Stochastik

Hausaufgabenblatt 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 23. Oktober 2021

1. Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen („Zahl“: Z, „Wappen“: W).

   (a) Bestimmen Sie die dabei möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse), sowie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperiments.

   Lösung:

   Es gilt:

   $$\begin{aligned}\Omega = \{&(Z,Z,Z),(Z,Z,W),(Z,W,Z),(Z,W,W),\\ &(W,Z,Z),(W,Z,W),(W,W,Z),(W,W,W)\}\end{aligned}$$

   $\square$

   (b) Durch welche Teilmengen von Ω lassen sich die folgenden Ereignisse beschreiben?

   i. $A :=$ {Bei drei Würfen zweimal „Zahl“}

   Lösung:

   Wir gehen davon aus, dass „mindestens zweimal“ gemeint ist. Es gilt:

   $$A = \{(Z,Z,Z),(Z,Z,W),(Z,W,Z),(W,Z,Z)\}$$

   $\square$

   ii. $B :=$ {Bei drei Würfen zweimal „Wappen“}

   Lösung:

   Wir gehen davon aus, dass „mindestens zweimal“ gemeint ist. Es gilt:

   $$B = \{(Z,W,W),(W,Z,W),(W,W,Z),(W,W,W)\}$$

   $\square$

iii. $D :=$ {Bei drei Würfen dreimal „Zahl“}

Lösung:

Es gilt:

$$C = \{(Z, Z, Z)\}$$

$\square$

iv. $E :=$ {Bei drei Würfen dreimal „Wappen“}

Lösung:

Es gilt:

$$D = \{(W, W, W)\}$$

$\square$

(c) Bilden Sie aus den unter (b) genannten Ereignissen die folgenden zusammengesetzten Ereignisse und deuten Sie diese:

i. $A \cup B$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cup B = \{&(Z, Z, Z), (Z, Z, W), (Z, W, Z), (Z, W, W), \\ &(W, Z, Z), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\} \end{aligned}$$

Interpretation:

$$A \cup B = \{\text{Eine homogene Münze wird dreimal geworfen}\}$$

$\square$

ii. $B \cup E$

Lösung:

Es gilt:

$$B \cup E = \{(Z, W, W), (W, Z, W), (W, W, Z), (W, W, W)\}$$

Interpretation:

$$B \cup E = \{\text{Bei drei Würfen wird höchstens einmal Zahl geworfen}\}$$

$\square$

iii. $D \cup E$

Lösung:

Es gilt:

$$D \cup E = \{(Z, Z, Z), (W, W, W)\}$$

Interpretation:

$$D \cup E = \{\text{Bei drei Würfen wird dreimal das gleiche geworfen}\}$$

$\square$

iv. $A \cap B$

Lösung:

Es gilt:

$$A \cap B = \emptyset$$

Interpretation:

$$A \cap B = \{\text{Bei drei Würfen wird zweimal Kopf und zweimal Wappen geworfen}\}$$

$\square$

2. Beweisen Sie durch das Anweden der Gesetze der Mengenalgebra:

(a) $A \cap (A \cup B) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & A \cap (A \cup B) && = A \\ \equiv\ & (A \cap A) \cup (A \cap B) && = A \\ \equiv\ & A \cup (\underbrace{A \cap B}_{\subseteq A}) && = A \\ \equiv\ & A = A \end{aligned}$$

□

(b) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \\ \equiv\ & A \cap (B \cup \overline{B}) = A \\ \equiv\ & A \cap \Omega = A \\ \equiv\ & A = A \end{aligned}$$

□

(c) $\overline{A} \cup (A \cap \emptyset) = A$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \overline{A} \cup (A \cap \emptyset) = A \\ \equiv\ & (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup \emptyset) = A \\ \equiv\ & (\overline{A} \cup A) \cap \overline{A} = A \\ \equiv\ & \overline{A} = A \quad \lightning \end{aligned}$$

3. Für die Ereignisse A, B und C aus einem Ereignissystem gilt

$$P(A) = 0.5 \qquad P(B) = 0.2 \qquad P(C) = 0.3 \qquad P(A \cap B \cap C) = 0.02$$
$$P(A \cup B) = 0.6 \qquad P(A \cup C) = 0.6 \qquad P(B \cap C) = 0.1$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für:

(a) $P(B \cup C)$

Lösung:

Es gilt:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

□

(b) $P(A \cap C)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ \equiv \quad & P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) \\ \Longrightarrow \quad & P(A \cap C) = 0.5 + 0.3 - 0.6 = 0.2 \end{aligned}$$

□

(c) $P(A \cap B)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \equiv \quad & P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ \Longrightarrow \quad & P(A \cap B) = 0.5 + 0.2 - 0.6 = 0.1 \end{aligned}$$

□

(d) $P(A \cup B \cup C)$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.5 + 0.2 + 0.3 - 0.1 - 0.2 - 0.1 + 0.02 = 0.62 \end{aligned}$$

□

4. Von 20 Teilnehmern einer Bergwanderung geben 8 Personen an Knieschmerzen zu haben. 6 Teilnehmer leiden unter Sonnenbrand. 8 Teilnehmer bleiben unversehrt.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer

   (a) Sonnenbrand oder Knieschmerzen hat?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\text{☀} \cup \text{🦵}) = 1 - P(\overline{\text{☀} \cup \text{🦵}}) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = 0.6$$

   $\square$

   (b) Knieschmerzen und Sonnenbrand aufweist?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = P(\text{☀}) + P(\text{🦵}) - P(\text{☀} \cup \text{🦵}) = \frac{6}{20} + \frac{8}{20} - \frac{12}{20} = \frac{2}{20} = 0.1$$

   $\square$

   (c) der Knieschmerzen hat, keinen Sonnenbrand hat?

   Lösung:

   Wählen wir aus allen Teilnehmern, dann gilt:

   $$P(\overline{\text{☀}} \cap \text{🦵}) = P(\text{🦵}) - P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = \frac{8}{20} - \frac{2}{20} = \frac{6}{20} = 0.3$$

   $\square$

   Wählen wir einen Teilnehmer von denen mit Knieschmerzen, dann gilt:

   $$P(\overline{\text{☀}} \mid \text{🦵}) = \frac{8}{8} - \frac{2}{8} = 0.75$$

   $\square$

   (d) Sonnenbrand, aber keine Knieschmerzen hat?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(\text{☀} \cap \overline{\text{🦵}}) = P(\text{☀}) - P(\text{☀} \cap \text{🦵}) = \frac{6}{20} - \frac{2}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$

   $\square$