Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 10

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 06. Juni 2021

5. In der Elektrotechnik ergeben sich eine Widerstandsmatrix R und ein Quellspannungsvektor U:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Stromvektor I, der sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$R \cdot I = U$$

ergibt. Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Cramerschen Regel.

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Nach der Cramerschen Regel gilt:[1]

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{-1 \cdot (5 - 24) + 1 \cdot (20 - 27)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{-1 \cdot (8 - 10) + 1 \cdot (9 - 5)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{32 + 54 + 5 - 40 - 9 - 24}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Damit ist der Stromvektor I gegeben mit $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. □

[1] $|R| = -1 \cdot (1 - 6) + 1 \cdot (4 - 3) = 6$

6. Gegeben seien die Messpunkte $(t_i; y_i)$ für $i = 1, \dots, 3$:

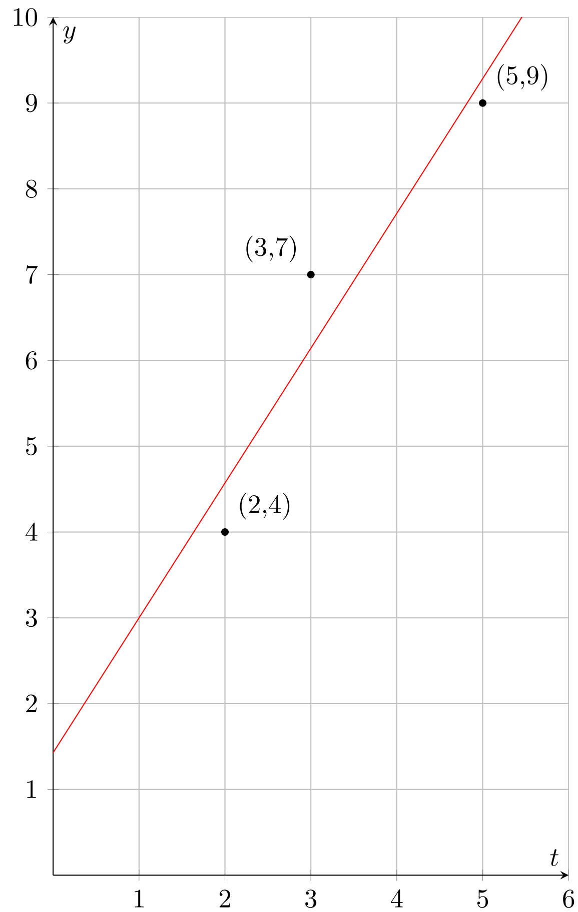
$$(3; 7), (2; 4), (5; 9).$$

Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf, wenn folgende Beziehung zwischen den y und den t gilt:

$$y = a + b \cdot t$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate. Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:



Wir schreiben das gegebene LGS wie folgt:

$$Ax = \tilde{b} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rank}(A) = 2 = n \quad \implies \quad A^T A x = A^T b \quad \iff \quad x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

Dann gilt nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\begin{aligned}
x_s &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T b \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 38 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 38 & -10 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 18 & 8 & -12 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 11/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y = a + b \cdot t = \frac{10}{7} + \frac{11}{7} \cdot t$$

