Stochastik

Hausaufgabenblatt 12

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 10. Januar 2022

1. 12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Hektarerträge (in Doppelzentner):

   35.6 33.7 37.8 31.2 37.2 43.1 35.8 36.6 37.1 34.9 35.6 34.0

   Aus Erfahrung weiß man, dass die Hektarerträge als eine Realisierung unabhängiger $\mathcal{N}(\mu, (\sqrt{3})^2)$ - verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

   Geben Sie für den Erwartungswert μ ein konkretes Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 an.

Lösung:

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Wir wissen, dass gilt:

$$X := \text{Hektarerträge (in Doppelzentner)} \sim \mathcal{N}(\mu, (\sqrt{3})^2)$$

Ein geeigneter Schätzer für μ ist bekanntermaßen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Für unsere Verteilung sind die relevanten Kennzahlen übrigens:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \cdot 432.6 = 36.05$$

und

$$\sigma^2 = 3 \implies \sigma = \sqrt{3}$$

Die normierte Zufallsvariable U mit

$$U = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

ist dann standarnormalverteilt mit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Es muss gelten:

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& -c && \leq U \leq c \\
\equiv\ & -u_{(1+\gamma)/2} && \leq U \leq u_{(1+\gamma)/2} \\
\equiv\ & -u_{1-\alpha/2} && \leq U \leq u_{1-\alpha/2} \\
\equiv\ & -u_{1-\alpha/2} && \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \leq u_{1-\alpha/2} \\
\equiv\ & \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} && \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1-\alpha \\
\equiv\ & P(36.05 - u_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 36.05 + u_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(36.05 - u_{0.975} \cdot \frac{1}{2} \leq \mu \leq 36.05 + u_{0.975} \cdot \frac{1}{2}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(36.05 - 1.960 \cdot \frac{1}{2} \leq \mu \leq 36.05 + 1.960 \cdot \frac{1}{2}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(35.07 \leq \mu \leq 37.03) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{12} mit

$$I_{12} = [35.07, 37.03]$$

$\square$

2. Die durchschnittliche Länge von Metallstiften soll geschätzt werden. Eine Stichprobe vom Umfang 36 liefert eine mittlere Länge von $\bar{x} = 38.5$mm. Aus früheren Untersuchungen sei bekannt, dass die Länge der Metallstifte normalverteilt ist und die produzierende Maschine mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1.8$mm arbeitet.

   (a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die erwartete Metallstiftlänge an.

Lösung:

Wir wissen, dass gilt:

$$X := \text{Länge von Metallstiften (in mm)} \sim \mathcal{N}(\mu, 1.8^2)$$

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Die relevanten Kennzahlen sind bereits gegeben.

Die normierte Zufallsvariable U mit

$$U = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

ist dann standarnormalverteilt mit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
& P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1 - \alpha \\
\equiv \quad & P(38.5 - u_{0.975} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 38.5 + u_{0.975} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{36}}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(38.5 - u_{0.975} \cdot \frac{3}{10} \leq \mu \leq 38.5 + u_{0.975} \cdot \frac{3}{10}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(38.5 - 1.960 \cdot \frac{3}{10} \leq \mu \leq 38.5 + 1.960 \cdot \frac{3}{10}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(37.912 \leq \mu \leq 39.088) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{36} mit

$$I_{36} = [37.912, 39.088]$$

$\square$

(b) Welchen Umfang muss eine Stichprobe haben, damit das Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die mittlere Stiftlänge halb so breit ist, wie das unter (a) berechnete?

Lösung:

Offensichtlich gilt für die Intervallbreite I_B:

$$I_B := c_o - c_u = \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$I_B \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Um die Breite des Konfidenzintervalls zu halbieren, muss n also 4-mal so groß werden.

Wir erhalten $n = 36 \cdot 4 = 144$. □

3. Das Gewicht X, das ein Apfel einer bestimmten Sorte hat, sei normalverteilt. Die Untersuchung einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ ergab einen Mittelwert $\bar{x} = 98$g und eine empirische Standardabweichung $s = 0.75$g. Geben Sie den Bereich an, in dem die Varianz mit 95%-iger Sicherheit liegt.

