IE325K　作業研究 (上)

個案研究：範例二 生產排程問題

組別：第十組
組員：10957260 蘇慧誼、11024303 許家騰、11024333 邱寶樟、
11024360 陳倬恩、11039104 張如葳

一、生產排程問題介紹

1.1 定義

在製造過程中安排生產活動和資源的計劃，以確保生產能夠按時完成，並且在最有效率的情況下運作。

1.2 目的

生產排程的主要目的在於有效地管理生產製造過程，藉由工作順序及機台分配達到高效率，並在有限資源中，降低生產成本提高企業的經濟效益和競爭力。

1.3 流程

收集需求信息後，製定生產計劃，再分配資源，接著建立生產排程，監控生產進度並隨時調整優化排程。

1.4 文獻介紹

文獻 1

問題描述：林宸毅(2016)文獻中欲討論的排程問題為情境混合流線式生產，同時以時間為基礎的具中斷點學習效應。

目的：最小化工作總延遲時間

情境混合流線式生產：

1. 等效平行機台(identical parallel machines)
2. 等比率平行機台(uniform/proportional parallel machines)
3. 不相關平行機台(unrelated parallel machines)

應用：整數規劃(integer programming)、派工法則(dispatching rule)

文獻 2

問題描述：林坤賢(2020)文獻中探討的問題為 n 項獨立工件在兩階段或單階段流程環境中加工，而加工環境為 m 台等效平行機台，工件會須兩階段加工皆經由兩種模具加工，模具的使用影響作業環境的完工時間。

目的：最小化總完工時間。

迴流式生產：有別於傳統式生產，迴流式生產裡，工件可能被重複拜訪機台一次以上，此類型生產經常出現在半導體產業。

限制式：

1. 每項作業只能安排在一台機台上操作
2. 當作業有兩項操作時，不得在同一時間被操作

應用：整數規劃、分支界線法

二、數學規劃模型

2.1 參數定義

l：產線

p：產品

d：生產天數

PD：產品於規劃的生產週期內，可執行生產的天數上限

PC_{pl}：產品 p 在產線 l 之生產成本

SC_{pl}：產品 p 在產線 l 之設置成本

EC_{pl}：產品 p 在產線 l 之加班人事成本

PU_{pl}：產品 p 在產線 l 之生產上限

PL_{pl}：產品 p 在產線 l 之生產下限

WU_{pl}：產品 p 在產線 l 之加班生產上限

H_{pl}：產品 p 在產線 l 進行生產時所需之人力數

Q_{pl}：產品 p 在產線 l 之產品需求量

E：每天最多可執行生產的人力數上限

M：極大值

N：產品與產線之集合

2.2 決策變數

w_{dpl}：代表第 d 天、產線 l 是否生產產品 p，有則為 1；若無則為 0。

x_{dpl}：代表第 d 天、產線 l 是否加班生產產品 p，有則為 1；若無則為 0。

y_{dpl}：代表第 d 天、產線 l 生產產品 p 之產量。

z_{dpl}：代表第 d 天、產線 l 加班生產產品 p 之產量。

2.3 目標式

目標式(1)為最小化總生產成本，其項目依序為：開線設置成本、生產成本、加班人事成本與加班生產成本。

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{d\in D}\sum_{(p,l)\in N} SC_{pl}\times w_{dpl} + \sum_{d\in D}\sum_{(p,l)\in N} PC_{pl}\times y_{dpl} \\
& + \sum_{d\in D}\sum_{(p,l)\in N} EC_{pl}\times x_{dpl} + \sum_{d\in D}\sum_{(p,l)\in N} PC_{pl}\times z_{dpl}
\end{aligned} \tag{1}
$$

2.4 限制式

限制式(2)代表產線需開線才能執行生產。

$$y_{dpl} \leq M \times w_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{2}$$

限制式(3)代表產線需開線才能執行加班生產。

$$z_{dpl} \leq M \times w_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{3}$$

