# Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 13

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 27. Juni 2021

6. Gesucht ist die Matrix $A$ mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Lösung:**

Wir wissen, dass $A$ diagonalisierbar ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} A &= SDS^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 24 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

7. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

**Lösung:**
Das charakteristische Polynom $\chi(A)$ ist gegeben mit:

$$\chi(A) = (-\lambda)^2(1-\lambda) + 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

Wir erraten eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und erhalten nach dem Abspalten des Linearfaktors $(\lambda - 1)$:

$$\begin{array}{l} \big(-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1\big) \div \big(\lambda - 1\big) = -\lambda^2 - 1 \\ \underline{\quad \lambda^3 - \lambda^2} \\ \qquad\qquad -\lambda + 1 \\ \qquad\qquad \underline{\quad \lambda - 1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_2 = -i \quad \wedge \quad \lambda_3 = i$$

Wir berechnen nun die dazugehörigen Eigenvektoren:

- $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_1 = x_2$$

$$\implies \quad \operatorname{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\operatorname{Eig}(A, \lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -ix_2 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \operatorname{Eig}(A, -i) = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\operatorname{Eig}(A, \lambda_3) = \ker(A - \lambda_3 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = ix_2 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \operatorname{Eig}(A, i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\square$

8. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert $VDV^{-1}$)? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix $V$ lauten?

**Lösung:**
Wir sehen direkt, dass $\det(A) = 0$ und damit $\lambda_1 = 0$.
Für das charakteristische Polynom $\chi(A)$ gilt:

$$\chi(A) = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 4 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

Abspalten des Linearfaktors $(\lambda)$ ergibt:

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0 \implies {}^1\lambda_2 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 4$$

Wir berechnen nun die dazugehörigen Eigenvektoren:

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1 E) = \ker(A - \lambda_1 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -x_3 \quad \wedge \quad x_2 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 E) = \ker(A - \lambda_2 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = -2x_3 \quad \wedge \quad x_3 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_3 E) = \ker(A - \lambda_3 E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad x_1 = x_3 \quad \wedge \quad x_2 = 0$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(A, 4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit ist die Diagonalisierung von $A$ gegeben mit

$$A = VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\square$

[1] Die $pq$-Formel ersparen wir uns hier einmal.

9. Zeigen Sie:

(a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eigenwert gleich 0 ist.

**Lösung:**
Wir wissen, dass eine Matrix $A$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.
Es ist also äquivalent zu zeigen, dass wenn 0 Eigenwert von $A$ ist, dass $\det(A) = 0$ gilt.

- $\lambda = 0$ ist Eigenwert von $A \implies \det(A) = 0$:

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x \quad &\implies \quad (A - \lambda E)x = 0 \\ &\implies \quad \det(A - \lambda E) = 0 \\ &\implies \quad \det(A - 0 \cdot E) = 0 \\ &\implies \quad \det(A) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

- $\lambda = 0$ ist Eigenwert von $A \impliedby \det(A) = 0$:

$$\det(A) = 0 \quad \implies$$

$\square$

(b) Das charakteristische Polynom einer $(2 \times 2)$-Matrix lässt sich schreiben als

$$\lambda^2 - \text{spur}(A)\lambda + \det(A)$$

**Lösung:**
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} \chi(A) \quad &= \quad \det(A - \lambda E) \\ &= \quad (a - \lambda)(b - \lambda) - bc \\ &= \quad ab - a\lambda - b\lambda + \lambda^2 - bc \\ &= \quad \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - bc \\ &= \quad \lambda^2 - \text{spur}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$\square$

(c) A symmetrisch $\implies$ alle Eigenwerte sind reell. Gilt die Umkehrung?

**Lösung:**