Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 03

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 18. April 2021

5. Gegeben sind die folgenden linearen Abbildungen. Geben Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen an.

   (a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

   Lösung:
   Sei B_2 die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^2$ und B_3 die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Abbildungsmatrix von f_1 gegeben mit

   $$M_{B_3}^{B_2}(f_1) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

   $\square$

   (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

   Lösung:
   Sei B_2 die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^2$ und B_3 die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Abbildungsmatrix von f_2 gegeben mit

   $$M_{B_3}^{B_2}(f_2) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\square$

6. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden.
   Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?
   (a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \to \lambda x$

Lösung:
$f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \to \lambda x$
Sei B die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(f_a) = \begin{pmatrix} f_a(e_1) & f_a(e_2) & \dots & f_a(e_{n-1}) & f_a(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\square$

   (b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \lambda \to \lambda x$

Lösung:
$f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \lambda \to \lambda x$
Sei B_1 die kanonische Einheitsbasis von $\mathbb{R}$ ($\{1\}$) und B_n die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_{B_n}^{B_1}(f_b) = \big(f_b(e)\big) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\square$

7. Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -3x+z \\ -x+2y+5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

Lösung:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
Sei B die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(F) = \begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

□

(b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.

Lösung:

$$M_B^B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also ein Lineares Gleichungssystem, dessen Lösung eine Basis von $\ker F$ ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus können wir für den Kern folgern, dass $\ker F = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}^T\right)$ und $\operatorname{def} F = 1$. □

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\operatorname{im}(F))$.

Lösung:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \operatorname{def} F + \operatorname{rg} F \implies \operatorname{rg} F = 2$$

□

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

Lösung:
Wegen $\operatorname{rg} F = 2$ wissen wir, dass wir zwei linear unabhängige Vektoren aus M_B^B auswählen können, die dann automatisch eine Basis von $\operatorname{im} F$ ergeben.
Wir wählen $\operatorname{im} F = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T\right\}\right)$. □

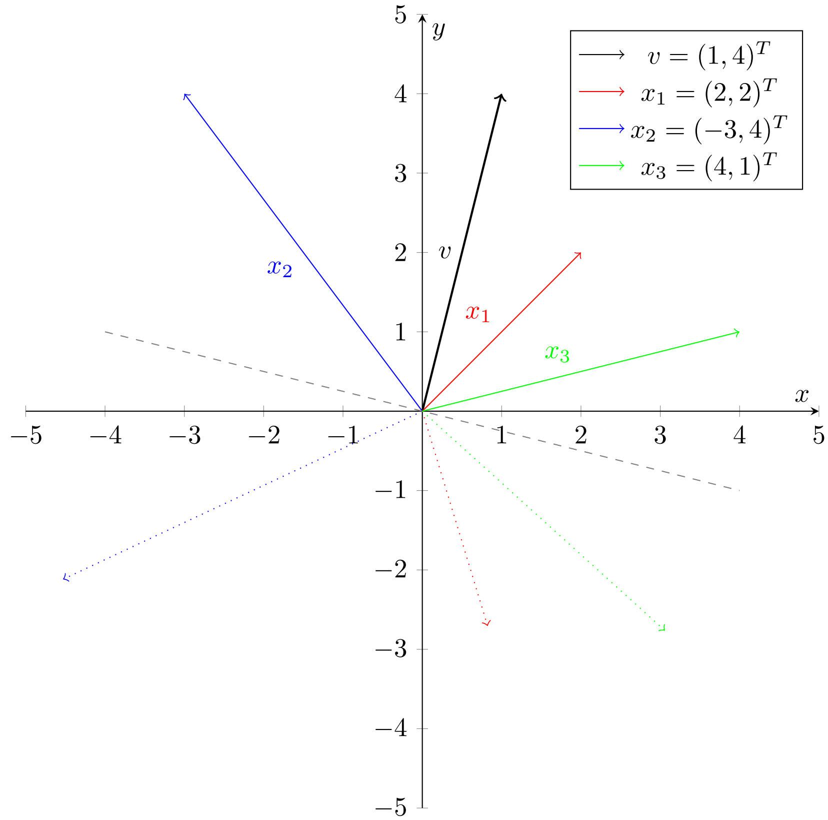
8. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \to x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v\rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot\rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm.