限制式(4)代表產品需於可執行生產的天數上限內完成生產。

$$\sum_{d \in D} w_{dpl} \leq PD \qquad \forall\, (p,l) \in N \tag{4}$$

限制式(5)代表每日執行生產之人力需小於每日可用人力之上限。

$$\sum_{(p,l) \in N} H_{pl} \times w_{dpl} \leq E \qquad \forall\, d \tag{5}$$

限制式(6.1)與(6.2)代表 L2 產線內，若更換生產之產品則需停線一天。

$$w_{pld} + \sum_{p' \in P3} w_{p'l(d+1)} \leq 1 \qquad \forall\, (p,l) \in (L2, P2), \forall d = 1, \dots, D-1 \tag{6.1}$$

$$\sum_{p' \in P2} w_{p'l(d+1)} + w_{pld} \leq 1 \qquad \forall\, (p,l) \in (L2, P3), \forall d = 1, \dots, D-1 \tag{6.2}$$

限制式(7)代表 L2 產線每日僅能生產一種產品。

$$\sum_{(p,l) \in (L2,P2),(L2,P3)} w_{dpl} \leq 1 \qquad \forall\, d \tag{7}$$

限制式(8)代表產品之產量需滿足其需求量。

$$\sum_{d \in D} \left(y_{dpl} + z_{dpl} \right) \leq Q_{pl} \qquad \forall\, (p,l) \in N \tag{8}$$

限制式(9)代表產品每日的產量需小於或等於產量上限。

$$y_{dpl} \leq PU_{pl} \times w_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{9}$$

限制式(10)代表產品每日的加班產量需小於或等於加班產量上限。

$$z_{dpl} \leq WU_{pl} \times x_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{10}$$

限制式(11)代表產品每日的產量需大於或等於產量下限。

$$y_{dpl} \geq PL_{pl} \times w_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{11}$$

限制式(12)代表產品每日的加班產量需小於或等於加班產量下限。

$$z_{dpl} \geq PL_{pl} \times x_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{12}$$

限制式(13)代表需先進行生產才能執行加班生產。

$$x_{dpl} \leq w_{dpl} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{13}$$

限制式(14)為二元限制式。

$$w_{dpl}, x_{dpl} \in \{0,1\} \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{14}$$

限制式(15)為非負限制式。

$$y_{dpl}, z_{dpl} \geq 0 \qquad \forall\, d, \forall\, (p,l) \in N \tag{15}$$

2.5 求解結果

根據前述 2.1 節至 2.4 節建構之混合整數規劃(Mix Integer Programming, MIP)數學規劃模型，本研究以電腦規格 CPU 為 Apple M1、記憶體 8GB、作業環境 macOS Sonoma 14.0、Gurobi 10.0.2 版下進行求解。共產生 136 個變數(二元變數 70 個、連續型變數 66 個)與 283 條限制式，且如圖 1 所示僅需 0.02 秒即可得出總成本的最佳解為 1,352,495 元。

```
Cutting planes:
  Gomory: 1
  Cover: 3
  MIR: 1
  Flow cover: 1
  Zero half: 1
  RLT: 3

Explored 1 nodes (279 simplex iterations) in 0.02 seconds (0.01 work units)
Thread count was 8 (of 8 available processors)

Solution count 2: 1.3525e+06 1.35631e+06

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 1.352495000000e+06, best bound 1.352495000000e+06, gap 0.0000%
Optimal solution found!
Number of variables:  136
Number of constraints:  283
Objective value:  1352495.0
```

圖 1、Gurobi 模型求解結果

圖 2 為其生產排程與各項成本之計算結果。圖中的 X 與 O 符號分別代表當天是否有進行生產或加班生產；其中產品 P1 與產品 P3 沒有於同一天執行生產，因此皆無發生每日生產人力超過上限的狀況。此外，由於不論於常日或加班生產一單位的產品 P1 之生產成本皆為相同，所以在此條件求解即會存在多重最佳解的狀況；圖 3 呈現本次求解下，產品 P1 在第六天共加班生產 300 單位，而第七天常日生產則為 4,300 單位，但是生產產品 P1 之總成本並未因此而改變。綜上所述，雖生產成本與加班生產成本與題目之數值不同，但其各項成本之總和會得出相同的最佳解 1,352,495 元。

```
Day       1    2    3    4    5    6    7    8    9    10   11
L1P1                               XO   X    X    X    X
L2P2                                    X    X    X    X    X
L2P3      X    X    X    X    X
Workers   17   17   17   17   17   14   27   27   27   27   13

Production cost:  1319000.0
Setup cost:  28500.0
Over time production cost:  3000.0
Over time personnel cost:  1995.0
```

