Lineare Algebra 2
Hausaufgabenblatt 01

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 05. April 2021

5. Gegeben ist die Abbildung
$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
sowie die Menge $A = [-1; 1] \times [0; 10]$.

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f(A)$, $f^{-1}(A)$.

Lösung:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$f(A) = [0; 1] \times [0; 5]$$

$$f^{-1}(A) = [-1; 1] \times [0; 20]$$

6. (a) Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : M \to \mathcal{P}(M), \varphi(m) = \{m\} \text{ für } m \in M$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass φ injektiv bzw. surjektiv ist.

Lösung:
Injektivität: $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) \implies m_1 = m_2$

$$\begin{aligned} & \varphi(m_1) = \varphi(m_2) && \implies m_1 = m_2 \\ \equiv \quad & \{m_1\} = \{m_2\} && \implies m_1 = m_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Surjektivität: $\forall n \in \mathcal{P}(M), \exists m \in M : \varphi(m) = n \iff \forall n \in \mathcal{P}(M) : \varphi^{-1}(n) \neq \emptyset$

$$M := \{0, 1\} \implies \varphi^{-1}(\{0, 1\}) = \emptyset \quad \lightning$$

(b) Zwei Mengen M_1, M_2 sind „gleichmächtig" im Sinne von Cantor ($|M_1| = |M_2|$), wenn es eine Bijektion zwischen M_1 und M_2 gibt. Sind die beiden Mengen endlich, impliziert dies, dass M_1 und M_2 gleich viele Elemente enthalten. Man zeige, dass es im Cantorschen Sinne „so viele gerade wie natürliche Zahlen gibt", indem man beweist, dass $\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \varphi(n) = 2n$ eine Bijektion ist.

Lösung:
$\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \varphi(n) = 2n$ ist genau dann eine Bijektion, wenn φ injektiv und surjektiv ist.
Injektivität: $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \implies x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1) = \varphi(x_2) && \implies x_1 = x_2 \\ \equiv \quad & 2x_1 = 2x_2 && \implies x_1 = x_2 \\ \equiv \quad & x_1 = x_2 && \implies x_1 = x_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Surjektivität: $\forall y \in 2\mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = y$

$$y \in 2\mathbb{N} \iff y = 2x, x \in \mathbb{N} \iff y = \varphi(x) \quad \checkmark$$

(c) Wir definieren

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & , n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \end{cases}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

Beweisen Sie: f ist eine Bijektion. Was folgt daraus für die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$?

Lösung:
$f(n)$ ist genau dann eine Bijektion, wenn f injektiv und surjektiv ist.
Injektivität: $f(n_1) = f(n_2) \implies n_1 = n_2$
Für $x \in 2\mathbb{N} + 1$[1], $y \in 2\mathbb{N}$ kann offensichtlich nicht $\mathbb{Z}^- \ni f(x) = f(y) \in \mathbb{Z}^+$ gelten.
Seien $n_1, n_2 \in 2\mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(n_1) = f(n_2) && \implies n_1 = n_2 \\ \equiv\quad & \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} && \implies n_1 = n_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Seien $n_1, n_2 \in 2\mathbb{N} + 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(n_1) = f(n_2) && \implies n_1 = n_2 \\ \equiv\quad & -\frac{n_1 - 1}{2} = -\frac{n_2 - 1}{2} && \implies n_1 = n_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Surjektivität: $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = m$
Sei $f(n) = m \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Dann gilt:

$$f(n) = m \iff -\frac{n-1}{2} = m \implies n = -(2m+1) \implies n \in 2\mathbb{N} + 1 \quad \checkmark$$

Sei $f(n) = m \in \mathbb{Z}^+$. Dann gilt:

$$f(n) = m \iff \frac{n}{2} = m \implies n = 2m \implies n \in 2\mathbb{N} \quad \checkmark$$

[1] $2\mathbb{N} + 1$ bezeichnet hier die Menge aller ungeraden Zahlen $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

7. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Kern.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

