Ordre du jour :

Plusieurs points ont été abordés au cours de la séance, en commençant par une revue des différentes inégalités connues sur les bornes supérieures.

- $S(n) \leqslant R_n(3) - 2$
- $R_{n+1}(3) \leqslant (n+1)(R_n(3) - 1) + 2$
- $51 \leqslant R_4(3) \leqslant 62$
- Les deux dernières inégalités impliquent : $R_n(3) \leqslant \lfloor n!(e - \frac{1}{6}) \rfloor + 1$
- D'où $S(n) \leqslant \lfloor n!(e - \frac{1}{6}) \rfloor - 1$

On a également le résultat suivant : soit $B \geqslant R_{n-1}(3) - 1$, si $nB \equiv 2 \mod 3$ alors $S(n) \leqslant nB - 1$, sinon, toute n-partition sans somme de de $[\![1, nB]\!]$ est symétrique. On rappelle également quelques inégalités connues sur Weak Schur :

- $WS(n) \leqslant R_n(4)$
- $WS(n) \leqslant R_{2n}(3)$
- $WS(n) \leqslant S(2n)$
- $WS(n) \leqslant \lfloor n.n!e \rfloor + 1$

La dernière inégalité semble être la plus intéressante et est due à Bornsztein. Nous rappelons enfin les idées développées dans le dernier article de Eliahou ainsi que sa conjecture. Dans un contexte de groupe abélien, Eliahou introduit le concept de "blocs sommes" d'une suite d'éléments du groupe qui ne sont autre que des sommes d'éléments consécutifs de cette suite. Il définit également le "degré Schur" d'un sous-ensemble du groupe comme le plus petit nombre n tel que ce sous-ensemble peut-être partitionné en n parties sans somme. Enfin, Eliahou définit une suite $L(n)$ qui vérifie a posteriori deux propriétés :

- $S(n) \leqslant nL(n)$
- $S(n-1) + 1 \leqslant L(n) \leqslant R_{n-1}(3) - 1$

Eliahou conjecture $L(n) = S(n-1) + 1$ ce qui nous semble peut-être trop optimiste. Néanmoins, l'étude de cette suite $L(n)$, ou d'une version "améliorée" $\widetilde{L}(n)$ définie de façon analogue mais en imposant plus de contraintes, pourrait améliorer les bornes supérieures de Schur.

Pistes à explorer, classées par ordre de priorité :

- Étude de $L(n)$ ou d'une version $\widetilde{L}(n)$
- Envisager une approche similaire à Bornsztein pour tenter d'améliorer les bornes sur Weak Schur
- Améliorer la borne supérieure de $R_4(3)$ informatiquement, ce qui améliorerait directement la borne sur Schur