1. Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. X_i gebe die Augenzahl des i-ten Würfels ($i = 1, 2$) an. Für

$$X = X_1 + X_2 \quad \text{und} \quad Y = X_1 \cdot X_2$$

sollen folgende Kenngrößen berechnet werden:

(a) Erwartungswert

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$\mu = \mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = E((X_1 - \mu)^2) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} (i - 3.5)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.9167$$

und damit:

$$\mu_X = E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 7 \quad \wedge \quad \mu_Y = E(Y) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{49}{4} = 12.25$$

$\square$

(b) Varianz

Lösung:

Offensichtlich gilt:

$$X_1, X_2 \text{ stochastisch unabhängig} \implies \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$$

Und damit:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{35}{6} \approx 5.833$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(X_1)^2\,\mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{E}(X_2)^2\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(X_2) = \frac{11515}{144} \approx 79.965$$

$\square$

(c) Kovarianz $\operatorname{Cov}(X, Y)$

Lösung:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}((X_1 + X_2)X_1X_2) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X_1^2X_2 + X_1X_2^2) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X_1^2)\,\mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2^2) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mu\left(\mathrm{E}(X_1^2) + \mathrm{E}(X_2^2)\right) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mu\left(2\,\mathrm{E}(X_1^2)\right) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mu\left(2\sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot f_1(i)\right) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{\mu}{3}\sum_{i=1}^{6} i^2 - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{7}{6} \cdot 91 - 7 \cdot \frac{49}{4} \\
&= \frac{245}{12} \approx 20.4167
\end{aligned}
$$

□

(d) Korrelationskoeffizient ρ_{XY}

Lösung:

Es gilt:

$$
\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\frac{245}{12}}{\sqrt{\frac{35}{6}} \cdot \sqrt{\frac{11515}{144}}} = \frac{\sqrt{1974}}{47} \approx 0.9453
$$

□