Improving the templates for multicolor Ramsey numbers and Schur numbers

Romain Ageron

June 25, 2022

Abstract

Lower bounds for several multicolor Ramsey numbers as well as Schur numbers have recently been improved using a pattern based construction with a particular type of coloring nammed "sf-template". This article describes a generalization of the sf-templates: the b-templates.

1 Introduction

This article addresses the edge-coloring of complete graphs in an arbitrary number of colors while limiting the clique number in each color, as well as sum-free colorings of positive integers. A pattern based construction which uses a particular type of coloring nammed sf-template was described in [1]. This construction was used to improve lower bounds on several Ramsey numbers as well as Schur numbers. Lower bounds were then improved by describing larger templates in [2] for Schur numbers and in [3] for multicolor Ramsey numbers.

Ramsey numbers and Schur numbers are defined in Section 2. Section 3 defines the b-templates and describes the corrresponding construction. Section 4 states and proves the main results on b-templates and on the construction. Section 5 records the new inequalities and some new lower bounds.

2 Definitions

Definition 2.1 (Coloring and partition)**.** *Let S and T be two sets. A coloring of S with colors in T is an application $\gamma : S \to T$. The partition associated to the coloring γ is the partition $(\gamma^{-1}(t))_{t \in T \text{ and } \gamma^{-1}(\{t\}) \neq \varnothing}$. Conversely, the coloring associated to a partition $(A_i)_{i \in I}$ for some $I \subset T$ is the application $\gamma : S \to T$ such that $\forall s \in S, \forall t \in T, \gamma(s) = t \iff s \in A_t$.*

The set of positive natural numbers is denoted by $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Given two integers $a, b \in \mathbb{Z}$, the set of integers $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$ is denoted by $[\![a, b]\!]$. For $n \in \mathbb{N}$, the complete graph of order n is denoted by K_n.

Definition 2.2 (Ramsey coloring)**.** *Let $n \in \mathbb{N}$, the order of the graph, and let $r \in \mathbb{N}$, the number of colors. Let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. A Ramsey coloring is an edge coloring of K_n with r colors such that for any color $c \in [\![1, r]\!]$, the coloring does not contain any monochramatic complete sub-graph of order k_c with color c. The set of these colorings is denoted by $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n)$.*

Theorem 2.3 (Ramsey's theorem [4])**.** *Let $r \in \mathbb{N}$ and let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. Then there is $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n) = \varnothing$.*

Theorem 2.3 leads to the following definition.

Definition 2.4 (Multicolor Ramsey number)**.** *Let $r \in \mathbb{N}$ and let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. The multicolor Ramsey number $R(k_1, ..., k_r)$ is defined as the smallest integer $n \in \mathbb{N}$ such $\mathcal{R}(k_1, ..., k_r; n) = \varnothing$. If all the k_c's are equal to some k, this Ramsey number is also denoted by $R_r(k)$.*

The construction described in [1] as well as the one described in this article use a subset of Ramsey colorings, the linear Ramsey colorings.

Definition 2.5 (Linear Ramsey coloring)**.** *Let $n \in \mathbb{N}$, and let $r \in \mathbb{N}$. Let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. We assume that the vertices of K_{n+1} are the integers from $[\![0, n]\!]$. A linear Ramsey coloring is any Ramsey coloring such that the color of the edge (u, v) only depends on the value of $|u - v|$. The set of these colorings is denoted by $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n)$. The integer coloring associated to a linear Ramsey coloring is the coloring of $[\![1, n]\!]$ such that every $x \in [\![1, n]\!]$ is colored with the color of the edges (u, v) such that $|u - v| = x$.*

Unlike Ramsey colorings, the set $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n)$ corresponds to graph colorings of order $n+1$. This definition is chosen in this article because linear Ramsey colorings are studied using their associated integer coloring. Also, in this article the linear Ramsey numbers are defined as the largest size of a coloring (contrary to Ramsey numbers) because it is more convenient in inequalities.

