Stochastik

Ba-Studiengang

Angewandte Mathematik u. Informatik

Wintersemester 2021/2022

Vorlesungsinhalte Stochastik

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

I.1 Einführung in die Kombinatorik
I.2 Grundbegriffe
I.3 Wahrscheinlichkeit
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen
I.6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
I.7 Kovarianz und Korrelation
I.8 Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze

Vorlesungsinhalte Stochastik

II. Beschreibende Statistik

II.1 Merkmale und weitere wichtige Begriffe
II.2 Darstellung der Beobachtungsergebnisse
II.3 Statistische Maßzahlen

III. Schließende Statistik

III.1 Grundbegriffe
III.2 Punktschätzungen
III.3 Intervallschätzungen
III.4 Statistische Testverfahren

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

1.1 Das Urnenmodell

Prinzip:
In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln, die sich (z.B. in ihrer Farbe) unterscheiden:

- Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es für die Kugeln?
- Mögliche Zusammensetzungen der „Stichprobe" bei zufälliger Entnahme von k Kugeln?
- ......

Kein langweiliges Modell zur Einführung kombinatorischer Grundlagen, taucht immer wieder in Anwendungen der Statistik zur Entscheidungsfindung auf!

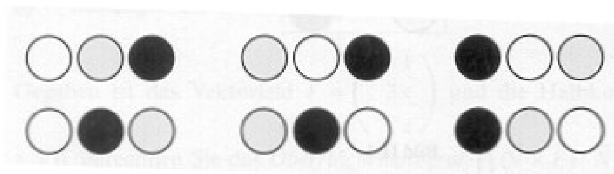
Beispiel:

Die Endfertigung benötigt für ein Produkt 5 Halterungen.
Wegen Lieferproblemen wurden Halterungen bei 3 verschiedenen Lieferanten gekauft und auf dem Lager nicht getrennt gehalten. Die Endmontage erhält ein Los von 1000 Halterungen (200 von Lieferant A, 500 von B und 300 von C). Lieferant A „beichtet" zu spät, dass seine Halterungen nicht die Mindestfestigkeit aufweisen. Wie viele der Endprodukte müssen aussortiert werden, da sie mindestens eine Halterung von A enthalten?
Die „Urne" ist hier das Lieferlos, die „Kugeln" sind die Halterungen, die „Farben" sind die Lieferanten!

1.2 Permutationen

Es befinden sich n verschiedenfarbige Kugeln in einer Urne: Wie viele Möglichkeiten der Anordnung nebeneinander gibt es?

Beispiel: $n=3$

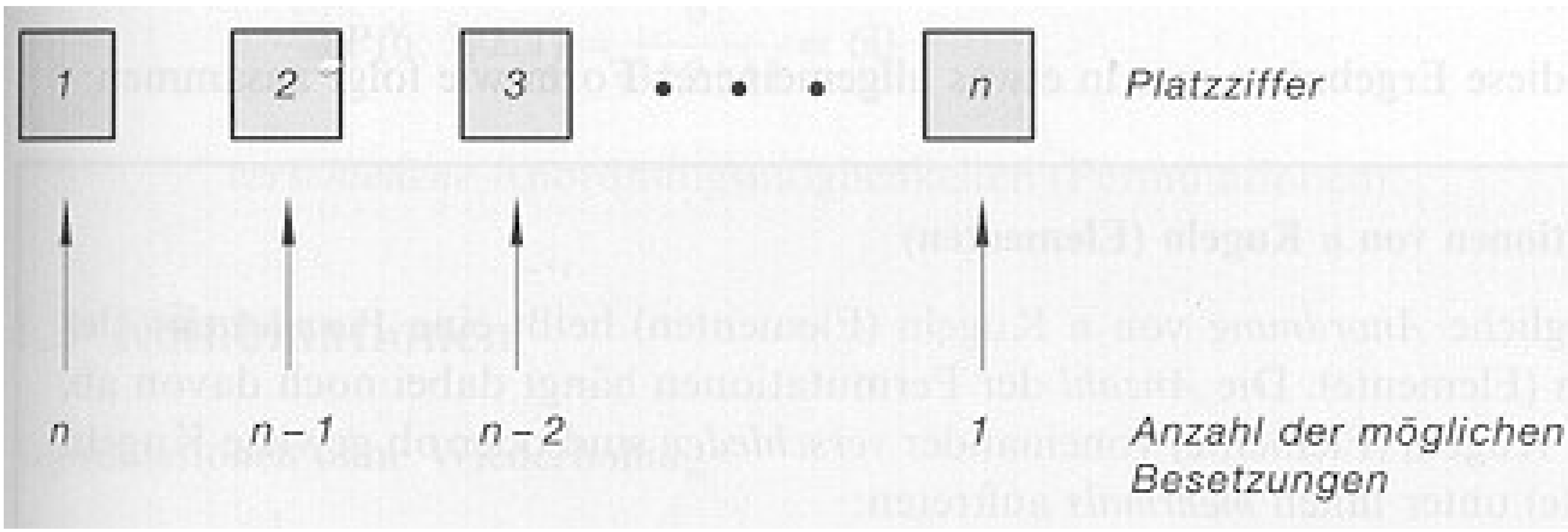


Allgemein: Eine Anordnung von n verschiedenen Elementen in einer bestimmten Reihenfolge heißt eine „Permutation“ der n Elemente.

Wie groß ist die Anzahl P der Permutationen von n Elementen?

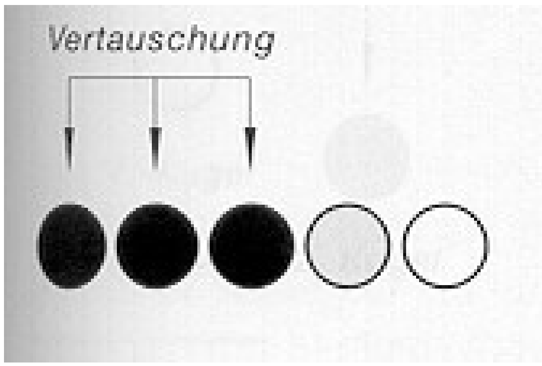
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

Wie groß ist die Anzahl P der Permutationen von n Elementen?



$$\boxed{P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}$$

Problem: Was tun, wenn sich unter den n Kugeln n_1 gleiche befinden?



Alle Anordnungen, die durch Vertauschen der gleichen Kugeln untereinander entstehen, fallen zusammen. Bei n_1 gleichen Kugeln gibt es $P(n_1)=n_1!$ Möglichkeiten, die gleichen Kugeln untereinander zu vertauschen.

$$\boxed{P(n;n_1) = \frac{P(n)}{P(n_1)} = \frac{n!}{n_1!}}$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten bleiben.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

Problem: Was tun, wenn sich unter den n Kugeln n_1 gleiche befinden?

$$\boxed{P(n;n_1)=\frac{P(n)}{P(n_1)}=\frac{n!}{n_1!}}$$

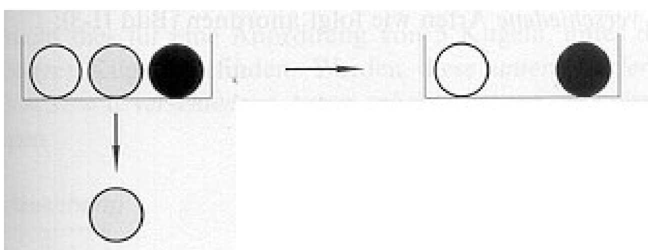
verschiedene Anordnungsmöglichkeiten bleiben.

Falls sich unter den n Kugeln jeweils n_1, n_2, ..., n_k gleiche befinden:

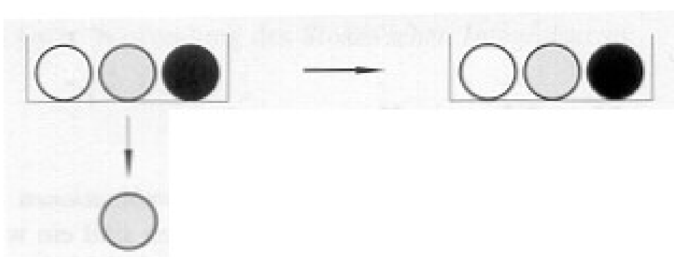
$$\boxed{P(n;n_1;n_2;\ldots n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}\quad mit\quad \sum_{i=1}^{k} n_i=n;\quad k\le n}$$

1.3 Kombinationen

<u>Nächster Schritt</u>:
Einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln entnommen. Dabei ist prinzipiell zwischen zwei verschiedenen Arten der Ziehung zu unterscheiden:

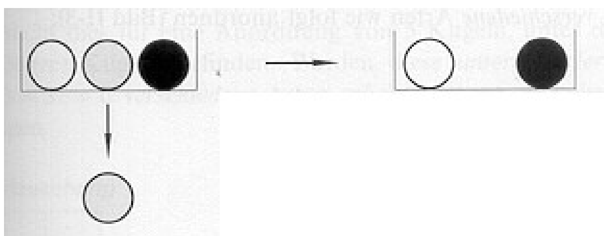


<u>Ziehung ohne Zurücklegen</u>
Jede Kugel kann höchstens einmal gezogen werden, da sie nach der Ziehung ausscheidet.



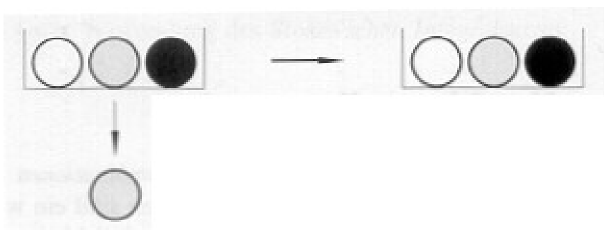
<u>Ziehung mit Zurücklegen</u>
Jede Kugel ist bei der nächsten Ziehung wieder dabei.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik



Ziehung ohne Zurücklegen

Jede Kugel kann höchstens einmal gezogen werden, da sie nach der Ziehung ausscheidet.



Ziehung mit Zurücklegen

Jede Kugel ist bei der nächsten Ziehung wieder dabei.

Zusätzliche Unterscheidung:

Soll die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt werden oder nicht?

Geordnete Stichprobe:

Reihenfolge der gezogenen Elemente wird berücksichtigt

Ungeordnete Stichprobe:

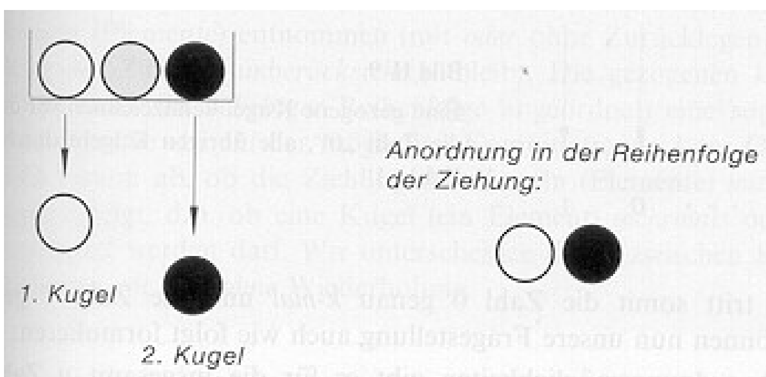
Reihenfolge der gezogenen Elemente spielt keine Rolle

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

<u>1. Möglichkeit</u>:
k Kugeln ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen <u>ohne</u> Berücksichtigung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe)

„Kombination k-ter Ordnung ohne Wiederholung“

<u>Beispiel</u>:



Diese beiden Stichproben unterscheiden sich lediglich in der Reihenfolge und werden daher als Kombinationen 2. Ordnung nicht unterschieden!

Wie viele Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung gibt es bei n verschiedenen Kugeln in der Urne?

Gedankenexperiment:

- Man ordne die n Kugeln auf n Plätzen nebeneinander an.

- Jedem Platz (nicht der Kugel auf dem Platz!) wird zufällig eines der beiden Merkmale „wird gezogen“ (k Plätze) bzw. „wird nicht gezogen“ (n-k Plätze) zugeordnet; damit ist eine Kombination k-ter Ordnung ohne Wiederholung festgelegt.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

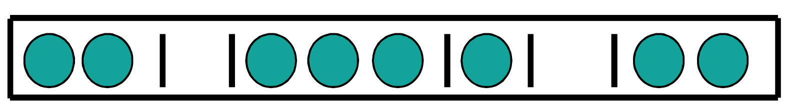
Um alle möglichen Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung zu erhalten, müssen alle Permutationen der n Kugeln betrachtet werden, wobei ein Vertauschen der Kugeln auf Plätzen mit demselben Merkmal („wird gezogen" bzw. „wird nicht gezogen") keine neue Kombination ergibt.

$$\Rightarrow \boxed{C(n;k) = P(n;k;n-k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

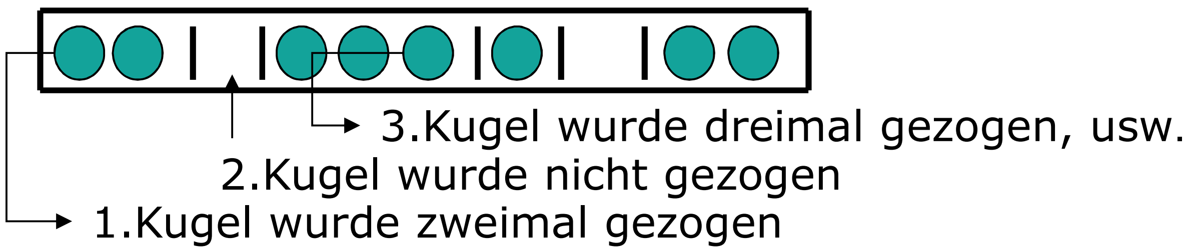
2. Möglichkeit:
k Kugeln ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe)

„Kombination k-ter Ordnung mit Wiederholung“

Beispiel: n=6 Kugeln; k=8 Ziehungen mit Zurücklegen
Falls i-te Kugel gezogen wird: Einen grünen Chip in i-tes Fach eines Setzkastens legen
Am Ende der Ziehungen liegen k=8 Chips in n=6 Fächern:



I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik



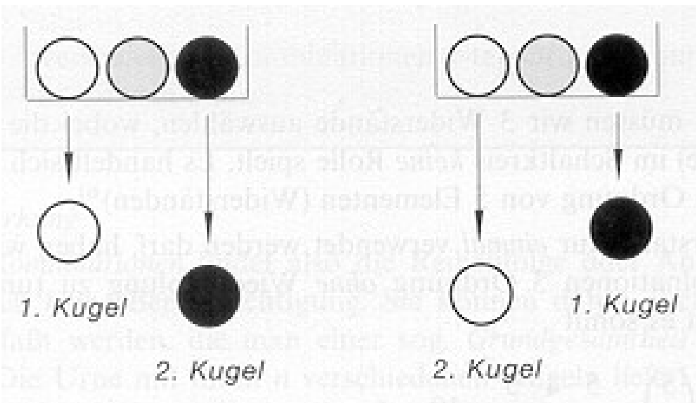
Alle k (=8) Chips und 5 (=n-1) Trennwände permutieren, wobei die Vertauschung der k Chips untereinander und der n-1 Trennwände untereinander keine neue Kombination ergibt:

$$\boxed{C_W(n;k) = P(k+n-1;k;n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}}$$

1.4 Variationen

3. Möglichkeit:
k Kugeln ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge (geordnete Stichprobe)

„Variation k-ter Ordnung ohne Wiederholung"



Beispiel: n=3 Kugeln, Ziehung zweier Kugeln ohne Zurücklegen

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

Die beiden Versuchsausgänge unterscheiden sich in der Reihenfolge der gezogenen Kugeln und werden daher als zwei verschiedene Variationen 2. Ordnung ohne Wiederholung betrachtet.

Wie viele Variationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung gibt es bei n verschiedenen Kugeln in der Urne?

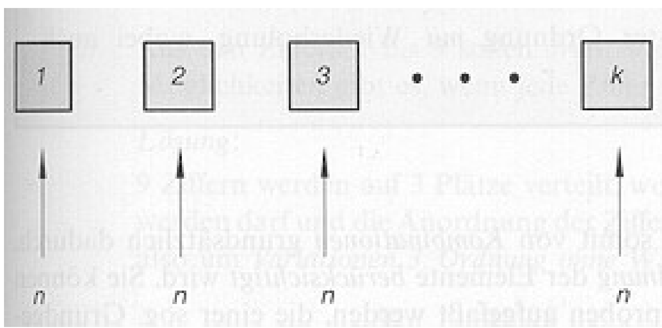
Die Zahl der Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung $C(n;k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

enthält k verschiedene Kugeln, die sich auf k! verschiedene Arten anordnen lassen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(n;k) = k! \cdot C(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

4. Möglichkeit:
k Kugeln ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge (geordnete Stichprobe)

„Variation k-ter Ordnung mit Wiederholung“



Jeder der k Plätze in einer solchen Anordnung kann mit jeder der n Kugeln besetzt werden.

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_W(n;k) = n^k}$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.1 Einführung in die Kombinatorik

Zusammenfassung:

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung	
Kombinationen k-ter Ordnung	$C(n;k) = \binom{n}{k}$	$C_w(n;k) = \binom{n+k-1}{k}$	ungeordnete Stichproben
Variationen k-ter Ordnung	$V(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_w(n;k) = n^k$	geordnete Stichproben
	Ziehung ohne Zurücklegen	Ziehung mit Zurücklegen	

Beispiel: Wurf eines homogenen Würfels

Dieses „Experiment" ist ein einfaches Beispiel für einen speziellen stochastischen Vorgang, nämlich ein „Ideales Zufallsexperiment":

Das Experiment wird unter genau festgelegten Bedingungen, den sogenannten Versuchsbedingungen, durchgeführt.

Die Menge der möglichen Ergebnisse (Ausgänge) ist vor der Durchführung des Experiments bekannt.

Das Ergebnis einer konkreten Durchführung des Experiments lässt sich nicht mit Sicherheit voraussagen, sondern ist zufallsbedingt.

Das Experiment kann zumindest prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.

<u>Weitere Beispiele</u>:

- Wurf einer Münze
- Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel
- Ziehen eines elektronischen Bauteils aus einem Lieferlos und Test auf Funktionstüchtigkeit
- Durchmesser eines Bolzens aus einer laufenden Fertigung

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bezeichnen wir als „Ergebnismenge" Ω

Für unser Beispiel des einfachen Würfelwurfes: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Interessieren wir uns nicht für alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperimentes, sondern nur für bestimmte, z.B. „Würfeln einer geraden Zahl", so sprechen wir von einem

„Ereignis"

A ist eingetreten, wenn das Ergebnis des Zufallsexperiments in A liegt: $A = \{2, 4, 6\}; \quad A \subseteq \Omega$

Spezialfall: Einelementige Teilmengen von Ω sind

„Elementarereignisse“

$$\omega \subseteq \Omega \quad mit \quad |\omega| = 1$$

Wir betrachten zunächst nur endliche oder abzählbar unendliche Ergebnismengen:

Beispiele:

1.) Endliche Ergebnismenge beim Wurf eines Würfels:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \omega_i = \{i\}; \quad i = 1, \ldots, 6$$

2.) Solange würfeln, bis erstmalig die „6“ kommt:
„Abzählbar unendliche“ Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathcal{N}$$

Gegenbeispiele: $\mathcal{R}$; $\{x \in \mathcal{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

Spezialfälle:
Unmögliches Ereignis und sicheres Ereignis:

$$\emptyset \subseteq \Omega$$

$$\Omega \subseteq \Omega$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.2 Grundbegriffe

Ein Ereignis A ist damit entweder

- Das unmögliche Ereignis
(A enthält kein Element von Ω)
- Ein Elementarereignis
(A enthält genau ein Element von Ω)
- Eine Zusammenfassung mehrerer Elementarereignisse
(A enthält mehrere Elemente von Ω)
- Das sichere Ereignis
(A enthält alle Elemente von Ω; A=Ω)

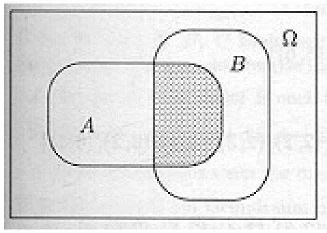
Die Menge aller Ereignisse, die sich aus der Ergebnismenge bilden lässt, heißt

„Ereignisraum“

Da Ereignisse Teilmengen der Ergebnismenge sind, lassen sie sich auch wie Mengen verknüpfen. Wir erhalten dadurch zusammengesetzte Ereignisse:

Schnittmenge: A und B treten gleichzeitig ein

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

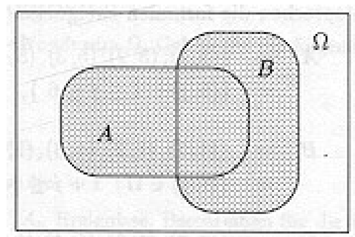


Allgemein:
Jedes Ereignis A_1 bis A_n tritt ein:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

Vereinigungsmenge:
Mindestens eines der Ereignisse A oder B tritt ein, evtl. auch beide

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

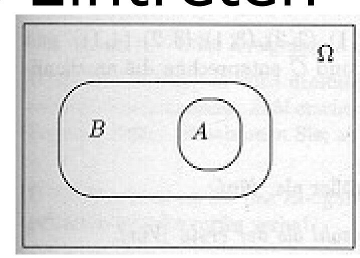


Allgemein:
Mindestens eines der Ereignisse A_1 bis A_n tritt ein:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

Teilmenge:
Jedes Element von A gehört auch zu B; das Eintreten von A zieht das Eintreten von B nach sich

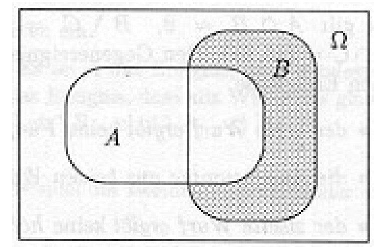
$$A \subseteq B$$



I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.2 Grundbegriffe

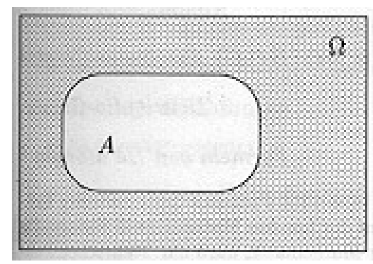
<u>Differenzmenge</u>:
B vermindert um A

$$B \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \wedge \omega \notin A\}$$



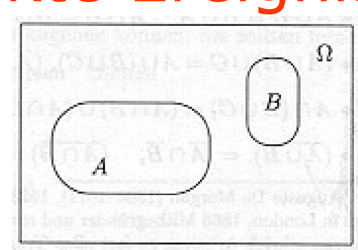
<u>Komplement von A</u>:
Tritt ein, wenn A nicht eintritt

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$



<u>Unvereinbare Ereignisse</u>:
Durchschnitt ist die leere Menge; A und B können nie gleichzeitig eintreten: „Disjunkte Ereignisse"

$$A \cap B = \emptyset = \{\ \}$$



I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.2 Grundbegriffe

Disjunkte Ereignisse sind eine im Hinblick auf die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten besonders angenehme Situation, darum für die Vereinigung disjunkter Ereignisse auch übliche Schreibweise:

$$A \cup B = A + B$$ (Nur für disjunkte Ereignisse!)

