CONGRÈS JUNIOR PLURIDISCIPLINAIRE

GRADUATE SCHOOL Métiers de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur

université PARIS-SACLAY

Les nombres de Schur et de Schur faibles

Romain Ageron, Paul Castéras, Thibaut Pellerin, Yann Portella,
Arpad Rimmel, Joanna Tomasik (encadrants)
CentraleSupélec, Pôle Projet « Formation à la recherche »

Un peu d'histoire

- 1917 : Introduction par Schur des partitions sans somme lors d'une étude du **grand théorème de Fermat**
- 1930 : Introduction de la **théorie de Ramsey**
- 1972 : **Inégalités récursives** obtenues par Abbott et Hanson
- 1990-2020 : Approche **numérique** (MCTS, SAT, ...)
- 2020 : Introduction des **templates** par Rowley, nouvelles inégalités
- Notre contribution : **généralisation** des templates, **nouvelles bornes inférieures**

Définitions et propriétés

Issai Schur a posé le problème suivant :

- Pour $n \geqslant 1$ un entier (= taille du problème)
- $k \geqslant 1$ un autre entier (= nombre de **couleurs**)

Peut-on colorier les entiers de 1 à n de sorte que si deux nombres ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur ?

Si oui, un tel coloriage est dit **sans somme**.

- On note $S(k)$ le plus grand entier n vérifiant cette propriété.

Les nombres de Schur faibles sont une variante des nombres de Schur. On se demande : Peut-on colorier les entiers de 1 à n de sorte que si deux nombres **distincts** ont la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur ?

- On note $\mathbf{WS}(k)$ le plus grand entier n vérifiant cette propriété.

Le comportement asymptotique de ces suites est mal connu.

- $c\sqrt[5]{380}^{k} \leqslant S(k) \leqslant \mathbf{WS}(k)$
- Lien avec les nombres de Ramsey
  $S(k) \leqslant R_k(3) - 2 \leqslant \left\lfloor k!\left(e - \frac{1}{6}\right)\right\rfloor - 1$

Exemples

On a $S(3) = 13$ et $WS(2) = 8$

Partition sans-somme à 3 couleurs

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Partition *faiblement* sans-somme à 2 couleurs

1	2	3	4	5	6	7	8

Templates

Partition sans somme construite à l'aide d'un template

								1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42

Forme des inégalités obtenues

- Forme des inégalités pour les nombres de Schur :
  $$S(k+l) \geqslant aS(k) + b.$$
  Une approche précédente avait obtenu $a = 2S(l) + 1$ et $b = S(l)$.
- Forme des inégalités pour les nombres de Schur faibles :
  $$\mathbf{WS}(k+l) \geqslant cS(k) + d.$$
  Nous avons obtenu : $c \geqslant \mathbf{WS}(l) + \lceil \mathbf{WS}(l)/2 \rceil + 1$.

Reformulation en formule booléenne (CNF)

- $x_i^{(c)} = 1$ si le nombre i est dans la couleur c, 0 sinon.
- $\mathbf{Col}_i = \bigvee_{c} x_i^{(c)}$: i est dans au moins une couleur.
- $\mathbf{Disj}_i = \bigwedge_{c_1 \neq c_2} \neg x_i^{(c_1)} \vee \neg x_i^{(c_2)}$: i a au plus une couleur.
- $\mathbf{Som}_c = \bigwedge_{i+j \leqslant n} \neg x_i^{(c)} \vee \neg x_j^{(c)} \vee \neg x_{i+j}^{(c)}$: c est sans somme.

Résultats

Bornes inférieures pour les nombres de Schur

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Etat de l'art	1*	4*	13*	44*	160*	536	1 696	5 286	17 694	60 320
Nos résultats								**5 362**	**17 803**	**60 948**

Bornes inférieures pour les nombres de Schur faibles

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Etat de l'art	2*	8*	23*	66*	196	642	2 146	6 976	22 056	70 778
Nos résultats						**646**			**22 536**	**71 256**

* désigne une valeur exacte

Nous avons aussi obtenu de nouvelles bornes inférieures pour tout $k \geqslant 11$.

université PARIS-SACLAY   AgroParisTech   CentraleSupélec   école normale supérieure paris-saclay   INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL ParisTech   université evry   UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN-EN-YVELINES