

Tutorium 07: Unifikation

Paul Brinkmeier

13. Dezember 2022

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

Unifikation

Welche Probleme löst die Unifikation?

$$\begin{aligned}\text{state}(1, 1, 1, 1) &\stackrel{!}{=} \text{state}(M, W, Z, K) \\ \text{opposite}(M, M_2) &\stackrel{!}{=} \text{opposite}(1, r) \\ Z &\stackrel{!}{=} K\end{aligned}$$

- Unifikation löst Gleichungssysteme von baumförmigen Termen (hier: Prolog-Terme).
- Eingabe: Menge $C = \{\theta_l^1 \stackrel{!}{=} \theta_r^1, \dots, \theta_l^n \stackrel{!}{=} \theta_r^n\}$
 - Alle $\theta_{\{l,r\}}^i$ sind Bäume und können Variablen enthalten.
- Ausgabe: *Unifikator* σ , sodass $\sigma(\theta_l^i) = \sigma(\theta_r^i)$.
 - Wenn C nicht unifizierbar (bspw. $X = f(X)$): fail

Welche Probleme löst die Unifikation?

$$\begin{aligned}\text{state}(1, 1, 1, 1) &\stackrel{!}{=} \text{state}(M, W, Z, K) \\ \text{opposite}(M, M_2) &\stackrel{!}{=} \text{opposite}(1, r) \\ Z &\stackrel{!}{=} K\end{aligned}$$

Mehrere mögliche Lösungen:

$$\sigma_1 = [M_2 \mapsto r] \circ [K \mapsto 1] \circ [Z \mapsto 1] \circ [W \mapsto 1] \circ [M \mapsto 1]$$

$$\sigma_2 = [M_2 \mapsto r] \circ [K \mapsto 1] \circ [Z \mapsto K] \circ [W \mapsto 1] \circ [M \mapsto 1]$$

- I.d.R. suchen wir nach *einem* allgemeinsten Unifikator (mgu).
- $\text{mgu} \approx$ minimaler Unifikator, der C löst.

Unifiziert:

$$A \stackrel{!}{=} x$$

$$B \stackrel{!}{=} f(X)$$

$$C \stackrel{!}{=} g(C)$$

$$f(x, D, z) \stackrel{!}{=} f(x, y, E)$$

$$\text{func}(F, \text{func}(G, z)) \stackrel{!}{=} \text{func}(x, \text{func}(y, F))$$

$$g(x, H, z) \stackrel{!}{=} f(x, H, H)$$

$$f(g(z)) \stackrel{!}{=} f(J)$$

Ergebnis: Entweder **fail** oder ein Unifikator.

Unifikationsalgorithmus: $\text{unify}(C) =$

```
if  $C == \emptyset$  then []  
else let  $\{\theta_l = \theta_r\} \cup C' = C$  in  
  if  $\theta_l == \theta_r$  then  $\text{unify}(C')$   
  else if  $\theta_l == Y$  and  $Y \notin FV(\theta_r)$  then  $\text{unify}([Y \dot{=} \theta_r] C') \circ [Y \dot{=} \theta_r]$   
  else if  $\theta_r == Y$  and  $Y \notin FV(\theta_l)$  then  $\text{unify}([Y \dot{=} \theta_l] C') \circ [Y \dot{=} \theta_l]$   
  else if  $\theta_l == f(\theta_l^1, \dots, \theta_l^n)$  and  $\theta_r == f(\theta_r^1, \dots, \theta_r^n)$   
    then  $\text{unify}(C' \cup \{\theta_l^1 = \theta_r^1, \dots, \theta_l^n = \theta_r^n\})$   
  else fail
```

$Y \in FV(\theta)$ **occur check**, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\text{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **fail**.

Beweis: Siehe [Pie02]

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

```
if  $C == \emptyset$  then []  
else let  $\{\theta_l \stackrel{!}{=} \theta_r\} \cup C' = C$  in
```

- Ist das Gleichungssystem C leer, ist es schon gelöst
 \leadsto wir brauchen nichts zu ersetzen.
- Andernfalls betrachten wir *eine* der Gleichungen: $\theta_l \stackrel{!}{=} \theta_r$.
 - *Beliebige Auswahl möglich.*
 - Die restlichen Gleichungen merken wir uns als C' .
- Beispiel:
 $C = \{X \stackrel{!}{=} a, Y \stackrel{!}{=} f(X), f(Z) \stackrel{!}{=} Y\}$
 $\theta_l = X, \theta_r = a, C' = \{Y \stackrel{!}{=} f(X), f(Z) \stackrel{!}{=} Y\}$

if $\theta_l == \theta_r$ then unify(C')