Hilfreich bei der Berechnung von Komplementen zu bereits verknüpften Ereignissen sind die Formeln von De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

3.1 Laplace-Experimente

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit einer endlichen Ergebnismenge:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$$

Es gibt eine Reihe von Zufallsexperimenten, bei denen keines der Elementarereignisse gegenüber einem anderen bevorzugt ist, d.h. bei ausreichend häufiger Wiederholung des Experimentes tritt jedes Elementarereignis mit nahezu gleicher Häufigkeit auf. Ein derartiges Experiment bezeichnen wir als

„Laplace – Experiment"

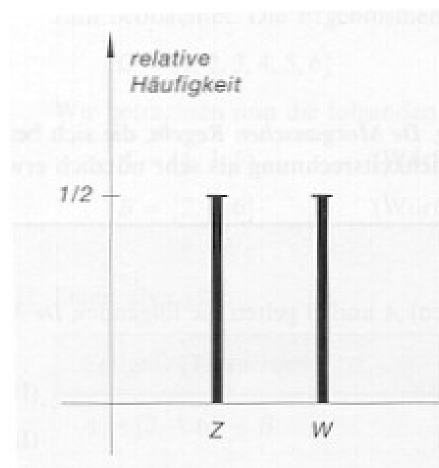
Beispiele:

1.) Wurf einer Münze $\Omega = \{W, Z\}$

Absolute Häufigkeit $n(W) \approx n(Z)$

Relative Häufigkeit

$$h_n(W) = \frac{n(W)}{n} \approx h_n(Z) = \frac{n(Z)}{n} \approx \frac{1}{2}$$



„Stabdiagramm“

	Anzahl der Würfe K	Anzahl m des Auftretens von A ('Zahl')	Häufigkeit h(A) des Auftretens von A
Buffon	4.040	2.048	0,5080
Pearson	12.000	6.019	0,5016
Pearson	24.000	12. 012	0,5005

Quelle: **Gnedenko**, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1962

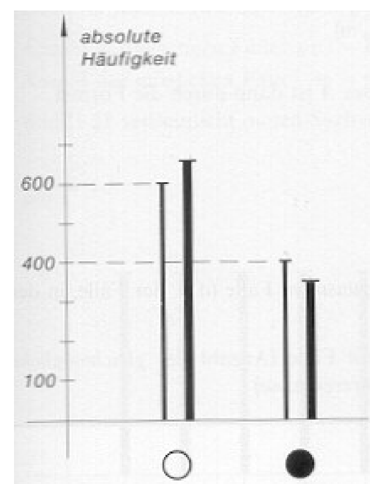
2.) Urne mit 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln;
Ziehung einer Kugel mit Zurücklegen

$$\Omega = \{W1, W2, W3, S1, S2\}; \; W = \{W1, W2, W3\} \subseteq \Omega; \; S = \{S1, S2\} \subseteq \Omega$$

Bei n=1000 Ziehungen Erwartung für die absoluten Häufigkeiten:

$$n(W) \approx \frac{3}{5} \cdot 1000 = 600; \quad n(S) \approx \frac{2}{5} \cdot 1000 = 400$$

Bei der praktischen Durchführung ergeben sich zufallsbedingt nie genau diese Zahlen, sondern leicht abweichende relative Häufigkeiten:



I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit

Einem Elementarereignis ω_i aus einer Ergebnismenge Ω mit m gleichmöglichen Elementarereignissen wird definitionsgemäß die positive Zahl

$$\boxed{p(\omega_i) = \frac{1}{m}}$$

als „Wahrscheinlichkeit“ zugeordnet.

Genauer: $P(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$

$$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{|\Omega|} \quad \textit{für} \quad \omega \in \Omega$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \textit{für} \quad A \subseteq \Omega$$

Definition der Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Experiment

Bei einem *Laplace-Experiment* mit der (endlichen) Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ besitzen *alle* Elementarereignisse ω_i die *gleiche* Wahrscheinlichkeit

$$p(\omega_i) = \frac{1}{m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{II-29}$$

Die *Wahrscheinlichkeit* eines *Ereignisses* A ist dann durch die Formel

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} \tag{II-30}$$

gegeben.

Dabei bedeuten:

$g(A)$: Anzahl der für das Ereignis A *günstigen* Fälle (d.h. der Fälle, in denen das Ereignis A *eintritt*)

m: Anzahl der insgesamt *möglichen* Fälle (Anzahl der *gleichmöglichen* oder *gleichwahrscheinlichen* Elementarereignisse)

Problem:

Diese „klassische“ Definition der Wahrscheinlichkeit ist nur sehr begrenzt anwendbar:

- Die Ergebnismenge Ω muss endlich sein.
- Alle Elementarereignisse müssen gleichwahrscheinlich sein.

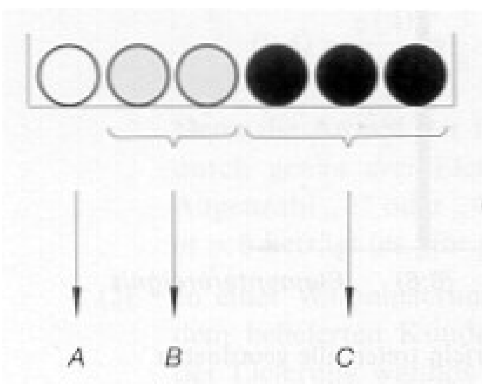
Für alle anderen Fälle ist eine allgemeinere Einführung der Wahrscheinlichkeit erforderlich!

Allgemein wird die Wahrscheinlichkeit nicht inhaltlich, sondern durch nicht beweisbare Grund-Postulate (Axiome) definiert, die sich an den Eigenschaften relativer Häufigkeiten orientieren.

3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome

Eigenschaften der relativen Häufigkeit:

Beispiel: Urne mit einer weißen, zwei grauen und drei schwarzen Kugeln



Ziehung einer Kugel mit Zurücklegen: Laplace-Experiment

$$\Omega = \{W1, G1, G2, S1, S2, S3\};$$

$$A = \{W1\}; \quad B = \{G1, G2\}; \quad C = \{S1, S2, S3\}$$

Bei n Ziehungen absolute Häufigkeiten:

$$n(A) + n(B) + n(C) = n$$

Relative Häufigkeiten:

$$h_n(A) = \frac{n(A)}{n}; \quad h_n(B) = \frac{n(B)}{n}; \quad h_n(C) = \frac{n(C)}{n} \qquad \boxed{0 \le h_n \le 1}$$

Betrachte Ereignis
„Ziehung einer weißen <u>oder</u> grauen Kugel"

$$A \cup B = \{W1, G1, G2\}$$

A und B schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)

Absolute Häufigkeit: $n(A) + n(B)$

Relative Häufigkeit: $h_n(A \cup B) = \dfrac{n(A) + n(B)}{n} = h_n(A) + h_n(B)$

Allgemein für zwei sich gegenseitig ausschließende Ereignisse A und B:

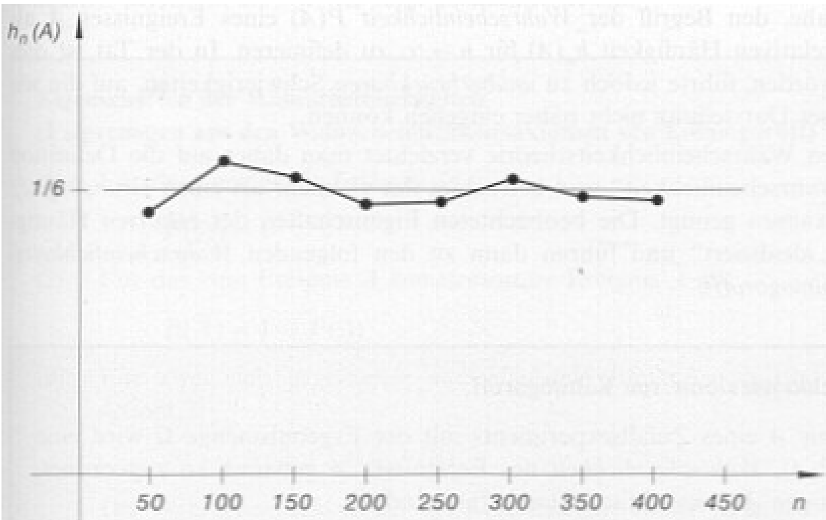
$$\boxed{h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)}$$

Relative Häufigkeit für das sichere Ereignis:

$$\boxed{h_n(\Omega) = h_n(A \cup B \cup C) = \frac{n(A) + n(B) + n(C)}{n} = 1}$$

Verhalten der relativen Häufigkeit bei umfang-reichen Versuchsreihen:

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



Ziehung einer Kugel mit Zurücklegen: Laplace-Experiment

$$\Omega = \{W1, G1, G2, S1, S2, S3\};$$

$$A = \{W1\}; \quad P(A) = \frac{1}{6}$$

Mit zunehmender Anzahl von Ziehungen n streben die beobachteten relativen Häufigkeiten gegen einen stabilen Wert, der der klassischen Wahrscheinlichkeit entspricht.

Daher naheliegender Versuch für die Definition einer Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} h_n(A)$$

Aber:
Existenz- und Eindeutigkeitsprobleme bei diesem Grenzwert, darum wird ein axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff gesucht.

Wir betrachten zunächst wieder nur den Fall einer endlichen Ergebnismenge Ω:

Kolmogoroff-Axiome:
Jedem Ereignis E wird eine Zahl P(E) als „Wahrscheinlichkeit" zugeordnet, wobei gelten soll:

$$1.)\ P(E) \geq 0$$

$$2.)\ P(\Omega) = 1$$

$$3.)\ E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Das dritte Axiom lässt sich sofort auf endlich viele disjunkte Ereignisse verallgemeinern:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n)$$

Keine Aussage darüber, wie die Zahl P(E) im konkreten Fall zu berechnen ist!

Folgerungen für die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten:

1.) $P(\emptyset) = 0$

2.) $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

3.) $0 \leq P(E) \leq 1$

4.) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

5.) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis:

- Einfachster Fall: Laplace-Experiment; dann klassische Definition der Wahrscheinlichkeit verwendbar; Kolmogoroff-Axiome automatisch erfüllt.

- Falls kein Laplace-Experiment: Unbekannte Wahrscheinlichkeit über die relative Häufigkeit einer hinreichend großen Versuchsreihe schätzen:

$$P(A) \approx h_n(A)$$

„Empirische" oder „statistische" Festlegung der Wahrscheinlichkeit

Bei den bisher betrachteten endlichen Ergebnismengen Ω haben wir für die möglichen Ereignisse (Teilmengen von Ω) vorausgesetzt (S sei die Menge aller möglichen Ereignisse):

1) $\Omega \in S; \varnothing \in S$

2) Bei jedem Ereignis E ist auch $\overline{E} = \Omega \setminus E \in S$

3) Wenn E_1 und E_2 Ereignisse sind, dann ist auch E_1 oder E_2 $(E_1 \cup E_2) \in S$,

E_1 und E_2 $(E_1 \cap E_2) \in S$ und insbesondere ist $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in S \quad sowie \quad \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in S.$

Was ist zu tun, wenn die Ergebnismenge unendlich viele Elemente enthält?
Die Abgeschlossenheit von S unter „endlicher Vereinigungsbildung" reicht nicht mehr aus!

Betrachte zunächst nur abzählbar unendliche Ergebnismengen Ω:

Für eine vollständige Beschreibung benötigen wir eine Ereignisalgebra S, die zu einem Vorgang mit zufälligem Ergebnis die Menge der Ereignisse beschreibt, denen man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen möchte.

Offensichtlich:
S ist eine Menge von Teilmengen von Ω; um uninteressante Fälle auszuschließen, sollte S nicht die leere Menge sein.

Wesentliche Forderung an die Ereignisalgebra: Vereinigung und Durchschnitt abzählbar unendlich vieler Elemente der Ereignisalgebra sind wieder Element dieser Ereignisalgebra.

Definition:

Es sei Ω eine nichtleere Menge. Eine Ereignisalgebra über Ω ist eine nichtleere Menge S von Teilmengen von Ω, für die gilt:

a) Für jedes $E \in S$ ist $\overline{E} \in S$.

b) Für jede Folge $E_1, E_2, \ldots \in S$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$

Folgerungen:

a) Für beliebige $E_1, E_2, \ldots \in S$ gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in S$

b) $\varnothing \in S$ und $\Omega \in S$

Fragen zur Ereignisalgebra:

- Gibt es überhaupt eine Ereignisalgebra?
(Sind die in der Definition aufgestellten Forderungen miteinander verträglich?)
- Existiert über jeder nichtleeren Menge eine Ereignisalgebra?
- Kann es über einer nichtleeren Menge mehr als eine Ereignisalgebra geben?
Wenn ja, welche wählt man zur Beschreibung des Vorganges?

Für jede nichtleere Menge Ω ist die Potenzmenge $P(\Omega)$ eine Ereignisalgebra über Ω.

Beispiel:

$$\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset;\Omega;\{\omega_1\};\{\omega_2\};\{\omega_3\};\{\omega_1;\omega_2\};\{\omega_1;\omega_3\};\{\omega_2;\omega_3\}\}$$

Die Potenzmenge ist die größtmögliche Ereignisalgebra über Ω. Sie erfasst sämtliche möglichen Aussagen über die Ereignisse des betrachteten Vorganges.

Ist Ω endlich oder abzählbar unendlich, wählt man als Ereignisalgebra stets die Potenzmenge.

Enthält Ω mindestens zwei Elemente, so ist die Potenzmenge *P* (Ω) nicht die einzige Ereignisalgebra über Ω:

$\Omega \neq \emptyset \Rightarrow S_1 = \{\emptyset; \Omega\}$ ist Ereignisalgebra über Ω

$|\Omega| > 2$ und $A \subset \Omega$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$

$\Rightarrow S_2 = \{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\}$ ist Ereignisalgebra

Mit der Wahl der Ereignisalgebra wird festgelegt, welche Aussagen zur Beschreibung des betreffenden Vorganges zur Verfügung stehen!

<u>Problem:</u>
Was ist zu tun bei einer überabzählbar unendlichen Ergebnismenge?
Die Potenzmenge ist „zu groß"!
<u>Beispiel</u>: Lebensdauer eines technischen Gerätes

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

$\Omega = R^{+}$

Interessierende Ereignisse:

$\{$Die Lebensdauer ist kleiner als x Zeiteinheiten$\} = \{\omega \in R : \omega < x\} \ \forall x \geq 0$

Wähle die kleinste Ereignisalgebra über Ω, die alle interessierenden Ereignisse enthält!

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kolmogoroff - Axiome für Wahrscheinlichkeiten

Es sei Ω eine Ergebnismenge und S eine Ereignisalgebra (über Ω).
Eine Zuordnungsvorschrift $P: S \to R$ (d.h. jedem Ereignis $E \in S$ wird eine reelle Zahl P(E) als "Wahrscheinlichkeit" für das Eintreten von E zugeordnet) heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt:

1.) $P(E) \geq 0 \; \forall \; E \in S$

2.) $P(\Omega) = 1$

3.) Falls $E_1, E_2, \ldots$ sich gegenseitig ausschließende Ereignisse sind, gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \quad ("\sigma - Additivität")$$

Das Tripel (Ω, S, P) mit Ω als Ergebnismenge, S als Ereignisalgebra und P als Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsraum.

3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

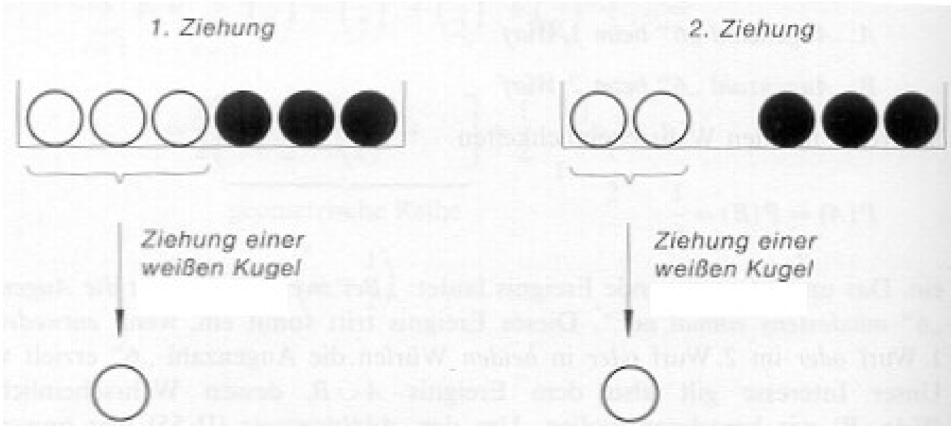
In vielen Anwendungen ist das Eintreten eines Ereignisses A nicht unabhängig davon, ob vorher ein anderes Ereignis B eingetreten ist oder nicht:

Ziehung ohne Zurücklegen bei einer Urne mit 3 weißen und 3 schwarzen Kugeln: Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Ziehung eine weiße Kugel zu erhalten (A) ?

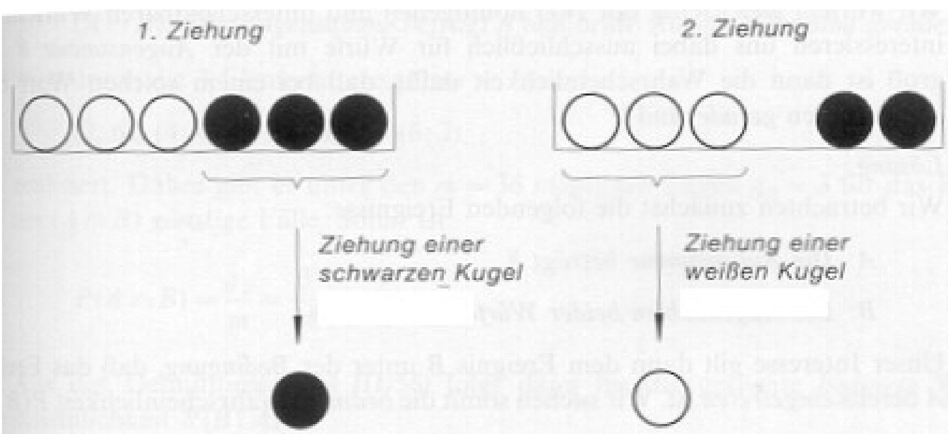
Schreibweise: $P(A \mid B)$

B: Ziehung einer weißen Kugel im ersten Zug

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



$$P(A\,|\,B)=\frac{2}{5}$$



$$P(A\,|\,\overline{B})=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

$P(A|B)\neq P(B|A)$ aber :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\cdot\frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit erfüllt alle Axiome für eine Wahrscheinlichkeit und damit auch die daraus abgeleiteten Folgerungen, z.B.:

1.) $E_1\subseteq E_2\Rightarrow P(E_1|B)\leq P(E_2|B)$

2.) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$

3.4 Multiplikationssatz

Löst man die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit auf nach der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse A und B, so ergibt sich der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)}$$

Verallgemeinerung:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

3.5 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

In einigen Anwendungen ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unabhängig davon, ob B eingetreten ist oder nicht:

$$P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = P(A)$$

Aus dem Multiplikationssatz ergibt sich damit als Definition für die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Verallgemeinerung für n Ereignisse A_1 bis A_n:

$$P\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) = \prod_{j\in T} P(A_j)$$ für jede mindestens zweielementige Teilmenge $T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$

Wie stellt man fest, „wie stark" zwei Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind ?

