Stochastik

Übungsblatt 4

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 8. November 2021

1. Zwei unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen und die Summe der beiden Augenzahlen betrachtet.

   (a) Bestimmen Sie die Ereignismenge der möglichen 2er Tupel (zwei Würfel), die eine gerade Augensumme bilden.

   Lösung:

   Sei $E :=$ {Mit zwei Würfeln wird eine gerade Augensumme geworfen}.

   Es gilt:

   $$\begin{aligned} E = \{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),\\ &(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),\\ &(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\} \end{aligned}$$

   $\square$

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine gerade bzw. ungerade Augensumme zu würfeln

   Lösung:

   Sei $O :=$ {Mit zwei Würfeln wird eine ungerade Augensumme geworfen}.

   Es gilt:

   $$O = \overline{E} \quad \land \quad |E| = |O| \quad \land \quad E \cup O = \Omega \quad \implies P(E) = P(O) = \frac{1}{2}$$

   $\square$

Im Anschluss wird mit den zwei Würfeln dreimal ein „Doppelwurf“ ausgeführt. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der insgesamt geraden Augensummen.

(c) Bestimmen Sie von der Zufallsvariable X

i. die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen X lässt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$P(X=x)=f(x)=\begin{cases} 1/8 & \text{für } x=0 \\ 3/8 & \text{für } x=1 \\ 3/8 & \text{für } x=2 \\ 1/8 & \text{für } x=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben. □

ii. die Verteilungsfunktion

Lösung:

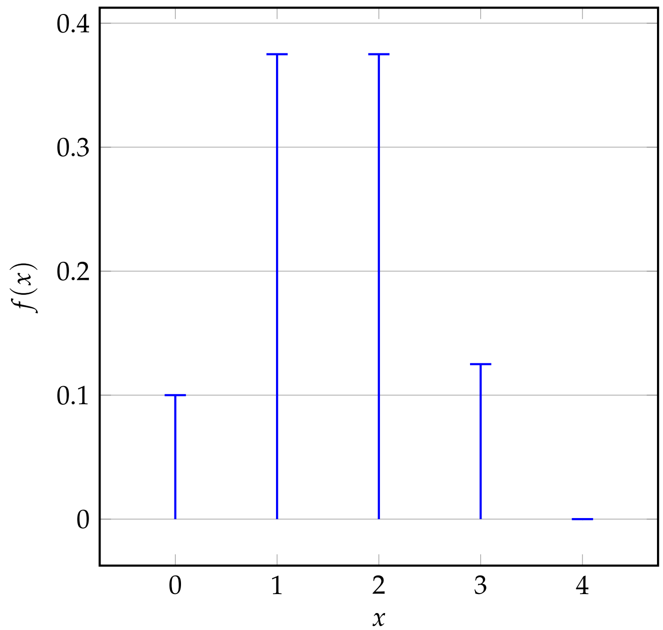
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen X lässt sich durch die *Verteilungsfunktion*

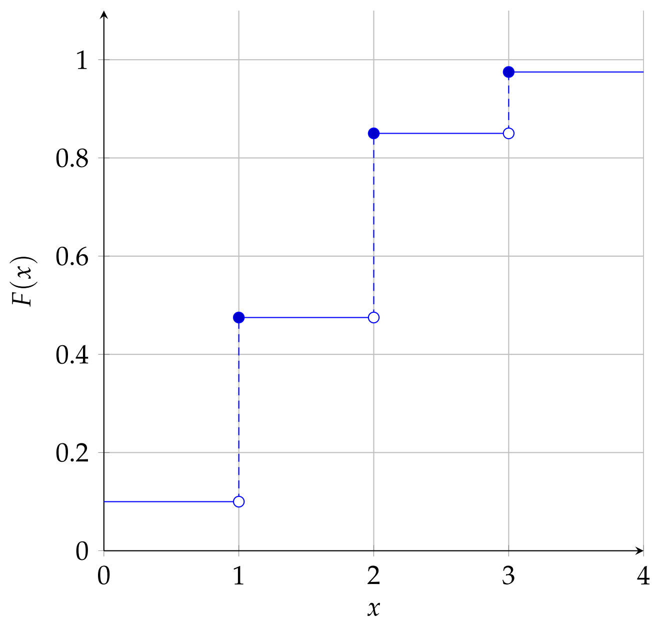
$$P(X\le x)=F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ 1/8 & \text{für } 0\le x<1 \\ 1/2 & \text{für } 1\le x<2 \\ 7/8 & \text{für } 2\le x<3 \\ 1 & \text{für } x\ge 3 \end{cases}$$

beschreiben. □

(d) Stellen Sie die Funktionen grafisch dar (Stabdiagramm und Verteilungsfunktion).

Lösung:





□

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die diskrete Zufallsvariable N den Wert k annimmt, sei gegeben durch

$$P(N = k) = \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{für } k = 1, \ldots, m \in \mathbb{N}$$

Welchen Wert muss m haben?

