

Feuille de route Schur semestre 8

L'une des hypothèses sur la structure des partitions faiblement sans somme est qu'il existe une partition à $n + 1$ couleurs faiblement sans somme de taille presque maximale débutant avec une partition à n couleurs faiblement sans somme de taille presque maximale, et ceci récursivement ; c'est ce qui est observé pour les petites valeurs, $WS(n)$ avec $n \leq 4$, pour lesquelles toutes partitions de taille presque maximale sont connues.

C'est notamment sur cette hypothèse que se basent les méthodes informatiques utilisées dans la littérature au cours des années 2010 afin d'obtenir des bornes inférieures pour $WS(n)$ avec $n \geq 5$. Au cours du travail précédent, nous avons constaté que cette hypothèse n'est pas vérifiée pour $n = 6$ puisque nous avons montré que la taille maximale d'une partition faiblement sans somme à 6 couleurs avec cette structure est 583 alors que nous avons obtenu la borne inférieure $WS(6) \geq 646$. Plus généralement, cela remet en question cette structure que l'on pensait être celle de certaines partitions de longueur presque maximale pour $WS(n)$ avec $n \geq 5$.

L'approche de construction de partitions faiblement sans somme à l'aide de templates a permis d'augmenter significativement les bornes inférieures pour $WS(n)$ avec $n \geq 6$ par rapport aux méthodes informatiques précédemment évoquées (jusqu'à 40% d'augmentation). Toutefois, les partitions construites en utilisant des templates présentent une structure extrêmement régulière et celle-ci n'est donc vraisemblablement pas optimale. C'est ce qu'indique la borne inférieure $WS(6) \geq 646$ que nous avons obtenue en recherchant des partitions possédant une structure similaire à celle obtenue avec un template mais tout en autorisant un peu plus de liberté dans la structure, améliorant ainsi la borne précédente $WS(6) \geq 642$ qui quant à elle avait été obtenue à l'aide d'un template.

Ainsi, il semble que la structure des partitions faiblement sans somme à $n \geq 6$ (peut-être $n \geq 5$) couleurs de taille presque maximale reste inconnue, et même qu'aucune partition de taille presque maximale n'a encore été découverte. Ce manque de connaissances sur la structure empêche une restriction efficace l'espace de recherche tout en conservant des partitions de taille presque maximale. D'autre part, une recherche exhaustive est inenvisageable, le calcul de $S(5) = 160$ a pris 30 ans en temps CPU par exemple, et la complexité est exponentielle en la valeur de $S(n)$ (qui est elle-même au moins exponentielle en n). C'est pourquoi nous estimons qu'il est nécessaire d'avoir recourt à des méthodes d'approximation qui de plus ne nécessitent pas d'effectuer des hypothèses sur la structure des partitions recherchées.

L'approche que nous avons choisie est l'apprentissage par renforcement, plus précisément l'apprentissage profond par renforcement. En effet, des algorithmes tels que AlphaZero ou encore MuZero ont montré des capacités de planification nettement supérieures à celles des humains dans des jeux de plateau comme les échecs ou le go par exemple. Nous comptons donc implémenter ces deux algorithmes (plus précisément pour AlphaZero une version modifiée qui est compatible avec les jeux à un joueur) et entraîner des modèles. MuZero utilise un modèle appris alors que AlphaZero utilise un modèle exact. Cela permet à MuZero d'être plus efficace que AlphaZero à durée de prédiction égale si la durée de prédiction du prochain coup reste inférieure à 100 fois celle utilisée au cours de l'entraînement. Étant donné qu'une fois l'algorithme entraîné, on aura relativement peu de contraintes sur la durée d'une prédiction, utiliser AlphaZero peut

sembler plus pertinent. Toutefois, MuZero semble s'entraîner plus rapidement qu'AlphaZero ce qui peut être utile si nous avons des difficultés pour entraîner les modèles. Nous envisageons aussi d'utiliser un autre algorithme dans lequel la tâche du réseau de neurones plus simple, associer à une partition partielle un score, ce qui pourrait être utile si nous rencontrons des problèmes d'entraînement. Pour cette algorithme, on évaluerait toutes les situations par exemples 10 coups à l'avance, puis l'on choisirait le premier coup de la suite de coups qui a conduit au meilleur score. L'objectif du réseau de neurones serait alors d'apprendre cette fonction d'évaluation en effectuant de l'apprentissage par renforcement. Du fait de la taille des partitions, ces approches ne seront probablement pas viables pour $n \geq 7$ couleurs.

Enfin, même si ces méthodes n'aboutissent pas à une amélioration des bornes inférieures, le résultat peut tout de même être intéressant. Par exemple, obtenir des partitions qui possèdent une structure différente de celle des partitions déjà obtenues informatiquement et qui n'est pas aussi régulière que celle des partitions obtenues à l'aide d'un template fournirait des exemples totalement nouveaux et potentiellement très intéressants.