Vierfeldertafel

	B	$\overline{B}$	$Zeilensumme$
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
$Spaltensumme$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Bei vollständiger Unabhängigkeit der Ereignisse A und B voneinander:

	B	$\overline{B}$	$Zeilensumme$
A	$P(A)\cdot P(B)$	$P(A)\cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})\cdot P(B)$	$P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
$Spaltensumme$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Bei vollständiger Unabhängigkeit der Ereignisse A und B verschwindet die Determinante von :

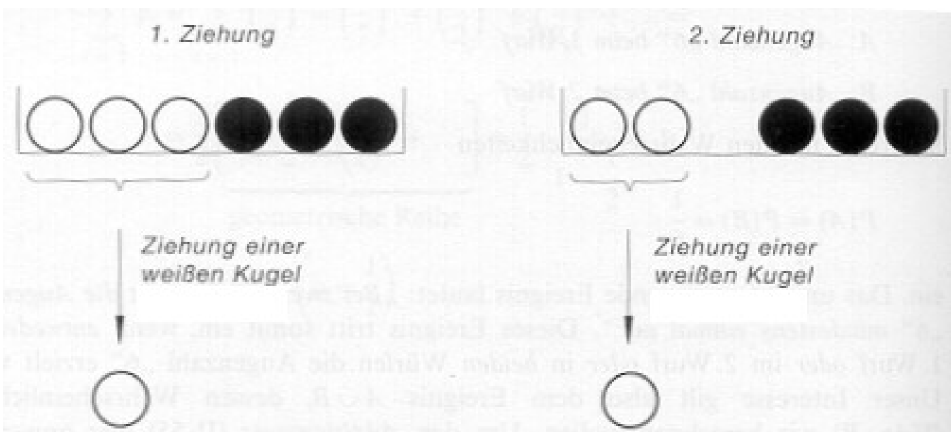
$$\begin{pmatrix} P(A\cap B) & P(A\cap \overline{B}) \\ P(\overline{A}\cap B) & P(\overline{A}\cap \overline{B}) \end{pmatrix}$$

Definition „Zusammenhangskoeffizient“ oder „Assoziationsmaß“:

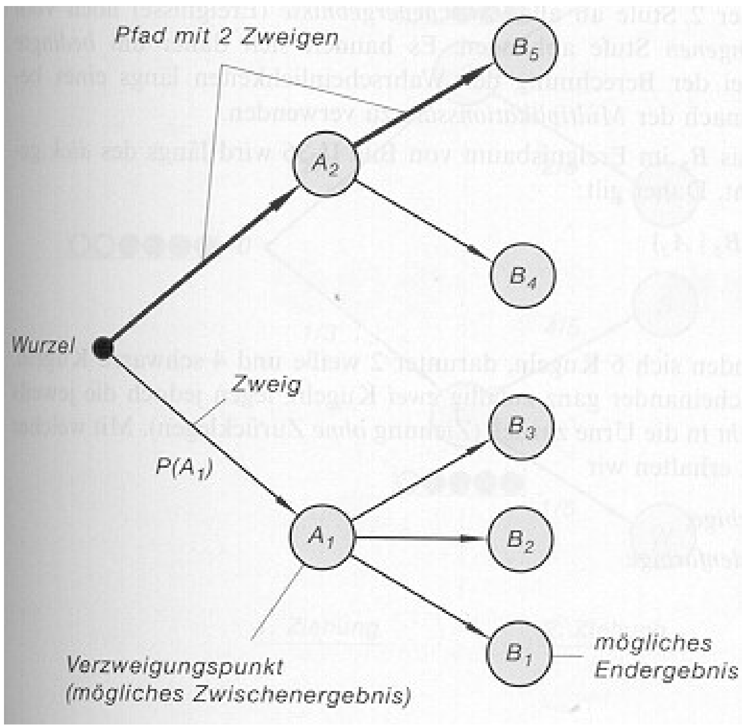
$$Q = \frac{P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap B)}{P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap B)}; \quad Q \in [-1;1]$$

3.6 Mehrstufige Zufallsexperimente

Kompliziertere Zufallsprozesse bestehen häufig aus mehreren nacheinander ablaufenden Zufalls-experimenten: „Mehrstufiges Zufallsexperiment“



Hilfsmittel zur Veranschaulichung: „Ereignisbäume“:

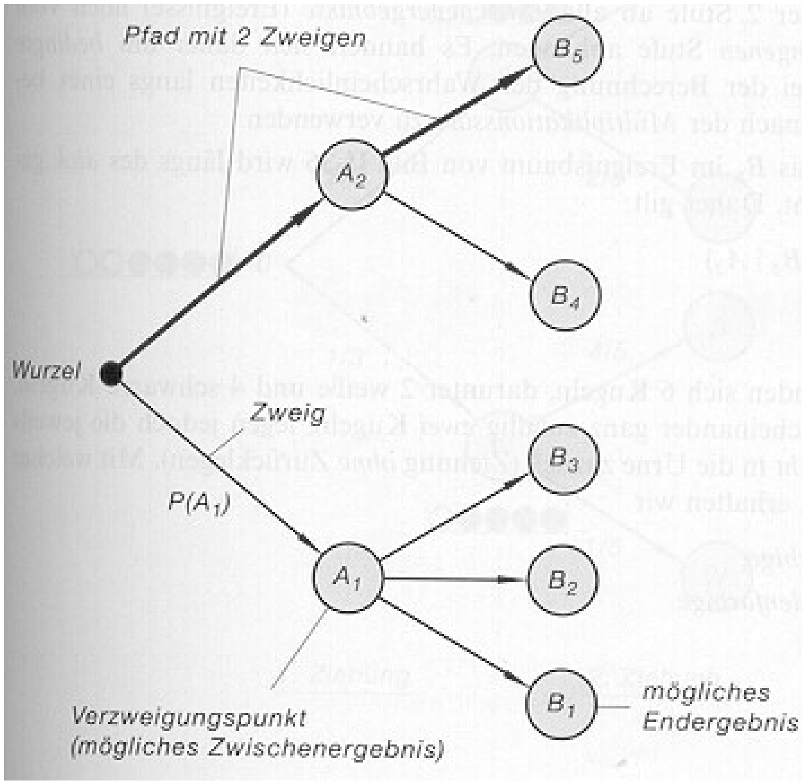


Regeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Ereignisbaum:

1.) Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden miteinander multipliziert.

2.) Führen mehrere Pfade zum gleichen Endergebnis, so addieren sich ihre Wahrscheinlichkeiten.

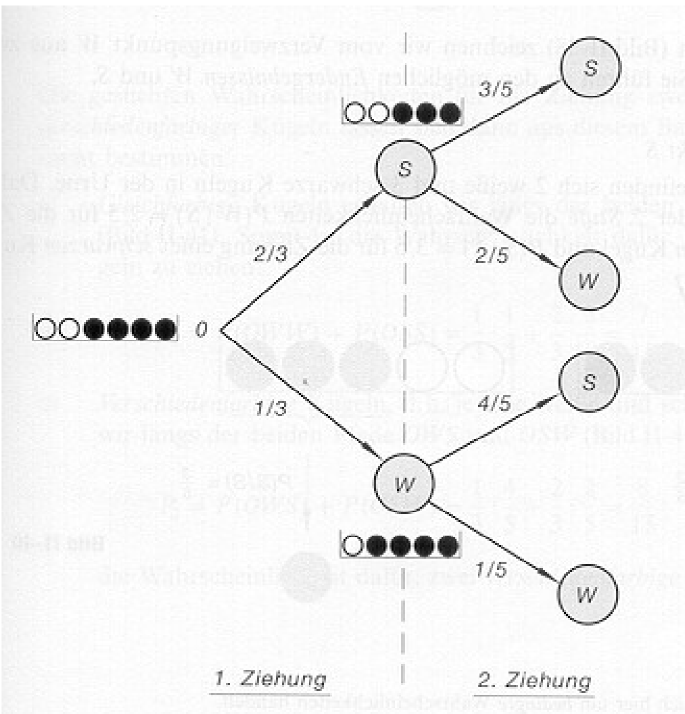
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



Wichtig: In den „Zweigen" sind ab der zweiten Stufe alle Ereignisse noch vom Ausgang der vorangegangenen Stufe abhängig, d.h. hier müssen an die Zweige die bedingten Wahrscheinlichkeiten angetragen werden, z.B.

$$P(B_5) = P(A_2) \cdot P(B_5 \mid A_2)$$

Beispiel: Zwei Ziehungen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 4 schwarzen und 2 weißen Kugeln



Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier gleichfarbiger Kugeln:

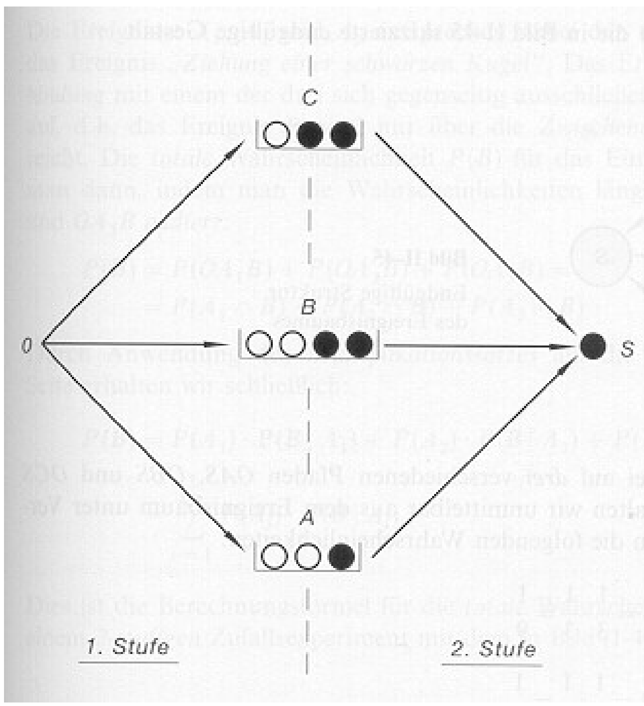
$$P = P(OWW) + P(OSS) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}$$

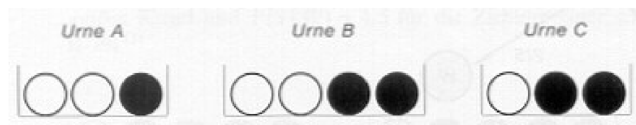
Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier verschieden-farbiger Kugeln:

$$P = P(OWS) + P(OSW) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

3.7 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayes'sche Formel

<u>Beispiel</u>: Ziehung einer schwarzen Kugel aus einer zuvor zufällig ausgewählten Urne:





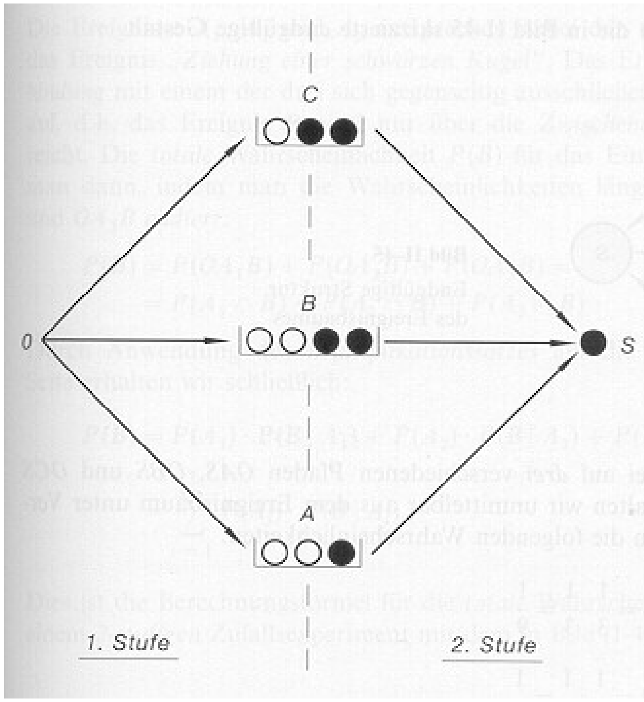
1. Stufe:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

2. Stufe:

$$P(S \mid A) = \frac{1}{3} \quad P(S \mid B) = \frac{1}{2} \quad P(S \mid C) = \frac{2}{3}$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



Ereignis S:

$$P(OAS) = P(A)\cdot P(S\,|\,A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

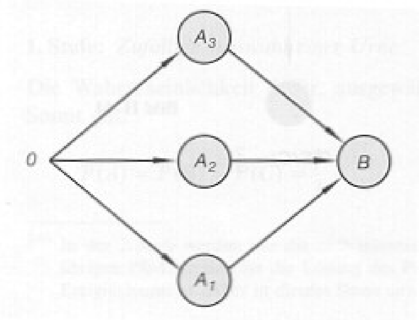
$$P(OBS) = P(B)\cdot P(S\,|\,B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(OCS) = P(C)\cdot P(S\,|\,C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

„Totale“ Wahrscheinlichkeit für das Ereignis S:

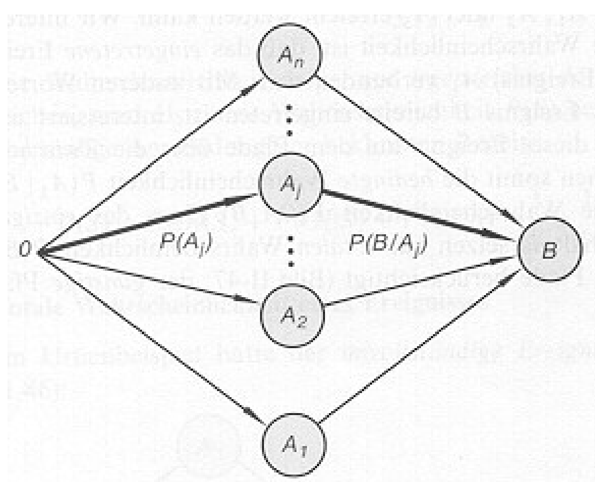
$$P(S) = P(OAS) + P(OBS) + P(OCS) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



$$P(B) = P(OA_1B) + P(OA_2B) + P(OA_3B)$$
$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$
$$= P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Allgemein:



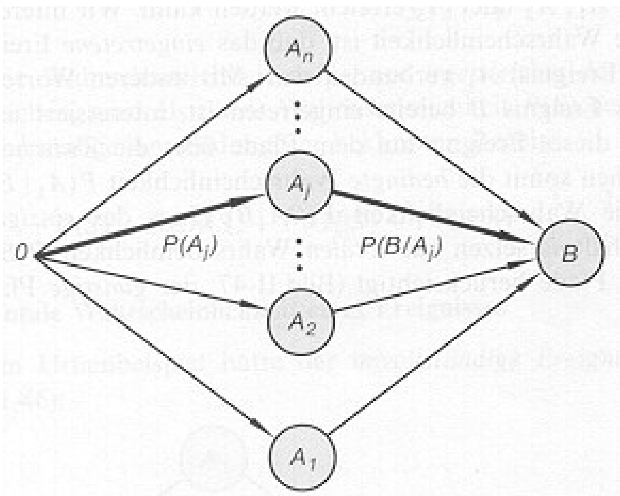
Totale Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad:

$$P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Umgekehrte Fragestellung: Das Ereignis B sei eingetreten. Wie wahrscheinlich wurde es über einen bestimmten Pfad bzw. ein bestimmtes Zwischenergebnis A_j erreicht?

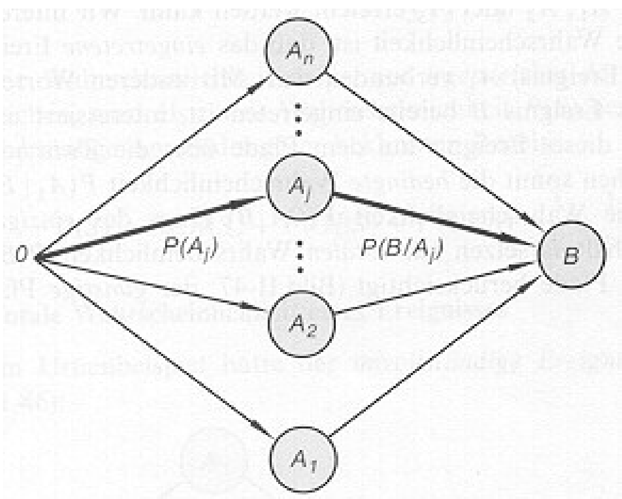


Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A_i eintritt, wenn B bereits eingetreten ist:

Bayes'sche Formel

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.3 Wahrscheinlichkeit



Bayes‘sche Formel

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

<u>Merkregel</u>:
Die Wahrscheinlichkeit, dass B über einen bestimmten Pfad eintritt, ergibt sich als Verhältnis der Wahrscheinlichkeit für diesen Pfad zur totalen Wahrscheinlichkeit von B.

4.1 Zufallsvariable (Zufallsgrößen)

Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Elementarereignis aus der Ergebnismenge eindeutig eine reelle Zahl zu, bildet also die Ergebnismenge auf die Menge der reellen Zahlen ab:

$$X : \Omega \to \mathcal{R}$$

X ist somit eine reellwertige Funktion mit

Definitionsbereich: $\mathcal{D} = \Omega$

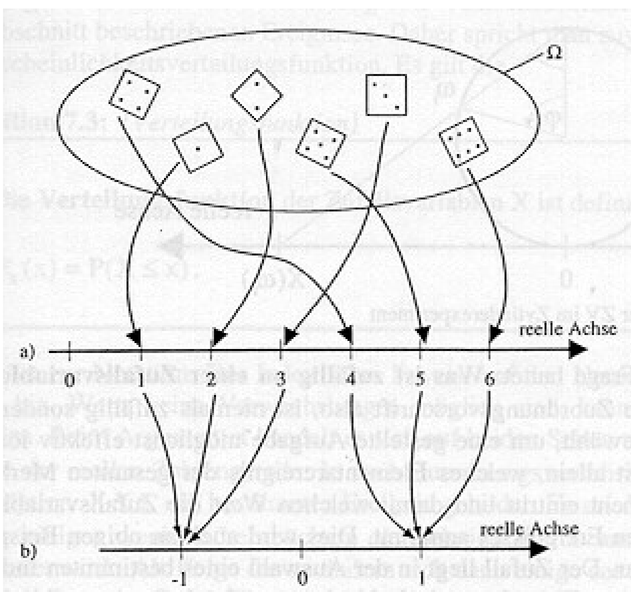
Wertebereich: $\mathcal{W}_X = \left\{ X \mid X = X(\omega) \;\; und \;\; \omega \in \Omega \right\}$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

4.1 Zufallsvariable (Zufallsgrößen)

Definitionsbereich: $\mathcal{D} = \Omega$

Wertebereich: $\mathcal{W}_X = \{X \mid X = X(\omega)\ und\ \omega \in \Omega\}$



X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)
		(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)	
			(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)		
				(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)			
					(5; 1)	(5; 2)	(6; 2)				
						(6; 1)					

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

X "*diskret*":

W_X *enthält endlich viele oder abzählbar unendlich viele reelle Werte*

X "*stetig*":

W_X *enthält überabzählbar unendlich viele reelle Werte*

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable einen bestimmten Wert an (bei diskreten Variablen) bzw. liegt sie in einem bestimmten Intervall (bei stetigen Variablen, manchmal auch bei diskreten Variablen)?

X sei eine Zufallsvariable. Die Funktion

$$F_X(x) := P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}\right) \forall x \in R; \quad F_X : R \to [0;1]$$

heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

Anschaulich: F(x) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable X einen Wert $\leq$ x annimmt: „Antwort auf höchstens x“.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Abkürzung: $P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}\right) := P(X \le x)$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Die *Verteilungsfunktion* $F(x)$ einer Zufallsvariablen X ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der *kleiner oder gleich* einer vorgegebenen reellen Zahl x ist:

$$F(x) = P(X \leqslant x) \qquad \text{(II-73)}$$

Eine Zufallsvariable X wird dabei durch ihre Verteilungsfunktion $F(x)$ *vollständig* beschrieben.

Verteilungsfunktionen besitzen ganz allgemein die folgenden *Eigenschaften* (vgl. hierzu auch die Bilder II-52 und II-53):

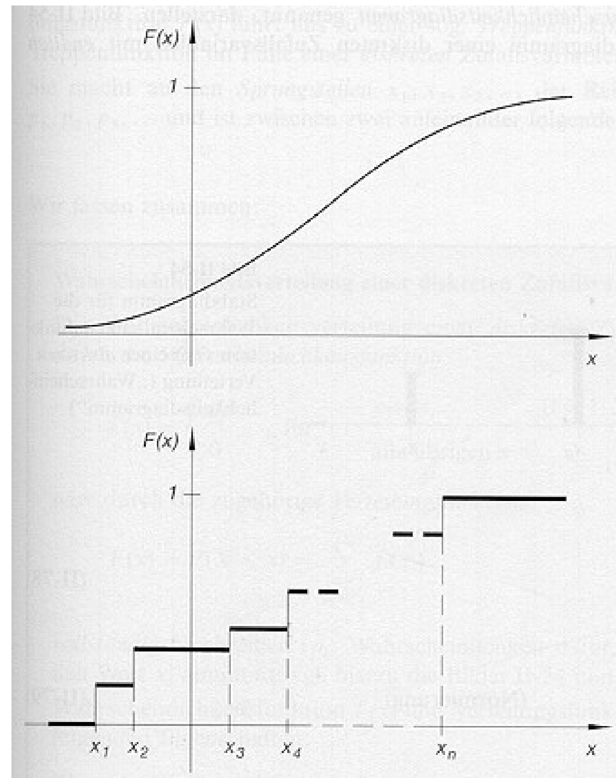
(1) $F(x)$ ist eine *monoton wachsende* Funktion mit $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (*unmögliches* Ereignis) (II-74)

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ (*sicheres* Ereignis) (II-75)

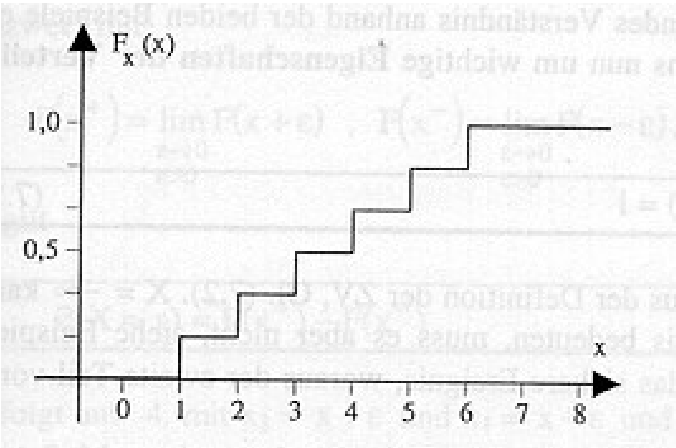
(4) Die Wahrscheinlichkeit $P(a < X \leqslant b)$ dafür, daß die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a (ausschließlich) und b (einschließlich) annimmt, läßt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F(x)$ wie folgt berechnen ($a < b$)[17]:

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) \qquad \text{(II-76)}$$



FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Beispiel: Verteilungsfunktion beim Würfeln



Genauere Betrachtung der Sprungstellen bei diskreten Zufallsvariablen erforderlich:

$$F(x^+) = \lim_{\varepsilon \to o; \varepsilon > 0} F(x+\varepsilon); \quad F(x^-) = \lim_{\varepsilon \to o; \varepsilon > 0} F(x-\varepsilon)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow P(x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon) = F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to o; \varepsilon > 0} P(x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon) = F(x^+) - F(x^-)$$

$$\Rightarrow P(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Beispiel: Würfeln einer „3":
$P(X=3) = F(3^{+}) - F(3^{-}) = F(3) - F(2)$

Bei stetiger Verteilungsfunktion $F(x)$ ist $P(X=x)=0$.

Funktionswert an der Unstetigkeitsstelle:
z.B. $F(3) = P(X \leq 3) = 3/6 = F(3^{+})$

Die Verteilungsfunktion ist rechts – stetig.

$$\boxed{F(x) = F(x^{+})}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Folgerungen:

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \le X \le b) = P(a) + F(b) - F(a) = F(a^+) - F(a^-) + F(b) - F(a)$$
$$= F(b) - F(a^-)$$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a^-) - P(b) = F(b) - F(a^-) - F(b^+) + F(b^-)$$
$$= F(b^-) - F(a^-)$$

$$P(a < X < b) = F(b^-) - F(a^-) - P(a) = F(b^-) - F(a^-) - F(a^+) + F(a^-)$$
$$= F(b^-) - F(a^+)$$

4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen

Bei einer diskreten Zufallsvariablen X gehört zu jedem Wert x_i, den sie annehmen kann, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n	...

