Stochastik

Hausaufgabenblatt 3

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 9. November 2021

1. Ein Land hat 14 Millionen Einwohner. Davon sind

   700 000 Einwohner arbeitslos
   400 000 Einwohner Akademiker
   100 000 Einwohner arbeitslose Akademiker

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) ein beliebiger Einwohner arbeitslos ist.

   Lösung:

   Seien $A := \{\text{Ein Einwohner ist arbeitslos}\}$ und $B := \{\text{Ein Einwohner ist Akademiker}\}$.

   Wir wissen:

   $$P(A) = \frac{700\,000}{14\,000\,000} = \frac{1}{20}$$

   $\square$

   (b) ein beliebiger Einwohner ein Akademiker ist.

   Lösung:

   Wir wissen:

   $$P(B) = \frac{400\,000}{14\,000\,000} = \frac{1}{35}$$

   $\square$

   (c) ein Einwohner arbeitslos ist, wenn man weiß, dass er ein Akademiker ist.

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{100\,000}{14\,000\,000}}{\frac{1}{35}} = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}$$

   $\square$

(d) ein Einwohner Akademiker ist, wenn man weiß, dass er ein Arbeitsloser ist?

Lösung:

Es gilt:

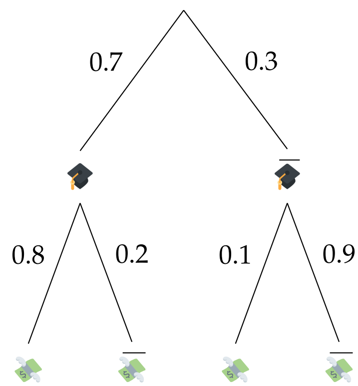
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$$

□

2. Ein Student rechnet sich Chancen auf eine spätere, gut dotierte Berufsposition aus. Am Anfang seines Studiums glaubt der Student, dass er dieses mit der Wahrscheinlichkeit von 0.7 erfolgreich beenden kann. Mit erfolgreich abgeschlossenem Studium beträgt die Wahrscheinlichkeit, die gewünschte Position zu erhalten 0.8, ohne Studienabschluss nur 0.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student

   (a) die Position erhalten wird?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\text{💸}) = P(\text{🎓} \cap \text{💸}) + P(\overline{\text{🎓}} \cap \text{💸}) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.59$$

   □

   (b) keinen Studienabschluss haben wird, wenn er tatsächlich die Position erhalten wird?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\overline{\text{🎓}} \mid \text{💸}) = \frac{P(\overline{\text{🎓}} \cap \text{💸})}{P(\text{💸})} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.59} = \frac{3}{59} = 0.05085$$

   □

   (c) weder einen Studienabschluss erzielen noch die Position erhalten wird?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\overline{\text{🎓}} \cap \overline{\text{💸}}) = 0.3 \cdot 0.9 = 0.27$$

   □

   (d) nur den Studienabschluss aber nicht die Position erhalten wird?

   Lösung:

   Es gilt:

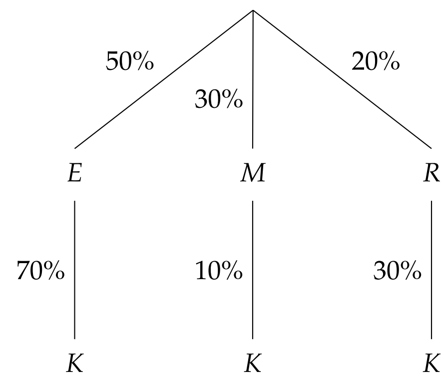
   $$P(\text{🎓} \cap \overline{\text{💸}}) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14$$

   □

3. Wenn ein MATSE sich krank meldet, dann hat er mit 50% Wahrscheinlichkeit eine Erkältungskrankheit (E), mit 30% Wahrscheinlichkeit ein Magen-Darm-Problem (M), sonst irgendetwas anderes (R). Hat er eine Erkältungskrankheit, so leidet er mit 70% Wahrscheinlichkeit unter Kopfschmerzen (K), in den anderen beiden Fällen nur mit 10% (M) bzw. mit 30% (R).

