1. Die Lebensdauer (in Stunden) von Energiesparlampen eines bestimmten Fabrikats kann durch eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable X beschrieben werden. Die zugehörige Verteilungsfunktion $F : R \to [0;1]$ ist damit gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Berechnen Sie für $\lambda = 1/800$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe

      i. höchstens 300 Stunden,

      Lösung:

      Offensichtlich gilt:

      $$P(X \leq 300) = F(300) = 1 - e^{-300/800} = 1 - e^{-3/8}$$

      □

      ii. mehr als 120 Stunden,

      Lösung:

      Offensichtlich gilt:

      $$P(X \geq 120) = 1 - F(120) = 1 - \left(1 - e^{-120/800}\right) = e^{-3/20}$$

      □

      iii. mindestens 240 und höchstens 360 Stunden

      Lösung:

      Offensichtlich gilt:

      $$P(240 \leq X \leq 360) = F(360) - F(240) = 1 - e^{-360/800} - \left(1 - e^{-240/800}\right) = e^{-3/10} - e^{-9/20}$$

      □

   beträgt.

(b) Für welchen Wert des Parameters λ ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe mindestens 100 Stunden beträgt?

Lösung:

Es gilt:

$$0.99 = P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - F(100) \iff F(100) = 0.01$$

$$\begin{aligned}
& F(100) && = 0.01 \\
\equiv \quad & 1 - e^{-100\lambda} && = 0.01 \\
\equiv \quad & e^{-100\lambda} && = 0.100 \\
\equiv \quad & -100\lambda && = \ln 0.100 \\
\equiv \quad & \lambda && = \frac{\ln 0.99}{-100} \\
\implies \quad & \lambda && \approx 0.0001005
\end{aligned}$$

$\square$