

# Weak Schur Numbers

Membres du groupe: Romain Ageron (romain.ageron@student-cs.fr), Thibaut Pellerin (thibaut.pellerin@student-cs.fr), Yann Portella (yann.portella@student-cs.fr), Paul Castéras (paul.casteras@student-cs.fr)  
Encadrants: Joanna Tomasik (joanna.tomasik@centralesupelec.fr), Arpad Rimmel (arpad.rimmel@centralesupelec.fr)

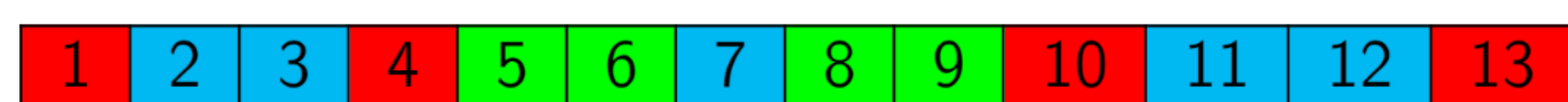
L'étude des nombres de Schur est un problème de combinatoire à l'énoncé simple formulé il y a 100 ans. L'objectif est d'améliorer les bornes connues pour ces nombres, par des moyens mathématiques ou informatiques.

## Les nombres de Schur

Soit  $n > 0$  un entier,  $k > 0$  un nombre de couleurs,

Peut-on colorier les entiers de 1 à  $n$  avec  $k$  couleurs tel que si deux nombres sont de la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?  
Si ce coloriage existe, il est dit **sans sommes**.

Par exemple, ce coloriage est sans sommes:



Pour  $k$  couleurs, on note  $S(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'il existe une partition de 1 à  $n$  sans sommes à  $k$  couleurs. On appelle  $S(k)$  le  $k$ -ième **nombre de Schur**.

## Les nombres de Weak Schur

Soit  $n > 0$  un entier,  $k > 0$  un nombre de couleurs,

Peut-on colorier les entiers de 1 à  $n$  avec  $k$  couleurs tel que si deux nombres **différents** sont de la même couleur, leur somme n'est pas de cette couleur?  
Si ce coloriage existe, il est dit **faiblement sans sommes**.

Par exemple, ce coloriage est faiblement sans sommes:



Pour  $k$  couleurs, on note  $WS(k)$  le plus grand entier  $n$  tel qu'il existe une partition de 1 à  $n$  faiblement sans sommes à  $k$  couleurs. On appelle  $WS(k)$  le  $k$ -ième **nombre de Schur faible**.

Soit  $n, m > 0$ , Abbott et Hanson ont montré que:

$$S(n+m) \geq S(n)(2S(m)+1)+S(m)$$



Construction de Abbott et Hanson dans le cas  $n=2$  et  $m=2$

| $n$                 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5          | 6           | 7             | 8            | 9             | 10            | 11             | 12             |
|---------------------|---|---|----|----|------------|-------------|---------------|--------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| Before Rowley       | 1 | 4 | 13 | 44 | 160<br>[9] | 536<br>[10] | 1 680<br>[10] | 5 041<br>[3] | 15 124<br>[3] | 51 120<br>[3] | 172 216<br>[3] | 575 664<br>[3] |
| Rowley<br>[7], [11] |   |   |    |    |            |             | 1 696         | 5 286        | 17 694        | 60 320        | 201 696        | 637 856        |
| Our results         |   |   |    |    |            |             |               |              | 17 803        | 60 948        | 203 828        | 644 628        |

Tableau comprenant les bornes inférieures obtenus pour les nombres de Schur

Le projet recrute ! Si vous êtes intéressés, inscrivez-vous au pôle projet formation à la recherche.

