Stochastik

Hausaufgabenblatt 4

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 27. Oktober 2021

1. Handelt es sich bei den folgenden Funktionen um Dichtefunktionen? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) $f_1(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   Lösung:

   Offensichtlich ist $f_1(x) = \sin(x) < 0$ für alle $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

   Damit kann $f_1(x)$ keine Dichtefunktion sein. $\square$

   (b) $f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   Lösung:

   Es muss gelten:

   - f_2 ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
   - f_2 ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
   - f_2 ist normiert:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

   Damit ist $f_2(x)$ eine Dichtefunktion. $\square$

2. Gegeben seien die folgenden, jeweils auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen:

   (a) $F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ x-2 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$

Lösung:

Für $x_1 = 7/2$ und $x_2 = 2$ gilt:

$$F_1(x_1) = \frac{3}{2} > 1 = F_2(x_2) \quad \wedge \quad x_1 < x_2 \quad ↯$$

Also ist $F_1(x)$ nicht monoton steigend und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion. □

   (b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Lösung:

Offensichtlich ist $F_2(x)$ (streng) monoton fallend für $x \geq 0$ und damit insgesamt keine Verteilungsfunktion. □

   (c) $F_3(x) = e^{-e^{-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung:

Offensichtlich ist $F_3(x)$ monoton steigend und rechtsseitig stetig.

Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} F_3(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x\to\infty} e^{-x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_3(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$$

Also ist $F_3(x)$ damit insgesamt eine Verteilungsfunktion. □

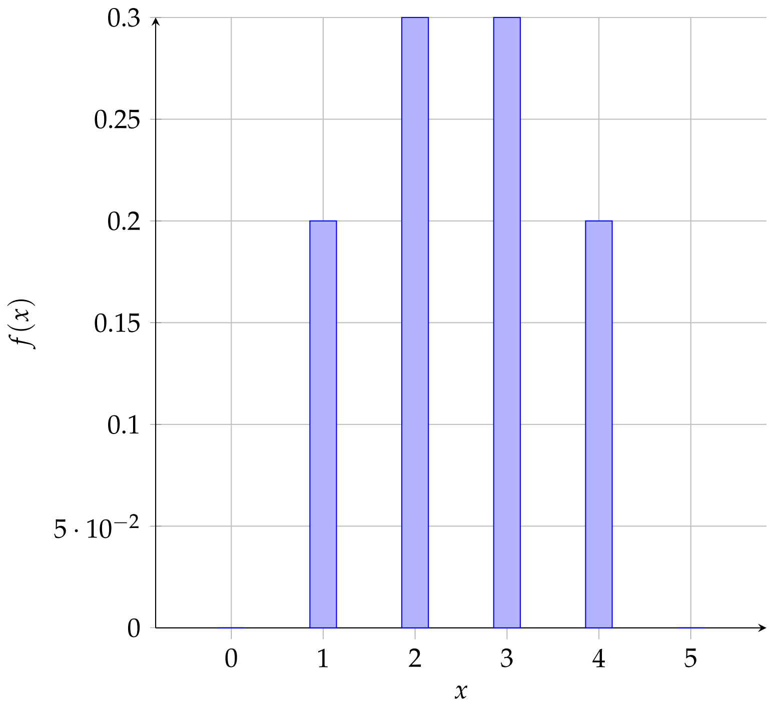
Welche dieser Funktionen können nicht Verteilungsfunktionen einer Zufallsvariablen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable X. Betrachten Sie folgende zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(5-x)}{20} & \text{für } x = \{1,2,3,4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$.

Lösung:



(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.

Lösung:

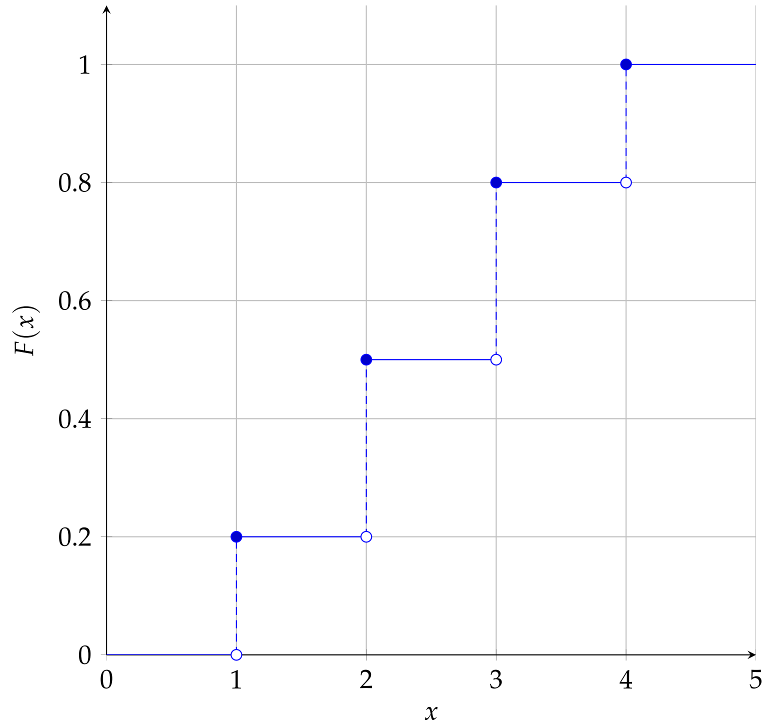
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* Zufallsvariablen X lässt sich durch die *Verteilungsfunktion*

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1/5 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1/2 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 4/5 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

beschreiben. □

(c) Stellen Sie diese Verteilungsfunktion grafisch dar.

Lösung:



4. Die Verspätung eines Zuges in einem bestimmten Bahnhof werde durch die stetige Zufallsvariable X beschrieben und habe die Dichtefunktion (in Minuten)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Erfüllt die angegebene Funktion $f(x)$ die Anforderung an eine Dichtefunktion?

Lösung:

Es muss gelten:

- f ist nichtnegativ ✓ (offensichtlich)
- f ist integrierbar ✓ (offensichtlich)
- f ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^4 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right]_0^4 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Damit ist $f(x)$ eine Dichtefunktion. □

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

Lösung:

Es gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t\right)\mathrm{d}\,t = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$$

Und damit:

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x/2 - x^2/16 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

(c) Sie haben bereits eine Minute auf den Zug gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die heutige Verspätung zwischen zwei und drei Minuten beträgt?

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3 \mid X \geq 1) &= \frac{P(2 \leq X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{F(3) - F(2)}{1 - F(1)} \\ &= \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}} \\ &= \frac{15 - 12}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\square$