高斯伪谱法求解两点边值问题

假设系统方程如下:

$$\dot{X}=F[X,U,t],t\in[t_0,t_f] \tag{1}$$

其中 $X_{n\times1}(t)$是状态向量,$U_{m\times1}(t)$是控制向量,$F_{n\times1}[X(t),U(t),t]$是连续可微向量值函数。
边界条件

$$\Phi(X(t_0),t_0,X(t_f),t_f)=0 \tag{2}$$

过程约束

$$\Psi[X(t),U(t),t]\leq G(t),t\in[t_0,t_f] \tag{3}$$

设定如下性能指标：

$$J=\phi[X(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}f[X(t),U(t),t]dt \tag{4}$$

当$U(t)$不受限制时可以采用泛函求极值的方法，受限制时有几类解决办法

分类	包含
间接法	极小值原理
直接法	伪谱法、配点法、搜索法

高斯伪谱法

其中高斯伪谱法取n个分点t_i ,$i=0,1,...n$,假设分点处的状态向量和控制向量的值都知道,采用某种方法使(1),(2)和(3)尽可能成立。并使性能指标(4)最大化.
由于U和X都要收到一些约束,假设求出了最优的$U^*(t)$和对应的$X^*(t)$，下面我们来分析它们需要满足什么条件。
首先根据系统方程和边界条件：

$$\dot{X}^*=F[X^*,U^*,t],t\in[t_0,t_f] \tag{5}$$

$$\Phi(X^*(t_0),t_0,X^*(t_f),t_f)=0 \tag{6}$$

$$\Psi[X^*(t),U^*(t),t] \le G(t), t\in[t_0,t_f] \tag{7}$$

$$J^* = \phi[X^*(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f[X^*(t),U^*(t),t]dt \le J \tag{8}$$

注意到U和X都可以假定为连续可微的。假设我们首先求出了U^*,那么根据(5)我们可以得到一个4维的所谓线素场。$X^*(t)$是一条满足边界条件和过程约束的积分积分曲线，它和线素场处处相切。
则$X\hat{(t_i)}$插值之后要满足(5),为此设插值函数为

$$X\hat{(t)} = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)X\hat{(t_i)} \tag{9}$$

其中$l_i(t)$为插值基函数。

为了满足(5)建立指标：

$$\nabla = \int_{t_0}^{t_f} w(t)||\dot{X\hat{(t)}} - F[X(t),U^*(t),t]||^2dt \tag{10}$$

$w(t)$是权函数，为了容易求改为

$$\nabla_1 = \int_{t_0}^{t_f} w(t)||\dot{X\hat{(t)}} - F[X\hat{(t)},U^*(t),t]||^2dt \tag{11}$$

这实际上是沿插值曲线积分，故上式也可以以自然参数s为基本变量在s上积分，差别应该不大？。
上式仍然只能做数值积分，根据不同的积分方法可以得到不同的策略。
假设我们使用n点高斯-勒让德积分，在高斯勒让德点上只要有

$$X\hat{(t_i)} - F[X\hat{(t_i)},U^*(t_i),t_i] = 0 \tag{12}$$

则(11)即可取得最小值0。上式可以归结为一个线性方程组。
其误差可以由高斯积分的误差来估计。也可以由更准确的数值积分来探测。？？？how
但是$U^*(t)$是未知的，所以要假定插值函数$U\hat{(t)}$,它在分点上的取值为$U\hat{(t_i)}$。
现在的问题变为：

$$\min_{U\hat{(t_i)},X\hat{(t_i)}} J = \phi[X\hat{(t_f)},t_f] + \sum_{i=0}^{n} w_i f[X\hat{(t_i)},U\hat{(t_i)},t_i] \tag{13}$$
$$subjects\ to: \begin{cases} X\hat{(t_i)} - F[X\hat{(t_i)},U\hat{(t_i)},t_i] = 0 \\ \Phi(X\hat{(t_0)},t_0,X\hat{(t_f)},t_f) = 0 \\ \Psi[X\hat{(t_i)},U\hat{(t_i)},t] \le G(t_i) \end{cases}$$

