MPEI 2015-2016

Aula 16 – Cadeias de Markov (continuação)

5/6 Novembro 2015

Assuntos principais da aula anterior

- Noção de processo estocástico
- Cadeias de Markov
- Propriedade de Markov
- Matriz de transição T

- Representação gráfica

Demos

- **Wolfram:**
  - **Finite-State, Discrete-Time Markov Chains**
    - **http://demonstrations.wolfram.com/ATwoStateDiscreteTimeMarkovChain/**
    - **http://demonstrations.wolfram.com/FiniteStateDiscreteTimeMarkovChains/**

Estado da cadeia num determinado instante

- O **estado** de uma cadeia de Markov com n estados no tempo (time step) k é dado pelo vector estado

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p_1}^{(\boldsymbol{k})} \\ \boldsymbol{p_2}^{(\boldsymbol{k})} \\ \\ \boldsymbol{p_n}^{(\boldsymbol{k})} \end{pmatrix}$$

- Onde ${p_j}^{(k)}$ é a probabilidade de o sistema estar no estado j no tempo k

Vector estado/probabilidade

- Considerando o exemplo 1:
- Suponhamos que após 10 aulas a probabilidade de faltar e não faltar são iguais
- Então o vector representativo do estado (state vector) seria:

$$\mathbf{x}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

- Este vector também se designa por **vector de probabilidade**
  - Todos elementos não-negativos
  - Soma dos elementos igual a um

Exemplo 2

- Supondo que começávamos com 20 estudantes no grupo A e 10 estudantes nos outros dois grupos, o vector relativo ao estado inicial seria

- $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$

Vector estado após uma transição

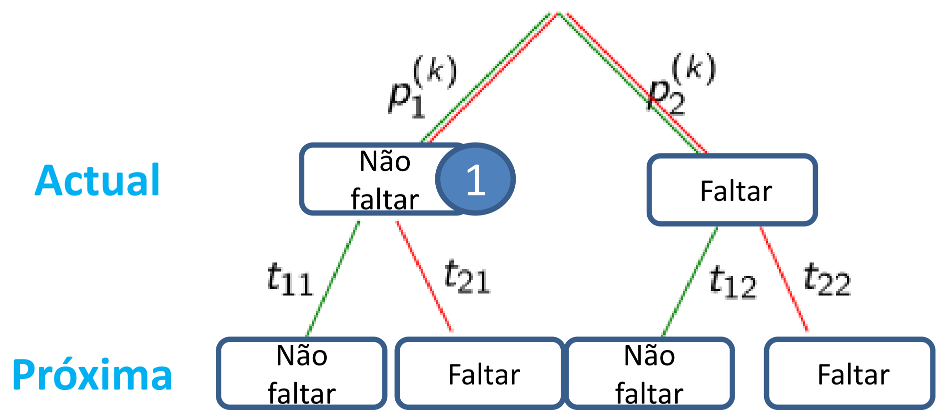
- Como obter $\mathbf{x}^{(k+1)}$?

- O vector de estado $\mathbf{x}^{(k+1)}$ no período de observação $k+1$ pode ser determinado a partir do vector $\mathbf{x}^{(k)}$ através de:
- $\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)}$

- Que resulta da probabilidade condicional:
- $P(\,estado\ j\ em\ t = k+1)$
- $= \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} P(transição\ do\ estado\ i\ para\ o\ j) P(estado\ \mathrm{i}\ em\ t = k)$

Exemplo de aplicação – Exemplo 1

- De que forma depende a probabilidade de ir à aula seguinte da probabilidade de estar na aula actual ?



$$p_1^{(k+1)} = t_{11}p_1^{(k)} + t_{12}p_2^{(k)}$$

$$p_2^{(k+1)} = t_{21}p_1^{(k)} + t_{22}p_2^{(k)}$$

Estado após múltiplas transições

- Ataquemos agora problemas do “tipo”:
  - Qual a probabilidade de transição entre dois estados em n observações/transições ?