- Wenn die Gleichung trivial ist (auf beiden Seiten steht schon das gleiche), brauchen wir auch nichts zu ersetzen.
- Wir müssen also nur C' unifizieren.
- Verschiedene Gleichheitsrelationen:
 - $A \stackrel{!}{=} B$: Element von C , behandeln wir wie eine Datenstruktur.
 - $A == B$: Vergleichsoperator
 - $A = B$: Meta-Gleichheitsoperator, Notation für Pattern-Matching

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

else if $\theta_l == Y$ and $Y \notin FV(\theta_r)$
then $\text{unify}([Y \div \theta_r] C') \circ [Y \div \theta_r]$

- Steht auf der linken Seite eine Variable, so wird diese ersetzt.
 - $\theta_l == Y$: „Ist der Term θ_l eine Variable Y ?“
 - $Y \notin FV(\theta_r)$: *occurs check*, Y darf sich nicht selbst einsetzen.
- Wir ersetzen in C' dann Y durch θ_r .
- Substitution $[Y \div \theta_r]$ wird als Ergebnis vorgemerkt.
- Beispiel: $\theta_l = X$ ✓, $X \notin FV(\theta_r) = FV(a) = \emptyset$ ✓, d.h.
Ergebnis: $\text{unify}(\{Y \stackrel{!}{=} f(a), f(Z) \stackrel{!}{=} Y\}) \circ [X \div a]$

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

else if $\theta_r == Y$ and $Y \notin FV(\theta_l)$
then $\text{unify}([Y \dot{\mapsto} \theta_l] C') \circ [Y \dot{\mapsto} \theta_l]$

- Auch wenn rechts eine Variable steht muss sie ersetzt werden.
- Beispiel: $\theta_r = Y$ ✓, $Y \notin FV(\theta_l) = FV(f(Z)) = \{Z\}$ ✓, d.h.
Ergebnis: $\text{unify}(\{f(Z) \stackrel{!}{=} f(a)\}) \circ [Y \dot{\mapsto} f(Z)]$

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

else if $\theta_l == f(\theta_l^1, \dots, \theta_l^n)$ and $\theta_r == f(\theta_r^1, \dots, \theta_r^n)$
then unify($C' \cup \{\theta_l^1 \stackrel{!}{=} \theta_r^1, \dots, \theta_l^n \stackrel{!}{=} \theta_r^n\}$)

- Steht auf beiden Seiten ein Funktor, extrahieren wir paarweise neue Gleichungen und unifizieren diese mitsamt C' .
 - Namen der Funktoren *müssen identisch sein!* (hier: f)
 - Parameterzahlen der Funktoren *müssen identisch sein!*
 - Für Atome: $n = 0$, aber schon abgedeckt durch den ersten Fall.
- Beispiel: $\theta_l = f(Z), \theta_r = f(a) \checkmark, C' = \emptyset$
Ergebnis: unify($\emptyset \cup \{Z \stackrel{!}{=} a\}$) = $[Z \Leftarrow a]$ (links Variable)

Typinferenz

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p. b$
- Funktionsanwendungen $x y$
- Variablen x , Konstanten `true`, `17`

$\lambda a. \lambda f. f (a \text{ true})$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- **Lambdas** $\lambda p. b$
- Funktionsanwendungen $x y$
- Variablen x , Konstanten `true`, `17`

$$\underbrace{\lambda a. \underbrace{\lambda f. f (a \text{ true})}_{\text{Lambda } p=f, b=f (a \text{ true})}}_{\text{Lambda } p=a, b=\lambda f. f (a \text{ true})}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p. b$
- **Funktionsanwendungen** $x y$
- Variablen x , Konstanten `true`, `17`

$$\lambda a. \lambda f. f \underbrace{(a \text{ true})}_{\substack{\text{Anwendung} \\ x=a, y=\text{true}}} \underbrace{\phantom{(a \text{ true})}}_{\substack{\text{Anwendung} \\ x=f, y=a \text{ true}}}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p. b$
- Funktionsanwendungen $x y$
- **Variablen** x , Konstanten `true`, `17`

$$\lambda a. \lambda f. \underbrace{f}_{\text{Variable}} \left(\underbrace{a}_{\text{Variable}} \text{ true} \right)$$

Struktur von Lambda-Termen

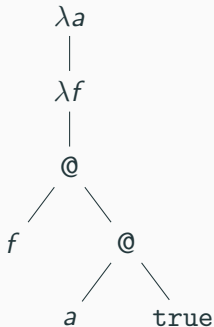
Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p. b$
- Funktionsanwendungen $x y$
- Variablen x , **Konstanten** `true`, `17`

