Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2015-2016

Aula 1

Informações sobre a cadeira

(Revisões de) probabilidades

Probabilidades para Informática ???!!!

- Muitos problemas nas áreas da Informática, Ciências da Computação e afins contêm algum grau de aleatoriedade
- Exemplos:
  - Qual a palavra que um utilizador irá escrever na sua procura no Google ?
  - Fazer um robô navegar numa casa
  - Saber quais as páginas da web que têm mais relevância para uma procura
  - Transformar o sinal captado pelo microfone numa sequência de palavras (Reconhecimento de fala)
  - …

Probabilidades para Informática ???!!!

- Mais Exemplos de aplicações na área do MIECT e LEI
  - Análise de complexidade de Memórias associativas assume …. [P2, Algoritmos …
  - Análise de redes (computadores…
  - Filtrar spam
  - Máquinas de estados probabilísticas
  - Parsers para análise sintáctica
  - Information Retrieval
  - Pattern recognition
  - Reconhecimento de fala [Interacção Multimodal]
  - Planeamento em IA
  - …

Objectivos da cadeira

- Desenvolver a capacidade de aplicar métodos probabilísticos em engenharia informática.

Apresentação da cadeira

Funcionamento

- TPs (2x1.5) + PL (2 horas)

TP:

- **1 Noções básicas de probabilidade**
- **2 Variáveis aleatórias e distribuições**
- **3 Noções básicas de processos estocásticos**
- **4 Processos de renovamento e cadeias de Markov**
- **5 Simulação**
- **6 Aplicações representativas**

PL

- PL
  - 10/11 guiões para 1 (ou 2 aulas)
  - PL1 – Probabilidades, Probabilidade condicional
  - PL2 – Variáveis aleatórias
  - PL3 – Geração de Números aleatórios e Simulação
  - …
  - PLs - Modelos de Markov
  - PLs - Aplicações (Bloom filters, …

Equipa docente 2015-2016

- António Teixeira (ajst@ua.pt) – Regente, TPs, PLs

- Carlos Bastos (cbastos@ua.pt) - TPs e PL
- Tomás Oliveira e Silva (tos@ua.pt) – PL
- Paulo Monteiro (paulo.monteiro@ua.pt) - PL

Avaliação

- **Avaliação discreta**:
  - 20 % **TP** (exame escrito)
  - 30 % **P** (mini teste prático em computador)
  - 10 % **P** (avaliação do trabalho nas aulas práticas)
  - 40 % **P** (mini projecto e sua apresentação)

Principal Problema ☺

- Vosso:
  - Aprender mais do que o suficiente e FAZER a cadeira

- Docentes
  - Ajudar a aumentar a probabilidade de o fazerem
    - Mas sem baixar a fasquia ☺

Alea jacta est

- Os dados estão lançados
  - Vamos ao trabalho
  - Aumentando as vossas possibilidades de fazer a cadeira

Probabilidades

(Revisões) de conceitos essenciais

Aleatório ?

- Em termos qualitativos, “qualquer coisa” que não seja predizível com certeza absoluta
- Acontecimento (evento) cujo resultado não possa ser determinado com certeza absoluta.
  - Caso contrário é determinístico

- adj. Que repousa sobre um acontecimento **incerto**, fortuito: contrato aleatório.
  Diz-se de uma grandeza que pode tomar certo número de valores, a cada um dos quais está ligada uma probabilidade.
    - De: **dicionário online de português**

- http://www.priberam.pt/dlpo/aleat%C3%B3rio

Aleatoriedade

- Origem: Wikipédia
- A palavra **aleatoriedade** é utilizada para exprimir quebra de ordem, propósito, causa, ou imprevisibilidade em uma terminologia não científica. Um processo aleatório é o processo repetitivo cujo resultado não descreve um padrão determinístico, mas segue uma distribuição de probabilidade.
- O termo **aleatório** é freqüentemente utilizado em estatística para designar uma propriedade estatística bem definida tal como um a quebra de uma neutralidade ou correlação.

Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?

- Na maioria das aplicações existe algum tipo de regularidade que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

Problema

- Qual a probabilidade de 80% dos alunos presentes nesta sala passarem a MPEI ?

