Weak Schur numbers

P05 - Formation à la recherche 1A

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella

3 juin 2021

CentraleSupélec

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour $n \geq 1$ un entier
- Et $k \geq 1$ un autre entier ($=$ nombre de **couleurs**)

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour $n \geq 1$ un entier
- Et $k \geq 1$ un autre entier (= nombre de **couleurs**)

Question

Peut-on colorier les entiers de 1 à n de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur ? Si oui, un tel coloriage est dit **sans sommes**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k-ième **nombre de Schur**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k-ième **nombre de Schur**.

Sur l'exemple, on peut vérifier que $S(3) = 13$: on ne peut colorier $[\![1, 14]\!]$ avec trois couleurs.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété $WS(k)$, le k-ième **nombre de Schur faible**.

Définition

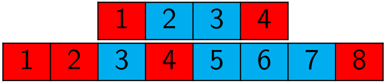
Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété $WS(k)$, le k-ième **nombre de Schur faible**.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours $WS(k) \geq S(k)$.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété $WS(k)$, le k-ième **nombre de Schur faible**.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours $WS(k) \geq S(k)$.



$S(2) = 4$ mais $WS(2) = 8$

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut :
  - trouver un coloriage sans sommes de $[\![1, n]\!]$ à k couleurs
  - montrer qu'on ne peut pas colorier $[\![1, n+1]\!]$.

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut :
  - trouver un coloriage sans sommes de $[\![1, n]\!]$ à k couleurs
  - montrer qu'on ne peut pas colorier $[\![1, n+1]\!]$.
- En pratique, on se contente de **minorer** $S(k)$:
  - inégalités récursives
  - recherche de coloriages par ordinateur

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe k et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
    - arbre $\rightarrow$ **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
    - formules booléennes $\rightarrow$ solveur **SAT**

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe k et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
  - arbre $\rightarrow$ **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
  - formules booléennes $\rightarrow$ solveur **SAT**
- Améliorations des bornes inférieures pour $k \geq 5$
- Temps de calcul : le calcul exact de $S(5)$ via un solveur SAT a demandé 20 années de calcul machine !

La borne inférieure établie par I. Schur est :

$$S(n+1) \geqslant 3S(n) + 1 \Longrightarrow S(n) \geqslant \frac{3^n - 1}{2}$$

Une première piste pour améliorer cette borne est proposée par H. L. Abbott et D. Hanson en 1972. Ils prouvent :

$$S(n+m) \geqslant S(n)\,(2S(m)+1) + S(m)$$

Que font-ils concrètement ?

Un exemple pour $n = m = 2$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

$$S(4) \geqslant S(2)\,(2S(2)+1) + S(2) = 40$$

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.

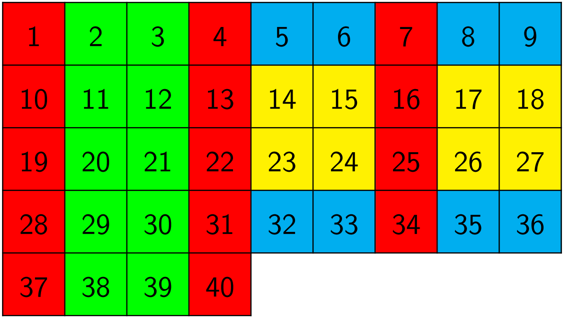
- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.

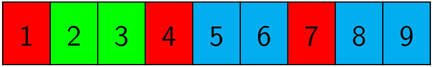
- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants
- Recette : SF-template = Partition sans somme + condition suivante :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \forall (x, y) \in A_i^2, x + y > p \Longrightarrow x + y - p \notin A_i$$

En fait, l'exemple précédent faisait déjà apparaître un SF-template, en voici un autre :





Quelques résultats !

n	8	9	10	11
$33\,S(n-3)+6$	5 286	17 694	55 446	174 444
$111\,S(n-4)+43$	4927	17 803	59 539	186 523
$380\,S(n-5)+148$	5 088	16 868	60 948	203 828
$1\,140\,S(n-6)+528$	5 088	15 348	50 688	182 928

n	12	13	14	15
$33\,S(n-3)+6$	587 505	2 011 290	6 726 330	21 072 090
$111\,S(n-4)+43$	586 789	1 976 176	6 765 271	22 624 951
$380\,S(n-5)+148$	638 548	2 008 828	6 765 288	23 160 388
$1\,140\,S(n-6)+528$	611 568	1 915 728	6 026 568	20 295 948

- **Premières inégalités obtenues par Rowley :**
  - $WS(n+1) \geqslant 4S(n) + 2$
  - $WS(n+2) \geqslant 13S(n) + 8$

- **Notre inégalité généralisée :** Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\boxed{WS(n+k) \geqslant S(k)\left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1\right) + WS(n)}$$

$$WS(n+k) \geqslant S(k)\left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1\right) + WS(n)$$

$WS(n)$

					1	2	...	r	$r+1$	...	$b-1$	b
$a-l$	$a-l+1$	...	$a-1$	a	$a+1$	...	$a+r-1$	$a+r$	$a+r+1$	...	$a+b-1$	$a+b$
$2a-l$	...	...	...	$2a$	...	...	...	$2a+r$	...	...	...	$2a+b$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$pa-l$	...	...	...	pa	...	...	...	$pa+r$	...	...	...	$pa+b$

$S(k)$

$$WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$$

- On cherche un template à n couleurs de cardinal $WS^+(n)$ tel que : $WS(n+k) \geqslant S(k)WS^+(n) + b$

- Or $WS(n+k) \geqslant S(k)\left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1\right) + WS(n)$

- Par conséquent, $WS^+(n) \geqslant WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$

n	8	9	10	11
$4\,S(n-1)+2$	6 722	21 146	71 214	243 794
$13\,S(n-2)+8$	6 976	21 848	68 726	231 447
$42\,S(n-3)+24$	6 744	22 536	70 584	222 036

n	12	13	14	15
$4\,S(n-1)+2$	815 314	2 554 194	8 045 162	27 061 154
$13\,S(n-2)+8$	792 332	2 649 772	8 301 132	26 146 778
$42\,S(n-3)+24$	747 750	2 559 840	8 560 800	25 886 224