Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2015-2016

Aula 3

Probabilidades condicionais…

Problema do final da aula 2

Voltando ao problema dos 2 filhos:

Sabendo que um é rapaz, qual a probabilidade de o outro ser também rapaz ?

$$P(outro\ M \mid um\ M) = \frac{P(um\ M \cap outro\ M)}{P(um\ M)} = \frac{1/4}{3/4}$$

$$= \frac{1}{3}$$

=P({MM} se {MF,FM, MM})

Problema semelhante

- Sabendo que um rapaz abre a porta, qual a probabilidade de o outro ser também rapaz ?

Calculemos

outro→ Abre porta	M	M = F	
M	x casos		m casos
$\overline{M}$			N-n
			N casos

$$P(outro\ M \mid abre\ M) = \frac{P(M \cap M)}{P(abre\ M)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Pq temos como casos favoráveis M1 abre, M2 abre

Manchas e Sarampo

- P(doente tem Manchas dado que tem Sarampo) =?

Manchas Sarampo	**M**	$\bar{M}$	
S	x casos		s casos
$\bar{S}$			
			N casos

- **P(S & M)** = $\frac{x}{N} = \frac{x}{s} \times \frac{s}{N}$

$$= P(M \mid S) \times P(S)$$

Tb pode ser

$$P(S \mid M) \times P(M)$$

Probabilidade condicional

- Por vezes – como nos exemplos anteriores – dois acontecimentos estão relacionados
  - A ocorrência de um depende ou faz depender a ocorrência do outro
- Probabilidade de um evento A com a condição que o evento B ocorreu é a designada **PROBABILIDADE CONDICIONAL** de A dado B
  - Definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \; se \; P(B) \neq 0$$

Indefinida de P(B)=0

Probabilidade condicional

- Comporta-se exactamente como as probabilidades anteriores, satisfazendo os axiomas e a suas consequências.
- Temos, por exemplo:

$P(A \mid B) \geq 0$

$P(B \mid B) = 1$

$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$ se $ABC = \{\}$

$P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

$P(\{\} \mid B) = 0$

$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(AC \mid B)$.

$0 \leq P(A_1 A_2 A_3 \ldots \mid B) \leq P(A_k \mid B) \leq P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \mid B) \leq P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + P(A_3 \mid B) + \ldots \leq 1$, for $k = 1, 2, 3, \ldots$

P(AB), P(ABC) …

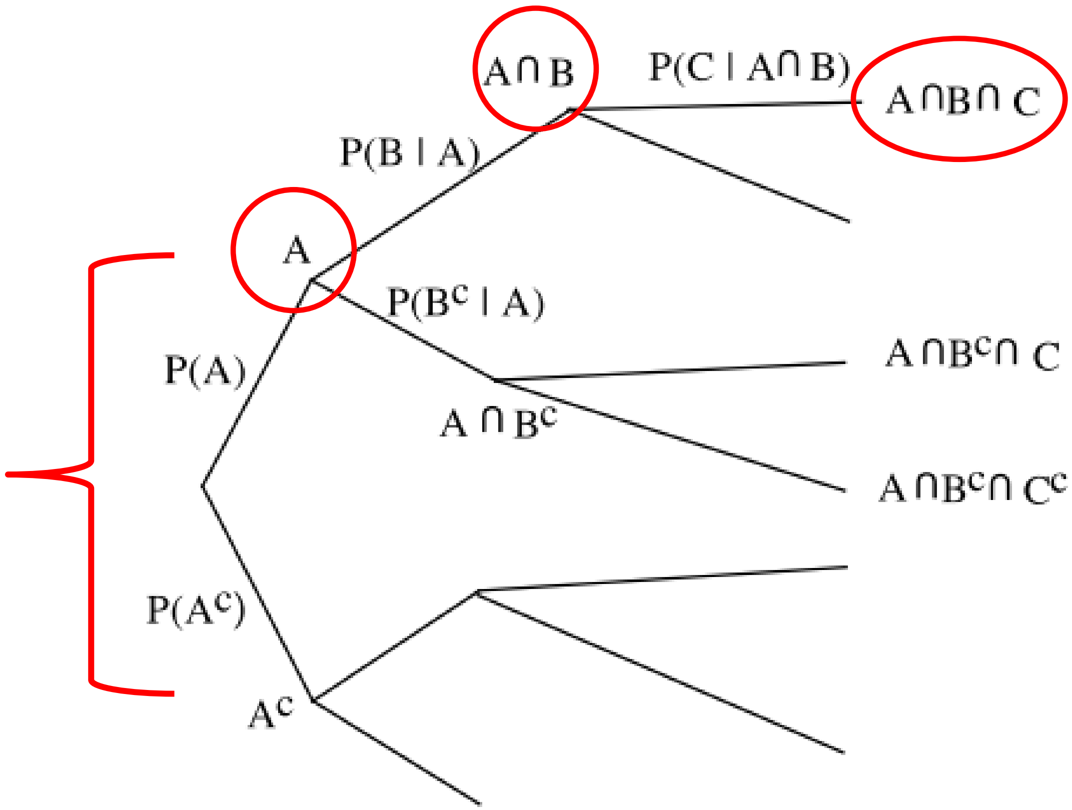
- $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$

