1. 12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Hektarerträge (in Doppelzentner):

35.6	33.7	37.8	31.2	37.2	43.1	35.8	36.6	37.1	34.9	35.6	34.0

Aus Erfahrung weiß man, dass die Hektarerträge als eine Realisierung unabhängiger $\mathcal{N}(\mu, (\sqrt{3})^2)$ -verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

Geben Sie für den Erwartungswert μ ein konkretes Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 an.

Lösung:

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Wir wissen, dass gilt:

$$X := \text{Hektarerträge (in Doppelzentner)} \sim \mathcal{N}(\mu, (\sqrt{3})^2)$$

Ein geeigneter Schätzer für X ist bekanntermaßen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Für unsere Verteilung sind die relevanten Kennzahlen übrigens:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \cdot 432.6 = 36.05$$

und

$$\sigma^2 = 3 \implies \sigma = \sqrt{3}$$

Die normierte Zufallsvariable U mit

$$U = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

ist dann standarnormalverteilt mit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Es muss gelten:

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& -c && \leq U \leq c \\
\equiv\quad & -u_{(1+\gamma)/2} && \leq U \leq u_{(1+\gamma)/2} \\
\equiv\quad & -u_{1-\alpha/2} && \leq U \leq u_{1-\alpha/2} \\
\equiv\quad & -u_{1-\alpha/2} && \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \leq u_{1-\alpha/2} \\
\equiv\quad & \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} && \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1 - \alpha \\
\equiv \quad & P(36.05 - u_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 36.05 + u_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(36.05 - u_{0.975} \cdot \frac{1}{2} \leq \mu \leq 36.05 + u_{0.975} \cdot \frac{1}{2}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(36.05 - 1.960 \cdot \frac{1}{2} \leq \mu \leq 36.05 + 1.960 \cdot \frac{1}{2}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(35.07 \leq \mu \leq 37.03) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{12} mit

$$I_{12} = [35.07, 37.03]$$

$\square$