Lineare Algebra 2

Hausaufgabenblatt 05

Patrick Gustav Blaneck

Abgabetermin: 03. Mai 2021

5. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert?

Begründen Sie Ihre Aussagen und bestimmen Sie gegebenenfalls das Produkt der Matrizen.

(a) $A \cdot B$

Lösung:

$$A \cdot B = \overset{3\times\mathbf{3}}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \quad \lightning \quad (3 \neq 2)$$

(b) $C \cdot B$

Lösung:

$$C \cdot B = \overset{3\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 33 & 37 \\ 21 & 41 \\ 27 & 39 \end{pmatrix}$$

(c) $A \cdot C$

Lösung:

$$A \cdot C = \overset{3\times\mathbf{3}}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{3}\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 53 & 82 \\ 51 & 93 \\ 20 & 43 \end{pmatrix}$$

(d) $A \cdot B \cdot C$

Lösung:

$$A \cdot B \cdot C = \overset{3\times\mathbf{3}}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{3}\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \quad \lightning \quad (3 \neq 2 \wedge 2 \neq 3)$$

(e) $A \cdot C \cdot B$

Lösung:

$$A \cdot C \cdot B = \overset{3\times\mathbf{3}}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{3}\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 53 & 82 \\ 51 & 93 \\ 20 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 453 & 569 \\ 450 & 618 \\ 183 & 275 \end{pmatrix}$$

(f) $C \cdot B \cdot A$

Lösung:

$$C \cdot B \cdot A = \overset{3\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{3}\times 3}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \lightning \quad (2 \neq 3)$$

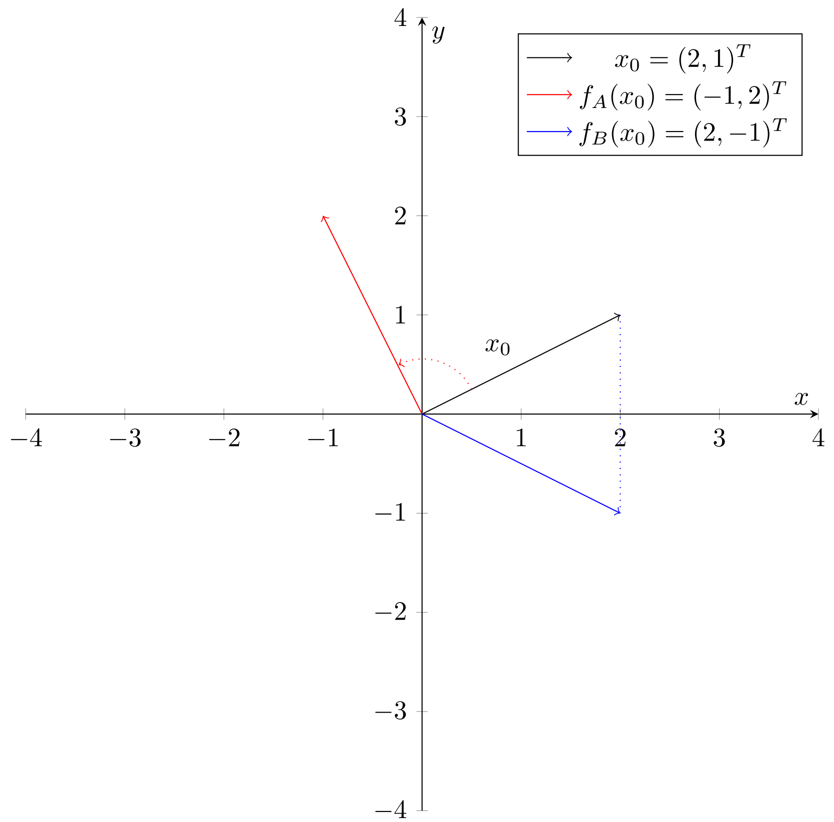
6. Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix A_ϕ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ϕ gedreht, die Matrix B spiegelt selbigen an der x-Achse.

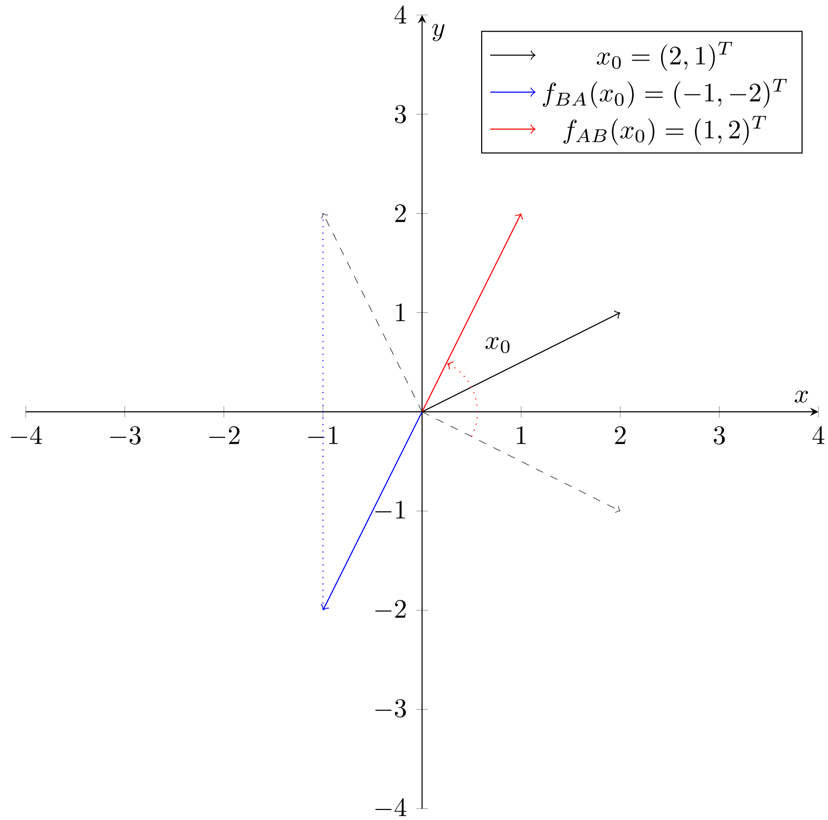
(a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{\frac{\pi}{2}}$, indem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(x_0) = A \cdot x_0$ und $f_B(x_0) = B \cdot x_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Lösung:



(b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(x) = A \cdot B \cdot x$ und $f_{BA}(x) = B \cdot A \cdot x$ von x_0 ein.

Lösung:



(c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(x)$ und $f_B(x)$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungsmatrizen A^{-1} und B^{-1} auf.

Lösung:

Wir wissen, dass die generelle Inverse von A_ϕ einen Vektor um den Winkel $-\phi$ drehen muss. Also gilt:

$$A_\phi^{-1} = A_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Für den Fall $\phi = \frac{\pi}{2}$ gilt dann:

$$A_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da zweimaliges Spiegeln eines Vektors an einer beliebigen Achse wieder den Vektor selbst ergibt, gilt aus dem Kontext bereits, dass $B^{-1} = B$. □

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen f_{AB}^{-1} und f_{BA}^{-1}.

Lösung:
Wir wissen, dass die Abbildungsmatrizen von f_{AB} und f_{BA} jeweils AB bzw. BA sind.
Damit gilt auch:

$$f_{AB}^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f_{AB}^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus (b) und (d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(x_0)$ und $f_{BA}(x_0)$, die Sie zeichnerisch bei (b) erhalten haben mit den Matrizen aus (d) multiplizieren.

Lösung:

$$f_{AB}^{-1}(f_{AB}(x_0)) = BA^{-1}f_{AB}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0 \quad \checkmark$$
$$f_{BA}^{-1}(f_{BA}(x_0)) = A^{-1}Bf_{AB}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0 \quad \checkmark$$

□

7. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Inverse zu folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -5/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5/2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-bc & 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & -c & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1-bc & 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & -c & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-bc+{}^{c}\!/\!{}_{a} & -{}^{1}\!/\!{}_{a} & 1 & {}^{1}\!/\!{}_{a}-b \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & -c & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a(bc-1)-c} & -\frac{a}{a(bc-1)-c} & \frac{ab-1}{a(bc-1)-c} \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & \frac{a(bc-1)}{a(bc-1)-c} & \frac{-ac}{a(bc-1)-c} & \frac{a}{a(bc-1)-c} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{a(bc-1)-c} & \frac{ac}{a(bc-1)-c} & \frac{a}{a(bc-1)-c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a(bc-1)-c} & -\frac{a}{a(bc-1)-c} & \frac{ab-1}{a(bc-1)-c} \end{array}\right)$$