$\lambda a. \lambda f. f (a \underbrace{\text{true}}_{\text{Konstante}})$

Lambda-Terme als Bäume

Wir können Lambda-Terme also als Bäume mit Lambda- und Anwendungsknoten und Variablen- und Konstantenblättern betrachten, um ihre Struktur zu untersuchen:



$\lambda a. \lambda f. f (a \text{ true})$

Cheatsheet: Typisierter Lambda-Kalkül

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau} \text{VAR} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \phi \rightarrow \alpha \quad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f x : \alpha} \text{APP}$$

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p. b : \pi \rightarrow \rho} \text{ABS}$$

- Typvariablen: τ, α, π, ρ
- Funktionstypen: $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, rechtsassoziativ
- (Weitere Typen: Listen, Tupel, etc.)
- *Typisierungsregeln sind eindeutig*: Eine Regel pro Termform

(Allgemeine) Typisierungsregel für Variablen

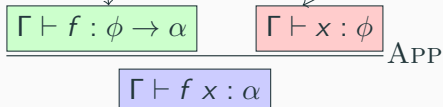
- „Der Typkontext Γ enthält einen Typ τ für t .“

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau} \text{VAR}$$

- Daraus folgt:
- „Variable t hat im Kontext Γ den Typ τ .“

Typisierungsregel für Funktionsanwendungen

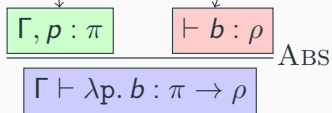
- „ f ist im Kontext Γ eine Funktion, die ϕ s auf α s abbildet.“
- „ x ist im Kontext Γ ein Term des Typs ϕ .“



- Daraus folgt:
- „ x eingesetzt in f ergibt einen Term des Typs α .“

Typisierungsregel für Lambdas

- „Unter Einfügung des Typs π von p in den Kontext...“
- „... ist b als Funktion von p typisierbar.“



- Daraus folgt:
- „ $\lambda p. b$ ist eine Funktion, die π s auf ρ s abbildet“

Vorgehensweise zur Typinferenz:

- Stelle Typherleitungsbaum auf
 - In jedem Schritt werden neue Typvariablen α_i angelegt
 - Statt die Typen direkt im Baum einzutragen, werden Gleichungen in einem Constraint-System eingetragen
- Unifiziere Constraint-System zu einem Unifikator
 - Robinson-Algorithmus, im Grunde wie bei Prolog
 - I.d.R.: Allgemeinster Unifikator (findet man per Robinson)

Unifikationsalgorithmus: $\text{unify}(C) =$

```
if  $C == \emptyset$  then []  
else let  $\{\theta_l = \theta_r\} \cup C' = C$  in  
  if  $\theta_l == \theta_r$  then  $\text{unify}(C')$   
  else if  $\theta_l == Y$  and  $Y \notin FV(\theta_r)$  then  $\text{unify}([Y \dot{=} \theta_r] C') \circ [Y \dot{=} \theta_r]$   
  else if  $\theta_r == Y$  and  $Y \notin FV(\theta_l)$  then  $\text{unify}([Y \dot{=} \theta_l] C') \circ [Y \dot{=} \theta_l]$   
  else if  $\theta_l == f(\theta_l^1, \dots, \theta_l^n)$  and  $\theta_r == f(\theta_r^1, \dots, \theta_r^n)$   
    then  $\text{unify}(C' \cup \{\theta_l^1 = \theta_r^1, \dots, \theta_l^n = \theta_r^n\})$   
  else fail
```

$Y \in FV(\theta)$ **occur check**, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\text{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **fail**.

Beweis: Siehe [Pie02]

Unifikationsalgorithmus: $\text{unify}(C) =$

```
if  $C == \emptyset$  then []  
else let  $\{\tau_1 = \tau_2\} \cup C' = C$  in  
  if  $\tau_1 == \tau_2$  then  $\text{unify}(C')$   
  else if  $\tau_1 == \alpha$  and  $\alpha \notin FV(\tau_2)$  then  $\text{unify}([\alpha \dot{\vdash} \tau_2] C') \circ [\alpha \dot{\vdash} \tau_2]$   
  else if  $\tau_2 == \alpha$  and  $\alpha \notin FV(\tau_1)$  then  $\text{unify}([\alpha \dot{\vdash} \tau_1] C') \circ [\alpha \dot{\vdash} \tau_1]$   
  else if  $\tau_1 == (\tau'_1 \rightarrow \tau''_1)$  and  $\tau_2 == (\tau'_2 \rightarrow \tau''_2)$   
    then  $\text{unify}(C' \cup \{\tau'_1 = \tau'_2, \tau''_1 = \tau''_2\})$   
  else fail
```

$\alpha \in FV(\tau)$ **occur check**, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\text{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **fail**.

