

# Une amélioration des templates pour les nombres de Ramsey multicolores et les nombres de Schur

Romain Ageron

15 juin 2022

## Résumé

Récemment, l'introduction de constructions basées sur des objets particuliers appelés "templates" a permis d'améliorer plusieurs bornes inférieures pour les nombres Ramsey multicolores, les nombres de Schur et les nombres de Schur faibles. Ce document de travail présente des améliorations apportées au concept de template, notamment une généralisation : les b-templates. Cela conduit à une amélioration des inégalités et bornes inférieures connues pour certains nombre de Ramsey multicolores et certains nombres de Schur.

## 1 Organisation de ce document de travail

La section 2 présente des notations, des définitions, ainsi que des propriétés utiles. La section 3 présente mon approche et mes résultats sur les templates. Elle commence par une explication des différences avec l'approche de Rowley. Elle fait aussi office de revue de l'état de l'art en précisant les résultats de Rowley en fin de section. La section 4 introduit les b-templates, une généralisation des templates qui est utilisée dans la plupart des améliorations présentées. La section 5 compare les nouvelles inégalités et bornes inférieures à celles connues auparavant.

## 2 Définitions et propriétés

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $K_n$  le graphe complet d'ordre  $n$ .

**Définition 2.1** (Coloriage de Ramsey). Soit  $n \in \mathbb{N}$ , la taille du graphe, et soit  $r \in \mathbb{N}$ , le nombre de couleurs. Soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . On appelle coloriage de Ramsey tout coloriage des arêtes de  $K_n$  avec  $r$  couleurs tel que pour toute couleur  $c \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , le coloriage ne contient pas de sous-graphe complet  $K_{k_c}$  monochromatique en la couleur  $c$ .  $R(k_1, \dots, k_r; n)$  désigne l'un (quelconque) de ces coloriages et l'ensemble de ces coloriages est noté  $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_r; n)$ . Si tous les  $k_c$  sont égaux à un  $k$ , on utilise également les notations  $R_r(k; n)$  et  $\mathcal{R}_r(k; n)$ .

**Théorème 2.2** (Théorème de Ramsey fini [1]). Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . Alors il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_r; n) = \emptyset$ .

Le théorème 2.2 justifie la définition suivante.

**Définition 2.3** (Nombre de Ramsey). Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . On définit le nombre de Ramsey  $R(k_1, \dots, k_r)$  comme le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_r; n) = \emptyset$ . Si tous les  $k_c$  sont égaux à un  $k$ , ce nombre est également noté  $R_r(k)$ .

Contrairement aux nombres de Schur, les nombres de Ramsey désignent le plus petit entier tel qu'il n'existe pas de coloriage, et non pas la taille maximale d'un coloriage.

**Définition 2.4** (Coloriage de Ramsey linéaire). *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . On indexe les sommets de  $K_n$  avec les entiers de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On appelle coloriage de Ramsey linéaire tout  $R(k_1, \dots, k_r; n)$  pour lequel la couleur de l'arête  $(u, v)$  dépend uniquement de  $|u - v|$ . Un  $L(k_1, \dots, k_r; n-1)$  désigne l'un (quelconque) de ces coloriages et l'ensemble de ces coloriages est noté  $\mathcal{L}(k_1, \dots, k_r; n-1)$ . Si tous les  $k_c$  sont égaux à un  $k$ , on utilise également les notations  $L_r(k; n-1)$  et  $\mathcal{L}_r(k; n-1)$ .*

Le théorème 2.2 justifie la définition suivante.

**Définition 2.5** (Nombre de Ramsey linéaire). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . On définit le nombre de Ramsey linéaire  $L(k_1, \dots, k_r)$  comme le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{L}(k_1, \dots, k_r; n-1) = \emptyset$ . Si tous les  $k_c$  sont égaux à un  $k$ , ce nombre est également noté  $L_r(k)$ .*

**Proposition 2.6.**  $\forall r \in \mathbb{N}, (k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}, L(k_1, \dots, k_r) \leq R(k_1, \dots, k_r)$

Un  $L(k_1, \dots, k_r; n)$  induit un coloriage de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Réciproquement, tout coloriage de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  correspond à un coloriage linéaire de  $K_n$ . Le théorème suivant porte sur le lien entre un coloriage sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et les nombres de cliques du coloriage linéaire de  $K_{n+1}$  associé.

