MPEI 2015-2016

Aula 8

Resolução de exercícios
(consolidação)

Problema #1

- Considere o seguinte jogo de cartas entre si e um amigo:
  - Apenas se usam as figuras (Rei, Dama e Valete), o Ás e o Joker dos 4 naipes
  - As cartas são baralhadas honestamente e extraídas uma a uma
  - Sempre que se extrai uma figura ganha 1 Euro, cada Ás obriga-o a pagar 1 Euro ao seu amigo, cada Joker implica pagar 2 Euros ao seu amigo.
  - Volta a colocar-se a carta no baralho e baralha-se

- Questão: **Qual o seu ganho médio ao fim de uma longa sequência de jogadas ?**

Fonte: "O ACASO", J. M. Sá, Gradiva

Exemplo

- Para perceber melhor, analisemos um possível jogo:

Saiu	**A**	**R**	**A**	**R**	**A**	**J**	**V**	**D**	**V**	**…**
Seu ganho	-1	1	-1	1	-1	-2	1	1	1	
Ganho acumulado	-1	0	-1	0	-1	-3	-2	-1	0	…

Simulemos …

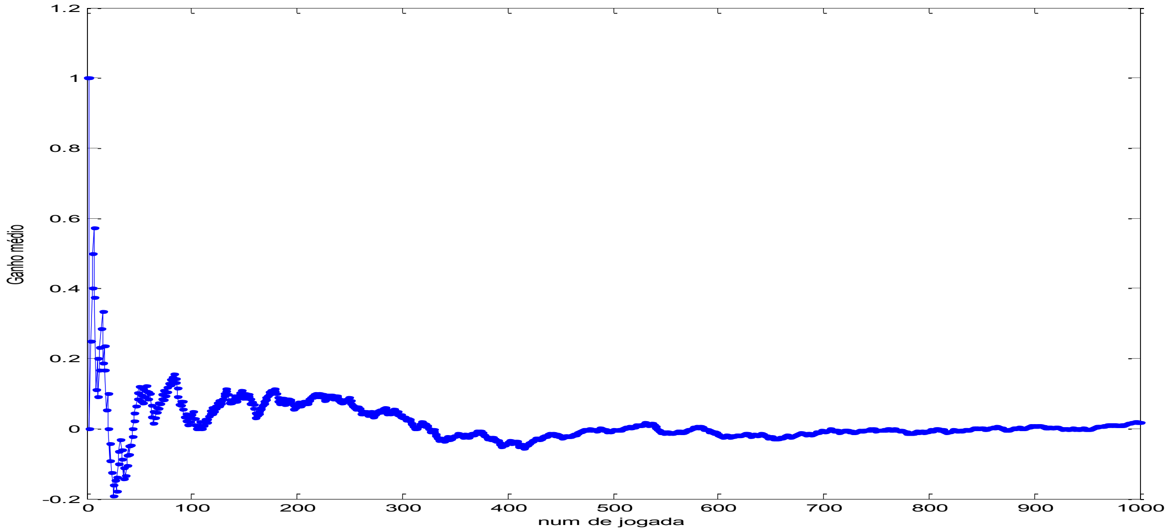
- Para simplificar, consideremos a seguinte codificação: R=1, D=2, V=3, A=4, J=5

```
% simular N extracções
e= floor (rand(1,N)*5)+1;
%  calcular ganho acumulado ao longo do jogo
g=e;  g(e==1 | e==2 | e=3)=1; g(e==4 )=-1; g(e==4 )=-2;
gacum= cumsum(g)
n=1:N;
gmed= gacum ./ n;

Plot(n,gmed, '.')
```

Exemplo de resultado

- 1000 jogadas



- É apenas uma de um número muito grande de sequências possíveis (são possíveis 5^{1000})

Resolução …

- Tentemos agora resolver sem simulação e usando o que já sabemos …

- Sugestões ?

Variável aleatória Ganho

- O Ganho em cada extracção de uma carta (experiência aleatória) pode ser considerada uma variável aleatória
- Pode assumir os valores {-2,-1,1}

- Função de probabilidade ?

$$p_G(G=-2)=?$$
$$p_G(G=-1)=?$$
$$p_G(G=1)=?$$

Ganho médio …

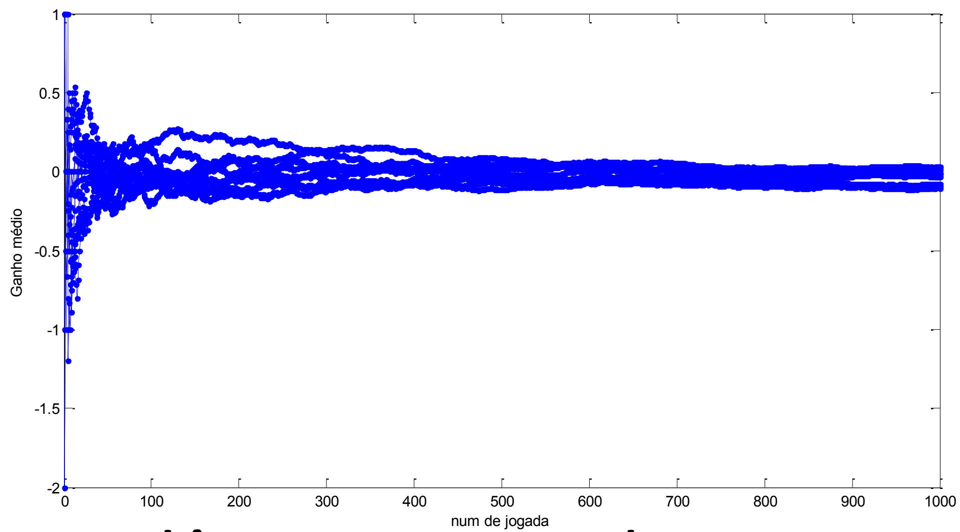
- O "Ganho médio esperado" ao fim de um grande número de jogadas é designado por **esperança matemática da variável Ganho**

- $\mathrm{E(G)} = \sum x_i p(X = x_i)$

- Aplicando ao nosso caso…
- $\mathrm{E(G)} = 1 \times \frac{3}{5} + (-1) \times \frac{1}{5} + (-2) \times \frac{1}{5} = 0$

Longa sequência

- É altura de esclarecer um pouco mais o que se entende por "longa sequência"…
- Repetindo o jogo (ou melhor simulando..), temos



- Existe uma tendência para todas as curvas estabilizarem em torno da esperança (0)

Problema #2 (aniversários)

- PL01, exercício 11

Consideremos uma festa em que há um certo número de pessoas, digamos n.

Qual deve ser o valor de n para que a **probabilidade de duas (ou mais) pessoas terem a mesma data de aniversário** (mês e dia) seja superior a 50 % ?

e para ser superior a 90% ?

Simulação

- Usar inteiros de 1 a 365 para representar os possíveis aniversários
- Gerar N conjuntos de n aniversários
  - Por exemplo, matriz de N linhas e n colunas

- Determinar o número de colunas que têm pelo menos 1 número repetido
  - Dá os casos favoráveis
- Calcular a probabilidade (casos favoráveis / N)

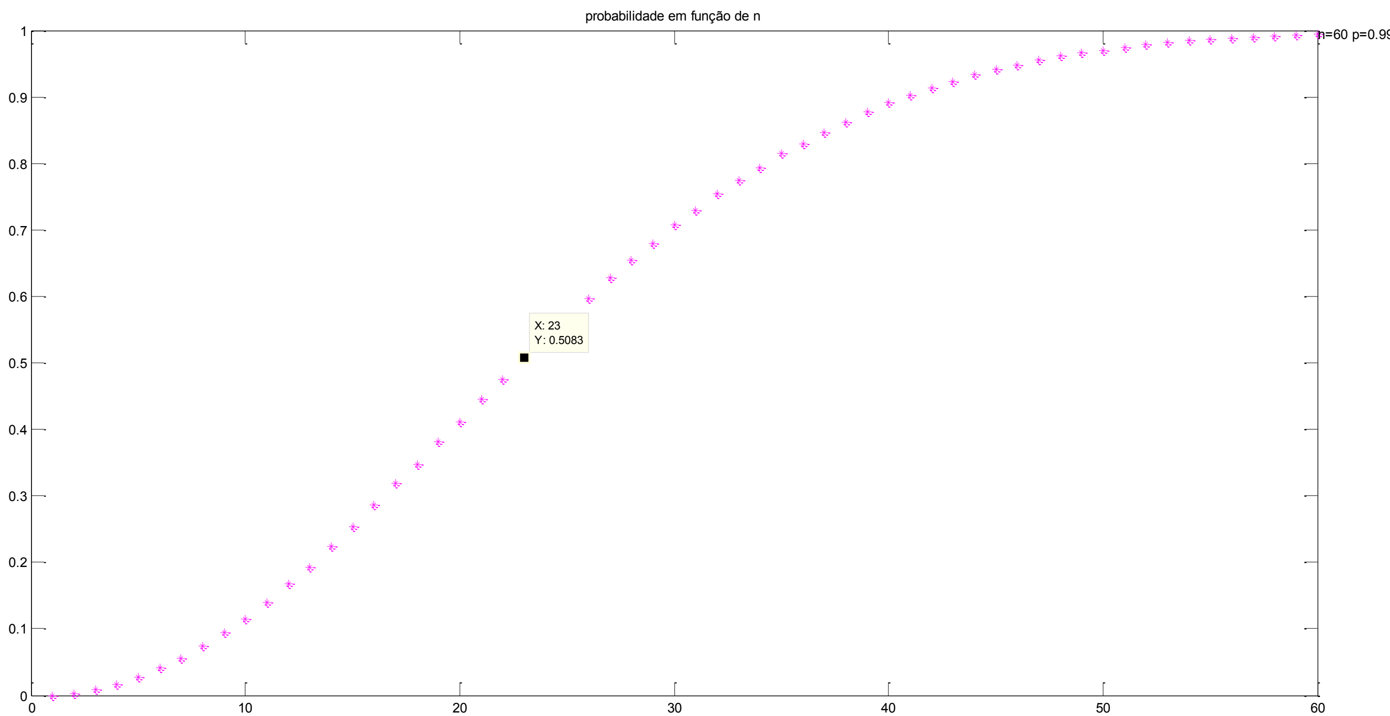
Simulação (exemplo de código)

```
N=10e5;
diferentes=zeros(1,N);

for n=1:60
   M= randi(365, N, n);  %  inteiros de 1 a 365
   % verificar se houve repetição (1 ou mais)
   for i=1:N
      diferentes(i)= length(unique(M(:,i)));
   end
   colisoes=sum(diferentes~= n);
   pColisao=colisoes/N;
   fprintf(1,'n= %d, p=%.3f\n',n,pColisao);
end
```

Resultados da simulação

- Prob. em função de n:



Resposta às questões concretas

- superior a 50 % ?

n=23

- superior a 90 % ?

n=

Resolução "teórica"

- Mais simples resolver probabilidade de ninguém de n pessoas fazer anos no mesmo dia
  - Depois usa-se 1-p
- Os aniversários das n pessoas são independentes
- Para não haver nenhum dia com mais do que um aniversário, a primeira pessoa pode fazer anos em 365 dias dos 365, E a segunda em 364, E a terceira em 363 ..
- Ou seja $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{365-2}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}$
- Que é igual a $\frac{365\,!}{(365-n)!\,365^n}$
- Para n=23 temos 1-p=0.5073
- Para n=41 temos 1-p=0.9032

Problema #3 (n dardos e m alvos)

- PL01, exercício 10

Considere o seguinte ''jogo'': lançamento com os olhos vendados de n dardos, um de cada vez, para m alvos garantindo-se que cada dardo atinge sempre um alvo (e apenas 1).

a) Qual a probabilidade de nenhum alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes ?

b) Qual a probabilidade de pelo menos 1 alvo ter sido atingido 2 vezes ?
NOTA: Apesar de não ser 100% claro vamos considerar 2 vezes OU MAIS objectivo inicial do exercício

- …

Simulação

- Basta uma simples adaptação/extensão do problema anterior
  - Em vez de 365 dias temos m alvos
  - As n pessoas passam a ser os n dardos

Resolução teórica

- Seguindo ideia análoga aos aniversários …

- P(nenhum alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes) = $\frac{m}{m} \times \frac{m-1}{m} \times \frac{m-2}{m} \times \cdots \times \frac{m-n+1}{m}$
- Que é igual a $\frac{m\,!}{(m-n)!\,m^n}$

Problema #4 (sequências de palavras)

- PL01 , último exercício

Considere uma linguagem com apenas 3 palavras “um”, “dois‘”, “três” e que permite sequências de 2 palavras. Se todas as frases forem equiprováveis e as duas palavras na frase puderem ser iguais:

…

(d) Qual o valor de P[``sequência incluir a palavra um'‘ | ``sequência inclui palavra dois''] ?

(e**) Resolva a questão anterior para o caso de termos 10 palavras diferentes e sequências de 5 palavras com ajuda de um programa que calcule exaustivamente todas as possibilidades.**

Sugestão: use números de 1 a 10 para representar as palavras e use Matlab/Octave.

Em Matlab…

- A solução mais simples é usar 5 ciclos for, mas não é generalizável

- Possível alternativa (por Tomás Oliveira e Silva)
  - Geral
  - Elegante

```
npw = 5; % number of possible words
nws = 2; % number of words in a sequence

seq = zeros(nws,npw^nws); % all possible sequences will be kept here
seq(:,1) = 1;              % first sequence
nc = 1;                    % number of columns of the block that will
be replicated
for i=1:nws
  % replicate a block npw-1 times, and change the data of its i-th row
  for j=2:npw
    seq( : ,(j-1)*nc+1:j*nc ) = seq(:,1:nc); % copy a block
    seq( i ,(j-1)*nc+1:j*nc ) = j;            % change its i-th row
  end
  nc = nc*npw; % increase the block size
end

has_one = sum(reshape(seq == 1,size(seq))) >= 1;
has_two = sum(reshape(seq == 2,size(seq))) >= 1;

P= …
```

Problema # 5 (Weather)

- PLO1 ex. 5

Most mornings, Victor checks the weather report before deciding whether to carry an umbrella.

If the forecast is "rain" the probability of actually having rain that day is 80%.

On the other hand, if the forecast is "no rain", the probability of it actually raining is equal to 10%.

During fall and winter the forecast is "rain" 70% of the time and during summer and spring it is 20%.

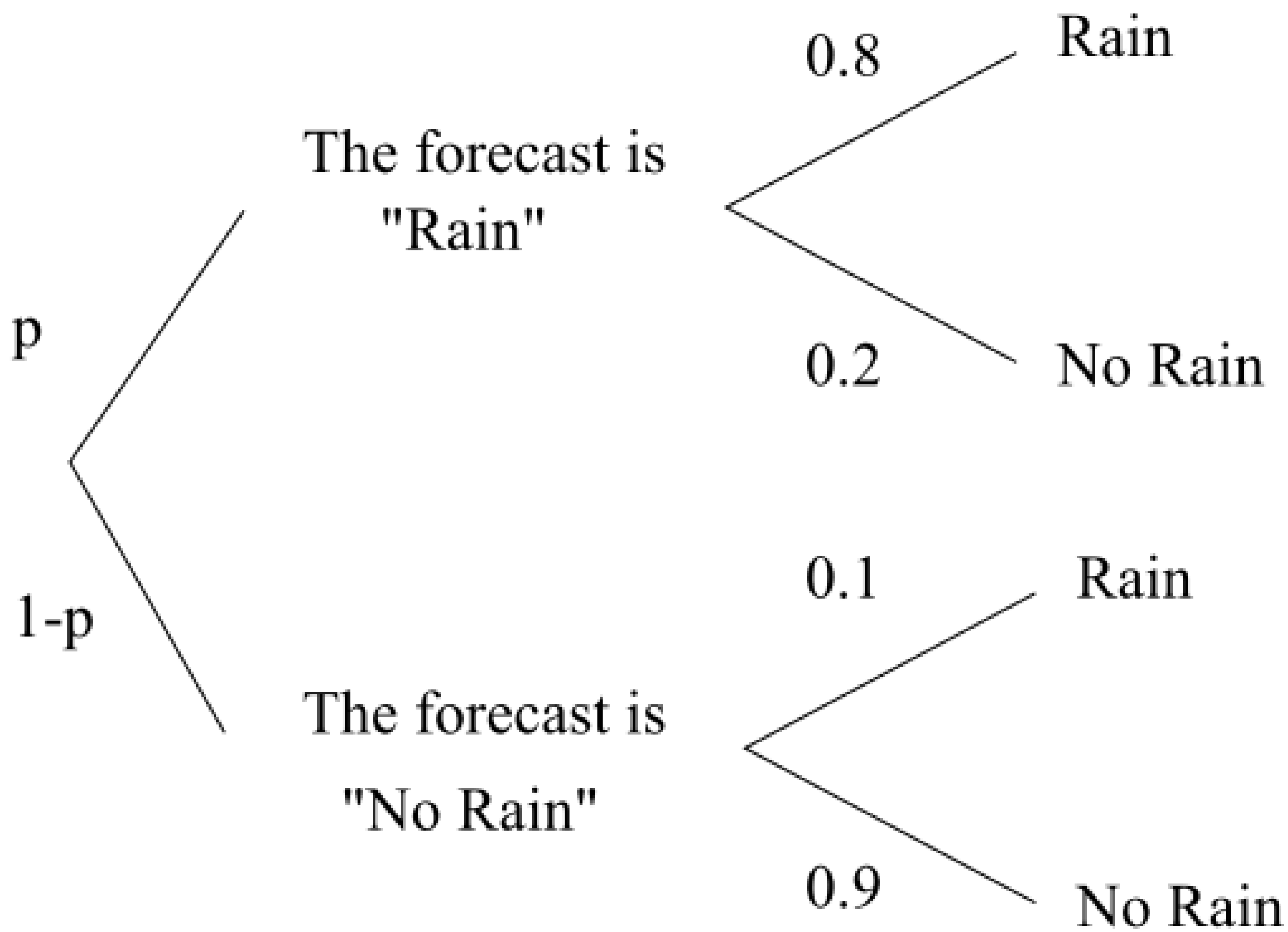
De: MIT OpenCourseWare 6.041/6.431: Probabilistic Systems Analysis (Fall 2010)

Questão 1

(a) One day, Victor missed the forecast and it rained. What is the probability that the forecast was “rain” if it was during the winter?

What is the probability that the **forecast was “rain”** if it was during the summer?

Árvore …


0.8
Rain
The forecast is
"Rain"
p
0.2
No Rain
0.1
Rain
1-p
The forecast is
"No Rain"
0.9
No Rain

Resolução

- Event A – "forecast was Rain"
- Event B - "rained"
- p = probability of "forecast says Rain"
- Winter: p=0.7
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.8)(0.7)}{(0.8)(0.7)+(0.1)(0.3)} = \frac{56}{59}$

- Summer: p=0.2
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.8)(0.2)}{(0.8)(0.2)+(0.1)(0.8)} = \frac{2}{3}$

Questão 2

(b)

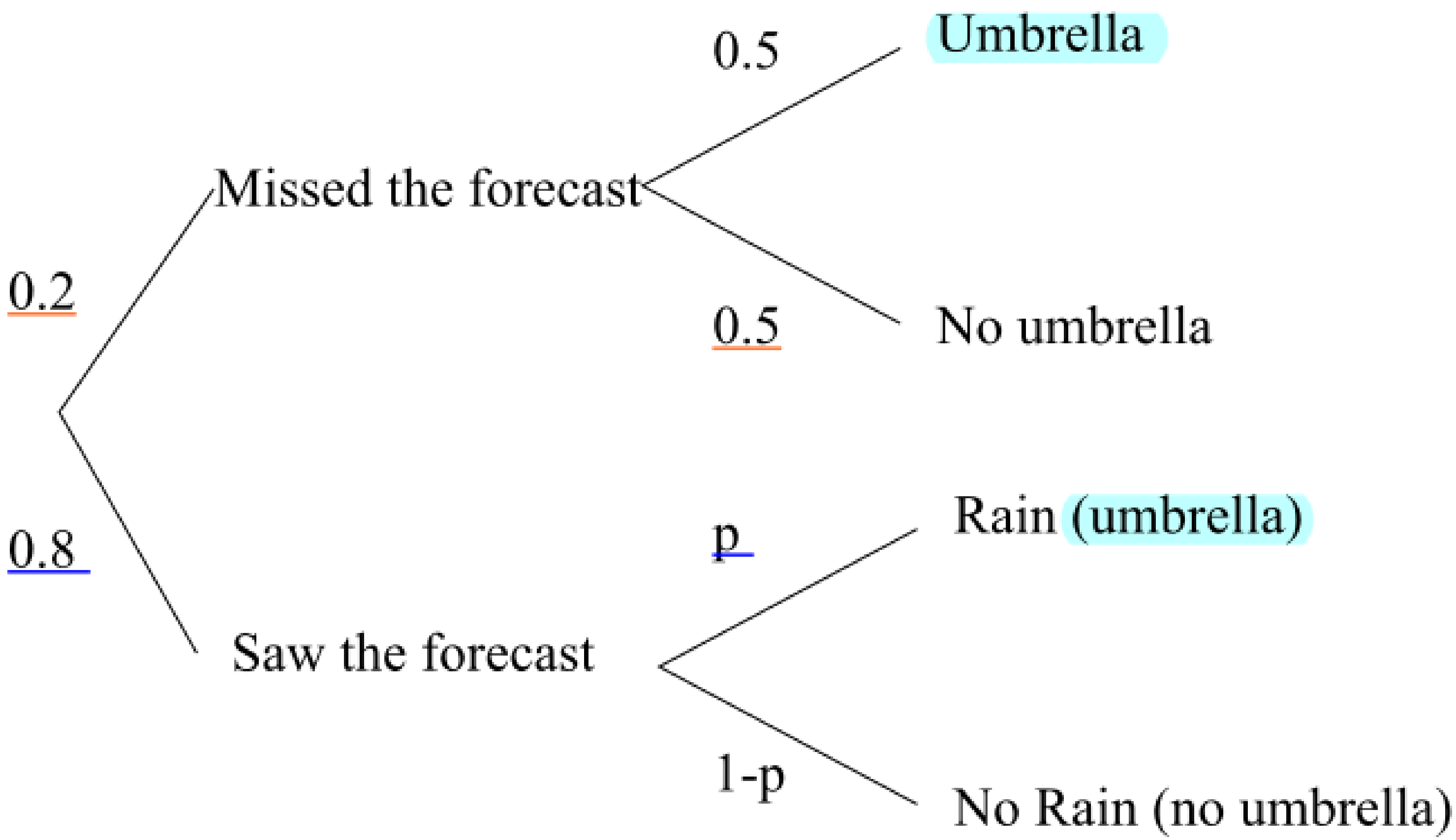
The probability of Victor missing the morning forecast is equal to 20 % on any day in the year.

If he misses the forecast, Victor will flip a fair coin to decide whether to carry an umbrella.

On any day of a given season he sees the forecast, if it says ``rain'' he will always carry an umbrella, and if it says ``no rain'', he will not carry an umbrella.

Are the events ``Victor is carrying an umbrella'', and ``The forecast is no rain'' independent? Does your answer depend on the season?

Árvore


0.5
Umbrella
Missed the forecast
0.2
0.5
No umbrella
0.8
p
Rain (umbrella)
Saw the forecast
1-p
No Rain (no umbrella)

Resolução

C - event that Victor is carrying an $\boxed{\text{umbrella.}}$

D - event that the forecast is $\boxed{\text{no rain.}}$

- $P(C) = ?$
- $P(D)= ?$
- $P(C|D) = ?$

Resolução

- $P(D) = 1 - p$
- $P(C) = (0.8)p + (0.2)(0.5) = \; 0.8\,p + 0.1$
- $P(C|D) = (0.8)(0) + (0.2)(0.5) = 0.1$

Questão 3

(c) Victor is carrying an umbrella and it is not raining.

What is the probability that he saw the forecast?

Does it depend on the season?

Probabilidades para quando não vê a previsão meteorológica

Let us first find the probability of rain if Victor missed the forecast

- As for the case when he sees the forecast we already know

P(actually rains | missed forecast)

=P(rain|forecast rain) x P(forecast rain) + P(rain|forecast NO rain) x P(forecast NO rain)

= (0.8)p + (0.1)(1 − p)

