

# Weak Schur numbers

P05 - Formation à la recherche 1A

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella  
Encadrants : Arpad Rimmel, Joanna Tomasik

3 juin 2021



CentraleSupélec

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :



En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour  $n \geq 1$  un entier
- Et  $k \geq 1$  un autre entier ( = nombre de **couleurs**)



En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour  $n \geq 1$  un entier
- Et  $k \geq 1$  un autre entier ( = nombre de **couleurs**)



### Question

Peut-on colorier les entiers de 1 à  $n$  de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur? Si oui, un tel coloriage est dit **sans sommes**.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

### Définition

Pour  $k$  couleurs, on note  $S(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété. C'est le  $k$ -ième **nombre de Schur**.

Pour  $n = 13$  et  $k = 3$ , le coloriage



vérifie cette propriété.

### Définition

Pour  $k$  couleurs, on note  $S(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à  $n$  en vérifiant cette propriété. C'est le  $k$ -ième **nombre de Schur**.

Sur l'exemple, on ne peut rajouter 14 : en fait, on  $S(3) = 13$ .

## Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres différents de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété  $WS(k)$ , le  $k$ -ième **nombre de Schur faible**.



## Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres différents de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété  $WS(k)$ , le  $k$ -ième **nombre de Schur faible**.

		1	2	3	4				
1	2	3	4	5	6	7	8		

$$S(2) = 4 \text{ mais } WS(2) = 8$$

On connaît exactement  $S(k)$  pour  $k \leq 5$ , et  $WS(k)$  pour  $k \leq 4$ .

On connaît exactement  $S(k)$  pour  $k \leq 5$ , et  $WS(k)$  pour  $k \leq 4$ .

- Pour montrer que  $S(k) = n$ , il faut :
  - Trouver un coloriage sans sommes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  couleurs
  - Montrer qu'on ne peut pas colorier  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .

On connaît exactement  $S(k)$  pour  $k \leq 5$ , et  $WS(k)$  pour  $k \leq 4$ .

- Pour montrer que  $S(k) = n$ , il faut :
  - Trouver un coloriage sans sommes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  couleurs
  - Montrer qu'on ne peut pas colorier  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .
- En pratique, on se contente de **minorer**  $S(k)$  :
  - Inégalités récursives
  - Recherche de coloriages par ordinateur

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe  $k$  et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
  - Arbre  $\rightarrow$  **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
  - Formules booléennes  $\rightarrow$  solveur **SAT**

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe  $k$  et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
  - Arbre  $\rightarrow$  **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
  - Formules booléennes  $\rightarrow$  solveur **SAT**
- Améliorations des bornes inférieures pour  $k \geq 5$
- Temps de calcul : le calcul exact de  $S(5)$  via un solveur SAT a demandé 20 années de calcul machine !

La borne inférieure établie par I. Schur est :

$$S(n+1) \geq 3S(n) + 1 \implies S(n) \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Une première piste pour améliorer cette borne est proposée par H. L. Abbott et D. Hanson en 1972. Ils prouvent :

$$S(n+m) \geq S(n)(2S(m) + 1) + S(m)$$

Que font-ils concrètement ?

Un exemple pour  $n = m = 2$  :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

$$S(4) \geq S(2)(2S(2) + 1) + S(2) = 40$$



- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants
- Recette : SF-template = Partition sans somme + condition suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall (x, y) \in A_i^2, x + y > p \implies x + y - p \notin A_i$$

En fait, l'exemple précédent faisait déjà apparaître un SF-template, en voici un autre :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Quelques résultats !

$n$	8	9	10	11
$33 S(n-3) + 6$	5 286	17 694	55 446	174 444
$111 S(n-4) + 43$	4927	17 803	59 539	186 523
$380 S(n-5) + 148$	5 088	16 868	60 948	203 828
$1\,140 S(n-6) + 528$	5 088	15 348	50 688	182 928

$n$	12	13	14	15
$33 S(n-3) + 6$	587 505	2 011 290	6 726 330	21 072 090
$111 S(n-4) + 43$	586 789	1 976 176	6 765 271	22 624 951
$380 S(n-5) + 148$	638 548	2 008 828	6 765 288	23 160 388
$1\,140 S(n-6) + 528$	611 568	1 915 728	6 026 568	20 295 948

- **Premières inégalités obtenues par Rowley :**

- $WS(n+1) \geq 4S(n) + 2$
- $WS(n+2) \geq 13S(n) + 8$

- **Notre inégalité généralisée :**

$$WS(n+k) \geq S(k) \left( WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$$

$$WS(n+k) \geq S(k) \left( WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$$

										$WS(n)$			
										1	2	...	$r$
										$r+1$	...	$b-1$	$b$
$S(k)$	$a-l$	$a-l+1$	...	$a-1$	$a$	$a+1$	...	$a+r-1$	$a+r$	$a+r+1$	...	$a+b-1$	$a+b$
	$2a-l$	...	...	...	$2a$	...	...	...	$2a+r$	...	...	...	$2a+b$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$pa-l$	...	...	...	$pa$	...	...	...	$pa+r$	...	...	...	$pa+b$
										$WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$			



- On cherche un template à  $n$  couleurs de cardinal  $WS^+(n)$  tel que :  
 $WS(n+k) \geq S(k)WS^+(n) + b$
- Or  $WS(n+k) \geq S(k) \left( WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$
- Par conséquent,  $WS^+(n) \geq WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$

$n$	8	9	10	11
$4S(n-1) + 2$	6 722	21 146	71 214	243 794
$13S(n-2) + 8$	6 976	21 848	68 726	231 447
$42S(n-3) + 24$	6 744	22 536	70 584	222 036
$n$	12	13	14	15
$4S(n-1) + 2$	815 314	2 554 194	8 045 162	27 061 154
$13S(n-2) + 8$	792 332	2 649 772	8 301 132	26 146 778
$42S(n-3) + 24$	747 750	2 559 840	8 560 800	25 886 224

- Approche par template : répétition d'un motif
- Nouveaux templates pour les nombres de Schur
- Généralisation des templates aux nombres de Schur faibles

## Comparaison des bornes inférieures pour les nombres de Schur

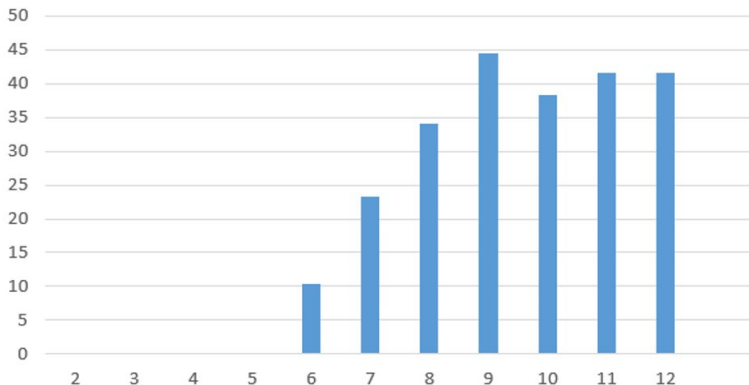
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Avant Rowley	1*	4*	13*	44*	160*	536	1 680	5 041	15 124	51 120	172 216	575 664
Rowley								5 286	17 694	60 320	201 696	631 840
<b>Nos résultats</b>									<b>17 803</b>	<b>60 948</b>	<b>203 828</b>	<b>638 548</b>

\* désigne une valeur exacte

## Comparaison des bornes inférieures pour les nombres de Schur faibles

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Avant Rowley	2*	8*	23*	66*	196	582	1 740	5 201	15 596	51 520	172 216	575 664
Rowley						642	2 146	6 976	21 848	70 778	241 282	806 786
<b>Nos résultats</b>									<b>22 536</b>	<b>71 214</b>	<b>243 794</b>	<b>815 314</b>

\* désigne une valeur exacte



Augmentation relative pour  $WS(n)$  (%)

- Publication d'un article sur nos résultats
- Recherche de meilleurs templates
- Étude des bornes supérieures

# Merci pour votre attention