Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 08

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 23. Mai 2021

5. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus

Lösung:

$$\det A = 4 \cdot (-2) \cdot (-3) + 6 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 24 + 12 + 30 + 4 = 70$$

□

(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II: II + 2 III}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 5 III}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{35} \cdot \det(A)]{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II: II + 7 I)} \wedge \text{(III: III + 3 I)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1) \cdot (-1) \cdot \det A]{(\text{I} \leftrightarrow \text{III}) \wedge (\text{I} \leftrightarrow \text{II})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\det A = (-1) \cdot (-1) \cdot 35 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 35 \cdot 2 = 70$$

□

(c) mit dem Entwicklungssatz

Lösung:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-16} + (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{-18} = 16 + 54 = 70$$

$\square$

6. Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

Lösung:

$$T_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \det(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \text{ mit } D_0 = 1.$$

Lösung:
Für die Berechnung von D_n entwickeln wir einfach nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz nach der ersten Zeile. Danach gilt bereits:

$$D_n = t_{1,1} \cdot \det(T_{n-1}) - t_{1,2} \cdot \det(T'_{n-1}) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - 1 \cdot \det(T'_{n-1}) = 2D_{n-1} - 1 \cdot \det(T'_{n-1})$$

Sei hier T'_n definiert mit

$$t'_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i \neq j \text{ und } j = 1 \\ t_{i,j} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\det(T'_{n-1})$ entwickeln wir dann nach der ersten Spalte. Damit gilt:

$$\det(T'_{n-1}) = t'_{1,1} \cdot \det(T_{n-2}) = 1 \cdot \det(T_{n-2}) = D_{n-2}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$D_n = 2D_{n-1} - 1 \cdot \det(T'_{n-1}) = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

□

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil (b) für $n = 2, 3, 4, 5$. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für D_n an und beweisen Sie sie.

Lösung:

$$\begin{aligned} n = 2: &\quad D_2 = 2D_1 - D_0 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \\ n = 3: &\quad D_3 = 2D_2 - D_1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4 \\ n = 4: &\quad D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5 \\ n = 5: &\quad D_5 = 2D_4 - D_3 = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 6 \end{aligned}$$

Es gilt: $D_n = n + 1$.
Der Induktionsanfang ist bereits oben erledigt worden.
Gelte nun $A(n) : D_n = n + 1$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq 2$, dann gilt für $A(n + 1)$:

$$D_{n+1} = n + 2 \iff 2D_n - D_{n-1} = n + 2 \overset{\text{IV}}{\iff} 2(n + 1) - n = n + 2 \iff 2 = 2 \quad \checkmark$$

Damit gilt $A(n)$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für $n \geq 2$. $\square$

7. Es seien 3 Punkte mit den Koordinaten (x_i, y_i) gegeben; es ist zu zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises, der durch die 3 Punkte geht (Umkreis) ist, falls

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Was bedeutet die Bedingung geometrisch?

Lösung:

8. Berechnen Sie die Determinante der beiden folgenden Matrizen nach einer beliebigen Methode. Es gibt in beiden Fällen eine sehr schnelle Methode.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir erkennen schnell:

$$\forall a_{i,5},\ i \in [1,5]_{\mathbb{N}} : a_{i,5} = \sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$$

Damit ist die letzte Spalte der Matrix eine Linearkombination der anderen und damit gilt

$$\det A = 0$$

□

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$

Lösung:
Mit der Umformung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III: III + II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

wird offensichtlich, dass die dritte Zeile lediglich ein Vielfaches von der ersten Zeile ist.
Damit sind die Zeilenvektoren linear abhängig und damit $\det B = 0$