Beweis: Siehe Literatur

Typen kann man auch als Funktoren darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \tau_1 \rightarrow \tau_2 & \equiv & \text{func}(\tau_1, \tau_2) \\ [\tau] & \equiv & \text{list}(\tau) \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

$$\frac{\dots}{f : \text{int} \rightarrow \beta \vdash \lambda x. f \ x : \alpha_1} \text{ABS}$$

- „Finde den allgemeinsten Typen α_1 von $\lambda x. f \ x$ “

Erinnerung:

- Baum mit durchnummerierten α_i aufstellen
- Constraints sammeln:

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_j} \text{VAR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \quad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f \ x : \alpha_i} \text{APP}$$

$$\frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p. b : \alpha_i} \text{ABS}$$

Constraint:

$$\{\alpha_i = \alpha_j\}$$

Constraint:

$$\{\alpha_j = \alpha_k \rightarrow \alpha_i\}$$

Constraint:

$$\{\alpha_i = \alpha_j \rightarrow \alpha_k\}$$

- Constraint-System auflösen

$$\frac{\dots}{\vdash \lambda f. \lambda x. (f \ x) \ x : \alpha_1} \text{ABS}$$

- „Finde den allgemeinsten Typen α_1 von $\lambda f. \lambda x. (f \ x) \ x$ “

Erinnerung:

- Baum mit durchnummerierten α_i aufstellen
- Constraints sammeln:

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_j} \text{VAR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \quad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f \ x : \alpha_i} \text{APP}$$

$$\frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p. b : \alpha_i} \text{ABS}$$

Constraint:

$$\{\alpha_i = \alpha_j\}$$

Constraint:

$$\{\alpha_j = \alpha_k \rightarrow \alpha_i\}$$

Constraint:

$$\{\alpha_i = \alpha_j \rightarrow \alpha_k\}$$

- Constraint-System auflösen

Prolog

Cheatsheet: Prolog

- Terme:
 - Variablen: `Var`, `X`, `X2`
 - Funktoren/Atome: `f(a, b, c)`, `app(f, x)`, `main`
 - Arithmetische Ausdrücke: `17 + 25`, `6 * 7`
- Regeln: `rule(P1, ..., PN) :- Goal1, ..., GoalM.`
- Ziele:
 - Funktor: `member(X, [1,2,3])`
 - Unifikation: `X = Y`
 - Arithmetik: `N is M + 1`
 - Verneinung: `not(G)`
 - Arithmetischer Vergleich: `X == Y`, `X \= Y`, etc.
 - Cut: `!`
- Konzepte: *Unifikation*, *Resolution*

```
grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).  
parent(X, Y) :- mother(X, Y).  
parent(X, Y) :- father(X, Y).  
  
mother(inge, emil).  
mother(inge, petra).  
father(emil, kunibert).
```

?- grandparent(inge, kunibert). \leadsto yes.

```
grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).  
parent(X, Y) :- mother(X, Y).  
parent(X, Y) :- father(X, Y).  
  
mother(inge, emil).  
mother(inge, petra).  
father(emil, kunibert).
```

mother(inge, emil)

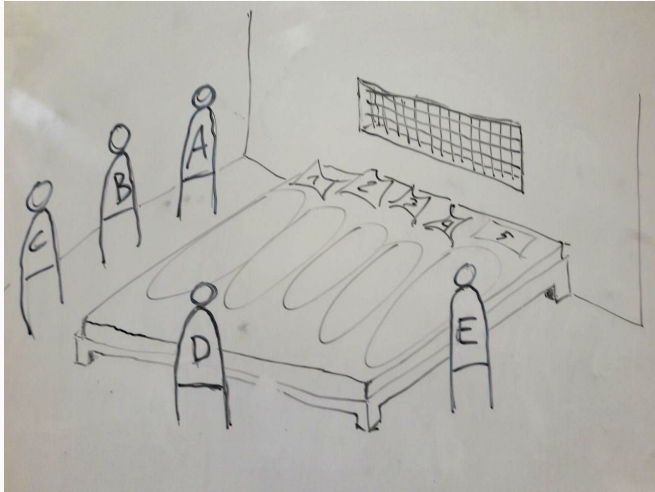
parent(inge, emil)

father(emil, kunibert)

parent(emil, kunibert)

grandparent(inge, kunibert)

Schlafplätze im Gefängnis



Dinesman's multiple-dwelling problem

Bob kommt nun ins Gefängnis. Aaron, Bob, Connor, David und Edison müssen sich zu fünft ein sehr breites Bett teilen.

