Stochastik

Übungsblatt 7

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 24. November 2021

1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen $(X; Y)$ lautet wie in der folgenden Tabelle dargestellt:

X \ Y	1	2	3	
1	0.3	0.05	0.05	
2	0.1	0.1	0.1	
3	0.1	0.1	0.1	

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $Y \leq 2$ und $X > 2$ ist.

Lösung:

Es gilt:

$$P(X > 2; Y \leq 2) = \sum_{x_i > 2} \sum_{y_i \leq 2} f(x_i; y_j) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$\square$

(b) Geben Sie die Randwahrscheinlichkeiten an.

Lösung:

Es gilt:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{für } x = 1 \\ 0.3 & \text{für } x = 2 \\ 0.3 & \text{für } x = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } y = 1 \\ 0.25 & \text{für } y = 2 \\ 0.25 & \text{für } y = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

X \ Y	1	2	3	$f_1(x)$
1	0.3	0.05	0.05	0.4
2	0.1	0.1	0.1	0.3
3	0.1	0.1	0.1	0.3
$f_2(y)$	0.5	0.25	0.25	1

$\square$

(c) Sind X und Y unabhängig?

Lösung:

Es gilt:

$$f(1;1) = 0.3 \neq 0.2 = 0.5 \cdot 0.4 = f_1(1) \cdot f_2(1)$$

Damit sind X und Y stochastisch abhängig. $\square$

(d) Wie sehen die Wahrscheinlichkeit für Y aus, wenn $X = 1$ ist?

Lösung:

Es gilt:

$$P(Y \mid X = 1) = \frac{f(X = 1; Y)}{f_1(1)} = \frac{f(X = 1; Y)}{0.4} = \begin{cases} {}^{0.3}/_{0.4} & \text{für } Y = 1 \\ {}^{0.05}/_{0.4} & \text{für } Y = 2 \\ {}^{0.05}/_{0.4} & \text{für } Y = 3 \\ {}^{0}/_{0.4} & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} {}^{3}/_{4} & \text{für } Y = 1 \\ {}^{1}/_{8} & \text{für } Y = 2 \\ {}^{1}/_{8} & \text{für } Y = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

2. Betrachten Sie folgendes Zufallsexperiment: Eine faire Münze mit den Seiten 0 und 1 wird zweimal unabhängig geworfen. Die Zufallsvariable Z_1 bezeichne das Ergebnis des ersten Wurfes, entsprechend Z_2 das des zweiten Wurfes.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aller möglichen 2er Tupel, die bei dem Doppelmünzwurf entstehen.

Lösung:

Es gilt:

$$\Omega = \{(Z_1, Z_2) \mid Z_1, Z_2 \in \{0;1\}\} \quad \text{mit} \quad |\Omega| = 4$$

sowie:

$$P(Z_1 = 0) = P(Z_1 = 1) = P(Z_2 = 0) = P(Z_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

und da die beiden Zufallsvariablen offensichtlich stochastisch unabhängig voneinander sind:

$$P(Z_1; Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2) = \frac{1}{4}$$

□

Wir betrachten nun die neuen Zufallsvariablen

$$X = Z_1 - Z_2 \quad \text{und} \quad Y = Z_1 + Z_2$$

   (a) Welche Werte haben die beiden Zufallsvariablen?

Lösung:

Es gilt:

Z_1	Z_2	$P(Z_1; Z_2)$	$X = Z_1 - Z_2$	$Y = Z_1 + Z_2$
0	0	1/4	0	0
0	1	1/4	−1	1
1	0	1/4	1	1
1	1	1/4	0	2

□

   (b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die jeweiligen Randverteilungen (tabellarische Darstellung).

Lösung:

X \ Y	0	1	2	$f_1(x)$
−1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$f_2(y)$	1/4	1/2	1/4	1

□

(c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

Lösung:

Es gilt offensichtlich:

$$E(Z_1) = E(Z_2) = \frac{1}{2}$$

und damit

$$E(X) = E(Z_1 - Z_2) = E(Z_1) - E(Z_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$E(Y) = E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

□

(d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i \cdot y_j \cdot f(x_i; y_j) - E(X)E(Y)\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 \cdot 1\\ &= 0\end{aligned}$$

□

(e) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung:

Es gilt:

$$f(-1; 0) = 0 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = f_1(-1) \cdot f_2(0)$$

Damit sind X und Y stochastisch abhängig. □

3. Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen $(X;Y)$ besitze die Dichtefunktion

$$f(x;y) = \begin{cases} k(25 - xy) & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \text{ und } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{für alle übrigen } (x;y) \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante k.

Lösung:

Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
& \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x;y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{x} k(25 - xy)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 1 \\
\equiv\quad & \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{x} (25 - xy)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k} \\
\equiv\quad & \int_{x=0}^{5} \left[25y - \frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{x} \mathrm{d}\,x = \frac{1}{k} \\
\equiv\quad & \int_{x=0}^{5} \left(25x - \frac{x^3}{2}\right) \mathrm{d}\,x = \frac{1}{k} \\
\equiv\quad & \left[\frac{25x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{5} = \frac{1}{k} \\
\equiv\quad & \frac{25^3}{2} - \frac{25^4}{8} = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

□

(b) Wie lautet die Dichte der Randverteilung von X?

Lösung:

□

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

Lösung:

□

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(0 < X < 2; 0 < Y < 3)$.

Lösung:

□

(e) Berechnen Sie mit $E(Y) = 4/3$ die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Lösung:

□

Zusatzaufgaben

4. Gegeben sei die folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

X \ Y	0	1	
1	$1/48$	$1/16$	
2	$1/16$	$3/16$	
3	$5/48$	$5/16$	
3	$1/16$	$3/16$	

(a) Leiten Sie die zweidimensionale Verteilungsfunktion ab.

Lösung:

☐

(b) Berechnen Sie die Randwahrscheinlichkeiten für beide Zufallsvariablen.

Lösung:

☐

(c) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y vollständig unabhängig sind.

Lösung:

☐

(d) Berechnen Sie aus den Randverteilungen die Erwartungswerte und Varianzen für X und Y.

Lösung:

☐

(e) Berechnen Sie für die Kovarianz bzw. den Korrelationskoeffizienten der Zufallsvariablen X und Y.

Lösung:

☐

5. Der äußerst sensible Diplom-Kaufmann Karl gab seine hoffnungsvolle Managerkarriere auf und unternahm den Versuch, das Leben, sich selbst und die Heranbildung der menschlichen Kultur von Grund auf neu zu erleben. Deshalb quartierte er sich zusammen mit seinem Freund dem Psychater Paul in eine Höhle ein. Er beobachtete ständig auf einer Skala von 0% bis 100% an sich, wie sich sein Wohlbefinden X verändert. Paul meint für die vorgenommene Zeit von $Y \leq 2$ Jahre „Aussteigerdarsein" gelte die Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3/2 x^2 y & \text{für } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_{X,Y}$ in der Tat eine Dichtefunktion ist.

Lösung: $\square$

(b) Bestimmen Sie die Randverteilung von X und Y.

Lösung: $\square$

(c) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig.

Lösung: $\square$

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karls Wohlbefinden während des ganzen ersten Jahres ständig über 50% liegt.

Lösung: $\square$