1. Das Gewicht X, das ein Apfel einer bestimmten Sorte hat, sei normalverteilt. Die Untersuchung einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ ergab einen Mittelwert $\bar{x} = 98$g und eine empirische Standardabweichung $s = 0.75$g. Geben Sie den Bereich an, in dem die Varianz mit 95%-iger Sicherheit liegt.

Lösung:

Wir wissen, dass gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.75^2)$$

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Ein geeigneter Schätzer für $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ ist bekanntermaßen

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Für unsere Verteilung gilt dann:

$$s^2 = 0.75^2 = 0.5625$$

Die Zufallsvariable Z mit

$$Z = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

ist dann χ^2-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Es muss gelten:

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& c_1 && \leq Z \leq c_2 \\
\equiv\ & \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) && \leq Z \leq \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\ & \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) && \leq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\ & \frac{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(n-1) \cdot s^2} && \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{(n-1) \cdot s^2} \\
\equiv\ & (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} && \geq \sigma^2 \geq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
\equiv\ & (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} && \leq \sigma^2 \leq (n-1) \cdot \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P((n-1)\cdot\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \sigma^2 \leq (n-1)\cdot\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}) = \gamma = 1-\alpha \\
\equiv\ & P(9\cdot\frac{0.5625}{\chi^2_9\,(0.975)} \leq \sigma^2 \leq 9\cdot\frac{0.5625}{\chi^2_9\,(0.025)}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(9\cdot\frac{0.5625}{19.02} \leq \sigma^2 \leq 9\cdot\frac{0.5625}{2.70}) && = 0.95 \\
\equiv\ & P(0.2662 \leq \sigma^2 \leq 1.875) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{10} mit

$$I_{10} = [0.2662, 1.875]$$

□