Linguagens Formais e Autómatos

Linguagens

Artur Pereira <artur@ua.pt>

DETI, Universidade de Aveiro

Definição informal de linguagem

- Uma linguagem é um sistema de símbolos usado para comunicar informação.
- Uma mensagem nessa linguagem é uma sequência de símbolos
  - Mas nem todas as sequências são válidas

- Logo, uma linguagem é caracterizada por:
  - um conjunto de símbolos;
  - uma forma de descrever o conjunto das sequências válidas.
- Ou seja, uma linguagem é um conjunto de sequências, definidas sobre um conjunto de símbolos.

EXEMPLOS DE LINGUAGENS (1)

- O conjunto $\{$`"abc"`, `"bbb"`, `"aaa"`$\}$

  Cada elemento do conjunto é uma sequência definida sobre o conjunto $\{$`'a'`, `'b'`, `'c'`$\}$.

- Conjunto dos vocábulos em português

  Cada vocábulo é uma sequência definida sobre o conjunto das letras (incluindo as vogais acentuadas e o ç)

- Conjunto das sequências binárias com um número par de uns

  Cada elemento do conjunto é uma sequência definida sobre o conjunto $\{$`'0'`, `'1'`$\}$

Exemplos de linguagens (2)

- O conjunto das sequências políndromas com as letras 'a' e 'b'

  Cada elemento do conjunto é uma sequência definida sobre o conjunto $\{\texttt{'a'}, \texttt{'b'}\}$.

- O conjunto das expressões aritméticas válidas

  Cada elemento do conjunto é uma sequência definida sobre o conjunto $\{\texttt{'0'}, \texttt{'1'}, \cdots, \texttt{'9'}, \texttt{'+'}, \cdots\}$.

- O conjunto das expressões que representam endereços de correio electrónico

  Cada elemento é uma sequência de caracteres alfanuméricos contendo uma ocorrência do símbolo '@' e uma ou mais ocorrências do símbolo '.'

Exemplos de linguagens (3)

- A linguagem de programação Java

  Cada elemento é uma sequência de identificadores, constantes numéricas, palavras reservadas, operadores e sinais de pontuação.

- A Língua portuguesa

  Cada elemento do conjunto é um texto em português, portanto é uma sequência definida sobre o conjunto dos vocábulos mais os sinais de pontuação.

NOÇÕES BÁSICAS (1)

$\mathcal{D}$ O **símbolo**, também designado por **letra**, é o átomo das linguagens.

$\mathcal{D}$ O **alfabeto** é um conjunto (finito, não vazio) de símbolos

- Exemplos:
  - $A_1 = \{0, 1\}$ é o alfabeto do conjunto dos números binários
  - $A_2 = \{0, 1, \cdots, 9\}$ é o alfabeto do conjunto dos números decimais
  - Qual é o alfabeto do conjunto dos vocábulos em português?
  - Qual é o alfabeto da Língua Portuguesa?
  - Qual é o alfabeto do código Morse?

Noções básicas (2)

$\mathcal{D}$ A **palavra**, também designada por ***string***, é uma sequência de símbolos sobre um dado alfabeto A

$$u = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad \text{com} \quad a_i \in A \wedge n \geq 0$$

- Exemplos:
  - $A_1 = \{0, 1\}$

    0010, 11
  - $A_2 = \{0, 1, \cdots, 9\}$

    2011, 1999999
  - $A_3 = \{0, 1, \cdots, 9, a, b, \cdots, z, \texttt{@}, .\}$

    artur@ua.pt

$\mathcal{D}$ A **palavra vazia** é uma sequência de 0 (zero) símbolos e denota-se por ε.

- ε não pertence ao alfabeto

Noções básicas (3)

- $\mathcal{D}$ Uma **sub-palavra** de uma palavra u é uma sequência de 0 ou mais símbolos intermédios de u.
- $\mathcal{D}$ Um **prefixo** de uma palavra u é uma sequência de 0 ou mais símbolos iniciais de u.
- $\mathcal{D}$ Um **sufixo** de uma palavra u é uma sequência de 0 ou mais símbolos terminais de u.

Exemplos:

- `as` é uma sub-palavra de `casa`, mas não prefixo nem sufixo
- `001` é prefixo e sub-palavra de `001111`, mas não é sufixo
- ε é prefixo, sufixo e sub-palavra de qualquer palavra u.
- qualquer palavra u é prefixo, sufixo e sub-palavra de si mesma.

Nocões básicas (4)

$\mathcal{D}$ O **fecho** do alfabeto *A*, denotado A^*, representa o conjunto de todas as palavras definíveis sobre o alfabeto *A*, incluindo a palavra vazia.

