IE325K　作業研究 (下)

個案研究：範例三 學校排課問題

組別：第一組

組員：10822142 曾可欣、11024323 廖家廣、11024325 余尚晉、
11024327 莊子毅、11024333 邱寶樟

一、學校排課問題介紹

1.1 定義

學校課表排課問題(School Timetabling Problem)涉及複雜的資源分配，且存在多重組合與限制條件，因此屬於 NP-Complete 問題。其目標為在滿足不同限制的前提下，以有限資源做出最佳分配。翁得榮(2007)與彭迺淳(2016)根據不同教育體系的特性進行統整，大致可分為以下三種類型：

1. 學校排課：國內高中以下多為此類型，每班有專屬的教室，部分課程則使用共同教室，課程安排不存在空堂，故僅需考量同時段的授課教師，以及教室不得與其他班級衝堂。

2. 課程排課(Course Timetabling)：國內大專院校因不同科系間的修課規章存在差異，且每位學生每週有不同的課程數，有較多空堂的情況；另外，任課教師與學生在自行安排課表的階段也有各自的偏好時段。因此，雖然規劃時的條件較為彈性，實際制定時卻也更為複雜。

3. 考試排課(Examination Timetabling)：主要針對課程的檢定需求，規劃各科考試的時間，且需考量該學生同時段的試驗不得衝堂。

過往因不同學校的課程、教學場地及教學資源等差異，以及條件限制的不同，規劃上需仰賴專業排課人員的經驗；然而，以此模式進行不僅效率不佳，排出的結果也因為學校各自的資源和班別分類有所落差，所以難以通用。

1.2 文獻介紹

翁得榮(2007)以個案之科技大學為例，建構整數規劃(Integer Programming)模型，其目的為最大化教師時段偏好程度，並將軟限制(Soft Constraints)與硬限制(Hard Constraints)的條件納入考量，在不違反硬限制的條件下，盡可能滿足教師之排課需求。此研究首先將原始數據輸入 Microsoft Access 資料庫，執行資料彙整、預處理與排除後，再藉由 AMPL/CPLEX 求解並與人工排課結果分析比對。

彭迺淳(2016)針對中小學的排課問題為例進行研究，考量個案國民中學的普通班、藝術才能班、特殊教育班，三種班別不同的安排限制，以整數規劃建立數學規劃模型；並且透過模組化(Modularity)令模型得以在維持一定的彈性下，滿足不同情況的限制條件。此研究將其目標值假設為常數 0，藉由 IBM ILOG CPLEX 數學套裝軟體求解。

黃允成、陳奕安(2017)使用整數規劃法解決大專院校之排課問題，考量每位教師授課日期與節次的偏好，透過權重平衡排課狀況，其目標為最大化所有教師總滿意度；並加入教師、教室、班級、課程特性、專任與兼任、多班教學進度平衡……等限制條件。最終，利用 LINGO 求解後配合 Excel 進行彙整，建構出電腦化的排課系統。

二、數學規劃模型

2.1 課程代碼定義

本個案之課程類型共有二十一種，其中理化有兩堂為實驗課，為便後續透過數學式與撰寫程式碼時呈現排課情況，因此依照各種課程給予對應之代碼。另外，本研究將部分課名的稱呼替代或以簡稱取代之，目的為令課名更為明確且不易混淆，例如：視覺藝術改稱為美術、表演藝術簡稱為表藝，詳細的命名與編碼結果如表 1 所示。

表 1、課程代碼

課程	國文	英文	數學	理化	歷史	地理	公民
代碼	1	2	3	4	5	6	7
課程	健康	體育	音樂	藝術	表藝	童軍	家政
代碼	8	9	10	11	12	13	14
課程	輔導	閱讀	週會	社團	選數	選自	科技
代碼	15	16	17	18	19	20	21