**Théorème 2.7** (Lien avec les coloriages sans-sommes [2]). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \mathbb{N}^{*r}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\gamma$  un coloriage de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $r$  couleurs. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *dans le coloriage linéaire de  $K_{n+1}$  associé à  $\gamma$ , la couleur  $c$  contient un sous-graphe complet de taille  $k_c$*
- (ii) *il existe un sous-ensemble  $S$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  monochromatique de couleur  $c$  et de cardinal  $k_c - 1$  vérifiant : pour tous  $x, y \in S$  distincts,  $\gamma(|x - y|) = c$*

Dans la suite, on utilise également  $L(k_1, \dots, k_r; n)$  pour désigner un coloriage de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  associé à un  $L(k_1, \dots, k_r; n)$ .

Le théorème 2.7 donne le corollaire suivant.

**Corollaire 2.8** (Lien avec les nombres de Schur).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = L_n(3) - 2 \leq R_n(3) - 2$$

### 3 Templates

Dans cette section, j'utilise des notations et définitions différentes de celle de Rowley [3]. Notamment, les templates et constructions sont introduits différemment et sont manipulés en termes de partitions et non de graphes. De plus la couleur spéciale est désignée de manière abstraite par un "t" au lieu d'un "3" qui pourrait être confondu avec l'un des  $k_c$ . Par ailleurs, je définis un template directement comme une partition pour laquelle la construction fonctionne. Enfin, j'utilise une formulation différente de la condition sur les templates.

**Définition 3.1** (Permutation partielle). *Pour  $S$  un ensemble quelconque et  $a \in \mathbb{N}$  un entier naturel, on appelle permutation partielle à  $a$  éléments de  $S$  tout  $a$ -uplet d'éléments de  $S$  deux à deux distincts. L'ensemble des permutations partielles à  $a$  éléments de  $S$  est noté  $\mathfrak{S}_a(S)$ , c'est-à-dire :  $\mathfrak{S}_a(S) = \{(x_i)_{1 \leq i \leq a} : \forall (i, j) \in \llbracket 1, a \rrbracket^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j\}$ .*

Dans cette section, pour un entier  $n$  (en pratique sous-entendu), on note  $\pi$  l'application qui à un entier  $x \in \mathbb{Z}$  associe son unique représentant modulo  $n$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Definition 3.2** (Reformulation des templates). *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Un template de taille  $n$  à  $r+1$  couleur, est défini comme une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en  $r+1$  sous-ensembles  $A_1, \dots, A_{r+1}$  vérifiant :*

- (i)  $n \in A_{r+1}$
  - (ii)  $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, x + y \notin A_{r+1},$
  - (iii)  $\forall c \in \llbracket 1, r \rrbracket \forall x \in \mathfrak{S}_{k_c-1}(A_c), \exists (i, j) \in \llbracket 1, k_c - 1 \rrbracket^2, i < j \text{ et } \pi(x_j - x_i) \notin A_c.$
- $T(k_1, \dots, k_r, t; n)$  désigne l'un (quelconque) de ces templates et l'ensemble de ces templates est noté  $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$ . La couleur  $r+1$  joue un rôle particulier et elle est appelée "couleur template".

La couleur  $r+1$  n'est pas nécessairement la dernière par ordre d'apparition, la désignation de  $r+1$  comme couleur template signalée par  $t$  est une convention qui allège les notations en évitant de devoir écrire  $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_{i-1}, t, k_{i+1}, \dots, k_r; n)$  par exemple.

Dans le cas où tous les  $k_c$  sont égaux à 3, on retrouve la définition des S-templates.

**Definition 3.3** (Coloriage par défaut). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $H$  un coloriage de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. On pose  $d = \min H^{-1}(\{r+1\}) - 1$ . On définit alors un coloriage  $\text{Default}(H)$ , dit par défaut, associé au coloriage  $H$  :  $\text{Default}(H) := H|_{\llbracket 1, d \rrbracket}$ .*

La méthode de construction suivante permet, à partir d'un template et d'un coloriage de Ramsey linéaire, de construire un nouveau coloriage de Ramsey linéaire (théorème 3.7).

