UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2015/2016) **PL 02**

Palavras chave: Variáveis Aleatórias: função de distribuição acumulada, função de probabilidade de massa e função densidade de probabilidade, Distribuições (Binomial, Poisson, Uniforme, Normal).

Responda às seguintes questões:

1. Considere a variável aleatória X correspondente à face que fica visível no lançamento de 1 dado:

   (a) Efectue em Matlab/Octave um gráfico representativo da função de distribuição de X. Não se esqueça de ter os valores adequados no eixo dos xx;

   (b) Num segundo gráfico na mesma figura, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada.

2. Uma caixa contém 90 notas de 5 Euros, 9 de 50 e 1 de 100

   a. Descreva o espaço de amostragem da experiência, retirar uma nota da caixa, e as probabilidades dos acontecimentos elementares.

   b. Considere a variável aleatória X como sendo o valor de uma nota retirada à sorte da caixa acima descrita. Descreva o espaço de amostragem de X e determine as probabilidades dos vários valores de X.

   c. Determine a função de distribuição (fpm) de X e efectue uma representação gráfica em Matlab/Octave.

3. Considere 4 lançamentos de uma moeda equilibrada. Seja X a variável aleatória representativa do número de coroas observados nos 4 lançamentos.

   (a) Calcule a distribuição de probabilidade (fpm) da variável aleatória X.
   (b) Calcule a média e a variância de X.
   (c) Identifique a distribuição de probabilidades e escreva a expressão da função de probabilidade.
   (d) Substitua os valores admissíveis da v.a. X na função acima e compare com os cálculos efectuados no segundo ponto desta questão.
   (e) Com base na função de probabilidade desta distribuição, calcule:
      i. A probabilidade de obter pelo menos 2 coroas.
      ii. A probabilidade de obter até 1 coroa.
      iii. A probabilidade de obter entre 1 e 3 coroas.

4. Construa o histograma representativo da distribuição de probabilidades de uma amostra de 5 peças, tomada aleatoriamente, de um processo de produção sabendo que o mesmo produz 30% de peças defeituosas.

   (a) Calcule a probabilidade de, no máximo, 2 das peças dessa amostra serem defeituosas.

5. Suponha que um motor de um avião pode falhar com probabilidade p e que as falhas são independentes entre motores. Suponha ainda que o avião despenha-se se mais de metade dos motores falharem. Utilize a distribuição que considera adequada.

   O que preferiria um avião com dois ou 4 motores?

   Sugestão: Tem pelo menos 2 alternativas: (1) obter expressões para a probabilidade de cada tipo de avião se despenhar em função de p e usar o quociente entre ambas para responder à questão, (2) efectuar os cálculos para um conjunto de valores concretos de p (ex: `p=logspace(1/1000,1/2,100)`) e usar um gráfico mostrando simultaneamente as probabilidades de cada tipo de avião se despenhar.

6. A distribuição de Poisson é uma forma limite da distribuição binomial (quando $n \to \infty$, $p \to 0$ e np permanece constante) e portanto pode ser usada para aproximar e simplificar os cálculos envolvidos com a binomial numa situação dessas.

   Num processo industrial de fabrico de chips, alguns aprecem defeituosos tornando-os inapropriados para comercialização. É sabido que em média por cada mil chips há um defeituoso. Determine a probabilidade de numa amostra de 8000 aparecerem 7 defeituosos. Compare os resultados usando a distribuição correcta e a aproximação de Poisson.

   Lei de Poisson: $p_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$

7. É conhecido que o número de mensagens que chega a um computador por segundo se comporta de acordo com a lei de Poisson. Suponha que o número de mensagens que chega a um computador segue uma lei de Poisson com média 15.

   a. Calcule a probabilidade de que num segundo não se receba nenhuma mensagem.

   b. Calcule a probabilidade de que mais de 10 mensagens cheguem ao computador no período de um segundo.

8. Verifique se a função f(x) = (x+5)/30 pode representar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que assume valores 1, 2, 3 e 4.

9. Assumindo que o número de erros tipográficos numa página de um livro tem uma distribuição de Poisson com $\lambda = 1$, calcule a probabilidade de que exista pelo menos um erro numa determinada página.

10. Sendo a v.a. X contínua e uniformemente distriibuída em (0,10), calcule as probabilidades de:

    (a) $X < 3$

    (b) $X > 7$

    (c) $1 < X < 6$

    Comprove os resultados através de simulação.

11. Sendo a v.a. X, representativa das classificações dos alunos de um determinado curso, contínua e com distribuição normal (média 14 e desvio padrão 2), obtenha através de simulação as probabilidades de:

    (a) os alunos terem classificações entre 12 e 16;

    (b) os alunos terem classificações entre 10 e 18;

    (c) a probabilidade de um aluno passar (ter classificação maior ou igual a 10).

    Sugestão: Utilize a função `randn()`.

AT, 25 Setembro 2015