- Aplicando sucessivamente temos (regra da cadeia)

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) \\
&\qquad = P(A_1|A_2 \dots A_n) \\
&\qquad \times P(A_2|A_3 \dots A_n) \dots P(A_{n-1}|A_n)
\end{aligned}
$$

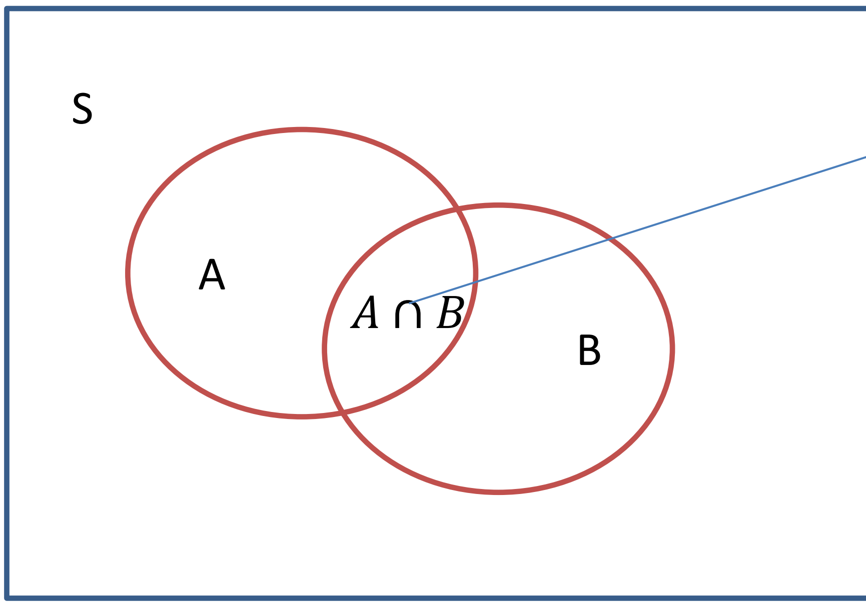
Regra da cadeia / multiplicação

- $P(ABC) = P(A)P(B|A)\,P(C|AB)$



Interpretação da probabilidade condicional

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\ se\ P(B) \neq 0$



Zona onde A se realiza,
Sabendo que B ocorreu

Exemplo de aplicação

- 2 números de 1 a 4, N1 e N2

- Evento B = “min(N1,N2)=2”
- Evento M = “max(N1,N2)”

- P(M=1|B) =
  P(“max()=1” & “min()=2”) / P(“min()=2”) =
  …
  =0

- P(M=2|B) = …
  = 1/5

N2→	1	2	3	4
1				
2		B / 2	B /3	B /4
3		B /3		
4		B /4		

Problema com 2 urnas…

- Consideremos 2 urnas, designadas por X e Y, contendo bolas brancas e pretas
- Contendo X 4 brancas e 5 pretas e Y 3 brancas e 6 pretas
- Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se uma bola. Qual a probabilidade de sair bola branca?