- Aaron will nicht am rechten Ende liegen
- Bob will nicht am linken Ende liegen
- Connor will an keinem der beiden Enden liegen
- David will weiter rechts liegen als Bob
- Connor schnarcht sehr laut;
Bob und Edison sind sehr geräuschempfindlich
 - \leadsto Bob will nicht direkt neben Connor liegen
 - \leadsto Edison will nicht direkt neben Connor liegen

Wie können die 5 Schlafplätze verteilt werden?

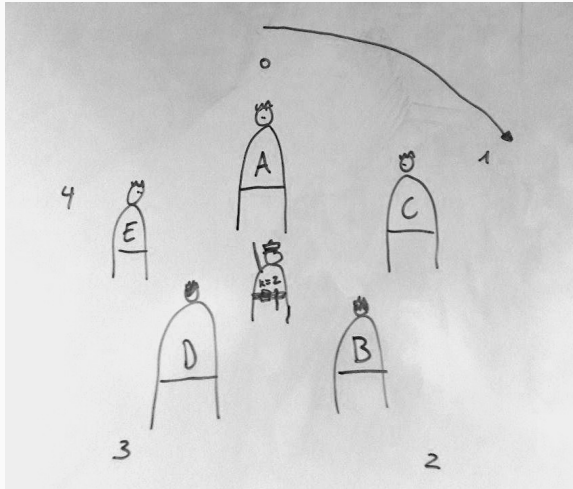
Schlafplätze im Gefängnis

```
% schlafplaetze.pl

bett(X) :- member(X, [1, 2, 3, 4, 5]).

schlafplaetze(A, B, C, D, E) :-
    bett(A), bett(B), bett(C), bett(D), bett(E),
    distinct([A, B, C, D, E]),
    % weitere Tests
```

- Fügt weitere benötigte Tests ein
- Implementiert:
 - `distinct/1` prüft Listenelemente auf paarweise Ungleichheit
 - `adjacent/2` prüft, ob $|A - B| = 1$



- Aaron, Bob, Connor, David und Edison sollen 4 Einheiten Putzdienst übernehmen
- Da sie sich nicht einigen können, wer aussetzen darf, wendet ein Wärter folgendes Vorgehen an:
 - Die fünf werden im Kreis aufgestellt
 - Der Wärter stellt sich in die Mitte
 - Beginnend bei 12 Uhr dreht er sich im Uhrzeigersinn und teilt jeden k -ten (bspw. $k = 2$) Insassen zum Putzdienst ein
 - D.h. es werden immer $k - 1$ Insassen übersprungen

An welcher Stelle muss Bob stehen, um nicht putzen zu müssen?

- Aaron, Bob, Connor, David und Edison sollen 4 Einheiten Putzdienst übernehmen
- Da sie sich nicht einigen können, wer aussetzen darf, wendet ein Wärter folgendes Vorgehen an:
 - Die fünf werden im Kreis aufgestellt
 - Der Wärter stellt sich in die Mitte
 - Beginnend bei 12 Uhr dreht er sich im Uhrzeigersinn und teilt jeden k -ten (bspw. $k = 2$) Insassen zum Putzdienst ein
 - D.h. es werden immer $k - 1$ Insassen übersprungen

An welcher Stelle muss Bob stehen, um nicht putzen zu müssen?

An welcher Stelle muss Bob bei 41 Insassen und $k = 3$ stehen?

```
% putzdienst.pl

% Bspw.
% ?- keinPutzdienstFuer([a, b, c, d, e], 2, X)
keinPutzdienstFuer(L, K, X) :-
    Countdown is K - 1,
    helper(L, Countdown, K, X).

helper([X], _C, _K, X) :- !.
...
```

- Weitere Fälle für helper/4:
 - $C = 0 \rightsquigarrow$ Element entfernen
 - Ansonsten: Element hinten wieder anhängen

Zum Nachlesen und Vergleichen mit Lösungen in anderen Programmiersprachen:

- WG — [Rosetta Code: Department Numbers](#)
- Detektiv — github.com/Anniepoo/prolog-examples
- Schlafplätze — SICP, S. 418
- Putzdienst — [Rosetta Code: Josephus problem](#)

- Blätter 5-7
- Mehr...
 - ...Prolog?
 - ...Typisierung?
 - ...Haskell?