Serie temporali e ARIMA

Paolo Bosetti (per TSM)

Contents

1 Time series

1.1 La classe `ts`

Le serie temporali vengono create con la funzione nativa `ts(data, start, end, frequency)`, dove:

- `data` è un vettore di dati equispaziati nel tempo
- `start` è la data della prima osservazione
- `end` è la data dell'ultima osservazione
- `frequency` è il numero di osservaizoni per unità temporale

Il significato dell'unità tempo base è arbitrario: se ad esempio indichiamo `start=2019` e `frequency=12` significa che i dati partono dal 2019 e hanno cadenza mensile. È possibile indicare `start=c(2019,6)` per stabilire che il primo dato è di Giugno 2019. **NOTA**: `start` deve essere o uno scalare o un vettore di due elementi, nel cui caso il secondo elemento è l'indice (base 1) del sottoperiodo quando `frequency` è maggiore di 1.

Le opzioni `end` o `deltat` possono essere indicate quando si vuole troncare il vettore di ingresso.

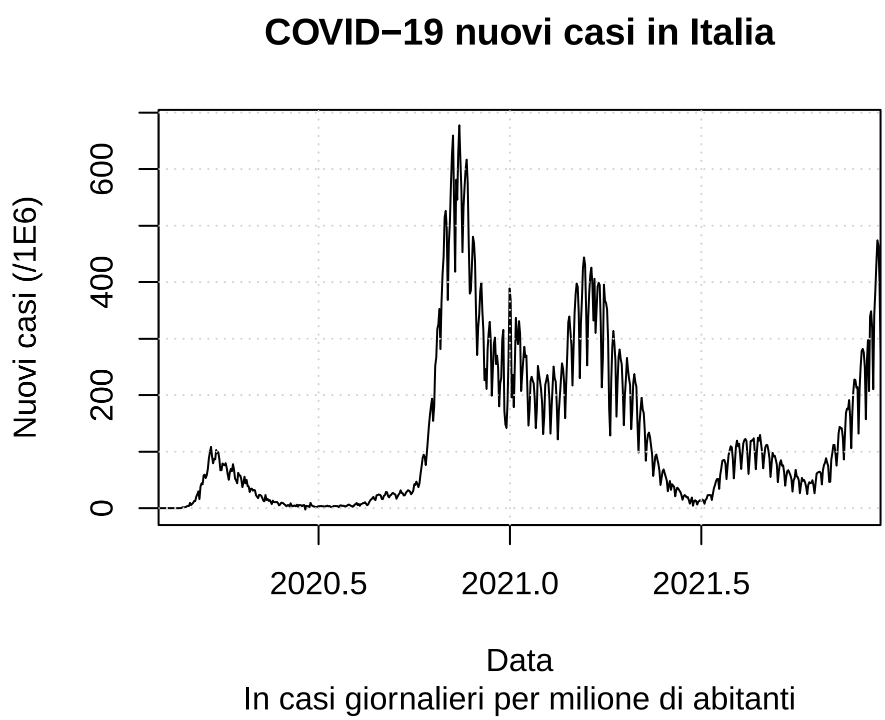
Come dati di esempio, carichiamo i dati della pandemia COVID-19 da Our World in Data:

```
url <- "https://covid.ourworldindata.org/data/owid-covid-data.csv"
datafile <- basename(url)
if (!file.exists(datafile) | difftime(now(),  file.mtime(datafile), units="hours") > 24 ) {
  print("Downloading new data from the Internet")
  download.file(url, datafile)
```

```
}
covid <- read.csv(datafile)
```

Dell'intero set di dati filtriamo e selezioniamo solo i nuovi casi per milione in Italia, cotruendo poi un oggetto time series. Usiamo la libreria `lubridate` per semplificare la gestione delle date:

```
st <- decimal_date(ymd(covid[covid$location=="Italy",]$date[1]))
cpm <- ts(
  covid[covid$location=="Italy",]$new_cases_per_million,
  start=st,
  frequency=365.25
)
plot(cpm,
     main="COVID-19 nuovi casi in Italia",
     sub="In casi giornalieri per milione di abitanti",
     xlab="Data",
     ylab="Nuovi casi (/1E6)",
     xaxs="i"
     )
grid()
```



Si noti che l'espressione `decimal_date(ymd(covid$date[1]))` converte la data 2020-02-24 (una stringa) in un oggetto tempo 2020-02-24 e infine in un valore decimale a base annuale: 2020.147541 (*data astrale*):

```
cat("Data astrale: "); print(c(start(cpm), end(cpm)))
```

```
## Data astrale:
```

```
## [1] 2020.082 2021.968
```

```
cat("Data POSIX: "); print(date_decimal(c(start(cpm), end(cpm))))
```

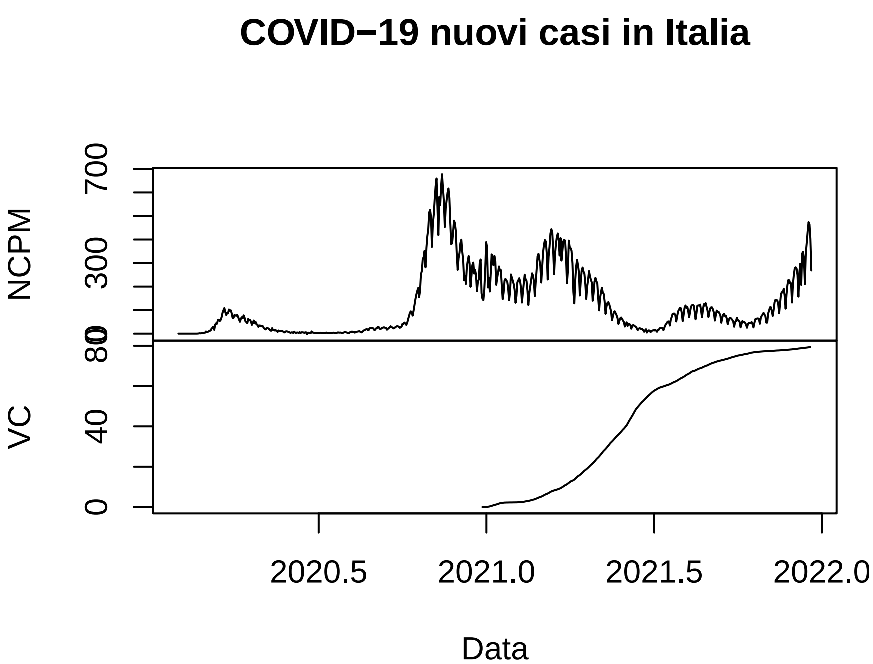
```
## Data POSIX:
```

```
## [1] "2020-01-30 23:59:59 UTC" "2021-12-20 10:42:52 UTC"
```

1.2 Multivarate time series

È possibile creare oggetti timeseries multivariati, passando all'argomento `data` una matrice con più colonne:

```
cpmv <- ts(
  data=cbind(
    covid[covid$location=="Italy",]$new_cases_per_million,
    covid[covid$location=="Italy",]$people_vaccinated_per_hundred
  ),
  names=c("NCPM", "VC"),
  start=st,
  frequency=365.25
)
plot(cpmv,
     main="COVID-19 nuovi casi in Italia",
     sub="In casi giornalieri per milione di abitanti",
     xlab="Data",
     ylab="Nuovi casi (/1E6)",
     )
```

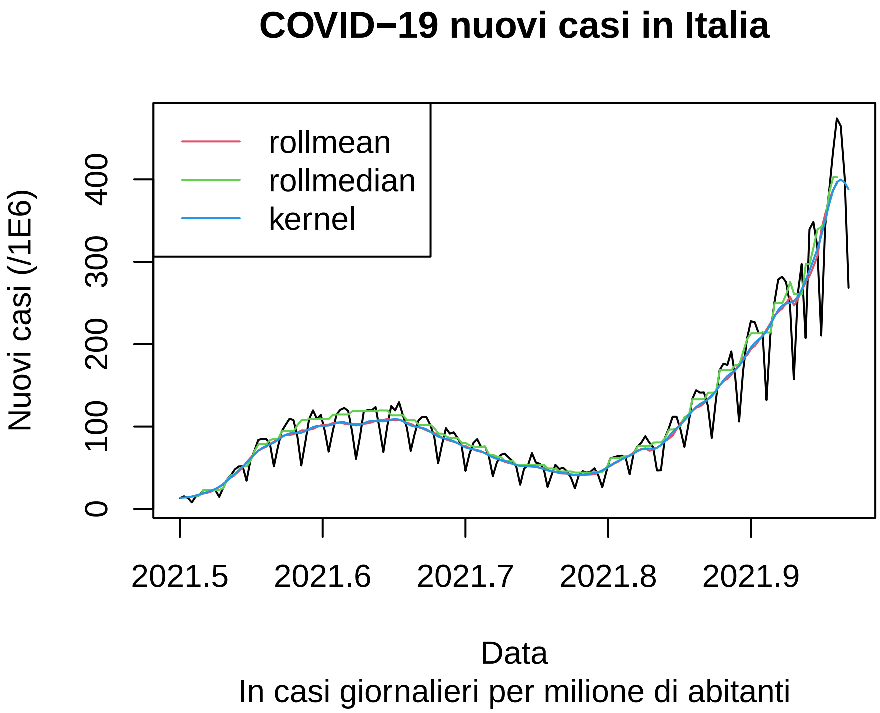


1.3 Finestre e Smoothing

Funzioni utili per manipolare le serie temporali sono `window()` e `time()`: la prima consente di estrarre una finestra temporale tra due date, la seconda consente di estrarre il vettore dei tempi. Inoltre, sono utili le funzioni di smoothing fornite dalla libreria `zoo`

```
win <- window(cpm, start=2021.5, end=end(cpm))
plot(win,
     main="COVID-19 nuovi casi in Italia",
     sub="In casi giornalieri per milione di abitanti",
     xlab="Data",
     ylab="Nuovi casi (/1E6)",
     xaxs="r"
     )
lines(rollmean(win, 7), typ="l", col=2)
```

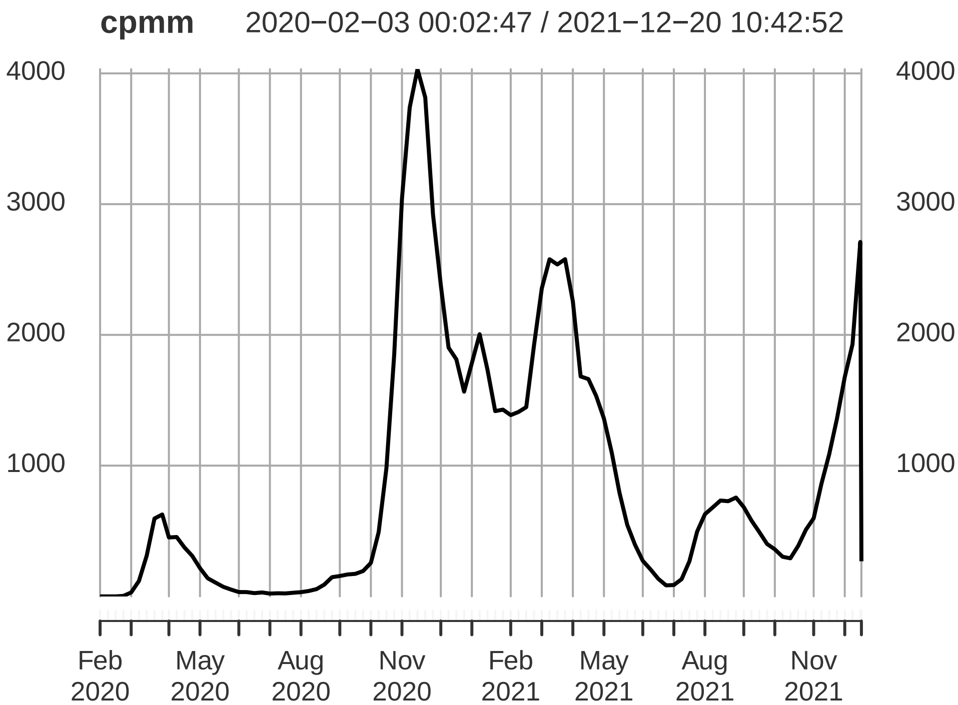
```
lines(rollmedian(win, 7), typ="l", col=3)
lines(ksmooth(time(win), win, "normal", bandwidth=1/(365.25 / 7)), col=4)
legend("topleft", lty=1, col=2:4, legend=c("rollmean", "rollmedian", "kernel"))
```



