Stochastik

Übungsblatt 3

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 1. November 2021

1. Bei der Fertigung eines Produktes sei bekannt, dass 96% der produzierten Einheiten die geforderten Spezifikationen einhalten. Die bislang unvermeidbaren 4% fehlerhaften Einheiten müssen durch eine Prüfung erkannt und vor der Auslieferung aussortiert werden. Da das bisher verwendete Prüfverfahren sehr teuer ist, soll eine preiswerte Alternative getestet werden. Dieses billigere Verfahren erkennt allerdings nur 98% der brauchbaren Einheiten als brauchbar und stuft 5% der defekten Stücke als brauchbar ein. Um zu einer Entscheidung über die Einführung dieses billigeren Verfahrens zu kommen, sollen folgende Werte berechnet werden:

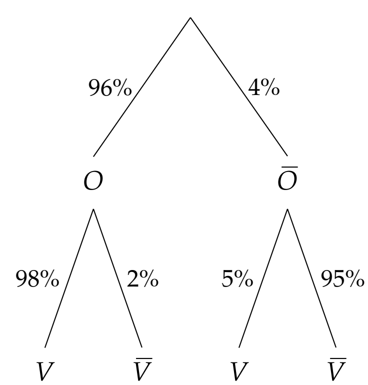
   (a) Anteil der insgesamt als defekt eingestuften Einheiten

Lösung:

Seien $O := \{\text{Produkt ist fehlerfrei}\}$ und $V := \{\text{Verfahren stuft Produkt als brauchbar ein}\}$. Wir wissen:

$$P(O) = 0.96 \qquad P(V \mid O) = 0.98 \qquad P(V \mid \overline{O}) = 0.05$$

Das ergibt folgenden Baum:



Insgesamt gilt für die insgesamt als defekt eingestuften Einheiten also:

$$P(\overline{V}) = P(\overline{V} \cap O) + P(\overline{V} \cap \overline{O}) = 0.96 \cdot 0.02 + 0.04 \cdot 0.95 = 0.0572$$

$\square$

(b) Anteil der fehlerfreien unter den als fehlerfrei eingestuften Einheiten

Lösung:

Es gilt:

$$P(O \mid V) = \frac{P(O \cap V)}{P(V)} = \frac{P(O \cap V)}{P(O \cap V) + P(\overline{O} \cap V)} = \frac{0.96 \cdot 0.98}{0.96 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.05} \approx 0.9979$$

Alternativ:

$$P(O \mid V) = \frac{P(O \cap V)}{P(V)} = \frac{P(O \cap V)}{1 - P(\overline{V})} \approx 0.9979$$

□

(c) Anteil der fehlerfreien unter den als defekt eingestuften Einheiten

Lösung:

Es gilt:

$$P(O \mid \overline{V}) = \frac{P(O \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0.96 \cdot 0.02}{0.0572} \approx 0.3357$$

□

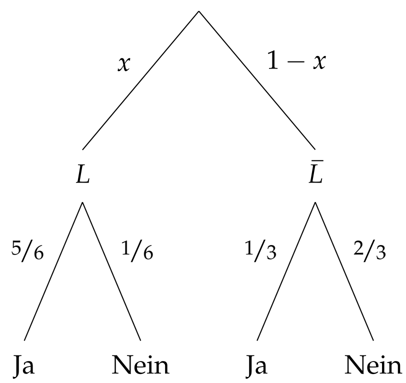
2. Für die Umfrage „Haben Sie schon einmal einen Ladendiebstahl begangen“ wurde wie folgt vorgegangen: Jeder Befragte würfelte; das Ergebnis des einfachen Würfelwurfes war dem Interviewer nicht bekannt. Bei dem Würfelergebnis 1, 2 oder 3 antwortete der Befragte wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“. Bei den Augenzahlen 4 oder 5 antwortete er stets mit „Ja“, bei einer 6 als Würfelergebnis stets mit „Nein“. Das Ergebnis der Umfrage war, dass 384 der 1033 Befragten mit „Ja“ antworteten.

   (a) Zeichnen Sie für dieses zweistufige Zufallsexperiment einen Wahrscheinlichkeitsbaum und vergeben Sie für die gesuchte, unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass ein Ladendiebstahl begangen wurde, einen Variablennamen (z.B. x).

Lösung:

Sei $L = \{\text{Es wurde ein Ladendiebstahl begangen}\}$.

Es gilt:



   (b) Berechnen Sie die totale Wahrscheinlichkeit für die Antwort „Ja“ (das Ergebnis ist keine Zahl, da x aus (a) noch unbekannt ist).