- Exemplo 1:
  - Qual a probabilidade dos que estiveram na aula de uma quarta virem à aula na quarta seguinte
    - Assumindo as probabilidades do nosso exemplo !
    - Tendo em conta que temos aulas Quarta e Quinta

Equações de Chapman-Kolmogorov

- Definindo a transição em n passos ${p_{ji}}^{n}$ como a probabilidade de **um processo no estado $\boldsymbol{i}$ se encontrar no estado *j* após n transições** adicionais. Ou seja:
- ${p_{ji}}^{n} = P(X_{n+k} = \boldsymbol{j} | X_k = \boldsymbol{i}),\ n \geq 0, i, j \geq 0$
- Obviamente ${p_{ji}}^{1} = p_{ji}$

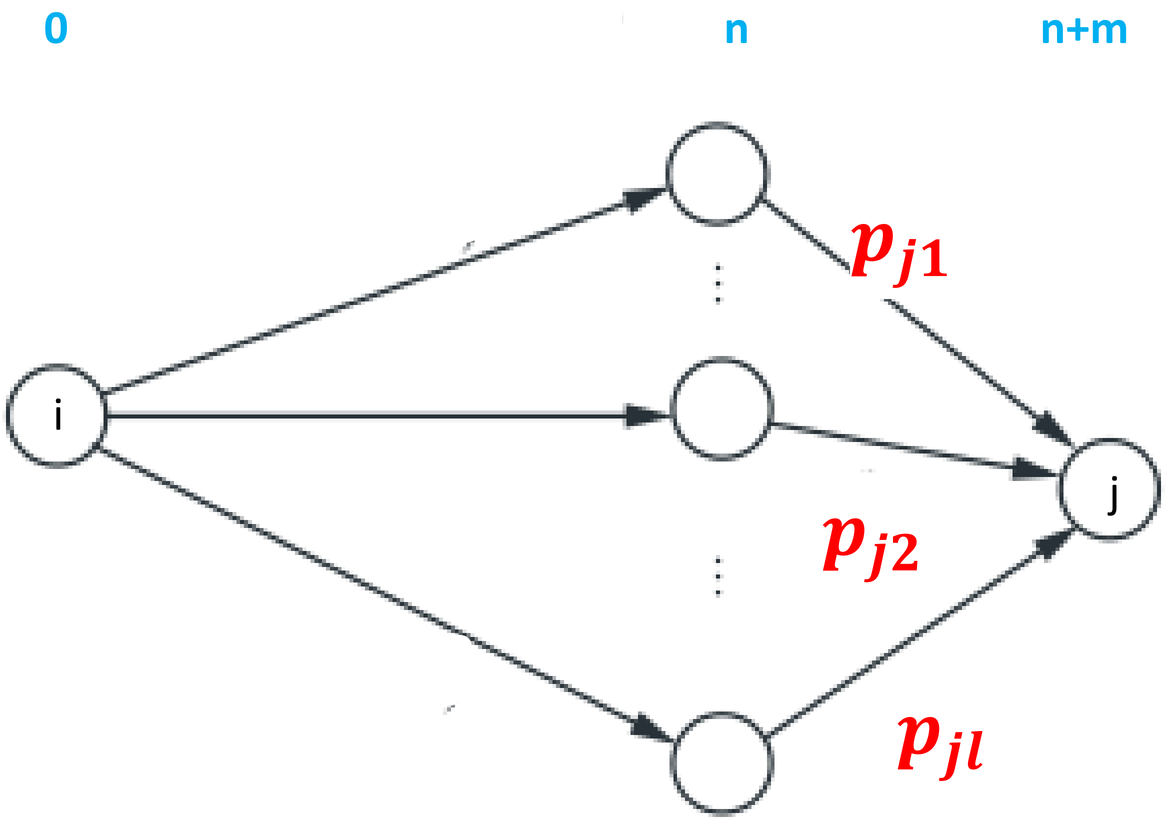
- As **equações de Chapman-Kolmogorov** permitem calcular estas probabilidades

$$ {p_{ji}}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} {p_{ki}}^{n}\ {p_{jk}}^{m} \quad \forall n, m \geq 0, \forall i, j $$

Interpretação

- É fácil de compreender se tivermos em conta que ${p_{ki}}^n {p_{jk}}^m$ representa a probabilidade de:
  - Começando em i o processo ir para o estado j em $n+m$ transições..
  - Através de um caminho que o leva ao estado k na transição n
- Logo, somando para todos os estados intermédios k obtém-se a probabilidade de estar no estado j ao fim de $n+m$ transições

