Stochastik

Übungsblatt 5

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 8. November 2021

1. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_y(y)$ und die Dichtefunktion $f_y(y)$ für die transformierte Zufallsvariable Y, die sich als $Y = g(X)$ aus der ursprünglichen Zufallsvariablen X mit bekannter Verteilungsfunktion $F_x(x)$ und bekannter Dichtefunktion $f_x(x)$ ergibt:

   (a) $g(X) = aX + b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

Lösung:

Wir wissen:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(g(X) \leq y) \\
&= P(aX + b \leq y) \\
&= P(aX \leq y - b) \\
&= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Und damit:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(1 - F_X(\frac{y-b}{a})\right) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a > 0 \\ -f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}
\end{aligned}$$

□

(b) $g(X) = 3X - 1 \quad \text{mit } f_X(x) = \begin{cases} 4/27(3x^2 - x^3) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

Es gilt:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right) \cdot \frac{1}{|3|} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27}\left(3\left(\frac{y+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{3}\right)^3\right) & \text{für}^1 \ -1 \leq y \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und damit:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -1 \\ \frac{4}{27}\left(\frac{y+1}{3}\right)^3 - \frac{1}{27}\left(\frac{y+1}{3}\right)^4 & \text{für } -1 \leq y \leq 8 \\ 1 & \text{für } y > 8 \end{cases}$$

□

[1] $0 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad y = g(x) = 3x - 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq y \leq 8$

2. Gegeben ist ein Spannungssignal X mit Gaußscher Dichtefunktion $f_X(x)$, Erwartungswert $\mu_x = 1\text{V}$ und Varianz $\sigma_X^2 = 0.25\text{V}^2$. Das Signal wird durch die Funktion $Y = g(X) = 2X + 1.5\text{V}$ in ein Ausgangssignal Y transformiert.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert μ_Y sowie die Varianz σ_Y^2 des Ausgangssignals.

Lösung:

Es handelt sich hier im eine *lineare* Transformation.

Damit gilt:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1.5\text{V}) = 2\,\mathrm{E}(X) + 1.5\text{V} = 2\mu_X + 1.5\text{V} = 2 \cdot 1\text{V} + 1.5\text{V} = 3.5\text{V}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1.5\text{V}) = 2^2\,\mathrm{Var}(X) = 4\sigma_X^2 = 4 \cdot 0.25\text{V}^2 = 1\text{V}^2$$

□

3. Berechnen Sie

   (a) den Erwartungswert,

   Lösung:

   Es gilt:
   $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot P(X = x_i) = (-2) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{12} = 3$$
   $\square$

   (b) die Varianz und

   Lösung:

   Es gilt:
   $$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=0}^{4} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = (-5)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 5^2 \cdot \frac{1}{12} = 11$$
   $\square$

   (c) die Standardabweichung

   Lösung:

   Es gilt:
   $$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{11}$$
   $\square$

   der folgenden diskreten Verteilung:

x_i	-2	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/4$	$1/12$

4. Gegeben ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X als

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

(a) Wie groß ist a?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\ \equiv\ & \int_{1}^{-1} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\ \equiv\ & a\int_{1}^{-1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\ \equiv\ & a\,[\arctan(x)]_1^{-1} && = 1 \\ \equiv\ & a\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) && = 1 \\ \equiv\ & \frac{a\pi}{2} && = 1 \\ \equiv\ & a && = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

□

(b) Wie groß ist der Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= {}^{1}\frac{\pi}{4}\int_{x=-1}^{1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{\pi}{4}\,[\ln(u)]_{x=-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}\,(\ln(2) - \ln(2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

[1] $u := 1 + x^2 \implies \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x \iff \mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,u}{2x}$

(c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ der Zufallsvariablen X.

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} (x-0)^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} 1-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{2}\left[x-\arctan(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Zusatzaufgaben

5. Beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei unterscheidbaren Würfeln erhält ein Spieler von der Bank nach dem Einsatz von 1€ pro Spiel

   - 0€ zurück, wenn 0 Würfel „6“ zeigen,
   - 3€ zurück, wenn 1 Würfel „6“ zeigen,
   - 7€ zurück, wenn 2 Würfel „6“ zeigen.

   Würden Sie bei diesem Spiel (auf Dauer betrachtet) lieber Bank oder Spieler sein?

   Lösung:

   □

6. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} cx - 0.5 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion zu X ist.

Lösung:

□

(b) Bestimmen Sie im Anschluss

i. den Erwartungswert

Lösung:

□

ii. die Varianz

Lösung:

□