1. In einem Beutel befinden sich 6 Münzen: eine 5-Cent-Münze, drei 2-Cent-Münzen und zwei 1-Cent-Münzen. Zufällig werden nacheinander - ohne Zurücklegen - 2 Münzen gezogen. X_1 gebe den Wert der ersten, X_2 den Wert der zweiten gezogenen Münzen an. Bestimmen Sie folgenden Werte:

   (a) die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X_1 = i, X_2 = j)$ für $i, j \in \{1; 2; 5\}$.

Lösung:

Offensichtlich gilt:

X_1 \ X_2	1	2	5	$f_1(X_1)$
1	$1/15$	$1/5$	$1/15$	$1/3$
2	$1/5$	$1/5$	$1/10$	$1/2$
5	$1/15$	$1/10$	0	$1/6$
$f_2(X_2)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$	1

□

   (b) den Erwartungswert $\mathrm{E}(X_i)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X_i)$ ($i = 1, 2$).

Lösung:

Für X_1 gilt offensichtlich:

$$\mu_{X_1} = \mathrm{E}(X_1) = \sum_i i \cdot f_1(i) = \ldots = \frac{13}{6} \approx 2.1667$$

$$\sigma^2_{X_1} = \mathrm{Var}(X_1) = E((X_1 - \mu_{X_1})^2) = \sum_i f_1(i) \cdot \left(i - \mu_{X_1}\right)^2 = \ldots = \frac{65}{36} \approx 1.8056$$

In der Wahrscheinlichkeitsfunktion ist zu sehen, dass die Randverteilungen für beide Zufallsvariablen gleich sind. Damit gilt offensichtlich:

$$\mu_{X_2} = \mathrm{E}(X_2) = \mu_{X_1} = \frac{13}{6} \approx 2.1667 \quad \wedge \quad \sigma^2_{X_2} = \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2_{X_1} = \frac{65}{36} \approx 1.8056$$

□

(c) die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ sowie den Korrelationskoeffizient ρ_{X_1,X_2}.

Lösung:

Es gilt mit $i, j \in \{1, 2, 5\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \mathrm{E}(X_1 X_2) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) = \sum_i \sum_j i \cdot j \cdot f(i,j) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) \\
&= \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + 1 + \frac{1}{3} + 1 + 0\right) - \frac{13}{6} \cdot \frac{13}{6} \\
&= \frac{13}{3} - \frac{169}{36} = -\frac{13}{36} \approx -0.3611
\end{aligned}$$

und

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} = \frac{-\frac{13}{36}}{\sqrt{\frac{65}{36}} \cdot \sqrt{\frac{65}{36}}} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

□