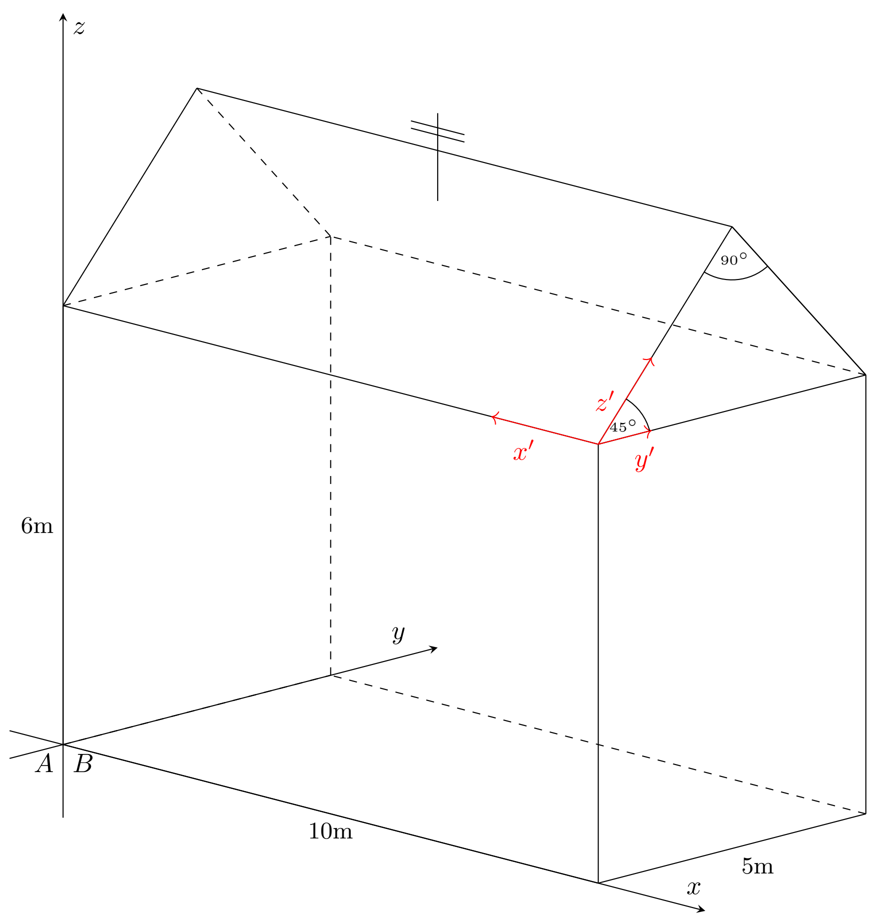
Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 07

Patrick Gustav Blaneck

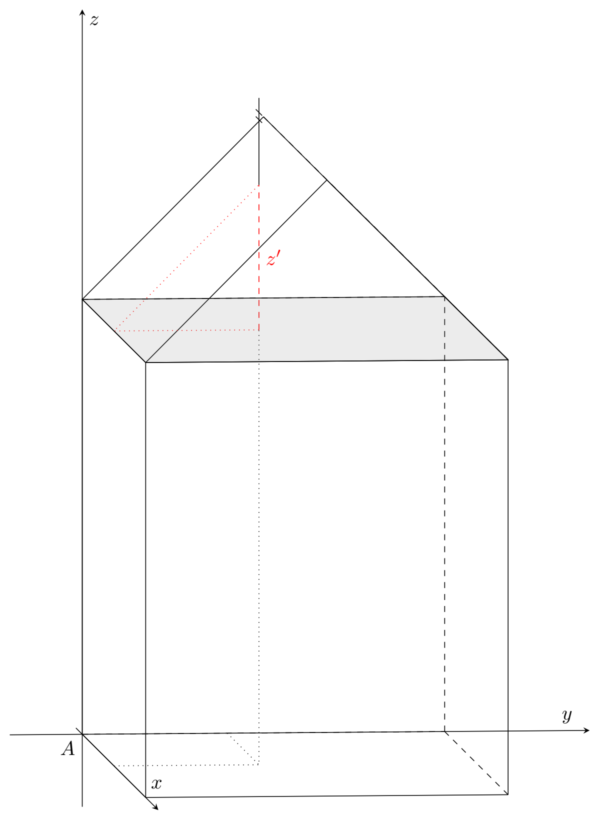
Abgabetermin: 16. Mai 2021

5. Ein Architekt plant, auf dem Dach eines Hauses eine Antenne anzubringen (siehe Skizze). Von seinem Bezugspunkt A aus gesehen, soll sie senkrecht über der Stelle, die auf der Grundfläche des Hauses 5m nach rechts (x-Richtung) und 2m nach hinten (y-Richtung) liegt, auf dem Dach angebracht werden.



