Stochastik

Hausaufgabenblatt 9

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 3. Dezember 2021

1. In einer Urne befinden sich 4 Kugeln. Zwei tragen die Aufschrift 1, die beiden anderen dagegen die Aufschrift 2 und 6. Anton zieht (ohne Zurücklegen) zwei der Kugeln und erhält die Differenz als Gewinn in Euro ausgezahlt.

   (a) Welchen Einsatz sollte Anton zahlen, damit das Spiel fair ist?

Lösung:

Wir nutzen erst einmal eine Nebenrechnung:

Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit

$$X_1 := \{\text{Aufschrift der ersten Kugel}\}$$

$$X_2 := \{\text{Aufschrift der zweiten Kugel}\}$$

Dann gilt:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	6	$f_2(X_2)$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	0	$1/12$	$1/4$
6	$1/6$	$1/12$	0	$1/4$
$f_1(X_1)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	1

Mit dieser Nebenrechnung gilt dann:

$$X = \{\text{Gewinn in Euro ohne Einsatz}\}$$

mit:

x	0	1	4	5
$f(x)$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$

und damit:

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Das Spiel ist also fair bei einem Einsatz von $8/3$ Euro. $\square$

Anton muss im Folgenden pro Spiel 3€ Einsatz zahlen.

(b) Welchen durchschnittlichen Reingewinn erwartet Anton jetzt pro Spiel? Berechnen Sie auch die Varianz und die Standardabweichung des Reingewinns

Lösung:

Es gilt:

$$Y := \{\text{Reingewinn in Euro mit Einsatz}\} \quad \Longleftrightarrow \quad Y = X - 3$$

Und damit:

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) - 3 = -\frac{1}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mu_X)^2) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) = \ldots = \frac{38}{9} \approx 4.22$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\frac{38}{9}} = \frac{\sqrt{38}}{3} \approx 2.0548$$

□

(c) Anton spielt das Spiel insgesamt 90 Mal. Berechnen Sie für den Gesamtreingewinn den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:

Sei

$$Z = Y_1 + \ldots + Y_{90}$$

Dann gilt:

$$\mu_Z = \mathrm{E}(Z) = 90 \cdot E(Y) = -30$$

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z) = 90 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 90 \cdot \frac{38}{9} = 380$$

□

(d) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der „Gesamtreingewinn“ um mindestens 30€ vom Erwartungswert abweicht.

Lösung:

Es gilt offensichtlich mit Tschebyscheff:

$$\begin{aligned} & P\left(|Z - \mu_Z| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{\epsilon^2} \\ \equiv \quad & P\left(|Z + 30| \geq 30\right) \leq \frac{380}{30^2} \\ \equiv \quad & P\left(|Z + 30| \geq 30\right) \leq \frac{380}{900} = \frac{19}{45} \approx 42.22\% \end{aligned}$$

□

2. Im letzten Wintersemester nahmen 120 Studierende an der Stochastik-Klausur teil. Im folgenden ist Punkteverteilung einer Stochastik-Klausur-Aufgabe angegeben:

Punkte X	6	5	4	3	2	1
Anzahl	0	10	30	40	20	20
$P(X = x_i)$	0	$10/120$	$30/120$	$40/120$	$20/120$	$20/120$

(a) Berechnen Sie

i. den Erwartungswert.

Lösung:

Es gilt offensichtlich:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(X = x_i) = \ldots = \frac{35}{12} \approx 2.9167$$

□

ii. die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung:

Es gilt offensichtlich:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = \ldots = \frac{203}{144} \approx 1.4097$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{203}{144}} = \frac{\sqrt{203}}{12} \approx 1.187$$

□

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Punkteschnitt im Bereich $[\mu - 2, \mu + 2]$? Nutzen Sie zur Abschätzung die Tschebyscheff-Ungleichung.

