Stochastik

Hausaufgabenblatt 1

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 5. Oktober 2021

1. Wie viele verschiedene Moeglichkeiten gibt es, 7 Studierende auf 7 Plaetzen anzuordnen, wenn diese eine Sitzreihe im Hoersaal bilden? Was aendert sich, wenn die Platzierung auf 7 Stuehlen um einen runden Tisch geschehen soll?

Lösung:

Fuer die Sitzreihe gilt trivialerweise: (Permutation)

$$P(7) = 7! = 5040$$

Fuer den runden Tisch gilt dann, da die Wahl der „ersten Position“egal ist: (Permutation)

$$\frac{P(7)}{7} = P(6) = 720$$

□

2. Zwei 10 Cent-, drei 50 Cent- und fuenf 1 Euro Muenzen sollen in zufaelliger Reihenfolge angeordnet werden, wobei Muenzen gleichen Wertes als nicht unterscheidbar angesehen werden. Wie viele Moeglichkeiten der Anordnung gibt es?

Lösung:

Es gilt: (Permutation mit nicht unterscheidbaren Muenzen)

$$P(10;2;3;5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2! \cdot 3!} = 2520$$

□

3. Zu einer Feier wollen die Gaeste Weisswein trinken. Von 3 Sorten stehen jeweils 12 nicht unterscheidbare Flaschen im Keller.

   (a) Der Kuehlschrank im Keller fasst 6 Flaschen. Wie viele Moeglichkeiten gibt es aus den 3 Sorten den Kuehlschrank zu bestuecken?

   Lösung:

   Es gilt: (Kombination mit Wiederholung)

   $$C_w(3;6) = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

   □

   (b) Wie viele Anordnungen der Flaschen im Regal gibt es, wenn die Flaschen einer Sorte nicht unterscheidbar sind?

   Lösung:

   Es gilt: (Permutation mit nicht unterscheidbaren Flaschen)

   $$P(36;12;12;12) = \frac{36!}{12! \cdot 12! \cdot 12!} \approx 3.38 \cdot 10^{15}$$

   □

4. Eine Lieferung von 30 Geraeten, die durch ihre Fabrikationsnummern unterscheidbar sind, enthaelt 6 fehlerhafte Geraete.

   (a) Wie viele verschiedene Stichproben des Umfangs 5 sind moeglich?

   Lösung:

   Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung)

   $$C(30;5) = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 142\,506$$

   □

   (b) Wie viele Stichproben des Umfangs 5 mit genau 2 fehlerhaften Geraeten sind moeglich?

   Lösung:

   Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung pro Geraetetyp)

   $$C(24;3) \cdot C(6;2) = \binom{24}{3} \cdot \binom{6}{2} = \ldots = 30\,360$$

   □

   (c) Wie viele Stichproben des Umfangs 5 mit hoechstens einem fehlerhaften Geraet sind moeglich?

   Lösung:

   1. Situation:

   - Alle 5 Geraete kommen aus den 24 funktionstuechtigen Geraeten.
   - Keine Geraete kommen aus den 6 defekten Geraeten.

   2. Situation:

   - 4 Geraete kommen aus den 24 funktionstuechtigen Geraeten.
   - 1 Geraet kommt aus den 6 defekten Geraeten.

   Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung pro Geraetetyp)

   $$n_1 = C(24;5) \cdot C(6;0) = \binom{24}{5} \cdot \binom{6}{0} = \ldots = 42\,504$$

   $$n_2 = C(24;4) \cdot C(6;1) = \binom{24}{4} \cdot \binom{6}{1} = \ldots = 63\,756$$

   Insgesamt gilt damit:

   $$n = n_1 + n_2 = 106\,260$$

   □

   Dabei wird, wie in der Praxis ueblich, eine gepruefte Einheit nach der Pruefung nicht in das Lieferlos zurueckgelegt.

5. Ein Zweig des Telefonnetzes wird ueber sechsstellige Nummern angewaehlt. Die erste Ziffer der Telefonnummer darf keine Null sein. Fuer wieviele Anschluesse reichen die moeglichen Kombinationen aus?

Lösung:

Es gilt: (Variation mit Wiederholung fuer 1. Ziffer bzw. 2.-6. Ziffer)

$$V_w(9;1) \cdot V_w(10;5) = 9^1 \cdot 10^5 = 900\,000$$

$\square$

6. An einem Pferderennen nehmen 10 Pferde teil. Fuer eine Wette muessen die ersten drei Plaetze in der richtigen Reihenfolge getippt werden. Wie viele Tippmoeglichkeiten gibt es?

Lösung:

Es gilt: (Permutationen)

$$n = \frac{P(10)}{P(7)} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

□

7. Berechnen Sie, wie lange ein Skatspieler leben muesste, wenn er
   (a) alle moeglichen Blaetter aus 10 Karten auf die Hand (ein Skatspielbesteht aus 32 Karten) bekommt.

Lösung:

Es gilt: (Kombination ohne Wiederholung)

$$n = C(32; 10) = \binom{32}{10} = \frac{32!}{10! \cdot 22!} = 64\,512\,240$$

Da der Skatspieler 5min pro Spiel braucht, benoetigt er:

$$n \cdot 5\text{min} = 64\,512\,240 \cdot 5\text{min} = 322\,561\,200\text{min} \approx 224\,000\text{d}$$

□

   (b) alle moeglichen Spiele, also auch alle moeglichen Blaetter seiner zwei Mitspieler und der zwei Skatkarten beruecksichtigt werden.

Lösung:

Es gilt: (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$\begin{aligned} n &= C(32; 10) \cdot C(22; 10) \cdot C(12; 10) \cdot C(2; 2) \\ &= \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{2}{2} \\ &= \dots \\ &= 2\,753\,294\,408\,504\,640 \end{aligned}$$

Analog wuerde er hierfuer ca. 9 560 050 029 530 Tage benoetigen. □

Annahme: Ein Spiel dauert ca. 5 Minuten und er macht nichts anderes als spielen, spielen …

8. In einem Buero mit 3 Angestellten und sind 4 Telefonate zu erledigen. Wie viele Moeglichkeiten gibt es, diese 4 Aufgaben auf 3 aufzuteilen?

Lösung:

Es gilt: (Variationmit Wiederholung)

$$V_w(3;4) = 3^4 = 81$$

□

9. Fuer die Klaerung einer Sachfrage will ein Ausschuss aus seinen 14 Mitgliedern einen „Fuenferrat“ bilden. Dieser ist jedoch arbeitsunfaehig, wenn ihm 2 bestimmte Ausschussmitglieder gleichzeitig angehoeren, da diese beiden sich nicht moegen. Wie viele Moeglichkeiten gibt es fuer die Bildung des „Fuenferrats“?

Lösung:

Wir koennen uns ohne Probleme Fuenferteams aus den 12 unproblematischen Mitgliedern bilden. Um dann die beiden Streithaehne auch unterzubringen, berechnen wir die Anzahl an Viererteams aus den selben 12 Mitgliedern, verdoppeln diese Zahl und haben so die gesamte Anzahl an Moeglichkeiten.

Es gilt: (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$n = C(12;5) + 2 \cdot C(12;4) = \binom{12}{5} + 2 \cdot \binom{12}{4} = \ldots = 1782$$

□