1. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und jeweils $N(0;\theta)$-verteilt, dabei ist $\theta > 0$ unbekannt. Die Dichte von X ist also gegeben durch

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-x^2/2\theta}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter θ.

Lösung:

Es gilt:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-x_i^2/2\theta} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta}\right)^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2/2\theta}$$

Damit erhalten wir $L^*(\theta)$ mit:

$$L^*(\theta) = \ln L(\theta) = \frac{-n}{2} \cdot \ln(2\pi\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta}$$

$$\implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial\theta} = \frac{-n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2} \quad \implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial\theta} = 0 \quad \iff \quad \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Natürlich müssen wir überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^3} = \frac{-n^3}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < 0 \quad \checkmark$$

Damit haben wir einen Schätzer und es gilt:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$\square$

(b) Welcher der beiden Schätzer

i. $S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass S_n genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(S_n) = \theta$.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \theta + 0 \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Damit ist S_n ein erwartungstreuer Schätzer für θ. □

ii. $T_n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass T_n genau dann asymptotisch erwartungstreu ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n) = \theta$.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \cdot \mathrm{E}(X^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X^2) \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Damit ist T_n ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für θ. □

ist erwartungstreu, welcher ist asymptotisch erwartungstreu (d.h. Betrachtung des Grenzwert vom Erwartungswert der Schätzfunktion)?