

Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 03

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 18. April 2021

5. Gegeben sind die folgenden linearen Abbildungen. Geben Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen an.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Sei B_2 die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^2 und B_3 die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^3 .

Dann ist die Abbildungsmatrix von f_1 gegeben mit

$$M_{B_3}^{B_2}(f_1) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

□

(b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Sei B_2 die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^2 und B_3 die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^3 .

Dann ist die Abbildungsmatrix von f_2 gegeben mit

$$M_{B_3}^{B_2}(f_2) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

6. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden.

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

(a) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \rightarrow \lambda x$

Lösung:

$f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \rightarrow \lambda x$

Sei B die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^n . Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(f_a) = \begin{pmatrix} f_a(e_1) & f_a(e_2) & \dots & f_a(e_{n-1}) & f_a(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

□

(b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \rightarrow \lambda x$

Lösung:

$f_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \rightarrow \lambda x$

Sei B_1 die kanonische Einheitsbasis von \mathbb{R} ($\{1\}$) und B_n die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^n . Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_{B_n}^{B_1}(f_b) = (f_b(e)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

□

7. Sei

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

Lösung:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Sei B die kanonische Einheitsbasis des \mathbb{R}^3 . Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(F) = \begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

□

(b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.

Lösung:

$$M_B^B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also ein Lineares Gleichungssystem, dessen Lösung eine Basis von $\ker F$ ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Daraus können wir für den Kern folgern, dass $\ker F = \text{span} \left((1 \ -7 \ 3)^T \right)$ und $\text{def } F = 1$. □

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\text{im}(F))$.

Lösung:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \text{def } F + \text{rg } F \implies \text{rg } F = 2$$

□

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

Lösung:

Wegen $\text{rg } F = 2$ wissen wir, dass wir zwei linear unabhängige Vektoren aus M_B^B auswählen können, die dann automatisch eine Basis von $\text{im } F$ ergeben.

Wir wählen $\text{im } F = \text{span} \left(\left\{ (1 \ 0 \ 2)^T, (2 \ 1 \ 5)^T \right\} \right)$. □

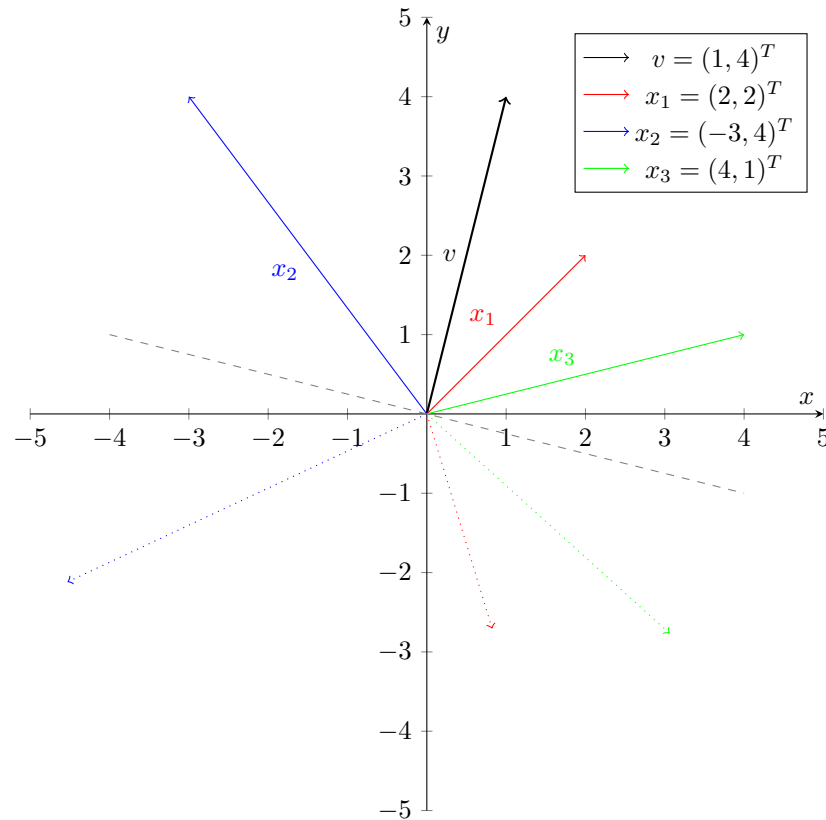
8. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm.

