



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Primer Trabajo Práctico

14 de Abril de 2010

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Bianchi, Mariano	92/08	bianchi-mariano@hotmail.com
Brusco, Pablo	527/08	pablo.brusco@gmail.com
Di Pietro, Carlos Augusto Lyon	126/08	cdipietro@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

# Índice

<b>1. Ejercicio 1</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Explicación . . . . .	3
1.3. Análisis de la complejidad del algoritmo . . . . .	4
1.4. Detalles de Implementación . . . . .	7
1.5. Resultados . . . . .	8
 <b>2. Ejercicio 2</b>	 <b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. Explicación . . . . .	10
2.3. Análisis de la complejidad del algoritmo . . . . .	15
2.4. Detalles de Implementación . . . . .	16
2.5. Resultados . . . . .	16
2.6. Debate . . . . .	16
2.7. Conclusiones . . . . .	17
 <b>3. Ejercicio 3</b>	 <b>18</b>
3.1. Introducción . . . . .	18
3.2. Explicación . . . . .	18
3.2.1. Primer aproximación . . . . .	18
3.2.2. Segunda aproximación . . . . .	19
3.3. Análisis de la complejidad del algoritmo . . . . .	20
3.4. Detalles de Implementación . . . . .	21
3.5. Resultados . . . . .	22
3.6. Debate . . . . .	22
3.7. Conclusiones . . . . .	23

# 1. Ejercicio 1

## 1.1. Introducción

El primer problema del presente trabajo consistió en la implementación de un algoritmo capaz de dar solución a la ecuación

$$b^n \bmod (n) \quad (1)$$

haciendo uso de alguna de las técnicas algorítmicas aprendidas hasta el momento en la materia. Asimismo, la consigna dictaba que la complejidad final del algoritmo debería ser menor a  $O(n)$ .

En pos de cumplimentar lo pedido se decidió usar la técnica de *Dividir & Conquistar*<sup>1</sup> para desarrollar el algoritmo. Esta técnica se caracteriza principalmente en dividir la instancia de un problema en instancias más pequeñas, atacar cada una de ellas por separado y resolverlas, para finalmente juntar sus resultados y así producir el resultado final.

## 1.2. Explicación

La primera solución que se piensa casi de manera intuitiva para el problema es la de mutliplicar  $n$  veces el número  $b$  y luego hallar el resto de dividir ese resultado por  $n$ .

$$\underbrace{b.b.b \dots b.b.b}_{n \text{ veces}} \bmod (n) = b^n \bmod (n) \quad (2)$$

Sin embargo, salta a la vista que la complejidad ese algoritmo es  $O(n)$ , ya que se realizan  $n$  multiplicaciones y 1 división, razón por lo cual no cumple con lo pedido en la consigna. Además, puesto que ese algoritmo realizar sucesivas multiplicaciones de  $b$ , cabe la posibilidad de que el valor que se va acumulando sobrepase el máximo número entero representable en la computadora producido así un overflow y obteniéndose en consecuencia un resultado incorrecto.

Analizando la falla del algoritmo anterior, se observa que lo que se debe evitar es calcular directamente el resultado de  $b^n$  ya que ese número podría ser excesivamente grande. Con esto en mente veamos una manera más conveniente de abordar el problema. Es claro, por definición de congruencia, que resolver la ecuación en (1) equivale a hallar el  $x$  tal que:

$$b^n \equiv x(n), \quad \text{con } 0 \leq x < n \quad (3)$$

Luego, asumamos por un momento que podemos tener gratis un  $k$  tal que:

$$b^{n/2} \equiv k(n), \quad \text{con } 0 \leq k < n \quad (4)$$

Entonces, aplicando el resultado de (4) en (3) obtenemos que:

- Si  $n$  es par:

$$\begin{aligned} b^n &\equiv x(n), \quad \text{con } 0 \leq x < n \\ b^{n/2}.b^{n/2} &\equiv x(n) \\ k.k &\equiv x(n) \\ k^2 &\equiv x(n) \end{aligned} \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Poner alguna referencia en donde se explique esta técnica

- Si  $n$  es impar par:

$$\begin{aligned}
b^n &\equiv x(n), \quad \text{con } 0 \leq x < n \\
b.b^{n/2}.b^{n/2} &\equiv x(n) \\
b.k.k &\equiv x(n) \\
b.k^2 &\equiv x(n)
\end{aligned} \tag{6}$$

Luego, las expresiones resultantes en ambos casos pueden resolver de manera más simple y rápida ya que al estar acotado  $k$  por  $n$  el valor de  $b.k^2$  es mucho menor que el de  $b^n$  y en consecuencia la operación de calcular el resto módulo  $n$  se realiza en menor tiempo.

Volviendo un poco sobre nuestro pasos, se dijo anteriormente en (4) que podíamos asumir que obtener  $k$  no tenía un costo computacional significativo. No obstante, esto no siempre es cierto puesto que para obtener  $k$  es necesario calcular previamente  $b^{n/2}$  el cual puede ser un número nada despreciable en lo que respecta a tamaño en memoria.

Si ese fuera el caso, entonces para calcular  $b^{n/2}$  podemos aplicar nuevamente el procedimiento descrito con anterioridad calculando  $b^{n/4}$  y usando una expresión análoga a (5) o a (6) dependiendo de si  $n/2$  es par o impar respectivamente. Del mismo modo se puede repetir el accionar con  $b^{n/4}$  y así sucesivamente hasta que reducir el exponente a 1, donde  $b^1 \bmod n$  puede calcularse en  $O(1)$  ya que  $b$  es acotado. A partir de allí se realiza el camino inverso calculando cada uno de los restos módulo  $n$  de las potencias de  $b$  a partir del resto de dividir por  $n$  a la potencia de  $b$  calculada en el paso inmediatamente anterior, hasta dar finalmente con la solución del problema.

### 1.3. Análisis de la complejidad del algoritmo

A continuación se calculará la complejidad del algoritmo implementado en la función *potenciacion*, que es el que resuelve el problema que se planteó en (1). Dicho problema tiene por variables a  $b \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual en términos matemáticos representa que  $b$  y  $n$  pueden tomar valores tan grandes como se desee puesto que  $\mathbb{N}$  es un conjunto infinito. Esto se ve traducido en que los parámetros del algoritmo *potenciacion* sean tan grandes como uno desee.

Ahora bien, la consigna asegura que  $b$  puede considerarse como un número acotado; pero aún así,  $n$  puede seguir siendo tan grande como se quiera. Por este motivo, resulta lógico pensar que la suposición de que  $n$  cabe perfectamente en una posición fija de memoria no es para nada correcta. Por lo tanto, para que el análisis de complejidad del algoritmo sea lo más correcto posible se debe evaluar la complejidad de las operaciones que realiza el algoritmo en función de la cantidad de símbolos binarios necesarios para representar el valor de cada parámetro dentro del ordenador; en particular en función del tamaño de  $n$ , ya que es el único parámetro no acotado.

Lo expresado en el análisis anterior conlleva a que la medición de complejidad del algoritmo se efectúe mediante el *modelo logarítmico* el cual precisamente mide la performance de un algoritmo a través de la suma de los costos de todas las operaciones en función del tamaño de las variables involucradas.