Lösung:

Es gilt offensichtlich mit Tschebyscheff:

$$\begin{aligned}
& P\left(|X-\mu| \geq \epsilon\right) && \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv \quad & 1 - P\left(|X-\mu| < \epsilon\right) && \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv \quad & P\left(|X-\mu| < \epsilon\right) && \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \\
\equiv \quad & P\left(|X - 35/12| < 2\right) && \geq 1 - \frac{203}{144 \cdot 2^2} \\
\equiv \quad & P\left(|X - 35/12| < 2\right) && \geq 1 - \frac{203}{576} \approx 0.6476
\end{aligned}$$

□

3. Das Abwassersystem einer Gemeinde, an das 1332 Haushalte angeschlossen sind, ist für eine maximale Last von 13 500 Litern pro Stunde ausgelegt.

   Nehmen Sie an, dass die einzelnen Abwassermengen (pro Stunde) von n angeschlossenen Haushalten beschrieben werden können durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, wobei X_i für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 10$ (Liter/Stunde) und Varianz $\sigma^2 = 4$ ((Liter/Stunde)^2). Berechnen Sie

   (a) den Erwartungswert und die Varianz für die 1332 angeschlossenen Haushalte.

   Lösung:

   Offensichtlich gilt mit:

   $$X = X_1 + \ldots + X_{1332}$$

   direkt auch:

   $$\mu_X = 1332 \cdot \mu = 13\,320 \mathrm{L}\,\mathrm{h}^{-1} \quad \wedge \quad \sigma_X^2 = 1332 \cdot \sigma^2 = 5328 \mathrm{L}^2\,\mathrm{h}^{-2}$$

   □

   (b) die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung des Abwassersystems (für 1332 angeschlossene Haushalte).

   Lösung:

   Offensichtlich gilt auch:

   $$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(13320, 5328)$$

   Sei

   $$u = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{13\,500 - 13320}{\sqrt{7\,096\,896}} = \frac{13500 - 13320}{12\sqrt{37}} = \frac{15\sqrt{37}}{37}$$

   Dann gilt:

   $$P(X > u) = 1 - P(X \leq u) = 1 - \Phi\left(\frac{15\sqrt{37}}{37}\right) \approx 1 - \Phi(2.47) = 1 - 0.9932 = 0.68\%$$

   □

4. Bei der Verpackung von Kartoffeln in Beutel kann das Normalgewicht von 10kg i.A. nicht exakt eingehalten werden. Die Erfahrung zeigt, dass das Füllgewicht eines Beutels durch eine Zufallsvariable $Y = X + 10$ beschrieben werden kann, wobei X eine auf dem Intervall $[-0.25, 0.75]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Füllgewichtes eines Beutels.

   Lösung:

   Offensichtlich gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0.75 - 0.25}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Var}(X) \overset{1}{=} \frac{1}{12}(b-a)^2 = \frac{1}{12}$$

   Und für $Y = X + 10$:

$$\mu_Y = E(Y) = E(X) + 10 = \frac{41}{4} \quad \wedge \quad \sigma_Y^2 = \operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

   □

   (b) Die abgefüllten Beutel sollen mit einem Kleintransporter befördert werden. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zulässige Nutzlast von 1020kg bei Zuladung von 100 Beuteln überschritten wird.

   Lösung:

   Sei

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_{100}$$

   dann gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$E(S_n) = n\mu_Y = 100 \cdot \mu_Y = 1025 \quad \wedge \quad \operatorname{Var}(S_n) = n\sigma_Y^2 = 100 \cdot \sigma_Y^2 = \frac{25}{3}$$

   Sei dann die standardisierte Zufallsvariable Z_n gegeben mit

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}} = \frac{S_n - n\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{n}} = \sqrt{3} \cdot \frac{S_n - 1025}{5}$$

   dann besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Verteilungsfunktion von Z_n für $n \to \infty$ punktweise gegen die der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ konvergiert.

   Wir wählen

$$u = \sqrt{3} \cdot \frac{1020 - 1025}{5} = -\sqrt{3} \approx -1.73$$

   Damit gilt:

$$P(Z_n \geq u) = 1 - P(Z_n < u) \approx 1 - \Phi(-1.73) = 1 - (1 - \Phi(1.73)) = \Phi(1.73) = 95.82\%$$

   □

[1] Siehe: Wikipedia