

1. Die Verspätung eines Zuges in einem bestimmten Bahnhof werde durch die stetige Zufallsvariable X beschrieben und habe die Dichtefunktion (in Minuten)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Erfüllt die angegebene Funktion $f(x)$ die Anforderung an eine Dichtefunktion?

Lösung:

Es muss gelten:

- f ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- f ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- f ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = \int_0^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t \right) dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{t^2}{16} \right]_0^4 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist $f(x)$ eine Dichtefunktion.

□

- (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t \right) dt = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{16}$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} x/2 - x^2/16 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

□

-
- (c) Sie haben bereits eine Minute auf den Zug gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die heutige Verspätung zwischen zwei und drei Minuten beträgt?

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3 \mid X \geq 1) &= \frac{P(2 \leq X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{F(3) - F(2)}{1 - F(1)} \\ &= \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}} \\ &= \frac{15 - 12}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

□