Lösung:

Es gilt:

$$P(\text{Ja}) = P(L \cap \text{Ja}) + P(\bar{L} \cap \text{Ja}) = x \cdot \frac{5}{6} + (1-x) \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

$\square$

   (c) Schätzen Sie die unbekannte Wahrscheinlichkeit für einen Ladendiebstahl, indem Sie das Ergebnis der Umfrage verwenden.

Lösung:

Wir wissen aus der Aufgabe:

$$P(\text{Ja}) = \frac{384}{1033} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \implies x \approx 0.0768$$

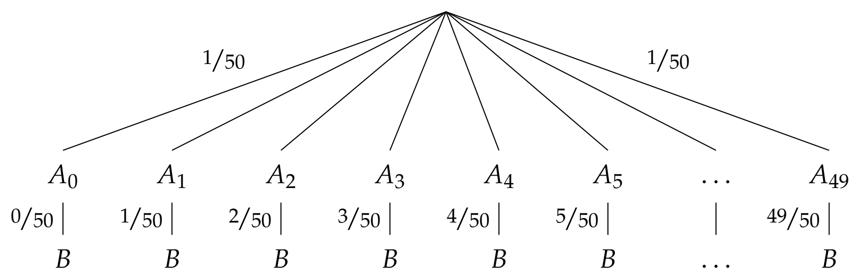
$\square$

3. Für $n = 0, 1, 2, \ldots, 49$ sei A_n das Ereignis, dass Matse-Azubi Karl genau n der 49 Übungsaufgaben zur Stochastik vor der Klausur selbstständig bearbeitet hat. B sei das Ereignis, dass Karl die Klausur besteht. Zur Vereinfachung sei angenommen: $P(A_n) = \frac{1}{50}$ und die Wahrscheinlichkeit, mit der er besteht, wenn er n Aufgaben bearbeitet hat, sei $\frac{n}{50}$.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Karl die Klausur besteht.

Lösung:

Es gilt:



Und damit

$$P(B) = \sum_{i=0}^{49} P(A_i \cap B) = \frac{1}{50^2} \cdot \sum_{i=0}^{49} i = \frac{1}{2500} \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} = 0.49$$

$\square$

   (b) Karl hat die Klausur bestanden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er vor der Klausur nicht mehr als 5 Aufgaben selbstständig bearbeitet hat?

Lösung:

Es gilt:

$$P(A_{\leq 5} \mid B) = \sum_{i=0}^{5} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=0}^{5} P(A_i \cap B) = \frac{1}{P(B)} \cdot \frac{1}{50^2} \sum_{i=0}^{5} i = \frac{15}{0.49 \cdot 2500} \approx 0.01224$$

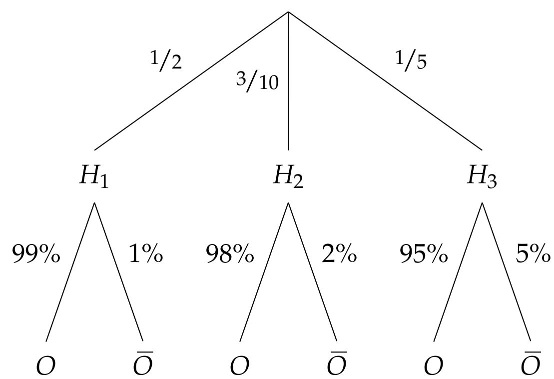
$\square$

4. Zur Leiterplattenbestückung werden insgesamt 10 000 elektrische Widerstände eines bestimmten Wertes benötigt. 5000 Widerstände stammen vom Hersteller H_1, 3000 Stück vom Hersteller H_2 und 2000 Stück vom Hersteller H_3. Ferner sei bekannt, dass bei H_1 im Mittel 1%, bei H_2 im Mittel 2% und bei H_3 im Mittel 5% der Widerstände außerhalb der Spezifikation liegen.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Widerstand außerhalb der Spezifikation ist.

Lösung:

Sei $O :=$ {Ein Produkt liegt innerhalb der Spezifikation}. Es gilt:



Und damit gilt:

$$P(\overline{O}) = P(H_1 \cap \overline{O}) + P(H_2 \cap \overline{O}) + P(H_3 \cap \overline{O}) = \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{3}{10} \cdot 0.02 + \frac{1}{5} \cdot 0.05 = 0.021$$

□

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein herausgegriffener Widerstand, der außerhalb der Spezifikation liegt, vom Hersteller H_3 stammt.