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(N = k)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = 1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m} f(k) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} P(N = k) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \left(\log_{10}(k+1) - \log_{10} k\right) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \sum_{k=1}^{m} \log_{10} k && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \left(\sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \log_{10}(m+1)\right) && = 1 \\
\equiv\ & \log_{10}(m+1) && = 1 \\
\equiv\ & m+1 && = 10 \\
\equiv\ & m && = 9
\end{aligned}$$

$\square$

3. Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter a.

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1 \qquad \left(\Longleftarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = 1\right)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t && = 1 \\
\equiv\ & \int_0^3 at^2(3-t)\,\mathrm{d}\,t && = 1 \\
\equiv\ & a\left(3\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}\,t - \int_0^3 t^3\,\mathrm{d}\,t\right) && = 1 \\
\equiv\ & 3\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}\,t - \int_0^3 t^3\,\mathrm{d}\,t && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 - \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^3 && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & 27 - \frac{81}{4} && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & \frac{27}{4} && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & a && = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

□

(b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^3 \frac{4}{27}\cdot t^2(3-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{4}{27}\left(t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ {}^4/_{27}\left(x^3 - {}^{x^4}/_4\right) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 2 annimmt

i. über die Dichtefunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{4}{27}\left(2^3 - \frac{2^4}{4}\right) = \frac{16}{27}$$

$\square$

ii. über die Verteilungsfunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{4}{27}\left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^2 = \frac{16}{27}$$

$\square$

4. Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ der Form

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{8} & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ c_1 + c_2(1 - e^{-x}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2.

Lösung:

Die Verteilungsfunktion muss normiert sein. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to\infty} F(x) && = 1 \\ \equiv\ & \lim_{x\to\infty} \left(c_1 + c_2(1 - e^{-x})\right) && = 1 \\ \equiv\ & \lim_{x\to\infty} c_2(1 - e^{-x}) && = 1 - c_1 \\ \equiv\ & \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) && = \frac{1 - c_1}{c_2} \\ \equiv\ & \lim_{x\to\infty} -e^{-x} && = \frac{1 - c_1}{c_2} - 1 \\ \equiv\ & \lim_{x\to\infty} e^{-x} && = \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\ \equiv\ & 0 && = \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\ \equiv\ & c_2 && = 1 - c_1 \end{aligned}$$

Weiterhin muss die Verteilungsfunktion rechtsstetig sein. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\downarrow 0} F(x) && = F(0) \\ \equiv\ & \lim_{x\downarrow 0} c_1 + c_2(1 - e^{-x}) && = \frac{1}{4} \\ \equiv\ & c_1 + (1 - c_1)(1 - 1) && = \frac{1}{4} \\ \equiv\ & c_1 && = \frac{1}{4} \\ \implies\ & c_2 && = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens den Wert 2 annimmt, wenn man weiß, dass X positiv ist.

Lösung:

□

Zusatzaufgaben

5. Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Verteilungsfunktionen sind und finden Sie gegebenenfalls eine passende Dichtefunktion, d.h. eine nichtnegative Funktion f mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(d)\,\mathrm{d}\,t$. Skizzieren Sie $F(x)$ und eventuell $f(x)$.

   (a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

   Lösung:

   □

   (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$

   Lösung:

   □

6. Die „Intaktwahrscheinlichkeiten“ (Wahrscheinlichkeit, dass eine Anlage, Baugruppe, Bauelement etc. wie vorgesehen arbeitet), bezogen auf ein festes Zeitintervall, betragen für zwei unabhängig voneinander arbeitende Anlagen 0.9 bzw. 0.8. Die Zufallsgröße X sei die zufällige Anzahl der in einem solchen Zeitintervall intakten Anlagen. Bestimmen Sie

   (a) die Verteilungstabelle von X und das entsprechende Stabdiagramm,

   Lösung:

   □

   (b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine Anlage intakt ist,

   Lösung:

   □

   (c) die Verteilungsfunktion von X mit einer grafischen Darstellung.

   Lösung:

   □

7. Die Zufallsvariable X beschreibe die größte der beiden Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf. Bestimmen Sie

   (a) $P(X \leq 5)$

   Lösung:

   □

   (b) $P(X < 5)$

   Lösung:

   □

   (c) $P(X < 5.5)$

   Lösung:

   □

   (d) $P(X \geq 4)$

   Lösung:

   □

8. Die Cauchy-Verteilung ist definiert durch die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Diese Verteilung findet Anwendung in der Modellierung von Zufallsexperimenten, bei denen seltene, extrem große Beobachtungswerte auftreten, z.B. bei Schadensversicherungen gegen Naturkatastrophen.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Cauchy-Verteilung und zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$ ist.

Lösung:

□

(b) Berechnen Sie $P(2 < X \leq 10)$ für eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X.

Lösung:

□