1. Die Wahrscheinlichkeit, dass die diskrete Zufallsvariable N den Wert k annimmt, sei gegeben durch

$$P(N = k) = \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{für } k = 1, \ldots, m \in \mathbb{N}$$

Welchen Wert muss m haben?

Lösung:

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(N = k)$ muss *normiert* sein, das heißt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = 1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m} f(k) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} P(N = k) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \left(\log_{10}(k+1) - \log_{10} k\right) && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \sum_{k=1}^{m} \log_{10} k && = 1 \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \left(\sum_{k=1}^{m} \log_{10}(k+1) - \log_{10}(m+1)\right) && = 1 \\
\equiv\ & \log_{10}(m+1) && = 1 \\
\equiv\ & m+1 && = 10 \\
\equiv\ & m && = 9
\end{aligned}$$

$\square$