1.4 Consolidamento

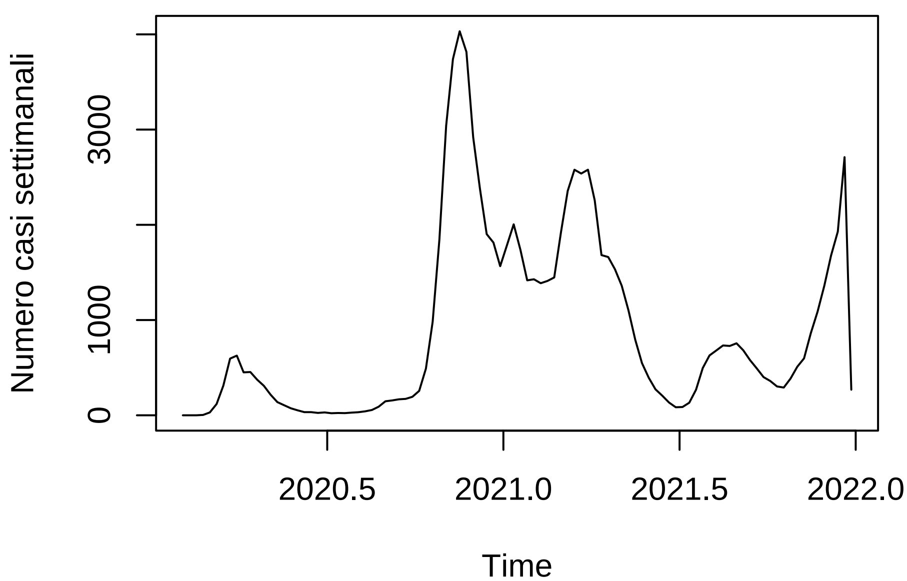
È spesso utile consolidare una serie temporale per sotto-periodi: ad esempio trasformare una serie giornaliera come `cpm` in una serie mensile o settimanale. La libreria `xts` mette a disposizione le funzioni `apply.[dayly|wekly|monthly|quarterly|yearly]()`, che però operano su un differente tipo di oggetti, appunto la classe `xts`. La libreria `tsbox` contiene appunto la funzione `ts_xts()` per convertire un `ts` in un `xts`:

```
cpmm <- apply.weekly(ts_xts(cpm), sum)
plot(cpmm)
```



Ora `cpmm` è un oggetto `xts`: la converisone di nuovo verso `ts` può essere fatta così:

```
cpmm <- ts(coredata(cpmm),
           start = decimal_date(index(cpmm)[1]),
           frequency = 365.25/7)
ts.plot(cpmm, ylab="Numero casi settimanali")
```



1.5 La classe `xts`

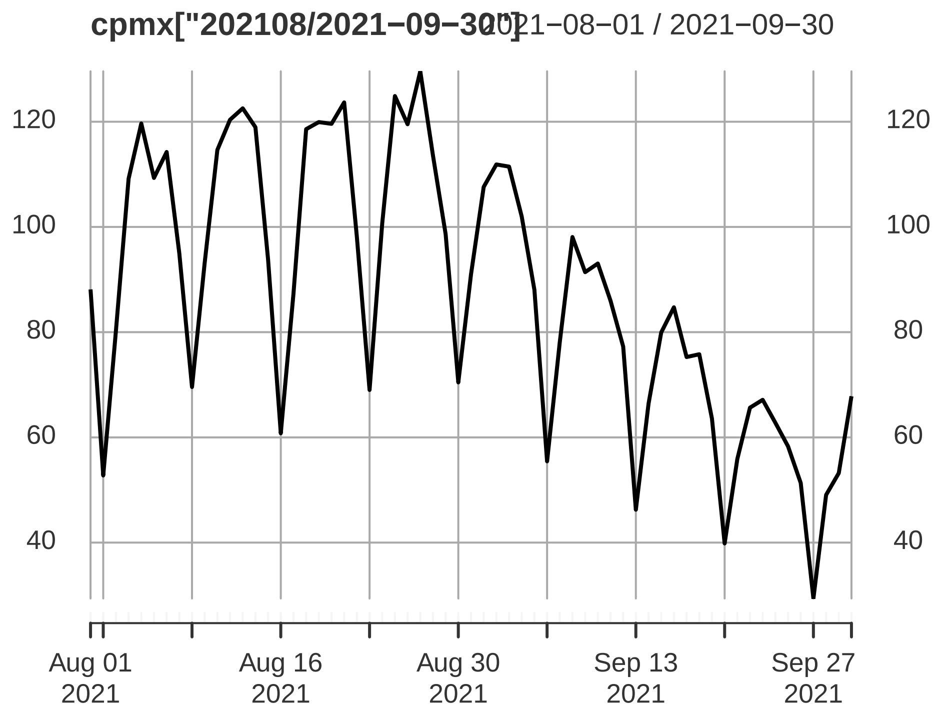
In realtà, la classe `xts` è molto più potente di `ts` nella *gestione* della serie temporale, ed è quindi in certi casi preferibile. Invece che convertire `cpm` come fatto sopra, vediamo come creare direttamente un oggetto `xts`:

```
cpmx <- xts(covid[covid$location=="Italy",]$new_cases_per_million,
            order.by = ymd(covid[covid$location=="Italy",]$date)
```

```
)
```

L'estrazione di sottoinsiemi (subsetting) viene effettuata, anziché con il metodo `window()`, come una semplice indicizzazione (cioè il metodo `[.xts()`). È pussibile usare sia indici numerici (convenzionali) sia stringhe in standard ISO-8601. La data può cioè essere espressa come intervallo:

```r
plot(cpmx["202108/2021-09-30"])
```




```r
# p1 <- autoplot(cpmx["202108/2021-09-30"]) +
#   geom_line() +
#   geom_area(fill="gray", alpha=1/3) +
#   geom_line(data=cpmx["2021-10-1/"], aes(x=Index, y=cpmx["2021-10-1/"]))
# p1
```

La data di inizio (prima di `/`) o di fine dell'intervallo (dopo la `/`) possono essere omesse, in tal caso significa "dall'inizio fino a ... " oppure "da ... fino alla fine". Inoltre, è possibile omettere componenti della data, intendendo così un intero sottoperiodo:

```r
length(cpmx["2021"]) # Tutto l'anno
```

```
## [1] 354
```

```r
length(cpmx["2021-6"]) # Tutto Giugno
```

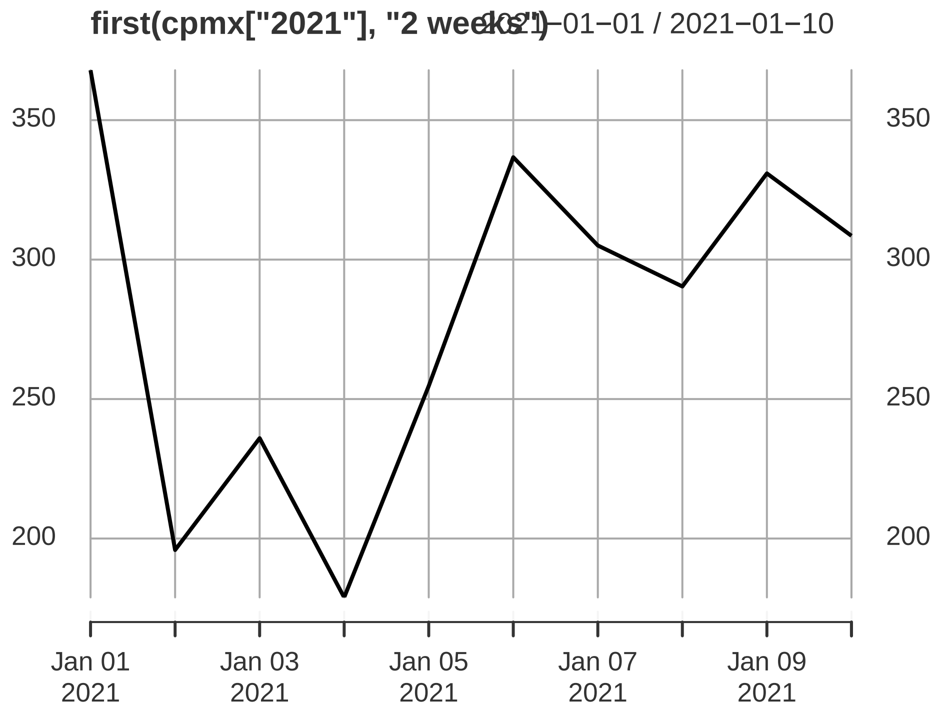
```
## [1] 30
```

```r
last(cpmx, "2 week") # Ultime due settimane
```

```
##                [,1]
## 2021-12-13 210.444
## 2021-12-14 342.320
## 2021-12-15 384.147
## 2021-12-16 432.418
## 2021-12-17 474.014
## 2021-12-18 464.770
## 2021-12-19 402.584
```

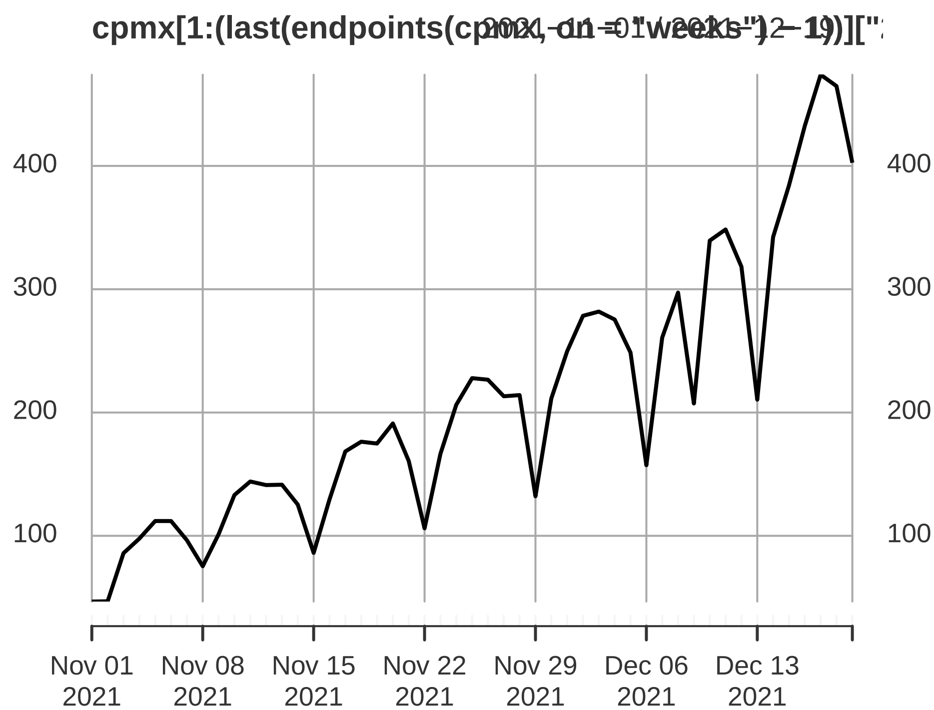
```
## 2021-12-20 268.439
```

```r
plot(first(cpmx["2021"], "2 weeks")) # Prime due settimane del 2021"
```



Infine, la funzione `endpoints()` consente di identificare gli indici della serie a cui terminano specifici periodi (anno, mese, settimana, giorno. . .). Ad esempio, per selezionare i dati fino all'ultima domenica:

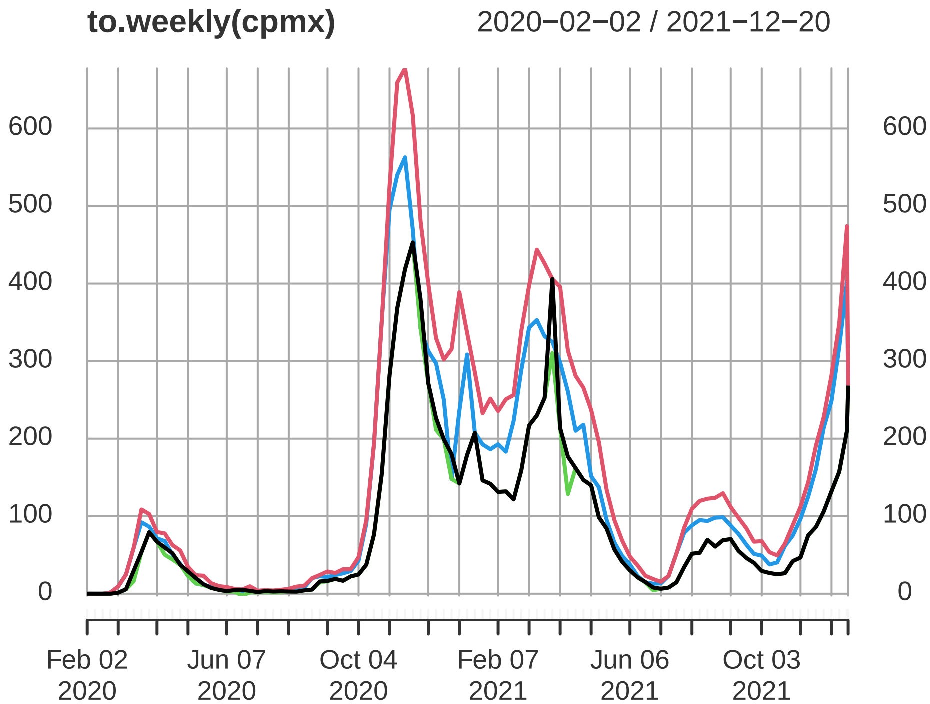
```r
plot(cpmx[1:(last(endpoints(cpmx, on="weeks")-1))]["2021-11/"])
```



Ci sono anche utili funzioni per convertire il periodo in un periodo più lungo: ad esempio, da una serie giornaliera ad una serie settimanale mediante `to_weekly()`. Questi comandi restituiscono quattro serie

“OHLC”: Opening, High, Low, Closing, cioè il primo valore del sottoperiodo, il massimo, il minimo e l’ultimo valore:

```
plot(to.weekly(cpmx))
```



La classe `xts` è quindi molto potente ma ha alcuni punti deboli:

- non va molto d’accordo con le funzioni `Arima()` e `predict()`: gli oggetti regressione che si ottengono sono convertiti nella classe base `ts` ma perdono l’informazione temporale (quindi iniziano con tempo 1 e hanno passo 1)
- il metodo `xts.plot()` è apparentemente più carino, ma molto meno flessibile dell metodo generico: ad esempio è molto complesso estendere una serie sullo stesso plot con dati successivi.

