1. Die Qualität der Kugeln für Kugellager wird auf folgende Weise kontrolliert: Fällt die Kugel durch eine Öffnung mit dem Durchmesser d_2, jedoch nicht durch eine Öffnung mit dem Durchmesser d_1 ($d_1 < d_2$), so genügt die Kugel den Qualitätsanforderungen. Wird eine der beiden Bedingungen nicht eingehalten, ist die Kugel Ausschuss.

   (a) Es ist bekannt, dass der Durchmesser D der Kugeln unter den gegebenen Fertigungsbedingungen eine normalverteilte zufällige Größe mit den Parametern

$$\mu = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}$$

   ist. Bestimmen Sie die Ausschussquote p, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Kugel sich als Ausschuss erweist.

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$D \sim N(\mu, \sigma^2) = N\left(\frac{d_1 + d_2}{2}, \left(\frac{d_2 - d_1}{4}\right)^2\right)$$

und damit für die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel genügt:

$$\begin{aligned}
P(d_1 \leq D \leq d_2) &= \Phi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right) \\
&= \Phi\left(4 \cdot \frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{d_2 - d_1}\right) - \Phi\left(4 \cdot \frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{d_2 - d_1}\right) \\
&= \Phi\left(4 \cdot \frac{2d_2 - d_1 - d_2}{2(d_2 - d_1)}\right) - \Phi\left(4 \cdot \frac{d_1 - d_2}{2(d_2 - d_1)}\right) \\
&= \Phi\left(2 \cdot \frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1}\right) - \Phi\left(2 \cdot \frac{d_1 - d_2}{d_2 - d_1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi\left(2 \cdot \frac{-(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) \\
&= 2 \cdot \Phi(2) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.9772 - 1 \\
&= 1.9544 - 1 \\
&= 95.44\%
\end{aligned}$$

Damit ist also die Ausschussquote $p = 1 - P(d_1 \leq D \leq d_2) = 4.56\%$. □

(b) Es ist bekannt, dass der Durchmesser D normalverteilt mit $\mu = {}^{d_1+d_2}/_2$ ist und dass der Ausschuss 10% der gesamten Partie ausmacht. Bestimmen Sie σ.

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(d_1 \leq D \leq d_2) && = \Phi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right)\right) \\
\equiv\quad & 1.9 && = 2 \cdot \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 0.95 && = \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) \\
\Longrightarrow\quad & \Phi(1.65) && \approx \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\quad & 1.65 && \approx \frac{d_2 - d_1}{2\sigma} \\
\equiv\quad & 2\sigma && \approx \frac{d_2 - d_1}{1.65} \\
\equiv\quad & \sigma && \approx \frac{d_2 - d_1}{3.3}
\end{aligned}
$$

$\square$