1. Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta \cdot x \cdot e^{-\theta x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Schätzen Sie das für diese Sorte passende θ aufgrund der folgenden 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) mittels der Maximum-Likelihood-Methode:

1.5	1	2	1	1.5
1	2	0.5	2.5	1.5
1.5	1.5	1.5	2	1.5

Lösung:

Es gilt:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta \cdot x_i \cdot e^{-\theta x_i^2} = (2\theta)^n \cdot e^{-\theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Damit erhalten wir $L^*(\theta)$ mit:

$$L^*(\theta) = \ln L(\theta) = n \cdot \ln 2\theta + \left(-\theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \cancel{\ln e} + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i = n(\ln 2 + \ln \theta) - \theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Damit ist $\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ein potentieller Schätzer für θ.

Natürlich müssen wir überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \quad \checkmark$$

Damit haben wir einen Schätzer und es gilt:

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{15 \cdot 4}{149} = \frac{60}{149} \approx 0.403$$

□