Stochastik

Übungsblatt 8

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 30. November 2021

1. Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch einen Zufallsvariable mit unbekannten Erwartungswert μ und einer Streuung $\sigma = 0.1$ [Maßeinheiten] angemessen beschrieben werden kann. Bei einer Messreihe soll die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel der Messwerte und μ kleiner als 0.02 [Maßeinheiten] ist, mindestens 95% sein. Wie viele Messungen müssen Sie durchführen

   (a) unter Anwendung der Ungleichung von Tschebyscheff?

Lösung:

Wir wissen:

- $X = \{\text{Messwerte einer Messung}\}$
- $\overline{X}_{(n)} = \{\text{arithmetisches Mittel bei } n \text{ Messungen}\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $\mu = ?$
- $\sigma = 0.1$
- $\epsilon = 0.02$
- $P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < 0.02\right) \geq 95\%$

Nach Tschebyscheff gilt:

$$P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \text{bzw.} \quad P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| \geq \epsilon\right) && \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\equiv\quad & 1 - P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < \epsilon\right) && \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\equiv\quad & P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < \epsilon\right) && \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\implies\quad & 1 - \frac{0.1^2}{n \cdot 0.02^2} && \geq 0.95 \\
\equiv\quad & \frac{0.1^2}{n \cdot 0.02^2} && \leq 0.05 \\
\equiv\quad & n && \geq 500
\end{aligned}$$

$\square$

(b) unter Berücksichtigung, dass das arithmetische Mittel von n unabhängigen Zufallsvariablen (für großes n) näherungsweise normalverteilt ist?

Lösung:

Es gilt:

$$\overline{X}_{(n)} \sim N(\mu_{\overline{X}_{(n)}}, \sigma^2_{\overline{X}_{(n)}})$$

□

2. Ein Würfel wird 100-mal geworfen. Die Zufallsvariable Y sei die Gesamtaugensumme.

   (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

   Lösung:

   □

   (b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße Y Werte aus dem Intervall $[330, 380]$ annimmt.

   Lösung:

   □

3. Mittels einer Abfüllmaschine werden X_1 Gramm eines Produktes in X_2 Gramm schwere Dosen gefüllt. Sodann werden 100 gefüllte Dosen in einer X_3 Gramm schwere Kiste verpackt. Dabei seien X_1, X_2 und X_3 unabhängige und ausreichend genau nach den Normalverteilungen $N_1(155, 4^2)$, $N_2(45, 3^2)$ und $N_3(1000, 20^2)$ verteilte zufällige Variable.

   (a) Bestimmen Sie Verteilung, Erwartungswert und Varianz einer zufällig aus der Produktion herausgegriffenen gefüllten Dose.

   Lösung:

   □

   (b) Bestimmen Sie Verteilung, Erwartungswert und Varianz einer zufällig aus der Produktion herausgegriffenen gefüllten Kiste.

   Lösung:

   □

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Kiste schwerer als 21 100 Gramm?

   Lösung:

   □

4. Bei einer Bank werden die Zinsen von 100 zufällig ausgewählten Konten berechnet und auf die am nächsten gelegenen vollen Euro-Beträge auf- bzw. abgerundet. Unter der Annahme, dass der Rundungsfehler gleichverteilt in $[-1/2, 1/2]$ ist, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betrag des Fehlers der Zinssumme höchstens 2 Euro beträgt (ZGWS!)

Lösung:

$\square$

Zusatzaufgaben

5. Der zufällige Fehler X eines Messgerätes habe den Erwartungswert $E(X) = 0$µm und die Standardabweichung $\sigma = 20$µm. Damit liegen keine systematischen Messfehler vor, es können nur zufällige Messfehler auftreten. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel aus 25 unabhängigen Messungen von der wahren Länge des zu messenden Werkstücks dem Betrag nach um höchstens 3µm abweicht.

Lösung:

□