„Verteilungstabelle“

$$P(X = x_i) = p_i$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Verteilung:

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{für} \quad x = x_i \\ 0 & \quad\quad\; sonst \end{cases} \qquad mit \quad f(x_i) = p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad \text{(Normierung)}$$

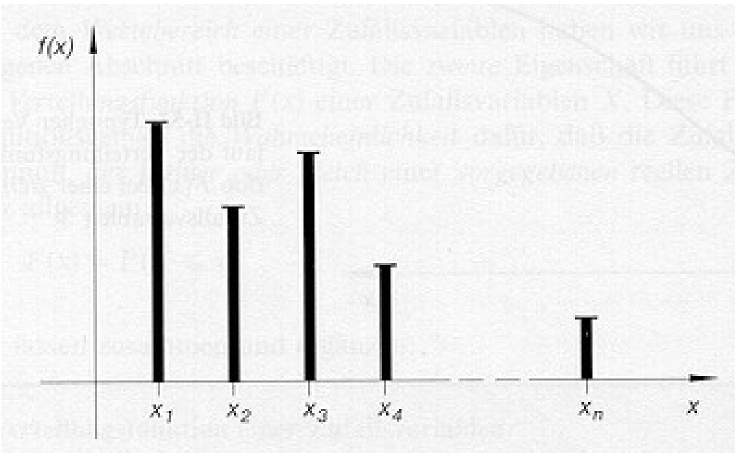
Anschaulich:
f(x) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt: „Antwort auf genau x".

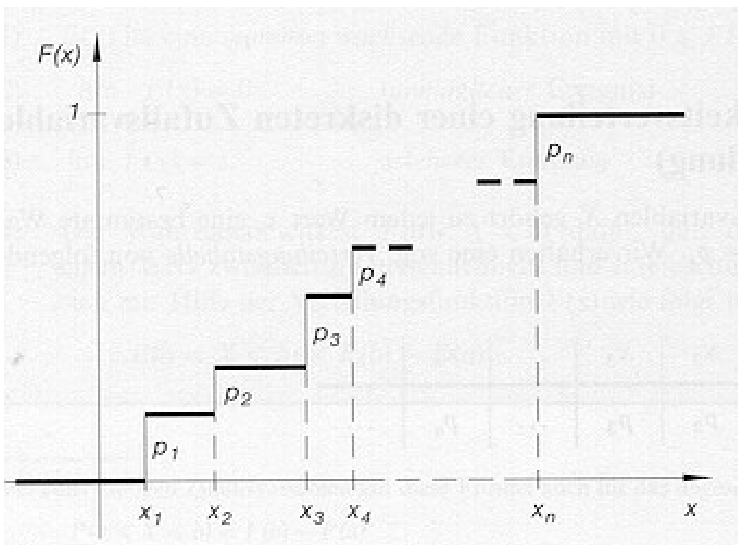
Zugehörige Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsvariablen:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Treppenfunktion mit Sprungstellen bei x_i der Höhe p_i

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen





Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen X läßt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{für} \quad x = x_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \\ 0 & \quad\quad \text{alle übrigen } x \end{cases} \tag{II-81}$$

oder durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} f(x_i) \tag{II-82}$$

vollständig beschreiben (p_i: Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsvariable X den Wert x_i annimmt; vgl. hierzu die Bilder II-54 und II-55).

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

(1) $f(x_i) \geqslant 0$ (II-83)

(2) $f(x)$ ist *normiert*, d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1 \tag{II-84}$$

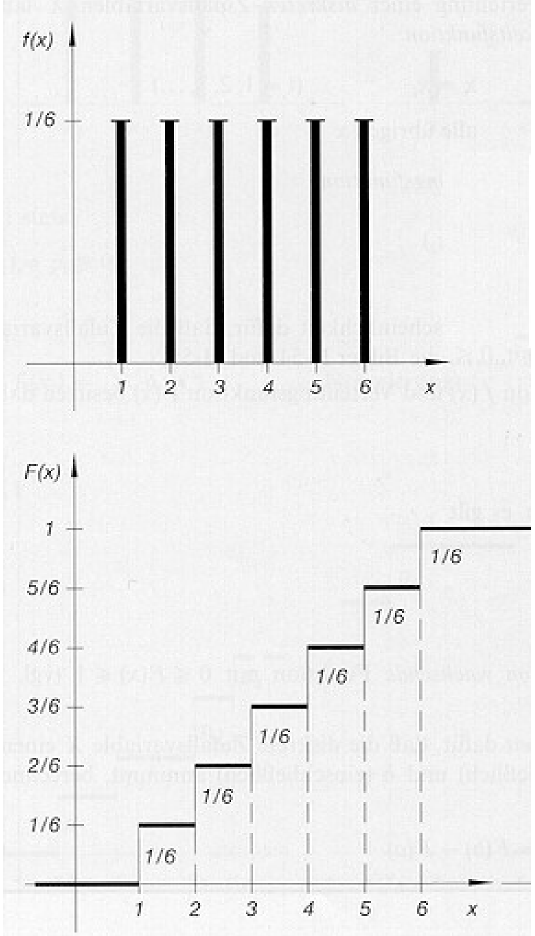
(3) $F(x)$ ist eine *monoton wachsende* Funktion mit $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ (vgl. hierzu Bild II-55).

(4) Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß die diskrete Zufallsvariable X einen Wert zwischen a (ausschließlich) und b (einschließlich) annimmt, berechnet sich dann wie folgt:

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) \tag{II-85}$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



<u>Beispiel</u>: Wurf eines Würfels
Diskrete Zufallsvariable X = *Erreichte Augenzahl*

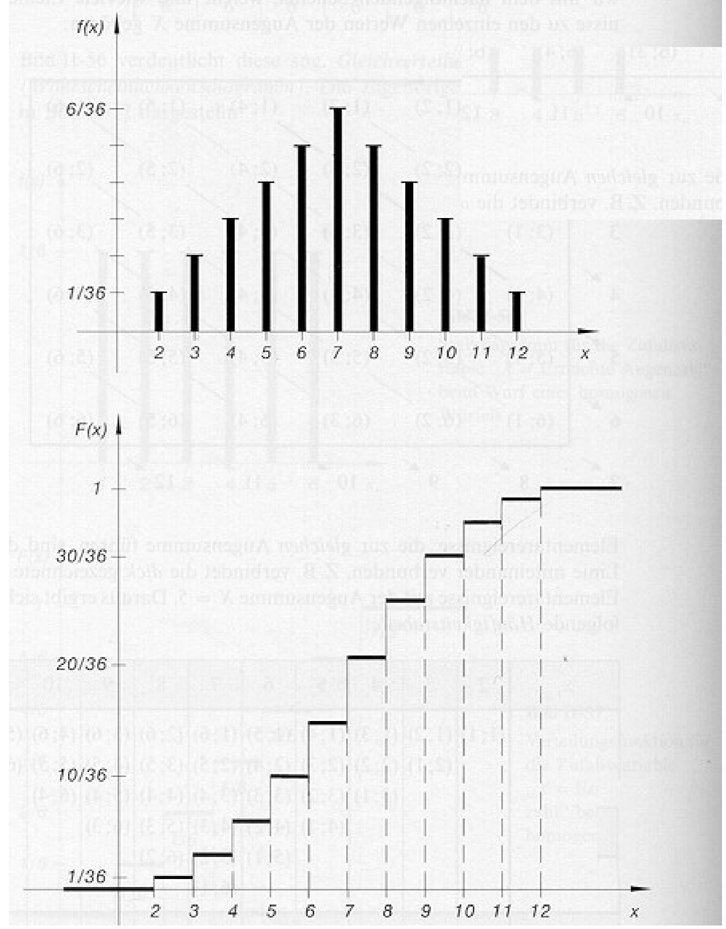
Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x)

Verteilungsfunktion F(x)

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Beispiel:
Wurf mit zwei unter-
scheidbaren Würfeln
Diskrete Zufallsvariable:
X = *Augensumme*

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Häufigkeitstabelle:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1;1)	(1;2) (2;1)	(1;3) (2;2) (3;1)	(1;4) (2;3) (3;2) (4;1)	(1;5) (2;4) (3;3) (4;2) (5;1)	(1;6) (2;5) (3;4) (4;3) (5;2) (6;1)	(2;6) (3;5) (4;4) (5;3) (6;2)	(3;6) (4;5) (5;4) (6;3)	(4;6) (5;5) (6;4)	(5;6) (6;5)	(6;6)
n_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen

Kontinuierliche Zufallsgrößen (stetige Zufalls- variablen) können in einem Intervall jeden Wert annehmen.
Typische Vertreter: Messwerte, z.B. Längenmaße, Spannungen, Viskositäten usw.

Definition:

X heißt kontinuierlich (oder stetig), falls für die Verteilungsfunktion F eine Darstellung existiert mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

mit $f \geq 0$ und integrierbar als "Dichtefunktion"

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ Normierung

$$\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(t)\,dt - \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die stetige Zufallsvariable X exakt den Wert a annimmt:

$$0 \le P(X = a) \le P(a - \delta < X < a + \delta) = \int\limits_{a-\delta}^{a+\delta} f(t)\,dt \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow P(X = a) = 0$$

> Bei stetigen Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlich-keit für die Realisierung eines exakten Wertes immer Null! Nur für die Lage in einem Intervall ergeben sich von Null verschiedene Wahrscheinlichkeiten.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsgröße X:

- Die Verteilungsfunktion F einer kontinuierlichen Zufallsgröße X ist stetig
- F ist stetig differenzierbar, wenn es eine stetige Dichtefunktion f zu F gibt. Dann ist

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in R$$

Bei kleinen Intervallen beliebte Näherung für die konkrete Berechnung:

$$P(a - \frac{\delta}{2} < X \leq a + \frac{\delta}{2}) = \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{a+\frac{\delta}{2}} f(t)\,dt \cong f(a) \cdot \delta$$

Beispiel: Kontinuierliche Gleichverteilung

Für eine im Intervall [a;b] gleichverteilte Zufalls-variable X gilt:

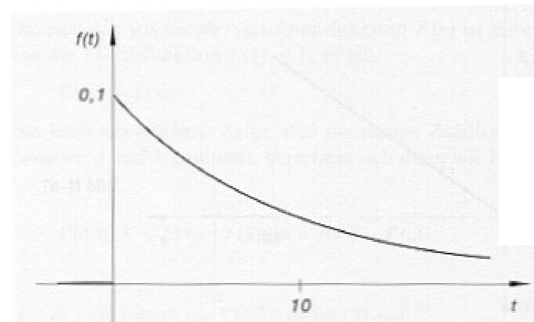
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & für \quad x \in [a;b] \\ 0 \quad sonst & \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & für \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & für \quad a < x \le b \\ 1 & für \quad x > b \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

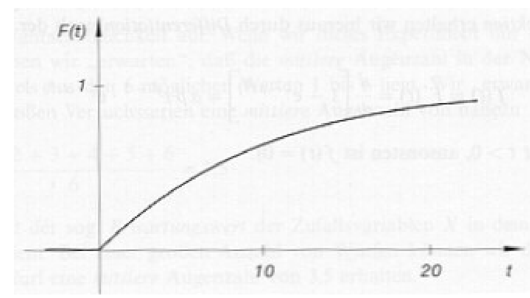
<u>Beispiel</u>: Exponentialverteilte Lebensdauer eines elektronischen Bauteils

$$f(t) = \begin{cases} 0 & für \quad t < 0 \\ c \cdot \exp\{-0{,}1 \cdot t\} & für \quad t \geq 0 \end{cases}$$



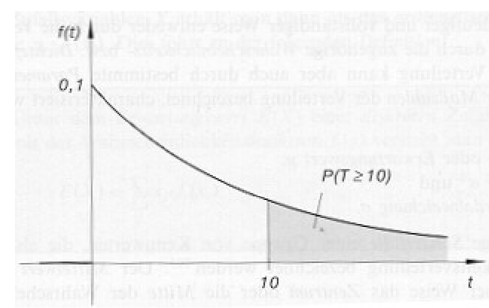
$$c = 0{,}1 \quad aus \quad Normierung$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & für \quad t < 0 \\ 1 - \exp\{-0{,}1 \cdot t\} & für \quad t \geq 0 \end{cases}$$



Anteil von Bauelementen, deren Lebensdauer den Wert t=10 überschreitet:

$$P(t \geq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} = 0{,}368$$



I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
Zusammenfassung: Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen X läßt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* oder kurz *Dichtefunktion* $f(x)$ *oder* durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad \text{(II-91)}$$

vollständig beschreiben (vgl. hierzu die Bilder II-62 und II-63). Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

(1) $f(x) \geqslant 0$ (II-92)

(2) $f(x)$ ist *normiert*, d.h. es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \text{(II-93)}$$

(vgl. hierzu Bild II-64).

(3) Die *monoton wachsende* Verteilungsfunktion $F(x)$ ist dabei eine *Stammfunktion* der Dichtefunktion $f(x)$, d.h. es gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{(II-94)}$$

(4) Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß die stetige Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt, berechnet sich dann wie folgt:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(II-95)}$$

Bekanntester Vertreter: Gaußsche Normalverteilung (s. Kap. I.5)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

4.5 Funktionen einer Zufallsgröße: Transformierte Zufallsvariable

Häufig vorkommendes Problem:
Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer Zufallsvariablen X ist bekannt, wie verhält sich die Verteilung einer daraus nach Y:=g(X) berechneten Größe (neue Zufallsvariable)?

„Abbildungskette" $\Omega \xrightarrow{X} R \xrightarrow{Y} R$

Bedingung für g:
Der Definitionsbereich von g muss den Wertebereich von X enthalten!

Beispiele:

$$1.)\ g_1(X) = a \cdot X + b \quad \textit{Lineare Transformation}$$

$$U = R \cdot I + U_0$$

$$2.)\ g_2(X) = |X| \quad \textit{Betragsfunktion}$$

$$\textit{Gleichrichter}$$

$$3.)\ g_3(X) = a \cdot X^2 \quad \textit{Energiefunktion}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2 \quad \textit{oder} \quad P_{el} = R \cdot I^2$$

Transformation der Verteilungsfunktion (Problem: g(x) nicht immer eindeutig umkehrbar)

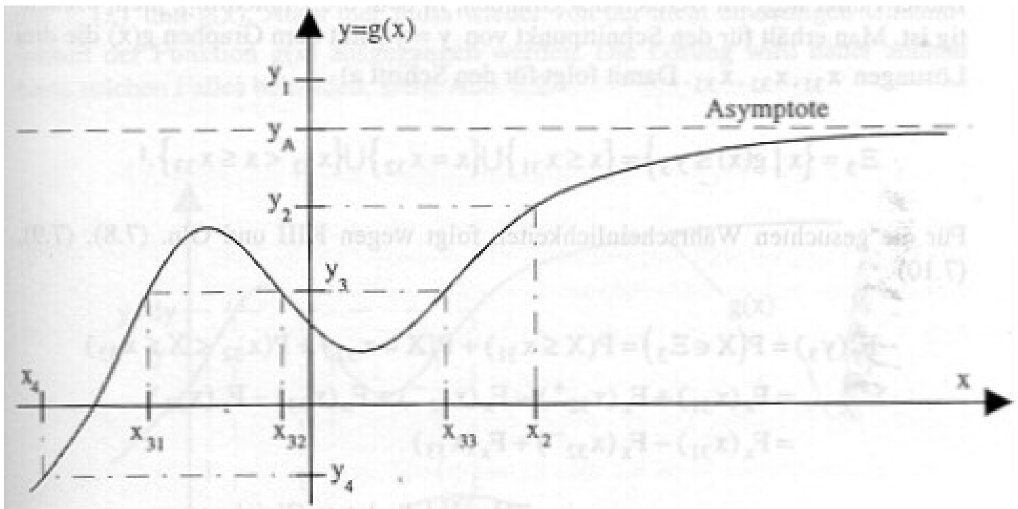
Ziel: Verteilungsfunktion der transformierten Variablen

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

durch die bekannten Größen $F_X(x)$ und $g(x)$ ausdrücken.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

$g(X) \leq y$ legt Intervalle fest, für die die Ungleichung erfüllt ist:



Fasse alle Intervalle, die die Ungleichung erfüllen, in einer Menge θ zusammen:

$$\Theta := \{x \mid g(x) \leq y\}$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse $\{g(X) \leq y\}$ *und* $\{X \in \Theta\}$ gleich, wobei man $P(X \in \Theta)$ aus $F_X(x)$ berechnen kann.

→ $F_Y(y)$ ist nicht immer geschlossen darstellbar, nur bei eineindeutigen Abbildungen Y=g(X).

Wichtiger Spezialfall:
g sei streng monoton wachsend auf dem Wertebereich von X

$$\boxed{\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \le y\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) \le y\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le g^{-1}(y)\}) = F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}}$$

Beispiel: Lineare Transformation

$$Y = g(X) = a \cdot X + b; \quad a > 0$$

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)); \quad x = \frac{y-b}{a} = g^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Transformation der Dichtefunktion

Einfachster Weg, falls $F_Y(y)$ geschlossen darstellbar:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}}$$

Beispiel: Lineare Transformation

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Allgemein:
(Anschaulicher Beweis über die Wahrscheinlichkeit)

$$f_X(x) \cdot dx = f_Y(y) \cdot dy$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f_X(x) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\boxed{\Rightarrow f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}}$$

4.6 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kennwerte erlauben eine zusammenfassende Beschreibung einer Verteilung durch Angabe der „mittleren Lage" (z.B. Maximum der Dichte f) und der „Breite" (Streuung).

4.6.1 Lageparameter einer Verteilung

Wichtigster Lageparameter ist der „Erwartungswert".

Beispiel: Mittlere Augenzahl beim Würfeln; alle Augenzahlen sind gleich wahrscheinlich

$$\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=3{,}5 \Rightarrow \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

X-Werte mit höherer Wahrscheinlichkeit werden stärker gewichtet, darum Definition des Erwartungswertes E(X) einer diskreten Zufallsvariablen X:

$$\boxed{E(X) := \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \quad falls \quad \sum_i |x_i| \cdot P(X = x_i) < "\infty"}$$

$$\boxed{E(X) := \sum_i X(\omega_i) \cdot P(\{\omega_i\})} \qquad \omega_i \in \Omega$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsgröße

Annahme: Der Wertebereich von X sei R; $f_X(x)$ sei stetig

Wahrscheinlichkeit, dass X im Intervall $[x_i; x_i + \Delta x]$ liegt:

$$P(x_i < X \leq x_i + \Delta x) \approx f_X(x_i) \cdot \Delta x$$

Äquidistante Unterteilung der x-Achse: $x_{i+1} - x_i = \Delta x \; \forall i$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot P(x_i < X \leq x_i + \Delta x)$$

$$\approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i) \cdot \Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

Vorraussetzung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x)\, dx < "\infty"$$

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx}$$

„Schwerpunkt" der Dichtefunktion

Eigenschaften und Berechnung des Erwartungswertes

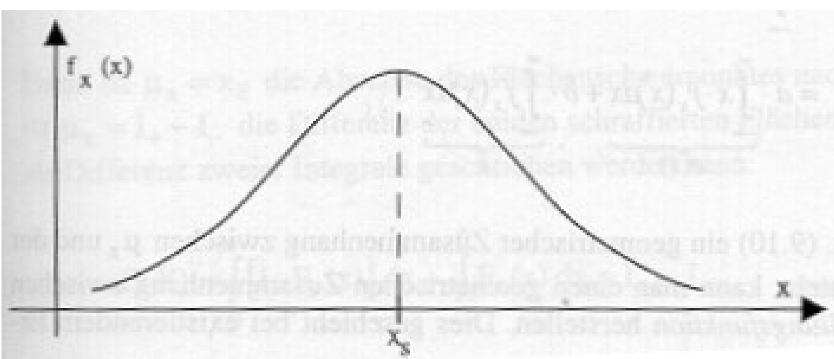
Diskrete Zufallsvariable, im allgemeinen :

$a)\ \mu_X \neq \overline{X} \quad (\overline{\mathrm{X}}$ berechnet aus allen $\mathrm{x_i} \in W_X)$

$b)\ \mu_X \neq x_i \quad \forall x_i \in W_X$

Stetige Zufallsvariable :

μ_{X} ist im allgemeinen nicht der Abszissenwert des Maximums der Dichtefunktion, nur bei symmetrischen Dichtefunktionen liegt der Flächenschwerpunkt immer auf der Symmetrieachse



$$E(X) = x_S$$

Bei Transformation auf eine neue Zufallsvariable Y=g(X):

$$E(Y) = \mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$E(Y) = \mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

Speziell bei linearer Transformation:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Erwartungswert unanschaulich bzw. irreführend bei sehr „schiefen" Verteilungen: Studiendauer

Alternative zum Erwartungswert:
Median (Wert, der die Verteilung „halbiert") $\widetilde{x} = x_{0,5}$

Einfach bei stetigen Zufallsvariablen:

$$\boxed{P(X \leq \tilde{x}) = F_X(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\tilde{x}} f_X(x)\,dx = 0{,}5}$$

Vorteil: Der Median existiert immer!

Der Median ist problematischer bei diskreten Zufallsvariablen:
Bis auf wenige Ausnahmen gibt es keinen x-Wert der Zufallsvariablen X, bei dem die Verteilungsfunktion exakt den Wert 0,5 annimmt.
Daher ist andere Definition erforderlich:

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

$$\boxed{P(X < \tilde{x}) \leq \frac{1}{2} \; und \; P(X \leq \tilde{x}) \geq \frac{1}{2}}$$

Anschaulich:
Man sucht in der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ den Sprung von $F_X(x_i)<0,5$ auf $F_X(x_{i+1})>0,5$. x_{i+1} ist dann der gesuchte Median.

Für den seltenen Fall mit $F_X(x_i)=0,5$ ist x_i der gesuchte Median.

Der Median ist nur ein Spezialfall des „α-Quantils“ x_α

$$\boxed{P(X < x_\alpha) \le \alpha \; und \; P(X \le x_\alpha) \ge \alpha}$$

$\alpha = \frac{1}{4}$ „Unteres Quartil“

$\alpha = \frac{3}{4}$ „Oberes Quartil“

Der Quartilabstand $x_{0,25} - x_{0,75}$ ist ein Streuungsmaß, denn im Intervall zwischen unterem und oberem Quartil liegen die „inneren“ 50% der Verteilung!

4.6.2 Streuungsparameter einer Verteilung

Ziel: Maß für die „Breite" einer Verteilung finden, z. B. mittlere Abweichung einer Zufallsvariablen X von ihrer mittleren Lage.

$$Y := X - \mu \text{ mit } \mu = E(X)$$

$$\Rightarrow E(Y) = E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$$

Mittlere Abweichung von der mittleren Lage ist ungeeignet!

Daher Definition der Varianz bzw. Standardabweichung als Streuungsmaß:

X sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) = \mu$

"Varianz" $V(X) := E((X - \mu)^2) = \sigma^2$

"Standardabweichung" $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Konkrete Berechnung:

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad X \textit{ diskret}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \quad X \textit{ kontinuierlich}$$

Konkrete Berechnung in der Praxis immer nach dieser Definition?

Wichtiger Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2)\, f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Ist μ bekannt, braucht man „nur" noch den Erwartungswert von X^2 zu berechnen!

Speziell bei linearer Transformation:

$$\boxed{V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)}$$

Beweis?