Los costos de las operaciones elementales en el modelo logarítmico son representadas en la siguiente tabla:

operaciones	costo en m. logarítmico
$m+n$	$\log_2 (m) + \log_2 (n)$
$m-n$	$\log_2 (m) + \log_2 (n)$
$m*n$	$\log_2 (m) + \log_2 (n)$
$m/n$	$\log_2 (m) + \log_2 (n)$
$[ i ]$	$\log_2 (i)$
$a=n$	$\log_2 (n)$

Sigue a continuación un pseudocódigo del algoritmo en cuestión en el que se detallan, para cada instrucción, su costo en el modelo logarítmico:

*potenciacion*(base :  $\mathbb{N}$ , exp:  $\mathbb{N}$ , m:  $\mathbb{N}$ )

```

1 Complejidad:  $T(n)$ 
2 var res :  $\mathbb{Z}$ 
3 base  $\leftarrow$  base mod m ; //  $O(\log_2(\text{base}))$ 
4 if (base == 0); //  $O(\log_2(\text{base}))$ 
5 then
6 | return base
7 else
8 | if (exp == 1); //  $O(\log_2(\text{exp}))$ 
9 | then
10 | return base
11 | else
12 | if (exp mod 2 == 0) ; //  $O(\log_2(\text{exp}))$ 
13 | then
14 | var temp :  $\mathbb{Z}$ 
15 | temp  $\leftarrow$  potenciacion(b, exp/2, m) ; //  $T(\text{exp}/2)$ 
16 | temp  $\leftarrow$  (temp*temp) ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp})^2))$ 
17 | temp  $\leftarrow$  temp mod m ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp}) * \log_2(m)))$ 
18 | res  $\leftarrow$  temp ; //  $O(\log_2(\text{temp}))$ 
19 | else
20 | var temp :  $\mathbb{Z}$ 
21 | temp  $\leftarrow$  potenciacion(b, (exp-1)/2, m) ; //  $T((\text{exp}-1)/2)$ 
22 | temp  $\leftarrow$  (temp*temp) ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp})^2))$ 
23 | temp  $\leftarrow$  temp mod m ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp}) * \log_2(m)))$ 
24 | temp  $\leftarrow$  temp * base ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp}) * \log_2(b)))$ 
25 | temp  $\leftarrow$  temp mod m ; //  $O(\log_2(\log_2(\text{temp}) * \log_2(m)))$ 
26 | res  $\leftarrow$  temp ; //  $O(\log_2(\text{temp}))$ 
27 | end
28 | end
29 end
30 return res

```

**Algorithm 1:** Pseudocódigo de la función *potenciación* con el costo de cada instrucción en el modelo logarítmico

Analizando los costos de las operaciones detalladas en el pseudocódigo anterior, se puede ver que en el caso que  $b \neq 0$  ( $n$ ) y  $n \neq 1$ , entonces el algoritmo realiza una cierta cantidad de operaciones correspondientes a uno de los dos bloques que se ejecutan dependiendo de la paridad del exponente. Ese número de operaciones puede ser acotada por  $q$ , siendo  $q$  el máximo entre las cantidades de operaciones de ambos bloques<sup>2</sup>.

Por otra parte, también es observable que el algoritmo efectúa los llamados recursivos en la medida que el exponente se pueda seguir dividiendo por 2.

<sup>2</sup>En particular, el bloque con mayor cantidad de operaciones es el bloque que se ejecuta cuando el exponente es impar

En consecuencia, se puede afirmar que el algoritmo realiza a lo sumo  $q \cdot \log_2(n)$  operaciones en el peor caso; de donde sigue que la complejidad teórica del algoritmo es  $O(\log_2(n))$ .

#### 1.4. Detalles de Implementación

Dentro de la carpeta `./ej1/`, se puede encontrar el archivo ejecutable `ejercicio_1` compilado para GNU-Linux, el cual resuelve el problema anteriormente descrito. Este programa se ejecuta por consola mediante el comando `./ejercicio_1`, y recibe como parámetro los archivos de entrada `".in"` a procesar. Puede recibir tantos nombres de archivo como se desee, pero en caso de no recibir ninguno, el programa procesará el archivo `Tp1Ej1.in` que se encuentra incluido dentro de la misma carpeta.

Una vez ejecutado, el algoritmo procesa la cola de archivos que recibió como parámetros de a uno por vez generando para cada uno de ellos dos archivos:

- Un archivo `".out"` omónimo con la solución a la ecuación (1) para cada par de naturales  $(b, n)$  contenidos en el archivo de entrada. Este archivo se guarda en la misma carpeta en la que se encuentra el ejecutable `ejercicio_1`.
- Un archivo omónimo con el sufijo `"_grafico.out"`, en el cual registra para cada  $n$  el número de operaciones realizadas por el algoritmo. Este archivo se guarda en la carpeta `./ej1/info graficos`, y tiene por objetivo facilitar la tarea de cargar los datos en el programa de análisis gráfico `QtiPlot`.

Por otra parte, en la misma carpeta, se puede hallar el archivo ejecutable `input_gen1` también compilado para GNU-Linux. Al correr este programa desde la consola mediante el comando `./input_gen1` se despliega un menú de opciones para generar distintos tipos de archivos `".in"` para ser resueltos por el ejecutable `ejercicio_1`. Una vez elegido el tipo de entrada a crear, el programa solicita que se ingrese un nombre de archivo y la cantidad de casos a generar. Acto seguido guarda el archivo generado en la carpeta `./ej1/`.

Asimismo, en la carpeta `./ej1/` hay un Makefile el cual permite recompilar los archivos ejecutables con tan solo ejecutar el comando `make` en la consola. Además, ejecutando el comando `make clean` se pueden eliminar los archivos ejecutables y todos los archivos de extensión `".out"`.

Luego, en la carpeta `./ej1/sources` se encuentran los códigos fuentes de los ejecutables antes descritos. Los mismos están escritos en lenguaje C++ y tienen comentadas las partes relevantes para simplificar la comprensión.

Finalmente, en `./ej1/` se hayan los archivos `.Tp1Ej1.in` y `Tp1Ej1.out` que vienen junto con en el enunciado de este Trabajo Práctico, y se haya también la carpeta `./ej1/test` la cual contiene los archivos `".in"` generados para probar el algoritmo junto con sus correspondientes gráficos de  $n$  vs. *cantidad de operaciones*.

## 1.5. Resultados

El programa *input\_gen1* fue desarrollado para poder generar diversos casos de pruebas en los que  $n$  adopte distintos valores<sup>3</sup>. A continuación se describen cuáles son esos casos y se explica brevemente que se esperaba observar en cada uno de ellos.

**a.- Casos con  $n$  entre 1.000.000 y 1000.000.000:**

Se pensó en este tipo de casos para poder evaluar el comportamiento del algoritmo frente a valores de  $n$  muy grandes.

**b.- Casos con  $n$  entre 1 y 1.000.000:**

Se pensó en este tipo de casos para poder evaluar el comportamiento del algoritmo frente a valores de  $n$  bastante acotados.

**c.- Casos con  $b$  múltiplo de  $n$ , con  $n$  entre 1 y 1.000.000:**

Se pensó en este tipo de casos para poder observar la situación más favorable, en la cual el algoritmo solo debe efectuar una operación que es la de ver si  $b \bmod n = 0$  y en ese caso devolver 0.

**d.- Casos con  $n = 2^k - 1$ , con  $k$  entre 2 y 30:**

Se pensó en este tipo de casos para poder observar el comportamiento del algoritmo en la situación más desfavorable. Esta es en la cual al realizar la división entera del exponente de  $b$  por 2 el resultado es siempre un número impar, por lo cual el algoritmo entra por en el último *else* que es el bloque de código con mayor número de operaciones.

**e.- Casos con  $n$  primo con  $n$  entre 1 y 1000.000.000:**

Se pensó en este tipo de casos para poder evaluar el comportamiento del algoritmo frente a valores de  $n$  primos.

Mediante cada uno de estos casos se buscó estudiar el comportamiento del algoritmo y medir su complejidad real, valiéndose para ello del conteo de la cantidad de operaciones que realiza el algoritmo para resolver el problema. No obstante, previo a la experimentación, se formularon varias hipótesis en cuanto a qué era esperable observar en cada caso en particular:

- 1) En el caso **c**, dado que el algoritmo realiza 2 asignaciones y una única cuenta (la de calcular el resto de  $b$  módulo  $n$ ), resulta esperable que la complejidad real sea de valor constante 3.
- 2) Para los casos **a** y **b** sabemos que la complejidad teórica del algoritmo es  $O(\log_2(n))$ . No obstante, como los  $n$ 's del caso **a** son del orden de  $10^9$ , mientras que los  $n$ 's del caso **b** son del orden de  $10^6$  cabría esperar que la cantidad de operaciones para los  $n$ 's del caso **a** sean mayores que los del caso **b**.
- 3) El caso de **e** es análogo al de **a**, ya que en ambos casos los  $n$ 's son del orden de  $10^9$ , y la complejidad teórica del algoritmo varía. Sin embargo, se podría suponer a priori que por tratarse  $n$ 's primos, la cantidad de operaciones del caso **e** sea ligeramente mayor a la cantidad de operaciones del caso **a**.

---

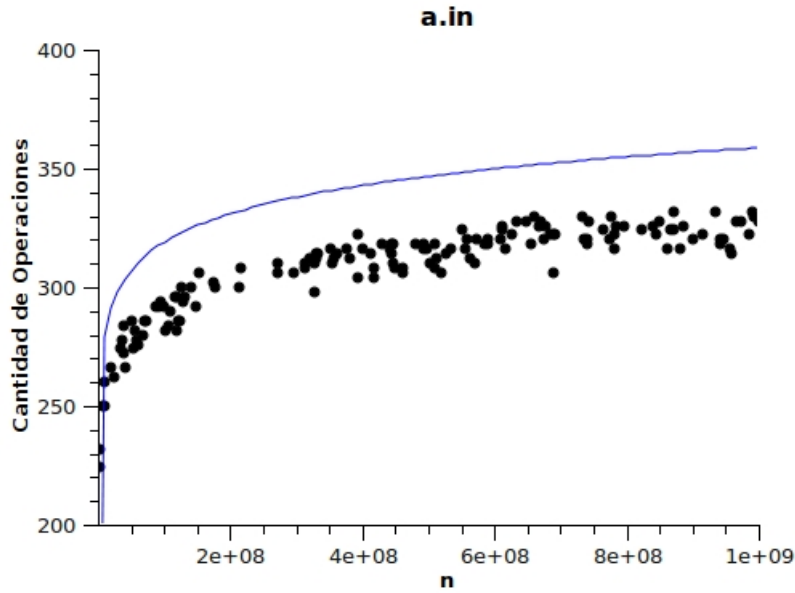
<sup>3</sup>Aclaración: En todos los casos  $b$  es un número entre 0 y 1.000.000



- 4) Por último, en el caso **d**, cada llamado recursivo del algoritmo siempre ingresa al bloque de código de los exponentes impares. Por ende, como realiza exactamente  $q$  operaciones  $\log_2(n)$  veces es presumible que **d** sea el peor caso de este algoritmo.

Para la experimentación con el programa se generó un archivo con 150 pares de números  $b, n \in \mathbb{N}$  para cada uno de los casos anteriores. Luego, se los procesó corriendo el programa *ejercicio\_1* y cada archivo de entrada obtuvo su correspondiente archivo "*NombreDeArchivo.out*" y su correspondiente archivo "*NombreDeArchivo\_grafico.out*" en el cual se registraron los valores de  $n$  y la cantidad de operaciones que realizó el algoritmo en ese caso. Finalmente, haciendo uso de esos archivos se generaron, usando el programa de análisis gráfico *QtiPlot*, diversos gráficos de  $n$  vs. *cantidad de operaciones* en los cuales se contrasta la curva de resultados con una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / f(n) = c \cdot \log_2(n), c \in \mathbb{R}^+$  para poder estudiar si la complejidad real se ajusta a la complejidad teórica.

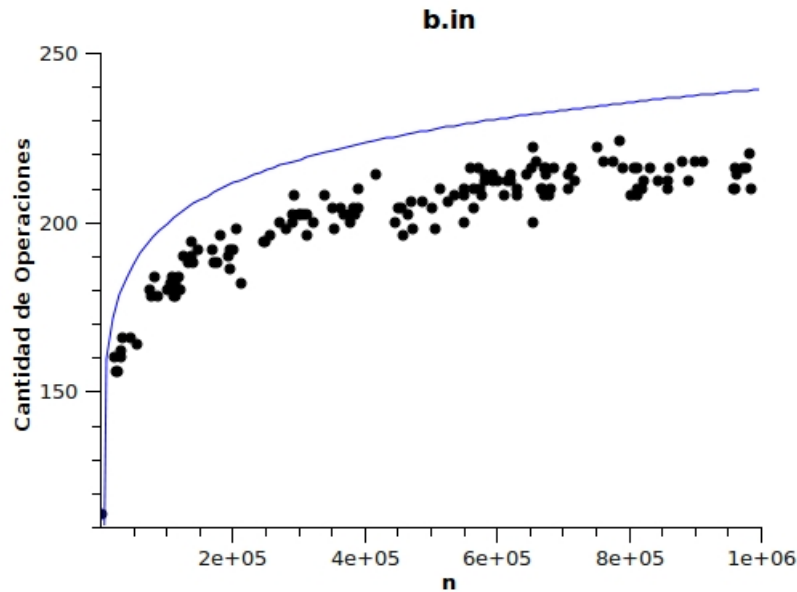
A continuación se presentan los gráficos realizados para cada caso:



Cuadro 1: .

## 1.6. Debate

Como primera observación de los gráficos expuestos en la sección anterior, cabe decir que la complejidad real se ajustó perfectamente a la complejidad teórica, ya que en todos los casos se pudo hallar una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que a partir de algún  $n_0$  el gráfico de  $c \cdot \log_2(n)$  pasa a acotar superiormente a la cantidad de operaciones realizadas por el algoritmo.



Cuadro 2: .

## 2. Ejercicio 2

### 2.1. Introducción

El segundo problema consistió en la implementación de un algoritmo capaz de dar solución al problema que se plantea a continuación:

Decidir si un grupo de  $n$  personas pueden formar o no una ronda que cumpla con las siguientes restricciones:

- La ronda debe contener a todas las personas.
- Algunas personas son amigas y otras no.
- Cada alumna debe tomar de la mano a dos de sus amigas.

### 2.2. Explicación

Dado que para este problema no se conocen algoritmos buenos<sup>4</sup>, se pensó en utilizar la solución por fuerza bruta, es decir, intentar todas las combinaciones hasta lograr determinar si hay o no solución, pero, agregando algunas mejoras.

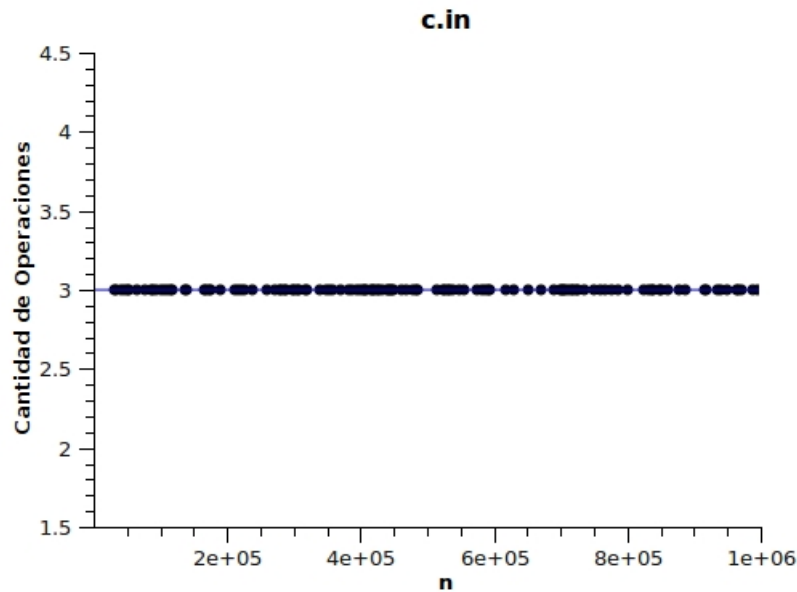
Mejoras como evaluar, en el momento de cargar la ronda, si alguna persona no tiene las suficientes amigas, es decir 2, o si todos son amigos de todos.

Luego, se pensó en la estrategia de “Vuelta atrás”, (Backtracking).

#### **Backtracking:**

---

<sup>4</sup>Un algoritmo se considera bueno si puede ser resuelto en tiempo polinomial.



Cuadro 3: .

*En su forma básica, la idea de backtracking se asemeja a un recorrido en profundidad dentro de un grafo dirigido. El grafo en cuestión suele ser un árbol, o por lo menos no contiene ciclos. Sea cual sea su estructura, existe sólo implícitamente. El objetivo del recorrido es encontrar soluciones para algún problema. Esto se consigue construyendo soluciones parciales a medida que progresa el recorrido; estas soluciones parciales limitan las regiones en las que se puede encontrar una solución completa. El recorrido tiene éxito si, procediendo de esta forma, se puede definir por completo una solución. En este caso el algoritmo puede bien detenerse (si lo único que se necesita es una solución del problema) o bien seguir buscando soluciones alternativas (si deseamos examinarlas todas). Por otra parte, el recorrido no tiene éxito si en alguna etapa la solución parcial construida hasta el momento no se puede completar. En tal caso, el recorrido vuelve atrás exactamente igual que en un recorrido en profundidad, eliminando sobre la marcha los elementos que se hubieran añadido en cada fase. Cuando vuelve a un nodo que tiene uno o más vecinos sin explorar, prosigue el recorrido de una solución.*<sup>5</sup>

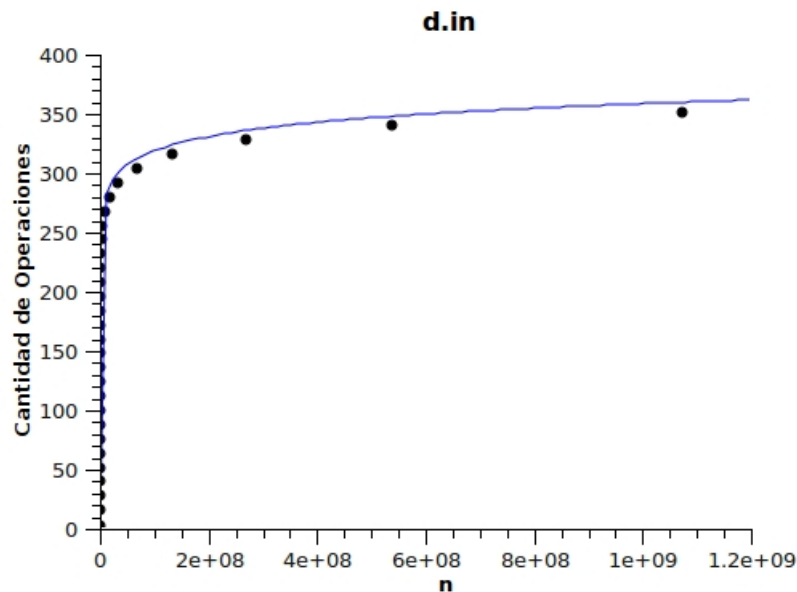
En este caso particular, la idea es, seleccionar una persona (P), ingresarla en la ronda, e ir armando un árbol implícito de posibilidades en donde el nodo padre es P y cada rama se forma con las distintas selecciones de amigas de P y sus sub-arboles, con las combinaciones posibles de amigas del nodo padre en el que esté. Para ello se utiliza la recursión, en donde se intenta bajar lo más posible en el árbol hasta llegar a formar un camino desde el primer nodo hasta alguna hoja en donde se encuentren todas las chicas con nodos padre e hijo amigas.

También, se implementaron otras mejoras que intentan podar el árbol dadas ciertas condiciones que permitan acortar las posibilidades:

- Las amigas de un nodo se pueden procesar en cualquier orden, pero decidimos intentar

---

<sup>5</sup><http://es.wikipedia.org>



Cuadro 4: .

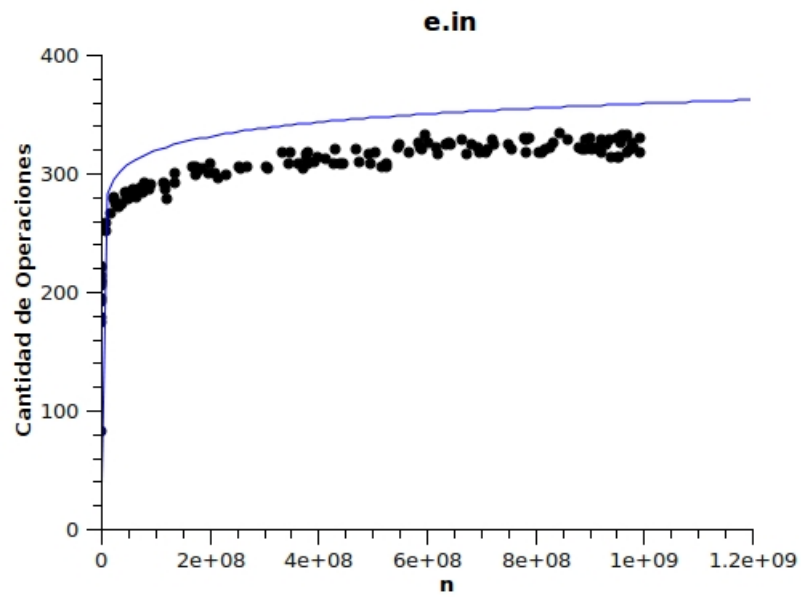
ser lo más restrictivo posible con las primeras (las que tienen menos amigas primero). Este proceso poda el árbol de búsqueda antes de que se tome la decisión y se llame a la subrutina recursiva.

- Cuando se elige qué valor se va a asignar, se hace un examen comprobando que aún queden amigas de la que inició la ronda disponibles. En caso que no, se pueden evitar muchas llamadas sin sentido.

A continuación se ve un pseudocódigo que muestra el comportamiento de la estrategia y las mejoras elegidas.

#### Algunos detalles:

- **gente** es una lista con elementos de tipo chica, ordenadas de acuerdo a la cantidad de amigas que tiene cada elemento.
- el tipo **chica** consta de un nombre (int) y sus amigas (conjunto de nombres).
- **enRonda** es un conjunto de nombres donde se va almacenando quienes pertenecen a la ronda.
- **amigasPrimera** es un conjunto de nombres donde se almacenan los nombres de las amigas de la chica que comienza la ronda.



Cuadro 5: .

- **tam(c)** devuelve el tamaño del conjunto c.
- **insertar(c,e)** inserta a e en el conjunto c.
- **borrar(c,e)** borra a e del conjunto c.
- **cuenta(c,e)** cuenta la cantidad de apariciones del elemento e en c.
- **primerElemento(l)** devuelve el primer elemento de una lista.

