1. Im letzten Wintersemester nahmen 120 Studierende an der Stochastik-Klausur teil. Im folgenden ist Punkteverteilung einer Stochastik-Klausur-Aufgabe angegeben:

Punkte X	6	5	4	3	2	1
Anzahl	0	10	30	40	20	20
$P(X = x_i)$	0	$^{10}/_{120}$	$^{30}/_{120}$	$^{40}/_{120}$	$^{20}/_{120}$	$^{20}/_{120}$

(a) Berechnen Sie

i. den Erwartungswert.

Lösung:

Es gilt offensichtlich:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(X = x_i) = \ldots = \frac{35}{12} \approx 2.9167$$

□

ii. die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung:

Es gilt offensichtlich:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = \ldots = \frac{203}{144} \approx 1.4097$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{203}{144}} = \frac{\sqrt{203}}{12} \approx 1.187$$

□

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Punkteschnitt im Bereich $[\mu - 2, \mu + 2]$? Nutzen Sie zur Abschätzung die Tschebyscheff-Ungleichung.

Lösung:

Es gilt offensichtlich mit Tschebyscheff:

$$\begin{aligned}
& P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) && \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv\quad & 1 - P\left(|X - \mu| < \epsilon\right) && \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv\quad & P\left(|X - \mu| < \epsilon\right) && \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv\quad & P\left(|X - {}^{35}/_{12}| < 2\right) && \geq 1 - \frac{203}{144 \cdot 2^2} \\
\equiv\quad & P\left(|X - {}^{35}/_{12}| < 2\right) && \geq 1 - \frac{203}{576} \approx 0.6476
\end{aligned}$$

□