**Definition 3.4** (Méthode de construction). *Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$  les tailles des coloriages. Soit  $(r, s) \in \mathbb{N}^{*2}$ . On se donne un coloriage de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs (appelée  $H$ , pour horizontal), et un coloriage de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  à  $s$  couleurs (appelée  $V$ , pour vertical).*

*Pour un  $d \in \mathbb{N}$ , on se donne aussi un coloriage dit final  $F$  de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Il est parfois utile de définir  $F$  au cas par cas, mais on peut aussi lui attribuer une valeur par défaut  $F = \text{Default}(H)$ . Dans le cas où  $F$  n'est pas utilisé, on note  $F = \emptyset$  l'application vide.*

*On construit alors un coloriage  $\gamma$  de  $\llbracket 1, n \times p + d \rrbracket$  à  $r+s$  couleurs comme suit. De manière informelle, on répète  $p$  fois le motif formé l'enchaînement des couleurs dans  $H$  en remplaçant pour la  $i$ -ème itération la couleur spéciale par  $r+V(i)$  puis on ajoute à la fin le motif formé l'enchaînement des couleurs dans  $F$ . Formellement :*

$$\gamma : \llbracket 1, n \times p + d \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, r + s \rrbracket$$

$$x \longmapsto \begin{cases} H(\pi(x)) & \text{si } x \leq n \times p \text{ et } H(\pi(x)) \neq r+1 \\ r + V\left(\left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil\right) & \text{si } x \leq n \times p \text{ et } H(\pi(x)) = r+1 \\ F(x - n \times p) & \text{si } x > n \times p \end{cases}$$

FIGURE 1 – Construction d'un  $L_4(3; 40)$  avec  $H = T(3, 3, t; 9)$ ,  $V = L_2(3; 4)$  et  $F = \text{Default}(H)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40					

Pour un ensemble  $B \subset \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_k(B)$  l'ensemble des parties à  $k$  éléments de  $B$ . Pour  $x \in \mathcal{P}_k(B)$ , on note  $x = \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Lorsque l'on cherche à construire un  $L(k_1, \dots, k_r; n)$  à l'aide de la construction, le coloriage  $F$  est moins contraint que le coloriage  $H$  puisque les nombres coloriés par  $F$  interagissent seulement avec des nombres plus petits qu'eux, ce qui n'est pas le cas pour les nombres coloriés par  $H$ . C'est ce que caractérise la définition suivante.

**Définition 3.5** (Compatibilité avec un template). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$  un template et soit  $A_1, \dots, A_{r+1}$  la partition associée. Soit  $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $F$  un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs et soit  $B_1, \dots, B_{r+1}$  la partition associée. Le coloriage  $F$  est dit compatible avec le template  $T$  si il vérifie :*

- (i)  $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, \pi(x+y) \leq d \implies \pi(x+y) \notin B_{r+1}$
- (ii)  $\forall (x, y) \in A_{r+1} \times B_{r+1}, x+y \leq d \implies x+y \notin B_{r+1}$
- (iii)  $\forall c \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, k_c - 1 \rrbracket, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathcal{P}_k(B_c), \forall (y_i)_{1 \leq i \leq k_c - k - 1} \in \mathfrak{S}_{k_c - k - 1}(A_c),$   

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, |x_i - x_j| \notin A_c, \\ \text{ou} \quad \exists (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, k_c - k - 1 \rrbracket, x_i \geq y_j \text{ et } x_i - y_j \notin A_c \text{ et } x_i - y_j \notin B_c, \\ \exists (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, k_c - k - 1 \rrbracket, x_i \leq y_j \text{ et } \pi(x_i - y_j) \notin A_c, \\ \exists (i, j) \in \llbracket 1, k_c - k - 1 \rrbracket^2, i < j \text{ et } \pi(y_j - y_i) \notin A_c. \end{array} \right.$$

**Proposition 3.6** (Compatibilité de la valeur par défaut). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$  un template. Alors  $T$  et  $\text{Default}(T)$  sont compatibles.*

**Théorème 3.7** (Construction de coloriages linéaires). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $H$  un coloriage de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Soit  $d \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et soit  $F$  un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $H \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$  et  $F$  est compatible avec  $H$ .
- (ii)  $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall l \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s, \forall V \in \mathcal{L}(l_1, \dots, l_s; p), \text{Cons}(H, V, F) \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s; n \times p + d)$

Rowley évoque seulement (i)  $\implies$  (ii) mais pas (ii)  $\implies$  (i) qui montre l'optimalité des conditions dans la définition des templates ainsi que celle de la définition de compatibilité. La construction de Rowley comprend uniquement le coloriage finale par défaut, l'introduction du coloriage final variable et la notion de compatibilité sont nouvelles. Cela correspond à une extension aux templates pour les nombres de Ramsey du raffinement sur la dernière ligne pour les S-templates.

Le théorème 3.7 montre l'inégalité suivante.

**Corollaire 3.8** (Inégalités pour les nombres de Ramsey linéaires). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $s \in \mathbb{N}$  et soit  $(l_c)_{1 \leq c \leq s} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s$ . On pose  $a = \max\{p \in \mathbb{N}^* : \mathcal{T}(l_1, \dots, l_s, t; p) \neq \emptyset\}$ . On note  $d \in \mathbb{N}$  la taille maximale d'un coloriage  $F$  tel qu'il existe  $T \in \mathcal{T}(l_1, \dots, l_s, t; a)$  tel que  $F$  est compatible avec  $T$ . Alors  $L(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s) - 2 \geq a(L(k_1, \dots, k_r) - 2) + d$ .*

Le théorème 3.7 consistue une généralisation de l'inégalité  $S(n+p) \geq S(n)(2S(p)+1) + S(p)$  montrée dans [2] et étendue aux nombres de Ramsey linéaires dans [4]. Cette construction fournit des exemples de templates.

**Proposition 3.9.** *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{L}(k_1, \dots, k_r; n) \neq \emptyset$ . Alors  $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; 2n+1) \neq \emptyset$ .*

La construction s'applique aussi aux templates (non évoqué par Rowley).

**Proposition 3.10** (Construction de templates). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $s \in \mathbb{N}$  et soit  $(l_c)_{1 \leq c \leq s} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s$ . Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ . Soit  $H \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$  et soit  $V \in \mathcal{T}(l_1, \dots, l_s, t; p)$ . Alors on a  $\text{Cons}(H, V, \emptyset) \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s, t; n \times p)$ .*

**Proposition 3.11** (Compatibilité et construction de templates). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $s \in \mathbb{N}$  et soit  $(l_c)_{1 \leq c \leq s} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s$ . Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ . Soit  $H \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; n)$  et soit  $V \in \mathcal{T}(l_1, \dots, l_s, t; p)$ . Soit  $F_H$  un coloriage compatible avec  $H$  et soit  $F_V$  un coloriage compatible avec  $V$ . Alors  $\text{Cons}(H, F_V, F_H)$  est compatible avec  $\text{Cons}(H, V, \emptyset)$ .*

Les deux propositions précédentes ainsi que leur réciproques forment un équivalent du théorème 3.7 pour les templates.

## 4 $b$ -Templates

Dans cette section, on introduit les  $b$ -templates. Les templates présentés dans la section 4 vont apparaître comme un cas particulier des  $b$ -templates puisqu'ils correspondent au cas  $b = 0$ .

### 4.1 Définitions

On commence par décrire  $TS_{b,k}$ , un ensemble particulier de  $k$ -tuples qui sera utilisé dans la définition des  $b$ -templates.

**Définition 4.1** (Arbre associé à un tuple). *Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ , soit  $b \in \mathbb{N}$ . A chaque tuple d'entiers, on associe un arbre de manière récursive :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \text{Tree}(x) = x, \\ \forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}^k, \left\{ \begin{array}{ll} \text{Tree}(x) = (x_1, \text{Tree}(x_2, \dots, x_k)) & \text{si } x_2 - x_1 > b, \\ \text{Tree}(x) = (x_1, \text{Tree}(x_2, \dots, x_k), \text{Tree}(x_2 + a, \dots, x_k)) & \text{si } 0 \leq x_2 - x_1 \leq b, \\ \text{Tree}(x) = \text{Tree}\left(x_1, x_2 + a \left\lceil \frac{x_1 - x_2}{a} \right\rceil, x_3, \dots, x_k\right) & \text{si } x_2 < x_1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour un arbre  $\text{Tree}(x)$ , on note  $\text{TreeSet}(x)$  l'ensemble des tuples d'entiers que l'on peut construire en collectant les labels au cours d'une descente de cet arbre.

**Définition 4.2** (Ensembles  $S_{b,k}(A)$  et  $TS_{b,k}(A)$ ). *Soit  $A \subset \mathbb{N}^*$ , soit  $b \in \mathbb{N}$  et soit  $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ . On note  $S_{b,k}(A)$  l'ensemble de  $k$ -tuples à valeurs distinctes dans  $A$  et dont les éléments de  $\llbracket 1, b \rrbracket$  sont situés au début et apparaissent dans l'ordre croissant :*

$S_{b,k}(A) = \{x \in \mathfrak{S}_k(A) : \forall i \in \llbracket 2, k \rrbracket, x_i \leq b \implies x_i \geq x_{i-1}\}$ . On définit alors un ensemble  $TS_{b,k}(A)$  de  $k$ -tuples :  $TS_{b,k}(A) = \bigcup_{x \in S_{b,k}(A)} \text{TreeSet}(x)$ .

On définit aussi un opérateur de projection de  $\mathbb{Z}$  vers  $\llbracket 1, a+b \rrbracket$ .

**Definition 4.3** (Projection  $\pi_{a,b}$ ). Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . On définit une projection, noté  $\pi_{a,b}$  ou plus simplement  $\pi$  si il n'y a pas d'ambiguïté, sur  $\llbracket 1, a+b \rrbracket$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \pi_{a,b} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \llbracket 1, a+b \rrbracket \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq b \\ (x \bmod a) + \mathbf{1}_{\llbracket 0, b \rrbracket}(x \bmod a) & \text{si } x > b \end{cases} \end{aligned}$$

On peut maintenant définir les  $b$ -templates.

**Definition 4.4** ( $b$ -Templates). Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . Un  $b$ -template de largeur  $a$  à  $r+1$  couleurs, est défini comme une partition de  $\llbracket 1, a+b \rrbracket$  en  $r+1$  sous-ensembles  $A_1, \dots, A_{r+1}$  vérifiant :

- (i)  $a \in A_{r+1}$ ,
  - (ii)  $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, x+y \notin \llbracket a+b+1, 2a+b \rrbracket \implies \pi(x+y) \notin A_{r+1}$ ,
  - (iii)  $\forall c \in \llbracket 1, c \rrbracket, \forall x \in TS_{b, k_c-1}(A_c), \exists (i, j) \in \llbracket 1, k_c-1 \rrbracket^2, i < j$  et  $\pi(x_j - x_i) \notin A_c$ .
- $T_b(k_1, \dots, k_r, t; a)$  désigne l'un (quelconque) de ces  $b$ -templates et l'ensemble de ces  $b$ -templates est noté  $\mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_r, t; a)$ . La couleur  $r+1$  joue un rôle particulier et elle est appelée "couleur template".

La couleur  $r+1$  n'est pas nécessairement la dernière par ordre d'apparition, la désignation de  $r+1$  comme couleur template signalée par  $t$  est une convention qui allège les notations en évitant de devoir écrire  $\mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_{i-1}, t, k_{i+1}, \dots, k_r; n)$  par exemple.

Dans le cas où tous les  $k_c$  sont égaux à 3, ces  $b$ -templates constituent des  $b$ -S-templates applicables pour les nombres de Schur similaires au  $b$ -WS-templates pour les nombres de Schur faibles définis dans [5].

La construction présentée dans [4] utilise des coloriage linéaires afin de construire des 0-templates. La proposition suivante présente cette construction sous l'angle des  $b$ -templates.

**Proposition 4.5.** Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{L}(k_1, \dots, k_r; n) \neq \emptyset$  et on se donne  $\gamma$  un tel coloriage. On définit un nouveau coloriage  $T$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned} T : \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, r+1 \rrbracket \\ x &\longmapsto \begin{cases} \gamma(x) & \text{si } x \leq n \\ r+1 & \text{si } x > n \end{cases} \end{aligned}$$

Alors  $T \in \mathcal{T}_0(k_1, \dots, k_r, t; 2n+1)$ .

**Proposition 4.6** (Lien avec les templates). Soit  $r \in \mathbb{N}$ , soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$  et soit  $a \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r, t; a) = \mathcal{T}_0(k_1, \dots, k_r, t; a).$$

**Proposition 4.7.** Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . Alors  $T_b(k_1, \dots, k_r, t; a) \subset L(k_1, \dots, k_r, 3; a+b)$ .