Interpretação



“Demonstração” Eqs. Chapman-Kolmogorov

- $p_{ji}{}^{n+m} = P(X_{n+m} = j | X_0 = i)$

- $= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i)$

- $= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j | X_n = k)\, P(X_n = k | X_0 = i)$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \quad p_{jk}{}^{m} p_{ki}{}^{n}$

Em termos de matrizes

- Se usarmos $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ para representar a matriz com as probabilidades de n transições, a equação anterior transforma-se em:

$$\mathbf{T}^{(n+m)} = \mathbf{T}^{(n)} \, . \, \mathbf{T}^{(m)}$$

Em que o "." significa multiplicação de matrizes

- Desta equação obtém-se facilmente:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(1+1)} = \mathbf{T} \, . \, \mathbf{T} = \mathbf{T}^{2}$$

- E por indução $\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(n-1+1)} = \mathbf{T}^{n-1} \, . \, \mathbf{T} = \mathbf{T}^{n}$
  - Ou seja, a matriz de transição relativa a n transições pode ser obtida multiplicando $\mathbf{T}$ por si própria n vezes

Aplicação ao Exemplo 1

- Voltando a uma questão colocada no início da aula …

- *Se vieram à aula esta quarta, qual a probabilidade de virem na aula de QUARTA da próxima semana ?*

- Solução:
- Temos $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, significando "não faltar"
- Pretendemos $\mathbf{x}^{(2)}$, 0= hoje

…

- $\mathbf{x}^{(2)} = \mathrm{T}\mathbf{x}^{(1)} = T\left(T\mathbf{x}^{(0)}\right) = T^2\mathbf{x}^{(0)}$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