- (a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).

Lösung:



(Hyperebenen im Fall $n = 2$ sind offensichtlich Geraden.)

(b) Zeigen Sie: S ist linear.

Lösung:

S ist ein Homomorphismus, genau dann wenn S additiv und homogen ist.

Additivität: $S(x) + S(y) = S(x + y)$

$$\begin{aligned}
 S(x) + S(y) &= S(x + y) \\
 \equiv x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v + y - 2 \frac{\langle v, y \rangle}{\|v\|^2} v &= (x + y) - 2 \frac{\langle v, (x + y) \rangle}{\|v\|^2} v \\
 \equiv (x + y) - 2 \left(\frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} + \frac{\langle v, y \rangle}{\|v\|^2} \right) v &= (x + y) - 2 \frac{\langle v, (x + y) \rangle}{\|v\|^2} v \\
 \equiv (x + y) - 2 \frac{\langle v, (x + y) \rangle}{\|v\|^2} v &= (x + y) - 2 \frac{\langle v, (x + y) \rangle}{\|v\|^2} v \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Homogenität: $\lambda S(x) = S(\lambda x)$

$$\begin{aligned}
 \lambda S(x) &= S(\lambda x) \\
 \equiv \lambda \left(x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v \right) &= \lambda x - 2 \frac{\langle v, \lambda x \rangle}{\|v\|^2} v \\
 \equiv \lambda x - 2 \lambda \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v &= \lambda x - 2 \frac{\langle v, \lambda x \rangle}{\|v\|^2} v \\
 \equiv \lambda x - 2 \frac{\langle v, \lambda x \rangle}{\|v\|^2} v &= \lambda x - 2 \frac{\langle v, \lambda x \rangle}{\|v\|^2} v \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Damit ist S ein Homomorphismus. □

(c) Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Sei weiter $f(x) := Ax$. Zeigen Sie: $\text{rg}(f) = 1$.

Lösung:

Wir visualisieren uns einmal die Matrix A wie folgt:

$$A := \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \dots & v_1 w_{n-1} & v_1 w_n \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \dots & v_2 w_{n-1} & v_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1} w_1 & v_{n-1} w_2 & \dots & v_{n-1} w_{n-1} & v_{n-1} w_n \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \dots & v_n w_{n-1} & v_n w_n \end{pmatrix}$$

Direkt wird ersichtlich, dass gilt

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} x_1 w_1 v + x_2 w_2 v + \dots + x_{n-1} w_{n-1} v + x_n w_n v \end{pmatrix} = \langle w, x \rangle v$$

Offensichtlich erzeugt f nur eine Gerade mit Richtungsvektor v .

Damit ist $\text{rg } f = \text{rg } Ax = \dim \text{span}(v) = 1$. □

- (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.

Lösung:

Sei H gegeben mit

$$H = I - \frac{2(v \oplus v)}{\|v\|^2}$$

Dann gilt

$$Hx = x - \frac{2(v \oplus v)x}{\|v\|^2} \stackrel{(c)}{=} x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v = S(x)$$

Sei B die kanonische Einheitsbasis vom \mathbb{R}^n . Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(S) = \begin{pmatrix} S(e_1) & S(e_2) & \cdots & S(e_{n-1}) & S(e_n) \end{pmatrix} = I - \frac{2}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_n^2 \end{pmatrix}$$

- (e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\ker(S)$ und $\operatorname{im}(S)$.

Lösung:

S ist ein Homomorphismus. Damit ist S nun isomorph, wenn S bijektiv ist.

Aus der Abbildungsmatrix $M_B^B(S)$ aus (d) können wir direkt sehen, dass $\operatorname{rg} S = n$ gilt. Damit ist S bereits surjektiv und wegen des Rangsatzes mit

$$\dim \mathbb{R}^n = \operatorname{rg} S + \operatorname{def} S \implies \operatorname{def} S = 0$$

ist S injektiv und damit insgesamt bijektiv.

Da $S(S(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (nach Definition) ist S bereits involutorisch (selbstinvers). \square