**Definition 4.8** (Coloriage par défaut). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $b \in \mathbb{N}$  et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $H$  un coloriage de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $r + 1$  couleurs. On pose  $d = \min(H^{-1}(\{r + 1\}) \setminus \llbracket 1, b \rrbracket) - b - 1$ . On définit alors un coloriage  $\text{Default}_b(H)$ , dit par défaut, associé au coloriage  $H$  :

$$\begin{aligned} \text{Default}_b(H) : \quad \llbracket 1, d \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, r + 1 \rrbracket \\ x &\longmapsto H(x + b) \end{aligned}$$

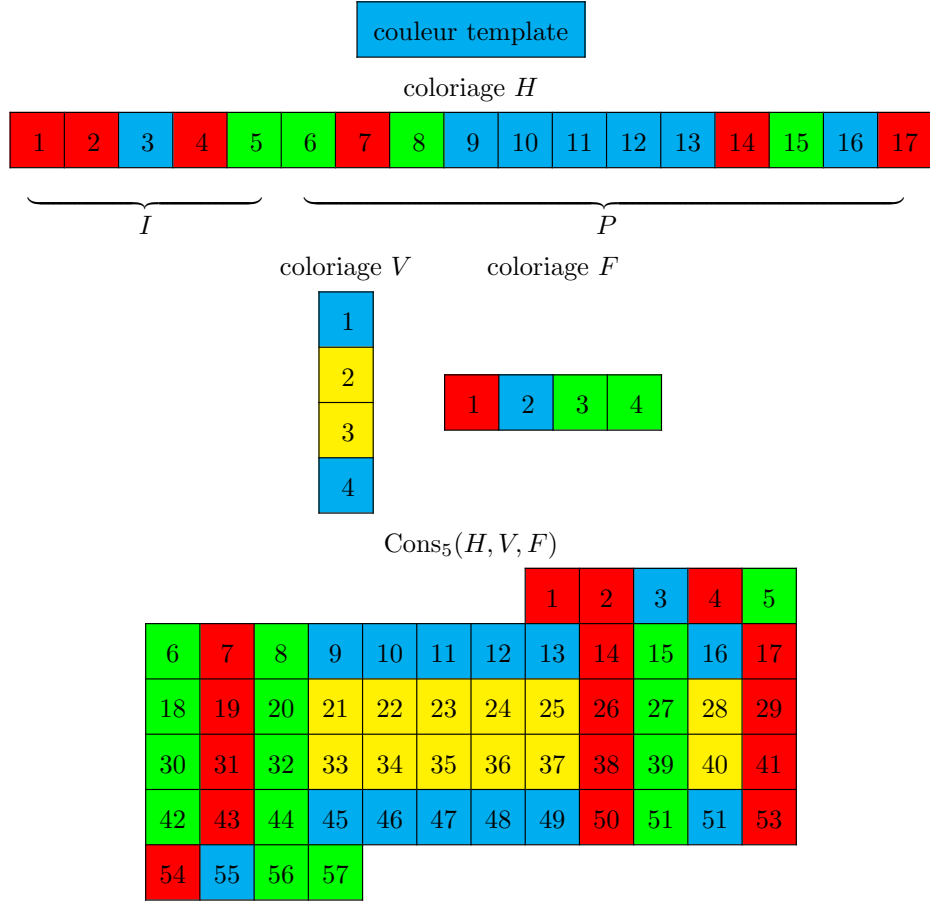
**Definition 4.9** (Méthode de construction). Soit  $(a, p) \in \mathbb{N}^{*2}$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . Soit  $(r, s) \in \mathbb{N}^{*2}$ . On se donne un coloriage de  $\llbracket 1, a + b \rrbracket$  à  $r + 1$  couleurs (appelée  $H$ , pour horizontal), et un coloriage de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  à  $s$  couleurs (appelée  $V$ , pour vertical).

Pour un  $d \in \mathbb{N}$ , on se donne aussi un coloriage dit final  $F$  de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r + 1$  couleurs. Il est parfois utile de définir  $F$  au cas par cas, mais on peut aussi lui attribuer une valeur par défaut  $F = \text{Default}_b(H)$ . Dans le cas où  $F$  n'est pas utilisé, on note  $F = \emptyset$  l'application vide.