- Ou seja 73% de probabilidade de virem na próxima Quarta

Terminologia

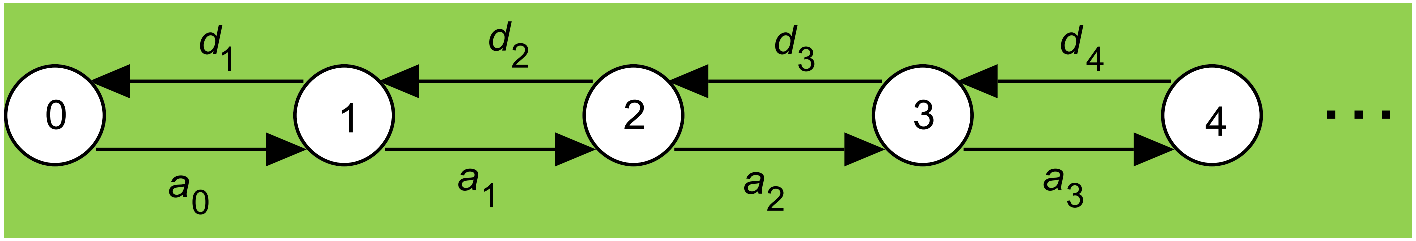
Tipos de estados

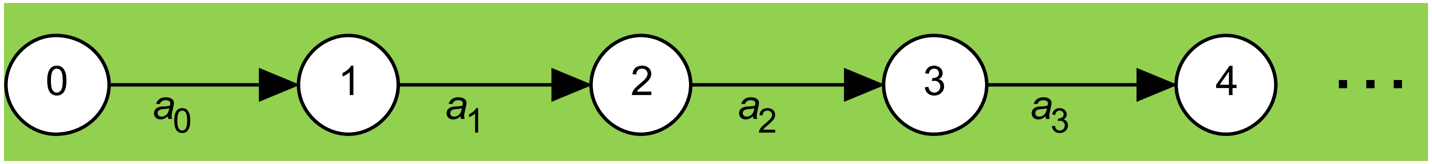
Tipos de matrizes de transição

…

Acessibilidade de um estado

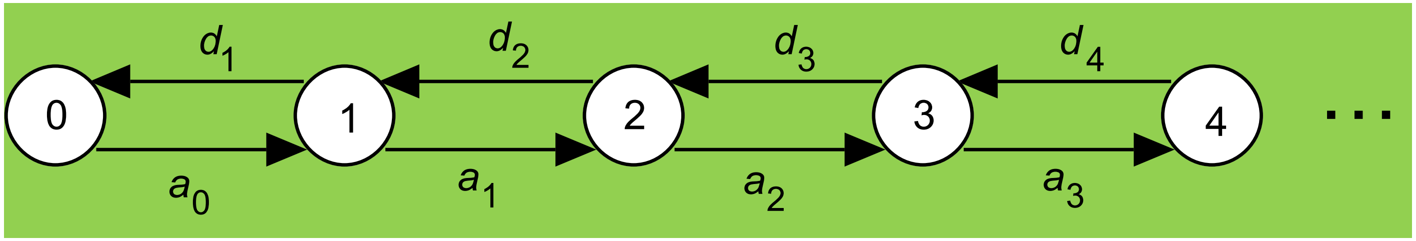
- Possibilidade de ir do estado i para o estado j (existe caminho na cadeia de i para j).





Estados comunicantes

- Dois estados comunicam se ambos são acessíveis a partir do outro.



- Um sistema é não redutível (irreducible) se todos os estados comunicam

- **Classe**: conjunto de estados que comunicam entre si

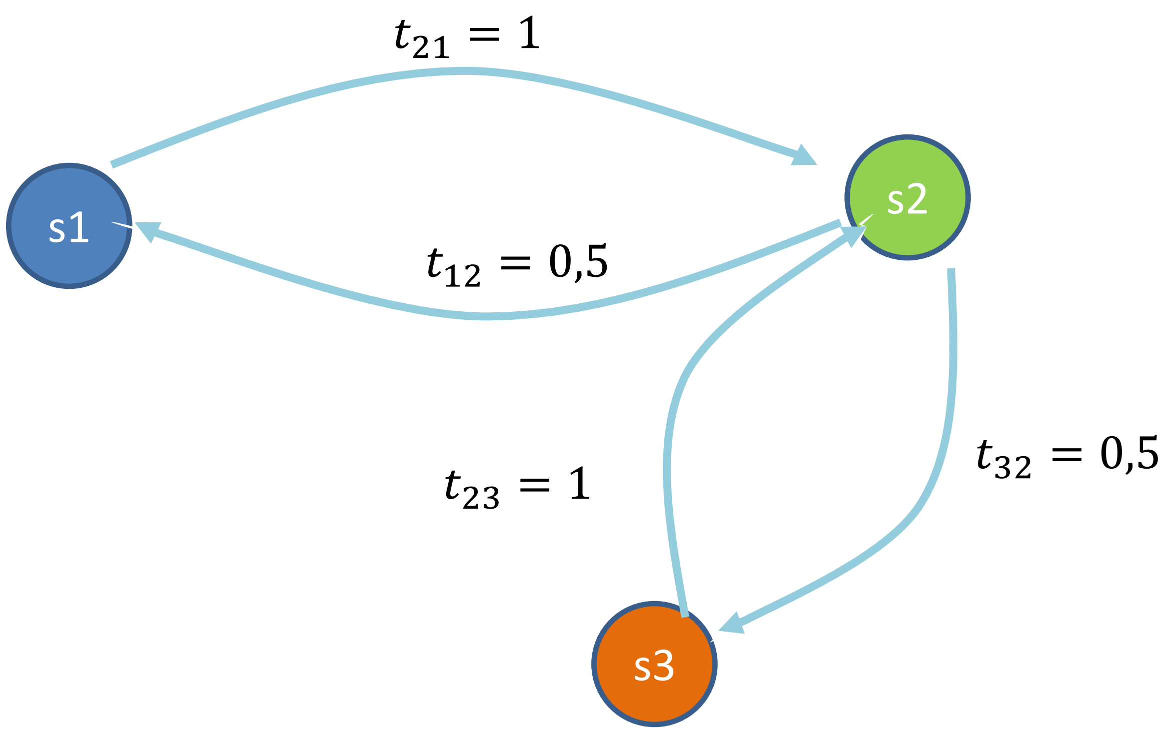
Estado recorrente

- Um estado s_i é um **estado recorrente** se o sistema voltará sempre a ele depois de sair dele.

- De uma forma mais formal: s_i é um **estado recorrente** se, para todos os estados s_j, a existência de um inteiro r_j tal que $p_{ji}^{(r_j)} > 0$ implica que existe um inteiro r_i tal que $p_{ij}^{(r_i)} > 0$

- Um estado não recorrente é transiente

Estados recorrentes ?



