1. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_y(y)$ und die Dichtefunktion $f_y(y)$ für die transformierte Zufallsvariable Y, die sich als $Y = g(X)$ aus der ursprünglichen Zufallsvariablen X mit bekannter Verteilungsfunktion $F_x(x)$ und bekannter Dichtefunktion $f_x(x)$ ergibt:

   (a) $g(X) = aX + b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

Lösung:

Wir wissen:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(g(X) \leq y) \\
&= P(aX + b \leq y) \\
&= P(aX \leq y - b) \\
&= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Und damit:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(1 - F_X(\frac{y-b}{a})\right) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a > 0 \\ -f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} & \text{für } a < 0 \end{cases} \\
&= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) $g(X) = 3X - 1 \quad \text{mit } f_X(x) = \begin{cases} 4/27(3x^2 - x^3) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

Es gilt:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right) \cdot \frac{1}{|3|} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27}\left(3\left(\frac{y+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{3}\right)^3\right) & \text{für}^1 \ -1 \leq y \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und damit:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -1 \\ \frac{4}{27}\left(\frac{y+1}{3}\right)^3 - \frac{1}{27}\left(\frac{y+1}{3}\right)^4 & \text{für } -1 \leq y \leq 8 \\ 1 & \text{für } y > 8 \end{cases}$$

□

[1] $0 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad y = g(x) = 3x - 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq y \leq 8$