(a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).

Lösung:



(Hyperebenen im Fall $n = 2$ sind offensichtlich Geraden.)

(b) Zeigen Sie: S ist linear.

Lösung:
S ist ein Homomorphismus, genau dann wenn S additiv und homogen ist.
Additivität: $S(x) + S(y) = S(x + y)$

$$\begin{aligned}
& S(x) + S(y) && = S(x+y) \\
\equiv\quad & x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v + y - 2\frac{\langle v, y\rangle}{\|v\|^2}v && = (x+y) - 2\frac{\langle v, (x+y)\rangle}{\|v\|^2}v \\
\equiv\quad & (x+y) - 2\left(\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} + \frac{\langle v, y\rangle}{\|v\|^2}\right)v && = (x+y) - 2\frac{\langle v, (x+y)\rangle}{\|v\|^2}v \\
\equiv\quad & (x+y) - 2\frac{\langle v, (x+y)\rangle}{\|v\|^2}v && = (x+y) - 2\frac{\langle v, (x+y)\rangle}{\|v\|^2}v \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Homogenität: $\lambda S(x) = S(\lambda x)$

$$\begin{aligned}
& \lambda S(x) && = S(\lambda x) \\
\equiv\quad & \lambda\left(x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v\right) && = \lambda x - 2\frac{\langle v, \lambda x\rangle}{\|v\|^2}v \\
\equiv\quad & \lambda x - 2\lambda\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v && = \lambda x - 2\frac{\langle v, \lambda x\rangle}{\|v\|^2}v \\
\equiv\quad & \lambda x - 2\frac{\langle v, \lambda x\rangle}{\|v\|^2}v && = \lambda x - 2\frac{\langle v, \lambda x\rangle}{\|v\|^2}v \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Damit ist S ein Homomorphismus. $\square$

(c) Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j, 1 \leq i, j \leq n$. Sei weiter $f(x) := Ax$. Zeigen Sie: $\operatorname{rg}(f) = 1$.

Lösung:
Wir visualisieren uns einmal die Matrix A wie folgt:

$$A := \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_{n-1} & v_1w_n \\ v_2w_1 & v_2w_2 & \dots & v_2w_{n-1} & v_2w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}w_1 & v_{n-1}w_2 & \dots & v_{n-1}w_{n-1} & v_{n-1}w_n \\ v_nw_1 & v_nw_2 & \dots & v_nw_{n-1} & v_nw_n \end{pmatrix}$$

Direkt wird ersichtlich, dass gilt

$$f(x) = Ax = \left(x_1w_1v + x_2w_2v + \ldots + x_{n-1}w_{n-1}v + x_nw_nv\right) = \langle w, x\rangle\, v$$

Offensichtlich erzeugt f nur eine Gerade mit Richtungsvektor v.
Damit ist $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} Ax = \dim \operatorname{span}(v) = 1$. $\square$

(d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S. Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.

Lösung:
Sei H gegeben mit

$$H = I - \frac{2(v \oplus v)}{\|v\|^2}$$

Dann gilt

$$Hx = x - \frac{2(v \oplus v)x}{\|v\|^2} \overset{(c)}{=} x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} v = S(x)$$

Sei B die kanonische Einheitsbasis vom $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$M_B^B(S) = \begin{pmatrix} S(e_1) & S(e_2) & \cdots & S(e_{n-1}) & S(e_n) \end{pmatrix} = I - \frac{2}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_n^2 \end{pmatrix}$$

(e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\ker(S)$ und $\operatorname{im}(S)$.

Lösung:
S ist ein Homomorphismus. Damit ist S nun isomorph, wenn S bijektiv ist.
Aus der Abbildungsmatrix $M_B^B(S)$ aus (d) können wir direkt sehen, dass $\operatorname{rg} S = n$ gilt. Damit ist S bereits surjektiv und wegen des Rangsatzes mit

$$\dim \mathbb{R}^n = \operatorname{rg} S + \operatorname{def} S \implies \operatorname{def} S = 0$$

ist S injektiv und damit insgesamt bijektiv.
Da $S(S(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (nach Definition) ist S bereits involutorisch (selbstinvers). $\square$