Analysis 2

Hausaufgabenblatt 13

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 27. Juni 2021

1. Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von der Funktion

$$f(x,y) = \sin(y-x) + \sin(x) - \sin(y)$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_x &= -\cos(y-x) + \cos(x) \\
f_y &= \cos(y-x) - \cos(y) \\
f_{xx} &= \sin(y-x) - \sin(x) \\
f_{xy} &= -\sin(y-x) \\
f_{yy} &= -\sin(y-x) + \sin(y)
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{4\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\left(y - \frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

2. Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3 \\ f_y &= 2y - 2 \\ f_{xx} &= 6x \\ f_{xy} &= 2 \\ f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Für die Kandidaten muss dann gelten:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 2y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x \in \{-1, 1\} \quad \wedge \quad y = 1$$

Wir stellen dann die Hesse-Matrix für beide Kandidaten auf:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann sehen wir direkt, dass H für $(1,1)$ positiv definit und für $(-1,1)$ indefinit ist.

Damit liegt bei $(1,1)$ ein lokales Extremum und bei $(-1,1)$ ein Sattelpunkt. $\square$

3. Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 10)$, $P_3 = (5, 7)$ und $P_4 = (7, 2)$.
   Bestimmen Sie einen Punkt (x, y), sodass die Summe der Quadrate der Abstände minimal ist.

Lösung:

Die Summe der Quadrate der Abstände ist gegeben mit

$$\begin{aligned} d(x,y) &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + (y-10)^2 + (x-5)^2 + (y-7)^2 + (x-7)^2 + (y-2)^2 \\ &= \dots \\ &= 4x^2 - 32x + 4y^2 - 40y + 238 \end{aligned}$$

Damit gilt dann für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} d_x &= 8x - 32 \\ d_y &= 8y - 40 \\ d_{xx} &= 8 \\ d_{xy} &= 8 \\ d_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Für die Kandidaten muss dann gelten:

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 32 \\ 8y - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = 4 \quad \wedge \quad y = 5$$

Wir stellen dann die Hesse-Matrix für den Kandidaten auf:

$$H = \begin{pmatrix} d_{xx}(x_0, y_0) & d_{xy}(x_0, y_0) \\ d_{xy}(x_0, y_0) & d_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Dann sehen wir direkt, dass H positiv definit ist.

Damit liegt bei $(4, 5)$ ein lokales Minimum und unser gesuchter Punkt. □

4. Optimieren Sie die gegebene Funktion
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
unter der Nebenbedingung
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$$
mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren.

Lösung:
Es gilt:
$$g(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 4$$
$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left((x-3)^2 + (y-4)^2 - 4\right)$$
Damit gilt dann für die Ableitungen:
$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2\lambda(x-3) \\ L_y &= 2y + 2\lambda(y-4) \\ L_{xx} &= 2 + 2\lambda \\ L_{xy} &= 0 \\ L_{yy} &= 2 + 2\lambda \\ g_x &= 2x - 6 \\ g_y &= 2y - 8 \end{aligned}$$
Für die Kandidaten muss dann gelten:
$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda(x-3) \\ 2y + 2\lambda(y-4) \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Stellen wir die Gleichungen nach x, y bzw. λ um, erhalten wir:
$$x = \frac{3\lambda}{1+\lambda} \quad \wedge \quad y = \frac{4\lambda}{1+\lambda} \quad \wedge \quad \lambda = -1 \pm \frac{5}{2}$$
Für $\lambda_1 = -\frac{7}{2}$ gilt dann:
$$x_1 = \frac{21}{5} \quad \lambda \quad y_1 = \frac{28}{5}$$
Für $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ gilt dann:
$$x_2 = \frac{9}{5} \quad \lambda \quad y_2 = \frac{12}{5}$$
Wir stellen dann die allgemeine Hesse-Matrix auf:
$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x-6 \\ 0 & 2+2\lambda & 2y-8 \\ 2x-6 & 2y-8 & 0 \end{pmatrix}$$
mit
$$\det(H) = -(2x-6)^2(2+2\lambda) - (2y-8)^2(2+2\lambda)$$
Für die Kandidaten gilt dann:
$$\det(H)(x_1, y_1, \lambda_1) = 80$$
$$\det(H)(x_2, y_2, \lambda_2) = -80$$
Damit liegt bei $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{21}{5}, \frac{28}{5}, -\frac{7}{2}\right)$ ein lokales Maximum und bei $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, \frac{3}{2}\right)$ ein lokales Minimum. □

5. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\int_K \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{X}$ entlang folgender Kurven:

i. $K_1 : \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 2\pi$

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{K_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{X} \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{F}(\vec{X}(t)), \vec{X}'(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{\sqrt{(\cos^2(t)+\sin^2(t)+t^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(t)\sin(t)+\sin(t)\cos(t)+t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \mathrm{d}t \\
&=^{1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{u^3}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\sqrt{u}}\right]_0^{2\pi} = \left[-\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_0^{2\pi} \\
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right]_0^{2\pi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}
\end{aligned}$$

□

[1] $u := 1+t^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t \iff \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2t}$

ii. K_2 : geradelinige Verbindung von $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ nach $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\pi\end{pmatrix}^T$

Lösung:

Die Kurve ist hier gegeben mit $K_2 : \vec{X}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 2\pi$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{K_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{X} \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{F}(\vec{X}(t)), \vec{X}'(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \,\mathrm{d}t \\
&=^{2} \dots \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}
\end{aligned}$$

□

[2] siehe (i)

(b) Ist das Kurvenintegral wegunabhängig? Bestimmen Sie ggfls. die Potentialfunktion.

Lösung:
Wir berechnen die Rotation von $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} - \frac{-3yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} \\ \frac{-3xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} - \frac{-3xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} \\ \frac{-3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} - \frac{-3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist das Kurvenintegral wegunabhängig.
Für die Potentialfunktion $V(x, y, z)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
V(x, y, z) &= \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, \mathrm{d}x \\
&= {}^3 \int \frac{1}{2\sqrt{u^3}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{u}} + c(y, z) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c(y, z)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} \implies c(y, z) = c(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{\partial c(z)}{\partial z} \implies c(z) = c$$

Und insgesamt ist die Potentialunktion dann gegeben mit

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c$$

□

[3] $u := x^2 + y^2 + z^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \iff \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$