- O que precisamos saber
  - O que é isso de probabilidade ?
  - Quantos alunos estão na sala ?
  - Qual a probabilidade de cada um passar ?
    - Talvez simplificar ?

Outro Problema

- Consideremos uma família com 2 filhos
- Supondo que a probabilidade de nascer um rapaz é a mesma de nascer uma rapariga, qual a probabilidade de uma destas famílias com 2 filhos ter pelo menos 1 rapaz ?

  – De “O Acaso”, página 23

Problema Cavaleiro Méré

P("sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado")

Versus

P ("sair pelo menos um DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados")

- Ou melhor, em qual destas apostas se tem mais possibilidades de ganhar ? ☺

Probabilidade

- Noção de probabilidade

  “Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso”

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

Recordar …

- Experiência aleatória
  - Procedimento que deve produzir um resultado
  - Mas mesmo que seja repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico

- Experiência aleatória é especificada por
  - Espaço amostral
  - Conjunto de eventos
  - Lei de probabilidade

Exemplos de experiências aleatórias

- Lançar uma moeda 5 vezes e registar o número de caras
- Escolher um número real entre 0 e 1
- Medir e registar o intervalo de tempo entre 2 mensagens que chegam a um servidor de email

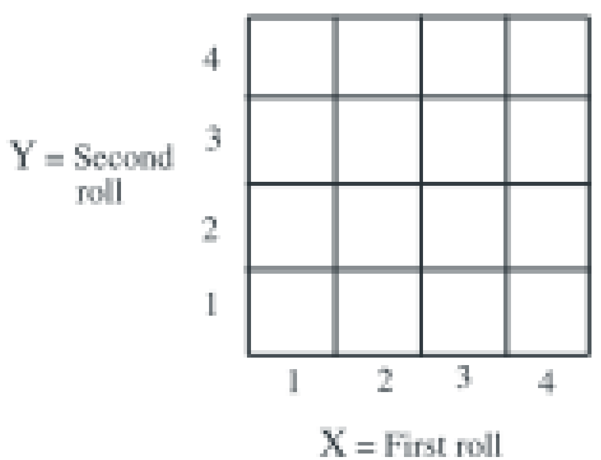
Espaço de amostragem

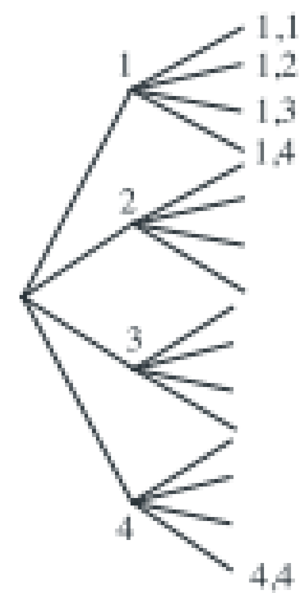
- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório
  - Em geral representado por S (de Sample Space)
- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis

- S é discreto se for contável
  - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- S é contínuo se não for contável
- Elementos de S são designados por resultados

Exemplo e representação

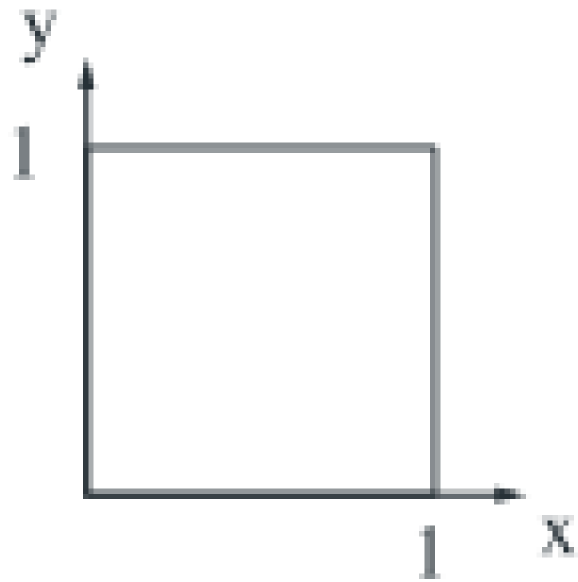
- Two rolls of a tetrahedral die
  - Sample space vs. sequential description





