

1. Das Umweltreferat einer Großstadt will Aufschluss darüber gewinnen, wie viele Asbestfasern pro Kubikmeter Luft im Freien in ca. einem Meter Abstand von asbestzementhaltigen Gebäudeteilen zu erwarten sind. Bei $n = 14$ diesbezüglichen Messungen traten die Werte

980	1340	610	750	880	1250	2410
1100	470	1040	910	1860	730	820

auf, die als Ergebnisse unabhängiger normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden.

- (a) Führen Sie für den Erwartungswert μ der Anzahl X der unter den obigen Bedingungen vorhandenen Asbestfasern eine Intervallschätzung zum Konfidenzniveau 0.95 durch.

Lösung:

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Wir wissen, dass gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Ein geeigneter Schätzer für μ ist bekanntermaßen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Ein geeigneter Schätzer für σ ist bekanntermaßen

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Für unsere Verteilung gilt dann:

$$\bar{x} = \frac{1}{14} \cdot 15150 = \frac{7575}{7}$$

und

$$s = \sqrt{\frac{1}{13} \cdot \frac{24126450}{7}} = \frac{5\sqrt{87820278}}{91}$$

Die Zufallsvariable T mit

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$$

ist dann t -verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden.

Es muss gelten:

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & -c && \leq T \leq c \\
 \equiv & -t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) && \leq T \leq t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
 \equiv & -t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) && \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s} \leq t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
 \equiv & -t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} - \bar{x} && \leq -\mu \leq t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} - \bar{x} \\
 \equiv & \bar{x} + t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} && \geq \mu \geq \bar{x} - t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \\
 \equiv & \bar{x} - t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} && \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 & P\left(\bar{x} - t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) && = \gamma = 1 - \alpha \\
 \equiv & P\left(\frac{7575}{7} - t_{13}(0.975) \cdot \frac{5\sqrt{87820278}}{91 \cdot \sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7} + t_{13}(0.975) \cdot \frac{5\sqrt{87820278}}{91 \cdot \sqrt{14}}\right) && = 0.95 \\
 \equiv & P\left(\frac{7575}{7} - 2.160 \cdot \frac{5\sqrt{87820278}}{91 \cdot \sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7} + 2.160 \cdot \frac{5\sqrt{87820278}}{91 \cdot \sqrt{14}}\right) && = 0.95 \\
 \equiv & P(784.897 \leq \mu \leq 1379.389) && = 0.95
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{14} mit

$$I_{14} = [784.897, 1379.389]$$

□

- (b) Wie müsste das Konfidenzniveau gewählt sein, damit die Länge des entstehenden Schätzintervalls gleich 500 ist?

Lösung:

Offensichtlich gilt für die Intervallbreite I_B :

$$I_B := c_o - c_u = \bar{x} + t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} I_B &= 500 \\ \equiv 2t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} &= 500 \\ \equiv t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} &= 250 \\ \equiv t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) &= 250 \cdot \frac{\sqrt{n}}{s} \\ \equiv t_{13} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) &= 250 \cdot \frac{\sqrt{14} \cdot 91}{5\sqrt{87820278}} \\ \Rightarrow t_{13} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) &\approx 1.8167 \end{aligned}$$

Der nächste Wert in der gegebenen Tabelle der Vorlesung für $t_{13} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ wäre

$$t_{13}(0.95) = 1.771$$

Stellen wir nun um, erhalten wir:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.1$$

Damit erhalten wir ungefähr ein Konfidenzniveau von

$$\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9$$

□