UNIVERSIDADE DE AVEIRO

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2015/2016)

PL 01

Palavras chave: probabilidade, espaço de amostragem, probabilidade condicional

Para revisão, responda, sozinho, às seguintes questões:

R1 Quantas sequências diferentes de 10 bits há? E de n bits?

R2 Quantas sequências diferentes de 10 símbolos do alfabeto (A,C,G,T) há? E de n símbolos do mesmo alfabeto?

R3 Um teste tem n perguntas com respostas possíveis Verdadeiro ou Falso. Forneça uma expressão para calcular o número de maneiras diferentes de responder ao teste. Qual a probabilidade de acertar todas as respostas, escolhendo-as à sorte com igual probabilidade?

R4 Quantas chaves distintas pode ter o Totoloto antigo (5 números em 49)? E o Euromilhões (5 números em 50 e duas estrelas em 11)?

R5 Considere um baralho com 20 cartas. Dessas cartas, 10 são vermelhas e numeradas de 1 a 10. As restantes 10 são pretas e também numeradas de 1 a 10.

(a) De quantas maneiras diferentes se podem dispor as 20 cartas numa fila?

(b) Calcule a probabilidade de se obter uma sequência constituída alternadamente por cartas pretas e vermelhas.

R6 Lançam-se dois dados e toma-se nota da soma de pontos obtida.

(a) Indique o espaço de amostragem (conjunto de valores possíveis) da soma.

(b) Calcule a probabilidade de se obter a soma 9.

R7 Um conjunto de 50 peças contém 8 peças defeituosas. Escolhem-se aleatoriamente 10 peças. Qual a probabilidade de encontrar 3 defeituosas?

Responda às seguintes questões efectuando sempre que possível simulações para confirmar os resultados:

1. Qual é a probabilidade de obter 2 caras em 3 lançamentos de uma moeda equilibrada? Confronte os resultados com os resultados de simulação.

2. Qual é a probabilidade de obter 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada? Confronte os resultados com os resultados de simulação.

3. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada? Confronte os resultados com os resultados de simulação.

4. Construa o histograma representativo da distribuição de probabilidades do número de peças defeituosas de uma amostra de 5 peças, tomada aleatoriamente, de um processo de produção sabendo que o mesmo produz 30% de peças defeituosas.

   (a) Calcule a probabilidade de 3 das peças serem defeituosas.

   (b) Calcule a probabilidade de, no máximo, 2 das peças dessa amostra serem defeituosas.

5. Most mornings, Victor checks the weather report before deciding whether to carry an umbrella. If the forecast is “rain” the probability of actually having rain that day is 80%. On the other hand, if the forecast is “no rain”, the probability of it actually raining is equal to 10%. During fall and winter the forecast is “rain” 70% of the time and during summer and spring it is 20%.

   (a) One day, Victor missed the forecast and it rained. What is the probability that the forecast was “rain” if it was during the winter? What is the probability that the forecast was “rain” if it was during the summer?

   (b) The probability of Victor missing the morning forecast is equal to 20 % on any day in the year. If he misses the forecast, Victor will flip a fair coin to decide whether to carry an umbrella. On any day of a given season he sees the forecast, if it says “rain” he will always carry an umbrella, and if it says “no rain”, he will not carry an umbrella. Are the events “Victor is carrying an umbrella”, and “The forecast is no rain” independent? Does your answer depend on the season?

   (c) Victor is carrying an umbrella and it is not raining. What is the probability that he saw the forecast? Does it depend on the season?

6. You have a fair five-sided die. The sides of the die are numbered from 1 to 5. Each die roll is independent of all others, and all faces are equally likely to come out on top when the die is rolled. Suppose you roll the die twice.

   (a) Let event A to be “the total of two rolls is 10”, event B be “at least one roll resulted in 5”, and event C be “at least one roll resulted in 1”.

   i. Is event A independent of event B?

   ii. Is event A independent of event C?