圖 2、每日生產排程與各項生產成本

```
Day       1     2     3     4     5     6          7     8     9     10    11
L1P1                                   4400,300   4300  4400  4400  4400
L2P2                                              3500  3500  3500  3500  3500
L2P3      2300  2300  2300  2300  2300
Workers   17    17    17    17    17    14         27    27    27    27    13
```

圖 3、每日生產數量

三、敏感度分析

因產品之生產成本和加班生產成本可視為固定成本，故本研究針對變動成本中的開線生產設置成本與加班人事成本，透過增加常日的產量上限進行分析，試圖減少加班所衍生之人力成本，甚至減少生產天數以降低開線設置成本。表 1 中假設工廠一天生產八小時且不考慮停機與不良品的情況，根據產品 P1、P2、P3 每日產量上限即可得出每小時分別可生產約 550 箱、437.5 箱、287.5 箱。

表 1、各產品每小時的產量

產品	**P1**	**P2**	**P3**
每日產量上限	4,400	3,500	2,300
每小時產量	550	437.5	287.5

表 2 呈現當逐步增加一小時的生產時數，各項生產成本對總成本造成變動之敏感度分析。結果顯示，提升每天常日的生產則會減少每天的加班時數，兩者數值雖呈現負相關性，可是其和皆為 1,322,000 元。此外，提升加班時數則有助於縮短製造天數，進而降低開線設置成本。

表 2、常日生產時數與生產成本之敏感度分析

常日生產時數 (hr)	總成本 (NTD)	生產成本 (NTD)	設置成本 (NTD)	加班生產成本 (NTD)	加班人事成本 (NTD)
8	1,352,495	1,319,000	28,500	3,000	1,995
9	1,352,096	1,317,500	28,500	4,500	1,596
10	1,346,795	1,319,000	22,800	3,000	1,995
11	1,346,396	1,317,500	22,800	4,500	1,596
12	1,346,396	1,317,500	22,800	4,500	1,596

圖 4 為常日生產 9 小時每日的生產數量與排程規劃，與圖 3 相比 P1 因為能夠節省加班成本，因此讓總成本得以減少至 1,352,096 元。而圖 5 由於增加每日產能上限至 12 小時，令工廠較原先 8 小時的情況更足以負擔額外的生產數量，因此原先需花費五天生產的產品皆能減少一天的製造天數，總成本則進一步藉由減少開線成本連帶降低至 1,346,396 元，使其達成以最少生產成本擬定之生產排程規劃。

Day	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L1P1	4950	4950	2400	4950	4950						
L2P2	3938,150	3938	3938	3938	1598						
L2P3							2588	2588	2588	1148	2588
Workers	27	27	27	27	27	0	17	17	17	17	17

圖 4、常日生產 9 小時之每日生產數量

Day	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L1P1		X			X	X	X				
L2P2			X	X	X	XO					
L2P3	X							X		X	X
Workers	17	14	13	13	27	27	14	17	0	17	17

圖 5、常日生產 12 小時之每日生產排程

四、心得與感想

此個案中因產品與產線存在集合關係，亦即不同產線所負責執行生產的產品存在其限制，此狀況於現實中的生產排程極為常見，因此在建立數學規劃模型時耗費不少時間思考要如何以數學符號進行表達，並且在不用程式碼 if-else 判斷式的觀念下建立線性規劃模型(Linear Programming, LP)。

經 Gurobi 數學規劃軟體求得最佳解後，本研究嘗試透過改變不同參數進行敏感度分析，探討該數值對於生產決策有何影響。藉由敏感度分析能在不改變實際生產線排程與生產成本下得出決策判斷依據，發揮建構數學規劃模型最大的優勢所在——可以靈活的針對不同情況調整參數，既可以數值化呈現改善資源分配後的實際績效，也易於解釋決策造成的相關性，提供最佳化決策的方案參考。

五、參考文獻

林宸毅. (2016). 考慮具中斷點學習效應之混合流線式生產排程問題. https://hdl.handle.net/11296/ex53fk

林坤賢. (2020). 考量相依整備時間與部分迴流限制之等效平行機台生產排程問題. https://hdl.handle.net/11296/94p5e9