Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 11

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 13. Juni 2021

5. Die Punkte $A(6;0;0)$, $B(2;1;3)$ und $C(-2;-2;2)$ liegen in einer Ebene E.

   (a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?

Lösung:
Wir wählen uns $\vec{a}$ (Ortsvektor von A) als Stützvektor und die Vektoren $v = \vec{b} - \vec{a}$ und $w = \vec{c} - \vec{a}$ als Richtungsvektoren der Ebene. Dann gilt:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{v \times w}{|v \times w|} = \frac{1}{|v \times w|} \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Mit n als (normierten) Normalenvektor erhalten wir dann die Hessesche Normalform der Ebene mit

$$E : \langle x, n \rangle = \langle \vec{a}, n \rangle \quad \iff \quad \frac{1}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y + \frac{2}{3} \cdot z = 2$$

Setzen wir nun den Nullpunkt in die Ebene ein, erhalten wir sofort den Abstand mit $d = 2$. $\square$

   (b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.

Lösung:
Mit der Ebenengleichung

$$E : \frac{1}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y + \frac{2}{3} \cdot z = 2$$

können wir folgendes unterbestimmte LGS aufstellen:

$$Ax = b \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rank}(A) = 1 = m \quad \implies \quad x = A^T \left(AA^T\right)^{-1} b$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x_s &= A^T \left(AA^T\right)^{-1} b \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot 2 \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 1^{-1} \cdot 2 \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot 2 \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist dann $\begin{pmatrix} 2/3 & -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}^T$ der gesuchte Punkt in der Ebene mit dem geringsten Abstand. $\square$

6. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Lösung:

Genau dann, wenn Q eine Orthogonalmatrix ist, ist $QQ^T = I$ und damit auch $Q^T = Q^{-1}$:

$$\begin{aligned}
QQ^T &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist Q eine Orthogonalmatrix und Q^T die Inverse von Q. $\square$

7. Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x-z-Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x-Achse.

   (a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

Lösung:
Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

   (b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

Lösung:
Die Abbildungsmatrix von $f_B \circ f_A$ ist gegeben mit:

$$M = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

□

   (c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Lösung:
Wir erkennen sehr schnell, dass M eine Orthogonalmatrix ist (und insbesondere $M = M^T$). Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} MM^T &= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\phi + \sin^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\phi + \cos^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist M also insgesamt involutorisch (selbstinvers). □

8. (a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{u^T u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.
Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

Lösung:
Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
H_n &:= I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{u^T u} \overset{1}{=} I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} \\
\implies \quad H_n (H_n)^T &\overset{2}{=} \left(I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right)^2 \\
&= \left(I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right)\left(I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right) \\
&= I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} - 2\left(\frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right)\left(I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right) \\
&= I_n - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} + \left(-2 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right)^2 \\
&= I_n - 4 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} + 4\left(\frac{uu^T}{\langle u, u\rangle}\right)^2 \\
&= I_n - 4 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} + 4 \cdot \frac{uu^T uu^T}{\langle u, u\rangle^2} \\
&= I_n - 4 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} + 4 \cdot \frac{u\left(u^T u\right) u^T}{\langle u, u\rangle^2} \\
&= I_n - 4 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} + 4 \cdot \frac{uu^T}{\langle u, u\rangle} = I_n
\end{aligned}$$

Damit ist $H_n (H_n)^T = I_n$ und nach Definition H_n eine Orthogonalmatrix. □

(b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Es gilt:

$$I_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{u^T u} = I_3 - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \in O(3)$$

□

[1] $u \in \mathbb{R}^{n \times 1} \implies \left(uu^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\right) \wedge \left(u^T u = \langle u, u\rangle \in \mathbb{R}\right)$
[2] $H_n = (H_n)^T$