Une amélioration des templates pour les nombres de Ramsey mutlticolores et les nombres de Schur

Romain Ageron

7 juin 2022

Résumé

Récement, l'introduction de constructions basées sur des objets particuliers appelés "templates" a permis d'améliorer plusieurs bornes inférieures pour les nombres Ramsey multicolores, les nombres de Schur et les nombres de Schur faibles. Ce document de travail présente des améliorations apportées au concept de template, notamment une généralisation : les b-templates. Cela conduit à une amélioration des inégalités et bornes inférieures connues certains nombre de Ramsey multicolores et certains nombres de Schur.

1 Organisation de ce document de travail

La section 2 présente des notations, des définitions, ainsi que des propriétés utiles. La section 3 présente mon approche et mes résultats sur les templates. elle commence par une explication des différences avec l'approche de Rowley. Elle fait aussi office de revue de l'état de l'art en précisant les résultats de Rowley en fin de section. La section 4 introduit les b-templates, une généralisation des templates qui est utilisée dans la plupart des améliorations présentées. La section 5 compare les nouvelles inégalités et bornes inférieures à celles connues auparavant.

2 Définitions et propriétés

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note K_n le graphe complet d'ordre n.

Definition 2.1 (Coloriage de Ramsey)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, la taille du graphe, et soit $r \in \mathbb{N}$, le nombre de couleurs. Soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in {\mathbb{N}^*}^r$. On appelle coloriage de Ramsey tout coloriage des arêtes de K_n avec r couleurs tel que pour toute couleur $c \in [\![1, r]\!]$, le coloriage ne contient pas de sous-graphe complet K_{k_c} monochromatique en la couleur c. $R(k_1, ..., k_r; n)$ désigne l'un (quelconque) de ces coloriages et l'ensemble de ces coloriages est noté $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n)$. Si tous les k_c sont égaux à un k, on utilise également les notations $R_r(k; n)$ et $\mathcal{R}_r(k; n)$.*

Théorème 2.2 (Théorème de Ramsey fini [1])**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in {\mathbb{N}^*}^r$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n) = \varnothing$.*

Le théorème 2.2 justifie la définition suivante.

Definition 2.3 (Nombre de Ramsey)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in {\mathbb{N}^*}^r$. On définit le nombre de Ramsey $R(k_1, ..., k_r)$ comme le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n) = \varnothing$. Si tous les k_c sont égaux à un k, ce nombre est également noté $R_r(k)$.*

On remarque que, contrairement aux nombres de Schur, les nombres de Ramsey désigne le plus petit entier tel qu'il n'existe pas de coloriage, et non pas la taille maximale d'un coloriage.

Definition 2.4 (Coloriage de Ramsey linéaire)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $r \in \mathbb{N}$. Soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. On indexe les sommets de K_n avec les entiers de $[\![0, n-1]\!]$. On appelle coloriage de Ramsey linéaire tout $R(k_1, ..., k_r; n)$ pour lequel la couleur de l'arête (u, v) dépend uniquement de $|u-v|$. Un $L(k_1, ..., k_r; n)$ désigne l'un (quelconque) de ces coloriages et l'ensemble de ces coloriages est noté $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n)$. Si tous les k_c sont égaux à un k, on utilise également les notations $L_r(k; n)$ et $\mathcal{L}_r(k; n)$.*

Le théorème 2.2 justifie la définition suivante.

Definition 2.5 (Nombre de Ramsey linéaire)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. On définit le nombre de Ramsey linéaire $L(k_1, ..., k_r)$ comme le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n) = \varnothing$. Si tous les k_c sont égaux à un k, ce nombre est également noté $L_r(k)$.*

Proposition 2.6. $\forall r \in \mathbb{N}, (k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}, L(k_1, ..., k_r) \leqslant R(k_1, ..., k_r)$

On remarque qu'un $L(k_1, ..., k_r; n)$ induit un coloriage de $[\![1, n-1]\!]$. Réciproquement, tout coloriage de $[\![1, n-1]\!]$ correspond à un coloriage linéraire de K_n. Le théorème suivant porte sur le lien entre un coloriage sur $[\![1, n]\!]$ et les nombres de cliques du coloriage linéaire de K_{n+1} associé.

Théorème 2.7 (Lien avec les coloriages sans-sommes [2])**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^r$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit γ un coloriage de $[\![1, n]\!]$ avec r couleurs. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) dans le coloriage linéaire de K_{n+1} associé à γ, la couleur c contient un sous-graphe complet de taille k_c

(ii) il existe un sous-ensemble S de $[\![1, n]\!]$ monochromatique de couleur c et de cardinal $k_c - 1$ vérifiant : pour tous $x, y \in S$ distincts, $\gamma(|x-y|) = c$

Dans la suite, on utilise également $L(k_1, ..., k_r; n)$ pour désigner un coloriage de $[\![1, n-1]\!]$ associé à un $L(k_1, ..., k_r; n)$.

Le théorème 2.7 donne le corollaire suivant.

Corollaire 2.8 (Lien avec les nombres de Schur)**.** *On a $S(n) = L_n(3) - 2 \leqslant R_n(3) - 2$.*

3 Templates

Dans cette section, j'utilise des notations et définitions différentes de celle de Rowley [3]. Notamment, les templates et constructions sont introduits différement et sont manipulés en termes de partitions et non de graphes. De plus la couleur spéciale est désignée de manière abstraite par un "t" au lieu d'un "3" qui pourrait être confondu avec l'un des k_c. Par ailleurs, je définis un template directement comme une partition pour laquelle la construction fonctionne. Enfin, J'utilise une formulation différente de la condition sur les templates.

Definition 3.1 (Permutation partielle)**.** *Pour S un ensemble quelconque et $a \in \mathbb{N}$ un entier naturel, on appelle permutation partielle à a éléments de S tout a-uplet d'éléments de S deux à deux distincts. L'ensemble des permutations partielles à a éléments de S est noté $\mathfrak{S}_a(S)$, c'est-à-dire : $\mathfrak{S}_a(S) = \left\{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant a} \mid \forall (i, j) \in [\![1, a]\!]^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j\right\}$.*

Dans cette section, pour un entier n (en pratique sous-entendu), on note π l'application qui a un entier $x \in \mathbb{Z}$ associe son unique représentant modulo n dans $[\![1, n]\!]$.

Definition 3.2 (Reformulation des templates)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Soit* $r \in \mathbb{N}$ *et soit* $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^r$ *avec* $\forall c \in [\![1, r]\!], k_c \geqslant 3$*. Un template de taille* n *à* $r+1$ *couleur, est défini comme une partition de* $[\![1, n]\!]$ *en* $r+1$ *sous-ensembles* $A_1, ..., A_{r+1}$ *vérifiant :*

(i) $n \in A_{r+1}$

(ii) pour la couleur spéciale $r+1$ *:* $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, x + y \notin A_{r+1}$*,*

(iii) pour $c \in [\![1, r]\!]$ *:* $\forall x \in \mathfrak{S}_{k_c - 1}(A_c), \exists (i, j) \in [\![1, k_c - 1]\!]^2, i < j$ *et* $\pi(x_j - x_i) \notin A_c$*.*

$T(k_1, ..., k_r, t; n)$ *désigne l'un (quelconque) de ces templates et l'ensemble de ces templates est noté* $\mathcal{T}(k_1, ..., k_r, t; n)$*.*

La couleur $r+1$ n'est pas nécessairement la dernière par ordre d'apparition, la désignation de $r+1$ comme couleur spéciale signalée par t est une convention qui allège les notations en évitant de devoir écrire $T(k_1, ..., k_{i-1}, t, k_{i+1}, ..., k_r; n)$.

Dans le cas où tous les k_c sont égaux à 3, on retouve la définition des S-templates.