Exemplos:

$$\{0, 1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \cdots\}$$

$$\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}^* = \{\varepsilon, \clubsuit\clubsuit, \clubsuit\diamondsuit, \clubsuit\heartsuit, \clubsuit\spadesuit, \diamondsuit\clubsuit, \cdots, \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit, \cdots\}$$

$\mathcal{D}$ Dado um alfabeto *A*, uma **linguagem** *L* sobre *A* é um conjunto finito ou infinito de palavras definidas com símbolos de *A*.

Isto é $L \subseteq A^*$

NOÇÕES (5)

Exemplos de linguagens sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$

$$L_1 = \{u \in A^* \mid |u| \leq 2\} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$$

$$L_2 = \{u \in A^* \mid \forall_i \, u(i) = 0\} = \{0, 00, 000, 0000, \cdots\}$$

$$L_3 = \{\}$$

$$L_4 = \{\varepsilon\}$$

$$L_5 = A$$

$$L_6 = A^*$$

Note que $\{\}$, $\{\varepsilon\}$, A e A^* são linguagens sobre A qualquer que seja o A.

Operações sobre palavras (1)

$\mathcal{D}$ O **comprimento** da palavra u denota-se $|u|$ e representa o seu número de símbolos.

- O comprimento da palavra vazia é zero

  $$|\varepsilon| = 0$$

- É habitual interpretar-se a palavra u como uma função

  $$u : \{1 \cdots n\} \rightarrow A, \quad \text{com} \quad n = |u|$$

  $u(i)$ (ou u_i) representa o i-ésimo símbolo de i

$\mathcal{D}$ O **reverso** de uma palavra u é a palavra, denotada por u^R, que se obtém invertendo a ordem dos símbolos de u

$$u = u_1 u_2 \cdots u_n \quad \Rightarrow \quad u^R = u_n \cdots u_2 u_1$$

Operações sobre palavras (2)

$\mathcal{D}$ A **concatenação**, ou **produto**, das palavras u e v denota-se por $u.v$, ou simplesmente uv, e representa a justaposição de u e v, i.e., a palavra constituída pelos símbolos de u seguidos pelos símbolos de v.

- Propriedades da concatenação:
  - $|u.v| = |u| + |v|$
  - $u.(v.w) = (u.v).w = u.v.w$ (associatividade)
  - $u.\varepsilon = \varepsilon.u = u$ (elemento neutro)
  - em geral, $u.v \neq v.u$ (não comutatividade)

$\mathcal{D}$ A **potência** de ordem n, com $n \geq 0$, de uma palavra u denota-se por u^n e representa a concatenação de n réplicas de u, ou seja, $\underbrace{uu \cdots u}_{n\,\times}$.

- $u^0 = \varepsilon$

Operações sobre linguagens (1)

Reunião

- A **reunião** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cup L_2$ e é dada por

$$L_1 \cup L_2 = \{u \mid u \in L_1 \vee u \in L_2\}$$

Operações sobre linguagens (1)

Reunião

- A **reunião** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cup L_2$ e é dada por

$$L_1 \cup L_2 = \{u \mid u \in L_1 \vee u \in L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens

$L_a = \{u \mid u$ começa por $\mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u$ termina com $\mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a \cup L_b$?

Operações sobre linguagens (1)

Reunião

- A **reunião** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cup L_2$ e é dada por

$$L_1 \cup L_2 = \{u \mid u \in L_1 \vee u \in L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a \cup L_b$?

$\mathcal{R}$ $L = \{w_1 \mathtt{a} w_2 \mid w_1, w_2 \in A^* \wedge (w_1 = \varepsilon \vee w_2 = \varepsilon)\}$

Operações sobre linguagens (2)

Intersecção

- A **intersecção** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cap L_2$ e é dada por

$$L_1 \cap L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \in L_2\}$$

Operações sobre linguagens (2)

Intersecção

- A **intersecção** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cap L_2$ e é dada por

$$L_1 \cap L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \in L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a \cap L_b$?

Operações sobre linguagens (2)

Intersecção

- A **intersecção** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 \cap L_2$ e é dada por

$$L_1 \cap L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \in L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens

$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a \cap L_b$?

$\mathcal{R}$ $L = \{\mathtt{a}w\mathtt{a} \mid w \in A^*\} \cup \{\mathtt{a}\}$

Operações sobre linguagens (3)

Diferença

- A **diferença** entre duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 - L_2$ e é dada por

$$L_1 - L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \notin L_2\}$$

Operações sobre linguagens (3)

Diferença

- A **diferença** entre duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 - L_2$ e é dada por

$$L_1 - L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \notin L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens

$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a - L_b$?