**resolver()**

```
1 Complejidad:  $T(n)$ 
2 var n : int  $\leftarrow$  tam(gente)
3 var sonPocas : bool  $\leftarrow$  false
4 var sonSuficientes : bool  $\leftarrow$  false
5 foreach  $k$  en gente do
6   | sonPocas  $\leftarrow$  sonPocas or tam(amigas(k)) < 2;
7   | sonSuficientes = sonSuficientes && tam(amigas(k)) == n-1;
8 end
9 if (sonSuficientes) then
10  | retornar true
11 end
12 if (sonPocas) then
13  | retornar false
14 end
15 var solitaria : chica  $\leftarrow$  primerElemento(gente);
16 insertar(nombre(solitaria),enRonda);
17 retornar probarDistintasRondas(solitaria,solitaria);
```

**probarDistintasRondas(prim : chica, ult : chica)**

```

1 Complejidad:  $T(n)$ 
2 if (cuenta(amigas(ult),nombre(prim))  $\neq 0$  && tam(gente) = tam(enRonda)
   ) then
3   | retornar true;
4 else
5   | var res : bool
6   | var eraAmiga : bool  $\leftarrow$  false
7   | foreach chi en gente do
8     | var estaEnRonda : int  $\leftarrow$  cuenta(enRonda,nombre(chi))
9     | var esAmigaDeLaUltima : int  $\leftarrow$  cuenta(amigas(ult),nombre(chi))
10    | var restantesAmigasPrimera : int  $\leftarrow$  tam(amigasPrimera)
11    | var esAmigaDeLaPrimera : int  $\leftarrow$  cuenta(amigas(prim),nombre(chi))
12    | if ( (estaEnRonda = 0) && (esAmigaDeLaUltima  $\neq$  0) &&
       (restantesAmigasPrimera  $\neq$  0) ) then
13      | if (esAmigaDeLaPrimera  $\neq$  0) then
14        | eraAmiga  $\leftarrow$  true;
15        | eliminar(amigasPrimera,nombre(chi));
16      | else
17        | eraAmiga  $\leftarrow$  false;
18      | end
19      | insertar(enRonda,nombre(chi));
20      | res  $\leftarrow$  probarDistintasRondas(prim,chi);
21      | if (res) then
22        | retornar true;
23      | else
24        | borrar(enRonda,nombre(chi));
25        | if (eraAmiga) then
26          | insertar(amigasPrimera,nombre(chi))
27        | end
28      | end
29    | end
30  | end
31  | retornar false;
32 end

```

### 2.3. Análisis de la complejidad del algoritmo

La complejidad en el peor caso de este algoritmo surge inmediatamente al hacer pruebas. Dependiendo de las entradas elegidas, el programa podría tener que recorrer casi todas las ramas del árbol hasta poder decir que no hay solución. En este caso, podríamos entonces solo acotar el peor caso por la función  $f(n) = c \cdot (n - 1)! + b$  (donde  $b$  y  $c$  son constantes) ya que

la cantidad de formas de armar una ronda con  $n$  personas es  $(n!/n) = (n-1)!$ <sup>6</sup>

Por lo tanto, el algoritmo implementado NO es bueno. Sin embargo, cuando para un conjunto de datos de entrada se puede formar una ronda, el algoritmo no recorre todo el árbol en busca de la solución, sino que al encontrar una termina. Esta propiedad del backtracking y el resto de las mejoras, hace que para ciertos datos de entradas en donde se pueden formar rondas, el algoritmo se comporte como lo haría una solución polinomial.

En lo que respecta a la complejidad del mejor caso, se puede ver de forma simple que el mismo se da si en el primer intento de formar una ronda se lograra llegar a una respuesta válida. Esto significa que el algoritmo demoró  $n$  pasos para unir a las amigas y uno más para verificar que era una ronda válida. Por lo tanto, la complejidad en el mejor caso es  $\Omega(n)$

## 2.4. Detalles de Implementación

Para compilar este programa, sólo hace falta ejecutar el comando make. El modo de uso del mismo es simple: En la carpeta que contiene al ejecutable debe existir un archivo con los datos de entrada llamado “entrada”. El programa pasará a ejecutarse y una vez que termine, devolverá en un archivo llamado “salida” el resultado buscado.

## 2.5. Resultados

Aca, ademas de los graficos, podemos mencionar que para algunos casos el algoritmo no termino, pero por decisión nuestra, ya que si las mejoras no servian para cortar antes el algoritmo y justo esa distribucion de amigas no tenia solucion, si las amigas eran muchas el algoritmo demoraria mucho en terminar

## 2.6. Debate

De los resultados pertenecientes a la sección [2.3] podemos observar cómo se comporta la implementación frente a algunas entradas particulares. Las mismas fueron creadas al azar pero de forma tal que se cumplan los invariantes citados en [2.1] y con el agregado de fijar la cantidad de enlaces (amistades) en cada ronda (esta función del generador de casos de prueba es explicado en la sección **resultados**).

En un primer análisis, podemos ver que en general para todos los casos analizados la función proveniente de graficar cantidad de chicas contra tiempo demorado en ejecutar el algoritmo se asemeja bastante a una función polinomial cuando la cantidad de relaciones es alta. Si bien sabemos que esto no refleja la verdadera complejidad del algoritmo, en primer instancia podría significar un buen funcionamiento de las mejoras realizadas sobre el algoritmo.

---

<sup>6</sup>Se lo puede imaginar como una fila de  $n$  personas. Para la primer posición hay  $n$  personas disponibles, para la segunda  $n-1$ , y así sucesivamente. Por lo tanto hay  $n*(n-1)*...*1 = n!$  formas de acomodar las personas en una fila. Ahora, si se unen las puntas, podría rotar la fila  $n$  veces y seguiría siendo la misma ronda, por lo tanto dividiendo por  $n$  obtengo la respuesta:  $(n-1)!$ .



La función antes mencionada, pareciera ser bastante monótona. Igualmente, se observa con claridad la aparición de casos en los cuales se demoró mucho más tiempo que el tiempo promedio. Esto podría dejar entrever que para ciertos valores de la entrada o no se encontró resultado alguno, por lo cuál se tuvieron que analizar los  $(n-1)!$  casos posibles, o bien se encontró una solución al problema, pero esta se demoró en ser encontrada ya que se trataba de un ejemplo en el cual las mejoras realizadas no surtieron efecto o, peor aún, tuvieron un efecto contrario al deseado.

## 2.7. Conclusiones

Como resultado del análisis de los datos arrojados en [2.5] y de las hipótesis realizadas anteriormente, podemos concluir algunas cosas.

Primero, podemos decir que para muchos de los casos analizados durante el transcurso de este trabajo práctico, el algoritmo llegó a una respuesta en un tiempo promedio mucho menor al que en teoría debería demorar. Por lo tanto, podemos intuir que las mejoras realizadas dentro del algoritmo fueron, en general, muy productivas. Sin embargo, no nos aseguran que el algoritmo mejore su complejidad asintóticamente.

En segundo lugar, y continuando lo antes dicho, se observaron casos en los cuales el algoritmo demoró más que el tiempo promedio. Esto puede deberse a que, para ciertos casos de entrada, las mejoras del algoritmo no inciden en la resolución del problema, haciendo que se demore demasiado en conseguir una solución válida. Si se suma el hecho de analizar dichos casos para entradas de gran tamaño, podemos llegar a estar ante un problema, ya que el tiempo de resolución del problema para nuestro algoritmo puede ser, en términos humanos, eterno.

Finalmente, podemos concluir entonces que el algoritmo, más allá de las mejoras implementadas sobre el mismo, no alcanza a obtener una complejidad de peor caso menor que  $O(n!)$ , pero las mismas sirven para que el algoritmo encuentre más fácilmente el camino hacia el mejor caso<sup>7</sup>, que para este tipo de problemas es  $\Omega(n)$

---

<sup>7</sup>Siempre y cuando exista al menos una solución al problema y además, esta solución se condiga con las mejoras elegidas en la implementación.

