Présentation de l'article de Abbott & Hanson

Weak Schur Numbers

Thibaut Pellerin

27 novembre 2020

Les travaux de Schur, puis de Abbott et Moser permettent l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < \lfloor n!e \rfloor$$

Les travaux de Schur, puis de Abbott et Moser permettent l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < \lfloor n!e \rfloor$$

et, à partir d'un certain rang,

$$f(n) > 89^{\frac{n}{4} - c \ln(n)}$$

où c est une constante.

Abbott et Hanson étudient une généralisation du problème de Schur, où l'équation qui conditionne les partitions n'est plus $x_1 + x_2 = x_3$, mais de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$

Abbott et Hanson étudient une généralisation du problème de Schur, où l'équation qui conditionne les partitions n'est plus $x_1 + x_2 = x_3$, mais de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$

et établissent un théorème à l'énoncé plutôt long, permettant notamment d'obtenir

$$f(n) > c12^{\frac{n}{3}}$$

où c est une constante et f correspond à l'équation $2x_1 + x_2 = x_3$.

Ils étudient également un problème analogue mais avec cette fois plusieurs équations. Une nouvelle formule, dont la démonstration est similaire à celle du théorème précédent, permet d'établir pour le problème de Schur initial

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, f(m+n) \geq (2f(m)+1)f(n) + f(m)$$

puis la nouvelle minoration

$$\boxed{\forall n \geq 4, f(n) \geq c89^{\frac{n}{4}}}$$

où c est une constante.

Une autre généralisation du problème de Schur est étudiée. On ne considère non plus les partitions de $[\![1, p]\!]$, mais celles de $[\![m, p]\!]$.

$f(m, n)$ est le plus grand entier tel que qu'une partition en n ensembles sans somme de $[\![m, m + f(m, n)]\!]$ existe. En particulier, $f(1, n) = f(n) - 1$.

Une autre généralisation du problème de Schur est étudiée. On ne considère non plus les partitions de $[\![1, p]\!]$, mais celles de $[\![m, p]\!]$.

$f(m, n)$ est le plus grand entier tel que qu'une partition en n ensembles sans somme de $[\![m, m + f(m, n)]\!]$ existe. En particulier, $f(1, n) = f(n) - 1$.

En exploitant les inégalités déjà obtenues sur $f(n)$ par Schur, il vient

$$\frac{m3^n - m - 2}{2} \leq f(m, n) \leq m\lfloor n!e \rfloor - m - 1$$

Abbott et Hanson souhaitent obtenir une minoration de la forme $f(m, n) \geq mcK^n$, généralisant ainsi leur résultat sur le problème de Schur à celui de Turán.

Abbott et Hanson souhaitent obtenir une minoration de la forme $f(m,n) \geq mcK^n$, généralisant ainsi leur résultat sur le problème de Schur à celui de Turán.

Pour ce faire, ils considèrent le problème de Schur, d'équation $x_1 + x_2 = x_3$, auquel s'ajoute la condition $x_1 + x_2 + 1 = x_3$. $g(n)$ est le plus grand entier tel qu'une partition en n ensembles de $[\![1, g(n)]\!]$ ne possède aucun sous-ensemble contenant un solution à ce système.

Ils montrent, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(n+m) \geq 2f(m)g(n) + f(m) + g(n)$$

puis

$$f(m,n) \geq mg(n) - 1$$

Ils montrent, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(n+m) \geq 2f(m)g(n) + f(m) + g(n)$$

puis

$$f(m,n) \geq mg(n) - 1$$

ce qui, en utilisant la minoration de $f(n)$ montrée précédemment, fournit

$$\boxed{f(m,n) \geq cm89^{\frac{n}{4}}}$$

où c est une constante.