Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 02

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 11. April 2021

4. Zeigen Sie welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Wie muss ggf. der Definitionsbereich bzw. Bildbereich geändert werden, damit die Abbildung bijektiv wird?

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2 - x - 2$

Lösung:

Injektivität: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

$$f(0) = f(1) = -2 \quad \lightning$$

Surjektivität: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \iff \forall y \in \mathbb{R} : f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$$f^{-1}(-4) = \emptyset \quad \lightning$$

Wir wissen, dass es sich hier um eine Parabel handelt.
Damit die Funktion nun bijektiv wird, benötigen wir den Scheitelpunkt der Parabel

$$x_S = -\frac{p}{2} = \frac{1}{2} \implies y_S = f(x_S) = -\frac{9}{4}.$$

Schrenken wir nun den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_{\geq x_S} = \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{2}}$ (Injektivität) und den Wertebereich auf $\mathbb{R}_{\geq y_S} = \mathbb{R}_{\geq -\frac{9}{4}}$ (Surjektivität) ein, dann ist f bijektiv. $\square$

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^3 - x$

Lösung:

Injektivität: $g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$

$$g(0) = g(1) = 0 \quad \lightning$$

Surjektivität: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : g(x) = y \iff \forall y \in \mathbb{R} : g^{-1}(y) \neq \emptyset$ gilt offensichtlich.
Schrenken wir den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ und den Wertebereich auf $\mathbb{R}_{\geq f(1)} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein, dann ist g insgesamt bijektiv. $\square$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2y \\ x-2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Injektivität: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) && \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \equiv \quad & \begin{pmatrix} 2y_1 \\ x_1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_2 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} && \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Surjektivität: $\forall y \in \mathbb{R}^2, \exists x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y \iff \forall y \in \mathbb{R}^2 : f^{-1}(y) \neq \emptyset$
Mit der (wohldefinierten) Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_2 + 2 \\ \frac{y_1}{2} \end{pmatrix}$$

gilt die Surjektivität offensichtlich.
Damit ist f bereits bijektiv. $\square$

5. Wir betrachten $\mathcal{C}[0,1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

   (a) Zeigen Sie: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0,1]$, d.h. die Abbildung
$$\varphi_a : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, \varphi_a(f) = f(a)$$
   ist linear.

Lösung:
φ_a ist genau dann *linear*, wenn φ_a *homogen* und *additiv* ist.
Homogenität: $\forall f \in \mathcal{C}[0,1], \lambda \in \mathbb{R} : \varphi_a(\lambda f) = \lambda\varphi_a(f)$

$$\begin{aligned} & \varphi_a(\lambda f) && = \lambda\varphi_a(f) \\ \equiv \quad & \lambda f(a) && = \lambda f(a) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Additivität: $\forall f, g \in \mathcal{C}[0,1] : \varphi_a(f+g) = \varphi_a(f) + \varphi_a(g)$

$$\begin{aligned} & \varphi_a(f+g) && = \varphi_a(f) + \varphi_a(g) \\ \equiv \quad & (f+g)(a) && = f(a) + g(a) \\ \equiv \quad & f(a) + g(a) && = f(a) + g(a) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist φ_a linear. $\square$

   (b) Ist φ_a injektiv und surjektiv?

Lösung:
Injektivität:
Aus $\dim \mathcal{C}[0,1] = \infty > \dim \mathbb{R} = 1$ folgt, dass φ_a nicht injektiv sein kann.
Surjektivität:
Sei $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Dann ist $\dim L(\varphi_a(f)) = 1 = \dim \mathbb{R}$. Damit ist $\varphi_a(f)$ bereits surjektiv, da $\operatorname{rg} \varphi_a(f) = \dim \mathbb{R}$. $\square$

6. Bilden die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Vektorräume?

(a) $M = \{a \in \mathbb{R}\}$ mit $a + a = a$ und $ka = a, k \in \mathbb{R}$

Lösung:
Offensichtlich sind die Addition und Skalarmultiplikation jeweils als Identitätsabbildung definiert. Außerdem handelt es sich hier um eine einelementige Menge.
Da jede Verknüpfung von Identitätsabbildungen wieder das Element selbst erzeugen, ist M trivialerweise ein Vektorraum, da jedes Vektorraumaxion jeweils bereits trivial ist. □

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

Lösung:
Seien $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 0)^T \in M$ gegeben. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ↯ \end{aligned}$$

Damit ist M kein Vektorraum. □

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \right\}$ mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

Lösung:
Sei $((x, y)^T)^{-1} \in M$ das zu $(x, y)^T \in M$ inverse Element. Dann gilt offensichtlich:

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x > 0 \nexists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{-1} \in M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{-1} = 0_{\mathbb{R}^2} \quad ↯$$

Damit ist M kein Vektorraum. □

(d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}$, $k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

Lösung:
Seien $(1, 1)^T, (2, 2)^T \in M$ und $k = 2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \equiv 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad ↯ \end{aligned}$$

Damit ist M kein Vektorraum. □