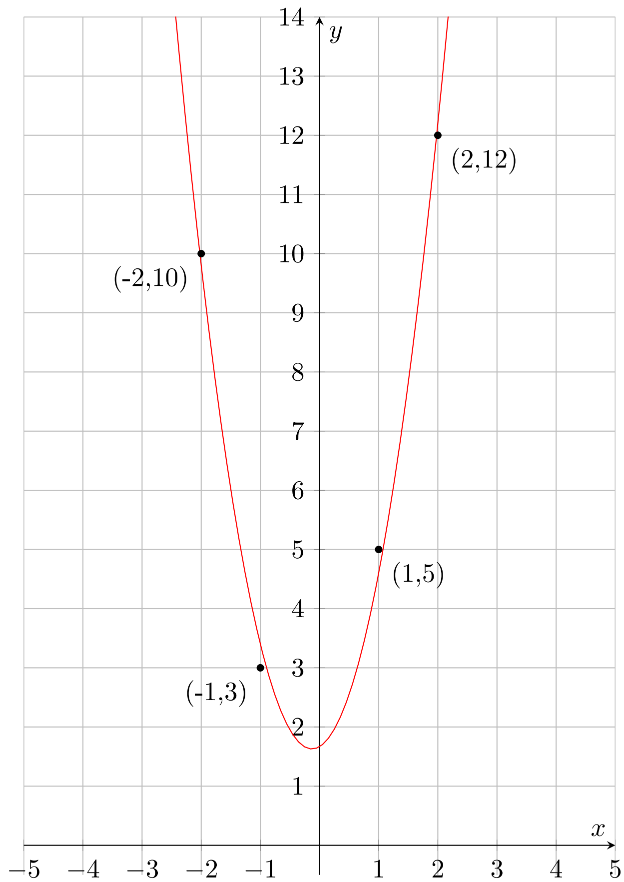
$\square$

7. Ermitteln Sie das Ausgleichspolynom zweiten Grades zu den Punkten

$$(-2;10),(-1;3),(1;5),(2;12).$$

Stellen Sie die Normalgleichung auf und lösen Sie diese. Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Lösungskurve an.

Lösung:



Wir suchen ein Ausgleichspolynom $p(x)$ der Form

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Mit den gegebenen Punkten erhalten wir das folgende LGS:

$$Ax = \tilde{b} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rank}(A) = 3 = n \quad \Longrightarrow \quad A^T A x = A^T b \quad \iff \quad x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
x &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T b \\
x &= \left(\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \\
x &= \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \\
x &\overset{(*)}{=} \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -25 \\ 0 & 9 & 0 \\ -25 & 0 & 85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \\
x &= \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 15 & -15 & -15 & 15 \\ -18 & -9 & 9 & 18 \\ -15 & 60 & 60 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \\
x &= \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 210 \\ 54 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 3/5 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit gilt insgesamt:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \frac{7}{3} \cdot x^2 + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{5}{3}$$

$\square$

$$(*) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 34 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 10 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & -\frac{5}{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/18 & 0 & 17/18 \end{array}\right)$$

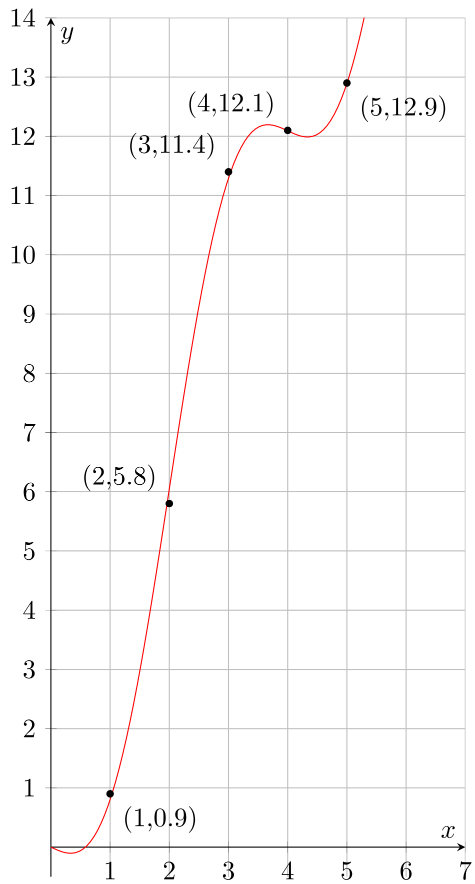
8. Eine Messreihe ergibt zu den Zeiten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ in Sekunden folgende Temperaturwerte:

t Sekunden	1	2	3	4	5
$y(t)$°C	0.9	5.8	11.4	12.1	12.9

Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf und bestimmen Sie diese nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn folgende Beziehung zwischen y und t gilt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Lösung:



Mit den gegebenen Daten erhalten wir folgendes LGS:

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 2 & -\sin\pi \\ 3 & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ 4 & -\sin 2\pi \\ 5 & -\sin\frac{5\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rank}(A) = 2 = n \quad \Longrightarrow \quad A^T A x = A^T b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

Dann gilt nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$
\begin{aligned}
x_s &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T b \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 55 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 12 & 12 \\ -52 & 6 & 64 & 12 & -40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 471.6 \\ 346.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.02308 \\ 2.22308 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit gilt insgesamt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3.02308 \cdot t + 2.22308 \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$\square$