- Os 3 estados são recorrentes

Estado transiente

- Um estado é transiente se existe um outro estado qualquer para o qual o processo de Markov pode transitar, mas do qual o processo não pode retornar

- Ou seja, se existe um estado s_j e um inteiro l tal que ${p_{ji}}^{(l)} \neq 0$ e ${p_{ij}}^{(r)} = 0$ para $r = 0,1,2, \ldots$

- A probabilidade destes estados tende para zero quando n tende para infinito
  - Pois apenas são visitados um número finito de vezes

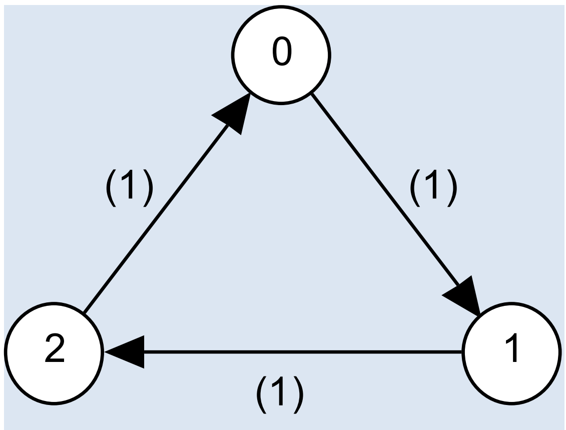
Estado periódico

- Um estado é **periódico** se apenas se pode regressar a ele após um número fixo de transições superior a 1 (ou múltiplos desse número).

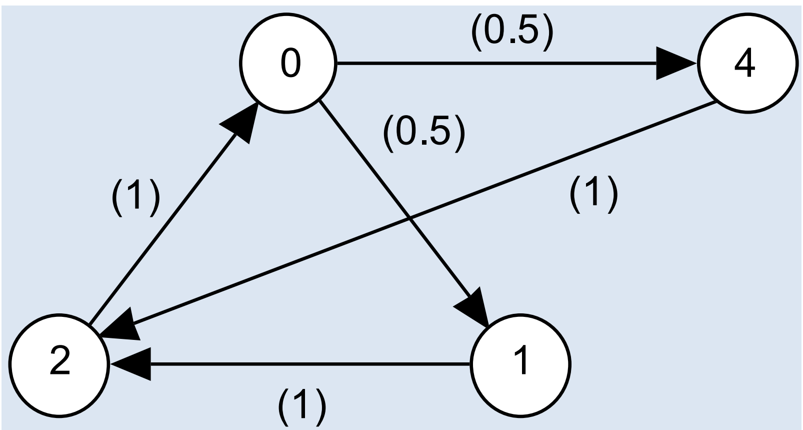
- Formalizando:
  - Um estado recorrente s_i diz-se **periódico** se existe um inteiro $c > 0$ tal que ${p_{ii}}^{(r)}$ é igual a zero para todos os valores de r excepto $r = c, 2c, 3c, \ldots$

Estado periódico

•



Todos estados visitados em múltiplos de 3 iterações

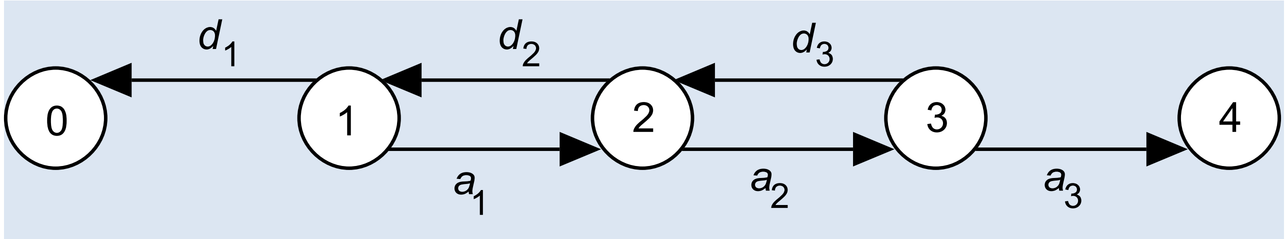


Todos estados visitados em múltiplos de 3 iterações

- Um estado não periódico é **aperiódico**
  - Como era de esperar!