   (a) Stellen Sie einen passenden Ereignisbaum auf.

   Lösung:

   $\square$

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein kranker MATSE Kopfschmerzen?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(K) = P(E \cap K) + P(M \cap K) + P(R \cap K) = 0.5 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.44$$

   $\square$

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet ein kranker MATSE an Erkältung, obwohl er keine Kopfschmerzen hat?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(E \mid \bar{K}) = \frac{P(\bar{K} \cap E)}{P(\bar{K})} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{1 - 0.44} = \frac{0.15}{0.56} \approx 0.2679$$

   $\square$

4. Aufgrund des Praxisbezugs des Informatik Studiums, wurden Projektarbeiten eingeführt, welche in Teams zu je vier Studenten bearbeitet werden sollen. Die Teams sind für die Arbeitsaufteilung innerhalb der Gruppe selbst verantwortlich. Bei dem hier betrachteten Team 2 „jeder macht das was er am besten kann“ ergab sich folgende Tabelle:

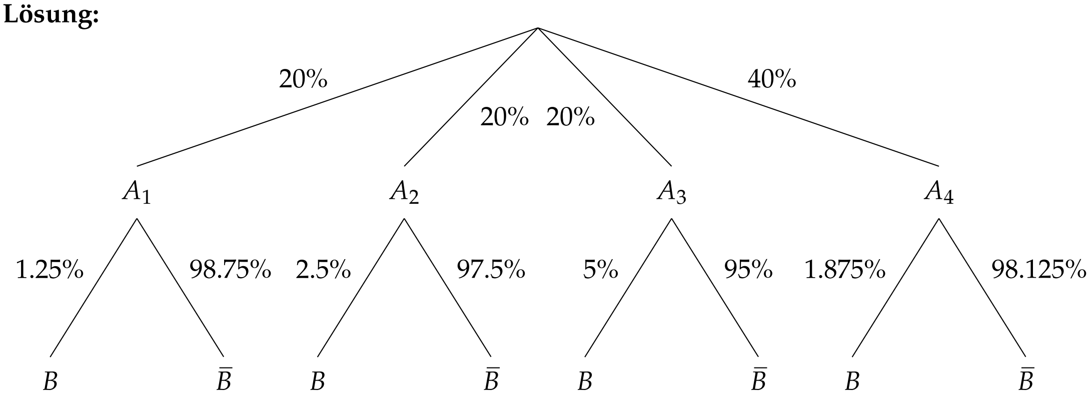
Mitglied	Codeanteil (in %)	Fehler (in %)
1	20	1.25
2	20	2.5
3	20	5
4	40	1.875

Dem fertigen Code ist nicht mehr anzusehen, von welchem Teammitglied er programmiert worden ist. Aus der Masse an Code wird rein zufällig eine Zeile herausgegriffen und auf Fehler überprüft. Folgende Ereignisse werden formuliert:

$$A_i = \{\text{Der Code wurde von Teammitglied } i \text{ programmiert}\} \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$B = \{\text{Der Code ist fehlerhaft}\}$$

(a) Formulieren Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten und zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum.

Lösung:



Es gilt:

$$P(B \mid A_1) = 1.25\%$$
$$P(B \mid A_2) = 2.5\%$$
$$P(B \mid A_3) = 5\%$$
$$P(B \mid A_4) = 1.875\%$$

□

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig herausgegriffene Codezeile fehlerhaft ist.

Lösung:

Es gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i \cap B) = 0.2 \cdot 0.0125 + 0.2 \cdot 0.025 + 0.2 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.01875 = 0.025$$

□

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhafter Code von Teammitglied i programmiert worden ist?

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(A_i \mid B) && = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\
\implies \quad & P(A_1 \mid B) && = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.0125}{0.025} && = 0.1 \\
\wedge \quad & P(A_2 \mid B) && = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.025}{0.025} && = 0.2 \\
\wedge \quad & P(A_3 \mid B) && = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.025} && = 0.4 \\
\wedge \quad & P(A_4 \mid B) && = \frac{P(A_4 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.01875}{0.025} && = 0.3
\end{aligned}
$$

$\square$