Per questi motivi, si consiglia l’uso di `xts` per la gestione della serie temporale, l’estrazione di sottoperiodi e l’eventuale aggregazione, ma poi si consiglia di convertire di nuovo in `ts` mediante il metodo `ts_ts()` prima di effettuare le regressioni.

2 Regressione e Predizione

2.1 Verifiche iniziali

La prima verifica è sempre quella sui dati mancanti. Eliminiamo qualche dato dalla serie `cpm`per vedere, in seguito, come gestre i dati mancanti:

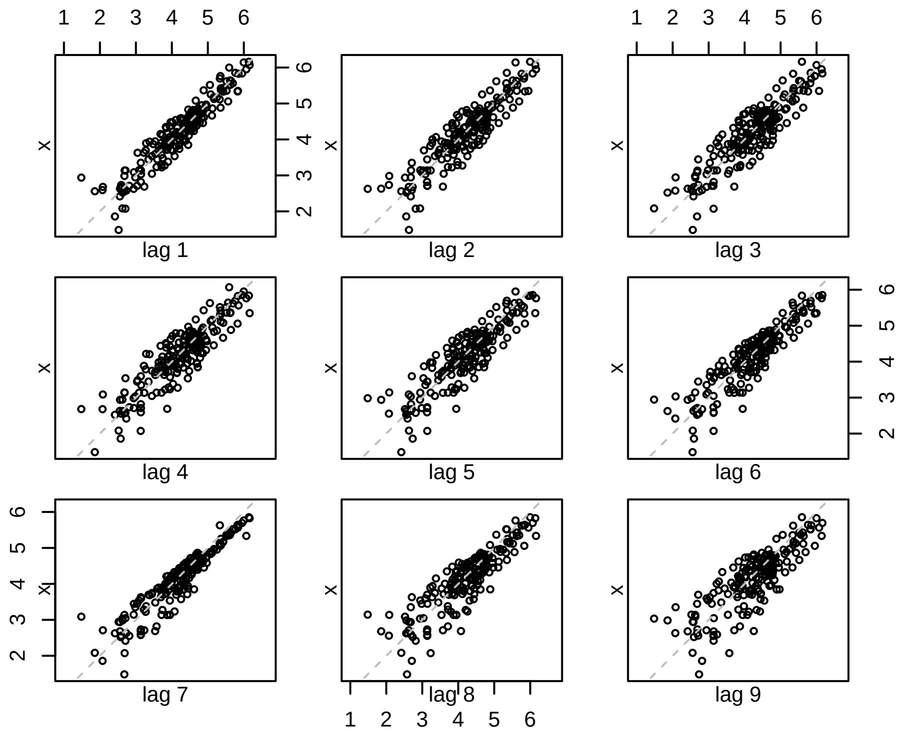
```
cpmx[c(30, 213, 401)] <- NA
```

Decidiamo di sostituire i dati mancanti con la mediana dei dati adiacenti:

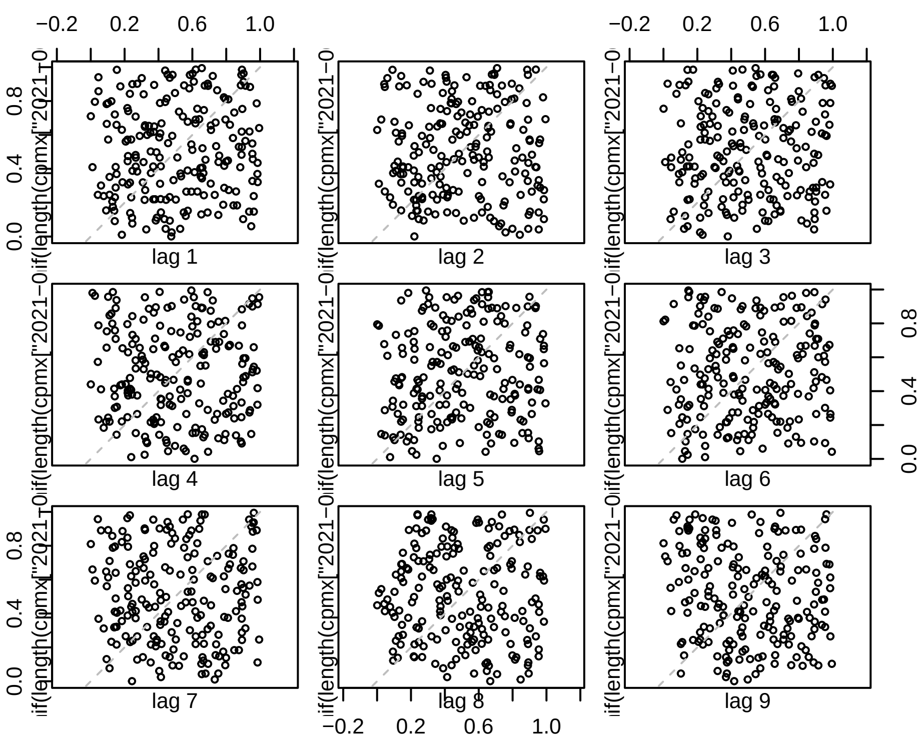
```
nas <- which(is.na(cpmx))
for (i in nas) {
  cpmx[i] = median(cpmx[i-1], cpmx[i+1])
}
```

Prima di qualsiasi analisi su una serie temporale è utile visualizzare il cosiddetto **lag plot**, che è un particolare grafico a dispersione in cui si confrontano i dati di una serie con gli stessi dati con un certo ritardo: se il segnale è puramente casuale, il risultato sarà una nuvola dispersa; viceversa, ogni pattern significa che i dati sono affeti da un andamento regolare. Inoltre, nel nostro caso si nota che la dispersione è molto stretta al lag 7, il ché dimostra la regolarità settimanale della serie temporale.

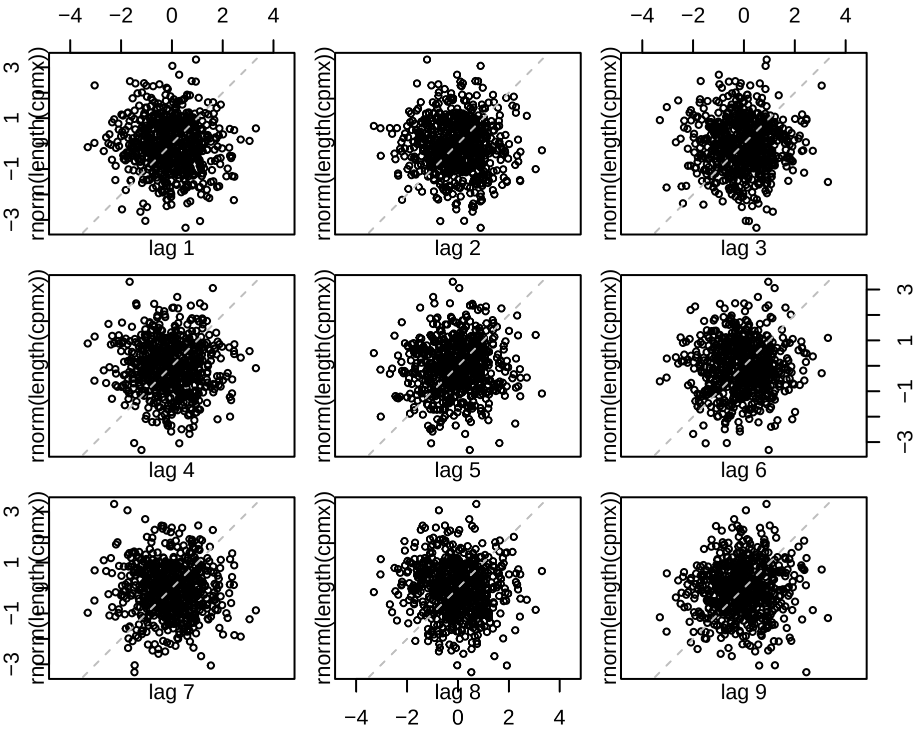
```
lag.plot(log(cpmx["2021-06/"]), lags=9)
```



```
lag.plot(runif(length(cpmx["2021-06/"])), lags=9)
```



```
lag.plot(rnorm(length(cpmx)), lags=9)
```



2.2 Auto-ARIMA

La libreria `forecast` mette a disposizione il metodo più semplice per effettuare la regressione di una serie temporale mediante ARIMA (*Auto-Regressive Integrative Moving Average*). Mettiamolo alla prova sulla serie temporale COVID-19, addestrando il modello fino alla data `2021.7=``rdate_decimal(2021.7)‘, utilizzando il modello per predire i successivi 30 giorni, e poi confrontandolo con i dati reali.

Si noti che le funzioni `auto.arima()` e `forecast()` perdono l'asse dei tempi quando vengono utilizzate su oggetti `xts`, quindi usiamo `xts` per selezionare i peridi (più comodo) ma convertiamo in oggetti `ts` per l'analisi:

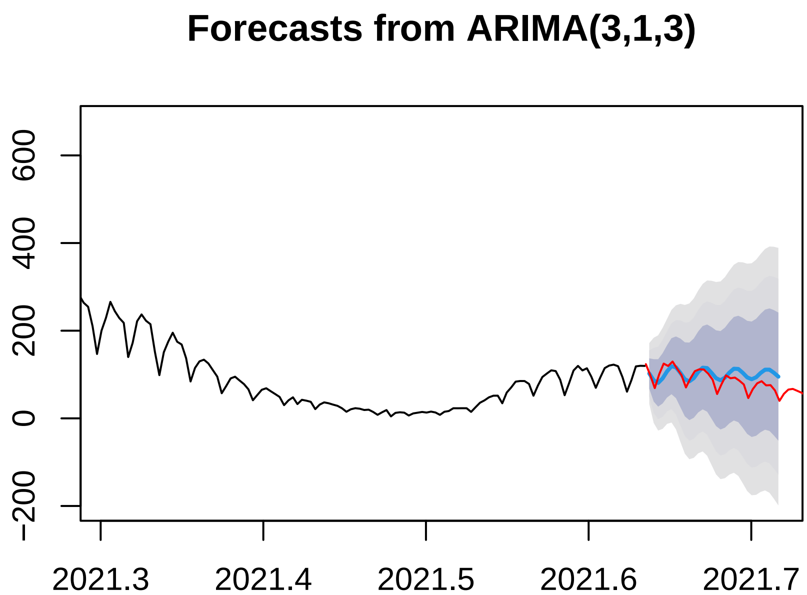
```
d0 <- "/2021-08-20"
d1 <- "2021-08-21/"
win <- ts_ts(cpmx[d0])
(fit2 <- auto.arima(win))
```

```
## Warning: The chosen seasonal unit root test encountered an error when testing for the first differen
## From stl(): series is not periodic or has less than two periods
## 0 seasonal differences will be used. Consider using a different unit root test.
```

```
## Series: win
## ARIMA(3,1,3)
##
## Coefficients:
##          ar1     ar2      ar3      ma1      ma2     ma3
##       0.3362  0.1400  -0.8473  -0.3508  -0.4186  0.7974
## s.e.  0.0388  0.0468   0.0480   0.0456   0.0876  0.0571
##
## sigma^2 estimated as 722.2:  log likelihood=-2668.85
## AIC=5351.69   AICc=5351.89   BIC=5382.08
```

```
plot(forecast(fit2, 30, level=c(80, 95, 99)),
     xlim=c(-120,+30)/365+decimal_date(ymd(d0)))
```

```
    )
new <- ts_ts(cpmx[d1])
lines(new, col="red")
```