Exemplo de S contínuo

- S= {(x,y) : 0<= x,y <=1}



Acontecimento

- Os resultados das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nos experimentos
  - Exemplo:
    - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar (nº > L)
  - Os itens de interesse são representados por subconjuntos de S
- Acontecimento (evento) A é um subconjunto de S
  - S é obviamente um subconjunto de s próprio e constitui o evento certo
  - O conjunto vazio, ϕ, também é subconjunto, o evento impossível
- A probabilidade é atribuída a eventos

Lei de probabilidade

- Regra que atribui probabilidade aos vários eventos
  - Probabilidade: número associado a um evento que indica a “verosimilhança” de esse evento ocorrer quando se efectua o experimento
    - Número entre 0 e 1
      - 1 para acontecimento certo
      - 0 para acontecimento imposível

Como é que se definem as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de medição
- Através da construção de modelos probabilísticos

Como determinar a probabilidade?

- Probabilidades teóricas
- Probabilidade empíricas
- Probabilidades subjectivas
  - Exemplo:
    - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
    - Uma casa de apostas estima em 1/5 a probabilidade de Portugal ser o próximo campeão Europeu
      - E qual a vossa estimativa ? ☺
  - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria clássica (de La Place)
  - Probabilidades teóricas
- Frequencista
  - Probabilidades empíricas
- Teoria matemática

Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- “*Pour étudiér un phénoméne, il faut réduire tous les evénements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d’un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l’événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles*”
  - pg 17 livro “O Acaso”

- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, “casos”, igualmente prováveis

$$P(evento) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

(outra) Definição

- A trial is made in which the outcome is one of N equally likely possible outcomes. If, among these N outcomes, there are Na possible outcomes which result in the occurence of the event A, the probability of the event A is defined by

$$P(A) = \frac{NA}{N}$$

  - De: “Concepts of Probability Tehory” P. Pfeiffer

- IMPORTANT: equally likely

Exemplo

- Lançamento de 1 dado
  - Honesto
    - => qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?

- 6 resultados ou <u>eventos elementares</u>
  - Representáveis pelo conjunto {1,2,3,4,5,6}

- Ao evento "saída da face 5" apenas corresponde um caso favorável
  - > P("face 5")=1/6

Cont…

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?

- Espaço de amostragem ?
  - S={1,2,3,4,5} ?   => casos possíveis =5
  - S={1,2,3,4,5ª,5b}

- P()=2/6

Regras básicas (OU)

- P("sair face maior que 4") ?

  = P("sair face 5 ou face 6") = P({5,6}) = 2/6

  = P({5})+P({6})

- P("face par")=P({2})+P({4})+P({6})=1/2
- P("qualquer face") = 6 x 1/6 =1

… $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sempre ???

Regras básicas

- P("face menor ou igual a 4")

  =1 – P("face maior que 4")

  = 1 – 2/6 = 4/6

Regra do complemento

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Regras básicas (E)

- P("face par E face menor ou igual a 4")=

  = P("face par") x P("face menor ou igual a 4")

