Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 12

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 20. Juni 2021

5. Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt offensichtlich für das charakteristische Polynom von A:

$$|A - \lambda I| = (a_1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)^{n-1}$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben mit:

$$\lambda_1 = a_1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 1$$

$\square$

6. Wie lautet die QR-Zerlegung von
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}?$$
Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Lösung:
Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Spaltenvektoren an:[1]

$$\begin{aligned}
v_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \\
\\
v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
r_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle\, w_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44/25 \\ 33/25 \end{pmatrix} \\
w_2 &= \frac{r_2}{\|r_2\|} = \frac{5}{11}\begin{pmatrix} -44/25 \\ 33/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir Q mit
$$Q = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Da A quadratisch ist[2], gilt:
$$QR = A \quad \Longleftrightarrow \quad R = Q^T A$$
womit R gegeben ist, mit
$$R = Q^T A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Für das gegebene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ergibt sich dann:
$$\begin{aligned}
Ax = b \quad &\Longleftrightarrow \quad QRx = b \quad \Longleftrightarrow \quad Rx = Q^T b \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad 11x_2 = 1 \quad \wedge \quad 25x_1 + 23x_2 = 18 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{11} \quad \wedge \quad x_1 = \frac{7}{11} \\
&\Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

7. Gegeben sind
$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
Zeigen Sie, dass der Vektor x_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.

Lösung:

Berechnen des charakteristischen Polynoms von A_t:
$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & t \\ -2 & -1-t-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(-1-t-\lambda) + 2t = \lambda^2 + t\lambda + t - 1$$
Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Eigenwerte):
$$\lambda_{1,2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - t + 1} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2 - 4t + 4}{4}} = -\frac{t}{2} \pm \frac{t-2}{2}$$
$$\lambda_1 = -1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -t + 1$$
Bestimmen des Eigenraums/der Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda_1 & t & 0 \\ -2 & -1-t-\lambda_1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t & 0 \\ -2 & -t & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$\implies \quad 2x_1 + tx_2 = 0 \iff x_1 = -\frac{tx_2}{2}$$
$$\implies \quad E(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix} \right) \ni x_t$$
Insgesamt sind also die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -t + 1$ und x_t Eigenvektor zu λ_1. □

[1] Wir sehen, dass die Vektoren orthogonal sind.

[2] ... und damit auch Q

8. Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Bestimmen des charakteristischen Polynoms von A:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 8 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \ldots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 16\lambda + 12$$

Wir raten eine Nullstelle bei $\lambda_1 = -2$ und können dann wie folgt umformen:

$$\begin{array}{l} \big(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 16\lambda + 12\big) \div \big(\lambda + 2\big) = -\lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ \underline{\lambda^3 + 2\lambda^2} \\ \quad 5\lambda^2 + 16\lambda \\ \quad \underline{-5\lambda^2 - 10\lambda} \\ \qquad 6\lambda + 12 \\ \qquad \underline{-6\lambda - 12} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

Die Nullstellen des Restpolynoms können wir dann bequem mit der pq-Formel berechnen:

$$\lambda_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 6$$

Nun berechnen wir die dazugehörigen Eigenräume bzw. Eigenvektoren:

- $\lambda_1 = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad x_1 = -x_3 \quad \wedge \quad x_2 = -x_3 \\ &\Longrightarrow \quad E(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- $\lambda_2 = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad x_3 = -2x_2 \quad \wedge \quad x_1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad E(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 I) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- $\lambda_3 = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda_3 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3-\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -31 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad 9x_3 = 31x_2 \quad \wedge \quad 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{9}{31}x_3 \quad \wedge \quad 7x_1 = -\frac{49}{31}x_3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{9}{31}x_3 \quad \wedge \quad x_1 = -\frac{7}{31}x_3 \\ &\Longrightarrow \quad E(\lambda_3) = \ker(A - \lambda_3 I) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 31 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

□