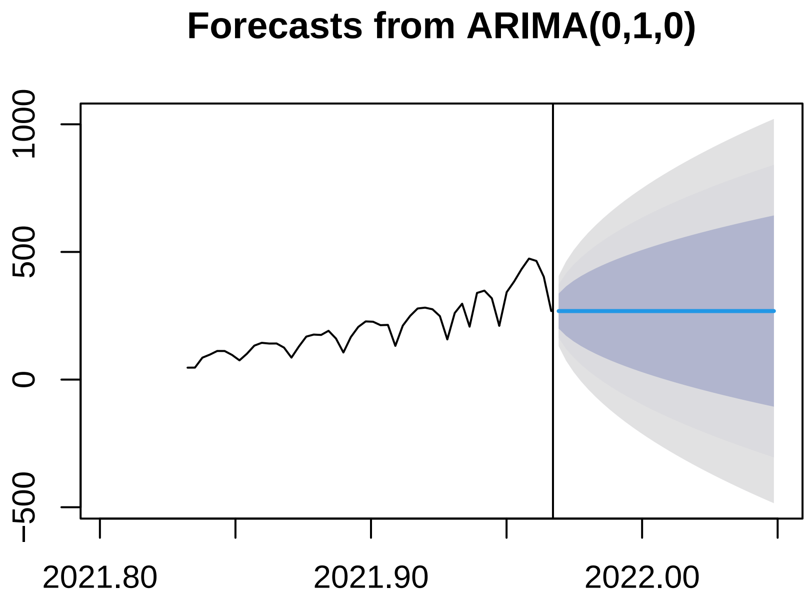


Vediamo le predizioni odierne:

```
win <- last(cpmx, "8 weeks")
(fit <- auto.arima(ts_ts(win)))
```

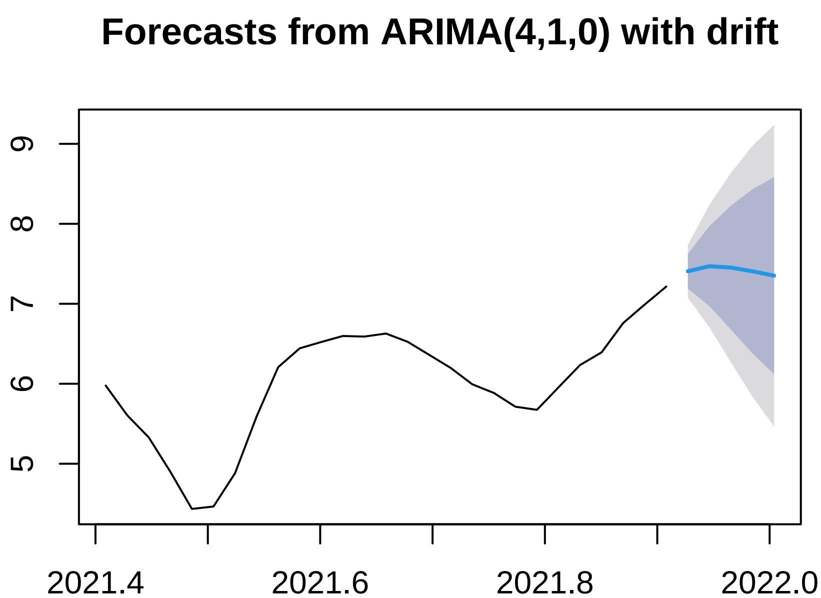
```
## Series: ts_ts(win)
## ARIMA(0,1,0)
##
## sigma^2 estimated as 2846:  log likelihood=-264.4
## AIC=530.79   AICc=530.88   BIC=532.69
```

```
plot(forecast(fit, 30, level=c(80, 95, 99)),
    xlim=c(-60,+30)/365+decimal_date(end(cpmx))
)
abline(v=decimal_date(end(cpmx)))
```



In realtà, le oscillaziomi settimanali sono più un artefatto di misura che una proprietà intrinseca del fenomeno, quindi è più corretto effettuare predizioni su, ad esempio, i valori settimanali. Quindi utilizziamo lo stesso oggetto `cpmm` sopra ottenuto sommando i valori settimanali, e ci concentriamo sulla finestra `2021.4` – `2021.911`. Inoltre, come vedremo più avanti, il metodo ARIMA si applica a serie *stazionarie*, in cui cioè valor medio e varianza sono stabili. Il metodo più comune per stabilizzare la varianza è *trasformare* i dati applicanco il logaritmo:

```
cpmm <- apply.weekly(ts_xts(cpm), sum)
win <- ts_ts(cpmm["2021-05-27/2021-11-29"])
# Fino all'ultima domenica
#win <- ts_ts(cpmm[1:(last(endpoints(cpmm, on="weeks")-1))]["2021-6/"])
fit <- auto.arima(log(win))
plot(forecast(fit, h=5))
```



2.3 ARIMA, the hard way

2.3.1 Parametri del modello

Per calibrare un modello ARIMA è necessario identificare i parametri p, d e q.

Anzitutto, un modello ARMA ($d = 0$) si può applicare solo ad una serie temporale *stazionaria*, cioè priva di deriva e a varianza costante. Se la serie in questione non ha queste caratteristiche, è possibile applicare delle trasformazioni: ad esempio, possiamo applicare il logaritmo per comprimere la varianza, e differenziare una o più volte per rimuovere la deriva. Il numero di differenziazioni corrisponde al parametro d che trasforma un modello ARMA(p, q) in ARIMA(p, d, q).

Il passo successivo è individuare il grado dei processi AR e MA. Per quanto riguarda un processo MA, il suo grado q è il numero di elementi consecutivi interessati alla media mobile:

$$x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

È evidente, quindi, che i campioni più vicini di q saranno fortemente correlati, mentre quelli più lontani risulteranno non correlati. Possiamo cioè stimare q sulla base della *funzione di autocorrelazione* (ACF), che valuta l'autocorrelazione tra due copie della stessa serie traslate di una certa distanza in passi temporali h, detta *lag*:

$$\text{ACF}(h) = \text{corr}(x_t, x_{t+h})$$

Tale funzione vale sempre 1 per un lag 0 (autocorrelazione con se stesso), e per un processo MA(q) va a zero al lag $q + 1$.

Per quanto riguarda i processi AR(p), essi rappresentano un'autoregressione:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t$$

Per stimare p abbiamo quindi bisogno di stimare la correlazione tra x_t e una sua versione ritardata, eliminando i contributi a lag intermedi. Si costruisce cioè la *funzione di autocorrelazione parziale* (PACF), che riporta, in funzione del lag h, l'autocorrelazione avendo eliminato (sostituendolo con una regressione) il contributo tra lag 1 e lag $n - 1$:

$$\text{PACF}(h) = \text{corr}(x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}, x_t - \hat{x}_t)$$

dove $\hat{x}_{t+h} = \beta_1 x_{t+h-q} + \beta_2 x_{t+h-2} + \ldots \beta_{h-1} x_{t+1}$ e $x_t = \beta_1 x_{t+1} + \beta_2 x_{t+2} + \cdots + \beta_{h-1} x_{t+h-q}$, e i coefficienti β_i sono calcolati minimizzando i residui.

Anche in questo caso, il grado del processo q corrisponde al lag al di là del quale la PACF va a zero (*drop-off*).

Quindi, come regola base, dopo aver reso stazionaria la serie storica mediante differenziazione, si studiano ACF e PACF per identificare q e p, rispettivamente. Valgono le seguenti linee guida:

- se il processo è AR, la PACF ha un drop-off dopo il lag p e la ACF decade geometricamente
- se il processo è MA, la ACF ha un drop-off dopo il lag q e la PACF decade geometricamente
- se il processo è ARMA, sia ACF che PACF manifestano un drop-off, e possono essere utilizzate per stimare p e q; tuttavia esse sono spesso meno chiare che nei casi precedenti
- se un processo è puro noise, né ACF né PACF mostrano alcuna struttura
- eventuali *stagionalità* si mostrano come picchi intensi a lag elevati (corrispondenti al periodo della stagionalità)

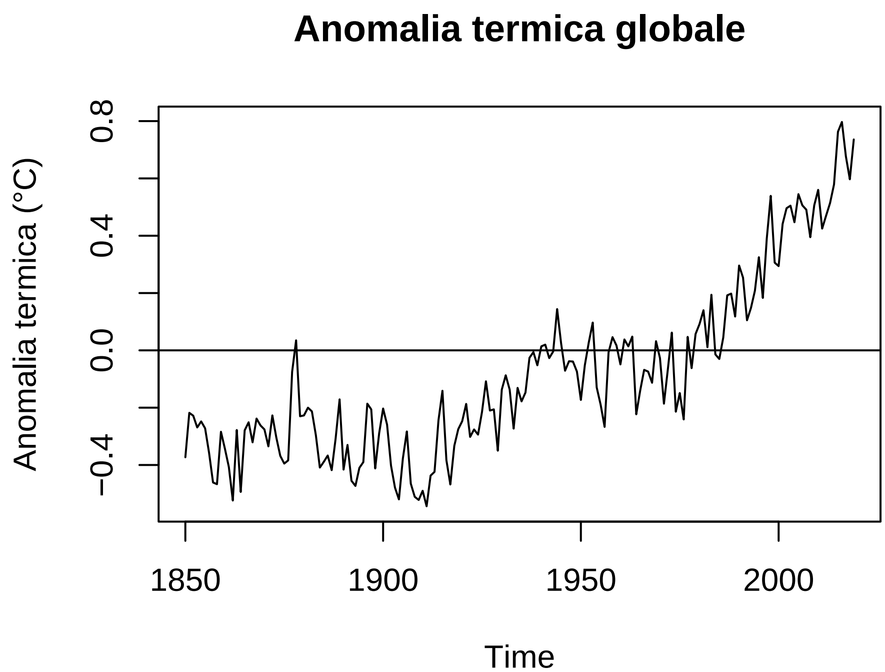
Generalmente, a meno che un processo non risulti AR o MA puro, le funzioni ACF e PACF vengono utilizzate per identificare *set* di possibili parametri p e q, scegliendo poi la combinazione migliore mediante gli stimatori di bontà della regressione. Il più adatto a questo scopo è AIC (Akaike Information Criterion), che deve essere minimizzato.

2.3.2 Esempio: Anomalia terra-mare

Consideriamo i dati di anomalia termica terra-mare, disponibili su Our World in Data.

Carichiamo i dati e li importiamo in una serie temporale:

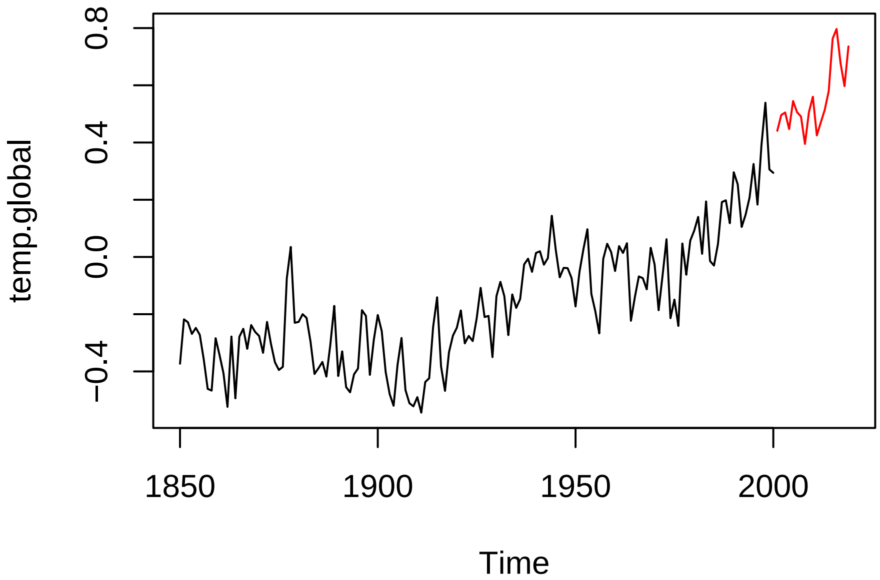
```
datafile <- "temperature-anomaly.csv"
data <- read.csv(datafile)
t.global <- ts(data[data$Entity=="Global",]$Median.temp, start=1850)
plot(t.global, ylab="Anomalia termica (°C)", main="Anomalia termica globale")
abline(h=0)
```



La serie temporale rappresenta i valori tra 1850, 1, 2019, 1.

Dividiamo il dataset in due parti: dal 1850 fino al 2000, da usare per il training del modello, e una dal 1851 fino al 2019 da usare per la validazione:

```
temp.global <- window(t.global, end=2000)
temp.global.test <- window(t.global, start=2001)
plot(temp.global,
     xlim=c(start(temp.global)[1], end(temp.global.test)[1]),
     ylim=c(min(temp.global), max(temp.global.test))
)
lines(temp.global.test, col="red")
```



Un modello ARIMA deve essere applicato ad una serie **stazionaria**: la serie cioè deve avere una varianza stabile nel tempo e non deve mostrare trend. Per stabilizzare la varianza si applicano delle *trasformazioni* alla serie: elevazioni a potenza o logaritmi. Per eliminare i trend si differenzia il segnale una o più volte: il numero di differenziazioni è l'indice di integrazione del modello ARIMA.

La trasformazione migliore è quella che minimizza il coefficiente di varianza della serie. Il metodo Box-Cox è comunemente adottato per individuare il parametro di trasformazione λ che minimizza il coefficiente di variazione:

```
(lambda <- BoxCox.lambda(temp.global + 273.15))
```

```
## [1] -0.9999242
```

Si noti che si sono trasformati i dati in gradi Kelvin, dato che il metodo richiede serie di dati strettamente positivi (coinvolge il logaritmo). Il valore di λ ottenuto è molto vicino a 1, per cui si ritiene che non sia necessaria alcuna trasformazione.