Definition 2.6 (Linear Ramsey number)**.** *Let $r \in \mathbb{N}$ and let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. The linear Ramsey number $L(k_1, ..., k_r)$ is defined as the largest integer $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n) \neq \varnothing$. If all the k_c's are equal to some k, this linear Ramsey number is also denoted by $L_r(k)$.*

Linear Ramsey numbers can be used to construct lower bounds for Ramsey numbers because a linear Ramsey coloring is also a Ramsey coloring. Therefore for all $r \in \mathbb{N}$ and for all $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$, $R(k_1, ..., k_r) \geqslant L(k_1, ..., k_r) + 2$.

Let $n \in \mathbb{N}$. Any linear coloring of K_{n+1} induces a coloring of $[\![1, n]\!]$. Conversely, any coloring of $[\![1, n]\!]$ corresponds to a linear coloring of K_{n+1}. Theorem 2.7 gives a link between some sum-free properties of the coloring of $[\![1, n]\!]$ and the clique numbers of the associated coloring of K_{n+1}.

Theorem 2.7 (Link to sum-free colorings [5])**.** *Let $r \in \mathbb{N}$ and let $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in \mathbb{N}^{*r}$. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and let γ be a coloring of $[\![1, n]\!]$ with r colors. Then the two following conditions are equivalent.*

(i) There is a monochromatic subgraph of order k_c with color c in the linear coloring of K_{n+1} associated to γ.

(ii) There is a monochromatic subset S of $[\![1, n]\!]$ with color c and cardinality $k_c - 1$ such that for all distinct $x, y \in S$, $\gamma(|x - y|) = c$.

Definition 2.8 (Schur number)**.** *A subset A of $\mathbb{N}$ is said to be sum-free if $\forall (a, b) \in A^2, a + b \notin A$. Let $n \in \mathbb{N}$. Schur proved in [6] that there is a largest integer denoted by $S(n)$ such that $[\![1, S(n)]\!]$ can be partioned into n sum-free subsets. $S(n)$ is called the n^{th} Schur number.*

Theorem 2.7 shows a link between Schur numbers and Ramsey numbers:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = L_n(3) \leqslant R_n(3) - 2$$

.

3 b-Templates

Dans cette section, on introduit les b-templates. Les templates présentés dans la section **??** vont apparaître comme un cas particulier des b-templates puisqu'ils correspondent au cas $b = 0$.

On commence par décrire $TS_{b,k}$, un ensemble particulier de k-tuples qui sera utilisé dans la définition des b-templates.

Definition 3.1 (Arbre associé à un tuple)**.** *Soit $a \in \mathbb{N}^*$, soit $b \in \mathbb{N}$. A chaque tuple d'entiers, on associe un arbre de manière récurssive :*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Tree}(x) = x, \\ \forall k \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}^k, \begin{cases} \mathrm{Tree}(x) = (x_1, \mathrm{Tree}(x_2, ..., x_k)) & \textit{si } x_2 - x_1 > b, \\ \mathrm{Tree}(x) = (x_1, \mathrm{Tree}(x_2, ..., x_k), \mathrm{Tree}(x_2 + a, ..., x_k)) & \textit{si } 0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant b, \\ \mathrm{Tree}(x) = \mathrm{Tree}\left(x_1, x_2 + a\left\lceil \frac{x_1 - x_2}{a} \right\rceil, x_3, ..., x_k\right) & \textit{si } x_2 < x_1. \end{cases} \end{cases}$$

Pour un arbre $\mathrm{Tree}(x)$*, on note* $\mathrm{TreeSet}(x)$ *l'ensemble des tuples d'entiers que l'on peut construire en collectant les labels au cours d'une descente de cet arbre.*

Definition 3.2 (Ensembles $S_{b,k}(A)$ et $TS_{b,k}(A)$)**.** *Soit $A \subset \mathbb{N}^*$, soit $b \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. On note $S_{b,k}(A)$ l'ensemble de k-tuples à valeurs distinctes dans A et dont les éléments de $[\![1, b]\!]$ sont situés au début et apparaissent dans l'ordre croissant :*
$S_{b,k}(A) = \{x \in \mathfrak{S}_k(A) \ : \ \forall i \in [\![2, k]\!], x_i \leqslant b \implies x_i \geqslant x_{i-1}\}$. *On définit alors un ensemble $TS_{b,k}(A)$ de k-tuples :* $TS_{b,k}(A) = \displaystyle\bigcup_{x \in S_{b,k}(A)} \mathrm{TreeSet}(x)$.