Operações sobre linguagens (3)

Diferença

- A **diferença** entre duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1 - L_2$ e é dada por

$$L_1 - L_2 = \{u \mid u \in L_1 \wedge u \notin L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a - L_b$?

$\mathcal{R}$ $L = \{\mathtt{a}wx \mid w \in A^* \ \wedge \ x \in A \ \wedge \ x \neq \mathtt{a}\}$

Operações sobre linguagens (4)

Complementação

- A **complementação** da linguagem L_1 denota-se por $\overline{L_1}$ e é dada por

$$\overline{L_1} = A^* - L_1 = \{u \mid u \notin L_1\}$$

Operações sobre linguagens (4)

Complementação

- A **complementação** da linguagem L_1 denota-se por $\overline{L_1}$ e é dada por

$$\overline{L_1} = A^* - L_1 = \{u \mid u \notin L_1\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = \overline{L_a}$?

Operações sobre linguagens (4)

Complementação

- A **complementação** da linguagem L_1 denota-se por $\overline{L_1}$ e é dada por

$$\overline{L_1} = A^* - L_1 = \{u \mid u \notin L_1\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = \overline{L_a}$?

$\mathcal{R}$ $L = \{xw \mid w \in A^* \ \wedge \ x \in A \ \wedge \ x \neq \mathtt{a}\} \cup \{\varepsilon\}$

OPERAÇÕES SOBRE LINGUAGENS (5)

CONCATENAÇÃO

- A **concatenação** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1.L_2$ e é dada por

$$L_1.L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \land v \in L_2\}$$

OPERAÇÕES SOBRE LINGUAGENS (5)

CONCATENAÇÃO

- A **concatenação** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1.L_2$ e é dada por

$$L_1.L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$$

EXEMPLO

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens

$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a.L_b$?

Operações sobre linguagens (5)

Concatenação

- A **concatenação** de duas linguagens L_1 e L_2 denota-se por $L_1.L_2$ e é dada por

$$L_1.L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \land v \in L_2\}$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere as linguagens
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$L_b = \{u \mid u \text{ termina com } \mathtt{a}\} = \{w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = L_a.L_b$?

$\mathcal{R}$ $L = \{\mathtt{a}w\mathtt{a} \mid w \in A^*\}$

Operações sobre linguagens (6)

Potenciação

- A **potência** de ordem n da linguagem L denota-se por L^n e é definida indutivamente por

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{n+1} = L^n.L$$

Operações sobre linguagens (6)

Potenciação

- A **potência** de ordem n da linguagem L denota-se por L^n e é definida indutivamente por

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{n+1} = L^n.L$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = {L_a}^2$?

Operações sobre linguagens (6)

Potenciação

- A **potência** de ordem n da linguagem L denota-se por L^n e é definida indutivamente por

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{n+1} = L^n.L$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = {L_a}^2$?

$\mathcal{R}$ $L = \{\mathtt{a}w_1\mathtt{a}w_2 \mid w_1, w_2 \in A^*\}$

Operações sobre linguagens (7)

Fecho de Kleene

- O **fecho de Kleene** da linguagem L denota-se por L^* e é dado por

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

OPERAÇÕES SOBRE LINGUAGENS (7)

FECHO DE KLEENE

- O **fecho de Kleene** da linguagem L denota-se por L^* e é dado por

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

EXEMPLO

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = {L_a}^*$?

Operações sobre linguagens (7)

Fecho de Kleene

- O **fecho de Kleene** da linguagem L denota-se por L^* e é dado por

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Exemplo

Sobre o alfabeto $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ considere a linguagem
$L_a = \{u \mid u \text{ começa por } \mathtt{a}\} = \{\mathtt{a}w \mid w \in A^*\}$

$\mathcal{Q}$ $L = {L_a}^*$?

$\mathcal{R}$ $L = L_a \cup \{\varepsilon\}$

Note que para $n > 1$ $\quad {L_a}^n \subset L_a$

Propriedades

- **Leis de DeMorgan**:

$$L_1 - (L_2 \cup L_3) = (L_1 - L_2) \cap (L_1 - L_3)$$

$$L_1 - (L_2 \cap L_3) = (L_1 - L_2) \cup (L_1 - L_3)$$

- Propriedades da reunião:

$$L_1 \cup (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \text{ (associativa)}$$

$$L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1 \qquad \text{(comutativa)}$$

- Propriedades da intersecção:

$$L_1 \cap (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cap L_2) \cap L_3 = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \text{ (associativa)}$$

$$L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1 \qquad \text{(comutativa)}$$

Operações sobre linguagens (9)

Propriedades (cont.)

