Métiers de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur

# Les nombres de Schur et de Schur faibles

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella, Arpad Rimmel, Joanna Tomasik (encadrants)

CentraleSupélec, Pôle Projet « Formation à la recherche »

## Un peu d'histoire

- ▶ 1917 : Introduction par Schur des partitions sans somme lors d'une étude du grand théorème de Fermat
- ► 1930 : Introduction de la théorie de Ramsey
- ▶ 1972 : **Inégalités récursives** obtenues par Abbott et Hanson
- ▶ 1990-2020 : Approche numérique (MCTS, SAT, ...)
- ► 2020 : Introduction des **templates** par Rowley, nouvelles inégalités
- Notre contribution : généralisation des templates, nouvelles bornes inférieures

## Définitions et propriétés

Issai Schur a posé le problème suivant :

- Pour  $n \ge 1$  un entier ( = taille du problème)
- $k \ge 1$  un autre entier ( = nombre de couleurs)

Peut-on colorier les entiers de 1 à *n* de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?

Si oui, un tel coloriage est dit sans somme.

ightharpoonup On note S(k) le plus grand entier n vérifiant cette propriété.

Les nombres de Schur faibles sont une variante des nombres de Schur. On se demande : Peut-on colorier les entiers de  ${f 1}$  à  ${m n}$ de sorte que si deux nombres distincts ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?

ightharpoonup On note WS(k) le plus grand entier n vérifiant cette propriété.

Le comportement asymptotique de ces suites est mal connu.

- $c\sqrt[5]{380}^k \leqslant S(k) \leqslant WS(k)$
- Lien avec les nombres de Ramsey  $S(k) \leqslant R_k(3) - 2 \leqslant \left| k! \left( e - \frac{1}{6} \right) \right| - 1$

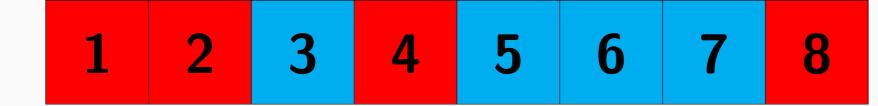
#### Exemples

On a S(3) = 13 et WS(2) = 8

Partition sans-somme à 3 couleurs



Partition faiblement sans-somme à 2 couleurs



## universite **PARIS-SACLAY**





**Templates** 

Partition sans somme construite à l'aide d'un template

	1	2							
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	<b>15</b>	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	<b>35</b>	36	37	38	39	40	41	42

## Forme des inégalités obtenues

► Forme des inégalités pour les nombres de Schur :

$$S(k + 1) \ge aS(k) + b.$$

Une approche précédente avait obtenu a=2S(I)+1 et b = S(I).

► Forme des inégalités pour les nombres de Schur faibles :

$$WS(k+1) \geqslant cS(k) + d.$$

Nous avons obtenu :  $c \ge WS(I) + [WS(I)/2] + 1$ .

## Reformulation en formule booléenne (CNF)

- $> x_i^{(c)} = 1$  si le nombre i est dans la couleur c, 0 sinon.
- $ightharpoonup \operatorname{Col}_i = \bigvee x_i^{(c)} : i \text{ est dans au moins une couleur.}$
- ▶  $\mathbf{Disj}_i = \bigwedge \neg x_i^{(c_1)} \lor \neg x_i^{(c_2)} : i \text{ a au plus une couleur.}$
- ► Som<sub>c</sub> =  $\bigwedge \neg x_i^{(c)} \lor \neg x_i^{(c)} \lor \neg x_{i+i}^{(c)} : c$  est sans somme.

### Résultats

Bornes inférieures pour les nombres de Schur

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Etat de l'art	1*	4*	13*	44*	160*	536	1696	5 286	17 694	60 320
Nos résultats								5 362	17 803	60 948

Bornes inférieures pour les nombres de Schur faibles

Borries IIII	minerieures pour les mombres de semai laibles									
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Etat de l'art	2*	8*	23*	66*	196	642	2 146	6 9 7 6	22 056	70 778
Nos résultats						646			22 536	71 256

\* désigne une valeur exacte

Nous avons aussi obtenu de nouvelles bornes inférieures pour tout  $k \geqslant 11$ .