Durch Umformung gewinnt man daraus eine nützliche Abschätzung:

$Sei \quad \varepsilon > 0$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$x \in (-\infty; \mu-\varepsilon] \Rightarrow (x-\mu) \in (-\infty; -\varepsilon] \Rightarrow (x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2$$

$$x \in [\mu+\varepsilon; \infty) \Rightarrow (x-\mu) \in [\varepsilon; \infty) \Rightarrow (x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} f(x)\,dx + \varepsilon^2 \int_{\mu+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \varepsilon^2 \cdot P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$$

Tschebyscheff-Ungleichung

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

Je kleiner die Varianz, um so unwahrscheinlicher werden große Abstände von X zum Erwartungswert!

4.6.3 Verallgemeinerte Momente einer Verteilung

Verallgemeinertes Moment k-ter Ordnung zur Dichtefunktion f(x):

$$\boxed{E\left((X-a)^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^k\, f(x)\,dx}$$

Zwei wichtige Spezialfälle:
a=μ („Zentralmomente")
und a=0 („Momente")

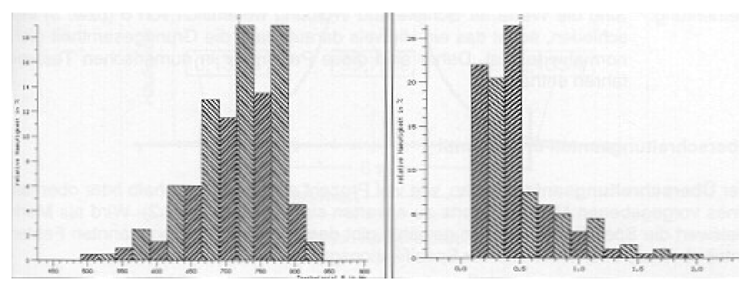
	a = 0 Momente $m_k = E\left(X^k\right)$		$a = \mu_x$ Zentralmomente $s_k = E\left((X-\mu_x)^k\right)$
k = 0 :	$m_0 = 1$	k = 0 :	$s_0 = 1$
k = 1 :	$m_1 = \mu_x$	k = 1 :	$s_1 = 0$
k = 2 :	$m_2 = E(X^2)$	k = 2 :	$s_2 = \sigma_x^2$
k = 3 :	$m_3 = E(X^3)$	k = 3 :	$s_3 = E\left((X-\mu_x)^3\right)$

Rückschlüsse auf die Symmetrie der Dichtefunktion, z.B. aus experimentellen Daten.

„Schiefe"

$$\boxed{M_S=\frac{E\left((x-\mu)^3\right)}{\sigma^3}=\frac{s_3}{s_2^{3/2}}}$$

M_S=-0,81 M_S=1,62



5.1 Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment

Zwei verschiedene, sich gegenseitig ausschließende Ereignisse treten mit konstanter Wahrscheinlichkeit p bzw. 1-p ein, auch bei Wiederholung des Experimentes.

Beispiele:

1) Wurf einer Münze: A: "Zahl"; $\overline{\text{A}}$: "Wappen"

$$p = P(A) = \frac{1}{2}; \quad q = 1 - p = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

2) Ziehung einer weißen Kugel aus einer Urne mit 5 weißen und 3 schwarzen Kugeln

A : "Ziehung einer weißen Kugel";

$\overline{\text{A}}$: "Ziehung einer schwarzen Kugel"

$$p = P(A) = \frac{5}{8}; \quad q = 1 - p = p(\overline{A}) = \frac{3}{8}$$

Bei mehrfachen Ziehungen : Mit Zurücklegen!

<u>„Bernoulli-Experiment vom Umfang n“</u>

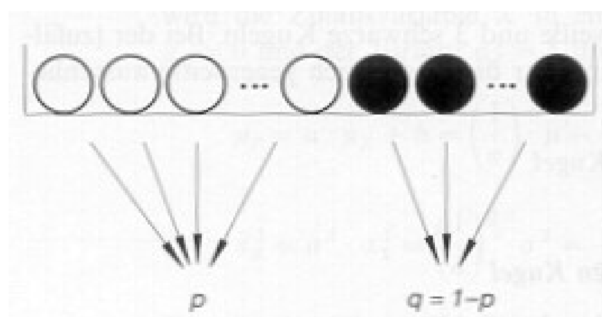
Mehrstufen-Experiment: n-fache Ausführung eines Bernoulli-Experiments mit der Voraussetzung, dass die Ergebnisse der einzelnen Stufen voneinander unabhängig sind.

Zufallsvariable:
X=Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis A bei einer n-fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments eintritt.

$$\Omega = \{0; 1; 2; \ldots n\}$$

Gesucht:
Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X=x, d.h. das Ereignis A tritt bei n Versuchsdurchführungen genau x-mal ein.

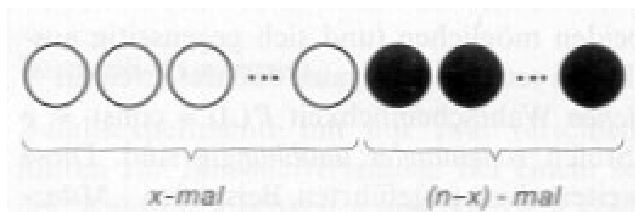
Urnenmodell:



Ereignis A: „Ziehung einer weißen Kugel"; P(A)=p;
Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen:

x weiße und n-x schwarze Kugeln wurden gezogen

Eine mögliche Realisierung der Zufallsvariablen:



Wahrscheinlichkeit für diese spezielle Realisierung:
(Multiplikationssatz für stochastisch unabhängige Ereignisse)

$$\underbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p)}_{x-mal} \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q)}_{(n-x)-mal} = p^x \cdot q^{n-x}$$

Weitere Realisierungen von X=x entstehen durch Permutation der n gezogenen Kugeln, wobei eine Vertauschung der Anordung innerhalb der x weißen bzw. n-x schwarzen Kugeln keine neue Realisierung bildet:

$$P(n;x;n-x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} = \binom{n}{x}$$

Alle Realisierungen (Anordnungen) schließen sich gegenseitig aus; Additionssatz:

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

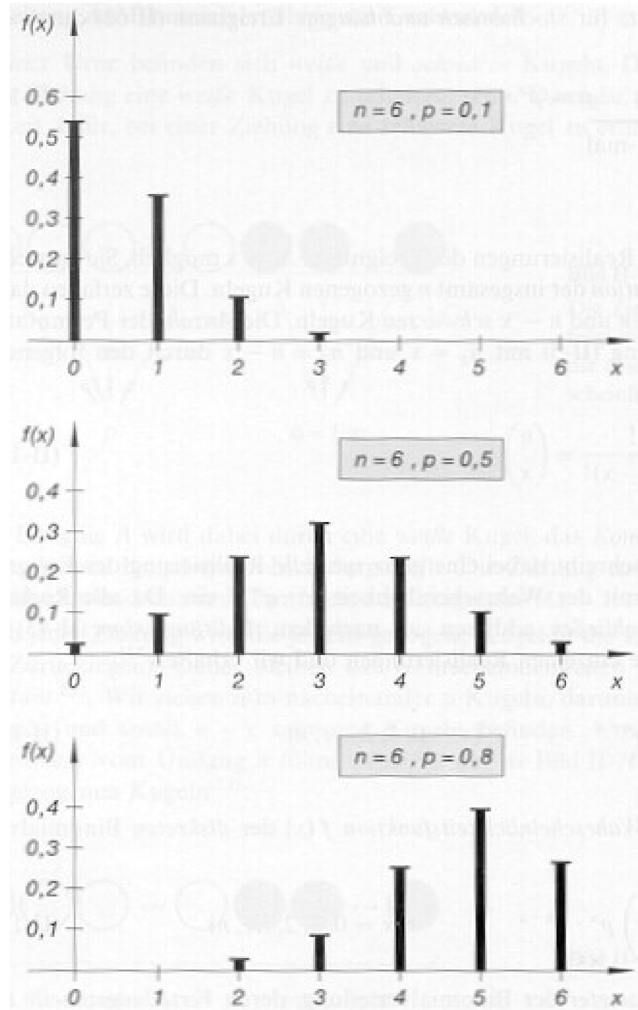
$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots n)}$$

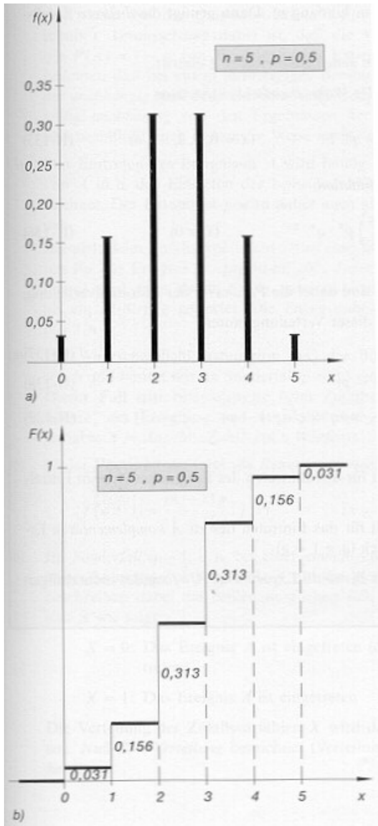
$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots n)}$$

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	q^n	$\binom{n}{1} q^{n-1} \cdot p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} \cdot p^2$	$\ldots$	p^n

Die Wahrscheinlichkeiten f(x) entsprechen der Reihe nach den Summanden in der binomischen Entwicklung von $(q+p)^n$:

$$(q+p)^n = \underbrace{q^n}_{f(0)} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot q^{n-1} \cdot p}_{f(1)} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot q^{n-2} \cdot p^2}_{f(2)} + \ldots + \underbrace{p^n}_{f(n)}$$





Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Binomialverteilung

Ein *Bernoulli-Experiment* mit den beiden sich *gegenseitig ausschließenden* Ergebnissen (Ereignissen) A und $\bar{A}$ werde n-mal nacheinander ausgeführt (sog. *mehrstufiges Bernoulli-Experiment* vom Umfang n). Dann genügt die *diskrete* Zufallsvariable

X = Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis A eintritt

der sog. *Binomialverteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(II-135)}$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k \leqslant x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \qquad (x \geqslant 0) \qquad \text{(II-136)}$$

(für $x < 0$ ist $F(x) = 0$). n und p sind dabei die *Parameter* der Binomialverteilung.

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung lauten:

Mittelwert: $\mu = n\,p$ (II-137)

Varianz: $\sigma^2 = n\,p\,q = n\,p(1-p)$ (II-138)

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{n\,p(1-p)}$ (II-139)

Dabei bedeuten:

p: *Konstante* Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A beim Einzelversuch ($0 < p < 1$)

q: *Konstante* Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zu A *komplementären* Ereignisses $\bar{A}$ beim Einzelversuch ($q = 1 - p$)

n: Anzahl der Ausführungen des *Bernoulli-Experiments* (*Umfang* des mehrstufigen *Bernoulli-Experiments*)

5.2 Hypergeometrische Verteilung

Problem:
Ziehung ohne Zurücklegen ist kein Bernoulli-Experiment mehr, da sich die Wahrscheinlichkeit p durch das Ziehen einer Einheit verändert!

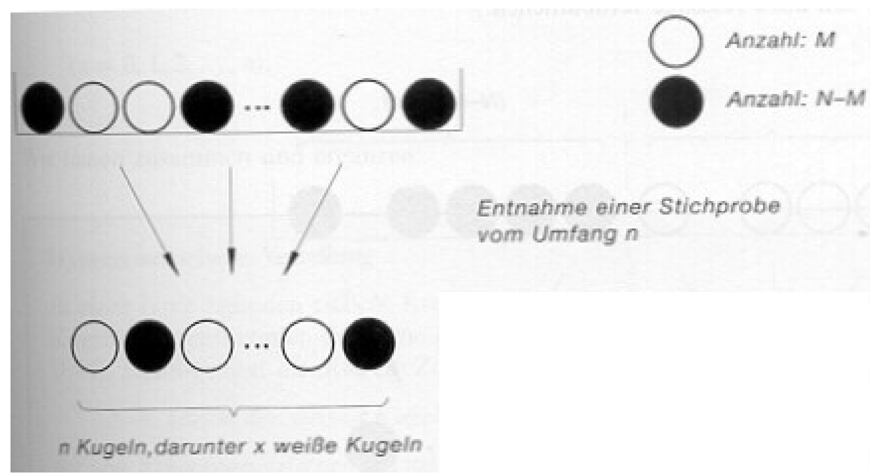
Urnenmodell:

$\binom{N}{n}$ Möglichkeiten,

n Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen.

(Kombination n - ter Ordnung von

N Elementen ohne Wiederholung)

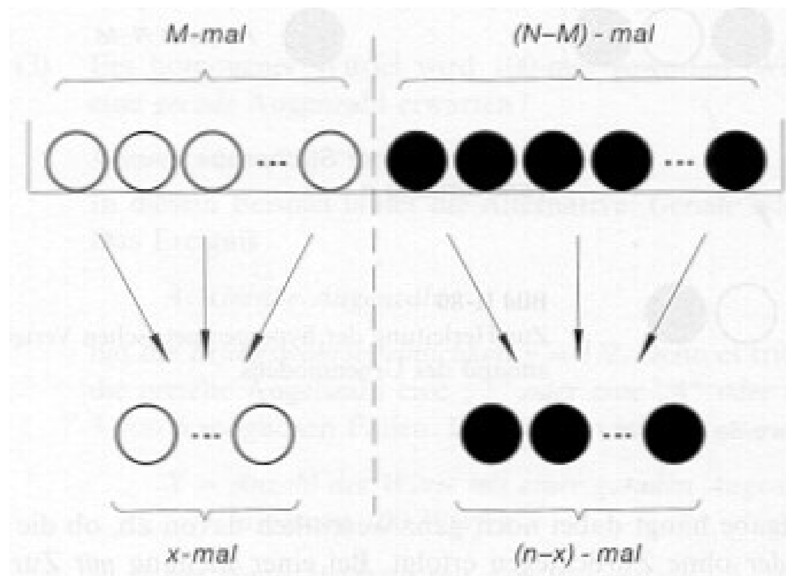


I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$\binom{M}{x}$ Möglichkeiten,

x weiße Kugeln aus den

M weißen auszuwählen



$\binom{N-M}{n-x}$ Möglichkeiten,

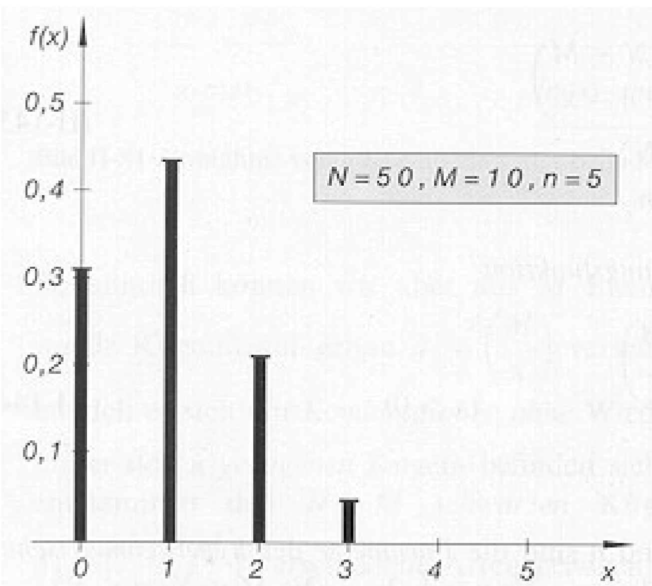
n - x schwarze Kugeln aus den

N - M schwarzen auszuwählen

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsfunktion hypergeometrische Verteilung:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots n)$$



Mittelwert und Varianz:

$$\mu = n\frac{M}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{n\,M\,(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Merke:

Ziehung mit Zurücklegen:
Binomialverteilung

Ziehung ohne Zurücklegen:
Hypergeometrische Verteilung

Faustregel:
Die hypergeometrische Verteilung kann näherungsweise durch die „bequemere“ Binomialverteilung ersetzt werden, falls gilt:

$$n < 0{,}05 \cdot N$$

$$h(x; N, M, n) \approx b(x; n, p) \quad mit \quad p = \frac{M}{N}$$

Wie sieht`s aus beim Skat?

Wahrscheinlichkeit, vier Buben auf die Hand zu bekommen?

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.3 Poisson - Verteilung

Bernoulli – Experimente, bei denen Ereignisse mit nur sehr geringen Wahrscheinlichkeiten auftreten:

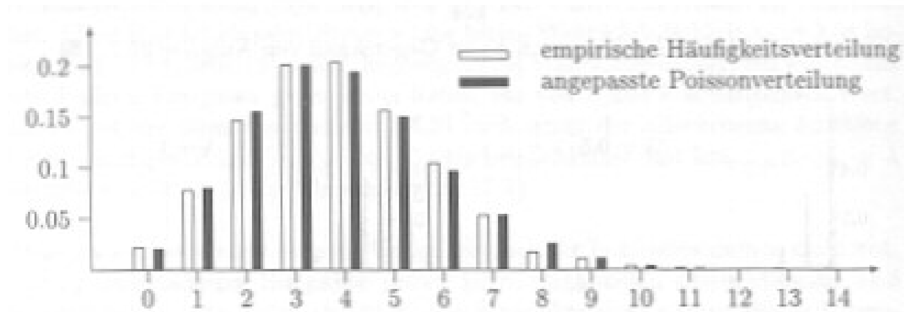
<u>Rutherford – Geiger Experiment 1910</u>

2608 Zeitintervalle von je 7,5s Länge: Insgesamt 10097 Zerfälle beobachtet. Im Mittel also 3,87 Zerfälle während eines Zeitintervalles von 7,5s Länge, aber eben nur im Mittel:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	0	1	1

Werte zum Rutherford-Geiger-Versuch

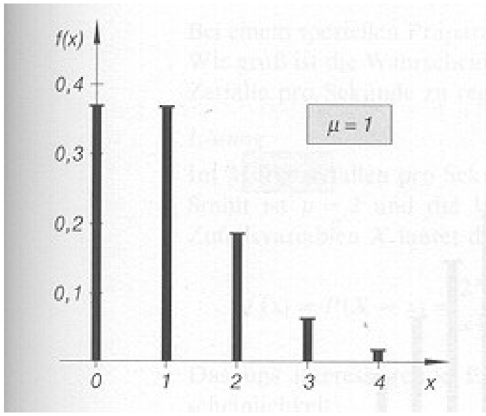
Radioaktiver Zerfall



Gesucht:
Verteilung für „seltene Ereignisse"!

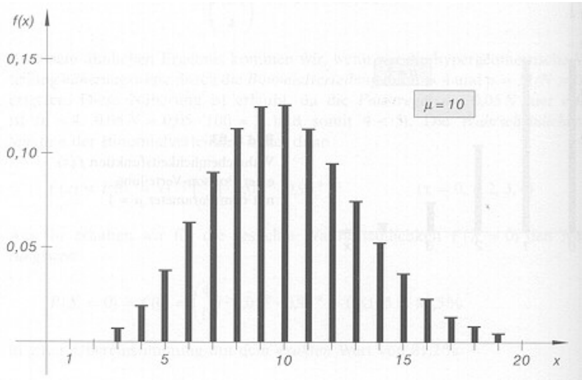
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\cdot p=\mu}} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

$$(x = 0;1;2\dots)$$



Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0,1,2,\dots)}$$



f(x) ist durch den Parameter μ eindeutig festgelegt: Erwartungswert

Poisson-Verteilung

Die Verteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen X mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(II-152)}$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = e^{-\mu} \cdot \sum_{k \leqslant x} \frac{\mu^k}{k!} \qquad \text{(II-153)}$$

heißt *Poisson-Verteilung* mit dem *Parameter* $\mu > 0$ (für $x < 0$ ist $F(x) = 0$).

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung lauten:

Mittelwert: μ (II-154)

Varianz: $\sigma^2 = \mu$ (II-155)

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu}$ (II-156)

Faustregel:
Die Binomialverteilung kann näherungsweise durch die „bequemere" Poisson-Verteilung ersetzt werden, falls gilt:

$$n \cdot p < 10 \quad und$$

$$n > 1500 \cdot p$$

$$b(x; n, p) \approx po(x; \mu)$$

$$mit \quad \mu = n \cdot p$$

Merke:

Anteil/Anzahl in einer Stichprobe: Binomialverteilung

Zahl pro Einheit: Poisson - Verteilung

5.4 Gaußsche - Normalverteilung

Betrachte die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung im Grenzfall eines gegen unendlich strebenden Stichprobenumfangs n:

Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot np(1-p)}} \cdot \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right\} \cdot \left[1 + R_n(k)\right]$$

$$mit \quad \lim_{n\to\infty} R_n(k) = 0$$

Linke Seite: n und k ganzzahlig
Rechte Seite: Auch für reelle Werte von n und k auswertbar!

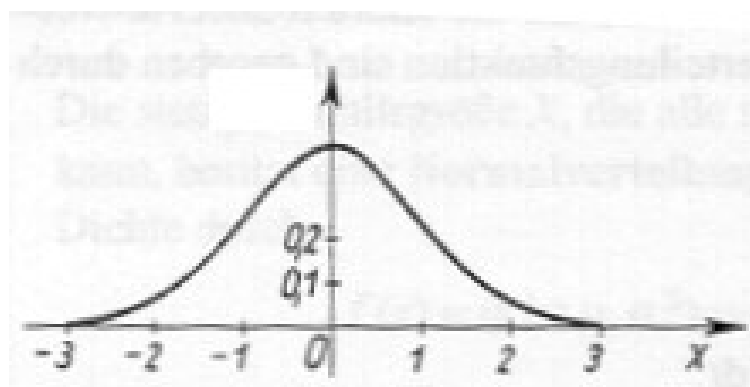
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Idee: Schreibe im Grenzfall die rechte Seite als Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot np(1-p)}}\cdot\exp\left\{-\dfrac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right\}\overset{!}{=}f(k)\cdot dk \\[2ex] Substitution: \quad x:=\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad f(k)\,dk\overset{!}{=}f(x)\,dx \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\}\end{array}}$$

Eigenschaften von

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$



FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

$f(-x) = f(x)$ symmetrisch um Null

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} = 1$$

„Standardnormalverteilung"
„X ist N(0;1) – verteilt"

Verallgemeinerung: Betrachte neue Zufallsvariable

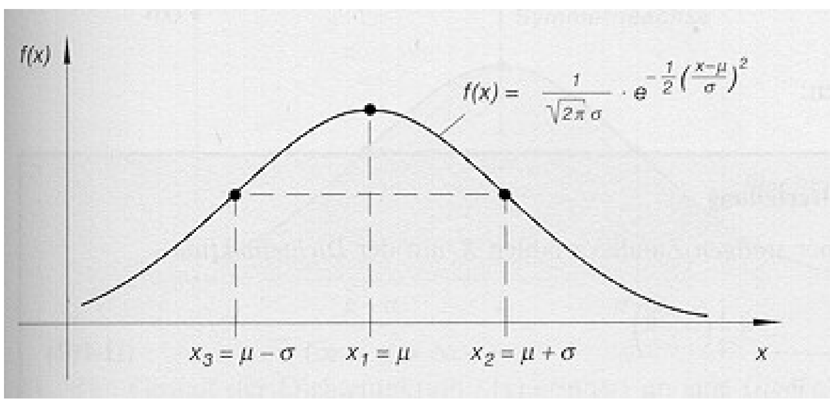
$Y = \sigma \cdot X + \mu$ Lineare Transformation!