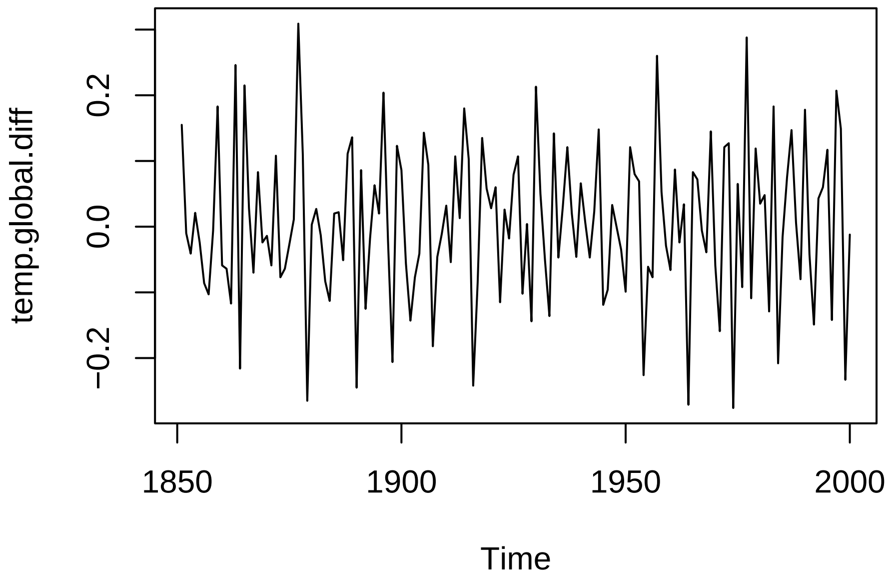
```
# se lambda fosse diversa da 1, si procederebbe così:
temp.global.BC <- BoxCox(temp.global + 273.15, lambda)
# ma non è necessario...
```

Il prossimo passo è eliminare il trend mediante differenziazione. Il comando `ndiffs()` restituisce l'opportuno ordine di differenziazione per stabilizzare la serie, dopodiché il comando `diff(ts, differences=n)` applica la differenziazione di ordine `n`:

```
(d <- ndiffs(temp.global))
```

```
## [1] 1
```

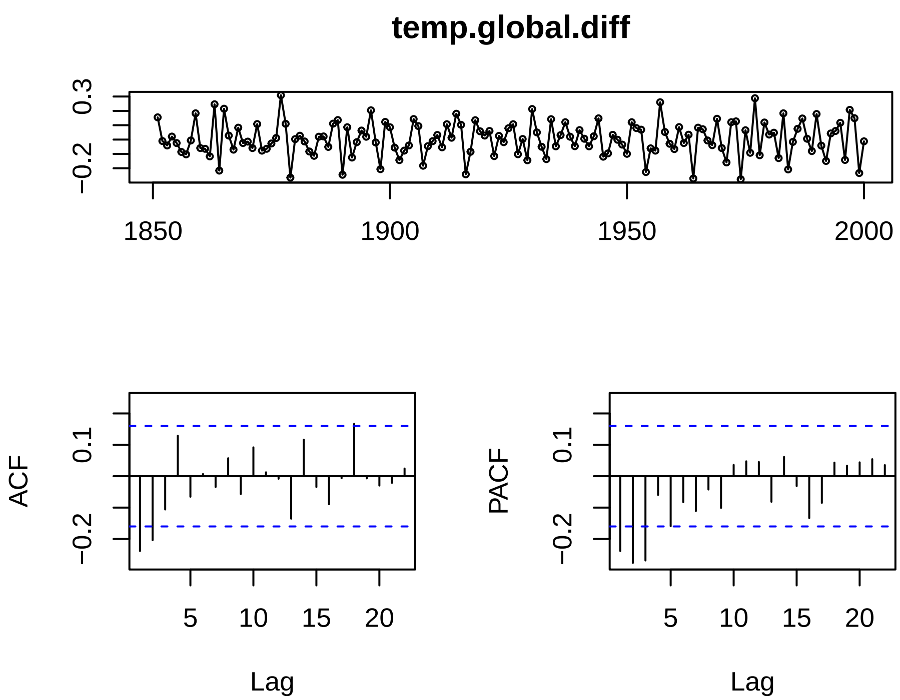
```
temp.global.diff <- diff(temp.global, diff=d)
plot(temp.global.diff)
```



Come si vede, la varianza è stazionaria e la serie trasformata non mostra tendenze.

A questo punto applichiamo quindi le funzioni di autocorrelazione (`acf`) e di autocorrelazione parziale (`pacf`) per identificare i parametri rispettivamente q e p del modello ARIMA(p, d, q), avendo già identificato d con il comando `ndiffs`.

```
# Separatamente:
## Pacf(temp.global.diff)
## Acf(temp.global.diff)
# in alternativa:
tsdisplay(temp.global.diff)
```



La `pacf` mostra 3 picchi prima del drop-off, quindi $p = 3$. Analogamente, anche la `acf` mostra due picchi prima del drop-off, quindi $q = 2$

Possiamo effettuare la regressione ARIMA con i parametri $(3, 1, 2)$. Utilizziamo la funzione `Arima` della libreria `forecast` anziché la versione standard `arima`, dato che la prima consente anche di considerare il trend (o drift). Per confronto, verifichiamo anche il modello ottenuto con `auto.arima`:

```r
fit <- Arima(temp.global, order=c(3, 1, 2), include.drift = T)
summary(fit)
```

```
## Series: temp.global
## ARIMA(3,1,2) with drift
##
## Coefficients:
##           ar1     ar2      ar3     ma1      ma2   drift
##       -0.6007  0.0957  -0.2149  0.1703  -0.6394  0.0043
## s.e.   0.1468  0.1687   0.0961  0.1356   0.1264  0.0026
##
## sigma^2 estimated as 0.01103:  log likelihood=127.89
## AIC=-241.79   AICc=-241   BIC=-220.71
##
## Training set error measures:
##                        ME      RMSE        MAE      MPE     MAPE      MASE
## Training set 0.0003358798 0.1025512 0.08439279 5.176789 96.67416 0.9002858
##                     ACF1
## Training set 0.003625367
```

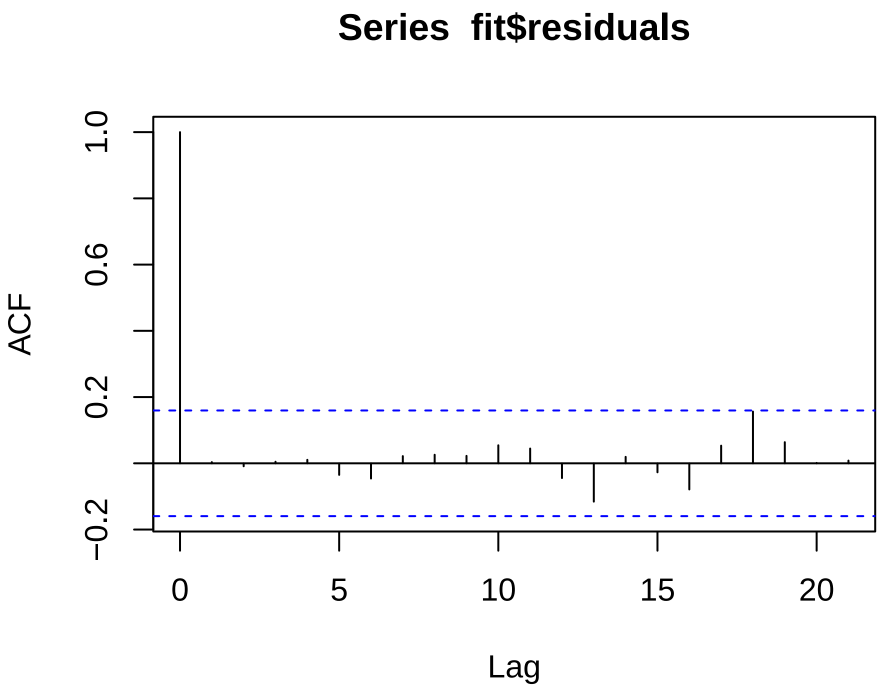
```r
fit.auto <- auto.arima(temp.global)
summary(fit.auto)
```

```
## Series: temp.global
## ARIMA(2,1,2) with drift
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ma1     ma2   drift
##       0.5121  -0.2270  -0.9562  0.1726  0.0043
## s.e.  0.5754   0.2112   0.5853  0.4805  0.0026
##
## sigma^2 estimated as 0.01117:  log likelihood=126.44
## AIC=-240.88   AICc=-240.3   BIC=-222.82
##
## Training set error measures:
##                        ME      RMSE        MAE      MPE     MAPE      MASE
## Training set 0.0003019209 0.1035866 0.08473039 5.571973 101.0788 0.9038872
##                      ACF1
## Training set -0.002193169
```

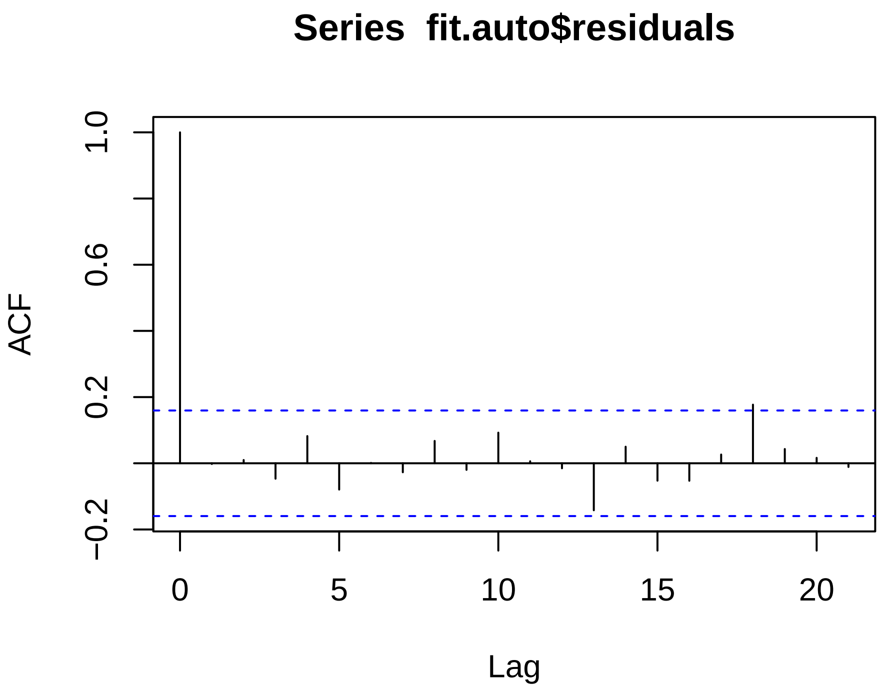
Come si osserva, la versione automatica propone un modello ARIMA$(2, 1, 2)$, che ha un parametro AIC leggermente inferiore.

Il prossimo passo è verificare i residui: perché il modello sia adeguato, essi devo essere casuali e normali. La casualità può essere studiata con la `acf`: se la serie temporale è casuale, l'unico indice di correlazione deve essere il primo.

```r
acf(fit$residuals)
```

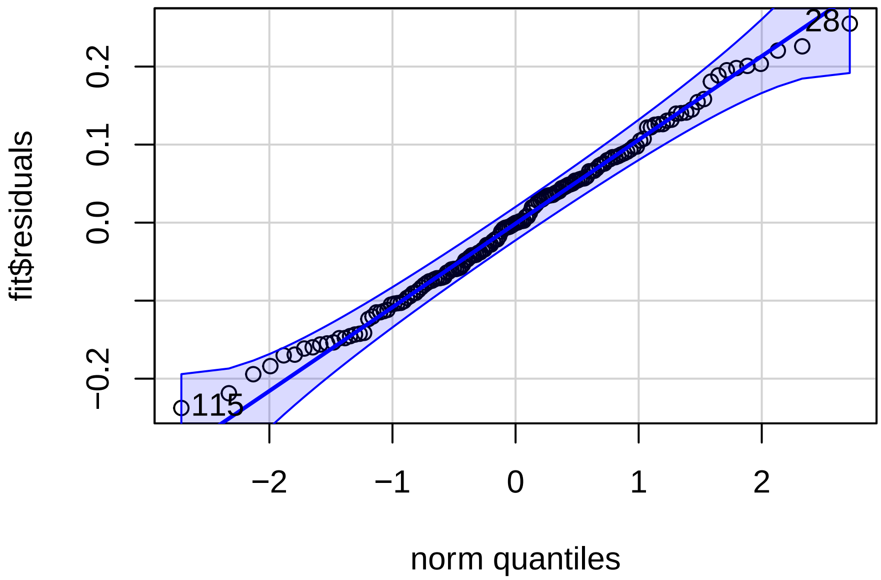



```
acf(fit.auto$residuals)
```



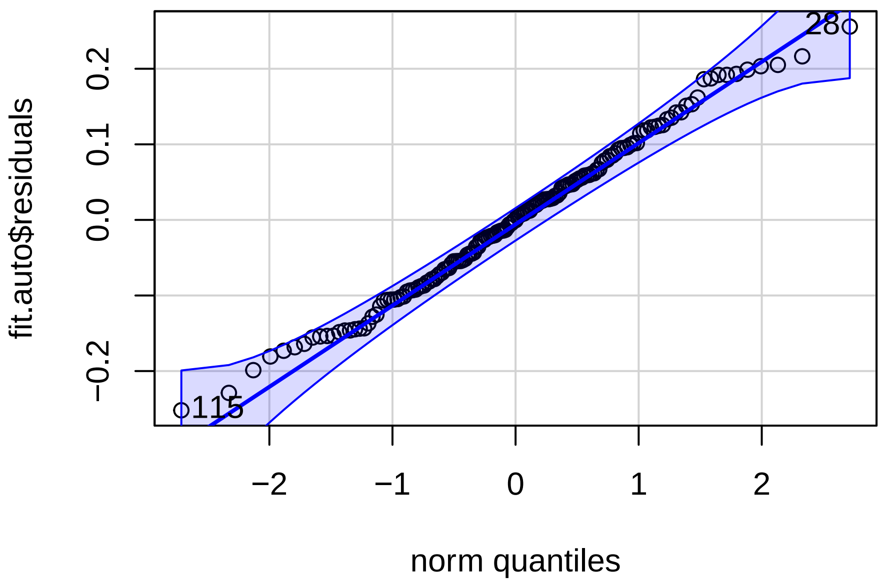
La normalità può essere studiata al solito con un diagramma Q-Q:

```
qqPlot(fit$residuals)
```




```
## [1]  28 115
```

```
qqPlot(fit.auto$residuals)
```

