Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 09

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 30. Mai 2021

5. Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe folgender Schritte:

(a) Bestimmen Sie den Kern der Abbildungsmatrix:

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$\square$

(b) Erraten Sie eine spezielle Lösung.

Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Lösung:
Es gilt:

$$\operatorname{Sol}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\square$

6. Gegeben ist das lineare Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren

(a) keine Lösung,

Lösung:

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \emptyset \iff b \notin \mathrm{span}\,(A) \iff \mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(A, b)$$

Wir definieren A' wie folgt:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(A, b) \iff |A| = 0 \wedge |A'| \neq 0$$

mit

$$|A| = \lambda + 1 + 4 - 1 - 2\lambda - 2 = 2 - \lambda \implies |A| = 0 \iff \lambda = 2$$

$$|A'| = 2\alpha + 5 + 12 - 3 - 10 - 4\alpha = 4 - 2\alpha \implies |A'| \neq \iff \alpha \neq 2$$

Damit existiert keine Lösung genau dann, wenn $\lambda = 2$ und $\alpha \neq 2$. □

(b) unendlich viele Lösungen,

Lösung:

$$n = 3 \implies ((|A| = 0 \wedge \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b)) \implies |\mathrm{Sol}(A, b)| = \infty)$$

Wir erkennen, dass $\lambda = 2 \implies |A| = 0$ und $\mathrm{rank}(A) = 2$.
Da $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, ist unsere Bedingung erfüllt, wenn $|A'| = 0$ mit:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$|A'| = 2\alpha + 5 + 12 - 3 - 10 - 4\alpha = 4 - 2\alpha \implies |A'| = 0 \iff \alpha = 2$$

Damt existieren unendlich viele Lösungen genau dann, wenn $\lambda = \alpha = 2$. □

(c) eine eindeutige Lösung?

Lösung:

$$n = 3 \implies (|A| \neq 0 \implies \text{rank}(A) = \text{rank}(A, b) \implies |\text{Sol}(A, b) = 1|)$$

$$|A| = \lambda + 1 + 4 - 1 - 2\lambda - 2 = 2 - \lambda \implies |A| \neq 0 \iff \lambda \neq 2$$

Damit existiert eine eindeutige Lösung genau dann, wenn $\lambda \neq 2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

7. Anna, Berta und Carla kaufen im Schmuckbedarfsgroßhandel Perlen unterschiedlicher Qualität.

   Es gibt drei verschiedene Sorten. Anna kauft jeweils 10 Perlen jeder Sorte und bezahlt 50 Euro. Berta nimmt auch 30 Perlen, aber nur von Sorte 1 und 2. Sie nimmt jeweils gleich viele und bezahlt 60 Euro. Carla bezahlt per Kreditkarte für ihre 60 Perlen 110 Euro. Sie wählt 25 von Sorte 1, 25 von Sorte 2 und 10 von Sorte 3.

   Welche Ober- und Untergrenzen für die Einzelpreise ergeben sich?

Lösung:

Es ist gegeben:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 0 \\ 25 & 25 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 10 & 50 \\ 15 & 15 & 0 & 60 \\ 25 & 25 & 10 & 110 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 10 & 50 \\ 15 & 15 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 15 & 15 & 75 \\ 15 & 15 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit sieht man direkt, dass

$$a \in [0, 4]\,, \quad b = 4 - a, \quad c = 1.$$

Es gilt für die Grenzen:

Perle	Obergrenze	Untergrenze
a	4	0
b	4	0
c	1	1

8. Welchen Rang haben die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ mit $n \geq 2$?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   Lösung:
   Wir schauen uns die folgende Unterdeterminante an:

   $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 28 - 16 + 160 - 28 + 1 = 99 \neq 0 \implies \operatorname{rank}(A) = 3$$

   □

   (b) $b_{ij} = \begin{cases} -i, & i \text{ gerade} \\ i, & i \text{ ungerade} \\ n, & i = n, j = 1 \\ n-1, & i = n, j = 2 \end{cases}$

   Lösung:

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \dots & n \\ 1 & -2 & 3 & -4 & \dots & n-1 \end{pmatrix}^T$$

   Wir wissen, dass $\operatorname{row\,rank} B = \operatorname{col\,rank} B$ und $\operatorname{rank} B \leq 2$.
   Offensichtlich sind $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n & n-1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Damit ist $\operatorname{rank} B = 2$. □