Analysis 2

Hausaufgabenblatt 12

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 20. Juni 2021

1. Bestimmen Sie die Konstante a wenn möglich so, dass $f(x,y)$ stetig ist.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2+9}-3} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2+9}-3} \\ = \quad & \frac{\left(x^2+2y^2\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+2y^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2+9}+3\right)} \\ = \quad & \frac{\left(x^2+2y^2\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2+9}+3\right)}{x^2+2y^2} \\ = \quad & \sqrt{x^2+2y^2+9}+3 \end{aligned}$$

Und damit ist auch schon

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+2y^2+9}+3 = 6$$

Wenn wir dann $a = 6$ wählen, ist die Funktion stetig. $\square$

2. Gegeben seien die Funktion $f(x,y) = x \cdot y^2 - (2x+3y)^2$, der Punkt $(x_0, y_0) = (2, -2)$ und der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

   (a) den Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0).

   Lösung:

   $$f_x = y^2 - 8x - 12y$$
   $$f_y = 2xy - 12x - 18y$$
   $$\implies \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0^2 - 8x_0 - 12y_0 \\ 2x_0 y_0 - 12x_0 - 18y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   □

   (b) die Gleichung für die Tangentialebene von f an der Stelle (x_0, y_0).

   Lösung:

   $$z_0 = f(x_0, y_0) = 4$$

   Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von f am Punkt $(2, -2)$ mit:

   $$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$
   $$\iff E = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   □

   (c) die Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

   Lösung:

   $$v = \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$
   $$\frac{\partial f}{\partial v} = D_v(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{52}{5}$$

   □

   (d) die Richtung an der Stelle (x_0, y_0), in der die Richtungsableitung von f maximal wird, und den Wert in diese Richtung.

   Lösung:
   Die Richtung v mit dem steilsten Anstieg in (x_0, y_0) ist gegeben mit:

   $$v = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial v} = D_v(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle = \frac{1}{4\sqrt{10}} \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 4\sqrt{10}$$

□

(e) die Richtung an der Stelle (x_0, y_0), für die die Richtungsableitung Null ist.

Lösung:
Für den gesuchten Richtungsvektor v muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} = D_v(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle = 0 \\ \iff \quad & \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \iff \quad & 12v_1 + 4v_2 = 0 \\ \implies \quad & v \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Wir wählen uns daraus normierte Richtungsvektoren v_1 und $v_2 = -v_1$ wie folgt:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \land \quad v_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

□

3. Differenzieren Sie die folgende Funktion nach dem Parameter t

$$f(x,y) = x^2 \cdot y + y^3, \quad x = t^2,\, y = e^t$$

(a) unter Verwendung der Kettenregel,

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= 2xy \cdot 2t + \left(x^2 + 3y^2\right) e^t \\ &= 4txy + \left(x^2 + 3y^2\right) e^t \\ &= 4t^3e^t + \left(t^4 + 3e^{2t}\right) e^t\end{aligned}$$

□

(b) nach Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

Lösung:
Es gilt:

$$f(x,y) = x^2 \cdot y + y^3 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = t^4e^t + e^{3t}$$

Und damit:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= 4t^3e^t + t^4e^t + 3e^{3t} \\ &= 4t^3e^t + \left(t^4 + 3e^{2t}\right) e^t\end{aligned}$$

□

4. Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der jeweiligen Funktion $f = f(x, y)$ nach den Parametern unter der Verwendung der Kettenregel:
   (a) $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ mit $x(s, t) = s \cdot t^2$ und $y(s, t) = s^2 \cdot t$

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\\ &= e^x \sin(y) \cdot t^2 + e^x \cos(y) \cdot 2st\\ &= (t \sin(y) + 2s \cos(y))\, te^x\\ &= \left(t \sin(s^2 t) + 2s \cos(s^2 t)\right) te^{st^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\\ &= e^x \sin(y) \cdot 2st + e^x \cos(y) \cdot s^2\\ &= (2t \sin(y) + s \cos(y)) se^x\\ &= (2t \sin(s^2 t) + s \cos(s^2 t)) se^{st^2}\end{aligned}$$

□

$f(x, y) = \sin(x^2 \cdot y)$ mit $x(s, t) = s \cdot t^2$ und $y(s, t) = s^2 + \frac{1}{t}$

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 2xy \cos(x^2 y) \cdot t^2 + x^2 \cos(x^2 y) \cdot 2s\\ &= \left(s^2 + \frac{1}{t}\right) 2st^4 \cos\left(s^2 t^4 \left(s^2 + \frac{1}{t}\right)\right) + 2s^3 t^4 \cos\left(s^2 t^4 \left(s^2 + \frac{1}{t}\right)\right)\\ &= 2st^3 \left(2s^2 t + 1\right) \cos\left(s^2 t^3 \left(s^2 t + 1\right)\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\\ &= 2xy \cos(x^2 y) \cdot 2st - x^2 \cos(x^2 y) \cdot \frac{1}{t^2}\\ &= 4s^2 t^3 \left(2s^2 t + 1\right) \cos\left(s^2 t^4 \left(2s^2 t + 1\right)\right) - s^2 t^2 \cos\left(s^2 t^4 \left(2s^2 t + 1\right)\right)\\ &= s^2 t^2 \left(4s^2 t + 3\right) \cos\left(s^2 t^3 \left(s^2 t + 1\right)\right)\end{aligned}$$

□

5. Es sei bekannt, dass

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ f_2(\text{unbekannt}) \\ x \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$$

ein quellen- und senkenfreies Strömungsfeld ist.

(a) Wie muss denn dann die 2. Komponente des Vektors lauten?

Lösung:
Wir wissen, dass f quellen- und senkenfrei ist, wenn $\operatorname{div} f = 0$.
Es gilt:

$$\operatorname{div} f = \langle \nabla, f \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} + xy = 0$$

Damit wissen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= -xy - 1 \\ \implies \quad f_2 &= -\int (xy+1)\ \mathrm{d}y \\ \iff \quad f_2 &= -\frac{xy^2}{2} - y + c(x,z) \end{aligned}$$

□

(b) Berechnen Sie anschließend von $\vec{f}(x,y,z)$ die

i. Jacobi-Matrix

Lösung:
Es gilt:

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{y^2}{2} + c_x(x,z) & -xy-1 & c_z(x,z) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

ii. Gradient

Lösung:
Nach Vorlesung gilt[1]:

$$\nabla(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -xy-1 \\ xy \end{pmatrix}$$

iii. Rotation

Lösung:
Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ -y - \frac{xy^2}{2} + c(x,z) \\ xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz - c_z(x,z) \\ -yz \\ -\frac{y^2}{2} + c_x(x,z) \end{pmatrix}$$

□

[1] Im Kontrast zu gängiger Interpretation, nach der $\nabla(\vec{f}) = (J_{\vec{f}})^T$ gilt. Siehe: Wikipedia