

1. Handelt es sich bei den folgenden Funktionen um Dichtefunktionen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$(a) f_1(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Lösung:**

Offensichtlich ist  $f_1(x) = \sin(x) < 0$  für alle  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ .

Damit kann  $f_1(x)$  keine Dichtefunktion sein. □

$$(b) f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Lösung:**

Es muss gelten:

- $f_2$  ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- $f_2$  ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- $f_2$  ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist  $f_2(x)$  eine Dichtefunktion. □

2. Gegeben seien die folgenden, jeweils auf  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen:

$$(a) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ x - 2 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

**Lösung:**

Für  $x_1 = 7/2$  und  $x_2 = 2$  gilt:

$$F_1(x_1) = \frac{3}{2} > 1 = F_2(x_2) \quad \wedge \quad x_1 < x_2 \quad \nexists$$

Also ist  $F_1(x)$  nicht monoton steigend und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion.  $\square$

$$(b) F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

**Lösung:**

Offensichtlich ist  $F_2(x)$  (streng) monoton fallend für  $x \geq 0$  und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion.  $\square$

$$(c) F_3(x) = e^{-e^{-x}} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

**Lösung:**

Offensichtlich ist  $F_3(x)$  monoton steigend und rechtsseitig stetig.

Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$$

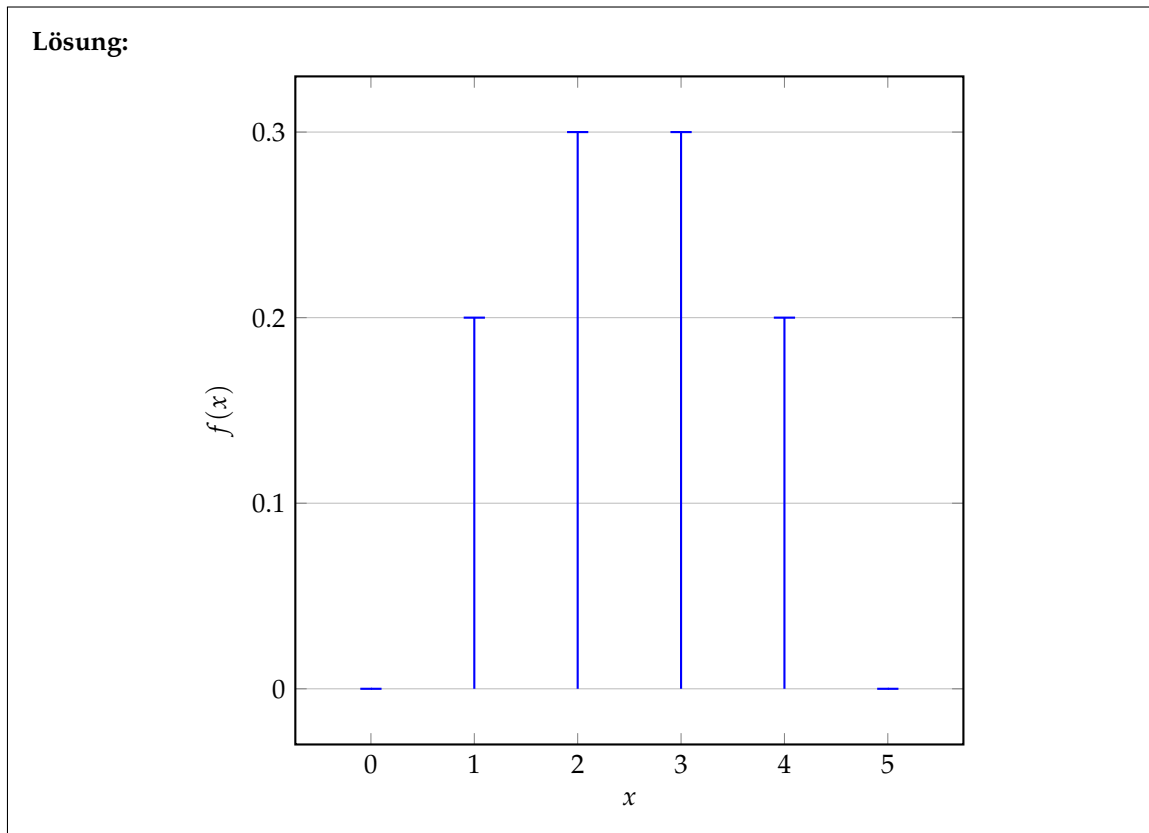
Also ist  $F_3(x)$  damit insgesamt eine Verteilungsfunktion.  $\square$

