Stochastik

Übungsblatt 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 18. Oktober 2021

1. Geben Sie für die folgenden Vorgänge die Ergebnismenge und deren Mächtigkeit an:

   (a) Eine Münze mit unterscheidbaren Seiten und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen; beobachtet wird, welche Seite der Münze oben liegt und welche Augenzahl der Würfel zeigt.

   Lösung:

   Es gilt:

   $$\begin{aligned}\Omega = \{&(K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6),\\ &(Z,1),(Z,2),(Z,3),(Z,4),(Z,5),(Z,6)\}\end{aligned}$$
   $$|\Omega| = 12$$

   (b) Zwei nicht unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen; beobachtet werden die Augenzahlen der beiden Würfel.

   Lösung:

   Es gilt:

   $$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,5),(5,6),\\ &(6,6)\}\end{aligned}$$
   $$|\Omega| = 21$$

   (c) Lebensdauer eines technischen Gerätes

   Lösung:

   Es gilt (in Sekunden):

   $$\Omega = \{n \text{ s} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$
   $$|\Omega| = \infty$$

2. Eine technische Anlage besteht aus drei Baugruppen, die zufällig und unabhängig voneinander arbeitsfähig oder defekt sein können. Wir registrieren die Zustände der drei Baugruppen und wählen als einfache Darstellung eine „1“ für eine arbeitsfähige Baugruppe und eine „0“ für eine defekte. Geben Sie für die folgenden Aufbauten die Teilmenge von Ω an, die das Ergebnis $A = \{\text{Die Anlage ist arbeitsfähig}\}$ darstellt.

   Formulieren Sie die Ereignisse zunächst als Mengenverknüpfung;

   $B_i = \{i\text{-te Baugruppe ist arbeitsfähig}\}, i = 1, 2, 3$

   (a) Die Anlage sei genau dann arbeitsfähig, wenn alle drei Baugruppen arbeitsfähig sind.

   (In der Zuverlässigkeitstheorie stellt man einen solchen Aufbau schematisch als Reihenschaltung der drei Baugruppen dar.)

   Lösung:

   Es gilt:
   $$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$
   □

   (b) Die Anlage genau dann arbeitsfähig ist, wenn die 1. und 2. Baugruppe oder die 1. und 3. Baugruppe oder alle drei Baugruppen arbeitsfähig sind.

   (In der Zuverlässigkeitstheorie entspricht dieser Aufbau einer Parallelschaltung von von B_2 und B_3, zu der B_1 in Reihe gelegt wurde.)

   Lösung:

   Es gilt:
   $$A = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) = B_1 \cap (B_2 \cup B_3)$$
   □

   (c) Die Anlage genau dann arbeitsfähig ist, wenn mindestens ein Bauteil arbeitsfähig ist.

   (In der Zuverlässigkeitstheorie entspricht dieser Aufbau einer Parallelschaltung von B_1, B_2 und B_3.)

   Lösung:

   Es gilt:
   $$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$
   □

3. Für die Ereignisse A, B gelte $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ und $P(A \cap B) = 0.2$.

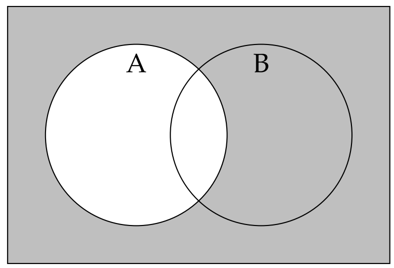
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse und interpretieren Sie diese Ereignisse anschaulich.

   (a) $\overline{A}$

Lösung:

Es gilt:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$



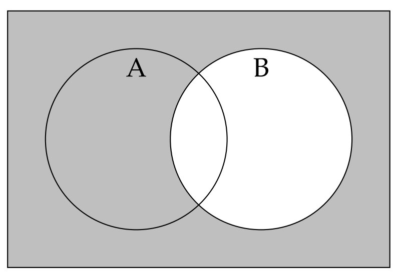
□

   (b) $\overline{B}$

Lösung:

Es gilt:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$$



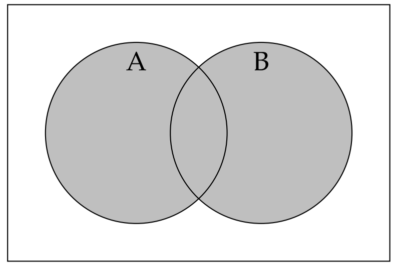
□

(c) $A \cup B$

Lösung:

Es gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.2 = 0.5$$



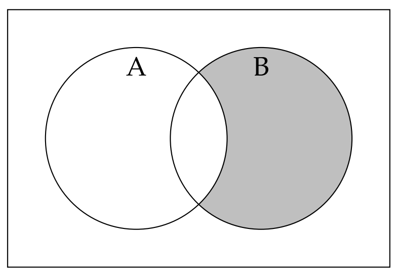
□

(d) $\overline{A} \cap B$

Lösung:

Es gilt:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$



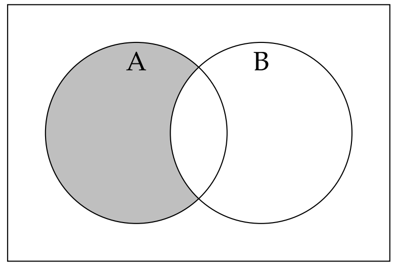
□

(e) $A \cap \overline{B}$

Lösung:

Es gilt:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$



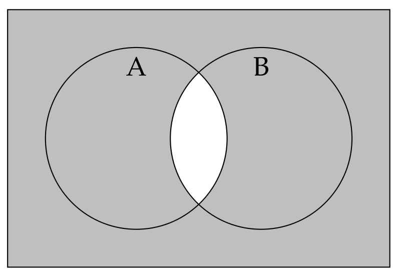
□

(f) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Lösung:

Es gilt:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$$



□

4. Bei der Produktion von Federn treten folgende Fehler auf (ppm $\widehat{=}$ 10^{-6})

$F = \{\text{Federkonstante zu klein}\}$	Anteil 0.8%
$D = \{\text{Durchmesser falsch}\}$	Anteil 0.5%
Federkonstante zu klein und Durchmesser falsch	Anteil 40ppm

(a) Wie groß ist der Anteil fehlerhafter Federn an der Gesamtproduktion, wenn die Fehler unabhängig voneinander auftreten, sich aber gegenseitig nicht ausschließen?

Lösung:

Es gilt:

$$P(F \cup D) = P(F) + P(D) - P(F \cap D) = 0.8\% + 0.5\% - 0.004\% = 1.296\%$$

$\square$

(b) Wie groß ist der Anteil fehlerhafter Federn, die nur einen falschen Durchmesser haben?

Lösung:

Es gilt:

$$P(D \cap \bar{F}) = P(D) - P(F \cap D) = 0.5\% - 0.004\% = 0.496\%$$

$\square$

5. In einer Lieferung von 10 hochwertigen Geräten befinden sich 2 defekte Geräte. Als Eingangskontrolle wurde vereinbart, dass der Abnehmer 5 Geräte zufällig entnimmt und auf Funktionstüchtigkeit überprüft. Befindet sich in dieser Stichprobe höchstens eine fehlerhafte Einheit, wird die Lieferung entnommen, andernfalls an den Lieferanten zur Sortierprüfung zurückgeschickt. Die geprüften Einheiten werden, wie in der Praxis üblich, nach der Prüfung nicht in das Lieferlos zurückgelegt. Wie wahrscheinlich ist es, dass diese Lieferung vom Abnehmer akzeptiert wird?

   Tipp: Berechnen Sie zunächst die Mächtigkeit der Ergebnismenge (Zahl möglicher Stichproben)

Lösung:

Sei $A = \{$Es wird bei der Stichprobe höchstens eine fehlerhafte Einheit entnommen$\}$.

Es gelten: (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$|\Omega| = \binom{10}{5} = 252 \qquad (= C(8;5) + C(8;4) \cdot C(2;1) + C(8;3) \cdot C(2;2))$$

$$|A| = C(8;5) + C(8;4) \cdot C(2;1) = \binom{8}{5} + \binom{8}{4} \cdot \binom{2}{1} = 56 + 70 \cdot 2 = 196$$

Damit gilt dann:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{196}{252} \approx 0.762$$

$\square$

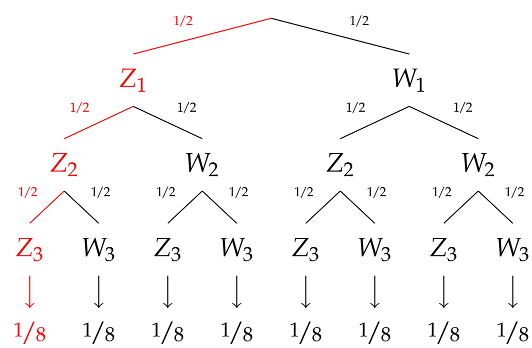
Zusatzaufgaben

6. Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem gleichzeitigen Werfen dreier unterscheidbarer Münzen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für

   (a) es erscheint dreimal „Zahl"?

Lösung:

Z_n bzw. W_n entspricht Zahl bzw. Wappen im n-ten Wurf.



Wir wissen, dass Münzwürfe stochastisch voneinander unabhängig sind.

Damit gilt:

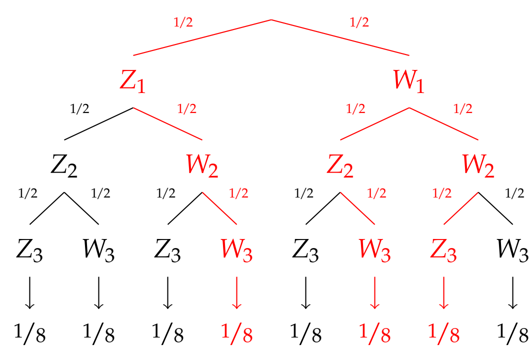
$$P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3) = P(Z_1) \cdot P(Z_2) \cdot P(Z_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

□

   (b) es erscheint einmal „Zahl" und zweimal „Wappen"?

