

Stochastik

Übungsblatt 5

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 3. November 2021

1. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ und die Dichtefunktion $f_Y(y)$ für die transformierte Zufallsvariable Y , die sich als $Y = g(X)$ aus der ursprünglichen Zufallsvariablen X mit bekannter Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und bekannter Dichtefunktion $f_X(x)$ ergibt:

(a) $g(X) = aX + b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

Lösung:

Wir wissen:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(aX + b \leq y) \\ &= P(aX \leq y - b) \\ &= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Und damit:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \frac{d}{dy} (1 - F_X(\frac{y-b}{a})) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a > 0 \\ -f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ &= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} \end{aligned}$$

□

$$(b) \ g(X) = 3X - 1 \quad \text{mit } f_X(x) = \begin{cases} 4/27(3x^2 - x^3) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

Es gilt:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right) \cdot \frac{1}{|3|} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} \left(3\left(\frac{y+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{3}\right)^3\right) & \text{für } -1 \leq y \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und damit:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -1 \\ \frac{4}{27} \left(\frac{y+1}{3}\right)^3 - \frac{1}{27} \left(\frac{y+1}{3}\right)^4 & \text{für } -1 \leq y \leq 8 \\ 1 & \text{für } y > 8 \end{cases}$$

□

$$0 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad y = g(x) = 3x - 1 \quad \implies \quad -1 \leq y \leq 8$$

2. Gegeben ist ein Spannungssignal X mit Gaußscher Dichtefunktion $f_X(x)$, Erwartungswert $\mu_X = 1\text{V}$ und Varianz $\sigma_X^2 = 0.25\text{V}^2$. Das Signal wird durch die Funktion $Y = g(X) = 2X + 1.5\text{V}$ in ein Ausgangssignal Y transformiert.

Bestimmen Sie den Erwartungswert μ_Y sowie die Varianz σ_Y^2 des Ausgangssignals.

Lösung:

Es handelt sich hier um eine *lineare* Transformation.

Damit gilt:

$$E(Y) = E(2X + 1.5\text{V}) = 2E(X) + 1.5\text{V} = 2\mu_X + 1.5\text{V} = 2 \cdot 1\text{V} + 1.5\text{V} = 3.5\text{V}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2X + 1.5\text{V}) = 2^2 \text{Var}(X) = 4\sigma_X^2 = 4 \cdot 0.25\text{V}^2 = 1\text{V}^2$$

□

3. Berechnen Sie

(a) den Erwartungswert,

Lösung:

Es gilt:

$$E(X) = \sum_{i=0}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = (-2) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{12} = 3$$

□

(b) die Varianz und

Lösung:

Es gilt:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=0}^4 (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = (-5)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 5^2 \cdot \frac{1}{12} = 11$$

□

(c) die Standardabweichung

Lösung:

Es gilt:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{11}$$

□

der folgenden diskreten Verteilung:

x_i	-2	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	1/4	1/6	1/4	1/4	1/12

4. Gegeben ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X als

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

(a) Wie groß ist a ?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx &= 1 \\ \equiv \int_{-1}^1 \frac{a}{1+x^2} \, dx &= 1 \\ \equiv a \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx &= 1 \\ \equiv a [\arctan(x)]_{-1}^1 &= 1 \\ \equiv a \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) &= 1 \\ \equiv \frac{a\pi}{2} &= 1 \\ \equiv a &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

□

(b) Wie groß ist der Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X ?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{x=-1}^1 \frac{1}{u} \, du \\ &= \frac{\pi}{4} [\ln(u)]_{x=-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} [\ln(1+x^2)]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} (\ln(2) - \ln(2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

¹ $u := 1 + x^2 \implies \frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$

(c) Berechnen Sie die Varianz $\text{Var}(X)$ der Zufallsvariablen X .

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) \, dx \\&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (x - 0)^2 \frac{1}{1 + x^2} \, dx \\&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx \\&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} \, dx \\&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 1 - \frac{1}{1 + x^2} \, dx \\&= \frac{\pi}{2} [x - \arctan(x)]_{-1}^1 \\&= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\&= 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

□

Zusatzaufgaben

5. Beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei unterscheidbaren Würfeln erhält ein Spieler von der Bank nach dem Einsatz von 1€ pro Spiel
- 0€ zurück, wenn 0 Würfel „6“ zeigen,
 - 3€ zurück, wenn 1 Würfel „6“ zeigen,
 - 7€ zurück, wenn 2 Würfel „6“ zeigen.

Würden Sie bei diesem Spiel (auf Dauer betrachtet) lieber Bank oder Spieler sein?

Lösung:



6. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} cx - 0.5 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion zu X ist.

Lösung:



(b) Bestimmen Sie im Anschluss

i. den Erwartungswert

Lösung:



ii. die Varianz

Lösung:

