Tutorium 05: λ-Kalkül

Paul Brinkmeier

29. November 2022

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

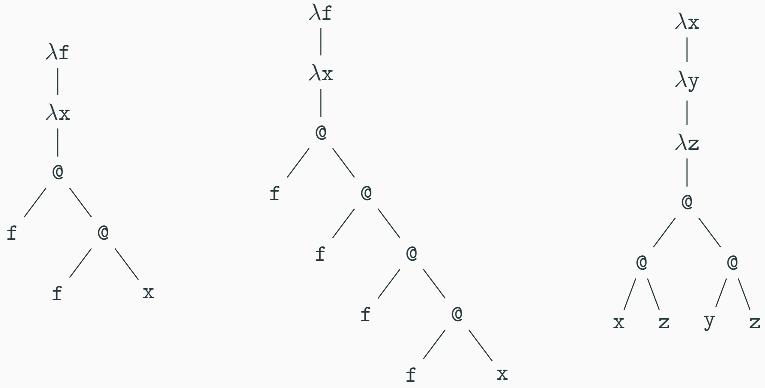
Übungsblätter

Wiederholung

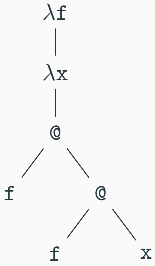
Cheatsheet: Lambda-Kalkül/Basics

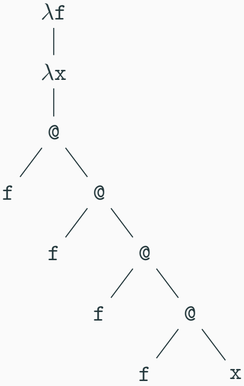
- Terme t: Variable (x), Funktion ($\lambda x.t$), Anwendung ($t\ t$)
- α-*Äquivalenz*: Gleiche Struktur
- η-*Äquivalenz*: Unterversorgung
- *Freie Variablen*, *Substitution*, *RedEx*
- β-*Reduktion*:
  $(\lambda p.b)\ t \Rightarrow b\,[p \to t]$

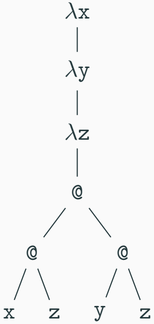
λ-Terme sind Bäume



λ-Terme sind Bäume

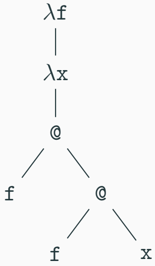


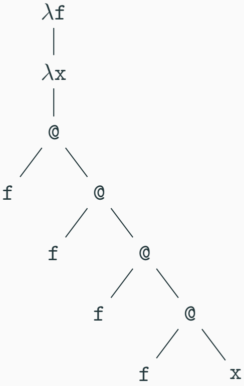


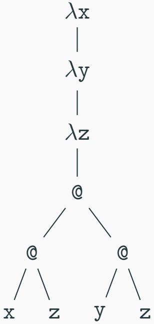


$\lambda f.\, \lambda x.\, f\ (f\ x)$

λ-Terme sind Bäume



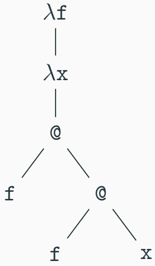


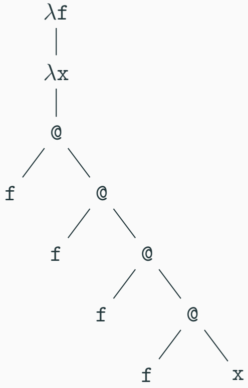


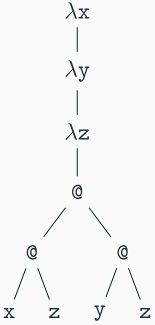
$\lambda f.\, \lambda x.\, f\ (f\ x)$

$\lambda f.\, \lambda x.\, f\ (f\ (f\ (f\ x)))$

λ-Terme sind Bäume





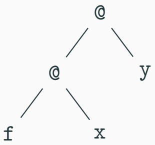


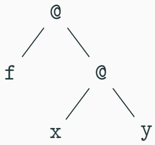
$\lambda f.\,\lambda x.\, f\ (f\ x)$

$\lambda f.\,\lambda x.\, f\ (f\ (f\ (f\ x)))$

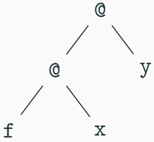
$\lambda x.\,\lambda y.\,\lambda z.\, x\ z\ (y\ z)$

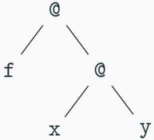
Klammerung von Lambda-Termen





Klammerung von Lambda-Termen

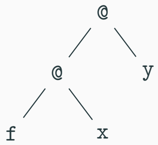


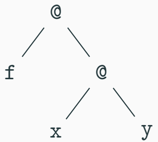


$$(f\ x)\ y = f\ x\ y$$

„f angewendet auf x und y“

Klammerung von Lambda-Termen





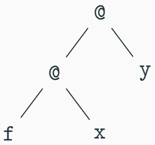
$$(f\ x)\ y = f\ x\ y$$

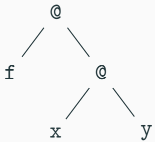
„f angewendet auf x und y“

$$f\ (x\ y) \neq f\ x\ y$$

„f angewendet auf das Ergebnis von $x\ y$“

Klammerung von Lambda-Termen





$$(f\ x)\ y = f\ x\ y$$

„f angewendet auf x und y“

$$f\ (x\ y) \neq f\ x\ y$$

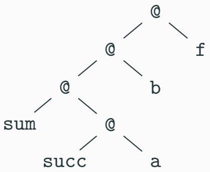
„f angewendet auf das Ergebnis von $x\ y$“

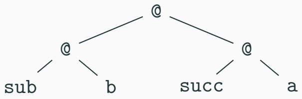
- *Funktionsanwendung* ist linksassoziativ (linksgeklammert)
- $\rightsquigarrow$ Wie bei Haskell!

Klammerungsbeispiel

```
sum a b f
    | a > b = 0
    | otherwise = f a + sum (a+1) b f
-- Bspw. sum 1 10 id == 55
```

$$\begin{aligned} sum = \lambda a.\, \lambda b.\, \lambda f.\, ifZero\ &(sub\ b\ (succ\ a)) \\ &c_0 \\ &(add\ (f\ a)\ (sum\ (succ\ a)\ b\ f)) \end{aligned}$$





Klammerung von Funktionstypen

```
sum a b f
    | a > b = 0
    | otherwise = f a + sum (a+1) b f
-- Bspw. sum 1 10 id == 55
```

```
sum :: Int -> Int -> (Int -> Int) -> Int
sum :: Int -> (Int -> ((Int -> Int) -> Int))
```

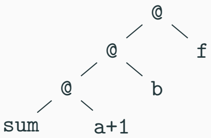
```
          @
         / \
       @     f
      / \
    @     b
   / \
sum   a+1
```

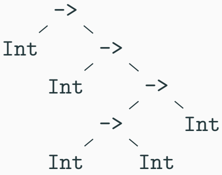
```
    ->
   /  \
Int    ->
      /  \
   Int    ->
         /  \
       ->    Int
      /  \
   Int    Int
```

Klammerung von Funktionstypen

```haskell
sum a b f
    | a > b = 0
    | otherwise = f a + sum (a+1) b f
-- Bspw. sum 1 10 id == 55
```

```haskell
sum :: Int -> Int -> (Int -> Int) -> Int
sum :: Int -> (Int -> ((Int -> Int) -> Int))
```





- Auch Typterme sind Bäume
- *Funktionstypen* sind rechtsassoziativ

Church-Zahlen

Peano-Axiome

$$
\begin{aligned}
c_0 &= c_0 \\
c_1 &= s(c_0) \\
c_2 &= s(s(c_0)) \\
c_3 &= s(s(s(c_0))) \\
c_8 &= s(s(s(s(s(s(s(s(c_0))))))))
\end{aligned}
$$

1. Die 0 ist Teil der natürlichen Zahlen
2. Wenn n Teil der natürlichen Zahlen ist,
   ist auch $s(n) = n + 1$ Teil der natürlichen Zahlen

Church-Zahlen

- „Zahlen" im λ-Kalkül werden durch Funktionen in Normalform dargestellt
- $c_n\ f\ x = f$ n-mal angewendet auf x
- Bspw. $(c_3\ g\ y) = g\ (g\ (g\ y)) = g^3\ y$
  Mit $c_3 = \lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x))$
- Schreibt eine λ-Funktion *succ*, die eine Church-Zahl nimmt und zu deren Nachfolger auswertet

Church-Zahlen

- „Zahlen" im λ-Kalkül werden durch Funktionen in Normalform dargestellt
- $c_n \ f \ x = f \ n$-mal angewendet auf x
- Bspw. $(c_3 \ g \ y) = g \ (g \ (g \ y)) = g^3 \ y$
  Mit $c_3 = \lambda f.\lambda x.f \ (f \ (f \ x))$
- Schreibt eine λ-Funktion *succ*, die eine Church-Zahl nimmt und zu deren Nachfolger auswertet

$$\text{succ} = \lambda n.\, \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (n\ s\ z)$$

Auswertungsstrategien

Auswertungsstrategien

$$\overbrace{\underline{\text{succ}}\ \overbrace{(\underline{\text{succ}}\ c_0)}^{\text{Redex 2}}}^{\text{Redex 1}}$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \lambda s.\, \lambda z.\, z \\ \text{succ} &= \lambda n.\, \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (n\ s\ z) \end{aligned}$$

- Welcher Redex soll zuerst ausgewertet werden?
- $\leadsto$ verschiedene Auswertungsstrategien

Normalreihenfolge

$$
\begin{array}{rc}
 & \underline{\mathsf{succ}}\ (\underline{\mathsf{succ}}\ c_0) \\
\Rightarrow_\beta & \lambda s.\,\lambda z.\,s\ ((\underline{\mathsf{succ}}\ c_0)\ s\ z) \\
\Rightarrow_\beta & \lambda s.\,\lambda z.\,s\ (\underline{(\lambda s.\,\lambda z.\,s\ (\underline{c_0}\ s\ z))}\ s\ z) \\
\Rightarrow_\beta^2 & \lambda s.\,\lambda z.\,s\ (s\ (\underline{c_0}\ s\ z)) \\
\Rightarrow_\beta^2 & \lambda s.\,\lambda z.\,s\ (s\ z)\ \not\Rightarrow
\end{array}
$$

Normalreihenfolge: Linkester Redex zuerst.

Call-by-Name

$$\begin{aligned} & \underline{\mathsf{succ}}\ (\underline{\mathsf{succ}}\ c_0) \\ \Rightarrow_\beta \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, s\ ((\underline{\mathsf{succ}}\ c_0)\ s\ z) \not\Rightarrow_{\mathsf{CbN}} \end{aligned}$$

Call-by-Name: Linkester Redex zuerst, aber:

- Funktionsinhalte werden nicht weiter reduziert
- $\leadsto$ Betrachte nur Redexe, die nicht von einem λ umgeben sind
- So funktioniert auch Laziness in Haskell (grob)

Call-by-Value

$$\begin{array}{rc} & \underline{\mathrm{succ}}\ (\underline{\mathrm{succ}}\ c_0) \\ \Rightarrow_\beta & \underline{\mathrm{succ}}\ (\lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{c_0}\ s\ z)) \\ \Rightarrow_\beta & \lambda s.\, \lambda z.\, \underline{(\lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{c_0}\ s\ z))}\ s\ z \ \not\Rightarrow_{\mathrm{CbV}} \end{array}$$

Call-by-Value: Linkester Redex zuerst, aber:

- Funktionsinhalte werden nicht weiter reduziert
- $\leadsto$ Betrachte nur Redexe, die nicht von einem λ umgeben sind
- Berechne Argumente vor dem Einsetzen
- $\leadsto$ Betrachte nur Redexe, deren Argument *unter CbV* nicht weiter reduziert werden muss

Cheatsheet: Lambda-Kalkül/Fortgeschritten

- Auswertungsstrategien (von lässig nach streng):
  - *Volle β-Reduktion*
  - *Normalreihenfolge*
  - *Call-by-Name*
  - *Call-by-Value*
- Datenstrukturen:
  - *Church-Booleans*
  - *Church-Zahlen*
  - *Church-Listen*
- Rekursion durch *Y-Kombinator*

Klausuraufgaben zum λ-Kalkül

19SS A4 — SKI-Kalkül (13P.)

$$\begin{aligned} S &= \lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, x\ z\ (y\ z) \\ K &= \lambda x.\, \lambda y.\, x \\ I &= \lambda x.\, x \end{aligned}$$

- SKI-Kalkül kann alles, was λ-Kalkül auch kann, allein mit den Kombinatoren S, K und I
- Definiere $U = \lambda x.\, x\ S\ K$
- Aufgabe: Beweise, dass man S, K und I durch U darstellen kann:

19SS A4 — SKI-Kalkül (13P.)

$$S = \lambda x.\,\lambda y.\,\lambda z.\,x\ z\ (y\ z)$$
$$K = \lambda x.\,\lambda y.\,x$$
$$I = \lambda x.\,x$$

- SKI-Kalkül kann alles, was λ-Kalkül auch kann, allein mit den Kombinatoren S, K und I
- Definiere $U = \lambda x.\,x\ S\ K$
- Aufgabe: Beweise, dass man S, K und I durch U darstellen kann:
  - $U\ U\ x \stackrel{?}{\Longrightarrow} x$
  - $U\ (U\ (U\ U)) = U\ (U\ I) \stackrel{?}{\Longrightarrow} K$
  - $U\ (U\ (U\ (U\ U))) = U\ K \stackrel{?}{\Longrightarrow} S$

18SS A4 — Currying im λ-Kalkül (13P.)

$$\begin{aligned}
\text{pair} &= \lambda a.\, \lambda b.\, \lambda f.\, f\ a\ b \\
\text{fst} &= \lambda p.\, p\, (\lambda x.\, \lambda y.\, x) \\
\text{snd} &= \lambda p.\, p\, (\lambda x.\, \lambda y.\, y) \\
\text{fst}\ (\text{pair}\ a\ b) &= a \\
\text{snd}\ (\text{pair}\ a\ b) &= b
\end{aligned}$$

- Schreibe curry und uncurry, sodass:
    - $(\text{curry}\ f)\ a\ b = f\ (\text{pair}\ a\ b)$
    - $(\text{uncurry}\ g)\ (\text{pair}\ a\ b) = g\ a\ b$

18WS A5 — Listen im λ-Kalkül (10P.)

$$\begin{aligned} \text{nil} &= \qquad\qquad \lambda n.\,\lambda c.\,n \\ \text{cons} &= \lambda x.\,\lambda xs.\,\lambda n.\,\lambda c.\,(c\ x\ xs) \end{aligned}$$

- Schreibe *head* und *tail*, sodass:
    - head (cons A B) $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ A
    - tail (cons A B) $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ B

18WS A5 — Listen im λ-Kalkül (10P.)

$$\begin{aligned} \text{nil} &= \qquad \lambda n.\, \lambda c.\, n \\ \text{cons} &= \lambda x.\, \lambda xs.\, \lambda n.\, \lambda c.\, (c\ x\ xs) \end{aligned}$$

- Schreibe *head* und *tail*, sodass:
  - head (cons A B) $\overset{*}{\Longrightarrow}$ A
  - tail (cons A B) $\overset{*}{\Longrightarrow}$ B
- Schreibe replicate, sodass:
  - replicate c_n $A = \underbrace{\text{cons } A \text{ (cons } A \text{ ...(cons } A \text{ nil))}}_{n \text{ mal}}$
- Erinnerung: $c_n\ f\ x = \underbrace{f\ (f\ ...(f\ x))}_{n \text{ mal}}$

18WS A5 — Listen im λ-Kalkül (10P.)

$$\begin{aligned} \text{nil} &= \qquad \lambda n.\, \lambda c.\, n \\ \text{cons} &= \lambda x.\, \lambda xs.\, \lambda n.\, \lambda c.\, (c\ x\ xs) \end{aligned}$$

- Schreibe *head* und *tail*, sodass:
  - head (cons A B) $\overset{*}{\Longrightarrow}$ A
  - tail (cons A B) $\overset{*}{\Longrightarrow}$ B
- Schreibe replicate, sodass:
  - replicate c_n $A = \underbrace{\text{cons } A \text{ (cons } A \text{ ...(cons } A \text{ nil))}}_{n \text{ mal}}$
- Erinnerung: $c_n\ f\ x = \underbrace{f\ (f\ ...(f\ x))}_{n \text{ mal}}$
- Werte aus: replicate c_3 A $\overset{*}{\Longrightarrow}$?