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\sigma|} \cdot f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\sigma > 0)$$

Bei Umbenennung von Y in X:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Dichte der Normalverteilung
„X ist N(μ;σ²) – verteilt"



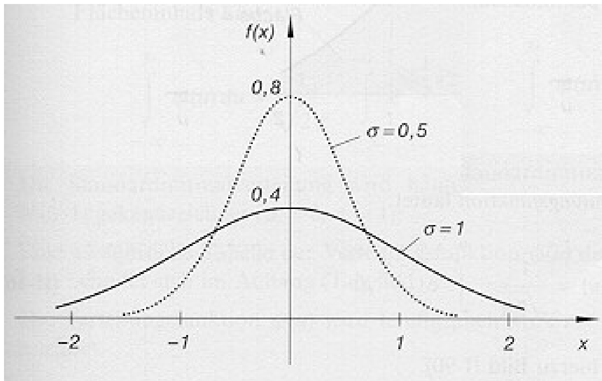
Eigenschaften:

1) f(x) ist symmetrisch um $x = \mu$

2) f(x) hat ein Maximum der Höhe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ bei $x = \mu$

3) f(x) hat Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen



σ bestimmt „Höhe" und „Breite" der Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion; μ bestimmt die Lage des Maximums.

Verteilungsfunktion der Gaußschen Normalverteilung:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dt}$$

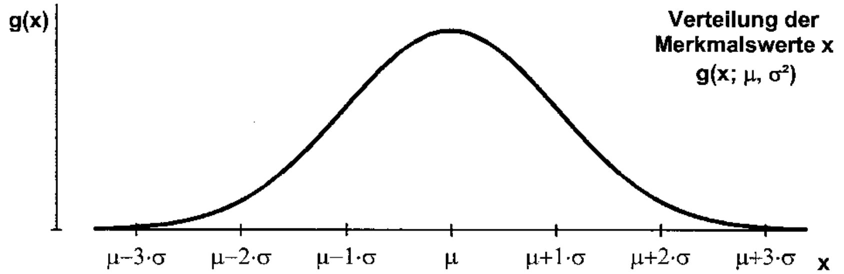
<u>Problem:</u>
Das Integral ist nicht geschlossen lösbar!

→ Integral numerisch lösen und ausführlich tabellieren!
Mit vertretbarem Aufwand aber nur für eine Kombination aus (μ;σ) machbar:
Für die Standardnormalverteilung!

Jede Gaußsche Normalverteilung lässt sich auf die Standardnormalverteilung transformieren.

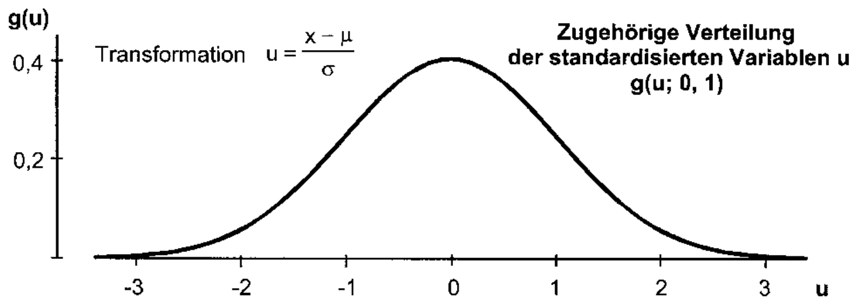
Die konkrete Berechnung der Verteilungsfunktion erfolgt daher in zwei Schritten:
1) Transformation der Variablen auf eine „standardisierte Variable"
2) Ablesen der Verteilungsfunktion in der Tabelle der Standardnormalverteilung

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

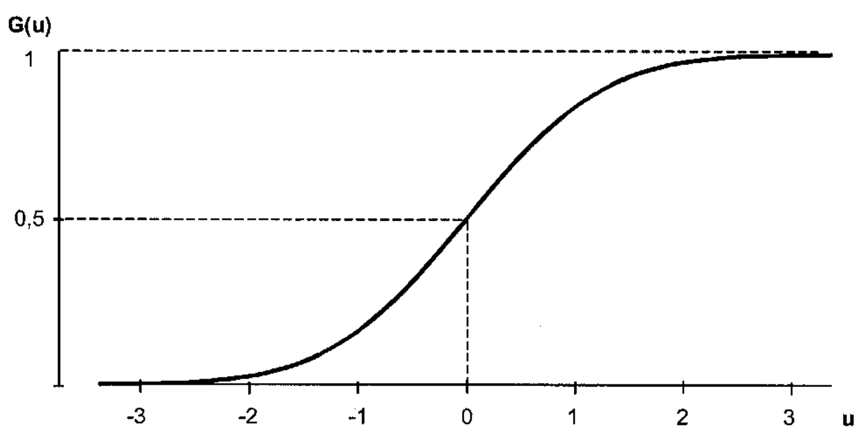


Transformation auf standardisierte Variable

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung

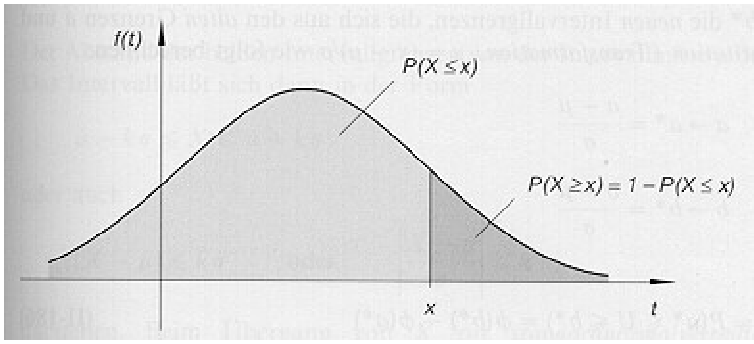


Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow F(x) = G(u)$$

G(u) ist tabelliert

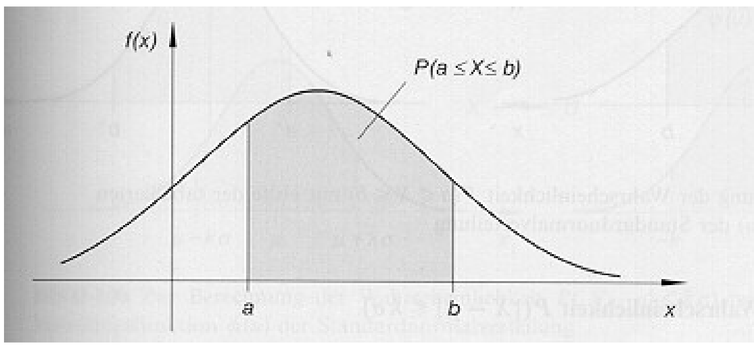
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen



$$P(X \le x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$$

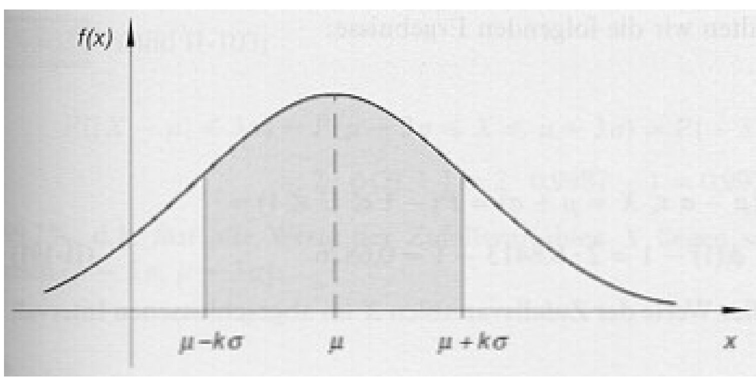
$$P(X \ge x) = 1 - P(X \le x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi(u)$$



$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

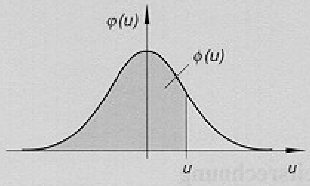


Symmetrische Intervalle:

$$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) = F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma)$$

$$= \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) = 2 \cdot \Phi(k) - 1$$

$$= \begin{cases} 0{,}6826 & \text{für} \quad k = 1 \\ 0{,}9544 & \text{für} \quad k = 2 \\ 0{,}9973 & \text{für} \quad k = 3 \end{cases}$$



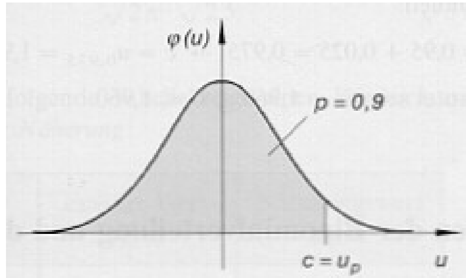
Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$

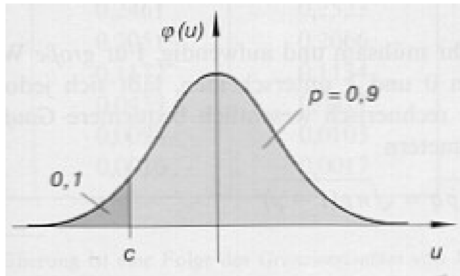
Für $u \geqslant 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

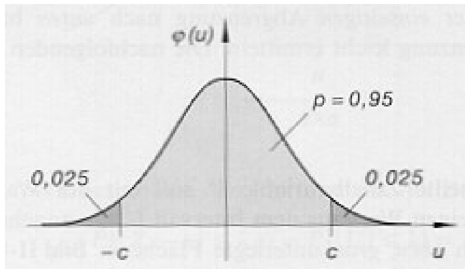


$$P(U \le c) = \Phi(c) = 0{,}9$$
$$\Rightarrow c = u_{0{,}9} = 1{,}282$$

Quantile



$$P(U \ge c) = 1 - P(U \le c)$$
$$= 1 - \Phi(c) = 0{,}9$$
$$\Rightarrow \Phi(c) = 0{,}1$$
$$\Rightarrow c = u_{0{,}1} = -1{,}282$$



$$P(U \le c) = \Phi(c)$$
$$= 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$$
$$\Rightarrow c = u_{0{,}975} = 1{,}960$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

5.5 „Spezialitäten“

Geometrische Verteilung: Diskrete Verteilung für das „Warten auf den ersten Erfolg“

- Erste Sechs bei „Mensch ärgere Dich nicht“
- Pasch im Gefängnis von „Monopoly“
- Periodische kurze Belastungen ohne Nachwirkung, die Geräte, Bauteile etc. funktionsuntüchtig machen

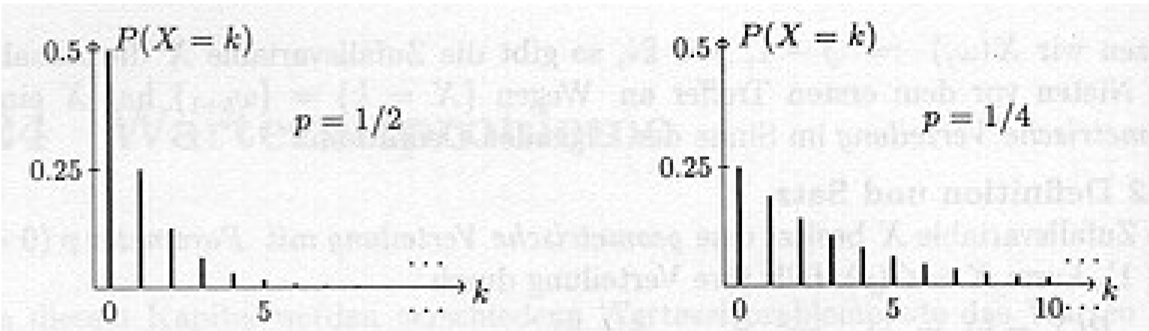
Die Zufallsvariable X besitzt eine geometrische Verteilung mit Parameter p ($0<p<1$), falls ihre Verteilung gegeben ist durch:

$$\boxed{P(X=k)=(1-p)^k\cdot p;\quad k\in N_0}$$

X ist die Zahl der „Nieten“ vor dem ersten „Treffer“, der mit Wahrscheinlichkeit p eintritt.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Erwartungswert: $E(X) = \dfrac{1-p}{p}$ Varianz: $\sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$

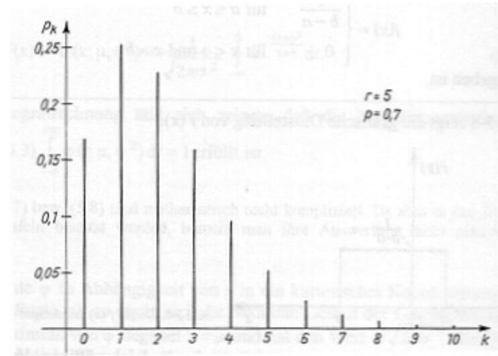


Negative Binomialverteilung:
(Verallgemeinerung der Geometrischen Verteilung)
Betrachte die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bernoulli-Experiment der r-te Erfolg (Treffer, Einzelwahrscheinlichkeit p, r = 1,2,3,...) im k-ten Versuch (k $\geq$ r) auftritt.

$$P(Y=k)=\binom{k-1}{r-1}\cdot(1-p)^{k-r}\cdot p^{r};\quad k=r,r+1,r+2,\dots$$

Bei Betrachtung der Zufallsvariablen X = Y-r (Zahl der Misserfolge bis zum r-ten Erfolg) ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion der negativen Binomialverteilung:

$$\boxed{P(X=k)=\binom{r+k-1}{k}\cdot(1-p)^k\cdot p^r;\quad k=0,1,2,\ldots}$$



Erwartungswert: $E(X)=r\cdot\dfrac{1-p}{p}$; Varianz: $\sigma^2=r\cdot\dfrac{1-p}{p^2}$

Falls r ganzzahlig: „Pascal – Verteilung“

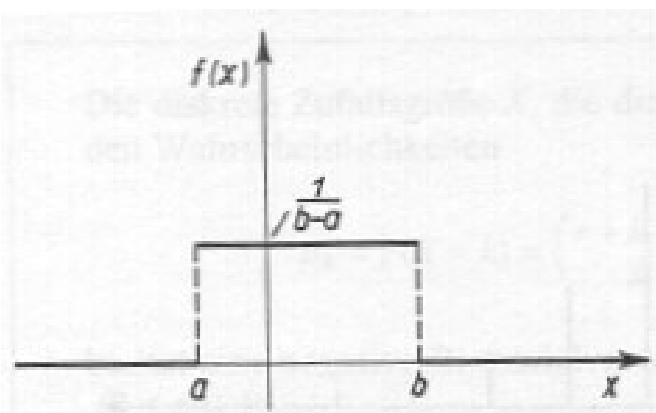
Anwendungen:

- Modellierung von Ansteckungsvorgängen (Schädlinge auf Blättern oder Bäumen)
- Versicherungsmathematik: Modell für Schadenzahlen

Stetige gleichmäßige Verteilung:
(Analogon zur diskreten gleichmäßigen Verteilung)

Die Zufallsvariable X kann im Intervall $[a;b]$ alle Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen; Wahrscheinlichkeitsdichte :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \le x \le b \\ 0 \quad \text{für} \quad x<a \quad \text{und} \quad x>b \end{cases}$$



Erwartungswert

$$E(X)=\mu=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}$$

Varianz

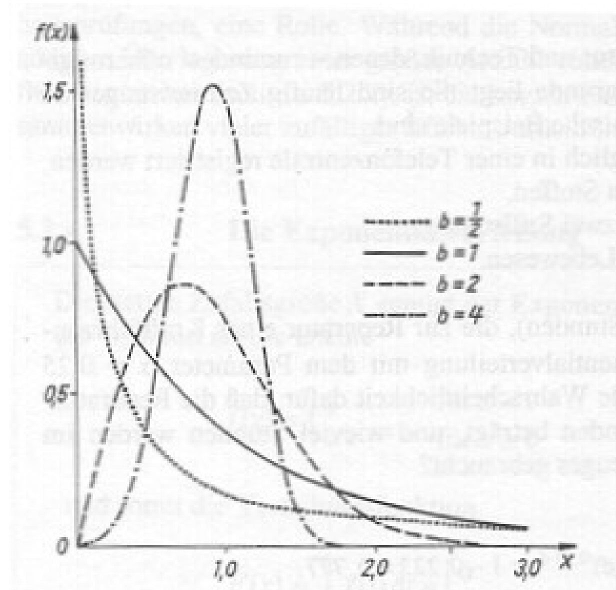
$$Var(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Weibull - Verteilung:
Beschreibung des Ausfallverhaltens von Geräten, Baugruppen etc.

Dreiparametrige Weibull - Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a} \cdot \left(\dfrac{x-c}{a} \right)^{b-1} \cdot \exp\left\{ -\left(\dfrac{x-c}{a} \right)^{b} \right\} & \text{für} \quad x > c \\ 0 & \text{für} \quad x \leq c \end{cases}$$

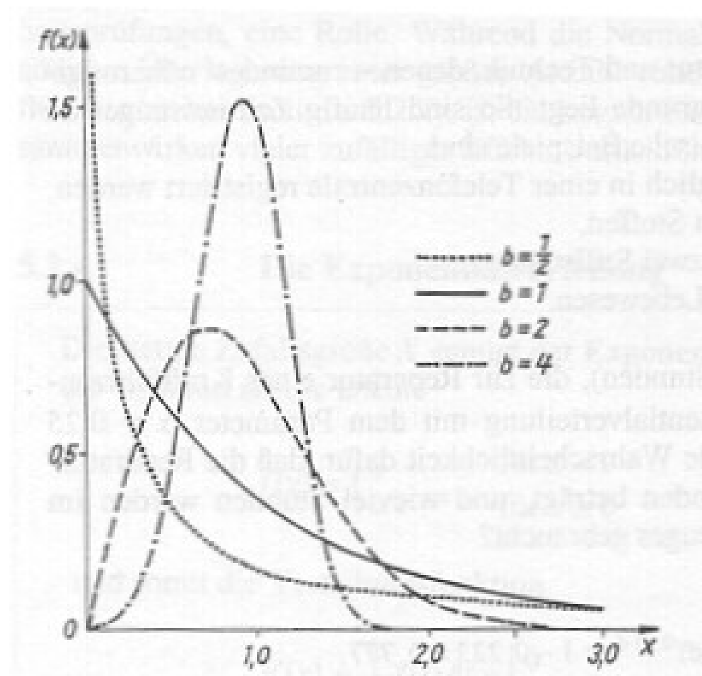


Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{ -\left(\dfrac{x-c}{a} \right)^{b} \right\} & \text{für} \quad x > c \\ 0 & \text{für} \quad x \leq c \end{cases}$$

a: Maßstabsparameter
(Charakteristische Lebensdauer)
b: Formparameter (Ausfallsteilheit)
c: Lageparameter (Ausfallfreie Zeit; c=0:
zweiparametrige Weibullverteilung)

<u>Spezialfall:</u> b=1; c=0
Exponentialverteilung



5.6 Zusammenfassung und Näherungen

Wahrscheinlichkeits-verteilung	Parameter	Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion	Art der Verteilung	Mittelwert $E(X)$	Varianz[31] $\mathrm{Var}(X)$
(1) Binomial-verteilung $B(n;\,p)$	$n,\,p$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $0 < p < 1$	$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$ $(q = 1 - p)$	diskret $x = 0, 1, \ldots, n$	np	$npq = np(1-p)$
(2) Hypergeo-metrische Verteilung $H(N;\,M;\,n)$	N, M, n $N = 1, 2, 3, \ldots$ $M = 1, 2, \ldots, N$ $n = 1, 2, \ldots, N$	$f(x) = \dfrac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $(x \leqslant M;\; n - x \leqslant N - M)$	diskret $x = 0, 1, \ldots, n$	$n \dfrac{M}{N}$	$n \dfrac{M}{N}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right) \dfrac{N-n}{N-1}$
(3) Poisson-Verteilung $\mathrm{Ps}(\mu)$	μ $\mu > 0$	$f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$	diskret $x = 0, 1, \ldots, n$	μ	μ
(4) Gaußsche Normalverteilung $N(\mu;\,\sigma)$	$\mu,\,\sigma$ $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	stetig $-\infty < x < \infty$	μ	σ^2
(5) Standardnormal-verteilung $N(0;\,1)$	$\mu = 0$ $\sigma = 1$	$\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}$	stetig $-\infty < u < \infty$	0	1

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	Approximation durch eine …		
	… Binomialverteilung	… Poisson-Verteilung	… Normalverteilung
(1) Binomialverteilung $B(n; p)$		**Faustregel:** $np \leqslant 10$ und $n \geqslant 1500\,p$ $\mathrm{Ps}(\mu = np)$	**Faustregel:** $np(1-p) > 9$ $N\left(\mu = np;\ \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right)$
(2) Hypergeometrische Verteilung $H(N; M; n)$	**Faustregel:** $0{,}1 < \frac{M}{N} < 0{,}9$, $n < 0{,}05\,N$, $n > 10$ $B\left(n; p = \frac{M}{N}\right)$	**Faustregel:** $\frac{M}{N} \leqslant 0{,}1$ oder $\frac{M}{N} \geqslant 0{,}9$, $n < 0{,}05\,N$, $n > 30$ $\mathrm{Ps}\left(\mu = n\frac{M}{N}\right)$	**Faustregel:** $0{,}1 < \frac{M}{N} < 0{,}9$, $n < 0{,}05\,N$, $n > 30$ $N\left(\mu = n\frac{M}{N};\ \sigma = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}\right)$
(3) Poisson-Verteilung $\mathrm{Ps}(\mu)$			**Faustregel:** $\mu > 9$ $N(\mu; \sigma = \sqrt{\mu})$

Beispiel: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

$$n = 10; \quad p = \frac{1}{2}; \text{ 10 Münzwürfe;}$$

$$\text{X} = \text{Anzahl mit dem Ergebnis "Zahl"}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$f_B(x) = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{x}$$

