Weak Schur Numbers

L'étude des nombres de Schur est un problème de combinatoire à l'énoncé simple formulé il y a 100 ans. L'objectif est d'améliorer les bornes connues pour ces nombres, par des moyens mathématiques ou informatiques.

Les nombres de Schur

Soit n>0 un entier, k>0 un nombre de couleurs,

Le mathématicien Issai Schur se pose le problème suivant:
Peut-on colorier les entiers de 1 à n avec k couleurs tel que si deux nombres sont de la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?
Si ce coloriage existe, il est dit ***sans sommes***.

Par exemple, ce coloriage est sans sommes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Pour k couleurs, on note ***S(k)*** le plus grand entier n tel qu'il existe une partition de 1 à n sans sommes à k couleurs. On appelle S(k) le k-ième ***nombre de Schur***.

Les nombres de Weak Schur

Soit n>0 un entier, k>0 un nombre de couleurs,

Une variante du problème de Schur revient à poser le problème suivant:
Peut-on colorier les entiers de 1 à n avec k couleurs tel que si deux nombres ***différents*** sont de la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?
Si ce coloriage existe, il est dit ***faiblement sans sommes.***

Par exemple, ce coloriage est faiblement sans sommes:

1	2	3	4	5	6	7	8

Pour k couleurs, on note ***WS(k)*** le plus grand entier n tel qu'il existe une partition de 1 à n faiblement sans sommes à k couleurs. On appelle WS(k) le k-ième ***nombre de Schur faible***.

Soit n,m>0, Abbott et Hanson ont montré que:

$$S(n+m) \geq S(n)(2S(m)+1)+S(m)$$

Cette inégalité est montré grâce à une construction qui permet d'obtenir un coloriage sans sommes à n+m couleurs à partir d'un coloriage sans sommes à n couleur et un autre à m couleurs.

On peut légèrement améliorer cette construction en ne partant pas d'un coloriage sans-somme mais d'un coloriage avec des contraintes un peu plus faibles

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

Construction de Abbott et Hanson dans le cas n=2 et m=2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Before Rowley	1	4	13	44	160 [9]	536 [10]	1 680 [10]	5 041 [3]	15 124 [3]	51 120 [3]	172 216 [3]	575 664 [3]
Rowley [7], [11]							1 696	5 286	17 694	60 320	201 696	637 856
Our results									**17 803**	**60 948**	**203 828**	**644 628**

Tableau comprant les bornes inférieures obtenus pour les nombres de Schur

Plusieurs approches ont déjà été développées pour améliorer les bornes inférieures (constructions récursives, exploration par Monte-Carlo, solveur SAT...). Il est possible d'approfondir les pistes déjà existantes, ou d'en trouver de nouvelles !

Le projet recrute ! Si vous êtes intéréssés, inscrivez-vous au pôle projet formation à la recherche.