MPEI 2015-2016

Aula 15 – Cadeias de Markov

4 Novembro 2015

?!

- O que esteve na origem do grande sucesso inicial da Google ?

- O que tem em comum esse sucesso com a capacidade de interagir por voz com computadores, robôs e smartphones ?
  - No reconhecimento de fala ?
  - Na síntese de fala ?

Exemplo 1

- Suponhamos que em cada dia que têm aulas de MPEI acordam e decidem se vêm ou não à aula.
- Se vieram à aula anterior, a probabilidade de virem é 70%; se faltaram à anterior, essa probabilidade é 80%.

- Algumas questões:
  - Se vieram à aula esta quarta, qual a probabilidade de virem na aula de QUARTA da próxima semana ?
  - Assumindo que o semestre tem duração infinita (que horror!), qual a percentagem aproximada de aulas a que estariam presentes ?

Exemplo 2

- Dividir a turma em 3 grupos A, B e C no início do semestre
- No final de cada aula:
- 1/3 do grupo A vai para o B e outro 1/3 do grupo A vai para o grupo C
- ¼ do grupo B vai para A e ¼ de B vai para C
- ½ do grupo C vai para o grupo B

- Como ficarão os grupos ao fim de n aulas ?

Exemplo 3 – “Pub Crawl”

- Bares junto a uma conhecida Universidade:

TPC

Fazer Diagrama para os Bares de Aveiro

Outro exemplo

- Passeio aleatório (random walk)

Lançar moeda

Cara Coroa Coroa … Cara …

Muitas áreas de aplicação

- Muitas vezes estamos interessados na transição de algo entre certos estados.
- Exemplos:
  - Movimento de pessoas entre regiões
  - Estado do tempo
  - Movimento entre as posições num jogo de Monopólio
  - Pontuação ao longo de um jogo
  - Estado de Filas de atendimento

Princípios básicos

Processos estocásticos

- Lidam com a dinâmica da teoria de probabilidades
- O conceito de processo estocástico estende o conceito de variável aleatória
- Uma v.a. X mapeia um acontecimento $s \in \Omega$ num número $X(s)$
- O processo mapeia o evento para números diferentes em tempos diferentes
  - O que implica que em lugar de termos um número $X(s)$ temos $X(t, s)$
  - Sendo t$\in T$ geralmente um conjunto de tempos

Processos estocásticos

- Se fixarmos $s, X(t)$ é uma função real do tempo
- $X(t, s)$ pode então ser vista como uma colecção de funções no tempo

- Se fixarmos t temos uma função $X(s)$ que depende apenas de s, ou seja uma variável aleatória

- Um nome alternativo é processos aleatórios

Classificação de processos estocásticos

- Podem ser classificados segundo o parâmetro t e os valores que $X(t,s)$ pode assumir (estados do processo)
- Quanto a t:
  - Tempo contínuo: Se T é um intervalo contínuo
  - Tempo discreto: Se T é um conjunto contável
    - Também chamada sequência aleatória e representada por $X[n]$
- Quanto ao conjunto de estados (E):
  - Contínuo
  - Discreto

Definição

- Um processo de Markov é um processo estocástico em que a probabilidade de o sistema estar num estado específico num determinado período de observação depende apenas do seu estado no período de observação imediatamente precedente
  - O futuro apenas depende do presente e não do passado

Tipos de processos de Markov

- Discretas/contínuas

		Espaço de estados	
		Discreto	Contínuo
Tempo	Discreto	**Cadeia de Markov tempo discreto**	Processo de Markov em tempo discreto
	Contínuo	Cadeia de Markov tempo contínuo	Processo de Markov em tempo contínuo

- Focaremos a nossa atenção em cadeias de Markov de tempo discreto

Cadeias de Markov discretas

- X_n: estado após n transições
  - Pertence a um conjunto finito,
    - Em geral $\{1, 2, \dots, m\}$
  - X_0 é dado ou aleatório

Questões comuns relativas a cadeias de Markov

- Qual a probabilidade de transição entre dois estados em n observações ?