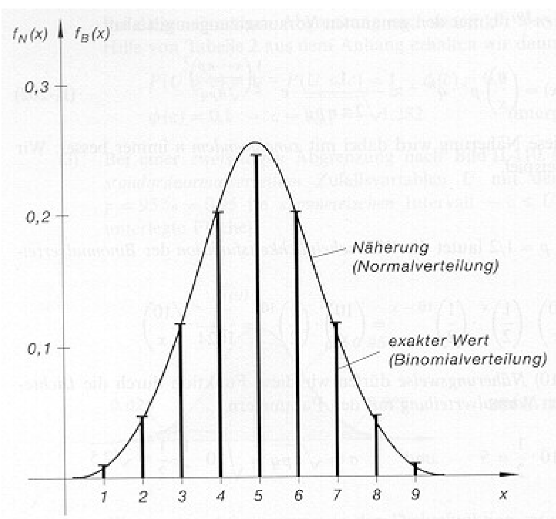
$$n \cdot p \cdot (1-p) = 2{,}5 \Rightarrow \text{Näherung durch die Normalverteilung}$$

eigentlich noch nicht erlaubt! (zu ungenau)

Wir versuchen es trotzdem: $\mu = n \cdot p = 5; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2{,}5}$

Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2{,}5}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-5}{\sqrt{2{,}5}} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{5} (x-5)^2 \right\}$$



Vergleich

x	exakter Wert $f_B(x)$	Näherungswert $f_N(x)$
0	0,0010	0,0017
1	0,0098	0,0103
2	0,0439	0,0417
3	0,1172	0,1134
4	0,2051	0,2066
5	0,2461	0,2523
6	0,2051	0,2066
7	0,1172	0,1134
8	0,0439	0,0417
9	0,0098	0,0103
10	0,0010	0,0017

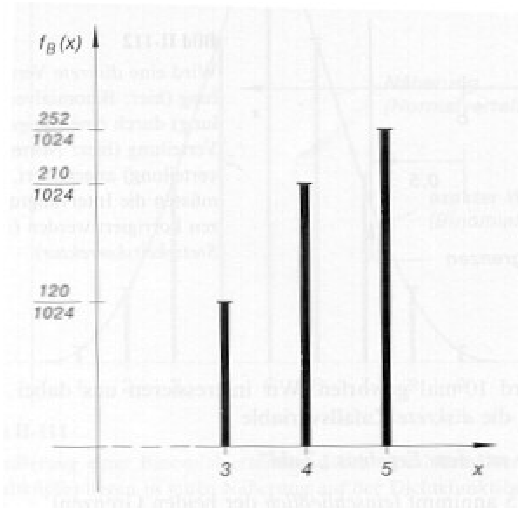
Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen drei-, vier - bzw. fünfmal "Zahl" zu erhalten :

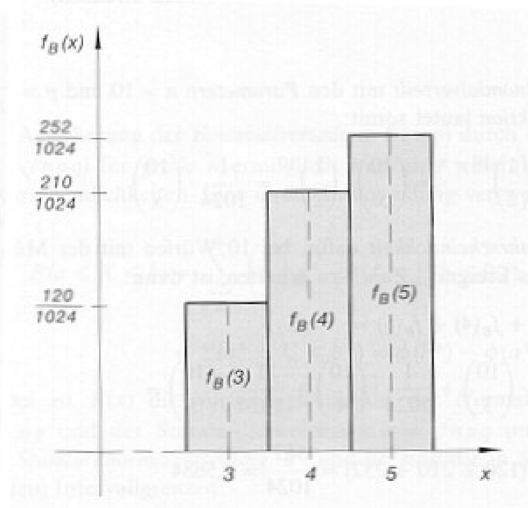
$$P(3 \leq x \leq 5) = f_B(3) + f_B(4) + f_B(5) = 0{,}5684$$

Verschieben der drei Stäbe um jeweils 0,5 nach links und nach rechts: Histogramm

Breite der Rechtecke: $\Delta x = 1$, Höhe: $f_B(x)$

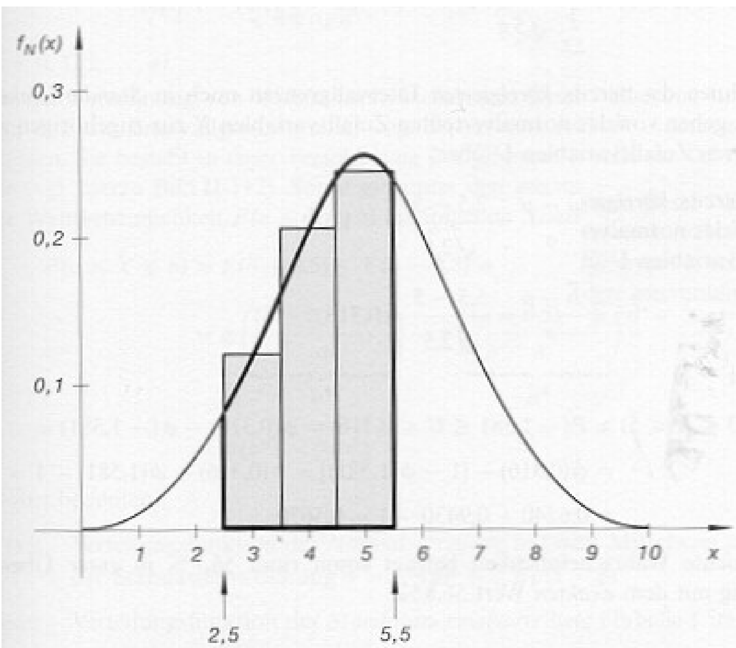
Gesamtfläche: Gesuchte Wahrscheinlichkeit





I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.5 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Näherungslösung $f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{5} \cdot (x-5)^2 \right\}$



Das Histogramm ist die gesuchte exakte Wahrscheinlichkeit:
Für eine vernünftige Näherung müssen die alten Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschoben werden, sonst ist die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve zu klein!

$$P(3 \le X \le 5) \approx \int_{2,5}^{5,5} \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{5} \cdot (x-5)^2\right\} = F(5,5) - F(2,5)$$

Standardisieren:

$$u_o = \frac{5,5-5}{\sqrt{2,5}} = 0,316 \quad u_u = \frac{2,5-5}{\sqrt{2,5}} = -1,581$$

$$P(3 \le X \le 5) \approx \Phi(0,316) - \Phi(-1,581) = 0,5670$$

Allgemein:

$$P(a \le X \le b) \approx F(b+0,5) - F(a-0,5) = \Phi\left(\frac{b+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0,5-\mu}{\sigma}\right)$$

6.1 Einführendes Beispiel

Zwei oder mehr Zufallsvariablen werden gleichzeitig beobachtet:
Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Beispiel: Gleichzeitiger Wurf einer Münze und eines Würfels
X=„Anzahl Wappen bei der Münze“;
Y=Augenzahl beim Würfel

$$X \in \{0;1\} \quad Y \in \{1;2;3;4;5;6\}$$

Für die zweidimensionale Zufallsvariable (X,Y) gibt es damit 12 verschiedene Elementarereignisse:

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	(0; 1)	(0; 2)	(0; 3)	(0; 4)	(0; 5)	(0; 6)
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)

Laplace-Experiment: Alle Elementarereignisse treten mit derselben Wahrscheinlichkeit ein

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	(0; 1)	(0; 2)	(0; 3)	(0; 4)	(0; 5)	(0; 6)
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)

$$P(X = x; Y = y) = \frac{1}{12} \quad (x = 0,1; y = 1, 2, \dots 6)$$

Verteilungstabelle:

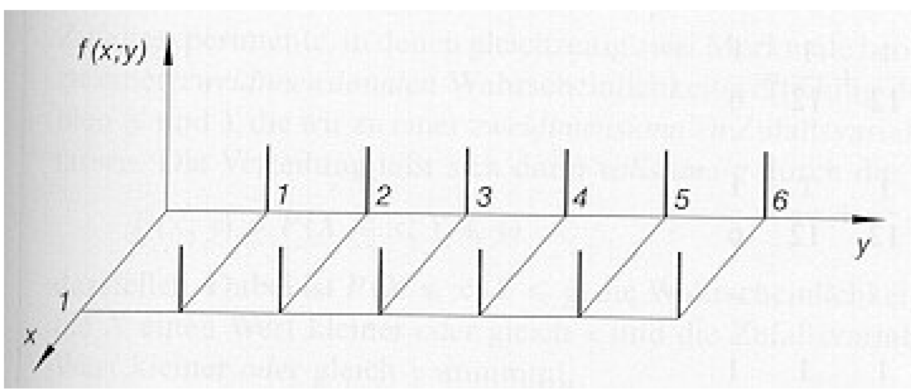
X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser zweidimensionalen Verteilung ist dann eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen:

$$f(x;y) = P(X = x; Y = y) = \begin{cases} 1/12 & \text{für} \quad x = 0,1;\ y = 1,2,\ldots,6 \\ 0 & \quad\ \ \text{alle übrigen } (x;y) \end{cases}$$

Räumliches Stabdiagramm dieser diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion:



In der Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeitswerte zeilenweise addieren:

X \ Y	1	2	3	4	5	6	
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_1(x)$ der Zufallsvariablen X (Münze)

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_2(y)$ der Zufallsvariablen Y (Würfel)

$$f_1(0) = \sum_y f(0; y) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$f_1(1) = \sum_y f(1; y) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$f_1(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X=x, unabhängig von der gewürfelten Augenzahl Y.

In der Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeitswerte spaltenweise addieren:

$$f_2(1) = \sum_x f(x;1) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$f_2(2) = \sum_x f(x;2) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$f_2(6) = \sum_x f(x;6) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$f_2(y)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis Y=y, unabhängig vom Ergebnis des Münzwurfes X.

Die beiden eindimensionalen Wahrscheinlichkeits-funktionen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ der Zufallsvariablen X und Y werden als **Randverteilungen** der zweidimen-sionalen Verteilung (X;Y) bezeichnet.

Hier ist $f(x;y)=f_1(x)\, f_2(y)$
Dies gilt aber **nicht allgemein**! (s. später!)

6.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeits-verteilungen

Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X;Y) (auch „Zufallsvektor" genannt) lässt sich vollständig durch die Verteilungsfunktion darstellen:

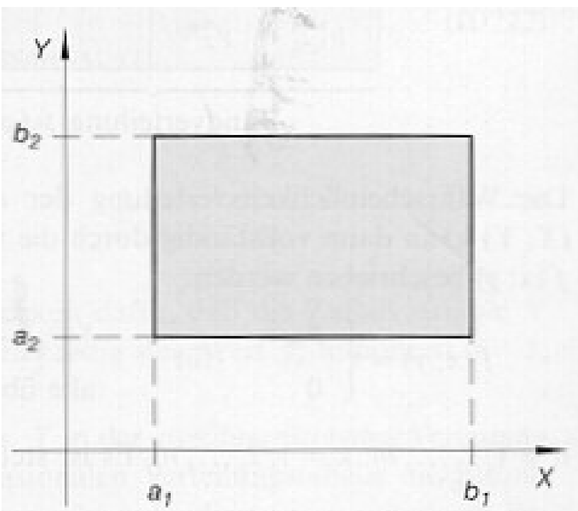
„Gemeinsame Verteilung"
der Zufallsvariablen X und Y:

$$\boxed{F(x;y) = P(X \leq x; Y \leq y)}$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x;y) = \lim_{y \to -\infty} F(x;y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x;y) = 1$$



$$P(a_1 < X \le b_1; a_2 < Y \le b_2) =$$
$$F(b_1;b_2) - F(a_1;b_2) - F(b_1;a_2) + F(a_1;a_2)$$

Diskrete zweidimensionale Verteilung

(X;Y) heißt diskret, wenn beide Komponenten diskrete Zufallsvariablen sind.

Annahme:

X und Y können nur endlich viele Werte annehmen:

$$x_1, x_2, \ldots x_m \quad bzw. \quad y_1, y_2, \ldots y_n \qquad P(X = x_i; Y = y_k) = p_{ik}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	p_1^*
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	p_2^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	p_m^*
	p_1^{**}	p_2^{**}	$\cdots$	p_n^{**}	

Randverteilung $f_1(x)$

Randverteilung $f_2(y)$

Zweidimensionale Verteilungstabelle

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	p_1^*
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	p_2^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	p_m^*
	p_1^{**}	p_2^{**}	$\cdots$	p_n^{**}	

Randverteilung $f_1(x)$

Randverteilung $f_2(y)$

Wahrscheinlichkeitsfkt.:

$$f(x;y) = \begin{cases} p_{ik} & \text{für} \quad x = x_i; y = y_k \\ 0 & \text{alle übrigen } (x;y) \end{cases}$$

$$f(x;y) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i; y_k) = 1 \quad \textit{Normierung}$$

Randverteilung von X

$$f_1(x) = \begin{cases} p_i^* & \text{für} \quad x = x_i; i = 1,2,\ldots,m \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

Randverteilung von Y

$$f_2(y) = \begin{cases} p_k^{**} & \text{für} \quad y = y_k; k = 1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{alle übrigen } y \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\boxed{F(x;y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_k \leq y} f(x_i; y_k)}$$

Stetige zweidimensionale Verteilung

(X;Y) heißt stetig, wenn beide Komponenten stetige Zufallsvariablen sind.

Verteilungsfunktion F:

$$\boxed{F(x;y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u;v)\,dv\,du}$$

Dichtefunktion f:

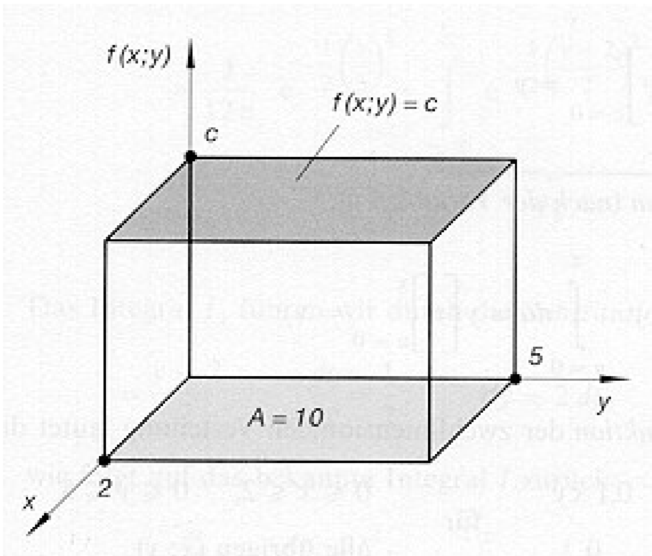
$$\boxed{\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x;y)\,dy\,dx = 1}$$

Dichtefunktion der Randverteilung von X

$$f_1(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x;y)\,dy$$

Dichtefunktion der Randverteilung von Y

$$f_2(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x;y)\,dx$$



Beispiel:
Zweidimensionale Gleichverteilung

$$f(x;y)=\begin{cases} const = c & \text{für} \quad 0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 5 \\ 0 & \quad \text{alle übrigen } (x;y) \end{cases}$$

$$P(X\le 1; Y\le 3)=?$$

6.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable

Hat bei gleichzeitiger Beobachtung zweier Zufallsvariablen X und Y der beobachtete Wert der einen Zufallsvariablen Einfluss auf den Wert der anderen?

Beispiel:

Würfeln mit zwei unterscheidbaren Würfeln
X= Augenzahl 1. Würfel, Y=Augenzahl 2. Würfel

Definition:

Die Zufallsvariablen X und Y mit den Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(y)$ und der gemeinsamen zweidimensionalen Verteilungsfunktion $F(x;y)$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn die Bedingung $F(x;y)=F_1(x)F_2(y)$ für alle $(x;y)$ erfüllt ist.

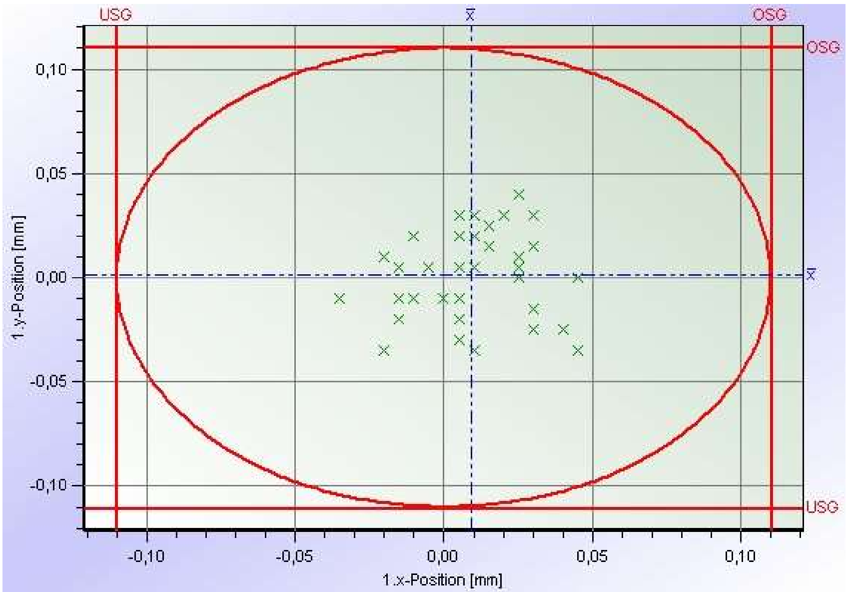
- Ist die Bedingung nicht erfüllt, sind die Zufallsvariablen stochastisch abhängig

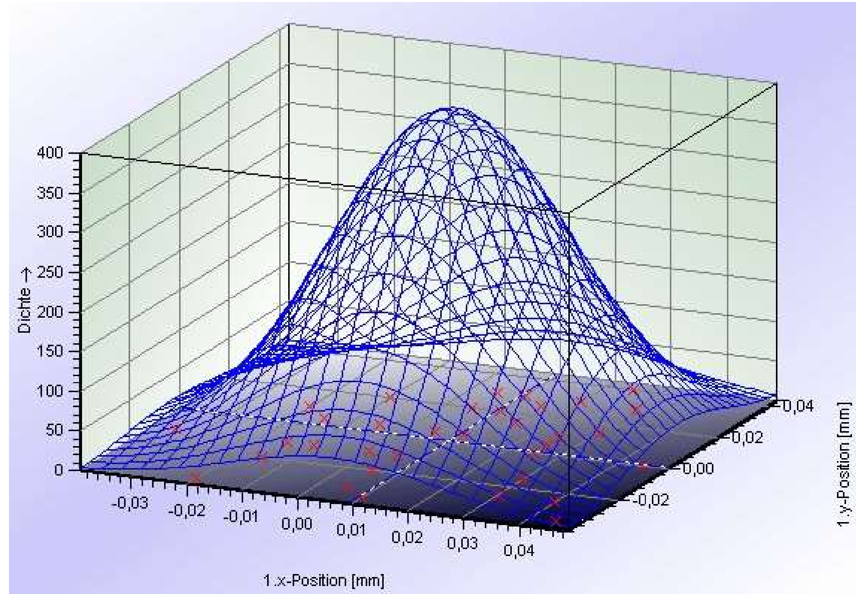
- Ist die Bedingung erfüllt, sind die beiden Ereignisse „X=x“ und „Y=y“ stochastisch unabhängig

- Sind X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariable, so gilt für die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktionen $f(x;y)=f_1(x)f_2(y)$

- Sinngemäße Erweiterung auf n Zufallsvariablen

<u>Beispiel</u>: Positionsschwankungen bei Bohrlöchern





Verteilung der Bohrlöcher in x - Richtung

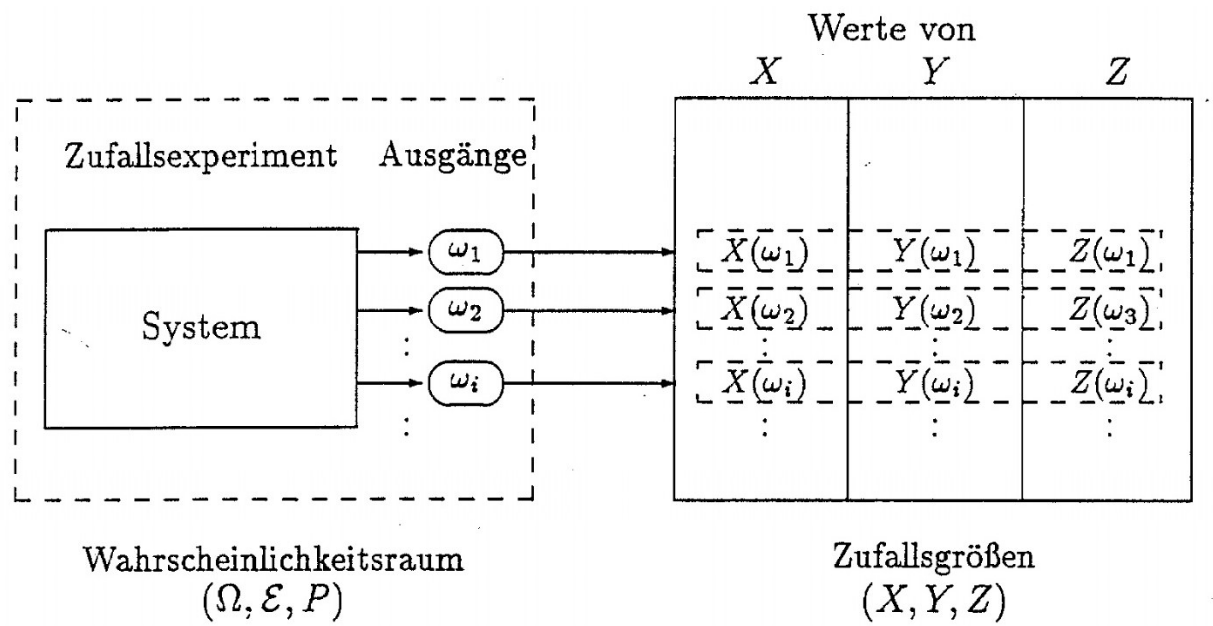
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \right\}$$

Verteilung der Bohrlöcher in y - Richtung

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\}$$

Wegen stochastischer Unabhängigkeit: $f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

6.4 Erweiterung auf n-dimensionale Zufalls-variablen



Über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum sind mehrere (n) Zufallsvariablen gleichzeitig erklärt :

$$X_1 : \Omega \to R; \quad X_2 : \Omega \to R; \quad X_3 : \Omega \to R; \quad X_4 : \Omega \to R; \ldots$$

Definition :

Eine Funktion $\vec{X} = (X_1, \dots X_n) : \Omega \to R^n$ heißt n - dimensionale Zufallsgröße (n - dimensionale Zufallsvariable oder kurz Zufallsvektor), wenn jede einzelne Komponente X_i eine Zufallsgröße (über der gleichen Ereignisalgebra) ist.