  $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

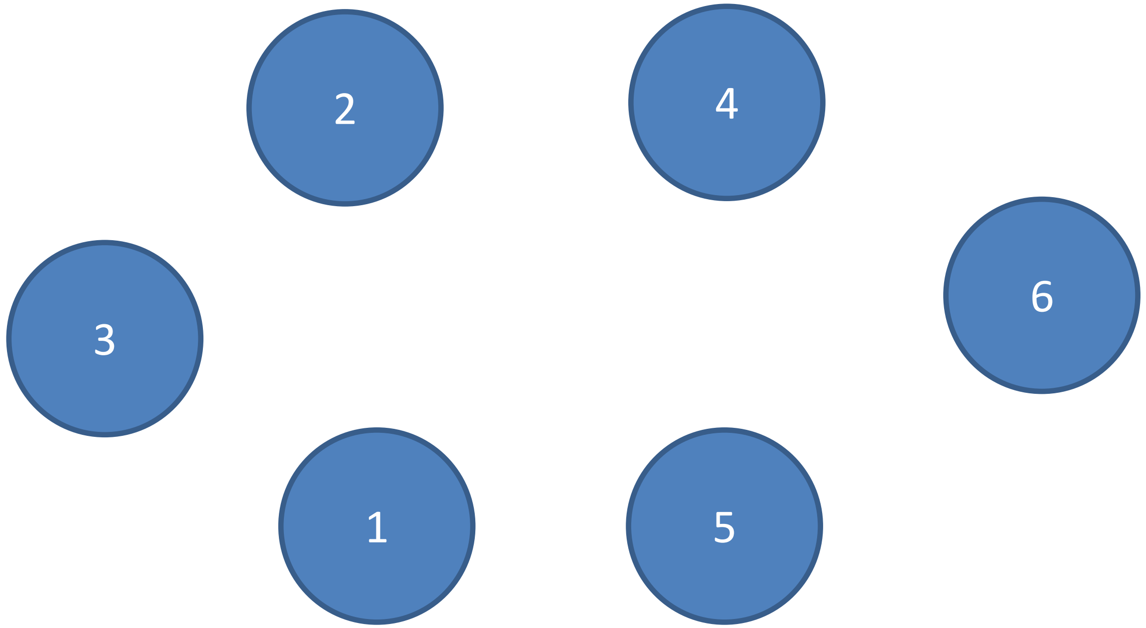
  De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

Aplicação das regras (OU novamente)

- P("face par OU face menor ou igual a 4") = ?
- Se fizermos P("face par")+ P("face menos ou igual a 4") dá   7/6 > 1 !!
- Qual o erro ?

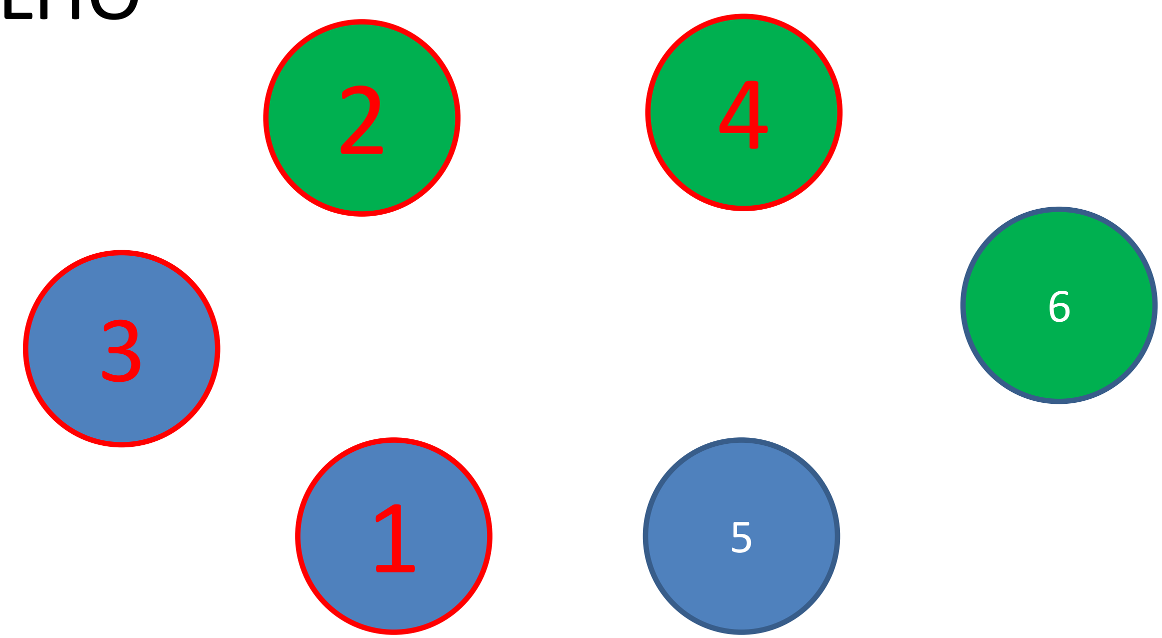
Analizemos

S



eventos

- A="face par"   VERDE
- B="face menor ou igual a 4" limite e texto a VERMELHO



…

Temos 3 com fundo verde => P(A) = ½

Temos 4 com vermelho => P(B) = 2/3

… mas temos 2 casos com verde e vermelho

- No mínimo perigoso ☺

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$

  $= ½ + 2/3 - 2/6 = 3/6+4/6-2/6 = 5/6$

Testar as regras - problema

- Considere uma família com 2 filhos e que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?

- Probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos ?

Problema do Cavaleiro de Méré

- P("sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado") vs P ("sair DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados")

- Melhor usar a regra do complemento..
- P("nenhum 6 em 4 lançamentos ")=
- P("não 6 na primeira E não 6 na segunda E …")

=P("não 6 na primeira") x P("não 6 na segunda") …

= 5/6 x 5/6 …. = (5/6) ^ 4

- P(“sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado”)

  $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

  = 0,51775

- P (“sair DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados”) =

  $= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

  = 0,49141

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, equiprobabilidade para os eventos elementares

- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

AULA 2

Noção frequencista

- Noção introduzida por De Moivre (1718)

- Repete-se a experiência um certo número de vezes (n).
- Seja k o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (ex: “sair face 5 num dado”)
- Determina-se $f=k/n$, ou seja a frequência relativa de ocorrência
- Usa-se esta frequência como uma medida empírica de probabilidade

Frequência relativa

- Definição:
  - Se uma experiência for repetida N vezes nas mesmas condições a frequência relativa do evento A é

$$f(A) = \frac{\#\ ocorrências\ do\ evento\ A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando N aumenta, então o limite da frequência relativa é a probabilidade de A

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\ ocorrências\ de\ A}{N}$$

Exemplo (simulado)

- Simulação das experiências em Octave /Matlab
- Probabilidade de sair 2 caras em 3 lançamentos

- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula 3 lançamentos ?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos …

```
%  simular 1 lançamento
l= rand() >0.5  % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos
l3= rand (3, 1) > 0.5     % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes
N= 1e6  %  mas comecem com valor pequeno
lancamentos= rand(3,N);  % importante o “;”
```

ocorrências ... freq. relativa

```
% contar num ocorrências de “2 caras”
%     contar num caras (1s) em cada experiência
%           (que se encontra numa coluna da matriz lancamentos)
numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

%  contar vezes em que esse número de caras é 2
numOcorrencias =    sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular freq relativa
f  = numOcorrencias / N

%  usar como estimativa da probabilidade
pA= f
```

Variação com N

```
% variação da frequência relativa em função de N

N= 1e5
lancamentos = rand(3,N) > 0.5;
sucessos= sum(lancamentos)==2; % 1 = sucesso
fabsol =  cumsum(sucessos);
frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);
```

Frequência relativa

- $0 \leq f(A) \leq 1$

- Numa experiência com K resultados possíveis em N experiências:
  - S= {A1, A2, A3,… , Ak}
  - o resultado Ai ocorre Ni vezes
  - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de f(Ai) = Ni/N
  - $\sum_{i=1}^{k} f\,(Ai) = 1$

Simples mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efectuar um número finito de repetições da experiência
  - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efectuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR AXIOMATIZAÇÃO
  - na sua obra Foundations of the Theory of Probability.

O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

O que é uma axiomática?

- **axiomatizar** consiste em escolher algumas afirmações que podem ser feitas sobre os objectos matemáticos em estudo, na área considerada.

- Delas, **por processo dedutivo**, obter todas as demais proposições que constituem o corpo de conhecimento da teoria em causa.

O que é uma axiomática?

Essas afirmações, das quais deduzimos todas as outras, são os **AXIOMAS** e o seu conjunto constitui uma **AXIOMÁTICA**.

O que é uma axiomática?

Os axiomas, além de se <u>basearem numa aceitação por evidência</u>, devem ser :

- **logicamente independentes** isto é, nenhum deles deve ser passível de se obter dos restantes ;
- **compatíveis**, isto é, os axiomas não podem, por dedução lógica, conduzir a proposições contraditórias.