- Propriedades da concatenação:

  $L_1.(L_2.L_3) = (L_1.L_2).L_3 = L_1.L_2.L_3$ (associativa)

  $L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$ (existência de elemento neutro)

  $L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$ (existência de elemento absorvente)

  $L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3$ (distributiva em relação à reunião)

  $L_1.(L_2 \cap L_3) = L_1.L_2 \cap L_1.L_3$ (distributiva em relação à intersecção)

Operações sobre linguagens (10)

Notas adicionais

- Nas operações binárias não é necessário que as duas linguagens estejam definidas sobre o mesmo alfabeto

$\mathcal{Q}$ Sejam L_a e L_b duas linguagens definidas sobre os alfabetos A_a e A_b, respectivamente. Qual é o alfabeto A da linguagem

$$L = L_a \; op \; L_b?$$

$\mathcal{R}$

$$A = A_a \cup A_b$$

Introdução às gramáticas

Exemplo (1) de gramática

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$S \to \mathtt{b}$$
$$S \to \mathtt{a}\ S$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

EXEMPLO (1) DE GRAMÁTICA

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$\begin{array}{l} S \to \mathtt{b} \\ S \to \mathtt{a}\ S \end{array}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \ : \ n \geq 0\}$$

O conjunto de regras é equivalente à expressão regular $\mathtt{a}^*\mathtt{b}$

EXEMPLO (2) DE GRAMÁTICA

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$
\begin{array}{l}
S \rightarrow \mathtt{a}\ S \\
S \rightarrow \mathtt{b}\ S \\
S \rightarrow \mathtt{c}\ S \\
S \rightarrow \mathtt{a}\ \mathtt{b}\ \mathtt{a}\ X \\
X \rightarrow \mathtt{a}\ X \\
X \rightarrow \mathtt{b}\ X \\
X \rightarrow \mathtt{c}\ X \\
X \rightarrow \varepsilon
\end{array}
$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

EXEMPLO (2) DE GRAMÁTICA

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow \mathtt{a}\ S\\
&S \rightarrow \mathtt{b}\ S\\
&S \rightarrow \mathtt{c}\ S\\
&S \rightarrow \mathtt{a}\ \mathtt{b}\ \mathtt{a}\ X\\
&X \rightarrow \mathtt{a}\ X\\
&X \rightarrow \mathtt{b}\ X\\
&X \rightarrow \mathtt{c}\ X\\
&X \rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\omega_1 \mathtt{aba} \omega_2 \ : \ \omega_1, \omega_2 \in T^*\}$$

Introdução às gramáticas

Exemplo (3) de gramática

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$\begin{array}{l} S \to X\ \mathtt{a}\ \mathtt{b}\ \mathtt{a}\ X \\ X \to \mathtt{a}\ X \\ X \to \mathtt{b}\ X \\ X \to \mathtt{c}\ X \\ X \to \varepsilon \end{array}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

Exemplo (3) de gramática

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow X \ \mathtt{a} \ \mathtt{b} \ \mathtt{a} \ X \\
X &\rightarrow \mathtt{a} \ X \\
X &\rightarrow \mathtt{b} \ X \\
X &\rightarrow \mathtt{c} \ X \\
X &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\omega_1 \mathtt{aba} \omega_2 \ : \ \omega_1, \omega_2 \in T^*\}$$

Exemplo (4) de Introdução às gramáticas

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathtt{c} \\ S &\rightarrow \mathtt{a}\ S\ \mathtt{a} \\ S &\rightarrow \mathtt{b}\ S\ \mathtt{b} \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

EXEMPLO (4) DE INTRODUÇÃO ÀS GRAMÁTICAS

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{c} \\ S &\to \mathtt{a}\ S\ \mathtt{a} \\ S &\to \mathtt{b}\ S\ \mathtt{b} \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\omega \mathtt{c} \omega^R \,:\, \omega \in (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})^*\}$$

Exemplo (5) de gramática

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$S \to \mathtt{a}\ \mathtt{b}$$
$$S \to \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

Exemplo (5) de gramática

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$S \to \mathtt{a}\ \mathtt{b}$$
$$S \to \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\ :\ n > 0\}$$

Exemplo (6) de Introdução às gramáticas

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$
\begin{array}{l}
S \to \varepsilon \\
S \to \mathtt{a}\ S\ B\ \mathtt{c} \\
\mathtt{c}\ B \to B\ \mathtt{c} \\
\mathtt{a}\ B \to \mathtt{a}\ \mathtt{b} \\
\mathtt{b}\ B \to \mathtt{b}\ \mathtt{b}
\end{array}
$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

Exemplo (6) de Introdução às gramáticas

Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, o conjunto de regras (de rescrita) seguinte

$$\begin{array}{l} S \rightarrow \varepsilon \\ S \rightarrow \mathtt{a}\ S\ B\ \mathtt{c} \\ \mathtt{c}\ B \rightarrow B\ \mathtt{c} \\ \mathtt{a}\ B \rightarrow \mathtt{a}\ \mathtt{b} \\ \mathtt{b}\ B \rightarrow \mathtt{b}\ \mathtt{b} \end{array}$$

$\mathcal{Q}$ Que palavras apenas constituídas por símbolos do alfabeto T se podem gerar a partir de S?