Estado absorvente

- Um estado **absorvente** é um estado do qual não é possível sair (ou seja transitar para outro estado)
- Uma cadeia é absorvente se tiver pelo menos um estado absorvente

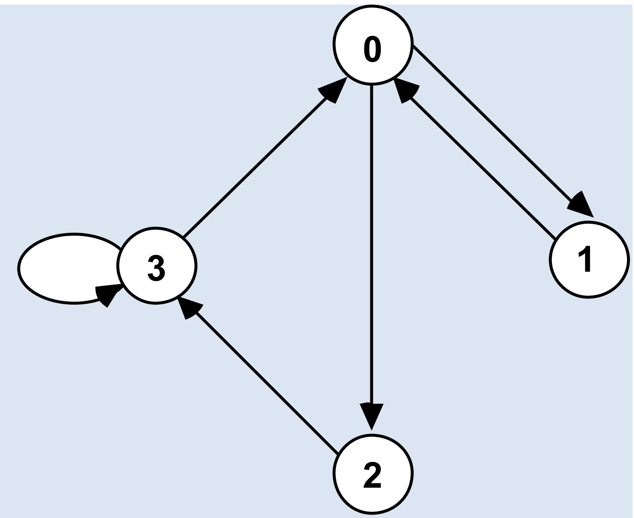


- Os estados 0 e 4 são absorventes

Aplicação dos conceitos

- Exemplo:

$$
\begin{array}{c c}
\text{State} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 & X \end{bmatrix}
\end{array}
$$



- Todos os pares de estados comunicam, formando um única classe recorrente
  - Os estados são aperiódicos
- Em consequência o processo é aperiódico e irredutível

O que acontece ao fim de muitas transições ?

Potências de T quando $n \to \infty$

- Exemplo 2:
- Vejamos o comportamento de T^n ao aumentar n…

$$T = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.25 & 0. \\ 0.333333 & 0.5 & 0.5 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0.194444 & 0.208333 & 0.125 \\ 0.444444 & 0.458333 & 0.5 \\ 0.361111 & 0.333333 & 0.375 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0.175926 & 0.184028 & 0.166667 \\ 0.467593 & 0.465278 & 0.479167 \\ 0.356481 & 0.350694 & 0.354167 \end{pmatrix}$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0.17554 & 0.177662 & 0.175347 \\ 0.470679 & 0.469329 & 0.472222 \\ 0.353781 & 0.353009 & 0.352431 \end{pmatrix}$$

$$T^5 = \begin{pmatrix} 0.176183 & 0.176553 & 0.176505 \\ 0.470743 & 0.47039 & 0.470775 \\ 0.353074 & 0.353057 & 0.35272 \end{pmatrix}$$

$$T^6 = \begin{pmatrix} 0.176414 & 0.176448 & 0.176529 \\ 0.470636 & 0.470575 & 0.470583 \\ 0.35295 & 0.352977 & 0.352889 \end{pmatrix}$$

Continuando... (em Matlab)