- P("bola branca")

= P("branca da urna X OU branca da urna Y")

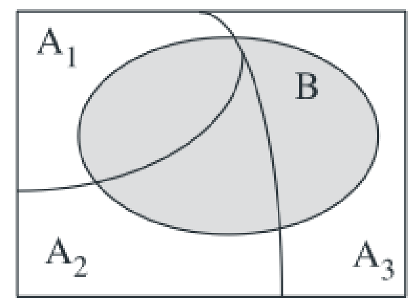
= P("branca E urna X")+P("branca E urna Y")

= P("branca"|"urna X")xP("urna X") + P("branca"|"urna Y")xP("urna Y")

= (4/9)x(1/2)+(3/9)x(1/2) = 0,39

Teorema/Lei Probabilidade total

- Dividir para conquistar
- Partição do espaço de amostragem A_1, A_2, A_3
- Ter $P(B|A_i)$, para todos os is



- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1)$
  $+P(A_2)P(B|A_2)$
  $+ P(A_3)P(B|A_3)$

Continuando com as urnas …

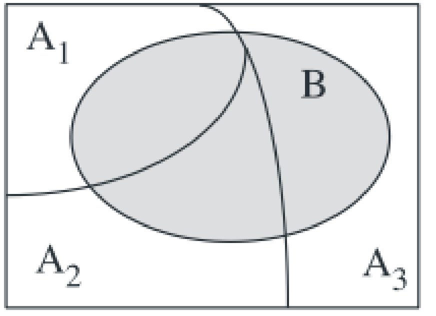
- **Problema Inverso** (condicionamento inverso)

  P("urna X" | "bola branca")

  Resolvido pela primeira vez pelo Reverendo Thomas Bayes (1702-1761)

Regra de Bayes

- Probabilidades *a priori* $P(A_i)$
- Sabemos $P(B|A_i)\ \ \forall i$



- Pretendemos calcular $P(A_i|B)$
  - i.e rever $P(A_i)$ dado que B ocorreu

- $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

$=\frac{P(A_i)\ \ P(B|A_i)}{P(B)}$

$=\frac{P(A_i)\ \ P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j) P(B|A_j)}$

Aplicando ao problema das urnas

- P("urna X" | "bola branca")

$$= \frac{P(\text{"bola branca"}|\text{"}urna\ X\text{"}) \times P(\text{"}urna\ X\text{"})}{P(\text{"bola branca"})}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{4}{7}$$

- P("urna Y" | "bola branca")=

$$\ldots = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{3}{7}$$

$$= 1 - P(\text{"urna X"}|\text{"bola branca"})$$

Causa e efeito

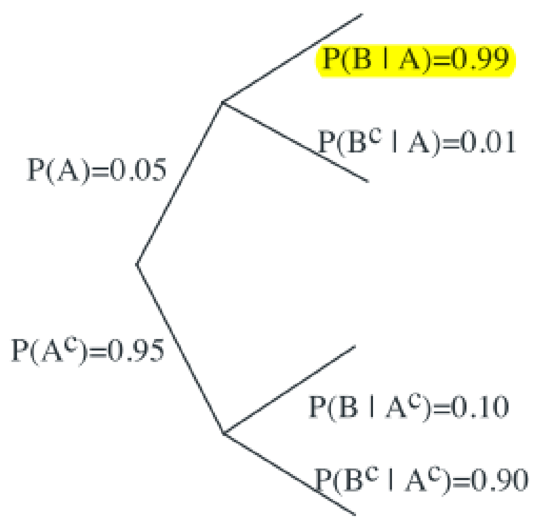
- No evento “urna X se bola branca” podemos considerar que a saída de bola branca é o EFEITO da causa “urna X”
- O Teorema de Bayes é, em consequência, muitas vezes referido como TEOREMA das PROBABILIDADES DAS CAUSAS (uma vez conhecidos os efeitos), e escrito da seguinte forma:

$$P(\text{"causa"}|\text{"efeito"}) = \frac{P(\text{"efeito"}|\text{"causa"}) \times P(\text{"causa"})}{P(\text{"efeito"})}$$

Exemplo de aplicação Regra de Bayes - radar

Evento A: avião voando na zona do radar

Evento B: Aparece algo no ecrã do radar



- P(A ∩ B) =

=P(B|A) P(A)

