1. Das Umweltreferat einer Großstadt will Aufschluss darüber gewinnen, wie viele Asbestfasern pro Kubikmeter Luft im Freien in ca. einem Meter Abstand von asbestzementhaltigen Gebäudeteilen zu erwarten sind. Bei $n = 14$ diesbezüglichen Messungen traten die Werte

980	1340	610	750	880	1250	2410
1100	470	1040	910	1860	730	820

auf, die als Ergebnisse unabhängiger normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden.

(a) Führen Sie für den Erwartungswert μ der Anzahl X der unter den obigen Bedingungen vorhandenen Asbestfasern eine Intervallschätzung zum Konfidenzniveau 0.95 durch.

Lösung:

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Wir wissen, dass gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Ein geeigneter Schätzer für μ ist bekanntermaßen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ein geeigneter Schätzer für σ ist bekanntermaßen

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Für unsere Verteilung gilt dann:

$$\bar{x} = \frac{1}{14} \cdot 15150 = \frac{7575}{7}$$

und

$$s = \sqrt{\frac{1}{13} \cdot \frac{24126450}{7}} = \frac{5\sqrt{87820278}}{91}$$

Die Zufallsvariable T mit

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$$

ist dann t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Es muss gelten:

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma = 1 - \alpha$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& -c && \leq T \leq c \\
\equiv\quad & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \leq T \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\quad & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \leq \sqrt{n}\cdot\frac{\bar{x}-\mu}{s} \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\
\equiv\quad & -t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}-\bar{x} && \leq -\mu \leq t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}-\bar{x} \\
\equiv\quad & \bar{x}+t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && \geq \mu \geq \bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \\
\equiv\quad & \bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && \leq \mu \leq \bar{x}+t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(\bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}+t_{n-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1-\alpha \\
\equiv\quad & P(\frac{7575}{7}-t_{13}\,(0.975)\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7}+t_{13}\,(0.975)\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}}) && = 0.95 \\
\equiv\quad & P(\frac{7575}{7}-2.160\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}} \leq \mu \leq \frac{7575}{7}+2.160\cdot\frac{5\sqrt{87820278}}{91\cdot\sqrt{14}}) && = 0.95 \\
\equiv\quad & P(784.897 \leq \mu \leq 1379.389) && = 0.95
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{14} mit

$$I_{14} = [784.897, 1379.389]$$

□

(b) Wie müsste das Konfidenzniveau gewählt sein, damit die Länge des entstehenden Schätzintervalls gleich 500 ist?

Lösung:

Offensichtlich gilt für die Intervallbreite I_B:

$$I_B := c_o - c_u = \bar{x}+t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x}-t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
& I_B && = 500 \\
\equiv\quad & 2t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && = 500 \\
\equiv\quad & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} && = 250 \\
\equiv\quad & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && = 250\cdot\frac{\sqrt{n}}{s} \\
\equiv\quad & t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && = 250\cdot\frac{\sqrt{14}\cdot 91}{5\sqrt{87820278}} \\
\implies\quad & t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) && \approx 1.8167
\end{aligned}$$

Der nächste Wert in der gegebenen Tabelle der Vorlesung für $t_{13}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ wäre

$$t_{13}(0.95) = 1.771$$

Stellen wir nun um, erhalten wir:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \implies \alpha = 0.1$$

Damit erhalten wir ungefähr ein Konfidenzniveau von

$$\gamma = 1-\alpha = 1-0.1 = 0.9$$

□