Definição axiomática de probabilidade

Foi com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos que **Kolmogorov** concebeu a primeira construção **AXIOMÁTICA GERAL** para a **TEORIA DAS PROBABILIDADES.**

Axiomática de probabilidades

- Axioma 1- probabilidades são não-negativas
  P(A) > = 0
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)
  P(S) =1

- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos
  P(A U B) = P(A) + P(B)

- Axioma 3b – Se A1, A2, … for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ($\forall_{i \neq j}\, Ai \cap Aj = \emptyset$)

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} Ak) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ak)$$

Teoremas

- Às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outras já deles obtidas por dedução, chamamos TEOREMAS.

Teoremas / Corolários : Prob. Do complemento

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

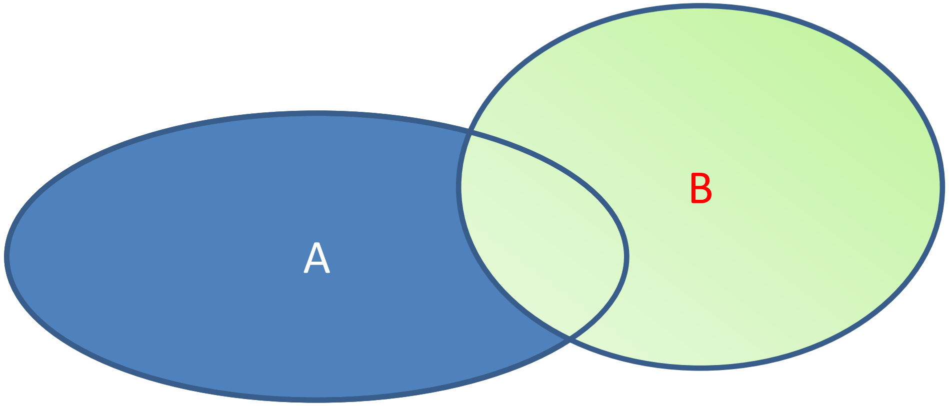
- Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E $A \cup \bar{A} = S$

- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P\,(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$ …
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

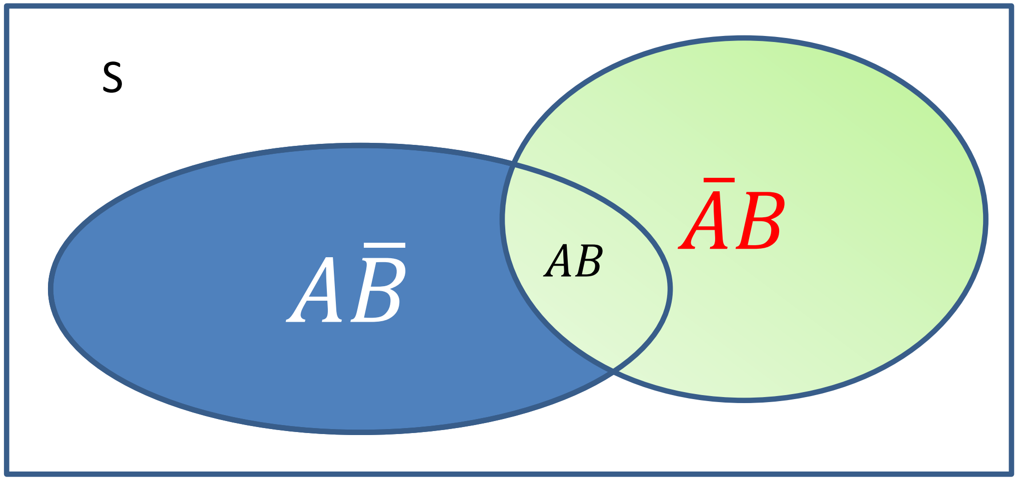
Teorema/Corolário: prob. da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com AB$\equiv A \cap B$



Demonstração



$A \cup B = A\bar{B} \; \cup AB \cup \bar{A}B$, disjuntos

Logo (axioma):

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo P(AB)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) \\ &= \left(P(A\bar{B}) + P(AB)\right) + P\left((\bar{A}B) + P(AB)\right) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB)\end{aligned}$$

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo [a,b]
- Seja o acontecimento A “número pertencer a [c,d]”

- P(A)= (d-c)/ (b-a)

- A probabilidade de qualquer ponto $x \in [a,b]$ é $igual\ \ a\ 0$
  - Ter, por exemplo,]c,d[dará igual

