Algorithme du simplexe : Phase I

Objectif et principe

Problème : Pour appliquer la phase II de l'algorithme du simplexe, il faut connaître une base de départ admissible (et le dictionnaire associé).

Que faire lorsqu'une base admissible n'est pas connue ?

Solution : Plusieurs approches sont envisageables, les deux principales consistent à

1) définir un **problème auxiliaire** pour lequel une base admissible est facile à trouver et dont la solution optimale fournit un tableau admissible du problème de départ ou prouve qu'il n'en existe pas ;
2) modifier temporairement les données du problème afin que la base initiale soit admissible.

Problème auxiliaire

On va construire un problème auxiliaire vérifiant les conditions suivantes :

- Il admet **toujours** des solutions admissibles.
- Il est facile de trouver une solution de base admissible du problème auxiliaire.
- Il admet **toujours** une solution optimale.
- **Le P.L. de départ admet des solutions admissibles si et seulement si la valeur optimale du problème auxiliaire est nulle.**
- Si la valeur optimale du problème auxiliaire est nulle, il est facile d'obtenir un dictionnaire admissible pour le P.L. de départ à partir du dictionnaire optimal du problème auxiliaire.

Construction du problème auxiliaire

- On considère un P.L. standard (obtenu par ajout de variables d'écart dans un P.L. canonique) et la base formée des variables d'écart.
- Si cette base n'est pas admissible c'est qu'il existe au moins une composante négative dans le second membre $\boldsymbol{b}$.
- On ajoute une **variable artificielle** x_0 (non négative) dans toutes les contraintes où le second membre est négatif.
- En augmentant suffisamment la valeur de x_0 on obtient une solution admissible du problème.
- On cherche à ramener x_0 à zéro en maximisant la fonction objectif auxiliaire $z' = -x_0$ (*i.e.* on minimise x_0).

VARIANTE. On ajoute des variables artificielles différentes dans chacune des contraintes où le second membre est négatif et on minimise leur somme.

Exemple

Soit le P.L. standard et le dictionnaire initial non admissible

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{Max} & z & = & & & 2x_1 & - & x_2 \\
\text{s.c.} & x_3 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 \\
 & x_4 & = & -2 & & & + & x_2 \\
 & x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\
 & x_i & \geq & 0 & \multicolumn{4}{l}{i = 1, \ldots, 5}
\end{array}
$$

			$-x_1$	$-x_2$
z	$=$	0	-2	1
x_3	$=$	-3	-1	-1
x_4	$=$	-2	0	-1
x_5	$=$	1	1	-1

- On introduit la variable artificielle $x_0 \geq 0$ dans les deux premières contraintes :

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
x_3 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -2 & & & + & x_2 & + & x_0
\end{array}
$$

- On définit une fonction objectif auxiliaire $z' = -x_0$ (à maximiser).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple (2)

On obtient le P.L. auxiliaire et le dictionnaire associé (toujours non admissible)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Max} & z' & = & & & & & & - & x_0 \\
p.m. & z & = & & & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.c.} & x_3 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
 & x_4 & = & -2 & & & + & x_2 & + & x_0 \\
 & x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_i & \geq & 0 & & \multicolumn{5}{l}{i = 0, \ldots, 5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rc|r|rrr|}
 & & & -x_1 & -x_2 & -x_0 \\
\hline
z' & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
z & = & 0 & -2 & 1 & 0 \\
\hline
x_3 & = & -3 & -1 & -1 & -1 \\
x_4 & = & -2 & 0 & -1 & -1 \\
x_5 & = & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- Le dictionnaire de droite n'est pas admissible (il est toujours associé à la base $\{x_3, x_4, x_5\}$).
- Pour obtenir un dictionnaire admissible, il faut augmenter la valeur de x_0.
- On introduit donc x_0 dans la base en pivotant dans la ligne possédant le coefficient b_i le plus négatif.

