

Stochastik

Übungsblatt 4

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 2. November 2021

1. Zwei unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen und die Summe der beiden Augenzahlen betrachtet.

- (a) Bestimmen Sie die Ereignismenge der möglichen 2er Tupel (zwei Würfel), die eine gerade Augensumme bilden.

Lösung:

Sei $E := \{\text{Mit zwei Würfeln wird eine gerade Augensumme geworfen}\}$.

Es gilt:

$$E = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

□

- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine gerade bzw. ungerade Augensumme zu würfeln

Lösung:

Sei $O := \{\text{Mit zwei Würfeln wird eine ungerade Augensumme geworfen}\}$.

Es gilt:

$$O = \bar{E} \quad \wedge \quad |E| = |O| \quad \wedge \quad E \cup O = \Omega \quad \implies \quad P(E) = P(O) = \frac{1}{2}$$

□

Im Anschluss wird mit den zwei Würfeln dreimal ein „Doppelwurf“ ausgeführt. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der insgesamt geraden Augensummen.

(c) Bestimmen Sie von der Zufallsvariable X

i. die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen X lässt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{für } x = 0 \\ 3/8 & \text{für } x = 1 \\ 3/8 & \text{für } x = 2 \\ 1/8 & \text{für } x = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben.



ii. die Verteilungsfunktion

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen X lässt sich durch die *Verteilungsfunktion*

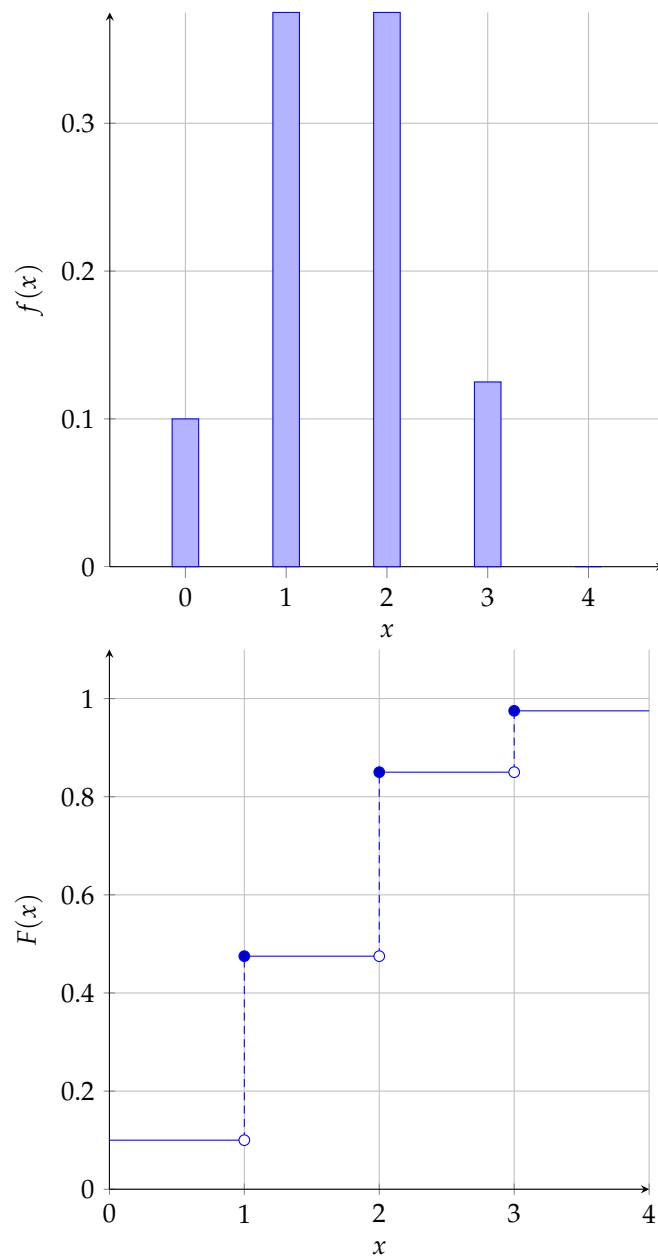
$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

beschreiben.



(d) Stellen Sie die Funktionen grafisch dar (Stabdiagramm und Verteilungsfunktion).

Lösung:



□

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die diskrete Zufallsvariable N den Wert k annimmt, sei gegeben durch

$$P(N = k) = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right) \quad \text{für } k = 1, \dots, m \in \mathbb{N}$$

Welchen Wert muss m haben?

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(N = k)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = 1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m f(k) &= 1 \\ \equiv \sum_{k=1}^m P(N = k) &= 1 \\ \equiv \sum_{k=1}^m \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right) &= 1 \\ \equiv \sum_{k=1}^m (\log_{10}(k+1) - \log_{10} k) &= 1 \\ \equiv \sum_{k=1}^m \log_{10}(k+1) - \sum_{k=1}^m \log_{10} k &= 1 \\ \equiv \sum_{k=1}^m \log_{10}(k+1) - \left(\sum_{k=1}^m \log_{10}(k+1) - \log_{10}(m+1) \right) &= 1 \\ \equiv \log_{10}(m+1) &= 1 \\ \equiv m+1 &= 10 \\ \equiv m &= 9 \end{aligned}$$

□

3. Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter a .

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1 \quad \left(\Longleftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \right)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(t) \, dt &= 1 \\ \equiv \int_0^3 at^2(3-t) \, dt &= 1 \\ \equiv a \left(3 \int_0^3 t^2 \, dt - \int_0^3 t^3 \, dt \right) &= 1 \\ \equiv 3 \int_0^3 t^2 \, dt - \int_0^3 t^3 \, dt &= \frac{1}{a} \\ \equiv 3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 - \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^3 &= \frac{1}{a} \\ \equiv 27 - \frac{81}{4} &= \frac{1}{a} \\ \equiv \frac{27}{4} &= \frac{1}{a} \\ \equiv a &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

□

(b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = \int_0^3 f(t) \, dt = \int_0^3 \frac{4}{27} \cdot t^2(3-t) \, dt = \frac{4}{27} \left(t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 4/27 \left(x^3 - x^4/4 \right) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 2 annimmt

i. über die Dichtefunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{4}{27} \left(2^3 - \frac{2^4}{4} \right) = \frac{16}{27}$$

□

ii. über die Verteilungsfunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^2 f(t) \, dt = \int_0^2 f(t) \, dt = \left[\frac{4}{27} \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \right]_0^2 = \frac{16}{27}$$

□

4. Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ der Form

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{8} & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ c_1 + c_2(1 - e^{-x}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2 .

Lösung:

Die Verteilungsfunktion muss normiert sein. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= 1 \\ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} (c_1 + c_2(1 - e^{-x})) &= 1 \\ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} c_2(1 - e^{-x}) &= 1 - c_1 \\ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) &= \frac{1 - c_1}{c_2} \\ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} &= \frac{1 - c_1}{c_2} - 1 \\ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} &= \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\ \equiv 0 &= \frac{c_1 - 1}{c_2} + 1 \\ \equiv c_2 &= 1 - c_1 \end{aligned}$$

Weiterhin muss die Verteilungsfunktion rechtsstetig sein. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} F(x) &= F(0) \\ \equiv \lim_{x \downarrow 0} c_1 + c_2(1 - e^{-x}) &= \frac{1}{4} \\ \equiv c_1 + (1 - c_1)(1 - 1) &= \frac{1}{4} \\ \equiv c_1 &= \frac{1}{4} \\ \implies c_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens den Wert 2 annimmt, wenn man weiß, dass X positiv ist.

Lösung:

Zusatzaufgaben

5. Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Verteilungsfunktionen sind und finden Sie gegebenenfalls eine passende Dichtefunktion, d.h. eine nichtnegative Funktion f mit $F(x) = \int_{-\infty}^x f(d) \, d t$. Skizzieren Sie $F(x)$ und eventuell $f(x)$.

$$(a) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Lösung:

$$(b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

Lösung:

6. Die „Intaktwahrscheinlichkeiten“ (Wahrscheinlichkeit, dass eine Anlage, Baugruppe, Bauelement etc. wie vorgesehen arbeitet), bezogen auf ein festes Zeitintervall, betragen für zwei unabhängig voneinander arbeitende Anlagen 0.9 bzw. 0.8. Die Zufallsgröße X sei die zufällige Anzahl der in einem solchen Zeitintervall intakten Anlagen. Bestimmen Sie

(a) die Verteilungstabelle von X und das entsprechende Stabdiagramm,

Lösung:



(b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine Anlage intakt ist,

Lösung:



(c) die Verteilungsfunktion von X mit einer grafischen Darstellung.

Lösung:



7. Die Zufallsvariable X beschreibe die größte der beiden Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf. Bestimmen Sie

(a) $P(X \leq 5)$

Lösung:



(b) $P(X < 5)$

Lösung:



(c) $P(X < 5.5)$

Lösung:



(d) $P(X \geq 4)$

Lösung:



8. Die Cauchy-Verteilung ist definiert durch die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Diese Verteilung findet Anwendung in der Modellierung von Zufallsexperimenten, bei denen seltene, extrem große Beobachtungswerte auftreten, z.B. bei Schadensversicherungen gegen Naturkatastrophen.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Cauchy-Verteilung und zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ist.

Lösung:



- (b) Berechnen Sie $P(2 < X \leq 10)$ für eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X .

Lösung:

