

## Exercice 1 :

### Formes linéaires et canoniques (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous formes canonique et standard.

1. Maximiser  $z = 2x_1 - x_2$   
s.c.  $\frac{1}{3}x_1 + x_2 = 2$   
 $-2x_1 + 5x_2 \leq 7$   
 $x_1 + x_2 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0$   
 $x_2 \in \mathbb{R}$
2. Minimiser  $z = -3x_1 + x_3$   
s.c.  $x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 \geq 2$   
 $4x_2 + x_3 = 5$   
 $x_1, x_3 \geq 0$   
 $x_2 \leq 0$
3. Minimiser  $z = 2x_1 - 3x_2$   
s.c.  $x_2 \geq -3$   
 $2x_1 - x_2 = 2$   
 $-x_1 + 3x_2 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0$

## Exercice 2 :

### Linéarisation (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous forme canonique.

1. Minimiser  $z = \max(2x_1 + 3x_2, x_1 - 2x_2 + 4x_3)$   
s.c.  $-2x_1 + x_3 = 12$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 5$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
2. Minimiser  $z = |x_1 - 2x_3| + |-x_1 + 3x_2 + x_3|$   
s.c.  $x_1 - 4x_2 + x_3 = 5$   
 $5x_2 - 3x_3 \leq 6$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
3. Minimiser  $z = |x_1 - 10| + \max(2x_2 - 4, |3x_1 - 4x_3|)$   
s.c.  $|x_1| + x_2 \leq 1$   
 $\max(-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3) \leq 7$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

### Exercice 3 :

**Résolution graphique** (J.-F. Hêche) Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{rcll} \max z & = & 3x & + & 2y \\ \text{s.c.} & & x & - & y & \geq & -2 \\ & & 2x & + & y & \leq & 8 \\ & & x & + & y & \leq & 5 \\ & & x & & & \geq & 0 \\ & & & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Dessiner la région admissible  $R$  du problème.

Question 2 – Résoudre le problème graphiquement.

### Exercice 4 :

**Bases** (J.-F. Hêche) Soit le système d'équations linéaires  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Question 1 – Déterminer toutes les bases du système  $Ax = b$ .

Question 2 – Calculer la solution de base associée à chacune des bases trouvées au point précédent et décider lesquelles sont admissibles.

Question 3 – Représenter graphiquement les projections des solutions basiques ainsi que les projections des deux équations du système dans le repère  $(O, x_1, x_2)$ .

### Exercice 5 :

**Bases** (J.-F. Hêche) On considère le programme linéaire canonique

$$\begin{array}{rcll} \max z & = & 2x_1 & + & 5x_2 \\ \text{s.c.} & & 2x_1 & - & 4x_2 & \leq & 1 \\ & & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\ & & & & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & & & \leq & 5 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Représenter son domaine admissible.

Question 2 – Pour chacune des bases qui suivent, identifier dans votre dessin le point correspondant à sa solution de base.

$$B1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \quad B2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \quad B3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\} \quad B4 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$$

Remarque. Les variables  $x_3, x_4, x_5$  et  $x_6$  correspondent aux variables d'écart introduites lors de la mise sous forme standard.

Question 3 – En vous aidant de votre dessin, donner le nombre de bases du P.L., son nombre de bases admissibles ainsi que le nombre de points extrêmes du domaine admissible.

Question 4 – Donner toutes les bases optimales du programme linéaire ainsi que toutes les solutions optimales (et leur valeur).

### Exercice 6 :

#### **Simplexe** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.c.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Spécifier à chaque itération les variables de base et hors base ainsi que le point extrême visité.

### Exercice 7 :

#### **Simplexe**

La méthode du simplexe termine avec le tableau ci-dessous :

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$z$	1	1	0	0	0	0	2	10
$x_4$	0	2	0	0	1	1	-1	3
$x_2$	0	1	1	0	0	2	2	9
$x_3$	0	-1	0	1	0	2	1	7

Question 1 – Indiquer la solution optimale du tableau.

Question 2 – Trouver une deuxième solution de base optimale.

Question 3 – Déterminer une autre solution optimale qui n'est pas une solution de base.

### Exercice 8 :

#### **Simplexe**

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 7x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

### Exercice 9 :

#### **Simplexe**

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llllll} \min z = & 4x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \leq 1 \\ \text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 = 2 \\ \text{s.c.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \geq 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$