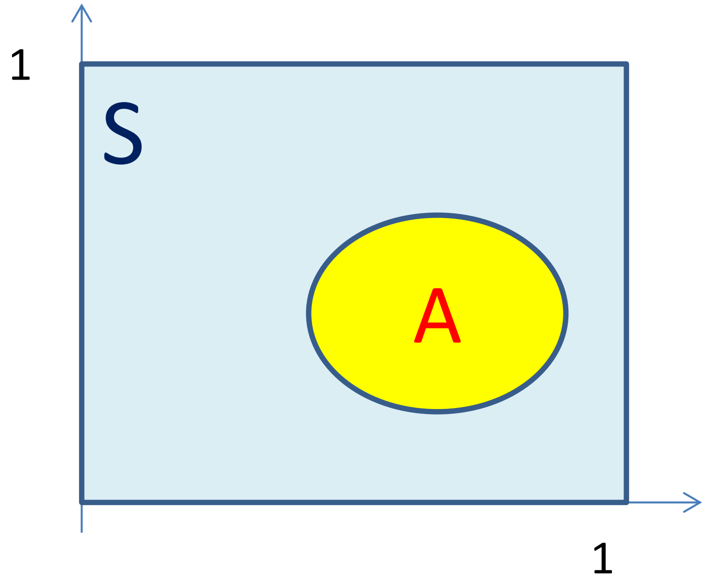
Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo [0,90] relativo ao atraso de chegada a uma aula de 1h30m
- Seja o acontecimento A "chegar dentro da tolerância, i.e. [0,15[
- P(A)= (15-0)/ (90-0) = 0.16(6)
  - Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula ☹
    - O que não é válido

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais x,y entre 0 e 1

$$S = \{x, y : x \in [0,1] \; \cap y \; \in [0,1]\}$$



$$P(A) = \frac{Área\ (A)}{Área\ (S)}$$

A axiomática é compatível com as teorias anteriores ?

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»

  – pois se as frequências são números não negativos também convergem para um número não negativo.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»

  – pois as frequências relativas de um acontecimento certo são sempre 1, logo, tendem para 1.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»
  - pois se os acontecimentos A e B são incompatíveis não têm resultados comuns, a frequência relativa de AUB é a frequência relativa de A mais a frequência relativa de B e o limite da soma das duas sucessões é a soma dos limites.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Lei de Laplace
  - Num espaço finito de resultados equiprováveis a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a A (#A) e o número de resultados possíveis (#E)

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»
  - Pois $p(A)=\#A / \#E$ o que significa que p(A) é o quociente entre um número real não negativo e um número positivo.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»
  - Pois   p(E)= #E / #E é o quociente entre dois números iguais.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»

  – Se A e B são disjuntos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

E então:

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{\#A + \#B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} = p(A) + p(B)$$

Exemplo de aplicação: k ocorrências em n experiências

- n lançamentos de moeda de 1 Euros

  P(Face) = P(F) = p ; P(Verso) = P(V) = 1-p

- P(FVVFFF)= P(F)xP(V) … = p (1-p) (1-p) p p p

- P(FVVFFF) = $p^{\#\,Faces}\,(1-p)^{\#\,Versos}$

$$= p^4(1-p)^2$$

...

- P(“k Faces”) = ?
- P(“k Faces”) = $\sum_{sequências\ com\ k\ Faces} P(sequência)$

  =(# $sequências\ de\ k\ Faces).p^k(1-p)^{n-k}$

- Num de sequências = Combinações com k faces em n
- P(“k Faces”)= $\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.p^k(1-p)^{n-k}$$

Para aprender mais …

- Links para material online:
  - http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm
  - https://www.youtube.com/course?list=PL10921DED3A8BFF53

- Capítulos iniciais do Livro "Probabilidades e Processos Estocásticos", F. Vaz, Universidade de Aveiro
- Capítulos iniciais do Livro "O Acaso" , Joaquim Marques de Sá, Gradiva

- Continuamos na próxima aula
  - Probabilidades CONDICIONAIS
- TPC:

Voltando ao problema dos 2 filhos:

Sabendo que um é rapaz, qual a probabilidade de o outro ser também rapaz ?