(a) Berechnen Sie den Anfangspunkt der Antenne auf dem Dach vom Bezugspunkt A aus gesehen.

Lösung:
Wir drehen uns einmal unsere Darstellung des Hauses wie folgt:



Die x- bzw. y-Koordinaten des Antennenfußes sind aus der Aufgabe bereits gegeben mit $C_x = 5$ und $C_y = 2$.

Aus der Zeichnung wird weiterhin ersichtlich, dass sich die z-Koordinate zum einen aus der Höhe des Hauses, und zum anderen aus der gekennzeichneten Strecke z' zusammensetzt. Es gilt:

$$C_z = 6 + z' = 6 + \tan(45°) \cdot 2 = 6 + 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8$$

Damit befindet sich der Anfangspunkt der Antenne bei $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^T$. □

(b) Der Dachdecker, der an dieser Stelle Dachziegel weglassen muss, nimmt als Bezugssystem die rechte untere Ecke des Daches B und als Basisvektoren die eingezeichneten Richtungsvektoren x', y' und z' (der Länge 1). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C bzgl. seines Koordinatensystems.

Lösung:
Sei $\mathcal{A}$ die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{D}$ die Dachdeckerbasis.
Dann wissen wir, dass unsere Basis zuerst wie folgt verändert wird:

$$T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Es gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

und damit:

$$T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Möchten wir nun den Punkt B in unserer Basis $\mathcal{D}$ darstellen, gilt:

$$B = K_{\mathcal{D}}(B) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt, dass unser Koordinatensystem wie folgt verschoben wird:

$$T(x', y', z') \to (x' + 10, y' + 6, z' - 6\sqrt{2}).$$

Stellen wir nun C in Basis $\mathcal{D}$ dar und wenden danach die beschriebene Translation an, erhalten wir:

$$C = K_{\mathcal{D}}(C) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$T(-5, -6, 8\sqrt{2}) \to (5, 0, 2\sqrt{2}).$$

□

(c) Wie lauten die Koordinaten des Bezugpunktes A des Architekten im Koordinatensystem des Dachdeckers?

Lösung:
Wieder müssen wir zuerst eine Koordinatentransformation und anschließend eine Translation anwenden:

$$A = K_{\mathcal{D}}(A) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T(0, 0, 0) \to (10, 6, -6\sqrt{2})$$

□

(d) Wie muss die Transformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Dachdeckers in das des Architekten umrechnet? Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie das Ergebnis von (b) in das Ergebnis von (a) umrechnen.

Lösung:
Siehe Aufgabenteil (b).

(e) Wie muss die Transformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Architekten in das des Dachdeckers umrechnet?

Lösung:
Für die Basistransformation gilt:

$$T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = \left(T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1} = \mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Für die Translation gilt:

$$T(x, y, z) \to (x + 10, y, z + 6)^1$$

□

[1] $T(x) = x - (-B)$

6. Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinanten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a)

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 \implies |A_2| = c \cdot |A_1| = cd$$

□

(b)

$$A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{43} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c \cdot A_1 \implies |A_3| = {}^{2}1 \cdot c^4 \cdot |A_1| = c^4 d$$

□

[2] $\forall M \in K^{n \times n} : \det(\lambda M) = \lambda^n \cdot \det(M)$, da jede Zeile mit λ skaliert wird.