Lösung:

Wir wissen, dass gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.75^2)$$

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Ein geeigneter Schätzer für $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ ist bekanntermaßen

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Für unsere Verteilung gilt dann:

$$s^2 = 0.75^2 = 0.5625$$

Die Zufallsvariable Z mit

$$Z = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

ist dann χ^2-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Es muss gelten:

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& c_1 && \leq Z \leq c_2 \\
\equiv \quad & \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) && \leq Z \leq \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv \quad & \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) && \leq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv \quad & \frac{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(n-1) \cdot s^2} && \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{(n-1) \cdot s^2} \\
\equiv \quad & (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} && \geq \sigma^2 \geq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
\equiv \quad & (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} && \leq \sigma^2 \leq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P((n-1)\cdot\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \le \sigma^2 \le (n-1)\cdot\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}) = \gamma = 1-\alpha \\
\equiv\ & P(9\cdot\frac{0.5625}{\chi^2_9\,(0.975)} \le \sigma^2 \le 9\cdot\frac{0.5625}{\chi^2_9\,(0.025)}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(9\cdot\frac{0.5625}{19.02} \le \sigma^2 \le 9\cdot\frac{0.5625}{2.70}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(0.2662 \le \sigma^2 \le 1.875) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{10} mit

$$I_{10} = [0.2662, 1.875]$$

□

4. Das Umweltreferat einer Großstadt will Aufschluss darüber gewinnen, wie viele Asbestfasern pro Kubikmeter Luft im Freien in ca. einem Meter Abstand von asbestzementhaltigen Gebäudeteilen zu erwarten sind. Bei $n = 14$ diesbezüglichen Messungen traten die Werte

980	1340	610	750	880	1250	2410
1100	470	1040	910	1860	730	820

auf, die als Ergebnisse unabhängiger normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden.

(a) Führen Sie für den Erwartungswert μ der Anzahl X der unter den obigen Bedingungen vorhandenen Asbestfasern eine Intervallschätzung zum Konfidenzniveau 0.95 durch.

Lösung:

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Wir wissen, dass gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Ein geeigneter Schätzer für μ ist bekanntermaßen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ein geeigneter Schätzer für σ ist bekanntermaßen

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Für unsere Verteilung gilt dann:

$$\bar{x} = \frac{1}{14} \cdot 15150 = \frac{7575}{7}$$

und

$$s = \sqrt{\frac{1}{13} \cdot \frac{24126450}{7}} = \frac{5\sqrt{87820278}}{91}$$

Die Zufallsvariable T mit

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$$

ist dann t-verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden.

Es muss gelten:

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& -c && \leq T \leq c \\
\equiv\ & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \leq T \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\ & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \leq \sqrt{n}\cdot\frac{\bar{x}-\mu}{s} \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\ & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}-\bar{x} && \leq -\mu \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}-\bar{x} \\
\equiv\ & \bar{x}+t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && \geq \mu \geq \bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \\
\equiv\ & \bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && \leq \mu \leq \bar{x}+t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(\bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}+t_{n-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1-\alpha \\
\equiv\ & P(\frac{7575}{7}-t_{13}\,(0.975)\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7}+t_{13}\,(0.975)\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(\frac{7575}{7}-2.160\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7}+2.160\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(784.897 \leq \mu \leq 1379.389) && = 0.95
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{14} mit

$$I_{14} = [784.897, 1379.389]$$

$\square$

(b) Wie müsste das Konfidenzniveau gewählt sein, damit die Länge des entstehenden Schätzintervalls gleich 500 ist?

Lösung:

Offensichtlich gilt für die Intervallbreite I_B:

$$I_B := c_o - c_u = \bar{x} + t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
& I_B && = 500 \\
\equiv\quad & 2t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && = 500 \\
\equiv\quad & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && = 250 \\
\equiv\quad & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && = 250\cdot\frac{\sqrt{n}}{s} \\
\equiv\quad & t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && = 250\cdot\frac{\sqrt{14}\cdot 91}{5\sqrt{87820278}} \\
\implies\quad & t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \approx 1.8167
\end{aligned}$$

Der nächste Wert in der gegebenen Tabelle der Vorlesung für $t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ wäre

$$t_{13}(0.95) = 1.771$$

Stellen wir nun um, erhalten wir:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \implies \alpha = 0.1$$

Damit erhalten wir ungefähr ein Konfidenzniveau von

$$\gamma = 1-\alpha = 1-0.1 = 0.9$$

□