1. Gegeben ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X als

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

   (a) Wie groß ist a?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x &&= 1 \\ \equiv \quad & \int_{1}^{-1} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &&= 1 \\ \equiv \quad & a\int_{1}^{-1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &&= 1 \\ \equiv \quad & a\left[\arctan(x)\right]_1^{-1} &&= 1 \\ \equiv \quad & a\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) &&= 1 \\ \equiv \quad & \frac{a\pi}{2} &&= 1 \\ \equiv \quad & a &&= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

□

   (b) Wie groß ist der Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E(X)} &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= {}^{1}\frac{\pi}{4}\int_{x=-1}^{1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\ln(u)\right]_{x=-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\ln(2) - \ln(2)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

[1] $u := 1 + x^2 \implies \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x \iff \mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,u}{2x}$

(c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ der Zufallsvariablen X.

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (x-0)^2 \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} 1 - \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{\pi}{2} \left[x - \arctan(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□