$\mathcal{R}$

$$L = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n \mathtt{c}^n \ :\ n \geq 0\}$$

Introdução às gramáticas

Definição de gramática

Uma gramática é um quádruplo $G = (T, N, P, S)$, onde

- T é um conjunto finito não vazio de símbolos terminais;
- N, sendo $N \cap T = \emptyset$, é um conjunto finito não vazio de símbolos não terminais;
- P é um conjunto de produções (ou regras de rescrita), cada uma da forma $\alpha \rightarrow \beta$;
- $S \in N$ é o símbolo inicial.

- $\alpha \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$
- $\beta \in (N \cup T)^*$
- As restrições a α e β definem uma taxonomia das linguagens (gramáticas)

INTRODUÇÃO ÀS GRAMÁTICAS

- $\alpha \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$
- $\beta \in (N \cup T)^*$
- As restrições a α e β definem uma taxonomia das linguagens (gramáticas) — hierarquia de Chomsky

Categoria	**Restrição**
Tipo-0	sem restrições
Tipo-1 (Dependentes do contexto)	$\|\alpha\| \geq \|\beta\|$
Tipo-2 (Independentes do contexto)	$\alpha \in N \ \wedge \ \beta \in (T \cup N)^*$
Tipo-3 (Regulares)	$\alpha \in N \ \wedge \ \beta \in T^* \ \cup \ T^* N$
Tipo-3 (Regulares)	$\alpha \in N \ \wedge \ \beta \in T^* \ \cup \ N \ T^*$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, a gramática seguinte

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \mathtt{a}\ S \\
S &\rightarrow \mathtt{a}\ X \\
X &\rightarrow \mathtt{a}\ X\ \mathtt{b} \\
X &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

Identifique a linguagem descrita pela gramatica

EXERCÍCIOS SOBRE GRAMÁTICAS

$\mathcal{Q}$ Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, a gramática seguinte

$$\begin{array}{l} S \rightarrow \mathtt{a}\ S \\ S \rightarrow \mathtt{a}\ X \\ X \rightarrow \mathtt{a}\ X\ \mathtt{b} \\ X \rightarrow \varepsilon \end{array}$$

Identifique a linguagem descrita pela gramatica

$\mathcal{R}$

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \ :\ n > m\}$$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, defina uma gramática que representa a linguagem seguinte

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \ : \ n \geq m\}$$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, defina uma gramática que representa a linguagem seguinte

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \ : \ n \geq m\}$$

$\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{a}\ S \\ S &\to X \\ X &\to \mathtt{a}\ X\ \mathtt{b} \\ X &\to \varepsilon \end{aligned}$$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, defina uma gramática que representa a linguagem seguinte

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \; : \; n \leq m\}$$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Sobre o alfabeto $T = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$, defina uma gramática que representa a linguagem seguinte

$$L = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^m \; : \; n \leq m\}$$

$\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
&S \rightarrow \texttt{a} \;\; S \;\; \texttt{b} \\
&S \rightarrow X \\
&X \rightarrow \texttt{b} \;\; X \\
&X \rightarrow \varepsilon
\end{aligned}$$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, a gramática G definida a seguir

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{c}\ X \\ S &\to \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}\ X \\ X &\to \varepsilon \\ X &\to \mathtt{c}\ X \\ X &\to \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}\ X \end{aligned}$$

(A) Identifique $L_1 = \{u \in L(G)\ :\ |u| \leq 4\}$

Exercícios sobre gramáticas

$\mathcal{Q}$ Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, a gramática G definida a seguir

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow \mathtt{c}\ X\\
&S \rightarrow \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}\ X\\
&X \rightarrow \varepsilon\\
&X \rightarrow \mathtt{c}\ X\\
&X \rightarrow \mathtt{a}\ S\ \mathtt{b}\ X
\end{aligned}
$$

(A) Identifique $L_1 = \{u \in L(G)\ :\ |u| \leq 4\}$

(B) Identifique a linguagem descrita pela gramatica