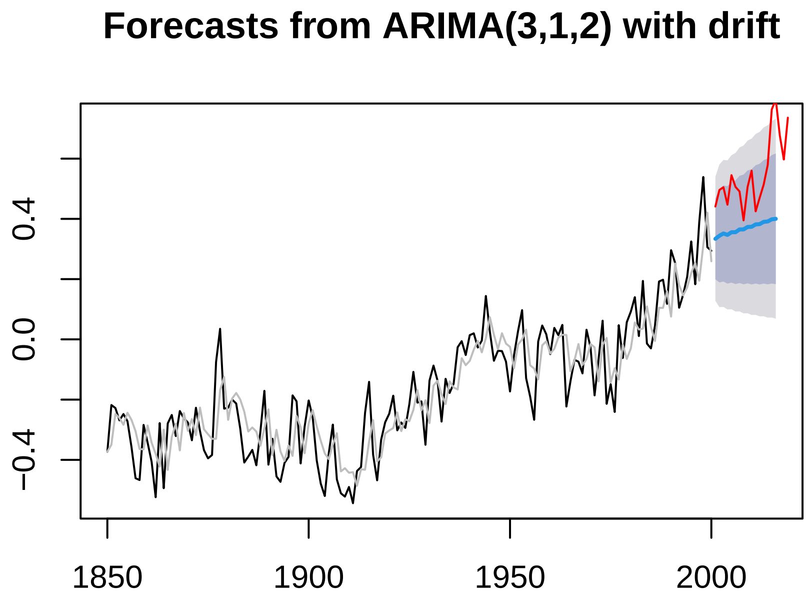



```
## [1]  28 115
```

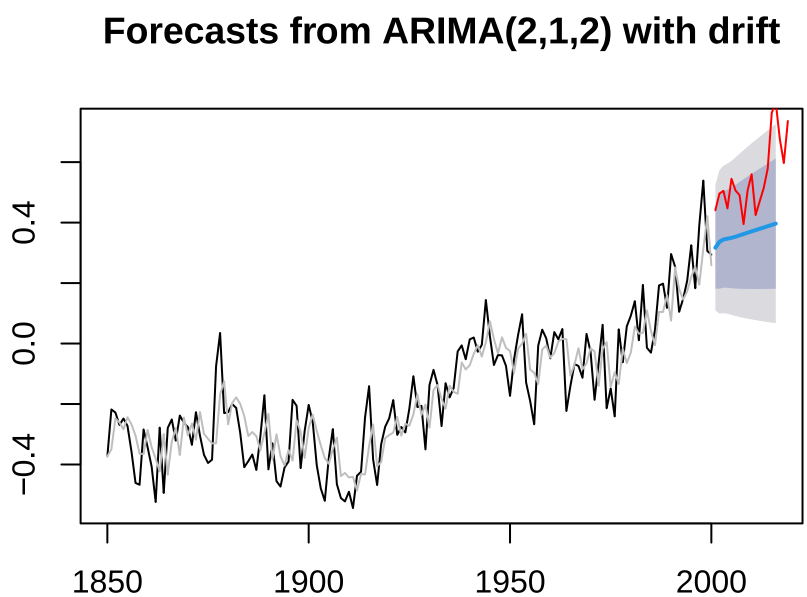
Entrambi i modelli risultano quindi adeguati.

Possiamo infine verificare la predizione, confrontandola con i dati successivi al 2000, per entrambi i modelli:

```
plot(forecast(fit, h=16))
lines(temp.global.test, col="red")
lines(fit$fitted, col="gray")
```




```r
plot(forecast(fit.auto, h=16))
lines(temp.global.test, col="red")
lines(fit$fitted, col="gray")
```

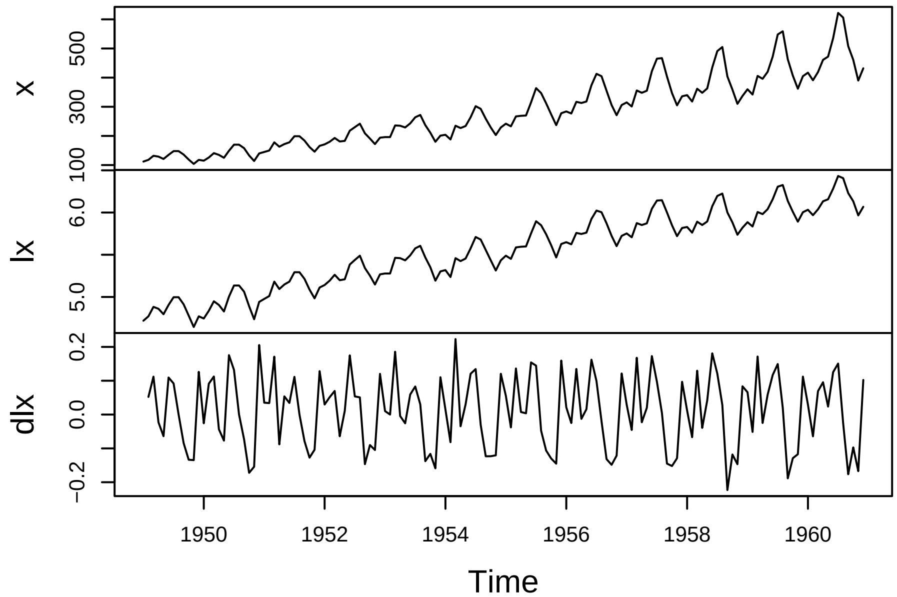



```r
## ggplot:
# autoplot(forecast(fit, h=16)) + geom_line(aes(x=index(fit$x), y=fit$fitted), color="gray") + geom_lin
```

2.3.3 Esempio: Seasonal ARIMA (SARIMA)

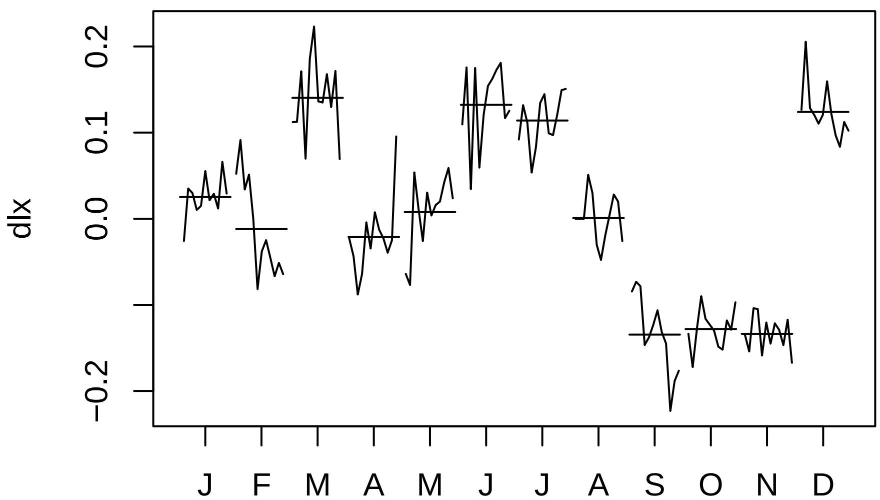
Consideriamo l'effetto della stagionalità. Utilizziamo la serie storica `AirPassengers` integrata in R.

```r
x <- AirPassengers
lx <- log(x) # logaritmo per stabilizzare la varianza
dlx = diff(lx) # prima differenziazione
plot.ts(cbind(x,lx,dlx), main="")
```



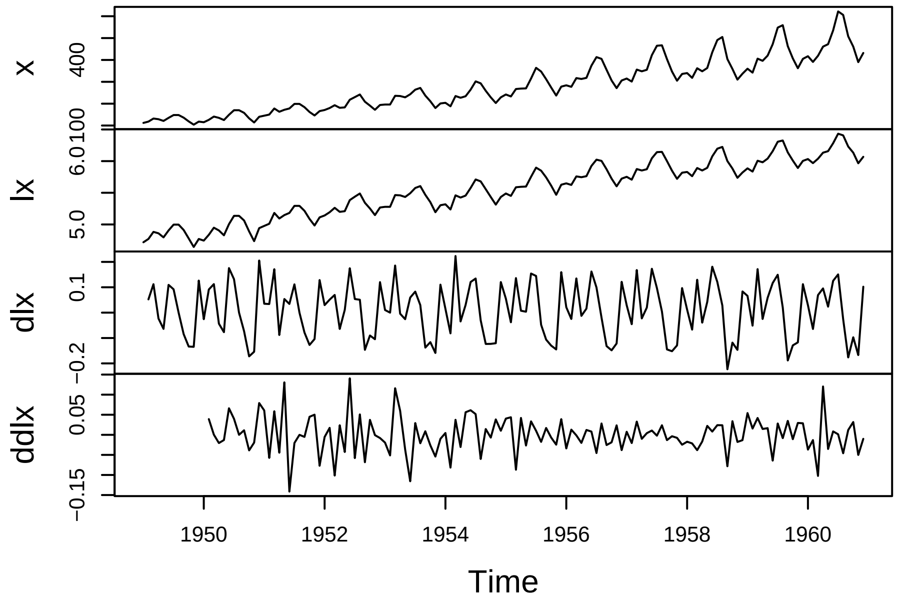
La serie `dlx` mostra ancora un evodente periodicità stagionale. Questa può essere evidenziata mediante la funzione `monthplot()`, che raggruppa anni diversi per lo stesso mese:

```
monthplot(dlx)
```

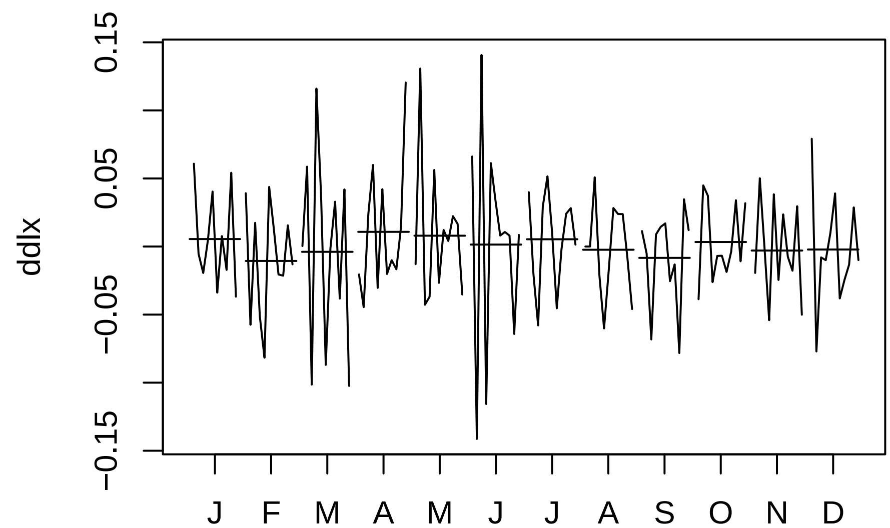


È evidente come i valori per lo stesso mese tendono a raggrupparsi. Possiamo quindi provare a differenziare con lag 12 oltre che con lag 1:

```
ddlx <- diff(dlx, 12)
plot.ts(cbind(x,lx,dlx, ddlx), main="")
```

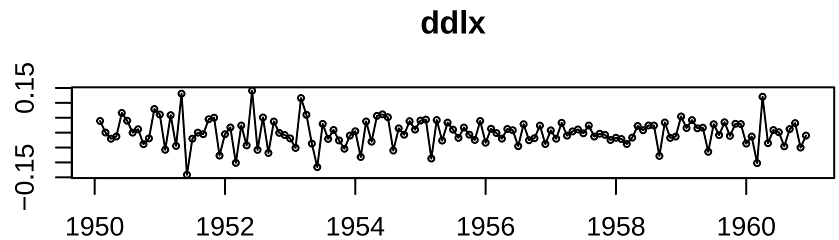


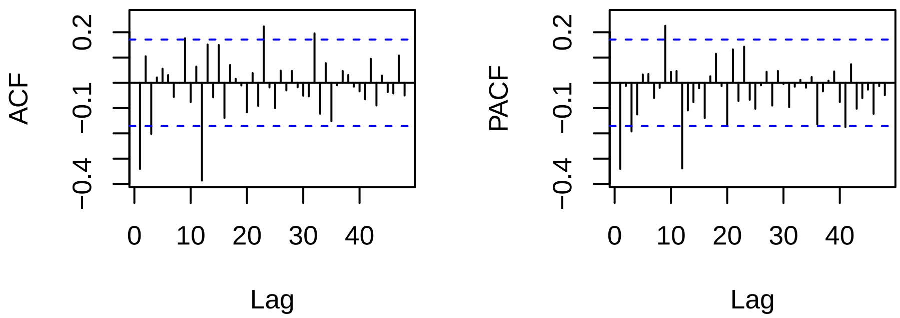

```
monthplot(ddlx)
```



A questo punto studiamo l'autocorrelazione per identificare i parametri del modello SARIMA:

```
tsdisplay(ddlx, lag.max = 4*12)
```





Anzitutto, per eliminare il trend abbiamo differenziato 1 volta sia a lag 1 che a lag 12, quindi i parametri d della parte stagionale e di quella non stagionale saranno entrambi 1. In formula, si scrive che il modello trasformato è $\nabla_{12}\nabla \log x_t$.

