1. Die Verspätung eines Zuges in einem bestimmten Bahnhof werde durch die stetige Zufallsvariable X beschrieben und habe die Dichtefunktion (in Minuten)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Erfüllt die angegebene Funktion $f(x)$ die Anforderung an eine Dichtefunktion?

Lösung:

Es muss gelten:

- f ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- f ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- f ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^4 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right]_0^4 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist $f(x)$ eine Dichtefunktion. □

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right)\mathrm{d}\,t = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x/2 - x^2/16 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

(c) Sie haben bereits eine Minute auf den Zug gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die heutige Verspätung zwischen zwei und drei Minuten beträgt?

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
P(2 \leq X \leq 3 \mid X \geq 1) &= \frac{P(2 \leq X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\
&= \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} \\
&= \frac{F(3) - F(2)}{1 - F(1)} \\
&= \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}} \\
&= \frac{15 - 12}{9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□