

1. Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen.

- (a) Sie spielen folgende Spielvariante: Jede Karte wird einzeln gezogen. Sie notieren, welche Karte es gewesen ist und legen die Karte zurück. Sie wiederholen dieses Vorgehen 10-mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei Buben dabei gewesen sind?

Lösung:

Es handelt sich offenbar um ein *Bernoulli*-Experiment. Damit haben wir eine *Binomialverteilung* gegeben mit

- $n = 10$,
- $p = 4/32 = 1/8$.

Damit gilt für $x \in [0, 10]_{\mathbb{N}_0}$:

$$b(x; n, p) = b(x; 10, 1/8) = f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{10-x}$$

Und damit:

$$b(2; 10, 1/8) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^8 \approx 24.16\%$$

□

- (b) Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens ein rotes Ass zu ziehen, größer als 0.5 wird?

Lösung:

Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein rotes Ass gezogen wird, gilt:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

Damit gilt mit

- $n = n$,
- $p = 1/32$:

$$b(x; n, p) = b(x, n, 1/32) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^x \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^{n-x}$$

Mit $1 - P(X = 0) \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - P(X = 0) &\geq 0.5 \\ \Rightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^0 \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^{n-0} &\geq 0.5 \\ \Rightarrow 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^n &\geq 0.5 \\ \Rightarrow \left(\frac{31}{32}\right)^n &\leq 0.5 \\ \Rightarrow n \cdot \log \frac{31}{32} &\leq \log \frac{1}{2} \\ \Rightarrow n &\geq \frac{\log 2}{\log 32/31} \\ \Rightarrow n &\geq 21.8323 \end{aligned}$$

Damit muss man mindestens 22-mal ziehen.

□