On construit alors un coloriage  $\gamma$  de  $\llbracket 1, a \times p + b + d \rrbracket$  à  $r + s$  couleurs comme suit. De manière informelle, on commence par utiliser le coloriage initial  $I := H|_{\llbracket 1, b \rrbracket}$ , puis on répète  $p$  fois le pattern  $P := H|_{\llbracket b+1, a+b \rrbracket}$  en remplaçant pour la  $i$ -ème itération la couleur spéciale par  $r + \mathcal{V}(i)$ , et finalement on ajoute le motif formé l'enchaînement des couleurs dans  $\mathcal{F}$ . Formellement :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \llbracket 1, a \times p + b + d \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, r + s \rrbracket \\ x &\longmapsto \begin{cases} H(x) & \text{si } x \leq b \\ H(\pi(x)) & \text{si } b + 1 \leq x \leq a \times p + b \text{ et } H(\pi(x)) \neq r + 1 \\ r + V\left(\left\lceil \frac{x - b}{a} \right\rceil\right) & \text{si } b + 1 \leq x \leq a \times p + b \text{ et } H(\pi(x)) = r + 1 \\ F(x - a \times p - b) & \text{si } x \geq a \times p + b + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

FIGURE 2 – Exemple de construction avec  $b = 5$



**Definition 4.10** (Compatibilité avec un  $b$ -template). Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ , soit  $b \in \mathbb{N}$  et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $T \in \mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_r; a)$  un  $b$ -template et soit  $A_1, \dots, A_{r+1}$  la partition associée. Soit  $d \in \llbracket 1, a \rrbracket$ . Soit  $F$  un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs et soit  $B_1, \dots, B_{r+1}$  la partition associée. Le coloriage  $F$  est dit compatible avec le coloriage  $T$  si il vérifie :

- (i)  $\forall (x, y) \in A_{r+1}^2, (x + y > b \text{ et } \pi(x + y) \leq d) \implies \pi(x + y) \notin B_{r+1}$
- (ii)  $\forall (x, y) \in A_{r+1} \times B_{r+1}, x + y \leq d \implies x + y \notin B_{r+1}$
- (iii)  $\forall c \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, k_c - 1 \rrbracket,$   

$$\begin{cases} \exists (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, |x_i - x_j| \notin A_c, \\ \text{ou } \text{TODO} \\ \exists (i, j) \in \llbracket 1, k_c - k - 1 \rrbracket^2, i < j \text{ et } \pi(y_j - y_i) \notin A_c. \end{cases}$$

## 4.2 Propriétés

On a une caractérisation similaire à celle donnée dans [3] pour les sf-templates.



**Proposition 4.11** (Condition suffisante pour les templates). *Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ , soit  $b \in \mathbb{N}$  et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $T$  un coloriage de  $\llbracket 1, a+b \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Soit  $d \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket$  et soit  $F$  un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Soit  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$  tel que  $n \geq \max_{1 \leq c \leq r} k_c - 1$ . Soit  $s \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(l_c)_{1 \leq c \leq s} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s$ . Soit enfin  $\gamma \in \mathcal{L}(l_1, \dots, l_s; n)$  tel qu'il existe une couleur  $c \in \llbracket 1, s \rrbracket$  et un sous-ensemble  $S$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  monochromatique de couleur  $c$  et de cardinal  $k_c - 2$  vérifiant pour tous  $x, y \in S$  distincts,  $\gamma(|x - y|) = c$ . Supposons que  $\text{Cons}_b(T, \gamma, F) \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s; an + b + d)$ . Alors  $T \in \mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_r, t; a)$  et  $F$  est compatible avec  $T$ .*

**Proposition 4.12** (Compatibilité de la valeur par défaut). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . Soit  $T \in \mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_r, t; a)$  un  $b$ -template. Alors  $T$  et  $\text{Default}_b(T)$  sont compatibles.*

**Théorème 4.13** (Construction de coloriages linéaires). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et soit  $b \in \mathbb{N}$ . Soit  $H$  un coloriage de  $\llbracket 1, a+b \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Soit  $d \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$  et soit  $F$  un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $r+1$  couleurs. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $H \in \mathcal{T}_b(k_1, \dots, k_r, t; a)$  et  $F$  est compatible avec  $H$ .
- (ii)  $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall l \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s, \forall V \in \mathcal{L}(l_1, \dots, l_s; p), \text{Cons}_b(H, V, F) \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s; a \times p + b + d)$

