1. Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ der Form

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{8} & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ c_1 + c_2(1 - e^{-x}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2.

Lösung:

Die Verteilungsfunktion muss normiert sein. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} F(x) &&= 1 \\
\equiv\quad & \lim_{x\to\infty} \left(c_1 + c_2(1 - e^{-x})\right) &&= 1 \\
\equiv\quad & \lim_{x\to\infty} c_2(1 - e^{-x}) &&= 1 - c_1 \\
\equiv\quad & \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) &&= \frac{1 - c_1}{c_2} \\
\equiv\quad & \lim_{x\to\infty} -e^{-x} &&= \frac{1 - c_1}{c_2} - 1 \\
\equiv\quad & \lim_{x\to\infty} e^{-x} &&= \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\
\equiv\quad & 0 &&= \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\
\equiv\quad & c_2 &&= 1 - c_1
\end{aligned}$$

Weiterhin muss die Verteilungsfunktion rechtsstetig sein. Es gilt damit:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\downarrow 0} F(x) &&= F(0) \\
\equiv\quad & \lim_{x\downarrow 0} c_1 + c_2(1 - e^{-x}) &&= \frac{1}{4} \\
\equiv\quad & c_1 + (1 - c_1)(1 - 1) &&= \frac{1}{4} \\
\equiv\quad & c_1 &&= \frac{1}{4} \\
\implies\quad & c_2 &&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

□

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens den Wert 2 annimmt, wenn man weiß, dass X positiv ist.

Lösung:

□