% n =10

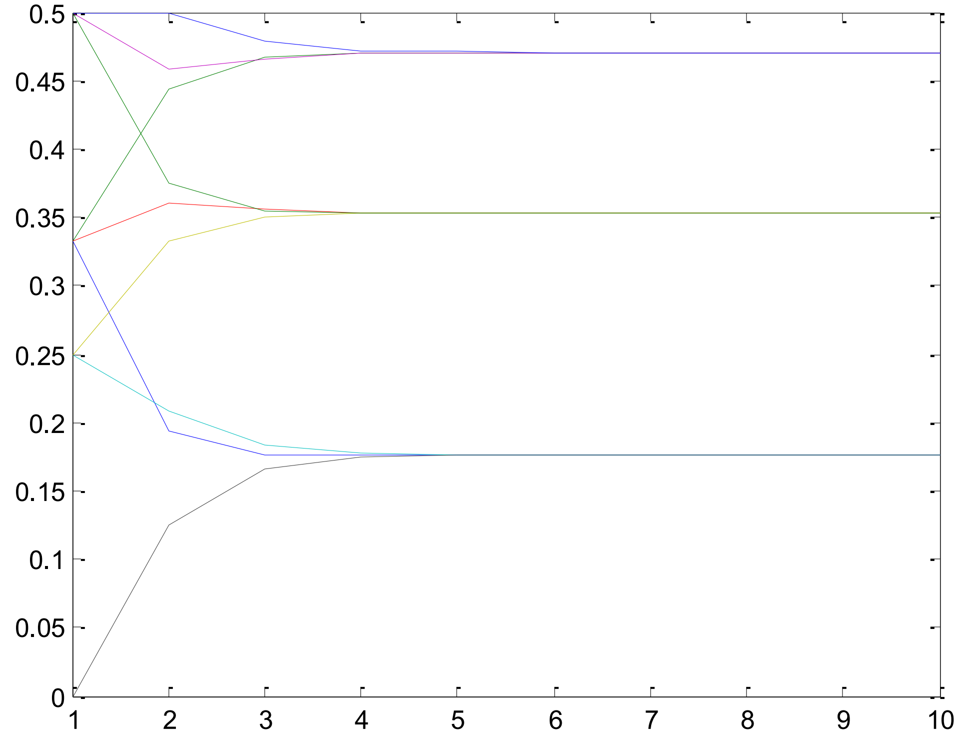
Tn =

0.1765	0.1765	0.1765
0.4706	0.4706	0.4706
0.3529	0.3529	0.3529

% n=100

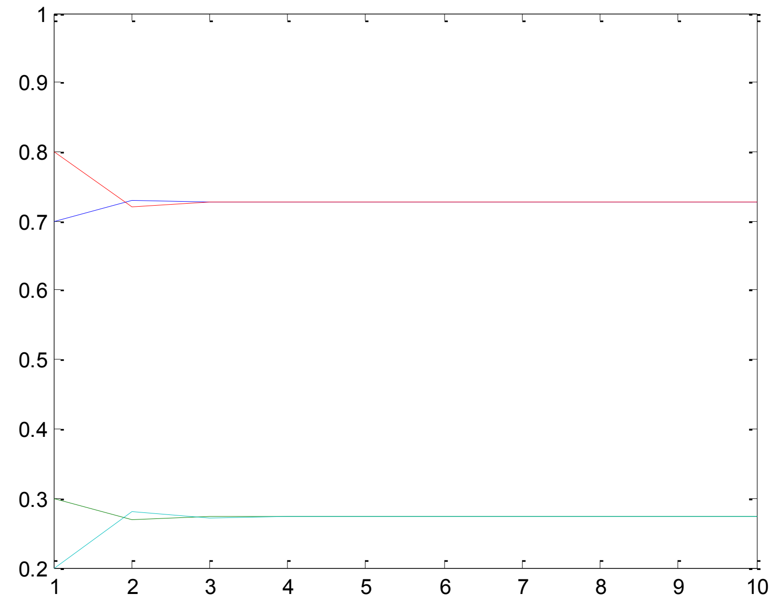
Tn =

0.1765	0.1765	0.1765
0.4706	0.4706	0.4706
0.3529	0.3529	0.3529



Exemplo 1

```
Tn=eye(2)
pij=[];
for n=1:10
    Tn=Tn*T;
    pij=[ pij  Tn(:)]
    plot(pij')
    drawnow
end
Tn
```




```
Tn =

    0.7273    0.7273
    0.2727    0.2727
```

Questões ?

- Converge ?
- Para quê ?

Equilíbrio

- As cadeias dos nossos exemplos atingem um equilíbrio.
- Quando isso acontece a probabilidade de qualquer estado torna-se constante independentemente do passo (step) e das condições iniciais
- Para analisar essa situação é necessário considerar um certo tipo de cadeias de Markov…

Matriz/ Processo regular

- A matriz de transição (ou o processo de Markov correspondente) é **regular** se alguma potência da matriz tem todos os valores não-nulos.
  - Existe uma probabilidade de mudar de qualquer estado para qualquer estado

- Qualquer matriz de transição sem elementos nulos é uma matriz regular.
- No entanto, uma matriz contendo elementos nulos pode ser regular.
  - Por exemplo: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$

…

- No caso de matrizes com elementos nulos, pode verificar-se se é regular substituindo os elementos não-nulos por “X” e calculando potências sucessivas

- No nosso exemplo:
- $T = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & 0 \end{bmatrix}, T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & \mathrm{X} \end{bmatrix} \ldots, T^8 = \begin{bmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \end{bmatrix}$

Cadeia **ergódica**

- Uma cadeia de Markov diz-se ergódica se é possível efectuar transições de qualquer estado para qualquer outro estado

- Em consequência, uma cadeia regular é também ergódica

Cadeia ergódica

- No entanto, nem todas as cadeias ergódicas são regulares
  - Exemplo: se de um determinado estado se pode transitar para alguns estados apenas num número par de transições e para outros num número ímpar de transições, então todas as potências da matriz de transição terão elementos nulos

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

...

