Stochastik

Hausaufgabenblatt 7

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 17. November 2021

1. Die Qualität der Kugeln für Kugellager wird auf folgende Weise kontrolliert: Fällt die Kugel durch eine Öffnung mit dem Durchmesser d_2, jedoch nicht durch eine Öffnung mit dem Durchmesser d_1 ($d_1 < d_2$), so genügt die Kugel den Qualitätsanforderungen. Wird eine der beiden Bedingungen nicht eingehalten, ist die Kugel Ausschuss.

   (a) Es ist bekannt, dass der Durchmesser D der Kugeln unter den gegebenen Fertigungsbedingungen eine normalverteilte zufällige Größe mit den Parametern

   $$\mu = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}$$

   ist. Bestimmen Sie die Ausschussquote p, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Kugel sich als Ausschuss erweist.

   Lösung:

   Offensichtlich gilt:

   $$D \sim N(\mu, \sigma^2) = N\left(\frac{d_1 + d_2}{2}, \left(\frac{d_2 - d_1}{4}\right)^2\right)$$

und damit für die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel genügt:

$$\begin{aligned}
P(d_1 \leq D \leq d_2) &= \Phi\left(\frac{d_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right) \\
&= \Phi\left(4 \cdot \frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{d_2-d_1}\right) - \Phi\left(4 \cdot \frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{d_2-d_1}\right) \\
&= \Phi\left(4 \cdot \frac{2d_2-d_1-d_2}{2(d_2-d_1)}\right) - \Phi\left(4 \cdot \frac{d_1-d_2}{2(d_2-d_1)}\right) \\
&= \Phi\left(2 \cdot \frac{d_2-d_1}{d_2-d_1}\right) - \Phi\left(2 \cdot \frac{d_1-d_2}{d_2-d_1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi\left(2 \cdot \frac{-(d_2-d_1)}{d_2-d_1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1-\Phi(2)) \\
&= 2 \cdot \Phi(2) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.9772 - 1 \\
&= 1.9544 - 1 \\
&= 95.44\%
\end{aligned}$$

Damit ist also die Ausschussquote $p = 1 - P(d_1 \leq D \leq d_2) = 4.56\%$. $\square$

(b) Es ist bekannt, dass der Durchmesser D normalverteilt mit $\mu = d_1+d_2/2$ ist und dass der Ausschuss 10% der gesamten Partie ausmacht. Bestimmen Sie σ.

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(d_1 \leq D \leq d_2) && = \Phi\left(\frac{d_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1-\mu}{\sigma}\right) \\
\equiv\ & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2-\frac{d_1+d_2}{2}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1-\frac{d_1+d_2}{2}}{\sigma}\right) \\
\equiv\ & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1-d_2}{2\sigma}\right) \\
\equiv\ & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\ & 0.9 && = \Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right)\right) \\
\equiv\ & 1.9 && = 2\cdot\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\ & 0.95 && = \Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) \\
\Longrightarrow\ & \Phi(1.65) && \approx \Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma}\right) \\
\equiv\ & 1.65 && \approx \frac{d_2-d_1}{2\sigma} \\
\equiv\ & 2\sigma && \approx \frac{d_2-d_1}{1.65} \\
\equiv\ & \sigma && \approx \frac{d_2-d_1}{3.3}
\end{aligned}
$$

□

2. Während einer Theaterprobe wird eine Russisch-Roulette-Szene geübt. Dazu wird ein Trommelrevolver, der 6 Platzpatronen fasst, mit nur einer Platzpatrone geladen.

   (a) Mit welcher Verteilung kann die Zufallsvariable

   $$X = \{\text{die Person überlebt bis einschließlich Abfeuern des } x\text{-ten Schusses}\}$$

   beschrieben werden, wenn nach jedem Versuch die Trommel erneut gedreht wird?

   Lösung:

   Offensichtlich gilt:

   $$X \sim B(x; 6, {}^{1}\!/_{6}) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-x}$$

   □

   (b) Wie wahrscheinlich ist es, mehr als 5 Runden zu überleben?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(X > 5) = P(X = 6) = B(6; 6, {}^{1}\!/_{6}) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46656} \approx 0.0021\%$$

   □

3. Die Lebensdauer (in Stunden) von Energiesparlampen eines bestimmten Fabrikats kann durch eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable X beschrieben werden. Die zugehörige Verteilungsfunktion $F : R \to [0; 1]$ ist damit gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie für $\lambda = 1/800$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe

i. höchstens 300 Stunden,

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$P(X \leq 300) = F(300) = 1 - e^{-300/800} = 1 - e^{-3/8}$$

□

ii. mehr als 120 Stunden,

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$P(X \geq 120) = 1 - F(120) = 1 - \left(1 - e^{-120/800}\right) = e^{-3/20}$$

□

iii. mindestens 240 und höchstens 360 Stunden

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$P(240 \leq X \leq 360) = F(360) - F(240) = 1 - e^{-360/800} - \left(1 - e^{-240/800}\right) = e^{-3/10} - e^{-9/20}$$

□

beträgt.

(b) Für welchen Wert des Parameters λ ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe mindestens 100 Stunden beträgt?

Lösung:

Es gilt:

$$0.99 = P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - F(100) \iff F(100) = 0.01$$

$$\begin{aligned}
& F(100) && = 0.01 \\
\equiv\ & 1 - e^{-100\lambda} && = 0.01 \\
\equiv\ & e^{-100\lambda} && = 0.100 \\
\equiv\ & -100\lambda && = \ln 0.100 \\
\equiv\ & \lambda && = \frac{\ln 0.99}{-100} \\
\implies & \lambda && \approx 0.0001005
\end{aligned}$$

$\square$

4. Eine Näherei, die Oberhemden herstellt, bezieht die benötigten Knöpfe von einer Firma aus Köln. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass ein Knopf mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 einen Defekt aufweist, d.h. zur Verarbeitung nicht verwendet werden kann. In einem bestimmten Monat werden 4900 Knöpfe geliefert.

(a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X = \{\text{Anzahl der defekten Knöpfe}\}$?

Lösung:

Es gilt:

$$X \sim B(x; n, p) = B(x; 4900, 0.1)$$

□

(b) Wie groß ist die (approximative) Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens 4450 Knöpfe *ohne* Defekt befinden?

Lösung:

Offensichtlich wäre die Berechnung hier sehr mühselig. Wir versuchen zu approximieren:

- Poisson-Verteilung:

$$np = 490 \not\leq 10 \ \lightning \quad \text{und} \quad n = 4900 \geq 150 = 1500p \ \checkmark$$

- Normalverteilung:

$$np(1-p) = 490 \cdot 0.9 = 441 > 9 \ \checkmark$$

Damit gilt:

$$B(x; 4900, 0.1) \approx N\left(\mu = np; \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right) = N(490; 21)$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 450) &= \Phi\left(\frac{450 + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{450 + 0.5 - 490}{21}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{39.5}{21}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(1.88) \\
&= 1 - 0.9699 \\
&= 3.01\%
\end{aligned}$$

□