Ma sarà vero che $1 + 1 = 2$?

Tesina AA 2020/2021

Paolo Caressa

Maggio 2021

Sommario

In questa tesina ci proponiamo di approfondire e rispondere a un enigma fondamentale della conoscenza umana. Per il sollievo di tutti, la risposta sarà positiva, ma si rimanda alle conclusioni per una sua più estesa articolazione.

Indice

Introduzione

Si fa presto a dire $1 + 1 = 2$ ma è realmente vero? e, se sì, perché? A queste gravi ed annose domande si propone di rispondere questa breve ma, speriamo, incisiva tesina.

Collegamenti interdisciplinari:

- Filosofia: l'Uno di Plotino.
- Geografia: l'una di notte che ore sono in Guatemala?
- Italiano: *Uno, nessuno e centomila* di Pirandello.
- Scienze: la Luna.
- Storia: ma dopo l'1 a.C. è venuto l'anno 0 o l'anno 1?

Capitolo 1

Il problema

1.1 Gli assiomi di Peano

Come classicamente noto (cfr. [3]), i numeri naturali si caratterizzano formalmente come gli elementi di un insieme tale che

1. Esista almeno un elemento $0 \in \mathbf{N}$.
2. Sia data una funzione $s\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.
3. La funzione s sia iniettiva: se $s(n) = s(m)$ allora $n = m$.
4. 0 non sia nell'immagine di s, cioè non esista alcun $n \in \mathbf{N}$ tale che $s(n) = 0$.
5. Se $M \subset \mathbf{N}$ e se:
   - $0 \in M$
   - Per un qualsiasi $n \in M$ si ha necessariamente che anche $s(n) \in M$

   allora $M = \mathbf{N}$.

Queste cinque proprietà si chiamano *assiomi di Peano*.

I numeri naturali che normalmente sono denotati da numerali, cioè da stringhe finite di cifre decimali interpretate nella notazione posizionale e in base 10, vanno fatti corrispondere a termini della teoria di Peano, che denotano elementi del dominio $\mathbf{N}$ del quale essa parla, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
0 &\to 0, \\
1 &\to s(0), \\
2 &\to s(1) = s(s(0)), \\
3 &\to s(2) = s(s(1)) = s(s(s(0))), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Nel presente studio assumeremo implicitamente questa corrispondenza, che peraltro ci è necessaria solo nelle sue tre prime istanze.

1.2 La somma

Definiamo la somma di due numeri ricorsivamente come

$$\begin{cases} n + 0 = n, \\ n + s(m) = s(n + m) \end{cases}$$

Come noto (cfr. [1]) questa operazione è univoca e ben definita: la dimostrazione di questo fatto richiede tutti e cinque i precedenti assiomi di Peano.

1.3 Formulazione del problema

L'equazione $1+1 = 2$ si traduce nella seguente, usando l'assiomatica peanea:

$$s(0) + s(0) = s(s(0))$$

Infatti il numero 1 è corrisponde al successore dello zero, dunque al termine $s(0)$ della teoria di Peano. Il numero 2 corrisponde invece al successore di 1, dunque al termine $s(1) = s(s(0))$ della teoria di Peano.

Capitolo 2

Soluzione del problema

Partiamo dall'espressione

$$s(0) + s(0)$$

Applicando la definizione ricorsiva di Dedekind (1.2) la riduciamo alla

$$s(s(0) + 0)$$

L'argomento della funzione s più esterna è, sempre per la definizione ricorsiva di somma, pari a $s(0)$, col che abbiamo ridotto l'espressione a

$$s(s(0))$$

che è proprio quel che volevamo dimostrare.

Conclusioni

Stante l'assiomatica di Peano la questione è chiarita. Tuttavia sorge spontanea la domanda se esistano sistemi numerici più deboli di quello di Peano per i quali l'equazione non sia violata.

È questo il caso dell'anello delle classi di resti modulo 2 (cfr. [2]), anche noto come $\mathbf{Z}_2$: in quel caso è noto che $1 + 1 = 0$, ma si tratta di una questione che va al di là dei limiti di tempo, spazio e complessità previsti per la presente nota.

Appendice A

Ritratti

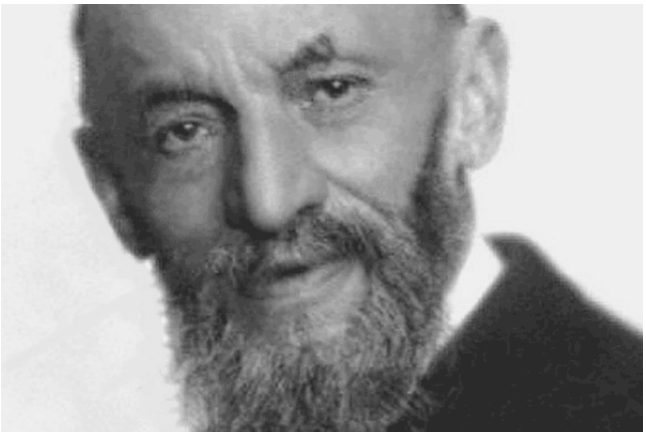

Figura A.1: Giuseppe Peano

Figura A.2: Richard Dedekind

Figura A.3: Carl Friedrich Gauss

Bibliografia

[1] Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888.

[2] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Göttingen, 1801.

[3] Giuseppe Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino, 1899.