On définit aussi un opérateur de projection de $\mathbb{Z}$ vers $[\![1, a + b]\!]$.

Definition 3.3 (Projection $\pi_{a,b}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{N}$. On définit une projection, noté $\pi_{a,b}$ ou plus simplement π si il n'y a pas d'ambiguïté, sur $[\![1, a + b]\!]$ de la manière suivante.*

$$\begin{array}{rccl} \pi_{a,b} : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & [\![1, a + b]\!] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \textit{si } 1 \leqslant x \leqslant b \\ (x \mod a) + \mathbb{1}_{[\![0,b]\!]}(x \mod a) & \textit{si } x > b \end{cases} \end{array}$$

On peut maintenant définir les b-templates.

Definition 3.4 (b-Templates)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{N}$. Un b-template de largeur a à $r + 1$ couleurs, est défini comme une partition de $[\![1, a + b]\!]$ en $r + 1$ sous-ensembles $A_1, ..., A_{r+1}$ vérifiant :*

(i) $a \in A_{r+1}$,

(ii) $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, x + y \notin [\![a + b + 1, 2a + b]\!] \implies \pi(x + y) \notin A_{r+1}$,

(iii) $\forall c \in [\![1, c]\!], \forall x \in TS_{b,k_c-1}(A_c), \exists (i, j) \in [\![1, k_c - 1]\!]^2, i < j$ *et* $\pi(x_j - x_i) \notin A_c$.

$T_b(k_1, ..., k_r, t; a)$ désigne l'un (quelconque) de ces b-templates et l'ensemble de ces b-templates est noté $\mathcal{T}_b(k_1, ..., k_r, t; a)$. La couleur $r+1$ joue un rôle particulier et elle est appelée "couleur template".

La couleur $r + 1$ n'est pas nécessairement la dernière par ordre d'apparition, la désignation de $r + 1$ comme couleur template signalée par t est une convention qui allège les notations en évitant de devoir écrire $\mathcal{T}_b(k_1, ..., k_{i-1}, t, k_{i+1}, ..., k_r; n)$ par exemple.

Dans le cas où tous les k_c sont égaux à 3, ces b-templates constituent des b-S-templates applicables pour les nombres de Schur similaires au b-WS-templates pour les nombres de Schur faibles définis dans [2].

La construction présentée dans [7] utilise des coloriages linéaires afin de construire des 0-templates. La proposition suivante présente cette construction sous l'angle des b-templates.

Proposition 3.5. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(k_1, ..., k_r; n) \neq \varnothing$ et on se donne γ un tel coloriage. On définit un nouveau coloriage T de la manière suivante.*

$$\begin{array}{rccl} T: & [\![1, 2n+1]\!] & \longrightarrow & [\![1, r+1]\!] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(x) & si\ x \leqslant n \\ r+1 & si\ x > n \end{cases} \end{array}$$

Alors $T \in \mathcal{T}_0(k_1, ..., k_r, t; 2\,n+1)$.

Proposition 3.6 (Lien avec les templates)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$, soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$ et soit $a \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\mathcal{T}(k_1, ..., k_r, t; a) = \mathcal{T}_0(k_1, ..., k_r, t; a).$$

Proposition 3.7. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{N}$. Alors $T_b(k_1, ..., k_r, t; a) \subset L(k_1, ..., k_r, 3; a+b)$.*

Definition 3.8 (Coloriage par défaut)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $b \in \mathbb{N}$ et soit $r \in \mathbb{N}$. Soit H un coloriage de $[\![1, n]\!]$ à $r+1$ couleurs. On pose $d = \min\left(H^{-1}(\{r+1\}) \backslash [\![1, b]\!]\right) - b - 1$. On définit alors un coloriage $\mathrm{Default}_b(H)$, dit par défaut, associé au coloriage H :*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Default}_b(H): & [\![1, d]\!] & \longrightarrow & [\![1, r+1]\!] \\ & x & \longmapsto & H(x+b) \end{array}$$

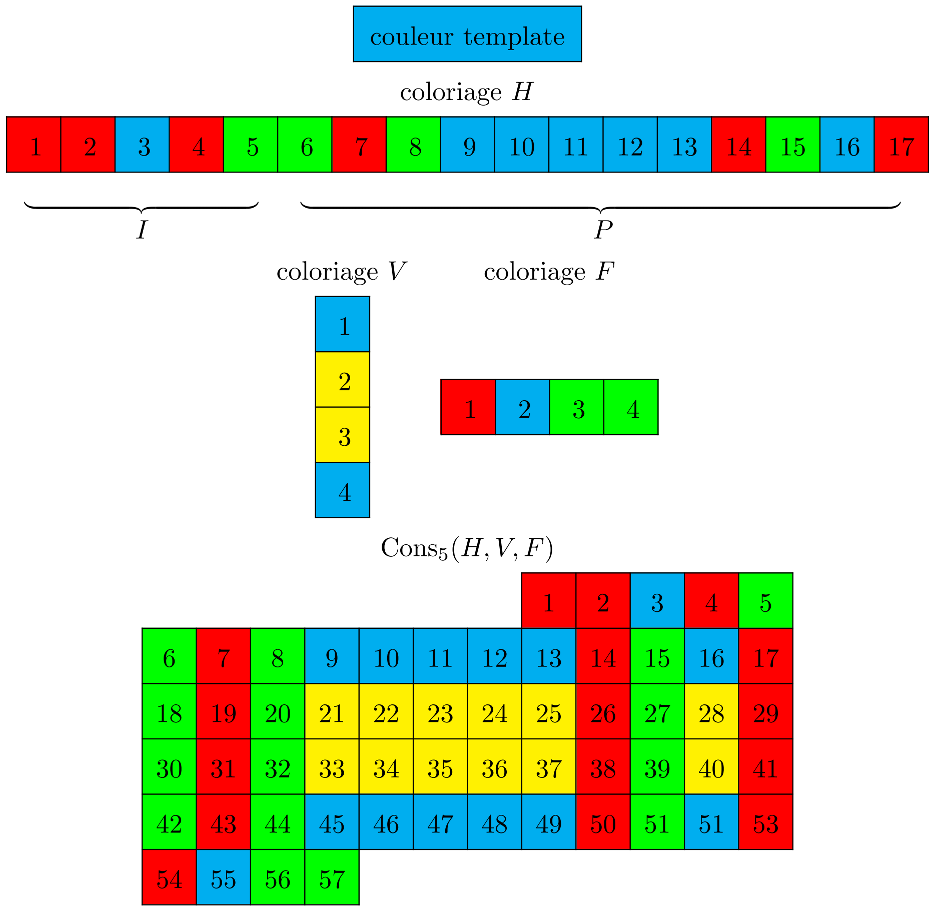
Definition 3.9 (Méthode de construction)**.** *Soit $(a, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $b \in \mathbb{N}$. Soit $(r, s) \in \mathbb{N}^{*2}$. On se donne un coloriage de $[\![1, a+b]\!]$ à $r+1$ couleurs (appelée H, pour horizontal), et un coloriage de $[\![1, p]\!]$ à s couleurs (appelée V, pour vertical).*

Pour un $d \in \mathbb{N}$, on se donne aussi un coloriage dit final F de $[\![1, d]\!]$ à $r+1$ couleurs. Il est parfois utile de définir F au cas par cas, mais on peut aussi lui attribuer une valeur par défaut $F = \mathrm{Default}_b(H)$. Dans le cas où F n'est pas utilisé, on note $F = \varnothing$ l'application vide.

On construit alors un coloriage γ de $[\![1, a \times p + b + d]\!]$ à $r+s$ couleurs comme suit. De manière informelle, on commence par utiliser le coloriage initial $I := H_{|\,[\![1,b]\!]}$, puis on répéte p fois le pattern $P := H_{|\,[\![b+1,a+b]\!]}$ en remplaçant pour la i-ème itération la couleur spéciale par $r + \mathcal{V}(i)$, et finalement on ajoute le motif formé l'enchaînement des couleurs dans $\mathcal{F}$. Formellement :

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [\![1, a \times p + b + d]\!] & \longrightarrow & [\![1, r+s]\!] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} H(x) & si\ x \leqslant b \\ H(\pi(x)) & si\ b+1 \leqslant x \leqslant a \times p + b\ et\ H(\pi(x)) \neq r+1 \\ r + V\left(\left\lceil \dfrac{x-b}{a} \right\rceil\right) & si\ b+1 \leqslant x \leqslant a \times p + b\ et\ H(\pi(x)) = r+1 \\ F(x - a \times p - b) & si\ x \geqslant a \times p + b + 1 \end{cases} \end{array}$$

