Présentation de l'article de Abbott-Hanson

CentraleSupélec

27 novembre 2020

Status quo et premier encadrement

- Une partie A de $\mathbb{N}^*$ est dite sans sommes lorsque :

$$\forall (a,b) \in A^2, a+b \notin A$$

- On note $f(n)$ le plus grand entier tel que les entiers de $[\![1, f(n)]\!]$ puissent être partitionnés en n parties sans sommes. Son existence est assuré par Schur qui montre que $[\![1, \lfloor n!e \rfloor]\!]$ ne satisfait pas cette condition.
- Schur démontre l'encadrement suivant :

$$\frac{3^n - 1}{2} \leqslant f(n) \leqslant \lfloor n!e \rfloor - 1$$

Un théorème plus global fondamental

- Une généralisation du problème : on s'intéresse aux parties d'entiers ne contenant pas de solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$$

d'inconnue $(x_1, ..., x_k)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{Z}^k$

- De manière analogue à $f(n)$, on définit $g(n)$ (sous une certaine condition d'existence sur l'équation) pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ comme étant le plus grand entier tel que les entiers de $[\![1, g(n)]\!]$ puissent être partitionnés en n parties qui ne contiennent pas de solutions de cette équation.
- Avec des entiers m, N et M vérifiant des conditions particulières, Abbott et Hanson montrent que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Ng(n) + M \leqslant g(n+m)$$

Application au problème de Schur

- Abbott et Hanson démontrent un théorème analogue, spécifiquement pour les nombres de Schur :

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, (2f(m)+1)f(n) + f(m) \leqslant f(n+m)$$

- Application avec $m = 4$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 89f(n) + 44 \leqslant f(n+4)$$

d'où, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{44}{89} 89^{\frac{n}{4}} \leqslant f(n)$$

- On obtient une meilleure borne inférieure que celle obtenue par Schur !

Application à des problèmes similaires

- Théorie de Ramsay : "*Soit G un graphe complet d'ordre $R \geqslant R_n(k,2)$ dont on colore les arêtes avec n couleurs différentes. Alors il existe un sous-graphe complet de G d'ordre k dont les arêtes sont toutes de la même couleur.*"
  Problème : évaluer $R_n(k,2)$
- Problème de Turán : Soit $h(m,n)$ le plus grand entier tels que les éléments de $[\![m, f(m,n)]\!]$ puissent être partitionnés en n parties sans sommes. Encadrement de $h(n,m)$?
- Problème des parties de $\mathbb{N}^*$ sans produits