1. Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter a.

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1 \qquad \left(\Longleftarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = 1\right)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t && = 1 \\
\equiv\ & \int_0^3 at^2(3-t)\,\mathrm{d}\,t && = 1 \\
\equiv\ & a\left(3\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}\,t - \int_0^3 t^3\,\mathrm{d}\,t\right) && = 1 \\
\equiv\ & 3\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}\,t - \int_0^3 t^3\,\mathrm{d}\,t && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 - \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^3 && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & 27 - \frac{81}{4} && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & \frac{27}{4} && = \frac{1}{a} \\
\equiv\ & a && = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

□

(b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^3 \frac{4}{27}\cdot t^2(3-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{4}{27}\left(t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ {}^4/_{27}\left(x^3 - {}^{x^4}/_4\right) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

□

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 2 annimmt

i. über die Dichtefunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{4}{27}\left(2^3 - \frac{2^4}{4}\right) = \frac{16}{27}$$

$\square$

ii. über die Verteilungsfunktion

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{4}{27}\left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^2 = \frac{16}{27}$$

$\square$