2.2 參數定義

D：排課天數，$d = 1, 2, \dots, D$

T：每天的排課節數，$t = 1, 2, \dots, T$

S：課程代碼，$s = 1, 2, \dots, S$

C：需要排課之班級數

N_s：課程 s 所需之排課數

M：極大值

2.3 決策變數

x_{dtcs}：第 d 天、第 t 節時，班級 c 是否有排課程 s，有則為 1；若無則為 0。

y_{dtc}：第 d 天、第 t 節的班級 c 是否有排實驗課程，有則為 1；若無則為 0。

2.4 目標式

式(1)為最小化一週之排課數。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{d=1}^{D}\sum_{t=1}^{T}\sum_{c=1}^{C}\sum_{s=1}^{S} x_{dtcs} \tag{1}$$

2.5 限制式

式(2)代表每天每節每班只能被安排一門課。

$$\sum_{s=1}^{S} x_{dtcs} = 1 \qquad \forall\, d \in D, t \in T, c \in C \tag{2}$$

式(3.1)至式(3.7)則令特定領域在該時段不排課。式(3.1)為週一下午不排英文領域；式(3.2)為週二上午不排綜合活動領域；式(3.3)為週二下午不排國文領域；式(3.4)為週三上午不排健康與人文、藝術與人文領域；式(3.5)為週三下午不排數學領域；式(3.6)週五上午不排社會領域；式(3.7)為週五下午不排自然科學與生活科技領域。

$$\sum_{t=5}^{T} x_{1tc2} = 0 \qquad \forall\, c \in C \tag{3.1}$$

$$\sum_{t=1}^{4} x_{2tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 13, 14, 15 \tag{3.2}$$

$$\sum_{t=5}^{T} x_{2tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 1, 16 \tag{3.3}$$

$$\sum_{t=1}^{4} x_{3tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 8, 9, 10, 11, 12 \tag{3.4}$$

$$\sum_{t=5}^{T} x_{3tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 3, 19 \tag{3.5}$$

$$\sum_{t=1}^{4} x_{5tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 5, 6, 7 \tag{3.6}$$

$$\sum_{t=5}^{T} x_{5tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 4, 21 \tag{3.7}$$

式(4.1)至式(4.3)為特定科目在該時段不排課。式(4.1)週一下午不排健康；式(4.2)週五下午不排公民、童軍；式(4.3)週二下午第七節不排音樂、美術。

$$\sum_{t=5}^{T} x_{1tc8} = 0 \qquad \forall\, c \in C \tag{4.1}$$

$$\sum_{t=5}^{T} x_{5tcs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 7, 13 \qquad (4.2)$$

$$x_{2,7,cs} = 0 \qquad \forall\, c \in C, s = 10, 11 \qquad (4.3)$$

式(5.1)與(5.2)說明輔導課與上公民課之關係。式(5.1)令輔導課結束後必會接著上公民課；然而，後一節為公民課，並不保證前一節必定為輔導課，兩者存在若且唯若(If And Only If)之關聯。式(5.2)則令輔導課不會被排在最後一節，以彌補式(5.1)條件上不完備之處。

$$x_{dtc,15} \le M \times x_{d,t+1,c,7} \qquad \forall\, d \in D, c \in C, t \in (T-1) \qquad (5.1)$$

$$x_{d,7,c,15} = 0 \qquad \forall\, d \in D, c \in C \qquad (5.2)$$

式(6.1)至式(6.4)表示連上的課程中間不會橫跨午休。式(6.1)為判斷該堂理化課本身是否為實驗課；式(6.2)讓理化實驗課得以連貫安排；式(6.3)令第四節課不會安排理化實驗；式(6.4)為實驗課需滿足其規定之節數。

$$y_{dtc} \le M \times x_{dtc4} \qquad \forall\, d \in D, c \in C, t \in T \qquad (6.1)$$

$$y_{dtc} \le M \times y_{d,t+1,c} \qquad \forall\, d \in D, c \in C, t \in (T-1), t \neq 4 \qquad (6.2)$$

$$y_{d,4,c} = 0 \qquad \forall\, d \in D, c \in C \qquad (6.3)$$

$$\sum_{d=1}^{\mathrm{D}} \sum_{t=1}^{T} y_{dtc} = 2 \qquad \forall\, c \in C \qquad (6.4)$$

