1. Die von einer Maschine für einen bestimmten Arbeitsvorgang benötigte Zeit sei eine Zufallsvariable X, für deren Dichtefunktion in Abhängigkeit von einem $\theta \in [0,2]$ die Gestalt

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta + 2(1-\theta)\cdot x & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unterstellt wird. Zu X liege eine einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ (die X_i sind unabhängig) vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktionen

i. $\hat{\Theta}_1 = 4 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_1$ genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(\hat{\Theta}_1) = \theta$ gilt.

Offensichtlich ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\hat{\Theta}_1\right) &= \mathrm{E}\left(4 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= 4 - \frac{6}{n}\cdot \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= 4 - \frac{6}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \\ &= 4 - 6\,\mathrm{E}\left(X\right) \\ &= 4 - 6\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= 4 - 6\left(\int_0^1 x\cdot(\theta + 2(1-\theta)\cdot x)\,\mathrm{d}\,x\right) \\ &= 4 - 6\left(\theta\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x + 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x - 2\theta\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x\right) \\ &= 4 - 6\cdot\frac{4-\theta}{6} \\ &= \theta \end{aligned}$$

$\square$

ii. $\hat{\Theta}_2 = 3 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_2$ genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(\hat{\Theta}_2) = \theta$ gilt.

Offensichtlich ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\Theta}_2\right) &= \mathrm{E}\left(3 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= 3 - \frac{6}{n}\,\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= 3 - 6\,\mathrm{E}(X^2) \\
&= 3 - 6\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= 3 - 6\int_{0}^{1} x^2\left(\theta + 2(1-\theta)\cdot x\right)\mathrm{d}\,x \\
&= \ldots \\
&= 3 - 6\cdot\frac{3-\theta}{6} \\
&= \theta
\end{aligned}$$

□

erwartungstreu für θ sind.

(b) Überprüfen Sie zusätzlich, ob $\hat{\Theta}_1$ konsistent für θ ist.

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_1$ genau dann konsistent ist, wenn $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) = 0$ gilt.

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(4 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\right)^2\cdot\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= 36\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) \\
&= 36\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\mathrm{Var}(X) \\
&= 36\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\mathrm{Var}(X) \\
&= 36\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$