

Stochastik

Hausaufgabenblatt 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 18. Oktober 2021

1. Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen („Zahl“: Z, „Wappen“: W).

- (a) Bestimmen Sie die dabei möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse), sowie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperiments.

Lösung:

Es gilt:

$$\Omega = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, W), (Z, W, Z), (Z, W, W), \\ (W, Z, Z), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\}$$



(b) Durch welche Teilmengen von Ω lassen sich die folgenden Ereignisse beschreiben?

- i. $A := \{\text{Bei drei Würfeln zweimal „Zahl“}\}$

Lösung:

Wir gehen davon aus, dass „mindestens zweimal“ gemeint ist. Es gilt:

$$A = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, W), (Z, W, Z), (W, Z, Z)\}$$



- ii. $B := \{\text{Bei drei Würfeln zweimal „Wappen“}\}$

Lösung:

Wir gehen davon aus, dass „mindestens zweimal“ gemeint ist. Es gilt:

$$B = \{(Z, W, W), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\}$$



- iii. $D := \{\text{Bei drei Würfeln dreimal „Zahl“}\}$

Lösung:

Es gilt:

$$C = \{(Z, Z, Z)\}$$



- iv. $E := \{\text{Bei drei Würfeln dreimal „Wappen“}\}$

Lösung:

Es gilt:

$$D = \{(W, W, W)\}$$



- (c) Bilden Sie aus den unter (b) genannten Ereignissen die folgenden zusammengesetzten Ereignisse und deuten Sie diese:

- i. $A \cup B$

Lösung:

Es gilt:

$$A \cup B = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, W), (Z, W, Z), (Z, W, W), \\ (W, Z, Z), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\}$$

Interpretation:

$$A \cup B = \{\text{Eine homogene Münze wird dreimal geworfen}\}$$



- ii. $B \cup E$

Lösung:

Es gilt:

$$B \cup E = \{(Z, W, W), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\}$$

Interpretation:

$$B \cup E = \{\text{Bei drei Würfeln wird höchstens einmal Zahl geworfen}\}$$



iii. $D \cup E$ **Lösung:**

Es gilt:

$$D \cup E = \{(Z, Z, Z), (W, W, W)\}$$

Interpretation:

$$D \cup E = \{\text{Bei drei Würfeln wird dreimal das gleiche geworfen}\}$$

□

iv. $A \cap B$ **Lösung:**

Es gilt:

$$A \cap B = \emptyset$$

Interpretation:

$$A \cap B = \{\text{Bei drei Würfeln wird zweimal Kopf und zweimal Wappen geworfen}\}$$

□

2. Beweisen Sie durch das Anwenden der Gesetze der Mengenalgebra:

(a) $A \cap (A \cup B) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ \equiv (A \cap A) \cup (A \cap B) &= A \\ \equiv A \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\subseteq A} &= A \\ \equiv A &= A \end{aligned}$$

□

(b) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) &= A \\ \equiv A \cap (B \cup \bar{B}) &= A \\ \equiv A \cap \Omega &= A \\ \equiv A &= A \end{aligned}$$

□

(c) $\bar{A} \cup (A \cap \emptyset) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{A} \cup (A \cap \emptyset) &= A \\ \equiv (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \emptyset) &= A \\ \equiv (\bar{A} \cup A) \cap \bar{A} &= A \\ \equiv \bar{A} &= A \quad \nexists \end{aligned}$$

3. Für die Ereignisse A , B und C aus einem Ereignissystem gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.5 & P(B) &= 0.2 & P(C) &= 0.3 & P(A \cap B \cap C) &= 0.02 \\ P(A \cup B) &= 0.6 & P(A \cup C) &= 0.6 & P(B \cap C) &= 0.1 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für:

(a) $P(B \cup C)$

Lösung:

Es gilt:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

□

(b) $P(A \cap C)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ \equiv P(A \cap C) &= P(A) + P(C) - P(A \cup C) \\ \Rightarrow P(A \cap C) &= 0.5 + 0.3 - 0.6 = 0.2 \end{aligned}$$

□

(c) $P(A \cap B)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \equiv P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= 0.5 + 0.2 - 0.6 = 0.1 \end{aligned}$$

□

(d) $P(A \cup B \cup C)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.5 + 0.2 + 0.3 - 0.1 - 0.2 - 0.1 + 0.02 = 0.62 \end{aligned}$$

□

4. Von 20 Teilnehmern einer Bergwanderung geben 8 Personen an Knieschmerzen zu haben. 6 Teilnehmer leiden unter Sonnenbrand. 8 Teilnehmer bleiben unversehrt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer

- (a) Sonnenbrand oder Knieschmerzen hat?

Lösung:

Es gilt:

$$P(\text{☀} \cup \text{🦵}) = 1 - P(\overline{\text{☀} \cup \text{🦵}}) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = 0.6$$

□

- (b) Knieschmerzen und Sonnenbrand aufweist?

Lösung:

Es gilt:

$$P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = P(\text{☀}) + P(\text{🦵}) - P(\text{☀} \cup \text{🦵}) = \frac{6}{20} + \frac{8}{20} - \frac{12}{20} = \frac{2}{20} = 0.1$$

□

- (c) der Knieschmerzen hat, keinen Sonnenbrand hat?

Lösung:

Wählen wir aus allen Teilnehmern, dann gilt:

$$P(\overline{\text{☀}} \cap \text{🦵}) = P(\text{🦵}) - P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = \frac{8}{20} - \frac{2}{20} = \frac{6}{20} = 0.3$$

□

Wählen wir einen Teilnehmer von denen mit Knieschmerzen, dann gilt:

$$P(\overline{\text{☀}} \mid \text{🦵}) = \frac{8}{8} - \frac{2}{8} = 0.75$$

□

- (d) Sonnenbrand, aber keine Knieschmerzen hat?

Lösung:

Es gilt:

$$P(\text{☀} \cap \overline{\text{🦵}}) = P(\text{☀}) - P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = \frac{6}{20} - \frac{2}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$

□