- Potências pares

```
>> T^31

ans =

         0    1.0000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    1.0000         0

>> T^301

ans =

         0    1.0000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    1.0000         0
```

- Potências ímpares

```
>> T^5

ans =

         0    1.0000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    1.0000         0

>> T^51

ans =

         0    1.0000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    1.0000         0
```

$$\lim_{n\to\infty} T^n$$

- Se T é a matriz de transição de um processo de Markov regular então:
- $\lim_{n\to\infty} T^n$ é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_N & u_N & \ldots & u_N \end{bmatrix}$$

Com todas as colunas idênticas

- Cada coluna **u** é um vector probabilidade

Vector estado estacionário (steady-stade vector)

- Sendo T uma matriz de transição regular e A e $\mathbf{u}$ o resultado anterior, demonstra-se que:

(a) Para qualquer vector de probabilidade $\mathbf{x}$,
$\boldsymbol{T^n}\,\mathbf{x} \;\rightarrow \mathbf{u}$ quando $n \rightarrow \infty$

– Sendo $\mathbf{u}$ o vector estado estacionário (**steady-state vector**)

(b) $\mathbf{u}$ é o único vector de probabilidade que satisfaz a equação matricial $\mathbf{Tu} = \mathbf{u}$

Cálculo do vector estado estacionário

- Sabemos que o vector correspondente ao estado estacionário é única.
- Usamos a equação que ele satisfaz para o calcular: $\mathbf{Tu} = \mathbf{u}$

- Ou, na forma matricial, $(\mathbf{T} - \mathbf{I})\mathbf{u} = 0$

Exemplo 1 (aulas)

- $\mathbf{Tu} = \mathbf{u}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{0,7} & \mathbf{0,8} \\ \mathbf{0,3} & \mathbf{0,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{bmatrix}$
- $\begin{cases} \frac{7}{10} u_1 + \frac{8}{10} u_2 = u_1 \\ \frac{3}{10} u_1 + \frac{2}{10} u_2 = u_2 \\ u_1 + u_2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-3}{10} u_1 + \frac{8}{10} u_2 = 0 \\ \frac{3}{10} u_1 + \frac{-8}{10} u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 1 \end{cases}$
- …

Em Matlab

Uma possível solução:

```
% matriz de transição
T=[7 8; 3 2]/10
% (T-I)u aumentado com
u1+u2
M=[T-eye(2);
  ones(1,2)]
%
x=[0 0 1]'
% resolver para obter u
u=M\x
```

Resultado:

```
 0.7273
 0.2727
```

Ou seja aprox. 72 % de probabilidade de não faltarem

...

- Pode também ser resolvido usando uma matriz aumentada e a função **rref**()

```
%Matlab
C= [M   x]
rref(C)
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3/10 & 8/10 & 0 \\ 3/10 & -8/10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 8/11 \\ 0 & 1 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Mais informação: https://www.math.ucdavis.edu/~daddel/Math22al_S02/LABS/LAB2/lab2_w01/node9.html

Exemplo 2

- Aplicando a última técnica ao nosso exemplo 2 (grupos) teremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/17 \\ 0 & 1 & 0 & 8/17 \\ 0 & 0 & 1 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aula 17 - Estados Absorventes + PageRank??

demo

- Absorbing
  - http://demonstrations.wolfram.com/AbsorbingMarkovChain/

Link Analysis / PageRank

Basear directamente no cap Link Analysis

VER tb cap Moller

Cerca de 30 slides

Aula 18 –12 Nov

Revisões e exercícios Markov (Matlab)

Para ajudar a prepararem Miniteste

- Resolver exercícios simples e menos simples
- Resolver algum(ns) do Guião

Exercício 1

Exercício 2