# Stochastik

# Hausaufgabenblatt 4

## Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 2. November 2021

1. Handelt es sich bei den folgenden Funktionen um Dichtefunktionen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) 
$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Lösung:

Offensichtlich ist  $f_1(x) = \sin(x) < 0$  für alle  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ .

Damit kann  $f_1(x)$  keine Dichtefunktion sein.

(b) 
$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Lösung:

Es muss gelten:

- f<sub>2</sub> ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
  f<sub>2</sub> ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- $f_2$  ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \, \mathrm{d} \, t = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d} \, t = \left[ -e^{-t} \right]_{0}^{\infty} = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist  $f_2(x)$  eine Dichtefunktion.

2. Gegeben seien die folgenden, jeweils auf R definierten Funktionen:

(a) 
$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ x - 2 & \text{für } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$$

#### Lösung:

Für  $x_1 = 7/2$  und  $x_2 = 2$  gilt:

$$F_1(x_1) = \frac{3}{2} > 1 = F_2(x_2) \quad \land \quad x_1 < x_2 \quad \nleq$$

Also ist  $F_1(x)$  nicht monoton steigend und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion.

(b) 
$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

#### Lösung:

Offensichtlich ist  $F_2(x)$  (streng) monoton fallend für  $x \ge 0$  und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion.

(c) 
$$F_3(x) = e^{-e^{-x}} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

#### Lösung:

Offensichtlich ist  $F_3(x)$  monoton steigend und rechtsseitig stetig.

Es gilt:

$$\lim_{x \to \infty} F_3(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x \to \infty} e^{-x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_3(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x \to -\infty} e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$$

Also ist  $F_3(x)$  damit insgesamt eine Verteilungsfunktion.

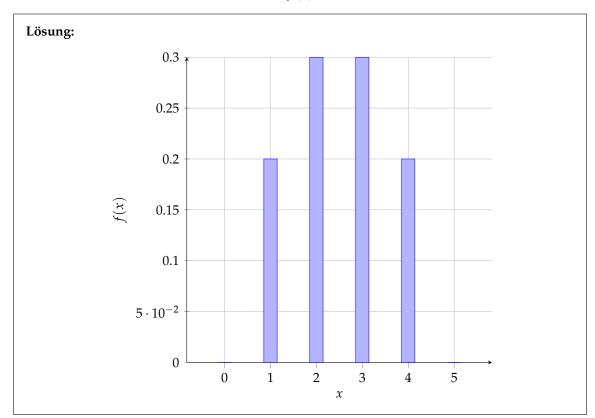
Welche dieser Funktionen können nicht Verteilungsfunktionen einer Zufallsvariablen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabenblatt 4

3. Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable X. Betrachten Sie folgende zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(5-x)}{20} & \text{für } x = \{1, 2, 3, 4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x).



(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F(x).

#### Lösung:

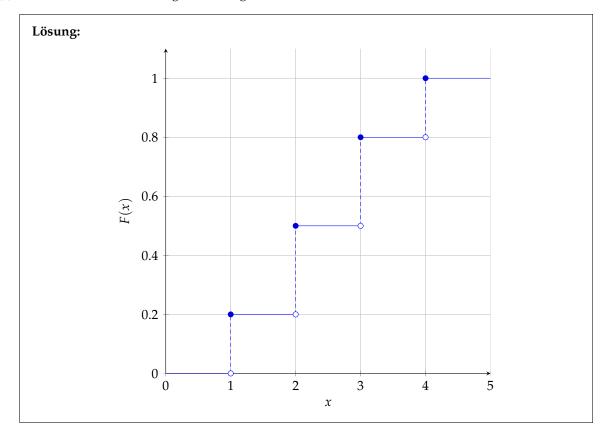
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariablen X lässt sich durch die Verteilungsfunktion

$$P(X \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1/5 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1/2 & \text{für } 2 \le x < 3 \\ 4/5 & \text{für } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$$

beschreiben.

Hausaufgabenblatt 4 Stochastik

(c) Stellen Sie diese Verteilungsfunktion grafisch dar.



Hausaufgabenblatt 4 Stochastik

4. Die Verspätung eines Zuges in einem bestimmten Bahnhof werde durch die stetige Zufallsvariable *X* beschrieben und habe die Dichtefunktion (in Minuten)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & \text{für } 0 \le x \le 4\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Erfüllt die angegebene Funktion f(x) die Anforderung an eine Dichtefunktion?

#### Lösung:

Es muss gelten:

- f ist nichtnegativ  $\checkmark$  (offensichtlich)
- f ist integrierbar  $\checkmark$  (offensichtlich)
- *f* ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \mathrm{d} \, t = \int_{0}^{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x \right) \, \mathrm{d} \, t = \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{16} \right]_{0}^{4} = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist f(x) eine Dichtefunktion.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von *X* an.

#### Lösung:

Es gilt:

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right) dt = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right) dt = \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{16}$$

Und damit:

$$P(X \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x/2 - x^2/16 & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hausaufgabenblatt 4 Stochastik

(c) Sie haben bereits eine Minute auf den Zug gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die heutige Verspätung zwischen zwei und drei Minuten beträgt?

## Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$P(2 \le X \le 3 \mid X \ge 1) = \frac{P(2 \le X \le 3 \cap X \ge 1)}{P(X \ge 1)}$$

$$= \frac{P(2 \le X \le 3)}{P(X \ge 1)}$$

$$= \frac{F(3) - F(2)}{1 - F(1)}$$

$$= \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}}$$

$$= \frac{15 - 12}{9}$$

$$= \frac{1}{16}$$