$$\overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{bc-1}{a(bc-1)-c} & \frac{-c}{a(bc-1)-c} & \frac{1}{a(bc-1)-c} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{a(bc-1)-c} & \frac{ac}{a(bc-1)-c} & \frac{a}{a(bc-1)-c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a(bc-1)-c} & -\frac{a}{a(bc-1)-c} & \frac{ab-1}{a(bc-1)-c} \end{array}\right) = \frac{1}{a(bc-1)-c} \begin{pmatrix} bc-1 & -c & 1 \\ -c & ac & -a \\ 1 & -a & ab-1 \end{pmatrix}$$

$\square$

[1] Wir verzichten hier auf die Umformungsschritte. Die Aufgabe ist schon umständlich genug.
[2] Hier auch …
[3] … und der Schritt war dann ausnahmsweise mal trivial.

8. Die Spur einer quadratischen Matrix $M = (m_{ij})$ ist definiert durch

$$\text{trace}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

Lösung:
Für einen Homomorphismus trace(M) muss gelten:
trace(M) ist homogen: $\lambda\,\text{trace}(M) = \text{trace}(\lambda M)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \lambda\,\text{trace}(M) && = \text{trace}(\lambda M) \\ \equiv\quad & \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ij} && = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_{ij} \\ \equiv\quad & \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ij} && = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \quad \checkmark \end{aligned}$$

trace(M) ist additiv: $\text{trace}(M) + \text{trace}(M') = \text{trace}(M + M')$:

$$\begin{aligned} & \text{trace}(M) + \text{trace}(M') && = \text{trace}(M + M') \\ & \sum_{i=1}^{n} m_{ij} + \sum_{i=1}^{n} m'_{ij} && = \sum_{i=1}^{n} (m_{ij} + m'_{ij}) \\ & \sum_{i=1}^{n} (m_{ij} + m'_{ij}) && = \sum_{i=1}^{n} (m_{ij} + m'_{ij}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist trace(M) insgesamt ein Homomorphismus. □

(b) Sei $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{B} = \hat{A}^T$.

i. Verifizieren Sie $\text{trace}(\hat{A}\hat{B}) = \text{trace}(\hat{B}\hat{A})$.

Lösung:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A^T = B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
Dann gilt offensichtlich:

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(AA^T) = \text{trace}((A^T A)^T) = \text{trace}((BA)^T) \overset{\text{Def.}}{=} \text{trace}(BA)$$

□

ii. Zeigen Sie, dass $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Lösung:

$$\text{trace}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \text{trace}(BA)$$

□

iii. Zeigen Sie, dass $\operatorname{trace}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

Lösung:
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^{1\times 1}$. Dann gilt:

$$\operatorname{trace}(A^T A) = \operatorname{trace}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{trace}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \lightning$$

$\square$

Das nächste Mal dann bitte eine sinnvolle Notation wählen!
$A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ ist nämlich eine 1×1-Matrix. :)

Angenommen, die Aufgabenstellung wäre:
Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\operatorname{trace}(A^T A) = 0$ genau dann gilt, wenn $A = O_{m,n}$.
Dann gilt nach (b)ii.:

$$\begin{aligned} & \operatorname{trace}(AA^T) && = 0 \\ \equiv\ & \sum_{i=1}^{m} (AA^T)_{ii} && = 0 \\ \equiv\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}A^T_{ji} && = 0 \\ \equiv\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2 && = 0 \wedge \forall i,j : A_{ij}^2 \geq 0 \implies A = O_{m,n} \end{aligned}$$

iv. Man zeige weiter: $\operatorname{trace}(ABC) = \operatorname{trace}(BCA)$, aber i.a. $\operatorname{trace}(ABC) \neq \operatorname{trace}(BAC)$.

Lösung:
Wir wissen:

$$\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA).$$

Sei $D = BC$. Dann gilt:

$$\operatorname{trace}(ABC) = \operatorname{trace}(AD) = \operatorname{trace}(DA) = \operatorname{trace}(BCA)^4$$

$\square$

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\operatorname{trace}(ABC) = \operatorname{trace}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{trace}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{trace}(BAC) =^5 \operatorname{trace}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \lightning$$

[4] Dies gilt insgesamt für zyklische Vertauschung.
[5] $AC = O_{2,2}$