1. Die Schülerinnen und Schüler wurden vor der Klausur anonym befragt, wie viele Stunden Schlaf sie vor der Klausur gehabt haben:

Note	2	4	3	5	6	6	1	2	5	4
Schlaf	9	5	6	5	1	2	9	8	4	7

(a) Berechnen Sie aus den Daten

i. die empirische Kovarianz

Lösung:

N und S seien wie offensichtlich definiert. TO DO: Umbenennen in X und Y

Es gilt:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = s_{XY} = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}\right)$$

Wir berechnen zuerst die arithmetischen Mittel von X und Y wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{10}\cdot(2+4+3+5+6+6+1+2+5+4) = \frac{19}{5} = 3.8$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i = \frac{1}{10}\cdot(9+5+6+5+1+2+9+8+4+7) = \frac{28}{5} = 5.6$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) = s_{xy} &= \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - 10\cdot\frac{19}{5}\cdot\frac{28}{5}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \frac{1064}{5}\right) \\
&= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \frac{1064}{45} \\
&= \frac{1}{9}\cdot 172 - \frac{1064}{45} \\
&= -\frac{68}{15} \approx -4.53
\end{aligned}$$

□

ii. den empirischen Korrelationskoeffizient

Lösung:

Es gilt:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Wir berechnen zuerst die empirischen Standardabweichungen s_x und s_y von X und Y wie folgt:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{19}{5}\right)^2 = \frac{46}{15} \implies s_x = \sqrt{\frac{46}{15}} = \frac{\sqrt{690}}{15}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{28}{5}\right)^2 = \frac{38}{5} \implies s_y = \sqrt{\frac{38}{5}} = \frac{\sqrt{190}}{5}$$

Damit gilt dann:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-68/15}{\sqrt{690}/15 \cdot \sqrt{190}/5} = -\frac{34\sqrt{1311}}{1311} \approx -0.93903$$

□

iii. die lineare Regression

Lösung:

Die Regressionsgerade ist gegeben mit

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x$$

Es gilt:

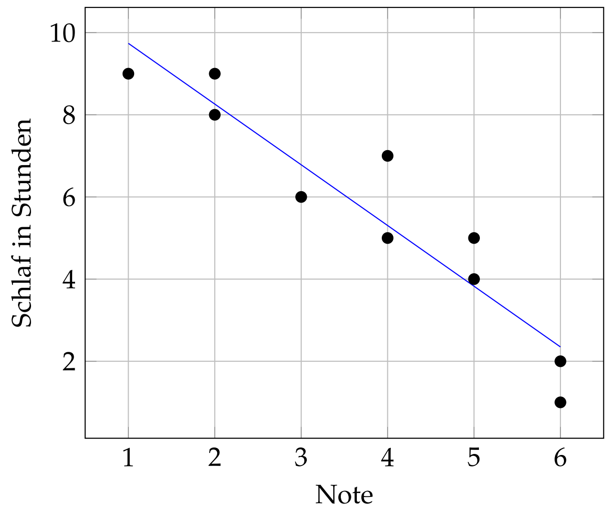
$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{-68/15}{46/15} = -\frac{34}{23} \approx -1.478$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = \frac{28}{5} + \frac{34}{23} \cdot \frac{19}{5} = \frac{258}{23} \approx 11.217$$

□

(b) Erstellen Sie ein Streudiagramm und zeichnen Sie die Regressionsgerade ein.

Lösung:



□