Stochastik

Hausaufgabenblatt 11

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 20. Dezember 2021

1. Die von einer Maschine für einen bestimmten Arbeitsvorgang benötigte Zeit sei eine Zufallsvariable X, für deren Dichtefunktion in Abhängigkeit von einem $\theta \in [0,2]$ die Gestalt

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta + 2(1-\theta) \cdot x & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unterstellt wird. Zu X liege eine einfache Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ (die X_i sind unabhängig) vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktionen

i. $\hat{\Theta}_1 = 4 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_1$ genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(\hat{\Theta}_1) = \theta$ gilt.

Offensichtlich ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\Theta}_1\right) &= \mathrm{E}\left(4 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= 4 - \frac{6}{n} \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= 4 - \frac{6}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \\
&= 4 - 6\,\mathrm{E}\left(X\right) \\
&= 4 - 6 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \,\mathrm{d}\,x \\
&= 4 - 6 \left(\int_0^1 x \cdot (\theta + 2(1-\theta) \cdot x) \,\mathrm{d}\,x\right) \\
&= 4 - 6 \left(\theta \int_0^1 x \,\mathrm{d}\,x + 2 \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}\,x - 2\theta \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}\,x\right) \\
&= 4 - 6 \cdot \frac{4-\theta}{6} \\
&= \theta
\end{aligned}$$

$\square$

ii. $\hat{\Theta}_2 = 3 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_2$ genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(\hat{\Theta}_2) = \theta$ gilt.

Offensichtlich ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\Theta}_2\right) &= \mathrm{E}\left(3 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= 3 - \frac{6}{n} \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= 3 - 6\,\mathrm{E}(X^2) \\
&= 3 - 6 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= 3 - 6 \int_{0}^{1} x^2 \left(\theta + 2(1-\theta) \cdot x\right) \mathrm{d}\,x \\
&= \ldots \\
&= 3 - 6 \cdot \frac{3-\theta}{6} \\
&= \theta
\end{aligned}$$

□

erwartungstreu für θ sind.

(b) Überprüfen Sie zusätzlich, ob $\hat{\Theta}_1$ konsistent für θ ist.

Lösung:

Wir wissen, dass $\hat{\Theta}_1$ genau dann konsistent ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) = 0$ gilt.

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(4 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{n}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= 36 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\
&= 36 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}(X) \\
&= 36 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Var}(X) \\
&= 36 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta \cdot x \cdot e^{-\theta x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Schätzen Sie das für diese Sorte passende θ aufgrund der folgenden 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) mittels der Maximum-Likelihood-Methode:

1.5	1	2	1	1.5
1	2	0.5	2.5	1.5
1.5	1.5	1.5	2	1.5

Lösung:

Es gilt:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta \cdot x_i \cdot e^{-\theta x_i^2} = (2\theta)^n \cdot e^{-\theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Damit erhalten wir $L^*(\theta)$ mit:

$$L^*(\theta) = \ln L(\theta) = n \cdot \ln 2\theta + \left(-\theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \cancel{\ln e} + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i = n(\ln 2 + \ln \theta) - \theta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = 0 \quad \iff \quad \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Damit ist $\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ein potentieller Schätzer für θ.

Natürlich müssen wir überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \quad \checkmark$$

Damit haben wir einen Schätzer und es gilt:

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{15 \cdot 4}{149} = \frac{60}{149} \approx 0.403$$

□

3. Peter nimmt an zehn aufeinanderfolgenden Tagen an einem Glückspiel mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ teil. Dabei spielt er das Spiel jeden Tag so oft, bis er einmal gewinnt. Danach hört er für diesen Tag auf. Nach dieser Strategie verfährt er an jedem der zehn Tage. Nachfolgend sind die Anzahlen der Spiele angegeben, die Peter an den einzelnen Tagen spielt:

$$13, 7, 10, 2, 11, 17, 15, 9, 19, 11$$

(a) Bestimmen Sie aufgrund einer Stichprobe vom Umfang n eine Maximum-Likelihood-Schätzung für die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit p.

Lösung:

Wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ gegeben ist mit [1]

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{für } x \in \mathbb{N} \setminus 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i - 1} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Damit erhalten wir $L^*(p)$ mit:

$$L^*(p) = \ln L(p) = n \cdot \ln \frac{p}{1-p} + \ln(1-p) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial p} = \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{p} + \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$$

$$\implies \quad \frac{\partial L^*}{\partial p} = 0 \quad \iff \quad p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Natürlich müssen wir überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{\partial^2 L^*(p)}{\partial p^2} = \frac{-n}{p^2} + \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^2} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^3}{n^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i} <^{2} 0 \quad \checkmark$$

Damit haben wir einen Schätzer und es gilt:

$$p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

□

[1] Es handelt sich um eine verschobene geometrische Verteilung.

[2] Die Summe über alle x_i ist offensichtlich stets positiv. O.B.d.A. können wir davon ausgehen, dass in jeder ausreichend großen Stichprobe mindestens einmal mehr als einmal gespielt werden muss um zu gewinnen.

(b) Berechnen Sie den zugehörigen Maximum-Likelihood-Schätzwert, der sich für die oben angegebenen Anzahlen ergibt.

Lösung:

Es gilt:

$$p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{10}{114} = \frac{5}{57}$$

$\square$

4. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und jeweils $N(0;\theta)$-verteilt, dabei ist $\theta > 0$ unbekannt. Die Dichte von X ist also gegeben durch

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-x^2/2\theta}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter θ.

Lösung:

Es gilt:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-x_i^2/2\theta} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta}\right)^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2/2\theta}$$

Damit erhalten wir $L^*(\theta)$ mit:

$$L^*(\theta) = \ln L(\theta) = \frac{-n}{2} \cdot \ln(2\pi\theta) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial L^*}{\partial\theta} = \frac{-n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L^*}{\partial\theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Natürlich müssen wir überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^3} = \frac{-n^3}{2\sum_{i=1}^n x_i^2} < 0 \quad \checkmark$$

Damit haben wir einen Schätzer und es gilt:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

□

(b) Welcher der beiden Schätzer

i. $S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass S_n genau dann erwartungstreu ist, wenn $\mathrm{E}(S_n) = \theta$.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \theta + 0 \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Damit ist S_n ein erwartungstreuer Schätzer für θ. $\square$

ii. $T_n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Lösung:

Wir wissen, dass T_n genau dann asymptotisch erwartungstreu ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n) = \theta$.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \cdot \mathrm{E}(X^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X^2) \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Damit ist T_n ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für θ. $\square$

ist erwartungstreu, welcher ist asymptotisch erwartungstreu (d.h. Betrachtung des Grenzwert vom Erwartungswert der Schätzfunktion)?