- Existe algum equilíbrio ?

- Existe uma estabilidade a longo prazo ?

Propriedade/Suposição de Markov

- Probabilidade de transição do estado i para o estado j:
- $\boldsymbol{p_{ji}} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$

  $= P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0)$

- Quando estas probabilidades $\boldsymbol{p_{ji}}$ não dependem de n a cadeia diz-se **homogénea**
  - Focaremos a nossa atenção neste tipo de cadeias de Markov

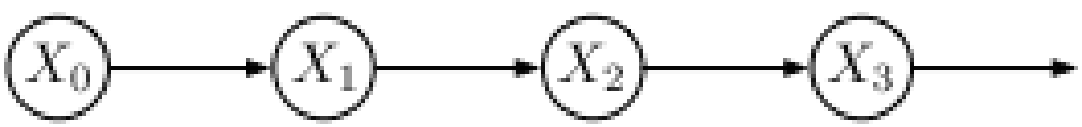
Propriedade/Suposição de Markov

- $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots) = ?$

$$= P(X_0 = x_0)\, P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\, P(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1) \ldots$$

$$= P(X_0 = x_0)\, P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\, P(\boldsymbol{X_2 = x_2 | X_1 = x_1}) \ldots$$

- O futuro é independente do passado, dado o presente
- O processo "não tem memória"



Especificação de uma cadeia

- Identificar os estados possíveis

- Identificar as transições possíveis

- Identificar as probabilidades de transição

Aplicando ao exemplo 1 – faltar ou não faltar à aula

- Estados ?

- Transições ?

- Probabilidades de transição ?

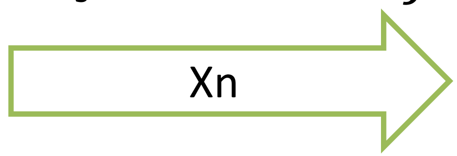
Aplicando ao exemplo 1 – faltar ou não faltar à aula

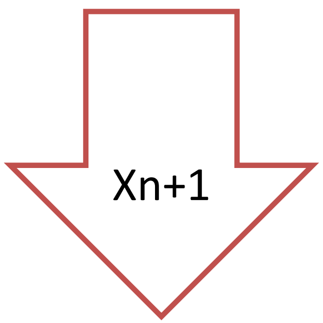
- Estados ?
  - 2: {faltar, não faltar}
- Transições ?
  - Faltar-> não faltar
  - Não faltar -> faltar
  - Faltar -> faltar
  - Não faltar -> não faltar

- Probabilidades de transição ?
  - Faltar-> não faltar : 0,8
  - Não faltar -> faltar : 0,3
  - Faltar -> faltar : 0,2
  - Não faltar -> não faltar: 0,7

Matriz de transição

- É usual representar as probabilidades de transição através de uma matriz, chamada de matriz de transição
- Tendo o sistema n estados possíveis, para cada par i, j fazemos t_{ji} igual à probabilidade de mudar **do estado *i* para o estado *j***.
- A matriz T cujo valor na posição $\text{linha} = j, coluna = i$ é t_{ji} é a matriz de transição





$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- Nota: Alguns autores adoptam t_{ij} como a probabilidade de mudar do estado i para o estado j

Matriz T do Exemplo 1

- $T = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

- Considerando estado 1 “não faltar”, temos

- $T = \begin{array}{ll} não\ faltar & \rightarrow \\ faltar & \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

Matriz T do Exemplo 2

$$T = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & ? & ? & ? \\ B & ? & ? & ? \\ C & ? & ? & ? \end{array}$$

Matriz T do Exemplo 2

$$T = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & 1/3 & & \\ B & 1/3 & & \\ C & 1/3 & & \end{array}$$

Futuro Estado

Matriz T do Exemplo 2

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1/3 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right| \end{array}$$

Futuro Estado

Matriz T é estocástica

- A matriz de transição reflecte propriedades importantes das probabilidades:
  - Todas as entradas são não-negativas
  - Os valores em cada COLUNA somados dão sempre resultado 1
- Devido a estas propriedades a matriz é denominada de **matriz estocástica**

