1. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ky \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } 0 \leq y \leq 1; x \geq 0; \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Für welche k-Werte ist f eine Verteilungsdichte?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, x = 1 \\
\equiv \quad & \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} ky \cdot e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, x && = 1 \\
\equiv \quad & \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \int_{0}^{1} y \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, x && = \frac{1}{k} \\
\equiv \quad & \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\, x && = \frac{1}{k} \\
\equiv \quad & \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x && = \frac{2}{k} \\
\equiv \quad & \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} && = \frac{2}{k} \\
\equiv \quad & \frac{1}{\lambda} && = \frac{2}{k} \\
\equiv \quad & k && = 2\lambda
\end{aligned}$$

□

(b) Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y.

Lösung:

Es gilt:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}\, y = \int_0^1 2\lambda y \cdot e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, y = \left[y^2 \lambda \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^1 = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}\, x = \int_0^{\infty} 2\lambda y \cdot e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x = \left[-2y \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 2y$$

□

(c) Untersuchen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Damit sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig. □