Lösung:
f_1 ist genau dann *linear*, wenn f_1 *homogen* und *additiv* ist.
Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R} : f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x)$

$$\begin{aligned} & f_1(\lambda x) && = \lambda f_1(x) \\ \equiv\ & f_1(\lambda x_1, \lambda x_2) && = \lambda f_1(x_1, x_2) \\ \equiv\ & \begin{pmatrix} -\lambda x_2 \\ -\lambda x_1 \\ 5\lambda x_1 - 7\lambda x_2 \end{pmatrix} && = \lambda \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} \\ \equiv\ & \lambda \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} && = \lambda \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Additivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : f_1(x + y) = f_1(x) + f_1(y)$

$$\begin{aligned} & f_1(x + y) && = f_1(x) + f_1(y) \\ \equiv\ & f_1(x_1 + y_1, x_2 + y_2) && = f_1(x_1, x_2) + f_1(y_1, y_2) \\ \equiv\ & \begin{pmatrix} -(x_2 + y_2) \\ -(x_1 + y_1) \\ 5(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ -y_1 \\ 5y_1 - 7y_2 \end{pmatrix} \\ \equiv\ & \begin{pmatrix} -x_2 - y_2 \\ -x_1 - y_1 \\ 5x_1 + 5y_1 - 7x_2 - 7y_2 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} -x_2 - y_2 \\ -x_1 - y_1 \\ 5x_1 + 5y_1 - 7x_2 - 7y_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist f_1 linear. $\square$

$$\ker(f_1) = f_1^{-1}(0_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$\square$

(b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$f_2(0_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3} \quad \lightning$$

(c) $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$f_3(0_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3} \quad \lightning$$

(d) $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Lösung:
f_4 ist genau dann *linear*, wenn f_4 *homogen* und *additiv* ist.
Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R} : f_4(\lambda x) = \lambda f_4(x)$

$$\begin{aligned} & f_4(\lambda x) && = \lambda f_4(x) \\ \equiv \quad & f_4(\lambda x_1, \lambda x_2) && = \lambda f_4(x_1, x_2) \\ \equiv \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} && = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ \equiv \quad & \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} && = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Additivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : f_4(x + y) = f_4(x) + f_4(y)$

$$\begin{aligned} & f_4(x + y) && = f_4(x) + f_1(y) \\ \equiv \quad & f_4(x_1 + y_1, x_2 + y_2) && = f_4(x_1, x_2) + f_4(y_1, y_2) \\ \equiv \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ \equiv \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist f_4 linear. $\square$

$$\ker(f_4) = f_4^{-1}(0_{\mathbb{R}^3}) =^{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$\square$

[2] $x_1 - x_2 = x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$

8. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

Lösung:
f ist genau dann *linear*, wenn f *homogen* und *additiv* ist.
Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\begin{aligned} & f(\lambda x) && = \lambda f(x) \\ \equiv\ & f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) && = \lambda f(x_1, x_2, x_3) \\ \equiv\ & (\lambda x_1 - 2\lambda x_3, 4\lambda x_2) && = \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) \\ \equiv\ & \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) && = \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Additivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : f(x + y) = f(x) + f_4(y)$

$$\begin{aligned} & f(x+y) && = f(x) + f(y) \\ \equiv\ & f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) && = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) \\ \equiv\ & (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) && = (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2) \\ \equiv\ & (x_1 + y_1 - 2x_3 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) && = (x_1 + y_1 - 2x_3 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist f linear. $\square$

(b) Bestimmen Sie den Kern von f und geben Sie $\dim(\ker(f))$ an.

Lösung:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies x_2 = 0 \wedge x_1 = 2x_3$$

Daraus folgt:

$$\ker(f) = f^{-1}(0) = \{(2\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \implies \operatorname{def}(f) = \dim(\ker(f)) = 1$$

$\square$

(c) Berechnen Sie die $\dim(\operatorname{im}(f))$ bzw. $\operatorname{rg}(f)$ und bestimmen Sie $\operatorname{im}(f)$.

Lösung:
Nach dem Rangsatz gilt:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \operatorname{def}(f) + \operatorname{rg}(f) \implies \operatorname{rg}(f) = 2$$

Sei $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Dann ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(f)$ (wenn f isomorph ist, dann sogar eine Basis).

$$f(B) = \big\{ \big(1, 0\big), \big(0, 4\big), \big(-2, 0\big) \big\}$$

$f(b_1) = -2f(b_3) \implies \{f(b_1), f(b_2\} = \{(1, 0), (0, 4)\}$ ist eine Basis von $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$. $\square$

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Lösung:

$$\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \implies f \text{ ist nicht injektiv}$$

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) \iff f \text{ ist surjektiv}$$

$\square$