=0,99 x 0,05

- P(B) =

$$= P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

- P(A | B) =

$$= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

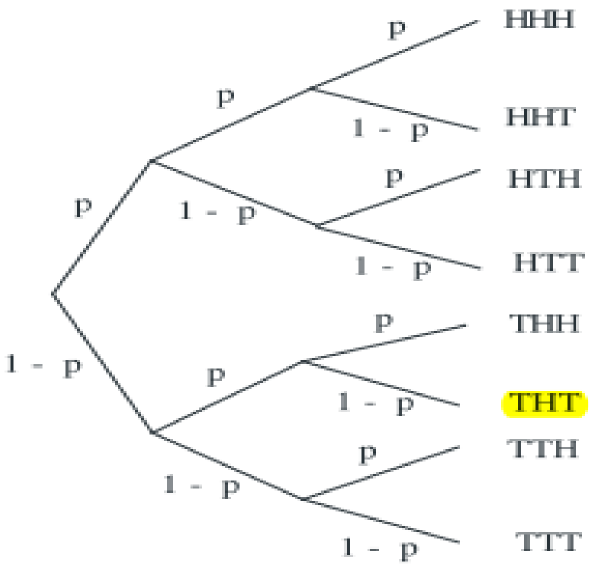
$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}05}{0{,}1445} = 0.3426$$

(valor baixo)

Outro exemplo

3 lançamentos de uma moeda não honesta

P(H) = p , p(T)=1-p



Calcular:

- P(THT)

=(1-p) p (1-p)

- P("1 H")

= P(HTT)+P(THT)+P(TTH)

= p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p)+(1-p)(1-p)(1-p) = 2 x p(1-p)(1-p)+(1-p)(1-p)(1-p)

= ((1-p)(1-p)) (2p+(1-p))

- P("primeiro lançamento dá H" | "1 H")

= P (primeiro H & 1 H) /p(1H)

… = p(1-p)(1-p) / … = p/(p+1)

Com p=1/2 temos 0.5/1.5 = 1/3

Confirmando caso favorável {HTT} e casos possíveis {HTT, THT, TTH}

Terceiro exemplo – sistema de comunicação/transmissão

- 0 ou 1 na entrada, transmissão sujeita a erros.
- No receptor uma decisão é tomada (0 ou 1):
  - Se ε for a probabilidade de erro, qual a entrada mais provável se na saída obtemos 1 ?

- Seja Ak o acontecimento “entrada é k”, k=0,1

  $A_0\ eA_1$constituem uma partição de S
- Seja B1 o acontecimento “saída = 1”

…

- $P(B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) + P(B_1|A_1) \times P(A_1)$

$$= \varepsilon\frac{1}{2} + (1-\varepsilon)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidade de entrada ter sido zero dado que saída igual a 1 ?
  $P(A_0|B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0)/P(B_1)$
  $= \frac{\varepsilon}{2} \;/\; \frac{1}{2} = \varepsilon$

- De forma similar $P(A_1|B_1) = \ldots = 1 - \varepsilon$

- Se ε <1/2 a entrada mais provável é 1 (se saída for 1)
  – Que é o que se pretende em geral.

Voltando um pouco atrás

- As duas variantes do problema dos dois filhos deram resultados (surpreendentemente?) diferentes

- P("outro M" | "abre M") = ½ = P ("outro M")

- P("outro M" | "um M") $\neq$ P("outro M")

- O que significam estes resultados ?

Independência

- Independentes sse p(AB) = p(A)p(B)
  - Simétrico relativamente a A e B
  - Aplica-se mesmo que P(A)=0
  - Implica P(A|B)=P(A) [mas não é a definição]
    - Ocorrência de B não fornece informação sobre ocorrência de A

- Generalização…

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Independência vs independência 2 a 2

- 2 lançamentos de moeda
- A: primeira é caras
- B: segunda é caras
- C: mesmo resultado em ambas

HH	HT
TH	TT

- $P(C)$? P(A) ? P(B) ?

  2/4=1/2
- $P(C \cap A) =$

  1/4 = 1/2 x 1/2

  C e A indep.
- $P(C \cap B) =$

  1/4 = 1/2 x 1/2

  C e B indep.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \; \ldots . \; A \; e \; B \; ind.$
- $P(C \cap B \;\cap A) =$

  $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
- $P(C \;|A \cap B)$

  $= {P(C \cap A \cap B)}/{P(A \cap B)} = 1$

Independência 2 a 2 não implica independência

Independência e acontecimentos mutuamente exclusivos

- Em geral dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos e tenham probabilidade não nula não podem ser independentes

$$0 = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

implicaria que um deles tenha probabilidade nula

- Em geral considera-se que acontecimentos em experiências distintas são independentes (experiências independentes)

Sequências de experiências independentes

- Se uma experiência aleatória for composta por subexperiências independentes e se A_k for um acontecimento que diga respeito à subexperiência k, é razoável admitir que os n acontecimentos são independentes
- Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

- Uma **experiência de Bernoulli** consiste em realizar uma experiência e registar-se um dado acontecimento se verifica (sucesso) ou não (falha)

…

- Qual a **probabilidade de k sucessos em n ensaios** ?

