1. Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen.

   (a) Sie spielen folgende Spielvariante: Jede Karte wird einzeln gezogen. Sie notieren, welche Karte es gewesen ist und legen die Karte zurück. Sie wiederholen dieses Vorgehen 10-mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei Buben dabei gewesen sind?

Lösung:

Es handelt sich offenbar um ein *Bernoulli*-Experiment. Damit haben wir eine *Binomialverteilung* gegeben mit

- $n = 10$,
- $p = {}^4/_{32} = {}^1/_8$.

Damit gilt für $x \in [0, 5]_{\mathbb{N}_0}$:

$$b(x; n, p) = b\left(x; 10, {}^1/_8\right) = f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{10-x}$$

Und damit:

$$b(2; 10, {}^1/_8) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^8 \approx 24.16\%$$

□

(b) Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens ein rotes Ass zu ziehen, größer als 0.5 wird?

Lösung:

Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein rotes Ass gezogen wird, gilt:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

Damit gilt mit

- $n = n$,
- $p = {}^{1}/_{16}$:

$$b(x; n, p) = b(x, n, {}^{1}/_{16}) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{n-x}$$

Mit $1 - P(X = 0) \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& 1 - P(X = 0) && \geq 0.5 \\
\Longrightarrow \quad & 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^0 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{n-0} && \geq 0.5 \\
\Longrightarrow \quad & 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^n && \geq 0.5 \\
\Longrightarrow \quad & \left(\frac{15}{16}\right)^n && \leq 0.5 \\
\Longrightarrow \quad & n \cdot \ln \frac{15}{16} && \leq \ln \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \quad & n && \geq \frac{\ln {}^{1}/_{2}}{\ln {}^{16}/_{15}} \\
\Longrightarrow \quad & n && \geq \frac{\ln 1 - \ln 2}{\ln 16 - \ln 15} \\
\Longrightarrow \quad & n && \geq 10.74
\end{aligned}$$

Damit muss man mindestens 11-mal ziehen. □