Welche dieser Funktionen können nicht Verteilungsfunktionen einer Zufallsvariablen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable  $X$ . Betrachten Sie folgende zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(5-x)}{20} & \text{für } x = \{1, 2, 3, 4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$ .



- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F(x)$ .

**Lösung:**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  lässt sich durch die *Verteilungsfunktion*

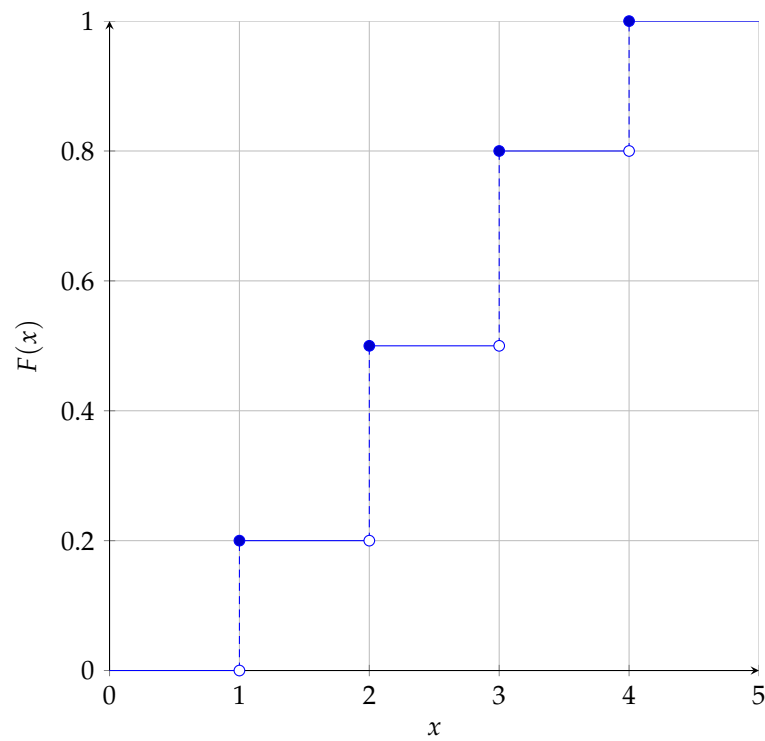
$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1/5 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1/2 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 4/5 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

beschreiben.

□

(c) Stellen Sie diese Verteilungsfunktion grafisch dar.

**Lösung:**



4. Die Verspätung eines Zuges in einem bestimmten Bahnhof werde durch die stetige Zufallsvariable  $X$  beschrieben und habe die Dichtefunktion (in Minuten)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Erfüllt die angegebene Funktion  $f(x)$  die Anforderung an eine Dichtefunktion?

**Lösung:**

Es muss gelten:

- $f$  ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- $f$  ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- $f$  ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = \int_0^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t \right) \, dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{t^2}{16} \right]_0^4 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist  $f(x)$  eine Dichtefunktion. □

- (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von  $X$  an.

**Lösung:**

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t \right) \, dt = \int_0^x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t \right) \, dt = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x/2 - x^2/16 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
□

- (c) Sie haben bereits eine Minute auf den Zug gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die heutige Verspätung zwischen zwei und drei Minuten beträgt?

**Lösung:**

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3 \mid X \geq 1) &= \frac{P(2 \leq X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{F(3) - F(2)}{1 - F(1)} \\ &= \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}} \\ &= \frac{15 - 12}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□