1. Gegeben seien die folgenden, jeweils auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen:

(a) $F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ x-2 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$

Lösung:

Für $x_1 = 7/2$ und $x_2 = 2$ gilt:

$$F_1(x_1) = \frac{3}{2} > 1 = F_2(x_2) \quad \wedge \quad x_1 < x_2 \quad ↯$$

Also ist $F_1(x)$ nicht monoton steigend und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion. □

(b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Lösung:

Offensichtlich ist $F_2(x)$ (streng) monoton fallend für $x \geq 0$ und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion. □

(c) $F_3(x) = e^{-e^{-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung:

Offensichtlich ist $F_3(x)$ monoton steigend und rechtsseitig stetig.

Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} F_3(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x\to\infty} e^{-x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_3(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$$

Also ist $F_3(x)$ damit insgesamt eine Verteilungsfunktion. □

Welche dieser Funktionen können nicht Verteilungsfunktionen einer Zufallsvariablen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.