Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 04

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 25. April 2021

5. Bestimmen Sie den Rang der zu den folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen:

   (a) $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir berechnen zuerst den Kern der Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \frac{5}{2} & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit

$$\begin{cases} 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sei $x_3 = \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{cases} 4x_2 + 5\lambda = 0 \\ 2x_1 + \lambda = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{-5\lambda}{4} \\ x_1 = \frac{-\lambda}{2} \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Kern von A_1 mit

$$\ker A_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}^T\right) \implies \operatorname{def} A_2 = 1$$

Damit gilt, dass $\operatorname{rg} A_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{def} A_1 = 2$. □

Alternativ:
Wir sehen direkt, dass $\left\{\begin{pmatrix} -3 & -4 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T\right\}$ linear unabhängig $\implies \operatorname{rg} A_1 = 2$. □

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir berechnen zuerst den Kern der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{(*)}$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Sei $x_1 = \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ \lambda + x_3 = 0 \\ \lambda + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = -\lambda \\ x_4 = -\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda \\ x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Kern von A_2 mit

$$\ker A_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T\right) \implies \operatorname{def} A_2 = 1$$

Damit gilt, dass $\operatorname{rg} A_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{def} A_2 = 3$. □

Alternativ:
Wir sehen direkt, dass in $(*)$ $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right\}$ linear unabhängig $\implies \operatorname{rg} A_2 = 3$. □

6. Bestimmen Sie den Rang der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Wir bestimmen zuerst die Determinante von A:

$$\det A = 1 + t^4 + t^4 - t^4 - t^2 - t^2 = t^4 - 2t^2 + 1$$

Wir wissen, dass $\operatorname{rg} A = 3 \iff \det A \neq 0$ (da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$). Sei $u = t^2$, dann gilt:

$$\det A = u^2 - 2u + 1 = 0 \implies u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \implies t \in \{-1, 1\} \quad \checkmark$$

Damit wissen wir, dass $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \implies \operatorname{rg} A = 3$.

$$t = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg} A = 1$$

$$t = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg} A = 1$$

Damit wissen wir, dass $t \in \{-1, 1\} \implies \operatorname{rg} A = 1$. □

7. Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f(x) = A \cdot x$, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir bestimmen zuerst den Rang der Matrix mithilfe eines Linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Sei $x_1 = \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ \lambda + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ \lambda + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -\lambda \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_4 = -\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -\lambda \\ 0 = 0 \\ x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Kern von A mit

$$\ker A = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T\right\}\right) \implies \operatorname{def} A = 1.$$

Damit gilt nach dem Rangsatz auch

$$\operatorname{rg} A = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{def} A = 3,$$

womit wir uns drei linear unabhängige Vektoren aus A auswählen können, die dann eine Basis von $\operatorname{im} A$ ergeben.
Wir wählen

$$\operatorname{im} A = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T\right\}\right)$$

$\square$

8. Berechnen Sie in Abhängigkeit von x

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) den Kern

Lösung:
Wir berechnen zuerst die Determinante von A:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - x \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 0 - 2 \cdot 8 + 5 \cdot 16 - x \cdot 8 \\ &= 64 - 8x \end{aligned}$$

Wir wissen, dass für $\det A = 64 - 8x \neq 0 \iff x \neq 8$ die Vektoren in A linear unabhängig sind. Damit gilt $x \in \mathbb{R} \setminus \{8\} \implies \ker A = \{0\}$.
Für $x = 8$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun den Kern von A mithilfe eines Linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Sei $x_2 = \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{cases} \lambda - x_4 = 0 \\ 2\lambda + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_4 = \lambda \\ x_3 = -2\lambda \\ x_1 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_4 = \lambda \\ x_3 = -2\lambda \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Kern von A mit

$$\ker A = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}^T\right).$$

□

(b) die Dimension des Kerns

Lösung:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{8\} \implies \ker A = \{0\} \implies \operatorname{def} A = 0$$
$$x = 8 \implies \ker A = \operatorname{span}\left(\{\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\}^T\right) \implies \operatorname{def} A = 1$$

□

(c) den Rang

Lösung:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{8\} \implies \operatorname{def} A = 0 \implies \operatorname{rg} A = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{def} A = 4$$
$$x = 8 \implies \operatorname{def} A = 1 \implies \operatorname{rg} A = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{def} A = 3$$

□

(d) das Bild

Lösung:
Wir wissen, dass wir uns immer $|\operatorname{rg} A|$-viele linear unabhängige Vektoren aus A aussuchen dürfen, um eine Basis von $\operatorname{im} A$ zu bilden.

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{8\} \implies \operatorname{rg} A = 4 \implies \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\x\\5\end{pmatrix}\right\}\right) = \operatorname{im} A$$

$$x = 8 \implies \operatorname{rg} A = 3 \implies \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\5\\3\end{pmatrix}\right\}\right) = \operatorname{im} A$$

□