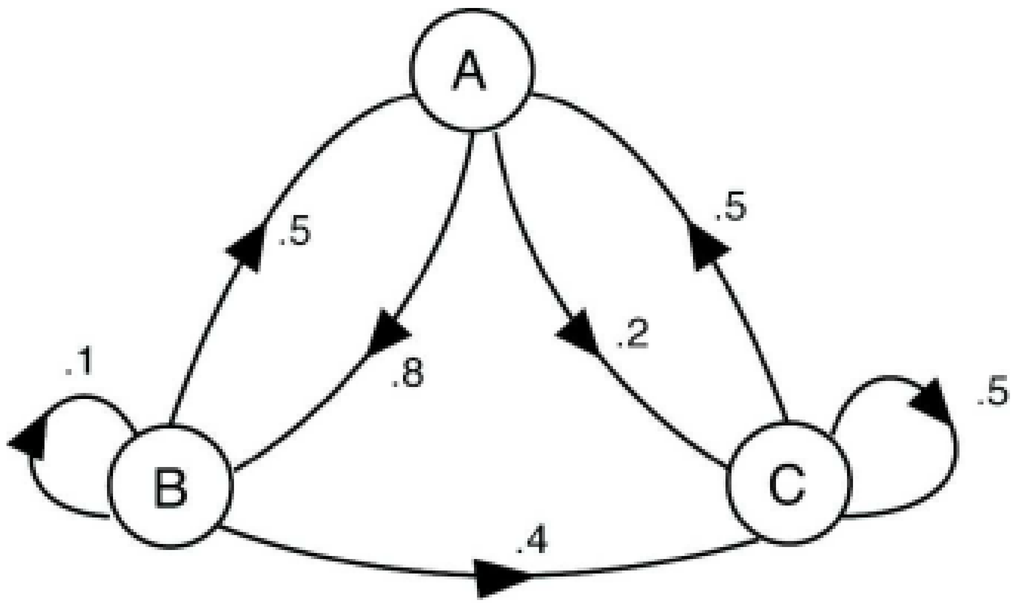
Representação gráfica da cadeia

- Apropriada e possível para número de estados pequeno

- Nós: representam todos os estados
- Setas: para todas as transições permitidas (one-step)
  - Ou seja, seta entre i e j apenas de $p_{ji} > 0$

Representação gráfica da cadeia

- Exemplo:



Simulação / Visualização dinâmica

- Estão disponíveis online formas de visualizar as transições entre estados ao longo do tempo …
- Um desses exemplos é **Markov Chains - A visual explanation by [Victor Powell](http://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html)**
  - http://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

  Que inclui:
  - http://setosa.io/markov/index.html#%7B%22tm%22%3A%5B%5B0.5%2C0.5%5D%2C%5B0.5%2C0.5%5D%5D%7D

- Para usar precisamos apenas de introduzir a matriz T
  - Que define o número de estados, quais as transições possíveis e as probabilidades associadas a essas transições

Simulando os nossos exemplos

- Exemplo 1:
  - Matriz:
    [[0.7, 0.3],
    [0.8, 0.2]]
  - http://setosa.io/markov/index.html#%7B%22tm%22%3A%5B%5B0.7%2C0.3%5D%2C%5B0.8%2C0.2%5D%5D%7D
- Exemplo 2:
  - Matriz:

    [[0.33,0.33,0.34],
    [0.25,0.5,0.25],
    [0,0.5,0.5]]

- Outro exemplo

  [[0,1,0,0],
  [0,0,1,0],
  [0,0,0,1],
  [0.2,0.3,0.3,0.2]]

  - O que vamos ver ?
  - Acesso directo:

  http://setosa.io/markov/index.html#%7B%22tm%22%3A%5B%5B0%2C1%2C0%2C0%5D%2C%5B0%2C0%2C1%2C0%5D%2C%5B0%2C0%2C0%2C1%5D%2C%5B0.2%2C0.3%2C0.3%2C0.2%5D%5D%7D