- Seja p a probabilidade de sucesso
  - E (1-p) a de falha
- Como já vimos nas aulas anteriores:
  - probabilidade de k sucessos e (n-k) falhas é:
$$p^k \ (1-p)^{n-k}$$
  - k sucessos em n podem ocorrer de $C^n k$ maneiras

- Então a probabilidade pedida é:
  - **(Lei Binomial)** : $\boldsymbol{P_n(k) = C^n k \ \ p^k \ (1-p)^{n-k}}$

Visão frequencista

- Do ponto de vista frequencista, considerando os eventos A e B, podemos escrever:

- $P(A|B) \approx \frac{k_{A\ e\ B}}{k_B}$

- Onde $k_{A\ e\ B}$ é o número de ocorrência de “A e B”

Simulações

- Como fazer para ter P(A|B) ?

- Realizar N experiências

- Contar o número de ocorrências de AB

  Será fAB
- Contar número de ocorrências de B

  fB
- $P \cong \dfrac{fAB/_N}{fB/_N} = \dfrac{fAB}{fB}$

Exemplo de simulação 1 (Independência vs independência 2 a 2)

- Relembremos:

  2 lançamentos de moeda

  A: primeira é caras

  B: segunda é caras

  C: mesmo resultado em ambas

- $P(C \mid A \cap B)$

… (simul1.m)

```
% P(C | A e B) =  P(C e A e B) / P(A e B)

ABC= (m1==m2) & (m1==1) & (m2==1);   %  C: iguais   A: primeira caras
                                     % B: segunda caras
fABC=sum(ABC,2);

AB =   (m1==1) & (m2==1);    %  A: primeira caras  B: segunda caras

fAB=sum(AB,2);

p=fABC/fAB

>>  1
```

Aplicação – probabilidade de uma sequência de palavras

- Utilizado em Modelos de Linguagem dos Sistemas de Reconhecimento de Fala

- Exemplo: P(“Universidade de Aveiro”) ?

- P(“Universidade no início de uma frase”) x P(“de”| “Universidade”) x P(“Aveiro” | “<s> Universidade de”)

- P(“Universidade no início de uma frase”) =?
- Contar ocorrências de “Universidade” no início de frase num conjunto (muito) grande de textos
  - Usando, por exemplo, recursos Linguateca
    - http://www.linguateca.pt/acesso/corpus.php?corpus=CETEMPUBLICO
    - http://www.linguateca.pt/ACDC/

Tópicos da aula

- Probabilidade Condicional

- 3 Ferramentas muito importantes
  - Regra da multiplicação
  - Teorema da Probabilidade total
  - Regra Bayes

- Aplicação da teoria frequencista a probabilidades condicionais

Não esquecer

- Independência de 2 eventos
- Independência de uma colecção de eventos
- Probabilidade condicional

$$P(A|B) = {P(A \cap B)}/{P(B)}$$

- Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Teorema probabilidade total:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

- Regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \;\; P(B|A_i)}{P(B)}$$

Para aprender mais …

- Links para material online:
  - Parte de http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm

- Capítulos iniciais do Livro "Probabilidades e Processos Estocásticos", F. Vaz, Universidade de Aveiro
  - Em especial secções 2.7 e 2.8 e exercícios da sec. 2.9
- Capítulo 2 do Livro "O Acaso" , Joaquim Marques de Sá, Gradiva

Aula 4

Variáveis aleatórias

Motivação

- A probabilidade é uma função sobre conjuntos (eventos)
  - Utilização das ferramentas da análise matemática (ex: derivação) não é imediata
    - Especialmente se o resultado do experimento não forem números
- Se conseguirmos mapear do espaço amostral S para a recta real facilita o uso das ferramentas de análise e aritmética