Per quanto riguarda i parametri p e q, entrambi i diagrammi di autocorrelazione mostrano un forte picco a lag 12 (riprova della stagionalità) e entrambi i grafici mostrano una rapida caduta verso un'oscillazione stabilizzata: dopo un picco a lag 1, sial la PACF che la ACF passano all'oscillazione stabilizzata, quindi $p = 1$ e $q = 1$. Dopo il picco a lag 12, invece, la PACF mostra una decrescita geometrica, il che indica il termine $p = 0$ (modello AR), mentre la ACF mostra un rapido smorzamento subito dopo il primo picco, che indica $q = 1$ nel modello MA. Secondo la notazione comune, il modello appropriato è quindi $\text{ARIMA}(1,1,1) \times (0,1,1)_{12}$, ovvero un modello stagionale con lag 12 con parametri $(1,1,1)$ per la parte non-stagionale, e $(0,1,1)$ per la parte stagionale.

```
(fit1 <- arima(lx, order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,1,1), period = 12)))
```

```
##
## Call:
## arima(x = lx, order = c(1, 1, 1), seasonal = list(order = c(1, 1, 1), period = 12))
##
## Coefficients:
##          ar1      ma1     sar1     sma1
##       0.1666  -0.5615  -0.099  -0.4973
## s.e.  0.2459   0.2115   0.154   0.1360
##
## sigma^2 estimated as 0.001336:  log likelihood = 245.16,  aic = -480.31
```

Per sicurezza valutiamo anche il modello $\text{ARIMA}(1,1,1) \times (1,1,1)_{12}$:

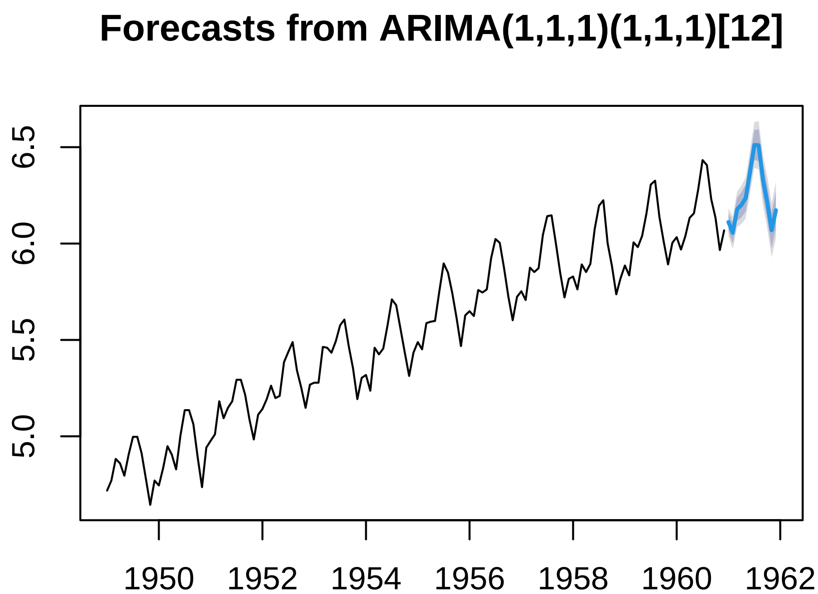
```
(fit2 <- arima(lx, order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,1,1), period = 12)))
```

```
##
## Call:
## arima(x = lx, order = c(1, 1, 1), seasonal = list(order = c(1, 1, 1), period = 12))
##
## Coefficients:
```

```
##          ar1      ma1     sar1      sma1
##       0.1666  -0.5615  -0.099  -0.4973
## s.e.  0.2459   0.2115   0.154   0.1360
##
## sigma^2 estimated as 0.001336:  log likelihood = 245.16,  aic = -480.31
```

Come si nota, il valore di AIC è leggermente inferiore, quindi potremmo adottare il secondo modello ed effettuare una predizione per i successivi 12 mesi:

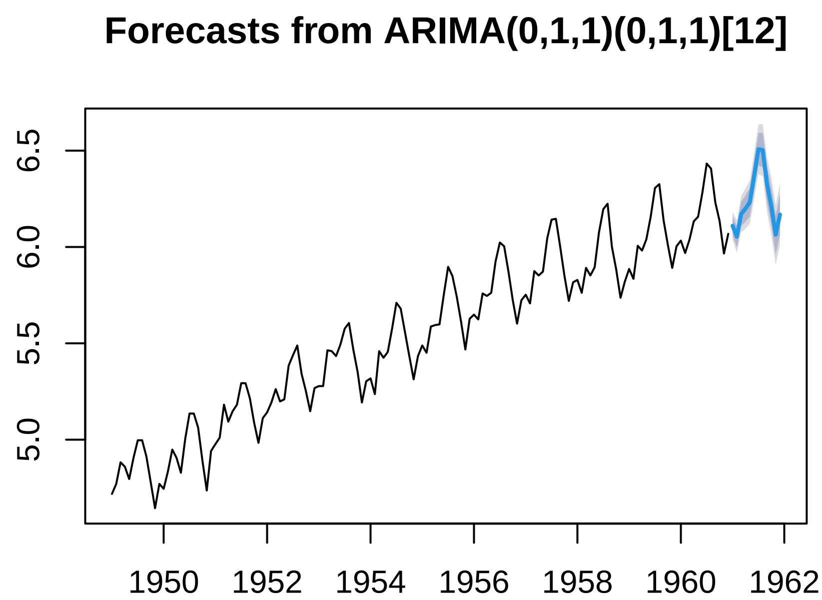
```
plot(forecast(fit1, h=12))
plot(forecast(fit2, h=12))
```




```
(fit3 <- auto.arima(lx))
```

```
## Series: lx
## ARIMA(0,1,1)(0,1,1)[12]
##
## Coefficients:
##           ma1     sma1
##       -0.4018  -0.5569
## s.e.   0.0896   0.0731
##
## sigma^2 estimated as 0.001371:  log likelihood=244.7
## AIC=-483.4   AICc=-483.21   BIC=-474.77
```

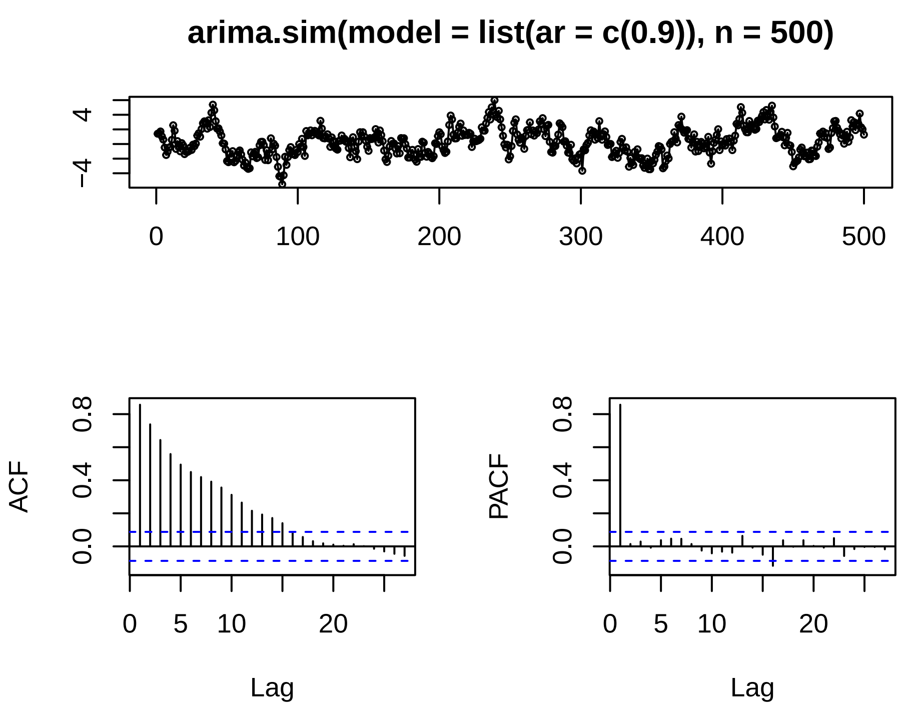
```
plot(forecast(fit3, h=12))
```



3 ARIMA simulation

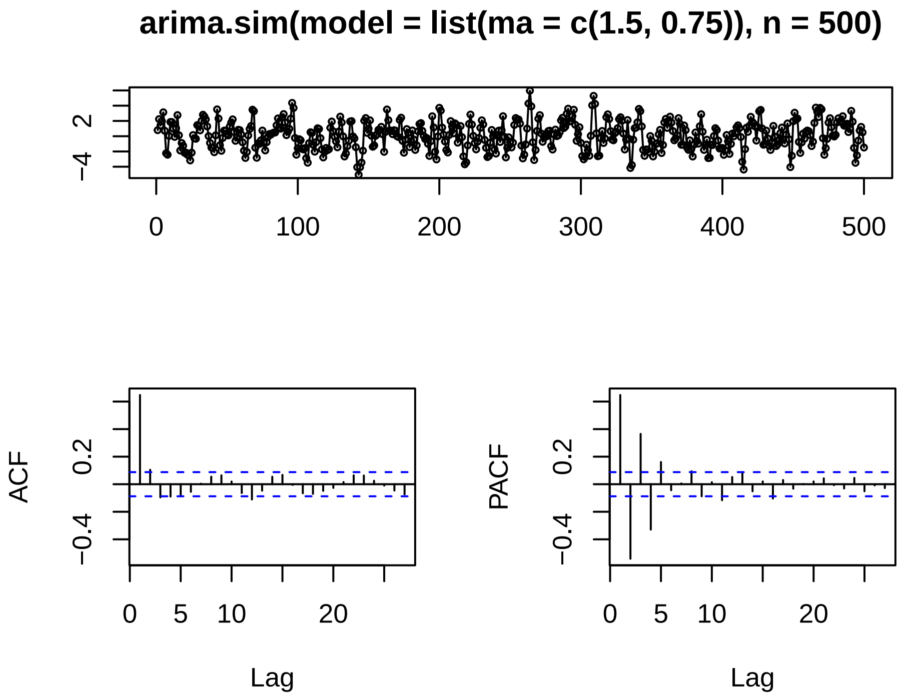
Processo autoregressivo AR(2):

```
set.seed(123)
tsdisplay(arima.sim(model=list(ar=c(0.9)), n=500))
```



