1. In einer Urne befinden sich 4 Kugeln. Zwei tragen die Aufschrift 1, die beiden anderen dagegen die Aufschrift 2 und 6. Anton zieht (ohne Zurücklegen) zwei der Kugeln und erhält die Differenz als Gewinn in Euro ausgezahlt.

   (a) Welchen Einsatz sollte Anton zahlen, damit das Spiel fair ist?

Lösung:

Wir nutzen erst einmal eine Nebenrechnung:

Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit

$$X_1 := \{\text{Aufschrift der ersten Kugel}\}$$

$$X_2 := \{\text{Aufschrift der zweiten Kugel}\}$$

Dann gilt:

X_1 \ X_2	1	2	6	$f_2(X_2)$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	0	$1/12$	$1/4$
6	$1/6$	$1/12$	0	$1/4$
$f_1(X_1)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	1

Mit dieser Nebenrechnung gilt dann:

$$X = \{\text{Gewinn in Euro ohne Einsatz}\}$$

mit:

x	0	1	4	5
$f(x)$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$

und damit:

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Das Spiel ist also fair bei einem Einsatz von $8/3$ Euro. □

Anton muss im Folgenden pro Spiel 3€ Einsatz zahlen.

(b) Welchen durchschnittlichen Reingewinn erwartet Anton jetzt pro Spiel? Berechnen Sie auch die Varianz und die Standardabweichung des Reingewinns

Lösung:

Es gilt:

$$Y := \{\text{Reingewinn in Euro mit Einsatz}\} \quad \Longleftrightarrow \quad Y = X - 3$$

Und damit:

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) - 3 = -\frac{1}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mu_X)^2) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) = \ldots = \frac{38}{9} \approx 4.22$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\frac{38}{9}} = \frac{\sqrt{38}}{3} \approx 2.0548$$

□

(c) Anton spielt das Spiel insgesamt 90 Mal. Berechnen Sie für den Gesamtreingewinn den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:

Sei

$$Z = Y_1 + \ldots + Y_{90}$$

Dann gilt:

$$\mu_Z = \mathrm{E}(Z) = 90 \cdot E(Y) = -30$$

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z) = 90 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 90 \cdot \frac{38}{9} = 380$$

□

(d) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der „Gesamtreingewinn" um mindestens 30€ vom Erwartungswert abweicht.

Lösung:

Es gilt offensichtlich mit Tschebyscheff:

$$\begin{aligned} & P\left(|Z - \mu_Z| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{\epsilon^2} \\ \equiv \quad & P\left(|Z + 30| \geq 30\right) \leq \frac{380}{30^2} \\ \equiv \quad & P\left(|Z + 30| \geq 30\right) \leq \frac{380}{900} = \frac{19}{45} \approx 42.22\% \end{aligned}$$

□