Figure 1: Exemple de construction avec $b = 5$



Definition 3.10 (Compatibilité avec un b-template)**.** *Soit $a \in \mathbb{N}^*$, soit $b \in \mathbb{N}$ et soit $r \in \mathbb{N}$. Soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $T \in \mathcal{T}_b(k_1, ..., k_r; a)$ un b-template et soit $A_1, ..., A_{r+1}$ la partition associée. Soit $d \in [\![1, a]\!]$. Soit F un coloriage de $[\![1, d]\!]$ à $r+1$ couleurs et soit $B_1, ..., B_{r+1}$ la partition associée. Le coloriage F est dit compatible avec le coloriage T si il vérifie :*

(i) $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, (x + y > b \text{ et } \pi(x + y) \leqslant d) \implies \pi(x + y) \notin B_{r+1}$

(ii) $\forall (x, y) \in A_{r+1} \times B_{r+1}, x + y \leqslant d \implies x + y \notin B_{r+1}$

(iii) $\forall c \in [\![1, r]\!], \forall k \in [\![1, k_c - 1]\!]$,
$$\begin{cases} \quad \exists (i, j) \in [\![1, k]\!]^2, |x_i - x_j| \notin A_c, \\ \text{ou TODO} \\ \quad \exists (i, j) \in [\![1, k_c - k - 1]\!]^2, i < j \text{ et } \pi(y_j - y_i) \notin A_c. \end{cases}$$

4 Properties of the b-templates

On a une cractérisation similaire à celle donnée dans [1] pour les sf-templates.

Proposition 4.1 (Condition suffisante pour les templates)**.** *Soit $a \in \mathbb{N}^*$, soit $b \in \mathbb{N}$ et soit $r \in \mathbb{N}$. Soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit T un coloriage de $[\![1, a+b]\!]$ à $r+1$ couleurs. Soit $d \in [\![1, a-1]\!]$ et soit F un coloriage de $[\![1, d]\!]$ à $r+1$ couleurs. Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$ tel que $n \geqslant \max_{1 \leqslant c \leqslant r} k_c - 1$. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et soit $(l_c)_{1 \leqslant c \leqslant s} \in [\![3, +\infty[\![^s$. Soit enfin $\gamma \in \mathcal{L}(l_1, ..., l_s; n)$ tel qu'il existe une couleur $c \in [\![1, s]\!]$ et un sous-ensemble S de $[\![1, n]\!]$ monochromatique de couleur c et de cardinal $k_c - 2$ vérifiant pour tous $x, y \in S$ distincts, $\gamma(|x-y|) = c$. Supposons que $\mathrm{Cons}_b(T, \gamma, F) \in \mathcal{L}(k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_s; an + b + d)$. Alors $T \in \mathcal{T}_b(k_1, ..., k_r, t; a)$ et F est compatible avec T.*

Proposition 4.2 (Compatibilité de la valeur par défaut)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathcal{T}_b(k_1, ..., k_r, t; a)$ un b-template. Alors T et $\mathrm{Default}_b(T)$ sont compatibles.*

Theorem 4.3 (Construction de coloriages linéaires)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{N}$. Soit H un coloriage de $[\![1, a+b]\!]$ à $r+1$ couleurs. Soit $d \in [\![0, a-1]\!]$ et soit F un coloriage de $[\![1, d]\!]$ à $r+1$ couleurs. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $H \in \mathcal{T}_b(k_1, ..., k_r, t; a)$ *et* F *est compatible avec* H.

(ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall l \in [\![3, +\infty[\![^s, \forall V \in \mathcal{L}(l_1, ..., l_s; p), \mathrm{Cons}_b(H, V, F) \in \mathcal{L}(k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_s; a \times p + b + d)$

Corollary 4.4 (Inégalités pour les nombres de Ramsey linéaires)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(k_c)_{1 \leqslant c \leqslant r} \in [\![3, +\infty[\![^r$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et soit $(l_c)_{1 \leqslant c \leqslant s} \in [\![3, +\infty[\![^s$. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{T}_b(l_1, ..., l_s, t; a) \neq \varnothing$, et on fixe T un tel b-template. Soit $d \in [\![1, a]\!]$ tel qu'il existe un coloriage de $[\![1, d]\!]$ à $s+1$ couleurs compatible avec T. Alors $L(k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_s) - 2 \geqslant a(L(k_1, ..., k_r) - 2) + b + d$.*

Lemma 4.5 (associativité de la construction)**.** *TODO*

$$\mathrm{Cons}_{b_{H_1}}(H_1, ,)$$

Theorem 4.6 (Construction de b-templates)**.** *TODO*

5 Nouvelles inégalités et bornes inférieures

5.1 Nombres de Schur

L'existence d'un 2-S-template de largeur 10 à 3 couleurs non exprimable en tant que S-template fournit une nouvelle inégalité. L'ancienne inégalité était $S(n+2) \geqslant 9\,S(n) + 4$.

Proposition 5.1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n+2) \geqslant 10\,S(n) + 2$$

Cette inégalité fournit les nouvelles bornes inférieures suivantes : $S(8) \geqslant 5\,362$ et $S(13) \geqslant 2\,038\,282$ (contre respectivement $5\,286$ dans [1] et $2\,011\,290$ dans [2]). Plus généralement, cette inégalité améliore les bornes inférieures des $S(5k+3), \forall k \in \mathbb{N}^*$.

5.2 Nombres de Ramsey

On obtient des ingégalités de la forme $L(k_1,...,k_r,k_{r+1},...,k_{r+s}) - 2 \geqslant a\,(L(k_1,...,k_r) - 2) + d$. Les "$k_i$ ajoutés" désignent $k_{r+1},...,k_{r+s}$. Dans le tableau ci-dessous, b-template désigne un b-template non exprimable en tant que template. Les anciennes valeurs viennent de [3].

k_i ajoutés	ancien (a, d)	nouveau (a, d)	type de template	coloriage final
3, 3	9, 4	10, 2	b-template	défaut
3, 4	18, 7	19, 2	b-template	défaut
3, 5	30, 12	31, 3	b-template	spécifique
4, 5	51, 21	55, 23	template	défaut

En ce qui concerne les bornes inférieures, on a $R_8(3) \geqslant 5\,364$ et $R_{13}(3) \geqslant 2\,038\,284$ (contre respectivement 5 288 dans [1] et 2 011 292 dans [2]), et plus généralement une amélioration pour les $R_{5k+3}(3), \forall k \in \mathbb{N}^*$. On a aussi $R(3,4,5,5) \geqslant 764$ (contre 729 dans [3]). Il existe de nombreuses inégalités récursives et constructions pour les nombres de Ramsey. Afin de savoir quelles bornes précisément ont été améliorées, il faudrait recenser chacunes des bornes inférieures et des méthodes existantes puis calculer toutes les bornes et voir si cetaines sont améliorées. Il est probable que les inégalités de cette section permettent d'améliorer les bornes inférieures pour d'autres nombres de Ramsey mais je n'ai pas effectué cette vérification.

References

[1] F. Rowley, "A generalised linear Ramsey graph construction," *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 81, no. 2, pp. 245–256, 2021. [Online]. Available: https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/81/ajc_v81_p245.pdf

[2] R. Ageron, P. Casteras, T. Pellerin, Y. Portella, A. Rimmel, and J. Tomasik, "New lower bounds for schur and weak schur numbers," 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2112.03175

[3] F. Rowley, "Improved lower bounds for multicolour ramsey numbers using sat-solvers," 2022. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2203.13476

[4] F. P. Ramsey, "On a problem of formal logic," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-30, no. 1, pp. 264–286, 1930. [Online]. Available: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-30.1.264

[5] H. L. Abbott and D. Hanson, "A problem of Schur and its generalizations," *Acta Arithmetica*, 1972. [Online]. Available: http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa20/aa2028.pdf

[6] I. Schur, "Über Kongruenz x ... (mod. p.)." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 25, pp. 114–116, 1917. [Online]. Available: http://eudml.org/doc/145475

[7] F. Rowley, "Constructive lower bounds for Ramsey numbers from linear graphs," *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 68, no. 3, pp. 385–395, 2017. [Online]. Available: https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/68/ajc_v68_p385.pdf