Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 13

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 27. Juni 2021

6. Gesucht ist die Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Wir wissen, dass A diagonalisierbar ist. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
A &= SDS^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 24 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\square$

7. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

Lösung:
Das charakteristische Polynom $\chi(A)$ ist gegeben mit:

$$\chi(A) = (-\lambda)^2(1-\lambda) + 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

Wir erraten eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und erhalten nach dem Abspalten des Linearfaktors $(\lambda - 1)$:

$$\begin{array}{l} \big(-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1\big) \div \big(\lambda - 1\big) = -\lambda^2 - 1 \\ \underline{\quad\lambda^3 - \lambda^2} \\ \qquad\qquad -\lambda + 1 \\ \qquad\qquad \underline{\quad\lambda - 1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_2 = -i \quad \wedge \quad \lambda_3 = i$$

Wir berechnen nun die dazugehörigen Eigenvektoren:

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_1 = x_2$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -ix_2 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, -i) = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_3) = \ker(A - \lambda_3 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = ix_2 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\square$

8. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert VDV^{-1})? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix V lauten?

Lösung:
Wir sehen direkt, dass $\det(A) = 0$ und damit $\lambda_1 = 0$.
Für das charakteristische Polynom $\chi(A)$ gilt:

$$\chi(A) = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 4 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

Abspalten des Linearfaktors (λ) ergibt:

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0 \implies {}^1\lambda_2 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 4$$

Wir berechnen nun die dazugehörigen Eigenvektoren:

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1 E) = \ker(A - \lambda_1 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -x_3 \quad \wedge \quad x_2 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 E) = \ker(A - \lambda_2 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -2x_3 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_3 E) = \ker(A - \lambda_3 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = x_3 \quad \wedge \quad x_2 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit ist die Diagonalisierung von A gegeben mit

$$A = VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

□

[1] Die *pq*-Formel ersparen wir uns hier einmal.

9. Zeigen Sie:

(a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eigenwert gleich 0 ist.

Lösung:
Wir wissen, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.
Seien λ_i die Eigenwerte von A. Damit gilt:

$$\det(A) \neq 0 \quad \wedge \quad \det(A) = \prod_{i\in[1,n]} \lambda_i \quad \iff \quad \forall i \in [1,n] : \lambda_i \neq 0$$

$\square$

(b) Das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix lässt sich schreiben als

$$\lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A)$$

Lösung:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} \chi(A) &= \det(A - \lambda E) \\ &= (a-\lambda)(b-\lambda) - bc \\ &= ab - a\lambda - b\lambda + \lambda^2 - bc \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - bc \\ &= \lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$\square$

(c) A symmetrisch $\implies$ alle Eigenwerte sind reell. Gilt die Umkehrung?

Lösung:
Die gegebene Aussage gilt bereits nicht. So ist z.B. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ symmetrisch, hat aber komplexe Eigenwerte.
Vermutlich wurde aber von einer reellsymmetrischen Matrix A ausgegangen.
Sei λ ein Eigenwert mit Eigenvektor v von A. Dann gilt:

$$\lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = (Av)^T\bar{v} = v^T A^T \bar{v} = v^T A\bar{v} = \left\langle v, \bar{A}v\right\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Und damit

$$\lambda = \bar{\lambda} \quad \implies \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\square$

Die Rückrichtung gilt nicht.
Ein Gegenbeispiel ist die nicht-symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem reellen Eigenwert 1. $\square$