1. Es sei X stetig mit Dichtefunktion $f : (0;\infty) \to (0;\infty); f(x) = \gamma x e^{-x}$ mit $x > 0$.
   (a) Bestimmen Sie γ so, dass f eine Dichtefunktion ist.

Lösung:

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss gelten:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\
\equiv\ & \int_0^\infty \gamma x e^{-x}\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\
\equiv\ & \gamma \int_0^\infty x e^{-x}\,\mathrm{d}\,x && = 1 \\
\equiv\ & \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x && = \frac{1}{\gamma} \\
\equiv\ & \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty && = \frac{1}{\gamma} \\
\equiv\ & -\lim_{x\to\infty} xe^{-x} - (0-1) && = \frac{1}{\gamma} \\
\overset{1}{\equiv}\ & 0+1 && = \frac{1}{\gamma} \\
\equiv\ & \gamma && = 1
\end{aligned}$$

□

[1] e^x wächst asymptotisch schneller als x.

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion von X?

Lösung:

Es gilt (mit $x > 0$):

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}\,t \overset{2}{=} -\left[(1+t)e^{-t}\right]_0^x = 1-(1+x)e^{-x}$$

□

(c) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \frac{1}{X}$

Lösung:

Es gilt:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

Und damit:

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \left(1 - \left(1+\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{1}{y}}\right) = \left(1+\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{1}{y}}$$

□

[2] Berechnung analog zu Teilaufgabe (a)

2. Die Zufallsvariable X besitze den Mittelwert $(X) = \mu_X = 2$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = 0.5$. Berechnen Sie die entsprechenden Kennwerte (Erwartungswert, Varianz) der folgenden linearen Funktionen von X:

(a) $Z = 2X - 3$

Lösung:

Da es sich um lineare Transformationen handelt, gilt:

$$(Z) = (2X - 3) = 2(X) - 3 = 2\mu_X - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

und

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(2X - 3) = 2^2\,\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot \sigma_X^2 = 4 \cdot 0.5 = 2$$

□

(b) $Z = -0.5X + 2$

Lösung:

Da es sich um lineare Transformationen handelt, gilt:

$$(Z) = (-0.5X + 2) = -0.5(X) + 2 = -0.5\mu_X + 2 = -0.5 \cdot 2 + 2 = 1$$

und

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(-0.5X + 2) = (-0.5)^2\,\mathrm{Var}(X) = 0.25 \cdot \sigma_X^2 = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125$$

□

(c) $Z = 10X$

Lösung:

Da es sich um lineare Transformationen handelt, gilt:

$$(Z) = (10X) = 10(X) = 10\mu_X = 10 \cdot 2 = 20$$

und

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(10X) = 10^2\,\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \sigma_X^2 = 100 \cdot 0.5 = 50$$

□

(d) $Z = 2$

Lösung:

Da es sich um lineare Transformationen handelt, gilt:

$$(Z) = (2) = 2$$

und

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(2) = 0$$

□

3. X repräsentiere die täglichen Verkäufe eines bestimmten Produktes und besitze die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10 000
$P(X = x_i)$	0.05	0.2	0.35	0.19	0.12	0.08	0.01

(a) Berechnen Sie

i. den Erwartungswert,

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(X) &= \sum_{i=0}^{6} x_i \cdot P(X = x_i) \\
&= 7000 \cdot 0.05 + 7500 \cdot 0.2 + 8000 \cdot 0.35 + 8500 \cdot 0.19 \\
&\quad + 9000 \cdot 0.12 + 9500 \cdot 0.08 + 10\,000 \cdot 0.01 \\
&= 8205
\end{aligned}
$$

□

ii. die Varianz

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=0}^{6} (x_i - \mu_X)^2 \cdot P(X = x_i) \\
&= (7000 - 8205)^2 \cdot 0.05 + (7500 - 8205)^2 \cdot 0.2 + (8000 - 8205)^2 \cdot 0.35 \\
&\quad + (8500 - 8205)^2 \cdot 0.19 + (9000 - 8205)^2 \cdot 0.12 \\
&\quad + (9500 - 8205)^2 \cdot 0.08 + (10\,000 - 8205)^2 \cdot 0.01 \\
&= 445\,475
\end{aligned}
$$

□

iii. und den Median von X

Lösung:

Es gilt:

$$P(X < \tilde{x}) \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad P(X \leq \tilde{x}) \geq \frac{1}{2}$$

Offensichtlich gilt nach der gegebenen Tabelle:

$$\tilde{x} = 8000$$

□

(b) Berechnen Sie das

i. untere Quartil,

Lösung:
Es gilt:

$$P(X < x_{1/4}) \leq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad P(X \leq x_{1/4}) \geq \frac{1}{4}$$

Offensichtlich gilt nach der gegebenen Tabelle:

$$x_{1/4} = 7500$$

□

ii. obere Quartil

Lösung:
Es gilt:

$$P(X < x_{3/4}) \leq \frac{3}{4} \quad \wedge \quad P(X \leq x_{3/4}) \geq \frac{3}{4}$$

Offensichtlich gilt nach der gegebenen Tabelle:

$$x_{3/4} = 8500$$

□

iii. sowie den Quartilsabstand

Lösung:
Es gilt:

$$x_{3/4} - x_{1/4} = 8500 - 7500 = 1000$$

□

(c) Berechnen Sie das 90%-Quantil.

Lösung:
Es gilt:

$$P(X < x_{9/10}) \leq \frac{9}{10} \quad \wedge \quad P(X \leq x_{9/10}) \geq \frac{9}{10}$$

Offensichtlich gilt nach der gegebenen Tabelle:

$$x_{9/10} = 9000$$

4. Ein Unternehmen hat einen neuen Auftrag erhalten. Die zu produzierenden Werkstücke sollen eine bestimmte Länge haben. Der Kunde akzeptiert eine Toleranz von ±0.5mm. Aus Erfahrung weiß man im Unternehmen, dass die Wahrscheinlichkeit für die Abweichungen von Sollgrößen (gemessen in mm) mit folgender Dichtefunktion beschrieben werden kann:

$$f(x) = \begin{cases} 0.25(3+x) & \text{für } -3 \leq x < 0 \\ 0.25(3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Werkstück zu liefern, das vom Kunden auch angenommen wird?

Lösung:

Die Dichtefunktion ist nicht normiert, weswegen die Aufgabe nicht sinnvoll lösbar ist.

(b) Wie groß ist das Moment 1. Ordnung (= Erwartungswert)?

Lösung:

Die Dichtefunktion ist nicht normiert, weswegen die Aufgabe nicht sinnvoll lösbar ist.

(c) Wie groß ist das Zentralmoment 2. Ordnung (= Varianz)?

Lösung:

Die Dichtefunktion ist nicht normiert, weswegen die Aufgabe nicht sinnvoll lösbar ist.