e^{5x} && = -6e^{5x} \end{aligned}$$

Damit sehen wir auch direkt:

$$c_0 = 2,$$

und schließlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{8x} + 2e^{5x}$$

□

(c) $y' + 2y = 8\sin(x) - \cos(x)$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' + 2y_h = 0 \implies y_h = ce^{-2x}$$

Mit der partikulären Gleichung ($y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)$)

$$y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x) \implies y_p' = c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' + 2y && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \equiv \quad & c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x) + 2(c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)) && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \equiv \quad & (c_0 + 2c_1)\cos(x) + (2c_0 - c_1)\sin(x) && = 8\sin(x) - \cos(x) \\ \implies \quad & c_0 + 2c_1 = -1 \quad \wedge \quad 2c_0 - c_1 = 8 \\ \implies \quad & c_0 = 3 \quad \wedge \quad c_1 = -2 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{-2x} + 3\sin(x) - 2\cos(x)$$

□

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen

(a) $y' - 4y = 15e^x$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - 4y_h = 0 \implies y_h = ce^{4x}$$

Mit der partikulären Gleichung ($y_p = c_0 e^x$)

$$y_p = c_0 e^x \implies y_p' = c_0 e^x$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' - 4y && = 15e^x \\ \equiv \quad & c_0 e^x - 4c_0 e^x && = 15e^x \\ \equiv \quad & -3c_0 e^x && = 15e^x \\ \implies \quad & c_0 && = -5 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^{4x} - 5e^x$$

□

(b) $y' - y = 9e^x$

Lösung:
Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - y_h = 0 \implies y_h = ce^x$$

Mit der partikulären Gleichung ($y_p = c_0 x e^x$)

$$y_p = c_0 x e^x \implies y_p' = c_0(e^x + xe^x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' - y && = 9e^x \\ \equiv \quad & c_0(e^x + xe^x) - c_0 x e^x && = 9e^x \\ \equiv \quad & c_0 e^x (1 + x - x) && = 9e^x \\ \implies \quad & c_0 && = 9 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^x + 9e^x x$$

□

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y}, \quad y(1) = 1$$

Lösung:

Wir haben eine Bernoulli-DGL 1. Ordnung ($y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \cdot y^\alpha$) gegeben mit:

$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sqrt{y} \quad \overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^2 \cdot \sqrt{y}$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} & z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y} && \Longrightarrow z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \Longleftrightarrow \quad & y = z^2 && \Longrightarrow y' = 2zz' \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & y' - \frac{2}{x} \cdot y && = x^2 \cdot \sqrt{y} \\ \equiv \quad & 2zz' - \frac{2}{x} \cdot z^2 && = x^2 \cdot \sqrt{z^2} \\ \equiv \quad & 2z' - \frac{2}{x} \cdot z && = x^2 \\ \equiv \quad & z' - \frac{1}{x} \cdot z && = \frac{x^2}{2} \\ \equiv \quad & 1 \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} && = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \cdot z \\ \equiv \quad & 1 \ \mathrm{d}z && = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \cdot z \right) \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & z + c_1 && = \frac{1}{2} \int x^2 \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \cdot z \, \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & z + c_1 && = \frac{x^3}{6} + c_2 + \frac{z'x - z}{x^2} \\ \equiv \quad & z && = \frac{x^3}{6} + \frac{z'x - z}{x^2} - c_1 + c_2 \end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - 2y = (2\sin(x) + 5\cos(x)) \cdot e^{-3x}$$

Lösung: