1. Es sei $X$ stetig mit Dichtefunktion $f : (0;\infty) \to (0;\infty); f(x) = \gamma x e^{-x}$ mit $x > 0$.

   (a) Bestimmen Sie $\gamma$ so, dass $f$ eine Dichtefunktion ist.

**Lösung:**

Damit $f$ eine Dichtefunktion ist, muss gelten:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}\, x &&= 1 \\
\equiv \quad & \int_0^\infty \gamma x e^{-x} \, \mathrm{d}\, x &&= 1 \\
\equiv \quad & \gamma \int_0^\infty x e^{-x} \, \mathrm{d}\, x &&= 1 \\
\equiv \quad & \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}\, x &&= \frac{1}{\gamma} \\
\equiv \quad & \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty &&= \frac{1}{\gamma} \\
\equiv \quad & -\lim_{x\to\infty} xe^{-x} - (0-1) &&= \frac{1}{\gamma} \\
\overset{1}{\equiv} \quad & 0 + 1 &&= \frac{1}{\gamma} \\
\equiv \quad & \gamma &&= 1
\end{aligned}$$

□

[1] $e^x$ wächst asymptotisch schneller als $x$.

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion von $X$?

**Lösung:**

Es gilt (mit $x > 0$):

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}\,t \overset{2}{=} -\left[(1+t)e^{-t}\right]_0^x = 1-(1+x)e^{-x}$$

□

(c) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \frac{1}{X}$

**Lösung:**

Es gilt:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

Und damit:

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 + \frac{1}{y}\right)e^{-\frac{1}{y}}\right) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)e^{-\frac{1}{y}}$$

□

[2] Berechnung analog zu Teilaufgabe (a)