Stochastik

Hausaufgabenblatt 1

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 8. Oktober 2021

1. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 7 Studierende auf 7 Plätzen anzuordnen, wenn diese eine Sitzreihe im Hörsaal bilden? Was ändert sich, wenn die Platzierung auf 7 Stühlen um einen runden Tisch geschehen soll?

Lösung:

Für die Sitzreihe gilt trivialerweise: (Permutation)

$$P(7) = 7! = 5040$$

Für den runden Tisch gilt dann, da die Wahl der „ersten Position“ egal ist: (Permutation)

$$\frac{P(7)}{7} = P(6) = 720$$

□

2. Zwei 10 Cent-, drei 50 Cent- und fuenf 1 Euro Münzen sollen in zufälliger Reihenfolge angeordnet werden, wobei Münzen gleichen Wertes als nicht unterscheidbar angesehen werden. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Lösung:

Es gilt: (Permutation mit nicht unterscheidbaren Münzen)

$$P(10; 2; 3; 5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2! \cdot 3!} = 2520$$

□

3. Zu einer Feier wollen die Gäste Weißwein trinken. Von 3 Sorten stehen jeweils 12 nicht unterscheidbare Flaschen im Keller.

   (a) Der Kühlschrank im Keller fasst 6 Flaschen. Wie viele Möglichkeiten gibt es aus den 3 Sorten den Kühlschrank zu bestücken?

   Lösung:

   Es gilt: (Kombination mit Wiederholung)

   $$C_w(3;6) = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

   $\square$

   (b) Wie viele Anordnungen der Flaschen im Regal gibt es, wenn die Flaschen einer Sorte nicht unterscheidbar sind?

   Lösung:

   Es gilt: (Permutation mit nicht unterscheidbaren Flaschen)

   $$P(36;12;12;12) = \frac{36!}{12! \cdot 12! \cdot 12!} \approx 3.38 \cdot 10^{15}$$

   $\square$

4. Eine Lieferung von 30 Geräten, die durch ihre Fabrikationsnummern unterscheidbar sind, enthält 6 fehlerhafte Geräte.

   (a) Wie viele verschiedene Stichproben des Umfangs 5 sind möglich?

Lösung:

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung)

$$C(30; 5) = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 142\,506$$

□

   (b) Wie viele Stichproben des Umfangs 5 mit genau 2 fehlerhaften Geräten sind möglich?

Lösung:

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung pro Gerätetyp)

$$C(24; 3) \cdot C(6; 2) = \binom{24}{3} \cdot \binom{6}{2} = \ldots = 30\,360$$

□

   (c) Wie viele Stichproben des Umfangs 5 mit höchstens einem fehlerhaften Gerät sind möglich?

Lösung:

1. Situation:

- Alle 5 Geräte kommen aus den 24 funktionstüchtigen Geräten.
- Keine Geräte kommen aus den 6 defekten Geräten.

2. Situation:

- 4 Geräte kommen aus den 24 funktionstüchtigen Geräten.
- 1 Gerät kommt aus den 6 defekten Geräten.

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung pro Gerätetyp)

$$n_1 = C(24; 5) \cdot C(6; 0) = \binom{24}{5} \cdot \binom{6}{0} = \ldots = 42\,504$$

$$n_2 = C(24; 4) \cdot C(6; 1) = \binom{24}{4} \cdot \binom{6}{1} = \ldots = 63\,756$$

Insgesamt gilt damit:

$$n = n_1 + n_2 = 106\,260$$

□

Dabei wird, wie in der Praxis üblich, eine geprüfte Einheit nach der Prüfung nicht in das Lieferlos zurückgelegt.

5. Ein Zweig des Telefonnetzes wird über sechsstellige Nummern angewählt. Die erste Ziffer der Telefonnummer darf keine Null sein. Für wieviele Anschlüsse reichen die möglichen Kombinationen aus?

Lösung:

Es gilt: (Variation mit Wiederholung fuer 1. Ziffer bzw. 2.-6. Ziffer)

$$V_w(9;1) \cdot V_w(10;5) = 9^1 \cdot 10^5 = 900\,000$$

$\square$

6. An einem Pferderennen nehmen 10 Pferde teil. Für eine Wette müssen die ersten drei Plätze in der richtigen Reihenfolge getippt werden. Wie viele Tippmöglichkeiten gibt es?

Lösung:

Es gilt: (Permutationen)

$$n = \frac{P(10)}{P(7)} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

□

7. Berechnen Sie, wie lange ein Skatspieler leben müsste, wenn er

   (a) alle möglichen Blätter aus 10 Karten auf die Hand (ein Skatspielbesteht aus 32 Karten) bekommt.

Lösung:

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung)

$$n = C(32;10) = \binom{32}{10} = \frac{32!}{10! \cdot 22!} = 64\,512\,240$$

Da der Skatspieler 5min pro Spiel braucht, benötigt er:

$$n \cdot 5\text{min} = 64\,512\,240 \cdot 5\text{min} = 322\,561\,200\text{min} \approx 224\,000\text{d}$$

□

   (b) alle möglichen Spiele, also auch alle möglichen Blätter seiner zwei Mitspieler und der zwei Skatkarten berücksichtigt werden.

Lösung:

Es gilt: (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$\begin{aligned} n &= C(32;10) \cdot C(22;10) \cdot C(12;10) \cdot C(2;2) \\ &= \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{2}{2} \\ &= \ldots \\ &= 2\,753\,294\,408\,504\,640 \end{aligned}$$

Analog würde er hierfür ca. 9 560 050 029 530 Tage benoetigen. □

Annahme: Ein Spiel dauert ca. 5 Minuten und er macht nichts anderes als spielen, spielen ...

8. In einem Büro mit 3 Angestellten und sind 4 Telefonate zu erledigen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 4 Aufgaben auf 3 aufzuteilen?

Lösung:

Es gilt: (Variation mit Wiederholung)

$$V_w(3;4) = 3^4 = 81$$

□

9. Fuer die Klärung einer Sachfrage will ein Ausschuss aus seinen 14 Mitgliedern einen „Fünferrat“ bilden. Dieser ist jedoch arbeitsunfähig, wenn ihm 2 bestimmte Ausschussmitglieder gleichzeitig angehören, da diese beiden sich nicht mögen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Bildung des „Fünferrats“?

Lösung:

Wir können uns ohne Probleme Fünferteams aus den 12 unproblematischen Mitgliedern bilden. Um dann die beiden Streithähne auch unterzubringen, berechnen wir die Anzahl an Viererteams aus den selben 12 Mitgliedern, verdoppeln diese Zahl und haben so die gesamte Anzahl an Möglichkeiten.

Es gilt: (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$n = C(12;5) + 2 \cdot C(12;4) = \binom{12}{5} + 2 \cdot \binom{12}{4} = \ldots = 1782$$

$\square$