### 3. Ejercicio 3

#### 3.1. Introducción

El tercer y último problema de este trabajo práctico consiste en, dadas dos listas con horarios de entrada y salida de cierto grupo de trabajadores a una empresa, se quiere saber cuál es la máxima cantidad de empleados que se encuentran en simultáneo dentro de dicha empresa. Estas listas cumplen con la particularidad de que:

- Están ordenadas ascendentemente por horario.
- Las horas van desde 00:00:00 hasta 23:59:59
- Para todos los trabajadores, es cierto que su horario de ingreso es estrictamente menor que su horario de egreso.

Además, como parte de la consigna se solicitaba que el algoritmo produjese un resultado correcto en tiempo estrictamente menor a  $O(n^2)$ , donde  $n$  es la cantidad de trabajadores pertenecientes a la empresa.

La solución empleada no requirió de una técnica algorítmica compleja, sino que aprovechó las características de los datos de entrada para resolver el problema de una forma eficaz. Conociendo que existen dos listas (una de horarios de entrada y otra de horarios de salidas), y que ambas listas están ordenadas por horarios, bastó simplemente con un recorrido lineal sobre ellas para poder llevar un registro del número de empleados dentro de la empresa y así averiguar con certeza la solución al problema.

#### 3.2. Explicación

##### 3.2.1. Primer aproximación

En una primer mirada, se pensó que la mejor forma de resolver el ejercicio era aplicando un algoritmo similar al quicksort<sup>8</sup>, sólo que el mismo se realizaba sobre conjuntos y no sobre arreglos. En resumidas cuentas, la idea consistía en tomar un trabajador cualquiera del grupo para actuar de pivot, y luego mediante la comparación con el pivot, separar a los restantes en tres conjuntos distintos: los que salían antes que el pivote entrara a la empresa, los que entraban luego que el pivote saliera de la empresa y los que se cruzaban con el trabajador pivote (tanto cuando el pivote entraba y el otro salía como en el caso inverso). De esta manera, si se repetía el proceso varias veces, se obtenía varios conjuntos en los cuales aparecían únicamente los trabajadores que se cruzaban en sus horarios dentro de la empresa. Finalmente, sólo restaba devolver el mayor cardinal de dichos conjuntos.

Al igual que el quicksort, si el pivote era elegido al azar, el algoritmo anterior contaba con una complejidad promedio de  $O(n * \log(n))$ . De cualquier modo, el peor caso seguía siendo  $O(n^2)$ , por lo que no se cumplía con la cota máxima pedida para este trabajo.

---

<sup>8</sup>Alguna referencia que explique el algoritmo

Como corolario de un análisis más exhaustivo del problema, se cayó en la cuenta que los datos de entrada contaban con la característica de estar ordenados por horario, tanto en la lista de entradas como en la de salidas. Dicha observación posibilitó el desarrollo de una idea capaz de solucionar el problema en tiempo  $O(n)$ , la cual se expone en la sección a continuación.

### 3.2.2. Segunda aproximación

Para encontrar solución al problema dado, lo primero que se realizó fue pensar qué cosas se necesitaban para representarlo. Para ello se creó una clase “Empresa”, sobre la cual se cargarían los datos de entrada. La clase en cuestión consta de dos arreglos de tuplas  $\langle \text{horario}, \text{trabajador}^9 \rangle$ . Dichos arreglos se hallan ordenados ascendentemente por horario; uno de los ellos contiene únicamente los horarios de entrada, mientras que el otro contiene únicamente los de salida.

Una vez resuelto el problema de cómo albergar los datos de manera de poder acceder a ellos de forma eficiente, se prosiguió con el desarrollo del algoritmo que resolviera el problema planteado en la intrducción.

La idea del mismo consiste en ir indexando ambos arreglos desde la posición 0 hasta la  $n-1$  ésima. De esta forma, se recorre el arreglo que contiene los horarios de entrada, hasta que se encuentra posición en la cual el horario de entrada sea mayor al horario de salida que se está indexando en ese momento (por ejemplo, en el caso de la primera iteración, el horario ubicado en la posición 0 del arreglo de horarios de salida). Mientras esto se realiza, un contador con valor inicial 0 se va incrementando con cada iteración, simulando así la cantidad de trabajadores dentro del establecimiento.

De momento que se halla un horario de entrada mayor al de salida esto significa que, antes que ingrese el trabajador correspondiente a ese horario de entrada, hubo al menos uno que se retiró. Esto lleva a dejar de iterar el arreglo de entradas y pasar a iterar el de salidas, al tiempo que se guarda en la variable a devolver el máximo entre el contador de trabajadores dentro de la empresa y el mayor número de empleados que hubo dentro de la empresa registrado hasta el momento (este último valor inicialmente es 0).

Luego, se recorre el arreglo que contiene los horarios de salida decrementando el contador de trabajadores dentro de la empresa, (simulando de ese modo el egreso de un trabajador). hasta encontrar un horario mayor al indexado en el arreglo de entradas, en cuyo caso se alternaba al arreglo a iterar.

Esta iteración “alternada” sobre los arreglos se repite, hasta haberse indexado todas las posiciones del arreglo con los horarios de entrada, momento en el cual se devuelve el valor de la variable en la que se fueron almacenando los máximos.

De esta explicación y de un análisis más minucioso del pseudocódigo, se desprenden algunas hipótesis.

- La complejidad temporal del algoritmo es  $O(n)$ .
- El peor caso se da cuando hay muchos trabajadores dispersos durante todo el día, es decir, si todos los horarios de salida y entrada entre dos trabajadores cualesquiera son disjuntos.

---

<sup>9</sup>Cada trabajador es representado por un número natural

A modo de una explicación más clara que nos acerque un poco más a la implementación, detallamos lo expuesto anteriormente a través del siguiente pseudocódigo:

```

1 Complejidad:  $O(n)$ 
2 var i,j,maxJuntos,juntosPorAhora :  $\mathbb{Z}$ 
3 var termine : bool
4  $i \leftarrow j \leftarrow \text{maxJuntos} \leftarrow \text{juntosPorAhora} \leftarrow 0;$  // 0(1)
5  $\text{termine} \leftarrow \text{false};$  // 0(1)
6 while ( $\neg \text{termine}$ ); // 0(n)
7 do
8   while ( $\text{noLlegueAlFinal}(i,n) \ \&\& \ \text{hora}(\text{entradas}[i]) \leq$ 
       $\text{hora}(\text{salidas}[j]));$  // 0(1)
9   do
10     $\text{juntosPorAhora}++;$  // 0(1)
11     $i++;$  // 0(1)
12   end
13    $\text{termine} = i \geq n;$  // 0(1)
14   if ( $\text{maxJuntos} \leq \text{juntosPorAhora}$ ); // 0(1)
15   then
16     $\text{maxJuntos} \leftarrow \text{juntosPorAhora};$  // 0(1)
17   end
18   while ( $\neg \text{termine} \ \&\& \ \text{hora}(\text{salidas}[j]) \leq \text{hora}(\text{entradas}[i]);$  // 0(1)
19   do
20     $\text{juntosPorAhora}--;$  // 0(1)
21     $j++;$  // 0(1)
22   end
23 end
24 return maxJuntos

```

### 3.3. Análisis de la complejidad del algoritmo

Para realizar el análisis de la complejidad del algoritmo, se decidió utilizar el modelo uniforme y no el logarítmico. Esto se debió a que en este caso, no resulta lógico evaluar la complejidad de acuerdo al costo de representar los valores de los parámetros de entrada. Más aún, por la forma y el contexto del problema y por el algoritmo implementado para la resolución, no sería correcto hacer un análisis logarítmico ya que en este caso las horas representables están acotadas (habíamos dicho que se encontraban entre 00:00:00 y 23:59:59) y la cantidad de trabajadores, aunque no está explícitamente acotada, podríamos suponerla así. De esta manera, sería válido considerar que la complejidad espacial de cada elemento es unitaria, haciendo inadecuado analizar la complejidad del algoritmo con el modelo logarítmico.

