L'article de Rafilipojaona

Weak Schur numbers

Romain Ageron, Paul Casteras, Thibaut Pellerin, Yann Portella

16 février 2021

CentraleSupélec

Rafilipojaona étudie une forme particulière de partitions, composées d'intervalles **troués**.

- en se limitant à de telles partitions, on réduit considérablement l'espace de recherche
- on peut vérifier facilement si telle partition est faiblement sans somme

Ceci lui permet d'améliorer les bornes inférieures connues, en particulier $WS(7) \geq 1740$.

Rafilipojaona montre tout d'abord une relation analogue à celle de Schur ($S(n+1) \geq 3S(n)+1$) pour Weak Schur :

$$WS(n+1) \geq \frac{5}{2}WS(n)+2$$

A partir d'une partition $A_1, ..., A_n$ de $[1, N]$, il introduit $C_i = A_i \cup (3N+3-A_i)$, et montre que $B_i = C_i \cap [1, \frac{5}{2}N+2]$ est faiblement sans somme. On complétant avec $B_{n+1} = [N+1, 2N+2]$, on obtient une $(n+1)$-partition WS de $[1, \frac{5}{2}N+2]$.

Il définit des intervalles troués de la façon suivante, où $0 \leq m \leq a$:

$$\begin{aligned}
I_m(m,1) &= [m, 2m+1] \setminus \{m+1\} \\
I_m(m,2) &= [m, 2m+2] \setminus \{m+2, 2m+1\} \\
I_m(a,0) &= [a, a+m-1] \\
I_m(a,2) &= [a, a+m+1] \setminus \{a+1, a+m\}
\end{aligned}$$

Par exemple, $I_4(5,2) = \{5, 7, 8, 10\}$.
Ces intervalles sont faiblement sans somme.

Une ensemble de la forme

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_m(a_1, h_1)$$

où $m = a_1 < a_2 < ... < a_n$ est dit *spécial*. L'auteur énonce une CNS pour qu'un tel ensemble soit faiblement sans somme : Pour $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$,

$$(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_i, h_i)) \cap I_m(a_k, h_k) = \emptyset$$

où la somme est faible.
De plus, il décrit "simplement" les sommes faibles entre intervalles troués, ce qui permet de vérifier facilement si un ensemble spécial est faiblement sans somme.

L'idée est ensuite de rechercher des partitions *spéciales*, composées d'ensembles spéciaux faiblement sans somme.

- on part d'une partition spéciale de $[1, N]$
- on étend l'un des ensembles (tout en conservant la structure spéciale)
- on réitère tant que la partition obtenue est sans somme (ce que l'on vérifie facilement grâce aux résultats précédents)

Pour limiter encore plus le nombre de partition à étudier, l'auteur caractérise une n-partition spéciale $A_1, ..., A_n$ par un mot.

On ordonne les différents a utilisés dans les intervalles troués $I_m(a, h)$ qui composent la partition, et on associe un mot écrit sur $[1, n]$: la k-ième lettre est i si le k-ième a est dans l'ensemble A_i.

Un second algorithme consiste à se limiter aux partitions dont le mot associé est un préfixe d'un certain palindrome.

Ces deux algorithme permettent d'obtenir des bornes inférieures jusqu'à $WS(9)$, avec des partitions spéciales, dont certaines présentent une certaine symétrie due à la contrainte par un palindrome.