1. Bei der Verpackung von Kartoffeln in Beutel kann das Normalgewicht von 10kg i.A. nicht exakt eingehalten werden. Die Erfahrung zeigt, dass das Füllgewicht eines Beutels durch eine Zufallsvariable $Y = X + 10$ beschrieben werden kann, wobei X eine auf dem Intervall $[-0.25, 0.75]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Füllgewichtes eines Beutels.

   Lösung:

   Offensichtlich gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0.75 - 0.25}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) \overset{1}{=} \frac{1}{12}(b-a)^2 = \frac{1}{12}$$

   Und für $Y = X + 10$:

$$\mu_Y = E(Y) = E(X) + 10 = \frac{41}{4} \quad \wedge \quad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

   □

   (b) Die abgefüllten Beutel sollen mit einem Kleintransporter befördert werden. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zulässige Nutzlast von 1020kg bei Zuladung von 100 Beuteln überschritten wird.

   Lösung:

   Sei

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_{100}$$

   dann gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$E(S_n) = n\mu_Y = 100 \cdot \mu_Y = 1025 \quad \wedge \quad \mathrm{Var}(S_n) = n\sigma_Y^2 = 100 \cdot \sigma_Y^2 = \frac{25}{3}$$

   Sei dann die standardisierte Zufallsvariable Z_n gegeben mit

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}} = \frac{S_n - n\mu_Y}{\sigma_Y \sqrt{n}} = \sqrt{3} \cdot \frac{S_n - 1025}{5}$$

   dann besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Verteilungsfunktion von Z_n für $n \to \infty$ punktweise gegen die der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ konvergiert.

   Wir wählen

$$u = \sqrt{3} \cdot \frac{1020 - 1025}{5} = -\sqrt{3} \approx -1.73$$

   Damit gilt:

$$P(Z_n \geq u) = 1 - P(Z_n < u) \approx 1 - \Phi(-1.73) = 1 - (1 - \Phi(1.73)) = \Phi(1.73) = 95.82\%$$

   □

[1] Siehe: Wikipedia