Lösung:

Sei $A = \{$Es erscheint einmal „Zahl" und zweimal „Wappen"$\}$.



Damit gilt:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{P(Z_1 \cap W_2 \cap W_3)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{P(W_1 \cap Z_2 \cap W_3)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{P(W_1 \cap W_2 \cap Z_3)} = \frac{3}{8}$$

□

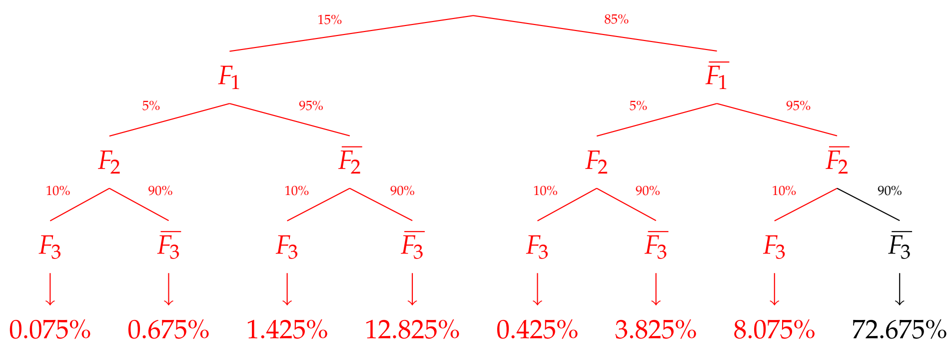
7. Bei der Fertigung eines Loses Elektronenröhren in der Probefertigung treten drei Fehlerarten auf:

$F_1 = \{\text{zu niedrige Kathodenemission}\}$	Anteil 15%
$F_2 = \{\text{Schluss}\}$	Anteil 5%
$F_3 = \{\text{Isolationsfehler}\}$	Anteil 10%

Die Entstehung der verschiedenen Fehlerarten ist völlig unabhängig voneinander, die Fehler schließen sich aber gegenseitig nicht aus.

(a) Wie groß ist der Anteil fehlerhafter Röhren?

Lösung:



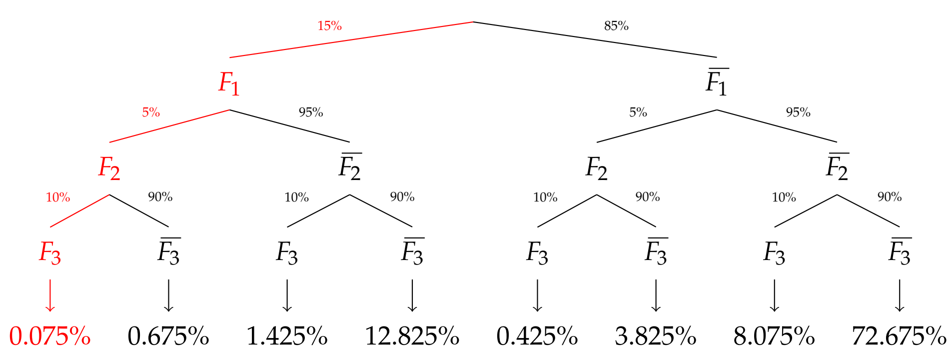
Wir wissen, dass für $A = \{\text{Fehlerhafte Röhre}\}$ gilt:

$$P(A) = 1 - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = 1 - 72.675\% = 27.325\%$$

□

(b) Wie groß ist der Anteil der Röhren, die alle drei Fehlerarten aufweisen?

Lösung:



Es gilt:

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0.075\%$$

□

8. Zwei Abwasserpumpen arbeiten völlig unabhängig voneinander (Redundanz). Nach Auswertung der Wartungshefte zeigt sich, dass die neue Pumpe eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 5%, die ältere von 10% hat. Die Wahrscheinlichkeit für den gleichzeitigen Ausfall beider Pumpen beträgt 0.5%. Da ein Notbetrieb mit einer Pumpe nur kurzzeitig möglich ist, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Notbetriebes gesucht.

Lösung:

Es gilt:

$$P(A_{\text{alt}} \cup A_{\text{neu}}) = P(A_{\text{alt}}) + P(A_{\text{neu}}) - P(A_{\text{alt}} \cap A_{\text{neu}}) = 10\% + 5\% - 0.5\% = 14.5\%$$

und damit:

$$P((A_{\text{alt}} \cup A_{\text{neu}}) \cap \overline{(A_{\text{alt}} \cap A_{\text{neu}})}) = P(A_{\text{alt}} \cup A_{\text{neu}}) - P(\overline{A_{\text{alt}} \cap A_{\text{neu}}}) = 14.5\% - 0.5\% = 14\%$$

□