**Corollaire 4.14** (Inégalités pour les nombres de Ramsey linéaires). *Soit  $r \in \mathbb{N}$  et soit  $(k_c)_{1 \leq c \leq r} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^r$ . Soit  $s \in \mathbb{N}$  et soit  $(l_c)_{1 \leq c \leq s} \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket^s$ . Soient  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}$  tels que  $\mathcal{T}_b(l_1, \dots, l_s, t; a) \neq \emptyset$ , et on fixe  $T$  un tel  $b$ -template. Soit  $d \in \llbracket 1, a \rrbracket$  tel qu'il existe un coloriage de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  à  $s+1$  couleurs compatible avec  $T$ . Alors  $L(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s) - 2 \geq a(L(k_1, \dots, k_r) - 2) + b + d$ .*

**Lemme 4.15** (associativité de la construction). *TODO*

**Théorème 4.16** (Construction de  $b$ -templates). *TODO*

## 5 Nouvelles inégalités et bornes inférieures

### 5.1 Nombres de Schur

L'existence d'un 2-S-template de largeur 10 à 3 couleurs non exprimable en tant que S-template fournit une nouvelle inégalité. L'ancienne inégalité était  $S(n+2) \geq 9S(n) + 4$ .

**Proposition 5.1.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n+2) \geq 10S(n) + 2$$

Cette inégalité fournit les nouvelles bornes inférieures suivantes :  $S(8) \geq 5362$  et  $S(13) \geq 2038282$  (contre respectivement 5286 dans [3] et 2011290 dans [5]). Plus généralement, cette inégalité améliore les bornes inférieures des  $S(5k+3), \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

### 5.2 Nombres de Ramsey

On obtient des inégalités de la forme  $L(k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_{r+s}) - 2 \geq a(L(k_1, \dots, k_r) - 2) + d$ . Les " $k_i$  ajoutés" désignent  $k_{r+1}, \dots, k_{r+s}$ . Dans le tableau ci-dessous,  $b$ -template désigne un  $b$ -template non exprimable en tant que template. Les anciennes valeurs viennent de [6].

$k_i$ ajoutés	ancien (a, d)	nouveau (a, d)	type de template	coloriage final
3, 3	9, 4	10, 2	$b$ -template	défaut
3, 4	18, 7	19, 2	$b$ -template	défaut
3, 5	30, 12	31, 3	$b$ -template	spécifique
4, 5	51, 21	55, 23	template	défaut

En ce qui concerne les bornes inférieures, on a  $R_8(3) \geq 5364$  et  $R_{13}(3) \geq 2038284$  (contre respectivement 5288 dans [3] et 2011292 dans [5]), et plus généralement une amélioration pour les  $R_{5k+3}(3), \forall k \in \mathbb{N}^*$ . On a aussi  $R(3, 4, 5, 5) \geq 764$  (contre 729 dans [6]). Il existe de nombreuses inégalités récursives et constructions pour les nombres de Ramsey. Afin de savoir quelles bornes précisément ont été améliorées, il faudrait recenser chacune des bornes inférieures et des méthodes existantes puis calculer toutes les bornes et voir si certaines sont améliorées. Il est probable que les inégalités de cette section permettent d'améliorer les bornes inférieures pour d'autres nombres de Ramsey mais je n'ai pas effectué cette vérification.

## Références

- [1] F. P. Ramsey, "On a problem of formal logic," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-30, no. 1, pp. 264–286, 1930. [Online]. Available : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-30.1.264>
- [2] H. L. Abbott and D. Hanson, "A problem of Schur and its generalizations," *Acta Arithmetica*, 1972. [Online]. Available : <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa20/aa2028.pdf>
- [3] F. Rowley, "A generalised linear Ramsey graph construction," *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 81, no. 2, pp. 245–256, 2021. [Online]. Available : <https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/81/ajc-v81.p245.pdf>
- [4] —, "Constructive lower bounds for Ramsey numbers from linear graphs," *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 68, no. 3, pp. 385–395, 2017. [Online]. Available : <https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/68/ajc-v68.p385.pdf>
- [5] R. Ageron, P. Casteras, T. Pellerin, Y. Portella, A. Rimmel, and J. Tomasik, "New lower bounds for schur and weak schur numbers," 2021. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/2112.03175>
- [6] F. Rowley, "Improved lower bounds for multicolour ramsey numbers using sat-solvers," 2022. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/2203.13476>