Definition 3.3 (coloriage par défaut)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $r \in \mathbb{N}$*. Soit* $\mathcal{H}$ *un coloriage de* $[\![1, n]\!]$ *à* $r+1$ *couleurs. On pose* $d = \min \mathcal{H}^{-1}(\{r+1\}) - 1$*. On définit alors un coloriage* $\mathrm{Default}(\mathcal{H})$*, dit par défaut, associé au coloriage* $\mathcal{H}$ *:* $\mathrm{Default}(\mathcal{H}) := \mathcal{H}_{|\,[\![1,d]\!]}$*.*

La méthode de construction suivante permet, à partir d'un template et d'un coloriage de Ramsey linéaire, de construire un nouveau coloriage de Ramsey linéaire (théorème 3.7).

Definition 3.4 (Méthode de construction)**.** *Soit* $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ *les tailles des coloriages. Soit* $(r, s) \in \mathbb{N}^{*2}$*. On se donne un coloriage de* $[\![1, n]\!]$ *à* $r+1$ *couleurs (appelée* $\mathcal{H}$*, pour horizontal), et un coloriage de* $[\![1, p]\!]$ *à* s *couleurs (appelée* $\mathcal{V}$*, pour vertical).*

Pour un $d \in \mathbb{N}$*, on se donne aussi un coloriage dit final* $\mathcal{F}$ *de* $[\![1, d]\!]$ *à* $r+1$ *couleurs. Il est parfois utile de définir* $\mathcal{F}$ *au cas par cas, mais on peut aussi lui attribuer une valeur par défaut* $\mathcal{F} = \mathrm{Default}(\mathcal{H})$*.*

On construit alors un coloriage γ *de* $[\![1, n \times p + d]\!]$ *à* $r+s$ *couleurs comme suit. De manière informelle, on répéte* p *fois le motif formé l'enchaînement des couleurs dans* $\mathcal{H}$ *en remplaçant pour la* i*-ème itération la couleur spéciale par* $r + \mathcal{V}(i)$ *puis on ajoute à la fin le motif formé l'enchaînement des couleurs dans* $\mathcal{F}$*. Formellement :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [\![1, n \times p + d]\!] & \longrightarrow & [\![1, r+s]\!] \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}(\pi(x)) & \text{si } x \leqslant n \times p \text{ et } \mathcal{H}(\pi(x)) \neq r+1 \\ r + \mathcal{V}\left(\left\lceil \dfrac{x}{n} \right\rceil\right) & \text{si } x \leqslant n \times p \text{ et } \mathcal{H}(\pi(x)) = r+1 \\ \mathcal{F}(x - n \times p) & \text{si } x > n \times p \end{array} \right. \end{array}$$

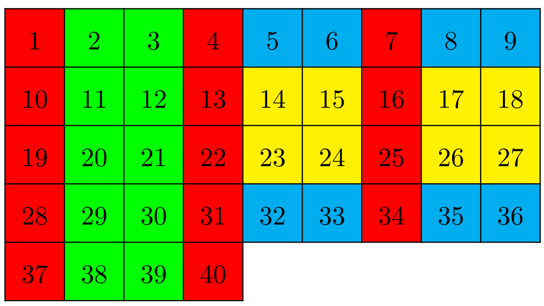

FIGURE 1 – Construction d'un $L_4(3; 40)$ avec $\mathcal{H} = T(3, 3, t; 9)$, $\mathcal{V} = L_2(3; 4)$ et $\mathcal{F} = \mathrm{Default}(\mathcal{H})$

Pour un ensemble $B \subset \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(B)$ l'ensemble des parties à k élélments de B. Pour $x \in \mathcal{P}_k(B)$, on note $x = \{x_1, ..., x_k\}$.

La définition suivante caractérise le fait que dans la construction le coloriage $\mathcal{F}$ est moins contraint que le coloriage $\mathcal{H}$ puisque les nombres coloriés par $\mathcal{F}$ intéragissent seulement avec des nombres plus petits qu'eux, ce qui n'est pas le cas pour les nombres coloriés par $\mathcal{H}$.

