

Palavras-chave: vectores aleatórios, variáveis aleatórias multidimensionais, correlação, covariância, independência, coeficiente de correlação.

Problemas:

1. Considere duas variáveis aleatórias com a seguinte distribuição conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,3	0,2	0
1	0,1	0,15	0,05
2	0	0,1	0,1

Responda às seguintes questões efectuando os cálculos no papel e confirmando usando o Matlab:

- (a) Calcule as funções de probabilidade de massa marginais de X e Y;
  - (b) Calcule a média e variância de X e Y ;
  - (c) Calcule a correlação, covariância e coeficiente de correlação entre X e Y.
2. Dada a probabilidade conjunta das variáveis X e Y:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/24
0	1/8	1/4	1/8
1	1/24	1/8	1/24

- (a) As variáveis X e Y são independentes ? Efectue os cálculos usando Matlab.
  - (b) Obtenha para as variáveis  $X^2$  e  $Y^2$  a tabela das probabilidades conjuntas. Estas novas variáveis são independentes ?
  - (c) Calcule os momentos de ordem 2 e 3 para as variáveis X e Y.
  - (d) Calcule os momentos de ordem 2 e 3 para a variável  $Z = \sqrt{4 + X}$ .
3. Gere duas variáveis independentes, X e Y, com distribuição normal com médias diferentes e variâncias iguais a 13. Crie duas novas variáveis,  $X_1$  e  $Y_1$ , arredondando X e Y para o inteiro mais próximo. Com base nestas variáveis, responda às seguintes questões:
- (a) Qual o valor esperado (teórico) para a média e variância de  $X_1 + Y_1$  ? Justifique. Estes valores seriam diferentes caso não fossem independentes ? Sugestão: Comece por calcular para o caso geral e, depois, simplifique para o caso de serem independentes.
  - (b) Crie  $Z = X_1 + Y_1$ . Estime a f. p. m. da nova variável aleatória Z e com base nela calcule a média e variância de Z. Compare com o resultado obtido na alínea anterior.
4. Considere duas variáveis aleatórias relativas às classificações de uma turma de 120 alunos em duas Unidades Curriculares (ex: MPEI e Programação II). Designemos essas variáveis discretas por  $N_1$  e  $N_2$ .
- (a) Gere  $N_1$  e  $N_2$  para que, antes de arredondamento para o valor inteiro mais próximo, tenham uma distribuição Normal com as seguintes médias e variâncias: média de  $N_1$  igual a 14; média de  $N_2$  20% superior a  $N_1$ ; variâncias iguais a 1/4 da média.

- (b) Obtenha e represente graficamente a função probabilidade de massa conjunta de  $N_1$  e  $N_2$ .
- (c) Qual o valor do coeficiente de correlação entre  $N_1$  e  $N_2$  ?
- (d)  $N_1$  e  $N_2$  são independentes ?
- (e) Calcule a entropia usando as funções probabilidade de massa marginais e a conjunta. Os valores são iguais ?

5. Numa determinada cidade e num determinado período do ano a probabilidade de estar sol é 75% e a probabilidade de chover 25%.

As previsões da meteorologia local acertam 100 % das vezes se o tempo for de chuva mas apenas 1/3 se for um dia de sol. Um estudante atento observa que em média o meteorologista tem apenas uma taxa média de 50 % , enquanto se previsse sempre bom tempo (sol) acertaria 75 % das vezes. Com base neste argumento candidata-se ao lugar, mas um responsável que sabia um pouco de probabilidades rejeita a candidatura. Explique porquê ?

Sugestão: comece por criar a tabela com a f. p. m. conjunta.

6. \* TPC \* Adapte a função Matlab `probabilidadeLetrasPT()` (fornecida no material de apoio à unidade curricular) por forma a obter a f. p. m. conjunta de duas letras consecutivas em Português. A nova função deve devolver uma matriz em que as linhas correspondem à primeira letra na sequência.

Aplique essa função a um texto de tamanho razoável (pode ser o fornecido no elearning) e, com base na f. p. m. conjunta obtida, responda às questões seguintes:

- (a) Calcule as 2 f. p. m. marginais, compare-as e comente.
- (b) Calcule o coeficiente de correlação.
- (c) Calcule a entropia usando as funções probabilidade de massa marginais e a conjunta. Os valores são iguais ?
- (d) \* OPCIONAL \* Resolver este exercício para sequências de 3 letras.