Con el objetivo de realizar un mejor análisis de la complejidad del algoritmo propuesto, vamos a analizar el mismo remitiéndonos al pseudocódigo citado en la sección [3.2.1].

Si hacemos una mirada más minuciosa sobre el pseudocódigo, veremos que la complejidad del algoritmo está dada por  $n$ , que hace referencia a la cantidad de trabajadores de la empresa. Si observamos las complejidades de cada operación, podemos apreciar que todas son constantes, con excepción del flujo “while” más grande (aquel que tiene como condición:  $(!termine)$ ). Veamos por qué sucede esto.

Como podemos ver en la línea 5, el booleano *termine* es inicializado con el valor de verdad *false*. La otra variable que nos va a interesar para este análisis es  $i$ , la cuál se inicializa con el valor 0. Con estos valores, y sabiendo que el flujo while que estamos analizando tiene como condición la negación de *termine*, se desprende que el algoritmo terminará sí y solo sí *termine* tome el valor de verdad *true*.

En la línea 13 del pseudocódigo es en el único lugar que se modifica el valor de verdad de *termine*. En esta línea se ve que:

$$termine \leftarrow i \geq n \tag{7}$$

Entonces, juntando esto con lo dicho anteriormente, se puede asegurar que el algoritmo va a finalizar una vez que  $i \geq n$ . Veamos entonces cómo se comporta  $i$  a lo largo del programa.

La variable  $i$  sólo es modificada en el primer while anidado, incrementándose de a uno por vez. Por lo tanto, una vez que se ejecute el contenido de este while anidado  $n$  veces, el algoritmo finalizará.

Si consideramos la precondition que dice que todos los trabajadores ingresan a la empresa estrictamente antes de egresar, podemos decir entonces que este primer while anidado va a ejecutarse siempre a lo sumo  $n$  veces<sup>10</sup>. Por lo tanto, el algoritmo tiene una complejidad de  $O(n)$ . Es más, se puede asegurar que el algoritmo nunca va a terminar antes de recorrer toda la lista de ingresos, por lo que el mejor caso es  $\Omega(n)$ , es decir, el algoritmo es  $\Theta(n)$

### 3.4. Detalles de Implementación

Para compilar este programa, se debe referir a la carpeta que contiene al ejercicio n° 3 y ejecutar `make` en consola.

Luego de ejecutar `make`, se creará un archivo ejecutable, llamado `main`. Para ejecutarlo, se debe hacer una llamada desde la consola respetando el siguiente formato:

```
main [nombreEntrada] [nombreSalida].
```

Los parámetros son opcionales, pero se puede elegir entre no pasar ningún parámetro, o pasar 2. Si no se pasan parámetros, el programa tomara los valores por defecto, esto quiere decir que el archivo de entrada será el designado por la materia.

---

<sup>10</sup>Ver condición del primer while anidado

### 3.5. Resultados

Para poder analizar el comportamiento del algoritmo implementado, se procedió a realizar un programa que genere distintas entradas, de acuerdo a distintos criterios que nos parecieron relevantes remarcar.

De esta manera, se utilizaron dos formas distintas de generar un archivo de entrada. Una de ellas se corresponde a una entrada completamente azarosa, a modo de analizar el comportamiento del algoritmo para una extensa cantidad de casos distintos. La segunda, trata de plasmar en sus casos la hipótesis de peor caso planteada en [3.2.2].

A continuación se adjuntan los gráficos provenientes de analizar los casos antes planteados. Están agrupados de a pares, a modo de mostrar más claramente la diferencia en la complejidad de cada caso.

### 3.6. Debate

Como podemos observar en los gráficos propuestos en la sección [3.5] en general la implementación realizada se comporta como se esperaba que en teoría lo hiciera. Es decir, durante el desarrollo del informe sobre este ejercicio, entre otras cosas, hicimos notar que nuestra hipótesis sobre la complejidad del algoritmo era que el mismo tenía un costo de  $\Theta(n)$ , donde  $n$  es la cantidad de trabajadores de la empresa.

Se puede identificar en cada gráfico una marcada similitud entre los resultados arrojados en las distintas mediciones que se hicieron sobre la implementación y alguna recta (o función lineal), variando esta última su pendiente para cada caso. Esta pendiente podría compararse o considerarse como la constante que acompaña a la complejidad del algoritmo.

Se puede notar claramente que esta constante o pendiente, es mayor en aquellos gráficos en los cuales se evaluó el comportamiento del algoritmo en el peor caso que en los que se evaluó el mismo con entradas al azar.

En el segundo gráfico perteneciente al cuadro [7] podemos notar dos casos de outliers. Si observamos más detalladamente se aprecia que estos casos se dan con valores de  $n$  grandes. Esto puede deberse a que, como el algoritmo tarda más en terminar<sup>11</sup>, es más probable que haya alguna interrupción que irrumpa durante el procesamiento del mismo haciendo que la medición no sea precisa. Esto se debe a la forma en que se miden los ciclos de reloj. Lo que se hace es obtener los ciclos de reloj transcurridos hasta antes de hacer la llamada al algoritmo implementado, luego se toma la misma medición y, finalmente, se toma la diferencia entre ambas obteniendo como resultado la cantidad de ciclos insumidos por el algoritmo. Pero si durante el algoritmo, llega una interrupción y la atención de la rutina de la misma le insume al procesador varias instrucciones, esto puede llegar a provocar una medición de ciclos de reloj muy imprecisa.

Más aún, si tomamos en cuenta cómo un sistema operativo hace manejo de los procesos, puede haber llegado a ocurrir que durante la ejecución del algoritmo, este haya consumido todo su

---

<sup>11</sup>recordar además que este gráfico corresponde al análisis en el peor caso

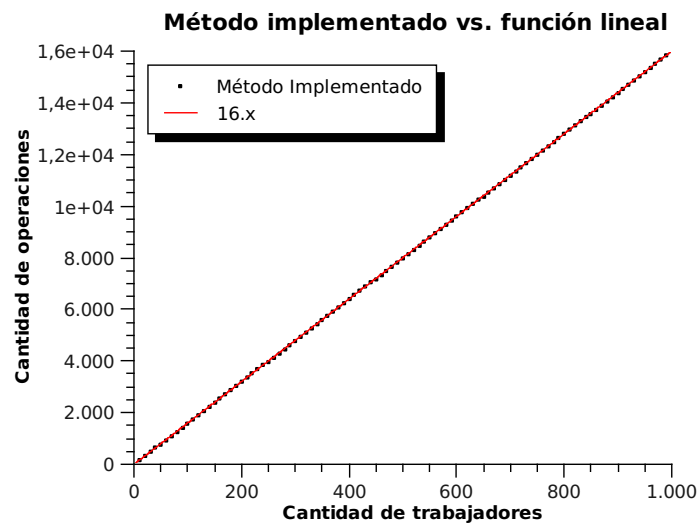
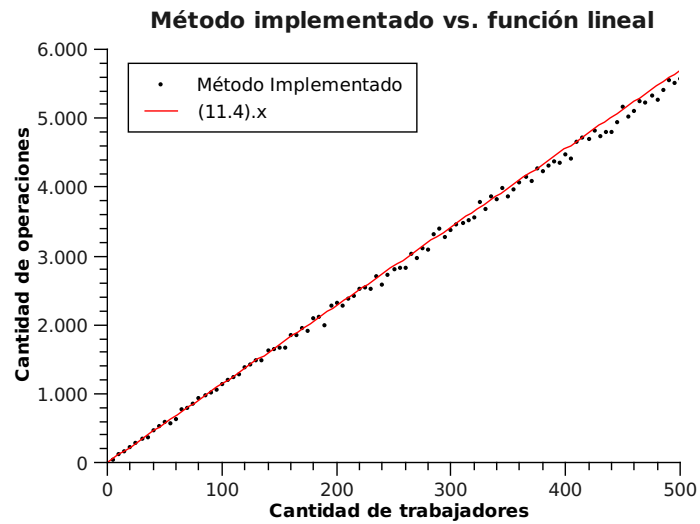
tiempo de ejecución asignado por el sistema, por lo que puede haber tenido que esperar una o incluso varias veces a que el sistema deje continuar con su ejecución.

