Weak Schur numbers

P05 - Formation à la recherche

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella

1 février 2021

CentraleSupélec

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- On se donne $n \geq 1$ un entier
- $k \geq 1$ un autre entier, qui correspond au nombre de **couleurs**

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- On se donne $n \geq 1$ un entier
- $k \geq 1$ un autre entier, qui correspond au nombre de **couleurs**

Question

Peut-on colorier les entiers de 1 à n de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur ? Si oui, un tel coloriage est dit **sans sommes**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k-ième **nombre de Schur**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k-ième **nombre de Schur**.

Sur l'exemple, on peut vérifier que $S(3) = 13$: on ne peut colorier $[\![1, 14]\!]$ avec trois couleurs.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même $WS(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété plus faible.

Définition

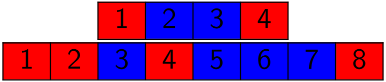
Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même $WS(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété plus faible.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours $WS(k) \geq S(k)$.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres **différents** de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit de même $WS(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété plus faible.

Un coloriage sans sommes et en particulier faiblement sans somme, donc on a toujours $WS(k) \geq S(k)$.



$S(2) = 4$ mais $WS(2) = 8$

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut trouver un coloriage sans sommes de $[\![1, n]\!]$ à k couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier $[\![1, n+1]\!]$.

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut trouver un coloriage sans sommes de $[\![1, n]\!]$ à k couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier $[\![1, n+1]\!]$.
- En pratique, on se contente de **minorer** $S(k$. Si on exhibe un coloriage à k couleurs de $[\![1, n]\!]$, on a montré que $S(k) \geq n$.

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut trouver un coloriage sans sommes de $[\![1, n]\!]$ à k couleurs **et** montrer qu'on ne peut pas colorier $[\![1, n+1]\!]$.
- En pratique, on se contente de **minorer** $S(k$. Si on exhibe un coloriage à k couleurs de $[\![1, n]\!]$, on a montré que $S(k) \geq n$.
- Comment effectuer cette minoration ? On peut démontrer des inégalités récursives ou bien rechercher des coloriages par ordinateur.

La borne inférieure établie par I. Schur est plutôt grossière :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n+1) \geqslant 3S(n) + 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) \geqslant \frac{3^n - 1}{2}$$

Une première piste pour améliorer cette borne est proposée par H. L. Abbott et D. Hanson en 1972. Ils prouvent :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, S(n+m) \geqslant S(n)\left(2S(m)+1\right) + S(m)$$

Que font-ils concrètement ?

Un exemple pour $n = m = 2$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

$$S(4) \geqslant S(2)\,(2S(2)+1) + S(2) = 40$$

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- On conserve l'extension verticale est horizontale de "structures" intéressantes.
- Cependant, on ne considère plus la première ligne comme un assemblage mais comme une structure en elle même.
- On applique l'extension verticale à une structure plus générale : les SF-templates.

Recette : SF-template = Partition sans somme + condition suivante :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \forall (x, y) \in A_i^2, x + y > p \Longrightarrow x + y - p \notin A_i$$

En fait, l'exemple précédent faisait déjà apparaître un SF-template, en voici un autre :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

Quelques résultats !

n	8	9	10	11
$33\,S(n-3)+6$	5 286	17 694	55 446	174 444
$111\,S(n-4)+43$	4927	17 803	59 539	186 523
$380\,S(n-5)+148$	5 088	16 868	60 948	203 828
$1\,140\,S(n-6)+528$	5 088	15 348	50 688	182 928

n	12	13	14	15
$33\,S(n-3)+6$	587 505	2 011 290	6 726 330	21 072 090
$111\,S(n-4)+43$	586 789	1 976 176	6 765 271	22 624 951
$380\,S(n-5)+148$	638 548	2 008 828	6 765 288	23 160 388
$1\,140\,S(n-6)+528$	611 568	1 915 728	6 026 568	20 295 948

- **premières inégalités obtenu par Rowley :**
  - $WS(n+1) \geqslant 4S(n) + 2$
  - $WS(n+2) \geqslant 13S(n) + 8$
- **Inégalité généralisé :** Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\boxed{WS(n+k) \geqslant S(k)\left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1\right) + WS(n)}$$

$$WS(n+k) \geqslant \underbrace{S(k)}_{p} \underbrace{\left(WS(n) + \overbrace{\left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil}^{r=l} + 1 \right)}_{a} + \underbrace{WS(n)}_{b}$$

					1	2	...	r	$r+1$	...	$b-1$	b
$a-l$	$a-l+1$	...	$a-1$	a	$a+1$	...	$a+r-1$	$a+r$	$a+r+1$	...	$a+b-1$	$a+b$
$2a-l$	...	...	...	$2a$	...	...	...	$2a+r$	...	...	...	$2a+b$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$pa-l$	...	...	...	pa	...	...	...	$pa+r$	...	...	...	$pa+b$

- On cherche un template à n couleurs de cardinal $WS^{+}(n)$ tel que : $WS(n+k) \geqslant S(k)WS^{+}(n) + b$

- Or $WS(n+k) \geqslant S(k)\left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1\right) + WS(n)$

- Par conséquent, $WS^{+}(n) \geqslant WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$

n	8	9	10	11
$4\,S(n-1)+2$	6 722	21 146	71 214	243 794
$13\,S(n-2)+8$	6 976	21 848	68 726	231 447
$42\,S(n-3)+24$	6 744	22 536	70 584	222 036

n	12	13	14	15
$4\,S(n-1)+2$	815 314	2 554 194	8 045 162	27 061 154
$13\,S(n-2)+8$	792 332	2 649 772	8 301 132	26 146 778
$42\,S(n-3)+24$	747 750	2 559 840	8 560 800	25 886 224