

1. Handelt es sich bei den folgenden Funktionen um Dichtefunktionen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$(a) f_1(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

Offensichtlich ist $f_1(x) = \sin(x) < 0$ für alle $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Damit kann $f_1(x)$ keine Dichtefunktion sein. □

$$(b) f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

Es muss gelten:

- f_2 ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- f_2 ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- f_2 ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist $f_2(x)$ eine Dichtefunktion. □