   (b) Let event D be “the total of two rolls is 7”, event E be “the diference between the two roll outcomes is exactly 1”, and event F be “the second roll resulted in a higher number than the first roll”.

   i. Are events E and F independent?

   ii. Are events E and F independent given event D?

7. Consideremos o problema de detecção de cancro da mama. O mamograma (como muitas outras análises clínicas) não é infalível. Estudos prolongados revelaram que:

   P[“mamograma positivo se cancro da mama”] = 0,9

   Calcule a probabilidade de uma mulher escolhida ao acaso na população portuguesa ter cancro sabendo que o seu mamograma deu positivo. Considere que a frequência de ocorrência de cancro da mama na população portuguesa feminina é de 1 em 10000.

   Estava à espera deste resultado ?

   Calcule nova estimativa mas agora considerando as mulheres que procuram a consulta específica e que para este subgrupo a ocorrência de cancro atinge 1 em 1000.

   O que sugere para aumentar esta probabilidade ? Se melhorar esse valor em 10% qual o ganho na probabilidade de ser mesmo cancro quando o exame dá positivo?

8. Considere famílias com 2 filhos.

   Qual a probabilidade de pelo menos um dos filhos ser rapaz ?

   Suponha que uma família escolhida ao acaso tem um rapaz. Qual a probabilidade do outro filho ser também rapaz? O que se pode concluir do resultao obtido ?

   Efectue a simulação e obtenha estimativas das probabilidades pedidas para o caso com dois filhos e um caso de uma família numerosa (sugere-se 5 filhos). No caso da segunda probabilidade pedida o que se pretende é a probabilidade de um dos outros ser também rapaz.

9. Considere uma sequência de 20 lançamentos de uma moeda honesta em que sairam 20 caras. Qual a probabilidade de sair essa sequência ? Qual a probabilidade de sair cara no próximo lançamento, o vigésimo-primeiro ?

10. Considere o seguinte “jogo”: lançamento com os olhos vendados de n dardos, um de cada vez, para m alvos garantindo-se que cada dardo atinge sempre um alvo (e apenas 1).

    a) Qual a probabilidade de nenhum alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes ?

    b) Qual a probabilidade de pelo menos 1 alvo ter sido atingido 2 vezes ?

    c) Faça um gráfico da variação do valor da probabilidade da alínea b) em função de n, para $m = 1000, 10000, 100000$.

    d) Faça um gráfico similar em função de m fixando n em 10000.

11. Consideremos uma festa em que há um certo número de pessoas, digamos n. Qual deve ser o valor de n para que a probabilidade de duas pessoas terem a mesma data de aniversário (mês e dia) seja superior a 50 % ? e para ser superior a 90% ?

12. Considere uma linguagem com apenas 3 palavras {“um”, “dois”, “três”} e que permite sequências de 2 palavras. Se todas as frases forem equiprováveis e as duas palavras na frase puderem ser iguais:

    (a) Qual a probabilidade da sequência “um dois” ?

    (b) Qual a probabilidade de “um” aparecer pelo menos uma vez ?

    (c) Qual a probabilidade de ocorrer “ um” ou “dois” ?

    (d) Qual o valor de P[“sequência incluir a palavra um” | “sequência inclui palavra dois”] ?

    (e) Resolva a questão anterior para o caso de termos 10 palavras diferentes e sequências de 5 palavras com ajuda de um programa que calcule exaustivamente todas as possibilidades. Sugestão: use números de 1 a 10 para representar as palavras e use Matlab/Octave. Tente criar uma função com os parâmteros de entrada que considere adequados.

    (f) Repita a questão anterior para 11, 12, ... 20 palavras diferente e represente a variação da probabilidade num gráfico. Nota: Devido à memória necessária não se pode ter valores muito elevados.

    (g) Adicione ao gráfico anterior, para comparação, a probabilidade se a linguagem não permitir repetições das palavras.