

Weak Schur numbers

P05 - Formation à la recherche 1A

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella
Encadrants : Arpad Rimmel, Joanna Tomasik

3 juin 2021



CentraleSupélec

En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :



En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour $n \geq 1$ un entier
- Et $k \geq 1$ un autre entier (= nombre de **couleurs**)



En 1917, le russe **Issai Schur** pose le problème suivant :

- Pour $n \geq 1$ un entier
- Et $k \geq 1$ un autre entier (= nombre de **couleurs**)



Question

Peut-on colorier les entiers de 1 à n de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur? Si oui, un tel coloriage est dit **sans sommes**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage



vérifie cette propriété.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage

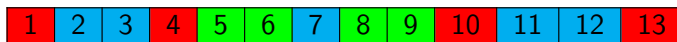


vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k -ième **nombre de Schur**.

Pour $n = 13$ et $k = 3$, le coloriage



vérifie cette propriété.

Définition

Pour k couleurs, on note $S(k)$ le plus grand entier n tel qu'on puisse colorier les entiers de 1 à n en vérifiant cette propriété. C'est le k -ième **nombre de Schur**.

Sur l'exemple, on ne peut rajouter 14 : en fait, on $S(3) = 13$.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres différents de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété $WS(k)$, le k -ième **nombre de Schur faible**.

Définition

Un coloriage est dit **faiblement sans sommes** lorsque pour deux nombres différents de même couleur, leur somme n'est pas de la même couleur. On définit avec cette propriété $WS(k)$, le k -ième **nombre de Schur faible**.

		1	2	3	4				
1	2	3	4	5	6	7	8		

$$S(2) = 4 \text{ mais } WS(2) = 8$$

On connaît exactement $S(k)$ pour $k \leq 5$, et $WS(k)$ pour $k \leq 4$.

On connaît exactement $S(k)$ pour $k \leq 5$, et $WS(k)$ pour $k \leq 4$.

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut :
 - Trouver un coloriage sans sommes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k couleurs
 - Montrer qu'on ne peut pas colorier $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

On connaît exactement $S(k)$ pour $k \leq 5$, et $WS(k)$ pour $k \leq 4$.

- Pour montrer que $S(k) = n$, il faut :
 - Trouver un coloriage sans sommes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k couleurs
 - Montrer qu'on ne peut pas colorier $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.
- En pratique, on se contente de **minorer** $S(k)$:
 - Inégalités récursives
 - Recherche de coloriages par ordinateur

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe k et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
 - Arbre → **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
 - Formules booléennes → solveur **SAT**

Les recherches récentes sur le sujet se focalisent sur les méthodes numériques.

- On fixe k et on essaye de colorier le plus loin possible
- Plusieurs façon d'encoder le problème :
 - Arbre \rightarrow **Monte-Carlo Tree Search** sur un espace de recherche restreint
 - Formules booléennes \rightarrow solveur **SAT**
- Améliorations des bornes inférieures pour $k \geq 5$
- Temps de calcul : le calcul exact de $S(5)$ via un solveur SAT a demandé 20 années de calcul machine !

La borne inférieure établie par I. Schur est :

$$S(n+1) \geq 3S(n) + 1 \implies S(n) \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Une première piste pour améliorer cette borne est proposée par H. L. Abbott et D. Hanson en 1972. Ils prouvent :

$$S(n+m) \geq S(n)(2S(m) + 1) + S(m)$$

Que font-ils concrètement ?

Un exemple pour $n = m = 2$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

$$S(4) \geq S(2)(2S(2) + 1) + S(2) = 40$$

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants

- F. Rowley améliore cette approche théorique en 2020.
- **Extension verticale** de structures plus générales : les SF-templates.
- **Notre contribution** : recherche de SF-templates intéressants
- Recette : SF-template = Partition sans somme + condition suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall (x, y) \in A_i^2, x + y > p \implies x + y - p \notin A_i$$

En fait, l'exemple précédent faisait déjà apparaître un SF-template, en voici un autre :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Quelques résultats !

n	8	9	10	11
$33 S(n-3) + 6$	5 286	17 694	55 446	174 444
$111 S(n-4) + 43$	4927	17 803	59 539	186 523
$380 S(n-5) + 148$	5 088	16 868	60 948	203 828
$1\,140 S(n-6) + 528$	5 088	15 348	50 688	182 928

n	12	13	14	15
$33 S(n-3) + 6$	587 505	2 011 290	6 726 330	21 072 090
$111 S(n-4) + 43$	586 789	1 976 176	6 765 271	22 624 951
$380 S(n-5) + 148$	638 548	2 008 828	6 765 288	23 160 388
$1\,140 S(n-6) + 528$	611 568	1 915 728	6 026 568	20 295 948

- **Premières inégalités obtenues par Rowley :**

- $WS(n+1) \geq 4S(n) + 2$
- $WS(n+2) \geq 13S(n) + 8$

- **Notre inégalité généralisée :**

$$WS(n+k) \geq S(k) \left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$$

$$WS(n+k) \geq S(k) \left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$$

										$WS(n)$			
										1	2	...	r
										$r+1$...	$b-1$	b
$S(k)$	$a-l$	$a-l+1$...	$a-1$	a	$a+1$...	$a+r-1$	$a+r$	$a+r+1$...	$a+b-1$	$a+b$
	$2a-l$	$2a$	$2a+r$	$2a+b$

	$pa-l$	pa	$pa+r$	$pa+b$
										$WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$			

- On cherche un template à n couleurs de cardinal $WS^+(n)$ tel que :
 $WS(n+k) \geq S(k)WS^+(n) + b$
- Or $WS(n+k) \geq S(k) \left(WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1 \right) + WS(n)$
- Par conséquent, $WS^+(n) \geq WS(n) + \left\lceil \frac{WS(n)}{2} \right\rceil + 1$

n	8	9	10	11
$4S(n-1) + 2$	6 722	21 146	71 214	243 794
$13S(n-2) + 8$	6 976	21 848	68 726	231 447
$42S(n-3) + 24$	6 744	22 536	70 584	222 036
n	12	13	14	15
$4S(n-1) + 2$	815 314	2 554 194	8 045 162	27 061 154
$13S(n-2) + 8$	792 332	2 649 772	8 301 132	26 146 778
$42S(n-3) + 24$	747 750	2 559 840	8 560 800	25 886 224

- Approche par template : répétition d'un motif
- Nouveaux templates pour les nombres de Schur
- Généralisation des templates aux nombres de Schur faibles

Comparaison des bornes inférieures pour les nombres de Schur

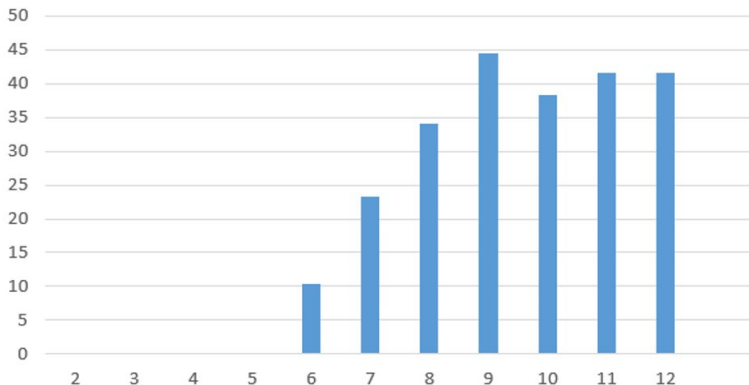
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Avant Rowley	1*	4*	13*	44*	160*	536	1 680	5 041	15 124	51 120	172 216	575 664
Rowley								5 286	17 694	60 320	201 696	631 840
Nos résultats									17 803	60 948	203 828	638 548

* désigne une valeur exacte

Comparaison des bornes inférieures pour les nombres de Schur faibles

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Avant Rowley	2*	8*	23*	66*	196	582	1 740	5 201	15 596	51 520	172 216	575 664
Rowley						642	2 146	6 976	21 848	70 778	241 282	806 786
Nos résultats									22 536	71 214	243 794	815 314

* désigne une valeur exacte



Augmentation relative pour $WS(n)$ (%)

- Publication d'un article sur nos résultats
- Recherche de meilleurs templates
- Étude des bornes supérieures

Merci pour votre attention