Exemple (3)

$$
\begin{array}{rcr|rrr}
 & & & -x_1 & -x_2 & -x_0 \\
\hline
z' & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
z & = & 0 & -2 & 1 & 0 \\
\hline
x_3 & = & -3 & -1 & -1 & \mathbf{-1} \\
x_4 & = & -2 & 0 & -1 & -1 \\
x_5 & = & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr|rrr}
 & & & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\
\hline
z' & = & -3 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
z & = & 0 & -2 & 1 & 0 \\
\hline
x_0 & = & 3 & 1 & 1 & -1 \\
x_4 & = & 1 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\
x_5 & = & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

On a dictionnaire admissible et on peut appliquer la phase II de l'algorithme du simplexe afin de minimiser la valeur de x_0.

$$
\begin{array}{rcr|rrr}
 & & & -x_4 & -x_2 & -x_3 \\
\hline
z' & = & -2 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
z & = & 2 & 2 & 1 & -2 \\
\hline
x_0 & = & 2 & -1 & \mathbf{1} & 0 \\
x_1 & = & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_5 & = & 0 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr|rrr}
 & & & -x_4 & -x_0 & -x_3 \\
\hline
z' & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
z & = & 0 & 3 & -1 & -2 \\
\hline
x_2 & = & 2 & -1 & 1 & 0 \\
x_1 & = & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_5 & = & 2 & -2 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Exemple (4)

Le dernier dictionnaire est optimal pour le problème auxiliaire, on supprimer donc la colonne de la variable x_0 (qui est hors base) ainsi que la ligne de la fonction objectif z' afin d'obtenir un dictionnaire admissible pour le P.L. initial. Il ne reste plus qu'à terminer la résolution à l'aide de la phase II de l'algorithme du simplexe.

$$\begin{array}{rcr|rr|} & & & -x_4 & -x_3 \\ \cline{3-5} z & = & 0 & 3 & -2 \\ \cline{3-5} x_2 & = & 2 & -1 & 0 \\ x_1 & = & 1 & 1 & -1 \\ x_5 & = & 2 & -2 & \mathbf{1} \\ \cline{3-5} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr|rr|} & & & -x_4 & -x_5 \\ \cline{3-5} z & = & 4 & -1 & 2 \\ \cline{3-5} x_2 & = & 2 & -1 & 0 \\ x_1 & = & 3 & -1 & 1 \\ x_3 & = & 2 & -2 & 1 \\ \cline{3-5} \end{array}$$

Le dernier dictionnaire est non borné et le P.L. n'admet donc pas solution optimale finie.

Algorithme du simplexe (phase I)

Données : Un dictionnaire non admissible.
Résultat : Un dictionnaire admissible ou un certificat d'absence de solutions admissibles.

(1) Construire le P.L. auxiliaire et un tableau initial admissible :

- Introduire la variable artificielle x_0 dans toutes les contraintes vérifiant $b_i < 0$.
- Ajouter la fonction objectif auxiliaire (à maximiser) $z' = -x_0$.
- Faire entrer x_0 dans la base en pivotant dans une ligne r vérifiant

$$r \in \left\{ i \,\middle|\, b_i = \min_{k \mid b_k < 0} (b_k) \right\}.$$

(2) Résoudre le P.L. auxiliaire à l'aide de la phase II de l'algorithme du simplexe et en utilisant la règle de Bland.

- Si $z' = 0$ à l'optimum, supprimer la colonne de x_0 et la ligne de z'. Le dictionnaire restant est admissible pour le P.L. de départ.
- Si $z' < 0$ à l'optimum, le problème de départ n'admet pas de solutions admissibles.

