

# Weak Schur numbers

## P05 - Formation à la recherche 1A

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella

3 juin 2021



CentraleSupélec

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- On se donne  $n \geq 1$  un entier
- $k \geq 1$  un autre entier, qui correspond au nombre de **couleurs**

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- On se donne  $n \geq 1$  un entier
- $k \geq 1$  un autre entier, qui correspond au nombre de **couleurs**

### Question

Peut-on colorier les entiers de 1 à  $n$  de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur ? Si oui, un tel coloriage est dit **sans sommes**.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

### Définition

Pour  $k$  couleurs, on note  $S(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété. C'est le  $k$ -ième **nombre de Schur**.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

### Définition

Pour  $k$  couleurs, on note  $S(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété. C'est le  $k$ -ième **nombre de Schur**.

Sur l'exemple, on peut vérifier que  $S(3) = 13$  : on ne peut colorier  $\llbracket 1, 14 \rrbracket$  avec trois couleurs.

## Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même  $WS(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété plus faible.



## Définition

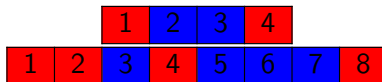
Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même  $WS(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété plus faible.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours  $WS(k) \geq S(k)$ .

## Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même  $WS(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété plus faible.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours  $WS(k) \geq S(k)$ .



$$S(2) = 4 \text{ mais } WS(2) = 8$$

- Pour montrer que  $S(k) = n$ , il faut trouver un coloriage sans sommes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .

- Pour montrer que  $S(k) = n$ , il faut trouver un coloriage sans sommes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .
- En pratique, on se contente de **minorer**  $S(k)$ . Si on exhibe un coloriage à  $k$  couleurs de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a montré que  $S(k) \geq n$ .

- Pour montrer que  $S(k) = n$ , il faut trouver un coloriage sans sommes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .
- En pratique, on se contente de **minorer**  $S(k)$ . Si on exhibe un coloriage à  $k$  couleurs de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a montré que  $S(k) \geq n$ .
- Comment effectuer cette minoration ? On peut démontrer des inégalités récursives ou bien rechercher des coloriages par ordinateur.

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe  $k$  et on essaye de colorier le plus loin possible
- Le problème peut s'encoder comme une exploration d'arbre, mais le nombre de coloriages possibles explose très vite
- Plusieurs articles récents ont recourt à l'algorithme **Monte-Carlo Tree Search**, et ne considèrent que certains type de coloriages
- On peut également encoder le problème avec un solveur **SAT**

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe  $k$  et on essaye de colorier le plus loin possible
- Le problème peut s'encoder comme une exploration d'arbre, mais le nombre de coloriages possibles explose très vite
- Plusieurs articles récents ont recourt à l'algorithme **Monte-Carlo Tree Search**, et ne considèrent que certains type de coloriages
- On peut également encoder le problème avec un solveur **SAT**

Ces méthodes ont permis d'améliorer les bornes inférieures pour  $k \geq 5$  mais peuvent prendre du temps : récemment, le calcul exact de  $S(5)$  via un solveur SAT a demandé 20 années de calcul machine.

La borne inférieure établie par I. Schur est :

$$S(n+1) \geq 3S(n) + 1 \implies S(n) \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Une première piste pour améliorer cette borne est proposée par H. L. Abbott et D. Hanson en 1972. Ils prouvent :

$$S(n+m) \geq S(n)(2S(m) + 1) + S(m)$$

Que font-ils concrètement ?



Un exemple pour  $n = m = 2$  :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

$$S(4) \geq S(2)(2S(2) + 1) + S(2) = 40$$

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants
- Recette : SF-template = Partition sans somme + condition suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall (x, y) \in A_i^2, x + y > p \implies x + y - p \notin A_i$$

En fait, l'exemple précédent faisait déjà apparaître un SF-template, en voici un autre :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Quelques résultats !

$n$	8	9	10	11
$33 S(n-3) + 6$	5 286	17 694	55 446	174 444
$111 S(n-4) + 43$	4927	17 803	59 539	186 523
$380 S(n-5) + 148$	5 088	16 868	60 948	203 828
$1 140 S(n-6) + 528$	5 088	15 348	50 688	182 928

$n$	12	13	14	15
$33 S(n-3) + 6$	587 505	2 011 290	6 726 330	21 072 090
$111 S(n-4) + 43$	586 789	1 976 176	6 765 271	22 624 951
$380 S(n-5) + 148$	638 548	2 008 828	6 765 288	23 160 388
$1 140 S(n-6) + 528$	611 568	1 915 728	6 026 568	20 295 948

- **premières inégalités obtenu par Rowley :**

- $WS(n+1) \geq 4S(n) + 2$
- $WS(n+2) \geq 13S(n) + 8$

- **Inégalité généralisé :** Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$WS(n+k) \geq S(k) \left( WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$$



$$WS(n+k) \geq \underbrace{S(k)}_p \left( \underbrace{WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1}_a \right) + \underbrace{WS(n)}_b$$

					1	2	...	r	r+1	...	b-1	b
a-l	a-l+1	...	a-1	a	a+1	...	a+r-1	a+r	a+r+1	...	a+b-1	a+b
2a-l	...	...	...	2a	...	...	...	2a+r	...	...	...	2a+b
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
pa-l	...	...	...	pa	...	...	...	pa+r	...	...	...	pa+b

- On cherche un template à  $n$  couleurs de cardinal  $WS^+(n)$  tel que :  
 $WS(n+k) \geq S(k)WS^+(n) + b$
- Or  $WS(n+k) \geq S(k) \left( WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$
- Par conséquent,  $WS^+(n) \geq WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$

$n$	8	9	10	11
$4S(n-1) + 2$	6 722	21 146	71 214	243 794
$13S(n-2) + 8$	6 976	21 848	68 726	231 447
$42S(n-3) + 24$	6 744	22 536	70 584	222 036
$n$	12	13	14	15
$4S(n-1) + 2$	815 314	2 554 194	8 045 162	27 061 154
$13S(n-2) + 8$	792 332	2 649 772	8 301 132	26 146 778
$42S(n-3) + 24$	747 750	2 559 840	8 560 800	25 886 224