1. Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch einen Zufallsvariable mit unbekannten Erwartungswert μ und einer Streuung $\sigma = 0.1$ [Maßeinheiten] angemessen beschrieben werden kann. Bei einer Messreihe soll die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel der Messwerte und μ kleiner als 0.02 [Maßeinheiten] ist, mindestens 95% sein. Wie viele Messungen müssen Sie durchführen

   (a) unter Anwendung der Ungleichung von Tschebyscheff?

Lösung:

Wir wissen:

- $X = \{\text{Messwerte einer Messung}\}$
- $\overline{X}_{(n)} = \{\text{arithmetisches Mittel bei } n \text{ Messungen}\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $\mu = ?$
- $\sigma = 0.1$
- $\epsilon = 0.02$
- $P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < 0.02\right) \geq 95\%$

Nach Tschebyscheff gilt:

$$P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \text{bzw.} \quad P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| \geq \epsilon\right) && \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\equiv\quad & 1 - P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < \epsilon\right) && \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\equiv\quad & P\left(|\overline{X}_{(n)} - \mu| < \epsilon\right) && \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\
\Longrightarrow\quad & 1 - \frac{0.1^2}{n \cdot 0.02^2} && \geq 0.95 \\
\equiv\quad & \frac{0.1^2}{n \cdot 0.02^2} && \leq 0.05 \\
\equiv\quad & n && \geq 500
\end{aligned}$$

□

   (b) unter Berücksichtigung, dass das arithmetische Mittel von n unabhängigen Zufallsvariablen (für großes n) näherungsweise normalverteilt ist?

Lösung:

Es gilt:

$$\overline{X}_{(n)} \sim N(\mu_{\overline{X}_{(n)}}, \sigma^2_{\overline{X}_{(n)}})$$

□