Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 08

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 24. Mai 2021

5. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus

Lösung:

$$\det A = 4 \cdot (-2) \cdot (-3) + 6 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 24 + 12 + 30 + 4 = 70$$

□

(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II: II + 2 III}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 5 III}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{35}\cdot\det(A)]{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II: II + 7 I)} \circ \text{(III: III + 3 I)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot(-1)\cdot\det A]{(\text{I} \leftrightarrow \text{III}) \circ (\text{I} \leftrightarrow \text{II})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\det A = (-1) \cdot (-1) \cdot 35 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 35 \cdot 2 = 70$$

□

(c) mit dem Entwicklungssatz

Lösung:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-16} + (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{-18} = 16 + 54 = 70$$

□

6. Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

Lösung:

$$T_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \det(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \text{ mit } D_0 = 1.$$

Lösung:
Für die Berechnung von D_n entwickeln wir einfach nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz nach der ersten Zeile. Danach gilt bereits:

$$D_n = t_{1,1} \cdot \det(T_{n-1}) - t_{1,2} \cdot \det(T'_{n-1}) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - 1 \cdot \det(T'_{n-1}) = 2D_{n-1} - 1 \cdot \det(T'_{n-1})$$

Sei hier T'_n definiert mit

$$t'_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i \neq j \text{ und } j = 1 \\ t_{i,j} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\det(T'_{n-1})$ entwickeln wir dann nach der ersten Spalte. Damit gilt:

$$\det(T'_{n-1}) = t'_{1,1} \cdot \det(T_{n-2}) = 1 \cdot \det(T_{n-2}) = D_{n-2}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$D_n = 2D_{n-1} - 1 \cdot \det(T'_{n-1}) = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

□

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil (b) für $n = 2, 3, 4, 5$. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für D_n an und beweisen Sie sie.

Lösung:

$$\begin{aligned} n = 2: &\quad D_2 = 2D_1 - D_0 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \\ n = 3: &\quad D_3 = 2D_2 - D_1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4 \\ n = 4: &\quad D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5 \\ n = 5: &\quad D_5 = 2D_4 - D_3 = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 6 \end{aligned}$$

Es gilt: $D_n = n + 1$.
Der Induktionsanfang ist bereits oben erledigt worden.
Gelte nun $A(n) : D_n = n + 1$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq 2$, dann gilt für $A(n + 1)$:

$$D_{n+1} = n + 2 \iff 2D_n - D_{n-1} = n + 2 \overset{\text{IV}}{\iff} 2(n + 1) - n = n + 2 \iff 2 = 2 \quad \checkmark$$

Damit gilt $A(n)$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für $n \geq 2$. $\square$

7. Es seien 3 Punkte mit den Koordinaten (x_i, y_i) gegeben; es ist zu zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises, der durch die 3 Punkte geht (Umkreis) ist, falls

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Was bedeutet die Bedingung geometrisch?

Lösung:

Wir entwickeln die Matrix nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
& 0 = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\
\iff \quad & 0 = \left(x^2+y^2\right) \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{a} - x \underbrace{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{b} + y \underbrace{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{c} - \underbrace{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}_{d} \\
\iff \quad & 0 = a\left(x^2+y^2\right) - bx + cy - d \\
\overset{a\neq 0}{\implies} \quad & 0 = x^2+y^2 - \frac{bx}{a} + \frac{cy}{a} - \frac{d}{a} \qquad (*) \\
\iff \quad & 0 = x^2+y^2 - \frac{bx}{a} + \frac{cy}{a} - \frac{d}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{4a^2} \\
\iff \quad & 0 = \left(x^2 - \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(y^2 + \frac{cy}{a} + \frac{c^2}{4a^2}\right) - \frac{d}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c^2}{4a^2} \\
\iff \quad & 0 = \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{d}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c^2}{4a^2} \\
\iff \quad & \underbrace{\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2}_{\text{Mittelpunkt: } \left(\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)} = \underbrace{\frac{d}{a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2}}_{\text{Radius: } \sqrt{\frac{d}{a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4a^2}}}
\end{aligned}$$

Als einzige Bedingung erhalten wir in der Umformung bei $(*)$, dass $a \neq 0$ gelten muss. Wir haben hier auch direkt die in der Aufgabe genannte Bedingung.

Gilt $a = 0$, dann sind die entsprechenden Zeilenvektoren linear abhängig. Lineare Abhängigkeit bedeutet hier aber auch, dass die Punkte auf einer Geraden liegen. Das deckt sich auch mit der Aufgabenstellung, denn einen Kreis durch 3 Punkte auf einer Geraden kann man (ohne $r = \infty$) nicht konstruieren. □

8. Berechnen Sie die Determinante der beiden folgenden Matrizen nach einer beliebigen Methode. Es gibt in beiden Fällen eine sehr schnelle Methode.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir erkennen schnell:

$$\forall a_{i,5},\ i \in [1,5]_{\mathbb{N}} : a_{i,5} = -\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$$

Damit ist die letzte Spalte der Matrix eine Linearkombination der anderen und damit gilt

$$\det A = 0.$$

□

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$

Lösung:
Mit der Umformung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III: III + II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

wird offensichtlich, dass die dritte Zeile lediglich ein Vielfaches von der ersten Zeile ist. Damit sind die Zeilenvektoren linear abhängig und damit gilt

$$\det B = 0.$$

□