Stochastik

Hausaufgabenblatt 6

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 16. November 2021

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zündung bei einem Auto falsch eingestellt ist, sei $p = 0.3$. Es werden $n = 5$ Autos ausgewählt. Die betrachtete Zufallsvariable X bezeichnet die Zahl der Autos mit falsch eingestellter Zündung.

   (a) Bestimmen Sie für $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ die Werte

      i. der Wahrscheinlichkeits- und

Lösung:

Wir wissen, dass es sich um eine *Binomialverteilung* handelt mit

- $n = 5$,
- $p = 0.3$.

Damit gilt für $x \in [0, 5]_{\mathbb{N}_0}$:

$$b(x; n, p) = b(x; 5, 0.3) = f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{5-x}$$

Und damit:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	16.807%	36.015%	30.87%	13.23%	2.835%	0.243%

□

      ii. der Verteilungsfunktion.

Lösung:

Es gilt für $x \in [0, 5]_{\mathbb{N}_0}$:

$$B(x; n, p) = B(x; 5, 0.3) = F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} b(x; n, p) = \sum_{k \leq x} \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{5-x}$$

Und damit:

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	16.807%	52.822%	83.692%	96.922%	99.757%	100%

□

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

i. bei 2 Autos die Zündung falsch eingestellt ist.

Lösung:

Offensichtlich gilt nach Teilaufgabe (a):

$$f(2) = 30.87\%$$

□

ii. bei 2 oder weniger Autos die Zündung falsch eingestellt ist.

Lösung:

Offensichtlich gilt nach Teilaufgabe (a):

$$F(2) = 83.692\%$$

□

iii. bei mehr als 3 Autos die Zündung falsch eingestellt ist.

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 96.922\% = 3.078\%$$

□

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:

Es gilt:

$$\mu = np = 5 \cdot 0.3 = 1.5 \quad \wedge \quad \sigma^2 = npq = 5 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 1.05$$

□

2. Unter 50 Glühbirnen in einem Karton befinden sich 5 Defekte. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Birnen getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) alle 3 defekt sind,

Lösung:

Wir wissen, dass es sich um eine *hypergeometrische* Verteilung handelt mit

- $N = 50$,
- $M = 5$,
- $n = 3$.

Damit gilt:

$$h(x; N, M, n) = h(x; 50, 5, 3) = f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{x}\binom{45}{3-x}}{\binom{50}{3}}$$

Und damit:

$$P(X = 3) = h(3; 50, 5, 3) = f(3) = \frac{1}{1960} \approx 0.05102\%$$

□

   (b) genau 2 defekt sind,

Lösung:

Es gilt:

$$P(X = 2) = h(2; 50, 5, 3) = f(2) = \frac{9}{392} \approx 2.29592\%$$

□

   (c) zwischen einer und drei Birnen defekt sind,

Lösung:

Es gilt:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} P(X = k) = \sum_{k=1}^{3} h(k; 50, 5, 3) = \frac{541}{1960} \approx 27.602\%$$

□

   (d) keine defekt ist.

Lösung:

Es gilt:

$$P(X = 0) = h(0; 50, 5, 3) = \frac{1419}{1960} \approx 72.39796\%$$

□

(e) Wie viele defekte Birnen sind bei dieser Stichprobe im Mittel zu erwarten?

Lösung:

Es gilt:

$$\mu = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{5}{50} = \frac{3}{10}$$

□

3. Sie sind ein sehr aufmerksamer Leser. Durchschnittlich finden Sie zwei Rechtschreibfehler pro Stunde, die Sie mit Lesen verbringen. Bezeichne X die Anzahl der gefundenen Rechtschreibfehler pro Stunde, die mit Lesen verbracht wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie

   (a) mindestens einen Rechtschreibfehler in einer Stunde entdecken?

   Lösung:

   Wir wissen, dass es sich um eine *Poisson-Verteilung* handelt mit

   - $\mu = 2$.

   Damit gilt:

   $$\mathrm{po}(x;\mu) = \mathrm{po}(x;2) = f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} = \frac{2^x}{x!} \cdot e^{-2}$$

   Und damit:

   $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{po}(0;2) = 1 - e^{-2}$$

   □

   (b) mindestens zwei und weniger als fünf Rechtschreibfehler in einer Stunde entdecken?

   Lösung:

   Es gilt:

   $$P(2 \leq X < 5) = \sum_{k=2}^{4} P(X = k) = \sum_{k=2}^{4} \mathrm{po}(k;2) = 4e^{-2}$$

   □

4. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200\text{g}$ und $\sigma = 800\text{g}$.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes
      i. mehr als 3000g,

Lösung:

Wir wissen, dass es sich um eine *Normalverteilung* handelt mit

- $\mu = 3200\text{g}$,
- $\sigma = 800\text{g}$.

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq k) = 1 - P(X < k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{3000\text{g} - 3200\text{g}}{800\text{g}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 0.5987
\end{aligned}
$$

□

      ii. höchstens als 2500g,

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{2500\text{g} - 3200\text{g}}{800\text{g}}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{7}{8}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{7}{8}\right) \\
&= 1 - 0.8092 \\
&= 0.1908
\end{aligned}
$$

□

iii. zwischen 4000g und 5000g wiegt?

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(4000\text{g} \leq X \leq 5000\text{g}) &\approx \Phi\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_2-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5000\text{g}-3200\text{g}}{800\text{g}}\right) - \Phi\left(\frac{4000\text{g}-3200\text{g}}{800\text{g}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{9}{4}\right) - \Phi(1) \\ &= 0.9878 - 0.8413 \\ &= 0.1465 \end{aligned}$$

□

(b) Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es zu den

i. 20% leichtesten

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & P(X \leq c) &&= 0.2 \\ \Longrightarrow\ & \Phi(c) &&= 0.2 \\ \Longrightarrow\ & \Phi(c) &&\approx 1 - \Phi(0.85) \\ \Longrightarrow\ & \Phi(c) &&\approx \Phi(-0.85) \\ \Longrightarrow\ & c &&\approx -0.85 \\ \Longrightarrow\ & \frac{k-\mu}{\sigma} &&\approx -0.85 \\ \Longrightarrow\ & \frac{k-3200\text{g}}{800\text{g}} &&\approx -0.85 \\ \Longrightarrow\ & k - 3200\text{g} &&\approx -680\text{g} \\ \Longrightarrow\ & k &&\approx 2520\text{g} \end{aligned}$$

□

ii. 15% schwersten

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(X \geq c) && = 0.15 \\
\Longrightarrow\ & 1 - \Phi(c) && = 0.15 \\
\Longrightarrow\ & \Phi(c) && \approx 1 - \Phi(1.4) \\
\Longrightarrow\ & \Phi(c) && \approx \Phi(-1.4) \\
\Longrightarrow\ & c && \approx 1.04 \\
\Longrightarrow\ & \frac{k-\mu}{\sigma} && \approx 1.04 \\
\Longrightarrow\ & \frac{k - 3200\text{g}}{800\text{g}} && \approx 1.04 \\
\Longrightarrow\ & k - 3200\text{g} && \approx 832\text{g} \\
\Longrightarrow\ & k && \approx 4032\text{g}
\end{aligned}
$$

□

gehört?