Algorithme dual du simplexe

Point de départ : une paire de P.L. duaux

Primal canonique

$$\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{cx} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Primal standard

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{cx_D} & & & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax_D} & + & \boldsymbol{Ix_E} & = & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_D} & , & \boldsymbol{x_E} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Dual « canonique »

$$\begin{array}{llrcl} \text{Min} & w = & \boldsymbol{\lambda b} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{\lambda A} & \geq & \boldsymbol{c} \\ & & \boldsymbol{\lambda} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Dual « standard »

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{Min} & w = & \boldsymbol{\lambda_D b} & & & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{\lambda_D A} & - & \boldsymbol{\lambda_E I} & = & \boldsymbol{c} \\ & & \boldsymbol{\lambda_D} & , & \boldsymbol{\lambda_E} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Solution duale associée à un dictionnaire

Rappelons que dans la base B, les variables de base sont données par

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in\mathcal{N}} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}^j x_j$$

alors que la fonction objectif est égale à

$$z = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in\mathcal{N}} \left(\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}^j - c_j\right) x_j = z_0 - \sum_{j\in\mathcal{N}} \left(z_j - c_j\right) x_j$$

Le vecteur

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$$

est en fait une solution de base du problème dual « canonique ».

Solution duale associée à un dictionnaire

- La valeur de cette solution est

$$w = \boldsymbol{\lambda b} = \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{b} = z_0,$$

c'est-à-dire la même valeur que celle de la solution de base primale associée à $\boldsymbol{B}$.

- Pour toute colonne basique $\boldsymbol{a}^j$, $j = B(1), \ldots, B(m)$, on a

$$\boldsymbol{\lambda a}^j = c_j \quad (\text{car } \boldsymbol{\lambda} \text{ est solution de } \boldsymbol{\lambda B} = \boldsymbol{c_B})$$

- Si $\boldsymbol{B}$ est optimale, on $z_j - c_j \geq 0$ pour toute colonne hors base $\boldsymbol{a}^j$ mais

$$z_j - c_j = \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}^j - c_j = \boldsymbol{\lambda a}^j - c_j$$

et $z_j - c_j \geq 0$ si et seulement si $\boldsymbol{\lambda a}^j \geq c_j$. Ainsi $\boldsymbol{\lambda}$ est une solution admissible du problème dual et elle est optimale (puisqu'elle a la même valeur que la solution de base primale).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Solution duale associée à un dictionnaire

- Si $\boldsymbol{B}$ est admissible mais pas optimale, il existe une colonne hors base $\boldsymbol{a}^j$ avec $z_j - c_j < 0$. On a alors

$$0 > z_j - c_j = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}^j - c_j = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{a}^j - c_j \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{a}^j < c_j$$

  et $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas admissible pour le problème dual.

- On peut donc voir l'algorithme du simplexe (phase II) comme une méthode qui construit une suite de solutions de base duales $\boldsymbol{\lambda}$ et qui s'arrête dès qu'il obtient une solution admissible pour le problème dual (ou dès qu'il est possible de prouver que ce problème n'a pas de solutions admissibles du tout). La solution primale $\boldsymbol{x}$ associée à cette solution admissible $\boldsymbol{\lambda}$ est alors optimale pour le primal.

Lecture de la solution duale

- Les variables de décision du dual sont associées aux contraintes du primal et donc aux variables d'écart du primal.
- Réciproquement, les variables de décision du primal sont associées aux variables d'écart du dual.
- Si une variable primale est basique alors la variable duale associée est hors base et est donc nulle.
- Si une variable primale est hors base alors la variable duale associée est basique et sa valeur est égale au coût réduit de la variable primale.
- Les valeurs des variables basiques duales se lisent dans la première ligne du dictionnaire.