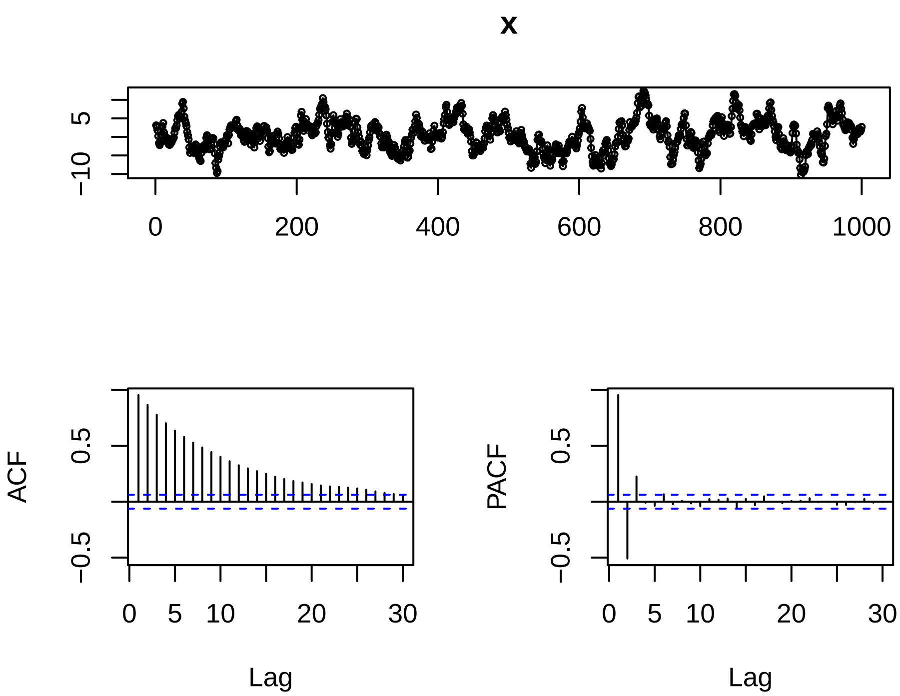
Processo a media mobile MA(2):

```
set.seed(123)
tsdisplay(arima.sim(model=list(ma=c(1.5, 0.75)), n=500))
```



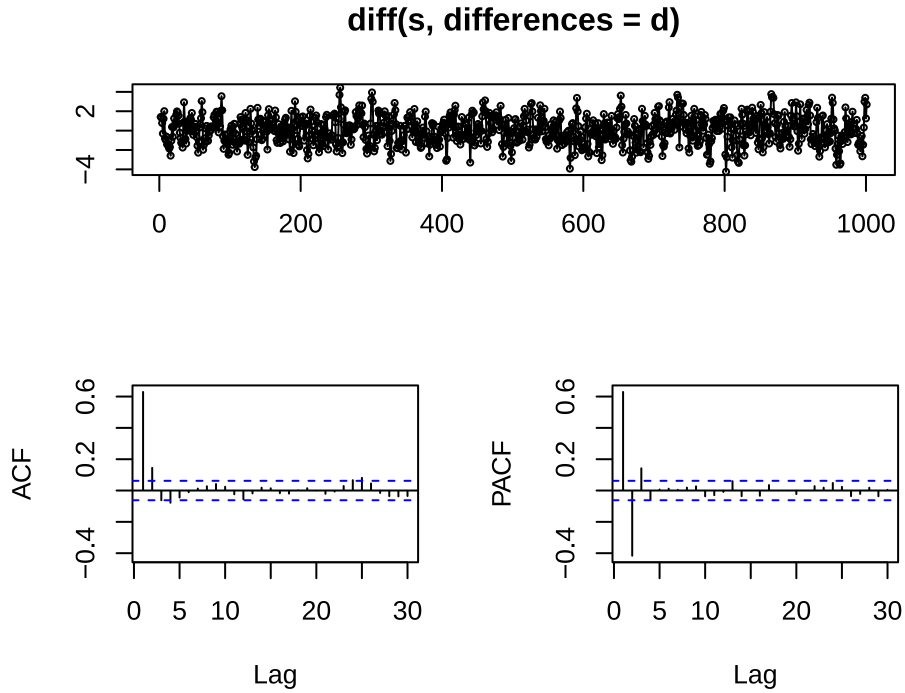
Combinati, ARMA$(1, 2)$:

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model=list(ar=c(0.9), ma=c(0.7, 0.25)), n=1000)
tsdisplay(x)
```




```
set.seed(123)
ar <- c(0.6, -0.2)
ma <- c(0.4)
d <- 1
order <- c(length(ar), d, length(ma))
```

```
s <- arima.sim(model=list(ar=ar, ma=ma, order=order), n=1000)
tsdisplay(diff(s, differences = d))
```




```
auto.arima(s)
```

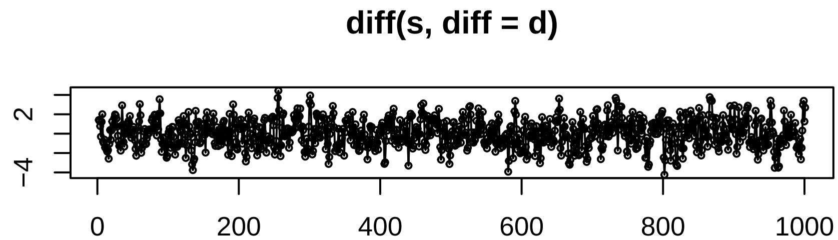
```
## Series: s
## ARIMA(2,1,1)
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2     ma1
##       0.5987  -0.2312  0.3710
## s.e.  0.0621   0.0499  0.0607
##
## sigma^2 estimated as 0.999:  log likelihood=-1417.44
## AIC=2842.88   AICc=2842.92   BIC=2862.51
```

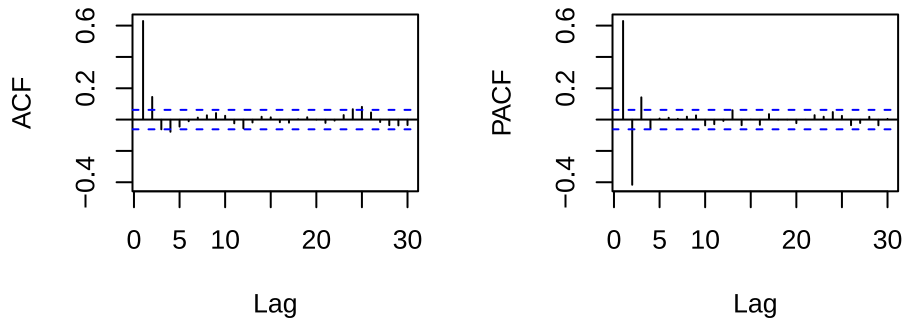
Il numero di differenziazioni necessarie per rendere la serie stazionaria può essere calcolato con `ndiffs()`:

```
(d <- ndiffs(s))
```

```
## [1] 1
```

```
tsdisplay(diff(s, diff=d))
```



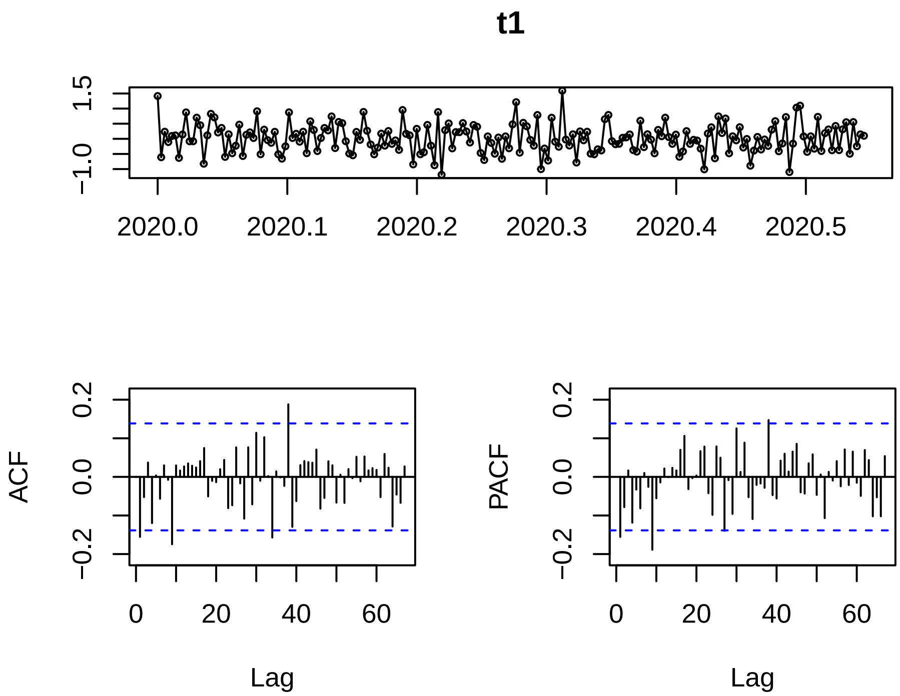


Le funzioni di autocorelazione suggeriscono un modello ARIMA$(3, 1, 2)$. Il modello ottimale dovrebbe avere quidi una combinzione di p e q inferiori a 3 e 2. Li proviamo tutti e selezioniamo quello con AIC minore:

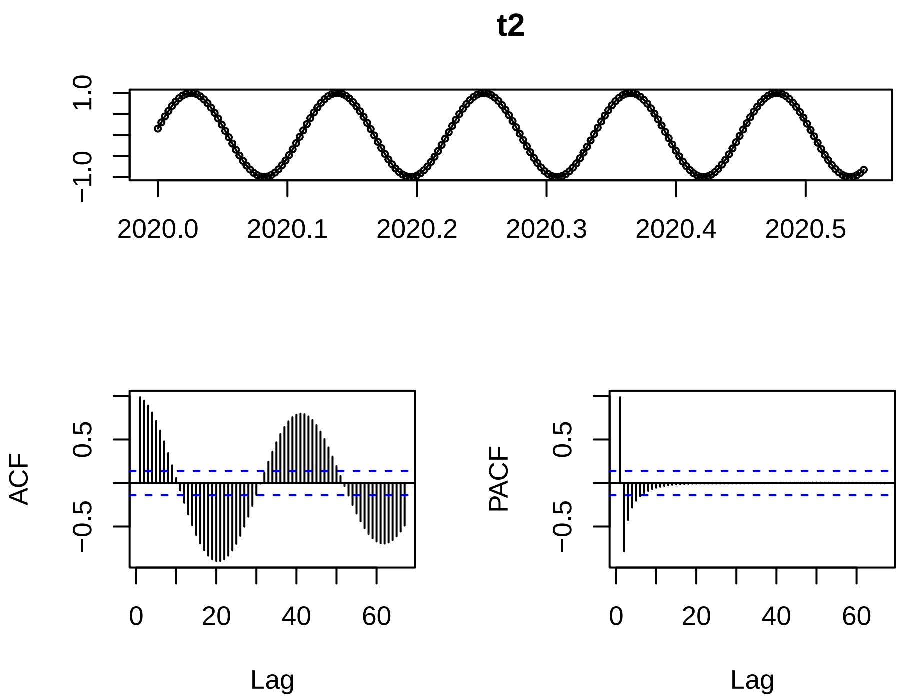
```
g <- expand.grid(p=1:3, q=1:2)
aic <- c()
for (i in 1:dim(g)[1]) {
  aic <- c(aic, arima(diff(s, diff=d), order=c(g$p[i], d, g$q[i])))$aic
}
g[which(aic == min(aic)),]
```

```
##   p q
## 1 1 1
```

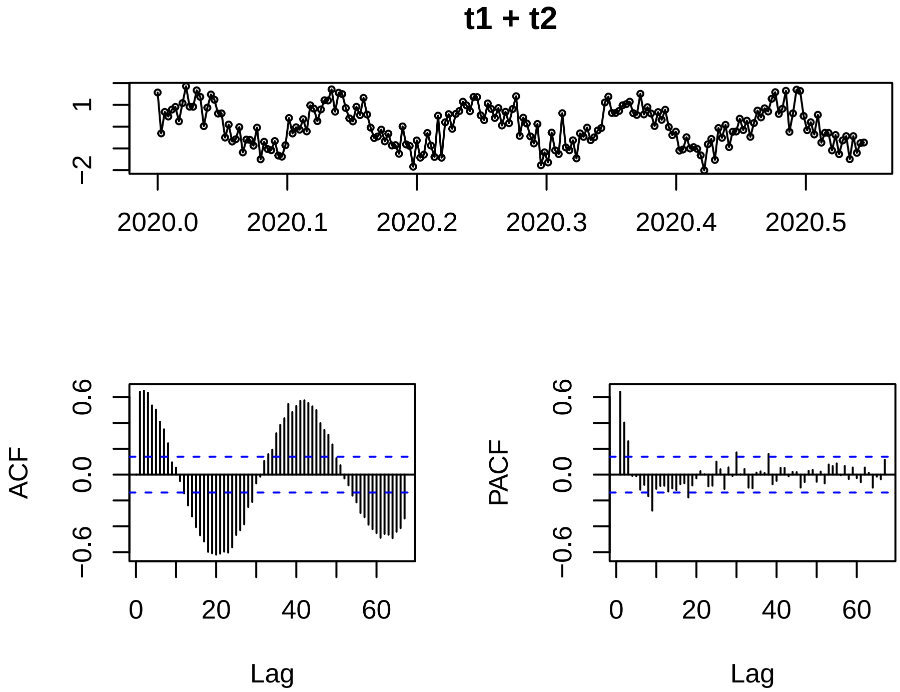
```
n <- 200
t1 <- ts(0.5*rnorm(n), start=2020, frequency = 365.25)
t2 <- ts(sin((1:n)*365.25/(12*n)), start=2020, frequency=365.25)
tsdisplay(t1)
```




```
tsdisplay(t2)
```




```
tsdisplay(t1+t2)
```


t1 + t2
1
−2
2020.0
2020.1
2020.2
2020.3
2020.4
2020.5
ACF
0.6
0.0
−0.6
0
20
40
60
Lag
PACF
0.6
0.0
−0.6
0
20
40
60
Lag