Die durch

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots x_n) := P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$

gegebene Funktion $F_{\vec{X}} : R^n \to R$ heißt verbundene oder gemeinsame Verteilungsfunktion von $\vec{X}$.

Man kombiniere die Kenntnisse aus Analysis 2 mit den bisher in der Stochastik gewonnenen…

Definition:

Eine n-dimensionale Zufallsgröße $\vec{X} = (X_1, \ldots X_n)$ heißt kontinuierlich oder stetig, falls es eine nichtnegative, integrierbare Funktion $f_{\vec{X}} : R^n \to R$ gibt mit

$$F_{\vec{X}}(x_1, \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{X}}(t_1, \ldots t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

Die Funktion $f_{\vec{X}}$ heißt (verbundene oder gemeinsame) Dichtefunktion der Zufallsgrößen $X_1, \ldots X_n$.

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\vec{X}}(x_1, \ldots x_n) = f_{\vec{X}}(x_1, \ldots x_n)$$

Die Zufallsgrößen $X_1 \ldots X_n$ heißen (vollständig) unabhängig, falls ihre gemeinsame Verteilungsfunktion faktorisierbar ist: $F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$

Dann ist auch

$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$ für stetige Zufallsvariablen bzw.

$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$ für diskrete Zufallsvariablen

6.5 Summen von Zufallsgrößen

Die neue Zufallsvariable wird als Summe von anderen Zufallsvariablen definiert:

$$Z := X_1 + X_2 + \dots X_n$$

Den Zahlenwerten $x_1 := X_1(\omega), \dots, x_n := X_n(\omega)$ eines Zufallsversuches mit Resultat ω wird die Zahl $z := x_1 + \dots + x_n$ als Ergebnis $Z(\omega)$ der neuen Zufallsgröße Z zugeordnet.

Beispiel für zwei Zufallsvariablen:

$$Z = X + Y$$

$$X \in \{0,1,2,\dots\} = N_0 \quad Y \in \{0,1,2,\dots\} = N_0$$

$$\Rightarrow (X,Y) \in \{(i,j) \mid i,j \in N_0\}$$

$$P(Z = 3) = ?$$

$$P(Z=3)=?$$

$$P(Z=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)$$
$$+P(X=3,Y=0)$$

Allgemein:

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i;Y=k-i)$$

Diskreter Fall: $\quad P(Z=z)=\sum_{i} P(X=x_i;Y=z-x_i)$

Kontinuierlicher Fall: $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,z-x)\,dx$

Dichtefunktion der Summe zweier stetiger Zufallsgrößen

Spezialfall : X und Y sind stochastisch unabhängig :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx \qquad (\text{"Faltung"})$$

6.6 Produkt und Quotient zweier stetiger Zufallsgrößen

$$f_{X \bullet Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}\left(\frac{z}{y}, y\right) \cdot \frac{1}{|y|}\, dy \qquad \text{Produkt} \quad Z = X \cdot Y$$

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(zy, y) \cdot |y|\, dy \qquad \text{Quotient } Z = \frac{X}{Y}$$

6.7 Erwartungswert und Streuung für die Summe von Zufallsgrößen

X und Y seien als Funktionen auf Ω explizit bekannt

$$\Rightarrow (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \quad (X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Erwartungswert

$$E(X+Y) = \sum_i (X+Y)(\omega_i) \cdot P(\omega_i) = \sum_i X(\omega_i) P(\omega_i) + \sum_i Y(\omega_i) P(\omega_i)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

$$E(\alpha X) = \alpha \cdot E(X) \; \forall \alpha \in R$$

Allgemein :

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y)$$

Varianz

$$
\begin{aligned}
Var(\alpha X) &= E((\alpha X)^2) - (E(\alpha X))^2 = E(\alpha^2 X^2) - (\alpha E(X))^2 \\
&= \alpha^2 \left[E(X^2) - (E(X))^2 \right] = \alpha^2 \cdot Var(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Var(X+Y) \\
&= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 \\
&= \underbrace{E(X^2) - (E(X))^2}_{=Var(X)} + \underbrace{E(Y^2) - (E(Y))^2}_{=Var(Y)} + 2\underbrace{\left[E(XY) - E(X)E(Y) \right]}_{=\mathrm{cov}(X,Y)}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y)$$

Falls X und Y stochastisch unabhängige Zufalls-variablen sind:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Bei n Zufallsgrößen: $Var\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i Var(X_i) + 2\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

Die Kovarianz wurde eingeführt als: $\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

Andere Schreibweise: $\operatorname{cov}(X,Y) = E\{(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\}$

Eigenschaften der Kovarianz:

1.) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

2.) $\operatorname{cov}(X,X) = Var(X)$

3.) $\operatorname{cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$

4.) Falls X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$

5.) $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \cdot \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$

Zwei Zufallsvariablen X, Y heißen unkorreliert, falls $cov(X,Y)=0$ ist.

Im Allgemeinen darf aus der Unkorreliertheit zweier Zufallsvariablen nicht auf deren stochastische Unabhängigkeit geschlossen werden!

Die Kovarianz lässt sich als Maß für die Proportionalität von $(X-E(X))$ und $(Y-E(Y))$ auffassen.

Wegen

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\{(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\}$$

wird die Kovarianz positiv, wenn für beide Zufallsvariablen die Abweichungen vom Erwartungswert für die „meisten" Elementarereignisse in „die gleiche Richtung" gehen; bei überwiegend entgegengesetztem Vorzeichen wird die Kovarianz negativ.
Die Kovarianz selber ist als Maß für die Korrelation ungeeignet, z.B. ändert sie sich, wenn beide Zufallsvariablen mit einem Faktor multipliziert werden, obwohl sich dadurch an einer evtl. vorhandenen Proportionalität nichts ändert:

$$\operatorname{cov}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^2 \cdot \operatorname{cov}(X, Y)$$

Durch eine Art „Normierung" ergibt sich der (Pearson'sche) Korrelationskoeffizient:

$$\boxed{\rho_{XY} := \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

Seine wesentliche Bedeutung ist die Lösung eines Optimierungsproblemes:
Die Realisierungen der Zufallsvariablen Y sollen durch die Realisierungen der Zufallsvariablen X möglichst gut vorhergesagt werden, wobei von einem linearen Zusammenhang ausgegangen wird:

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.7 Kovarianz und Korrelation

$$Y(\omega) = a + b \cdot X(\omega)$$

$$\text{"Vorhersagefehler"}: Y - a - b \cdot X$$

$$\Rightarrow E\left((Y - a - b \cdot X)^2\right) \overset{!}{=} \min$$

$$\text{(mittlere quadratische Abweichung minimieren)}$$

$$\boxed{b = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{Var(X)}; \quad a = E(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{Var(X)} \cdot E(X)}$$

Damit Minimum des mittleren quadratischen Fehlers:

$$\boxed{M = \operatorname{var}(Y) \cdot (1 - \rho_{XY}^2)}$$

Folgerungen für den Korrelationskoeffizienten:

1.) $M \geq 0 \Rightarrow |\rho_{XY}| \leq 1$

2.) $|\rho_{XY}| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{cov}^2(X,Y) \leq \operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y)$

"Cauchy-Schwarz-Ungleichung"

3.) $|\rho_{XY}| = 1 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow E\left((Y - a - b \cdot X)^2\right) = 0$

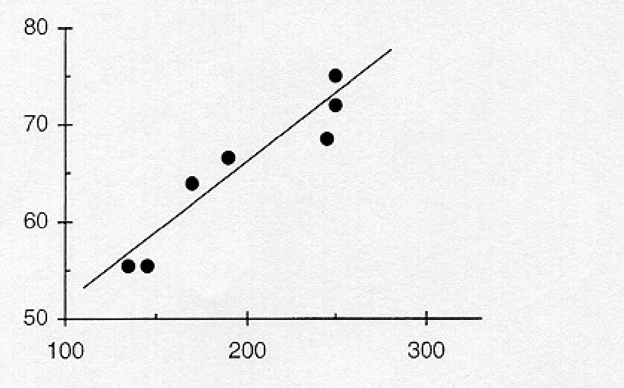
$\Rightarrow P(Y = a + b \cdot X) = 1$

4.) $\rho_{XY} = +1 \Rightarrow b > 0$: "Y wächst mit wachsendem X"

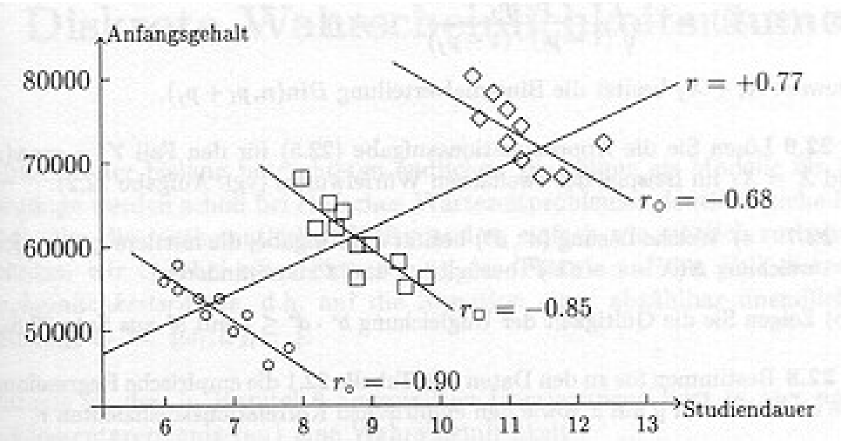
$\rho_{XY} = -1 \Rightarrow b < 0$: "Y fällt mit wachsendem X"

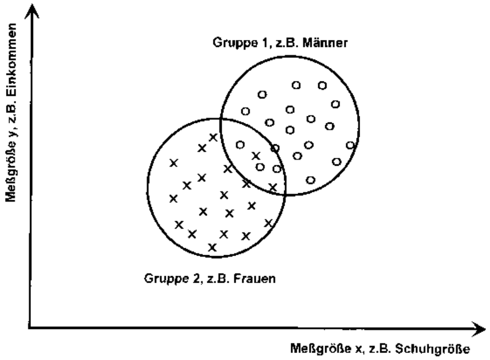
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.7 Kovarianz und Korrelation

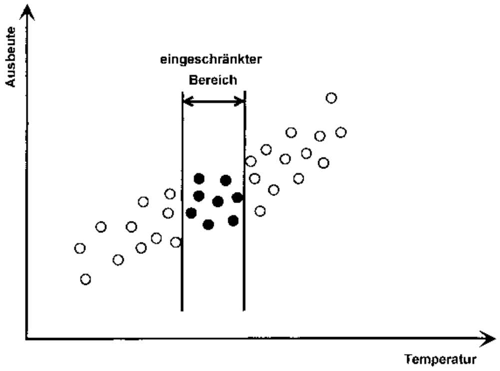
Von einer vorhandenen Korrelation zweier Zufalls-variablen darf nicht auf eine kausalen Zusammen-hang geschlossen werden!



Korrelation zwischen der Bevölkerungszahl in Oldenburg und der Anzahl Störche in den 30er Jahren (nach Box, Hunter, Hunter /1/)







Tschebyscheff-Ungleichung: $$\boxed{P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

Gilt für jede Verteilung, für die Erwartungswert $E(X)=\mu$ und Varianz $var(X)=\sigma^2$ existieren!

Betrachte n-malige Wiederholung eines Zufalls-experimentes mit Messung der Zufallsvariablen X: wir erhalten n stochastisch unabhängige Ergeb-nisse. X_i sei die Realisierung der Zufallsvariablen im i-ten Versuch.

⇒ X_i ist eine Zufallsvariable mit der gleichen Verteilung wie X, insbesondere mit gleichem Erwartungswert und gleicher Varianz.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

$\overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist dann ebenfalls eine Zufallsvariable mit

$$E(\overline{X}_{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$\operatorname{var}(\overline{X}_{(n)}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P\left(|\,\overline{X}_{(n)} - \mu \,| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}(\overline{X}_{(n)})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}_{=const.}$$

Wende Tschebyscheff – Ungleichung auf $\overline{X}_{(n)}$ an!

$$\Rightarrow 0 \leq P\left(\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Schwaches Gesetz großer Zahlen

„Stochastische Konvergenz“:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mittelwert um mehr als ein beliebiges, festes $\varepsilon>0$ von μ abweicht, geht für wachsendes n gegen Null.

(Schwächere Aussage als die „übliche“ Konvergenz wie z.B. bei Zahlenfolgen!)

Starkes Gesetz großer Zahlen (schwieriger Beweis!)

Bei gleichen Voraussetzungen wie in der Herleitung für das schwache Gesetz großer Zahlen gilt:

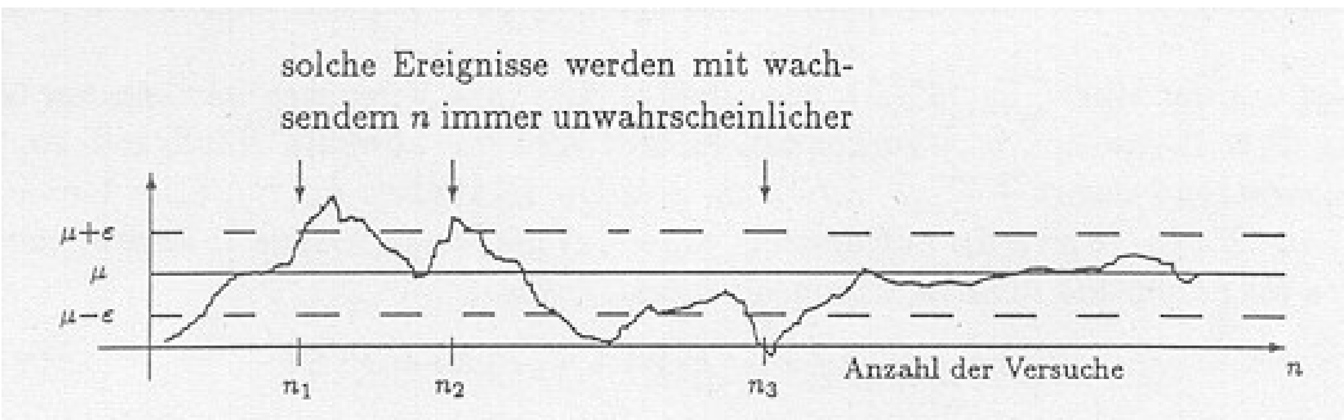
$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|=0\right)=1}$$

Bei unbeschränkt oftmaliger Wiederholung der Messung einer Zufallsgröße konvergiert das Stichprobenmittel gegen den Erwartungswert von X.

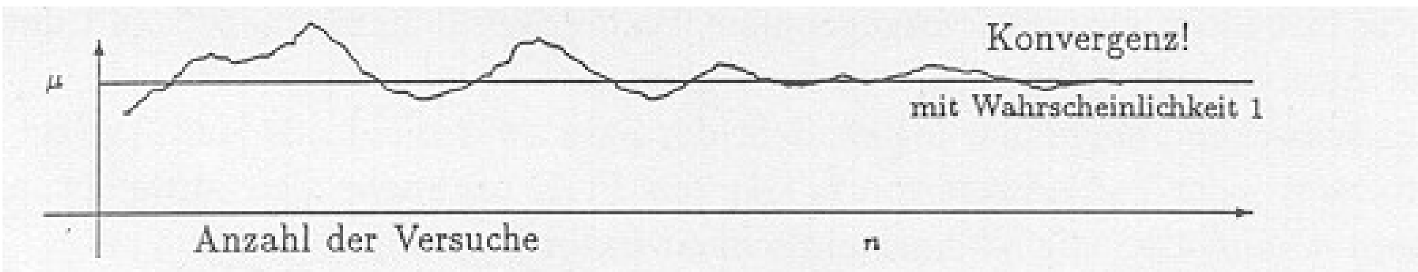
Unterschied zwischen dem schwachen und dem starken Gesetz großer Zahlen?

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung
I.8 Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze

Das „schwache“ Gesetz schließt nicht aus, dass auch für unbeschränkt wachsende n-Werte gelegentlich noch größere Abweichungen als ε auftreten; es besagt aber, dass die Wahrscheinlichkeit für solche „Ausreißer“ mit wachsendem n gegen Null geht:



Das „starke" Gesetz kann dieses Verhalten auch nicht mit Sicherheit ausschließen, jedoch konvergiert mit Wahrscheinlichkeit „1" das Stichprobenmittel gegen den Erwartungswert:



Während das „schwache" Gesetz Aussagen über die Abweichung der gemittelten Größe nach n Versuchen macht, bezieht sich die Aussage des „starken" Gesetzes auf die Serie als Gesamtheit.

Für die Praxis:
Das arithmetische Stichprobenmittel ist also eine „sinnvolle" Schätzung für den Erwartungswert!

$$\boxed{\overline{X}_{(n)} \approx \mu}$$

Wichtiger Spezialfall:
Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen

Wir betrachten ein Bernoulli-Experiment, bei dem entweder das Ereignis E eintritt oder nicht eintritt. Bei Eintritt von E bekommt eine neue Zufallsgröße Z den Wert „1" zugewiesen, bei Nichteintreten von E den Wert „0":

„Indikatorgröße" Z

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Bernoulli-Versuch:} & E & \overline{E} & E & \ldots & \overline{E} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\
\text{Wert von Z:} & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_n
\end{array}$$

$\sum_{i=1}^{n} Z_i$ ist die absolute Häufigkeit von E

$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i$ ist die relative Häufigkeit von E: $h_n(E) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i$

Erwartungswert von Z: $E(Z) = 0 \cdot P(\overline{E}) + 1 \cdot P(E) = P(E)$

Einsetzen in die Gesetze der großen Zahlen:

Wichtiger Spezialfall:
Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|h_n(E) - P(E)\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \text{schwach}$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|h_n(E) - P(E)\right| = 0\right) = 1 \quad \text{stark}$$

Verbindung zwischen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der statistischen Analyse mit relativen Häufigkeiten!

Erster Versuch der Definition von „Wahrscheinlichkeit" nach von Mises: $P(E) = \lim_{n\to\infty} h_n(E)$

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$$ Als Definition für P nicht haltbar,
Aber mit Gesetz der großen Zahlen:

$$P(E) \approx h_n(E)$$ für „große" n

Das starke Gesetz der großen Zahlen ist also der Grund, warum Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse über die relative Häufigkeit des Ereignisses geschätzt werden können!

Wichtig für die Praxis!

Zentraler Grenzwertsatz (Lindeberg und Levy)

Die unabhängigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots$ sollen die gleiche Verteilung haben mit

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = \mu \text{ und } \operatorname{var}(X_1) = \operatorname{var}(X_2) = \dots = \sigma^2$$

Betrachte die Summe $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \mu \text{ und } \operatorname{var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) = n \cdot \sigma^2$$

Betrachte die neue Zufallsgröße $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$ "Standardisierte" Version von S_n

Zentraler Grenzwertsatz (Lindeberg und Levy)

Für die Standardisierung $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}}$ der Summe $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$

gilt die Grenzwertbeziehung $\lim_{n\to\infty} P(S_n^* \le s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \forall s \in R$

Die Verteilungsfunktionen $F_{S_n^*}, n = 1, 2, \ldots$ der standardisierten Summe konvergieren gegen die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung.

Bedeutung für die Praxis?

Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes auf die Stichproben-Mittelwertbildung:

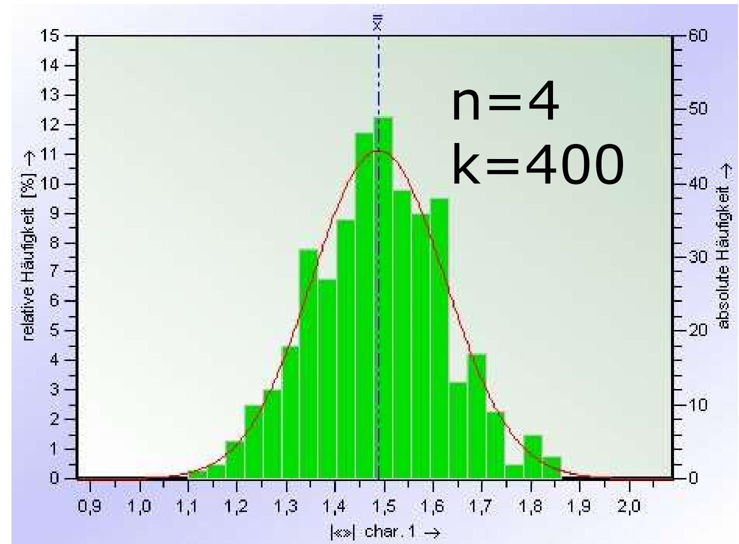
$$\overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i' \Rightarrow E(X_i') = \frac{1}{n} \cdot \mu_X \,;\, \mathrm{var}(X_i') = \frac{1}{n^2} \cdot \sigma_X^2$$

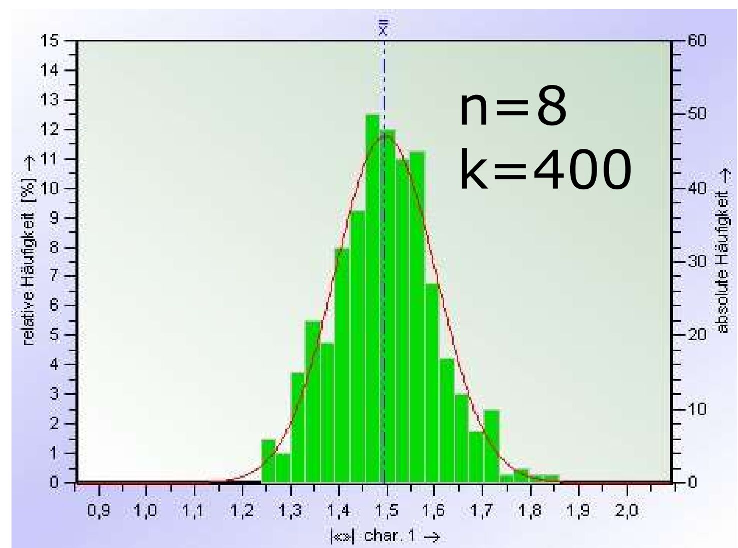
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i' - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i'\right)}{\sqrt{\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i'\right)}} = \frac{\overline{X}_{(n)} - n \cdot \frac{1}{n} \cdot \mu_X}{\frac{1}{n} \sigma_X \cdot \sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

$\overline{X}_{(n)}$ ist asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert μ_X und Standardabweichung $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_X$

I.8 Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze

n=1; k=400;
Rechteckverteilung





FH Aachen
Fachbereich Medizintechnik und Technomathematik
Prof. Dr. Horst Schäfer
Heinrich-Mußmann-Str. 1
52428 Jülich
T +49. 241. 6009 53927
horst.schaefer@fh-aachen.de
www.fh-aachen.de