Exemple

Pour le dictionnaire

$$\begin{array}{rcc|cc|l}
 & & & -x_3 & -x_2 & \\
\cline{3-5}
z & = & 2 & 1 & -5 & \\
\cline{3-5}
x_1 & = & 2 & 1 & -1 & \lambda_4 = 0 \\
x_4 & = & 1 & -2 & 3 & \lambda_2 = 0 \\
x_5 & = & 3 & 0 & 1 & \lambda_3 = 0 \\
\cline{3-5}
 & & & \lambda_1 & \lambda_5 &
\end{array}$$

La solution duale est

- $\lambda_1 = 1$ car la 1re variable d'écart primale (x_3) est hors base et a un coût réduit égal à 1 ;
- $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$ car les 2e et 3e variables d'écart primale (x_4 et x_5) sont basiques ;
- $\lambda_4 = 0$ car x_1 (1re variable de décision primale) est basique ;
- $\lambda_5 = -5$ car x_2 est hors base et a un coût réduit égal à -5.

Récapitulatif

- À tout dictionnaire est associé non seulement une base primale et sa solution de base mais également une base duale et sa solution de base.

- Les valeurs des variables de base duales se lisent dans la première ligne du dictionnaire. Les valeurs des variables de base primales se lisent dans la première colonne du dictionnaire.

- Les solutions de base (primale et duale) associées à un dictionnaire ont même valeur et vérifient les conditions d'orthogonalité des écarts complémentaires.

- Dans la phase II de l'algorithme du simplexe, la solution de base primale est toujours admissible. Dès qu'une solution de base duale admissible est rencontrée, l'optimum est atteint.

Tableau dual-admissible et algorithme dual

- Un dictionnaire est **dual-admissible** si la solution de base duale associée l'est, c.-à-d. si tous les coûts réduits des variables hors base (primales) sont non négatifs.

Signature d'un dictionnaire dual-admissible

$$\begin{array}{rc|c|ccc|}
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{-\boldsymbol{x}_N}\\ \cline{3-6}
z & = & * & \oplus & \cdots & \oplus \\ \cline{3-6}
 & & * & & & \\
\boldsymbol{x}_B & = & \vdots & & & \\
 & & * & & & \\ \cline{3-6}
\end{array}$$

- Principe de l'algorithme dual du simplexe :

1) Partir d'un dictionnaire dual-admissible.
2) Effectuer une suite de pivotages conservant l'admissibilité duale mais diminuant la valeur des solutions de base.
3) S'arrêter dès que le dictionnaire est également primal-admissible ou dual non borné.

Algorithme dual du simplexe (phase II)

Données : Tableau dual-admissible.
Résultat : Tableau optimal ou un certificat d'absence de solutions admissibles.

(1) Choix d'une variable sortante : Choisir une ligne r avec $y_{r0} < 0$, la variable $x_{B(r)}$ quitte la base.

S'il n'existe pas de variable sortante : STOP le tableau courant est optimal.

(2) Choix d'une variable entrante : Choisir une colonne hors base $\boldsymbol{a}^j$ (une variable hors base x_j) maximisant les quotients caractéristiques duaux

$$j \in \left\{ k \in \mathcal{N} \mid \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max \left\{ \frac{z_i - c_i}{y_{ri}} \mid y_{ri} < 0 \right\} \right\}$$

S'il n'existe pas de variable entrante : STOP le dual est non borné et le primal sans solution admissible.

(3) Mise à jour de la base et du tableau :

Pivoter autour de y_{rj} et retourner en (1).

Dual non borné et primal non admissible

Signature d'un dictionnaire dual non borné

$$
\begin{array}{rc|c|ccc|}
 & & & & -\boldsymbol{x}_N & \\
\cline{3-6}
z & = & * & \oplus & \cdots & \oplus \\
\cline{3-6}
\boldsymbol{x}_B & = & - & \oplus & \cdots & \oplus \\
 & & & & & \\
\cline{3-6}
\end{array}
$$

Signature d'un dictionnaire d'un P.L. sans solution admissible

$$
\begin{array}{rc|c|ccc|}
 & & & & -\boldsymbol{x}_N & \\
\cline{3-6}
z & = & * & * & \cdots & * \\
\cline{3-6}
\boldsymbol{x}_B & = & - & \oplus & \cdots & \oplus \\
 & & & & & \\
\cline{3-6}
\end{array}
$$