Stochastik

Hausaufgabenblatt 1

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 11. Oktober 2021

1. Ein Tannenbaum soll zu Weihnachten bunte Lämpchen bekommen. Dazu soll eine Lichterkette mit 5 gelben, 3 roten und 2 grünen Lämpchen zusammengestellt werden.

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn es keine Einschränkungen gibt?

   Lösung:

   Dann gilt: (Permutation mit teilweise nicht unterscheidbaren Lampen)

   $$P(14;5;3;4;2) = \frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 2\,522\,520$$

   □

   (b) Die 3 roten Lämpchen sollen nebeneinander angeordnet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   Lösung:

   Dann gilt: (analog zu Aufgabenteil (a), wobei wir die roten Lampen als „eine Lampe" sehen)

   $$P(12;5;4;2) = \frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 2!} = 83\,160$$

   □

   (c) Opa Hoppenstedt hat schon zwei gelbe Lampen an den Anfang der ette geschraubt und zwei gelbe Lampen an das Ende der Kette; er besteht darauf, diese nicht mehr zu verändern. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung ergeben sich für die restlichen Lampen?

   Lösung:

   Dann gilt: (analog zu Aufgabenteil (a), jedoch mit nur noch einer gelben Lampe)

   $$P(10;3;4;2) = \frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 12\,600$$

   □

   (d) Jede Farbe wird als feste Kette geliefert, auf der die Lampen nicht mehr gewechselt werden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 4 Ketten hintereinander zu schalten?

Lösung:

Dann gilt: (Permutation)

$$P(4) = 4! = 24$$

$\square$

2. Im Portemonnaie befinden sich fünf 50 Cent Stücke und sieben 5 Cent Stücke. Drei Münzen werden zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Wie viel Geld hat man

   (a) mindestens auf der Hand?

   Lösung:

   $$3 \cdot 5 \text{ Cent} = 15 \text{ Cent}$$

   □

   (b) höchstens auf der Hand?

   Lösung:

   $$3 \cdot 50 \text{ Cent} = 150 \text{ Cent}$$

   □

   (c) Wie viele Kombinationen von Münzen (nicht Werten) können auftreten?

   Lösung:

   Durch die Bemerkung gehen wir davon aus, dass die Münzen an sich auch bei gleichem Wert unterscheidbar bleiben.

   Dann gilt: (Kombinationen ohne Wiederholung)

   $$C(12;3) = \binom{12}{3} = 220$$

   □

   (d) Wie oft kommt dabei der Betrag von 0.6 Euro zustande?

   Lösung:

   Wir wählen uns eine beliebige 50 Cent Münze und zwei beliebige 5 Cent Münzen.

   Dann gilt: (jeweils Kombinationen ohne Wiederholung)

   $$n = C(5;1) \cdot C(7;2) = 5 \cdot 21 = 105$$

   □

3. In der Formel 1 gehen je nach Saison 10 Teams mit jeweils 2 Formel 1-Fahrern an den Start.

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Formel 1-Wagen an der Startlinie aufzustellen?

Lösung:

Insgesamt fahren nach Aufgabenstellung (ich habe nämlich keine Ahnung von Formel 1) 20 Wagen pro Rennen mit.

Damit gilt: (Permutation)

$$P(20) = 20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$$

□

Alternativ könnte man annehmen, dass die zwei Wagen der jeweiligen Hersteller nicht unterscheidbar sind, da sie - nach Wikipedia - baugleich sind.

Dann gilt: (Permutation mit 10x 2 identischen Wagen)

$$P(20; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2) = \frac{20!}{(2!)^{10}} = 2\,375\,880\,867\,360\,000$$

□

   (b) Mit Ihren Formel 1-FreundInnen schauen Sie sich jedes Rennen gemeinsam an. Im Vorfeld überlegen Sie, welche Formel 1-Fahrer die ersten drei Plätze belegen. Wie viele Möglichkeiten hierfür gibt es?

Lösung:

Damit gilt: (Permutationen)

$$n = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

□

4. Ein Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern.

(a) Die 11 Spieler verlassen vor Spielbeginn der Reihe nach die Mannschaftskabine. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind dabei möglich?

Lösung:

Es gilt: (Permutation)

$$P(11) = 11! = 39\,916\,800$$

□

(b) Der Trainer will für ein Elfmeterschießen 5 Spieler aus seiner Mannschaft auswählen. Wie viele Möglichkeiten hierfür gibt es?

Lösung:

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung)

$$C(11;5) = \binom{11}{5} = 462$$

□

(c) Der Trainer entscheidet sich dafür, 5 Spieler der Mannschaft für das Elfmeterschießen auszuwählen und gleichzeitig die Reihenfolge festzulegen, in welcher die 5 Spieler zum Elfmeter antreten sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für dieses Auswahlverfahren?

Lösung:

Nach Aufgabenteil (b) haben wir 462 Möglichkeiten um die 5 Spieler auszuwählen.

Dann gilt: (Multipliziert mit Permutationsanzahl)

$$n = C(11;5) \cdot P(5) = 462 \cdot 120 = 55\,400$$

□