Definition 3.5 (compatibilité avec un template). *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in \mathbb{N}^r$ avec $\forall c \in [\![1, r]\!], k_c \geqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathcal{T}(k_1, ..., k_r, t; n)$ un template et soit $A_1, ..., A_{r+1}$ la partition associée. Soit $d \in [\![1, n]\!]$ et soit $\mathcal{F}$ un coloriage de $[\![1, d]\!]$ et soit $B_1, ..., B_{r+1}$ la partition associée. Le coloriage $\mathcal{F}$ est dit compatible avec le template T si il vérifie :*

(i) $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, \pi(x + y) \leqslant d \implies \pi(x + y) \notin B_{r+1}$

(ii) $\forall (x, y) \in A_{r+1} \times B_{r+1}, x + y \leqslant d \implies x + y \notin B_{r+1}$

(iii) $\forall c \in [\![1, r]\!], \forall k \in [\![1, k_c - 1]\!], \forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathcal{P}_k(B_c), \forall (y_i)_{1\leqslant i\leqslant k_c-k-1} \in \mathfrak{S}_{k_c-k-1}(A_c)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \exists (i, j) \in [\![1, k]\!]^2, |x_i - x_j| \notin A_c, \\ \exists (i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, k_c - k - 1]\!], x_i \geqslant y_j \textit{ et } x_i - y_j \notin A_c \textit{ et } x_i - y_j \notin B_c, \\ \exists (i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, k_c - k - 1]\!], x_i \leqslant y_j \textit{ et } \pi(x_i - y_j) \notin A_c, \\ \exists (i, j) \in [\![1, k_c - k - 1]\!]^2, i < j \textit{ et } \pi(y_j - y_i) \notin A_c. \end{array}\right. \textit{ ou}$$

Proposition 3.6 (compatibilité de la valeur par défaut). *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in \mathbb{N}^r$ avec $\forall c \in [\![1, r]\!], k_c \geqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathcal{T}(k_1, ..., k_r, t; n)$ un template. Alors T et* Default(T) *sont compatibles.*

Théorème 3.7 (Construction et templates). *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1\leqslant c\leqslant r} \in \mathbb{N}^r$ avec $\forall c \in [\![1, r]\!], k_c \geqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{H}$ un coloriage de $[\![1, n]\!]$ à $r + 1$ couleurs. Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{F}$ un coloriage de $[\![1, d]\!]$ à $r + 1$ couleurs. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{H} \in \mathcal{T}(k_1, ..., k_r, t; n)$ *et* $\mathcal{F}$ *est compatible avec* $\mathcal{H}$.

(ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall l \in [\![3, +\infty[\![^s, \forall \mathcal{V} \in \mathcal{L}(l_1, ..., l_s; p), \mathrm{Cons}(\mathcal{H}, \mathcal{V}, \mathcal{F}) \in \mathcal{L}(k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_s; n \times p + d)$

Rowley évoque seulement $(i) \implies (ii)$ mais pas $(ii) \implies (i)$ qui montre l'optimalité des conditions dans la définition des templates ainsi que celle de la définition de compatibilité. La construction de Rowley comprend uniquement le coloriage finale par défaut, l'introduction du coloriage final variable et la notion de compatibilité sont nouvelles. Cela correspond à une extension aux templates pour les nombres de Ramsey du raffinement sur la dernière ligne pour les S-templates.

4 b-Templates

5 Nouvelles inégalités et bornes inférieures

Références

[1] F. P. Ramsey, "On a problem of formal logic," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-30, no. 1, pp. 264–286, 1930. [Online]. Available : https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-30.1.264

[2] H. L. Abbott and D. Hanson, "A problem of Schur and its generalizations," *Acta Arithmetica*, 1972. [Online]. Available : http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa20/aa2028.pdf

[3] F. Rowley, "A generalised linear Ramsey graph construction," *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 81, no. 2, pp. 245–256, 2021. [Online]. Available : https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/81/ajc_v81_p245.pdf