### 3.7. Conclusiones

Luego de describir el funcionamiento del algoritmo, de realizar las pruebas y gráficos pertinentes y de analizarlos detalladamente, podemos realizar algunas conclusiones.

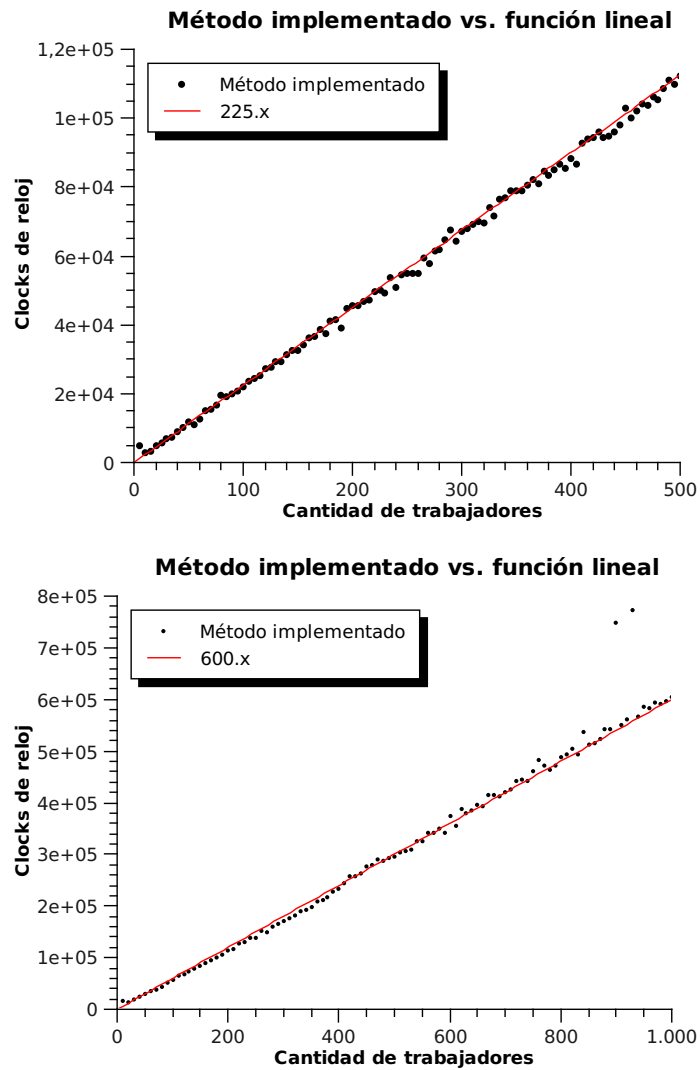
Podemos asegurar fehacientemente que la complejidad del algoritmo propuesto es lineal y que la misma es  $\Theta(n)$  donde  $n$  es la cantidad de trabajadores. Esto no sólo se desprende del análisis teórico realizado anteriormente, sino también de las sucesivas pruebas realizadas. Claramente se puede observar en todos los gráficos presentados cómo el comportamiento de la implementación se asemeja a una función lineal sobre los datos de entrada.

Finalmente, si hacemos una comparación entre los resultados obtenidos al aplicarse el algoritmo sobre datos de entrada azarosos y datos de entrada que se condicen con el peor caso, se puede observar que la constante que acompaña a la complejidad para el peor caso es considerablemente mayor a la constante que aparece en el caso azaroso. Como una conclusión poco menos significativa entonces, se puede decir que los casos en que los horarios de los trabajadores son todos disjuntos son los peores casos para este algoritmo.

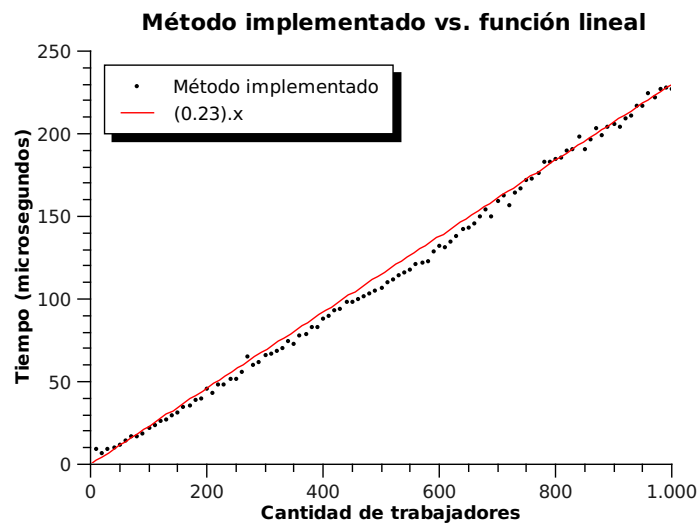
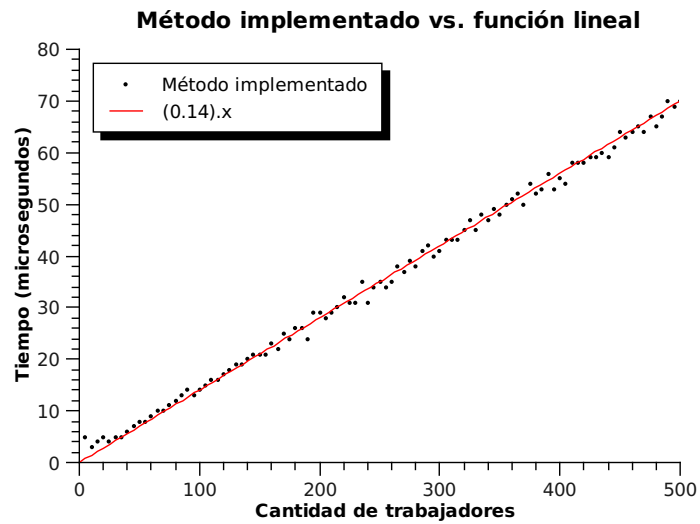


Cuadro 6: Muestran el comportamiento de la cantidad de operaciones contra la cantidad de trabajadores. El primer gráfico proviene de una entrada hecha al azar. El segundo proviene de evaluar el comportamiento del algoritmo para el peor caso.





Cuadro 7: Muestran el comportamiento de la cantidad de ticks de reloj contra la cantidad de trabajadores. El primer gráfico proviene de una entrada hecha al azar. El segundo proviene de evaluar el comportamiento del algoritmo para el peor caso.



Cuadro 8: Muestran el comportamiento de la cantidad de microsegundos contra la cantidad de trabajadores. El primer gráfico proviene de una entrada hecha al azar. El segundo proviene de evaluar el comportamiento del algoritmo para el peor caso.