(c)

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_4 = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |A_4| = |A_1| \cdot (-1) = -d$$

□

(d)

$$A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_5 = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |A_5| = |A_1| \cdot 1 = d$$

□

(e)

$$A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 \implies |A_6| = 1 \cdot c \cdot |A_1| = cd$$

□

(f)

$$A_7 = (A_1)^{-1}$$

Lösung:
Wir wissen, dass wir mittels elementarer Zeilenoperationen (äquivalent zur linksseitigen Multiplikation mit Elementarmatrizen) A_1 zur Einheitsmatrix umformen können.
Sei $Z^{(i)}$ eine beliebige Elementarmatrix[3]. Damit gilt:

$$I = \underbrace{\left(Z^{(n)} \cdot Z^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot Z^{(2)} \cdot Z^{(1)}\right)}_{(A_1)^{-1}} \cdot A_1 = (A_1)^{-1} \cdot A_1$$

$$\implies |I| = \left|(A_1)^{-1} \cdot A_1\right| = \left|(A_1)^{-1}\right| \cdot |A_1|$$

$$\iff \left|(A_1)^{-1}\right| = \frac{1}{|A_1|} \implies \left|(A_1)^{-1}\right| = \frac{1}{d}$$

□

[3]Hier betrachten wir nur Zeilenoperationen.

7. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Elementarmatrizen M_1 und M_2 mit $M_1 M_2 A = E$.

Lösung:
Es gilt:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
Damit gilt:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =^{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
und schlussendlich:
$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = M_1 M_2 A$$
□

(b) Stellen Sie A^{-1} als Produkt zweier Elementarmatrizen dar.

Lösung:
Siehe Aufgabenteil (a).

(c) Schreiben Sie A als Produkt von zwei Elementarmatrizen.

Lösung:
Es gilt:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} =^{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
□

[4] Das wird aus dem Kontext ersichtlich: Für A^{-1} wird zuerst fünfmal I auf II addiert und anschließend wird II mit $\frac{1}{2}$ skaliert.
[5] Analoge Argumentation zu A^{-1}.

8. Gegeben seien drei Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit folgenden Eigenschaften:
   - A ist regulär mit $\det(A) = 10$.
   - Für B gilt: $\det(A \cdot B) = 1$.
   - Für C gilt: $B \cdot C$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar.

   berechnen Sie:

   (a) $\det(C \cdot A)$

   Lösung:
   Wir wissen:

   $$B \cdot C \text{ singulär} \iff \det(B \cdot C) = 0 \iff B \text{ nicht invertierbar} \vee C \text{ nicht invertierbar}$$

   und

   $$\det(A \cdot B) = 1 \neq 0 \implies A \text{ invertierbar} \wedge B \text{ invertierbar}$$

   Damit gilt dann schließlich:

   $$A \text{ invertierbar} \wedge B \text{ invertierbar} \wedge C \text{ nicht invertierbar} \implies \det(C \cdot A) = 0$$

   □

   (b) $\det(-A \cdot B^{-1})$

   Lösung:
   Wir wissen:

   $$\det(A \cdot B) = 1 \wedge \det(A) = 10 \implies \det(B) = \frac{1}{10} \implies \det(B^{-1}) = 10$$

   und

   $$\det(-A) =^{6} (-1)^2 \cdot \det(A) = \det(A)$$

   Damit gilt schließlich:

   $$A \text{ invertierbar} \wedge B \text{ invertierbar} \implies \det(-A \cdot B^{-1}) = \det(-A) \cdot \det(B^{-1}) = 100$$

   □

   (c) $\det(B \cdot C - A \cdot B^{-1} \cdot C)$

   Lösung:
   Wir wissen, dass Matrixmultiplikation (rechts-)distributiv ist mit

   $$(A + B)C = AC + BC$$

   Damit gilt:

   $$\det(B \cdot C - A \cdot B^{-1} \cdot C) = \det((B - A \cdot B^{-1}) \cdot C) =^{7} \det(B - A \cdot B^{-1}) \cdot \det C = 0$$

   □

[6] $\forall M \in K^{n\times n} : \det(\lambda M) = \lambda^n \cdot \det(M)$, da jede Zeile mit λ skaliert wird.
[7] C ist nicht invertierbar $\iff |C| = 0$

(d) $\det(C + C)$

Lösung:
Wir wissen:

$$\det(C + C) = \det(2C) = 2^2 \det(C) = 4 \det(C) \wedge C \text{ nicht invertierbar } \implies \det(C + C) = 0$$

$\square$