Lösung:

Es gilt:

$$P(H_3 \mid \overline{O}) = \frac{P(H_3 \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0.05}{0.021} \approx 0.4762$$

□

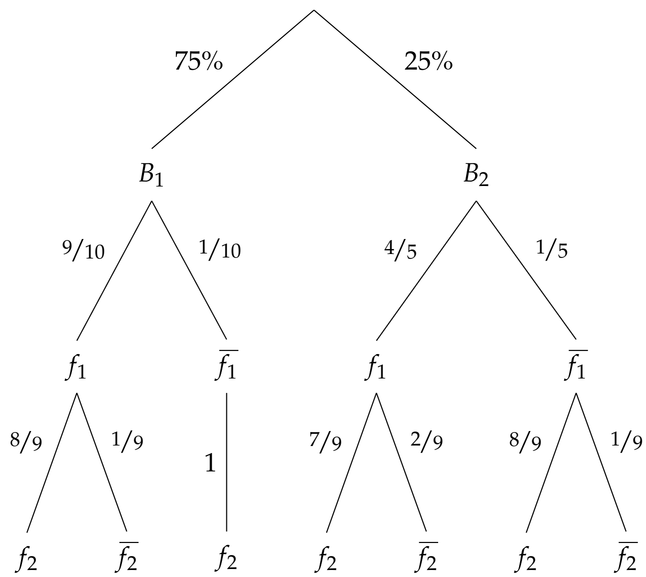
Zusatzaufgaben

5. Wir haben 2 blickdichte Beutel mit je 10 Äpfeln. Im ersten Beutel ist ein angefaulter Apfel und im zweiten Beutel sind 2 angefaulte Äpfel. Ein Versuch hat gezeigt, dass man zu 75% den ersten Beutel auswählt, entsprechend den zweiten Beutel zu 25%. Bei der Entnahme eines Apfel aus einem beliebigen Beutel wird ein frischer Apfel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste, aus demselben Beutel genommene Apfel, auch frisch ist?

Lösung:

Seien:

- $B_1 := \{\text{Es wird aus dem erstem Beutel gezogen}\}$
- $B_2 := \{\text{Es wird aus dem zweiten Beutel gezogen}\}$
- $f_1 := \{\text{Der erste gezogene Apfel ist frisch}\}$
- $f_2 := \{\text{Der zweite gezogene Apfel ist frisch}\}$



Dann gilt:

$$P(f_2 \mid f_1) = \frac{P(f_2 \cap f_1)}{P(f_1)} = \frac{P(B_1) \cdot P(f_2 \cap f_1 \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(f_2 \cap f_1 \mid B_2)}{P(B_1) \cdot P(f_1 \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(f_1 \mid B_2)} = \ldots \approx 86.35\%$$

Damit ist zu 86.35% sicher, dass ein zweiter frischer Apfel gezogen wird. □

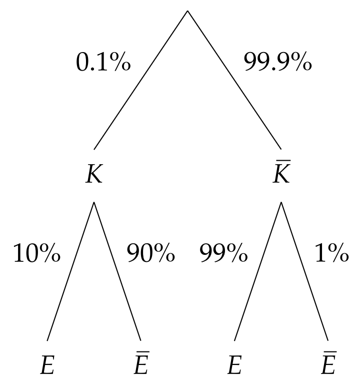
6. Bei einer Untersuchungsmethode auf Lungentuberkulose wird ein Kranker mit 90%iger Sicherheit als krank und ein Gesunder mit 99%iger Sicherheit als gesund erkannt. In der Bevölkerung gibt es 0.1% Kranke. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   (a) eine untersuchte Person dieser Bevölkerung als krank eingestuft wird?

Lösung:

Seien:

- $K := \{\text{Eine Person ist krank}\}$
- $E := \{\text{Eine Person wurde als gesund eingestuft}\}$



Dann gilt:

$$P(\bar{E}) = P(E \mid K) + P(E \mid \bar{K}) = \frac{P(E \cap K)}{P(K)} + \frac{P(E \cap \bar{K})}{P(\bar{K})} = \ldots = 1.089\%$$

$\square$

   (b) eine als krank eingestufte Person auch tatsächlich krank ist?

Lösung:

Es gilt:

$$P(K \mid \bar{E}) = \frac{P(K \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0.1\% \cdot 90\%}{1.089\%} = 8.26\%$$

$\square$

   (c) eine als gesund eingestufte Person krank ist?

Lösung:

Es gilt:

$$P(K \mid E) = \frac{P(K \cap E)}{P(E)} = P(K \mid E) = \frac{P(K \cap E)}{1 - P(\bar{E})} = \frac{0.1\% \cdot 99\%}{1 - 1.089\%} \approx 0.01\%$$

$\square$