式(7)為部分科目每天僅能上一節課。

$$\sum_{t=1}^{T} x_{dtcs} \ge 1 \qquad \forall\, d \in D, c \in C, s = 1, 2, 3, 7, 9, 19 \qquad (7)$$

式(8.1)與式(8.2)則令課程固定安排在特定時段。其中，式(8.1)表示週四第六節週會；式(8.2)表示週四第七節為社團。

$$x_{4,6,7,17} = 1 \qquad \forall\, c \in C \qquad (8.1)$$

$$x_{4,6,\mathrm{c},18} = 1 \qquad \forall\, c \in C \qquad (8.2)$$

式(9.1)至式(9.4)說明部分學科需符合上午和下午的課程安排比例。式(9.1)與式(9.2)分別令國文課上午至少三節、下午至少兩節；式(9.3)與式(9.4)則分別令英文、數學上午至少二節、下午至少一節。

$$\sum_{d=1}^{D} \sum_{t=1}^{4} x_{dtc1} \ge 3 \qquad \forall\, c \in C \qquad (9.1)$$

$$\sum_{d=1}^{D}\sum_{t=5}^{T} x_{dtc1} \geq 2 \qquad \forall\, c \in C \tag{9.2}$$

$$\sum_{d=1}^{D}\sum_{t=1}^{4} x_{dtcs} \geq 2 \qquad \forall\, c \in C, s = 2, 3 \tag{9.3}$$

$$\sum_{d=1}^{D}\sum_{t=5}^{T} x_{dtcs} \geq 1 \qquad \forall\, c \in C, s = 2, 3 \tag{9.4}$$

式(10)確保每個班級的每種課程符合各自所需安排之節數。

$$\sum_{d=1}^{D}\sum_{t=1}^{T} x_{dtcs} \geq N_s \qquad \forall\, c \in C, s \in S \tag{10}$$

式(11)與式(12)則令決策變數為二元限制。

$$x_{dtcs} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, d \in D, t \in T, c \in C, s \in S \tag{11}$$

$$y_{dtc} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, d \in D, t \in T, c \in C \tag{12}$$

2.6 求解結果

根據前述 2.1 節至 2.4 節建構之整數規劃模型，以電腦規格 Apple M1 CPU、記憶體 8GB、作業環境 macOS Sonoma 14.4.1，利用 Gurobi 10.0.2 版求解。共產生 770 個整數變數(二元變數)與 218 條限制式，且僅需 0.03 秒即可得出最小化總排課節數之最佳解為 35 節，如圖 1 所示。

```
Root relaxation: interrupted, 0 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

H    0     0                      35.0000000   35.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (0 simplex iterations) in 0.03 seconds (0.01 work units)
Thread count was 8 (of 8 available processors)

Solution count 1: 35

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 3.500000000000e+01, best bound 3.500000000000e+01, gap 0.0000%
Number of variables:   770
Number of constraints:   218
Objective value:   35.0
```

圖 1、Gurobi 求解結果

圖 2 為各科目每天的排課結果，也是多重最佳解其中的一組可行解，由左至右分別代表每天的第一節至第七節課。而課程的排定方式，皆未違反前述 2.5 節式(2)至式(12)相關之限制條件；其中週一下午的第七節與第八節為理化課之實驗

課，符合兩堂必須連上，且課程不得橫跨午休之限制；此外，輔導課與公民課也有課程連貫性的條件。

班級 1 的班表:

Mon.	英文	數學	公民	國文	體育	理實	理實
Tue.	英文	數學	國文	體育	輔導	公民	理化
Wed.	英文	數學	歷史	地理	國文	健康	音樂
Thu.	國文	藝術	表藝	童軍	英文	週會	社團
Fri.	家政	閱讀	選數	科技	數學	國文	選自

