1. Die durchschnittliche Länge von Metallstiften soll geschätzt werden. Eine Stichprobe vom Umfang 36 liefert eine mittlere Länge von $\bar{x} = 38.5$mm. Aus früheren Untersuchungen sei bekannt, dass die Länge der Metallstifte normalverteilt ist und die produzierende Maschine mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1.8$mm arbeitet.

   (a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die erwartete Metallstiftlänge an.

Lösung:

Wir wissen, dass gilt:

$$X := \text{Länge von Metallstiften (in mm)} \sim \mathcal{N}(\mu, 1.8^2)$$

Wir haben offensichtlich das Vertrauensniveau gegeben mit

$$\gamma = 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05$$

Die relevanten Kennzahlen sind bereits gegeben.

Die normierte Zufallsvariable U mit

$$U = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

ist dann standarnormalverteilt mit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
& P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) && = \gamma = 1 - \alpha \\
\equiv \quad & P(38.5 - u_{0.975} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 38.5 + u_{0.975} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{36}}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(38.5 - u_{0.975} \cdot \frac{3}{10} \leq \mu \leq 38.5 + u_{0.975} \cdot \frac{3}{10}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(38.5 - 1.960 \cdot \frac{3}{10} \leq \mu \leq 38.5 + 1.960 \cdot \frac{3}{10}) && = 0.95 \\
\equiv \quad & P(37.912 \leq \mu \leq 39.088) && = 0.95
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unser Konfidenzintervall I_{36} mit

$$I_{36} = [37.912, 39.088]$$

$\square$

(b) Welchen Umfang muss eine Stichprobe haben, damit das Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die mittlere Stiftlänge halb so breit ist, wie das unter (a) berechnete?

Lösung:

Offensichtlich gilt für die Intervallbreite I_B:

$$I_B := c_o - c_u = \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$I_B \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Um die Breite des Konfidenzintervalls zu halbieren, muss n also 4-mal so groß werden.

Wir erhalten $n = 36 \cdot 4 = 144$. □