Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta

Giuseppe Vitali

Bologna, Gamberini e Parmeggiani, 1905

Il problema della misura dei gruppi di punti di una retta r è quello di determinare per ogni gruppo A di punti di r un numero reale e positivo $\mu(A)$, che dovrà dirsi ***misura*** di A, in modo che:

1°) Due gruppi che si possono far coincidere con un conveniente spostamento rigido di uno di essi abbiano la stessa misura.

2°) Il gruppo somma di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi, senza punti comuni a due a due, abbia per misura la somma delle misure.

3°) La misura del gruppo di tutti i punti dell'intervallo $(0, 1)$ sia 1. (*)

Sia x un punto di r. I punti di r che differiscono da x per un numero razionale qualsiasi positivo, negativo o nullo formano un gruppo A_x numerabile. Se A_{x_1} e A_{x_2} sono due tali gruppi, o essi sono senza punti comuni o coincidono.

Consideriamo i diversi gruppi A_x: essi, considerati come elementi, formano un gruppo H. Se P è un punto qualsiasi di r, esisterà un elemento ed uno solo di H a cui P appartiene.

Consideriamo per ogni elemento α di H un punto P_α dell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ che appartenga ad α, ed indichiamo con G_0 il gruppo dei punti P_α. Se poi ρ è un numero razionale qualsiasi, indicheremo con G_ρ il gruppo dei punti $P_\alpha - \rho$.

I gruppi G_ρ corrispondenti ai diversi valori razionali di ρ sono a due a due senza punti comuni, essi inoltre sono un'infinità numerabile e devono avere per la 1ª) la stessa misura.

I gruppi

$$G_0, \quad G_{\frac{1}{2}}, \quad G_{\frac{1}{3}}, \quad G_{\frac{1}{4}}, \ldots$$

cadono tutti nell'intervallo $(0, 1)$, quindi la loro somma deve avere una misura $m \leq 1$.

Ma deve essere

$$\begin{aligned} m &= \mu(G_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu\left(G_{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n=\infty} n \cdot \mu(g_0), \end{aligned}$$

(*) v. *Leçons* sur l'intègration ecc. par H. Lebesgue p.103. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

e quindi

$$\mu(G_0) = 0.$$

Ma allora la somma di tutti i G_ρ corrispondenti ai diversi valori razionali di ρ deve essa pure avere misura nulla. Però questa somma è il gruppo di tutti i punti di r e quindi dovrebbe avere misura infinita. Ciò basta per concludere che: ***il problema della misura dei gruppi di punti di una retta è impossibile***.

Qualche cosa si potrebbe obiettare circa la considerazione del gruppo G_0. Questa si può perfettamente giustificare se si ammette che il continuo si possa bene ordinare. Per chi non voglia ammettere ciò il nostro risultato significa che: *la possibilità del problema della misura dei gruppi di punti di una retta e quella di bene ordinare il continuo non possono coesistere.*