圖 2、排課結果

三、軟限制與硬限制之定義

翁得榮(2007)將其問題之硬限制式定義為學校或系所，排課本身所存在的資源或排課限制，此部分的條件皆要達成，例如：通識課需安排在特定時段、教師每週授課的堂數上限、每班的每節課不行衝堂、每週有兩節為全校共同授課時間；然而，軟限制式則定義為教師或學生，對於時程安排的教學偏好或個人偏好，僅需盡量滿足即可，例如：必修三學分之課程，拆解為連上兩節和單獨一節、教師與學生皆期望必修課能盡量不衝堂。

在本個案研究中，式(2)至式(12)的條件皆不得被違反，符合對於硬限制之定義，因此該部分即為硬限制；而最好將數學和選修數學排在上午第一或第二節課的條件，即為軟限制。

四、新增軟限制

為求將數學與選修數學優先安排在早上的第一節或第二節課，所以此階段新增一個代表課程安排權重之參數值 P，並將其設為負值(本研究為-100)，即可確保模型求解最小化問題時，會優先將課程安排在特定時段。最後，僅須將原先之式(1)目標式修正成式(13)，其餘限制式則沿用式(2)至式(12)維持不變。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{d=1}^{D}\sum_{t=1}^{T}\sum_{c=1}^{C}\sum_{s=1}^{S} x_{dtcs} + P \times \sum_{d=1}^{D}\sum_{t=1}^{2}\sum_{c=1}^{C}\sum_{s\in(3,19)} x_{dtcs} \qquad (13)$$

圖 3 為新增軟限制後的求解結果，由於式(9.3)與式(9.4)會確保其中一堂數學課會被安排在下午，因此最終的最佳情況下，只會有 3 節數學課與 1 節選修數學被優先安排在早上的第一節或第二節；其最佳解會比最初求得的最小值 35 還小 400，即為-365。圖 4 則為新增軟限制後的排課結果，與圖 2 進行比較後可發現，原先早上剛好有 3 節數學被安排在週一到週三的第二節，在導入軟限制後又會令選修數學安排在第一節、第二節，因此確實有達成此階段期望之排課目標。

```
Root relaxation: objective -3.650000e+02, 137 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0    -365.0000000 -365.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (137 simplex iterations) in 0.03 seconds (0.01 work units)
Thread count was 8 (of 8 available processors)

Solution count 1: -365
No other solutions better than -365

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective -3.650000000000e+02, best bound -3.650000000000e+02, gap 0.0000%
Number of variables:  770
Number of constraints:  218
Objective value:  -365.0
```

圖 3、新增軟限制之 Gurobi 求解結果

班級 1 的班表:

Mon.	數學	地理	英文	理化	國文	理實	理實
Tue.	國文	藝術	閱讀	健康	公民	數學	英文
Wed.	數學	選數	選自	輔導	公民	國文	英文
Thu.	英文	科技	國文	體育	音樂	週會	社團
Fri.	數學	家政	童軍	國文	表藝	歷史	體育

圖 4、新增軟限制之排課結果

五、心得與感想

這次的案例為探討學校的課表排課問題，透過此案例我們瞭解到在建構學校課表排課問題時，需要考慮到多個限制條件，像是：每節課不行衝堂、部分課程需滿足上下午的安排比例、部分課程需接續安排、兩堂實驗課中間不行跨中午……等等。將上述條件轉成數學式建立數學模型後，再透過 Python 程式配合 Gurobi 語法解決這個問題；此外，進一步透過條件判斷式，將每個決策變數轉換成所屬之課名，以視覺化呈現出該班級一週的課表規劃。

最後，針對目標式進行的些微修正，將軟限制的條件新增於此，並藉由給予優先排課的條件適當的權重值，讓模型求解時能在既不違背硬限制的約束下，盡可能的優先滿足安排偏好之軟性需求。如此得以使原先的模型更具彈性，且達成更貼近實際需求的排課方案。

六、參考文獻

翁得榮，2007，排課問題之研究——以高雄第一科技大學運籌管理系為例，國立高雄第一科技大學運籌管理系碩士論文。

黃允成、陳奕安，2017，大專院校自動化排課系統最佳化之研究，資訊與管理科學，10(1)，頁 3-19。

彭迺淳，2016，模組化建構多班別之學校排課問題，中原大學工業與系統工程學系碩士論文。