= 0.1 + 0.7p

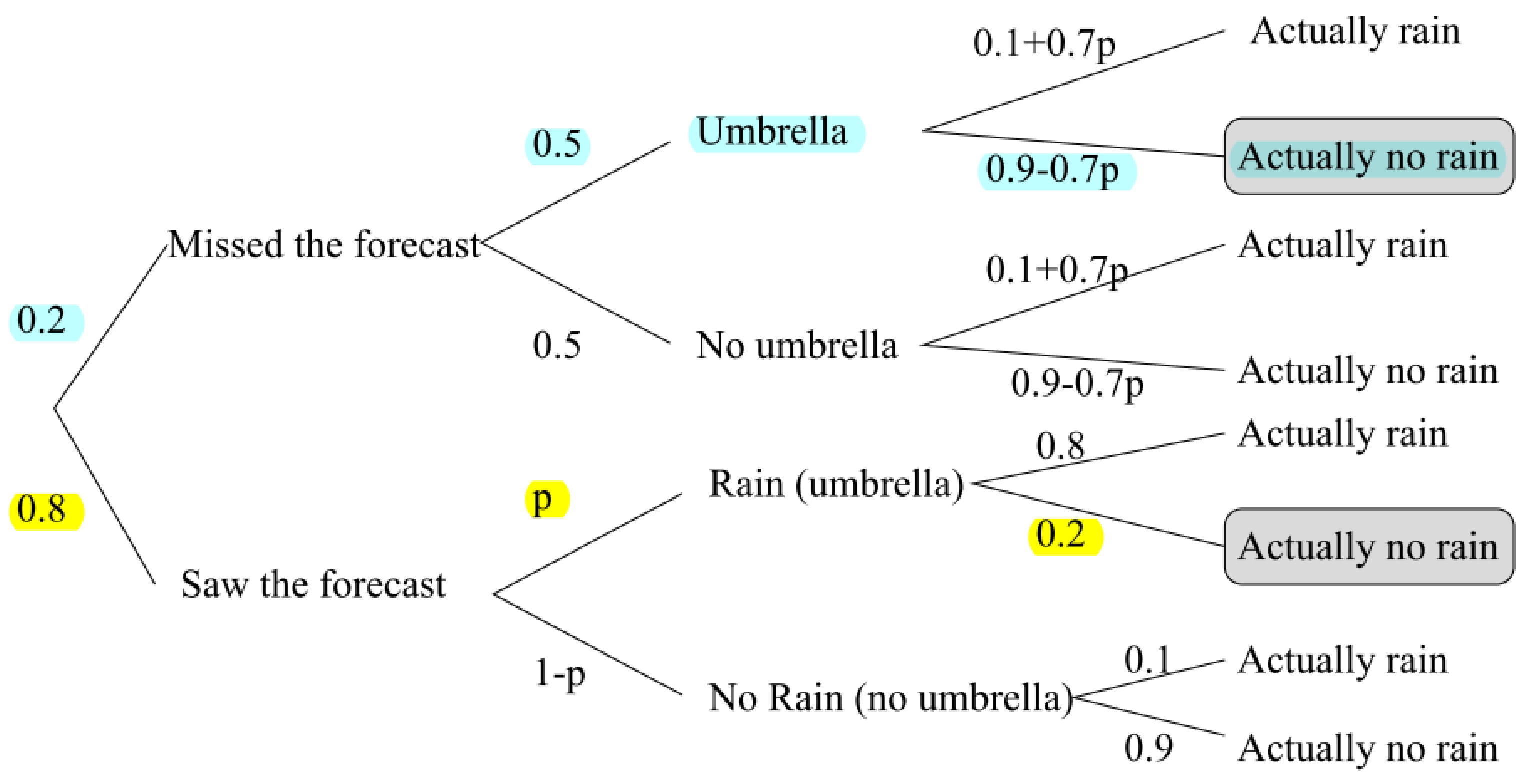
P(no rain | missed forecast)

=P(NO rain|forecast rain) x P(forecast rain) + P(NO rain|forecast NO rain) x P(forecast NO rain)

= (0.2)p + (0.9)(1 − p)

= 0.9 - 0.7 p

Árvore



0.1+0.7p
Actually rain
0.5
Umbrella
0.9-0.7p
Actually no rain
Missed the forecast
0.1+0.7p
Actually rain
0.2
0.5
No umbrella
Actually no rain
0.9-0.7p
0.8
Actually rain
p
Rain (umbrella)
0.8
0.2
Actually no rain
Saw the forecast
0.1
Actually rain
1-p
No Rain (no umbrella)
0.9
Actually no rain

Cálculos

P(saw forecast | umbrella and not raining) =

P(saw forecast AND umbrella AND not raining) /
P(umbrella AND not raining) =

$$= \frac{(0.8) \quad p \quad (0.2)}{(0.8)\, p\, (0.2) \;+\; (0.2)\,(0.5)\;(0.9 - 0.7p)}$$

Próxima aula: Exame TP

Boa sorte a todos!