其中t_i和w_i可以直接求出。

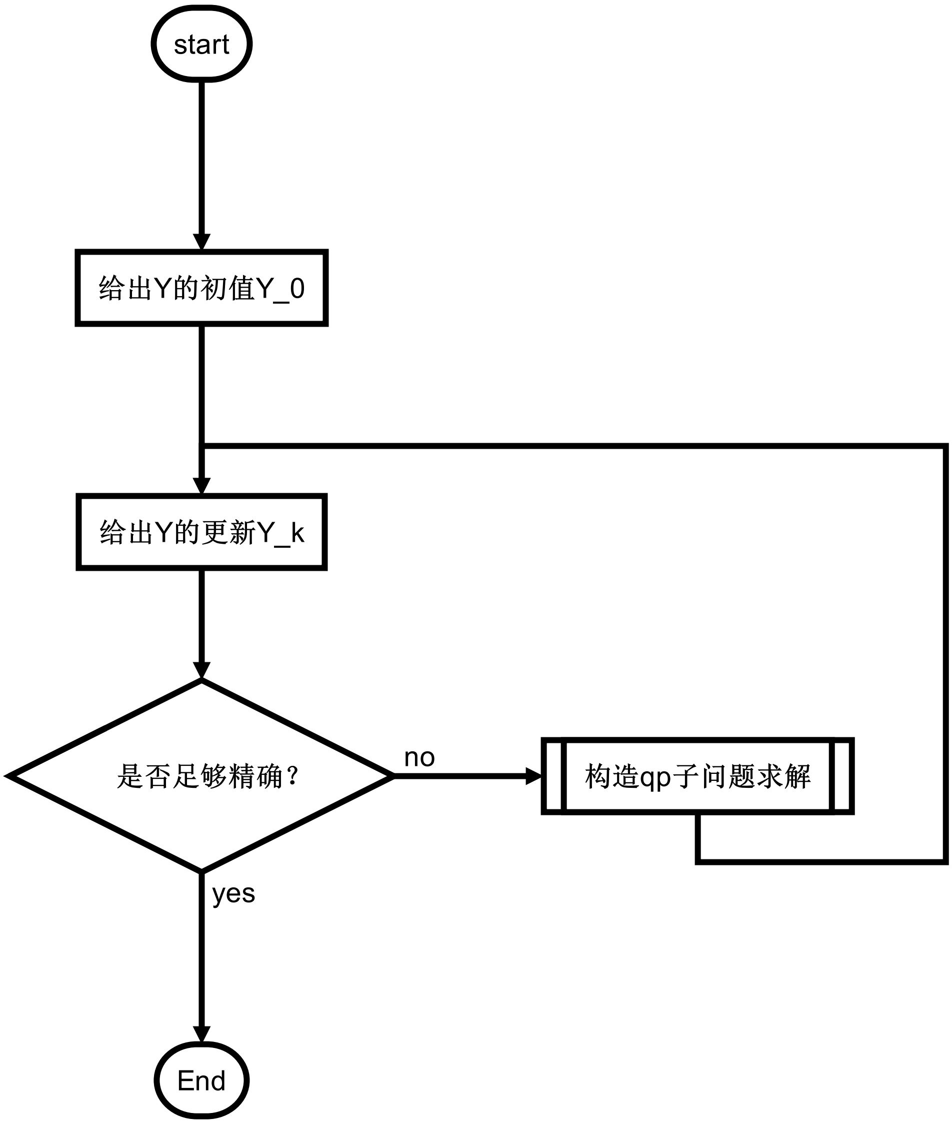
序列二次规划(SQP)

过程如下，定义$n\times N+m\times N+1$维变量Y

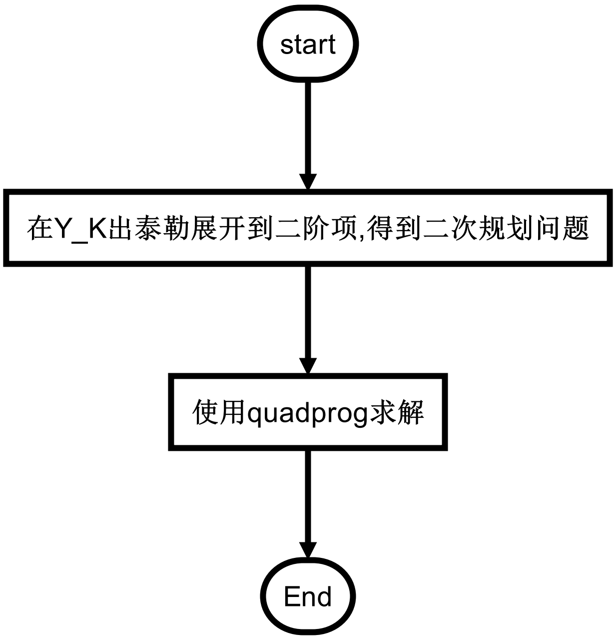
$$
Y=\begin{bmatrix} X(\hat{t_1}) \\ X(\hat{t_2}) \\ \cdots \\ U(\hat{t_1}) \\ U(\hat{t_2}) \\ \cdots \\ \hat{t_f} \end{bmatrix} \tag{14}
$$

将原问题写成关于Y的

$$
\begin{aligned}
&\min_{\hat{Y}} J_1=\phi_1(\hat{Y})+\sum_{i=0}^{n} w_i f_1(\hat{Y}) \\
&subjects\ to:\begin{cases}\Phi_1(\hat{Y})=0\\ \Psi_1(\hat{Y})\le 0\end{cases}
\end{aligned} \tag{13}
$$



构造qp子问题求解:



那么这样求一次就需要花费不少的时间，但是万一点不够多呢？前面已经分析了误差估计或探测的方法，误差大就必须增加点重新启动。可见这是非常耗时间的。

原问题能否加快速度?

松弛问题

松弛问题不要求性能指标，只要求可行解。那么松弛问题能否很快解决?

分析

原问题耗时的一个因素是它需要多层次的迭代。如果能预估需要的配点数就可以较快的求解。或者考虑比序二次规划更好的解法。
松弛问题呢?

应该说如果把约束当成一个黑箱,则问题是高度非线性的，从而在短时间内求解是几乎不可能的。
这意味着很难有一种通用的万能的方法，为了实现在线求解，必须利用约束本身的性质，这就要求分析具体的约束形式。以期获得有针对性的策略。

可能的解决方法

约束化简或者通过某种方式消除约束，使原问题在没有约束的条件下迭代。
研究更好的逼近曲线的方法减少需要迭代的次数。
使原问题转化成凸优化。
快速启动：更好的初值猜测技术
更好的误差估计或探测，将增加配点和序二次规划同步到一起，提高迭代的收敛速度。
减小问题的维度，减小每次迭代的代价。