Práctica 3 - Cesar Ramos

Sheet 1 — Macroeconomics II

Crecimiento Económico

1. (a) Considere el modelo de Harrod y Domar con las siguientes ecuaciones:

$$S_t = I_t$$

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$$

$$\theta = \frac{K_t}{Y_t}$$

(i) Encuentre la tasa de crecimiento del capital y la tasa de crecimiento garantizada ¿Qué variable determina el crecimiento según este modelo?

Resp. El ahorro determina el crecimiento de esta economía es decir la tasa de ahorro que es exógena, llevamos todo a términos per cápita:

$$s_t = i_t$$

también

$$i_t = \Delta K_t / N_t + \delta k_t$$

El aporte del capital a la producción:

$$PMeK = \theta = K_t / Y_t$$

Donde:

$$S_t = s * Y_t$$

Inversión Bruta

$$I = \Delta K + \delta K$$

Inversión Neta

$$\Delta K = I - \delta K$$

Reemplazamos la identidad ahorro - inversión en:

$$\Delta K = s * Y - \delta K$$

Dividimos entre K la ecuación

$$\frac{\Delta K}{K} = s * \frac{Y}{K} - \delta$$

La relación capital producto es $\theta = \frac{Y}{K}$

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{s}{\theta} - \delta$$

(ii) Levante el supuesto de la inexistencia de una tasa de depreciación. Encuentre la tasa de crecimiento del capital y la tasa de crecimiento garantizada.

$$\delta = 0$$

$$g_K = \frac{\Delta K}{K} = \frac{s}{\theta}$$

(iii) Introduzca a la población. Encuentre la tasa de crecimiento del capital per – cápita y la tasa de crecimiento garantizada per – cápita. Donde n es la tasa de crecimiento poblacional

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

:

$$g_K = \frac{\Delta K}{K} = \frac{s}{\theta} - n$$

2. (a) Considere las siguientes ecuaciones para el modelo de Solow:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

(i) Verifique que esta función de producción cumple con las propiedades de una función de producción neoclásica.

Productividades marginales de los factores positivos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha Ak^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)Ak^{\alpha} > 0$$

Productividades marginales de los factores decrecientes:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -\alpha * (1-\alpha)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0 \rightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -\alpha * (1-\alpha)\frac{Y}{K^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -\alpha * (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1} < 0 \rightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -\alpha * (1-\alpha)\frac{Y}{L^2} < 0$$

Condiciones de Inada:

$$\lim_{k\rightarrow 0}(-\alpha * (1-\alpha)\frac{Y}{K^2}) = -\infty$$

$$\lim_{k\rightarrow \infty}(-\alpha * (1-\alpha)\frac{Y}{K^2}) = 0$$

(ii) Encuentre la Elasticidad Producto – Capital per cápita. **Resp.** La eslaticidad producto - capital per cápita:

$$\frac{Y_t}{L_t} = y_t = A * K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} // \frac{1}{L_t}$$

$$y_t = A * \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}$$

$$y_t = A * k_t^{\alpha}$$

$$\eta_{y_t,k_t} = A * \alpha * k_t^{\alpha-1} * \frac{k_t}{y_t}$$

$$\eta_{y_t,k_t} = \alpha * \frac{A * k_t^{\alpha}}{A * k_t^{\alpha}}$$

$$\eta_{y_t,k_t} = \alpha$$

(iii) Encuentre la función de producción per cápita, acumulación de capital per cápita, la tasa de crecimiento del capital per Cápita, la tasa de crecimiento del producto per cápita (Convergencia absoluta). Realice gráficos.

Producción Per cápita

$$\frac{Y_t}{L_t} = y_t = A * K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} // \frac{1}{L_t}$$

$$y_t = A * \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}$$

$$y_t = A * k_t^{\alpha}$$

Ley de Acumulación del capital

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

$$I_t = \Delta K_t + \delta K_t$$

$$\Delta K_t = I_t - \delta K_t // \frac{1}{L_t}$$

$$\frac{\Delta K_t}{L_t} = i_t - \delta k_t$$

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} * \frac{K_t}{L_t} = i_t - \delta k_t$$

Operamos el término siugiente:

$$\dot{\left(\frac{K}{AL}\right)} = \frac{\dot{K} AL - K(\dot{AL})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K} AL}{(AL)^2} - \frac{K(\dot{AL})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K \dot{A} L + K A \dot{L}}{(AL)^2}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K \dot{A} L}{(AL)^2} + \frac{K A \dot{L}}{(AL)^2}$$

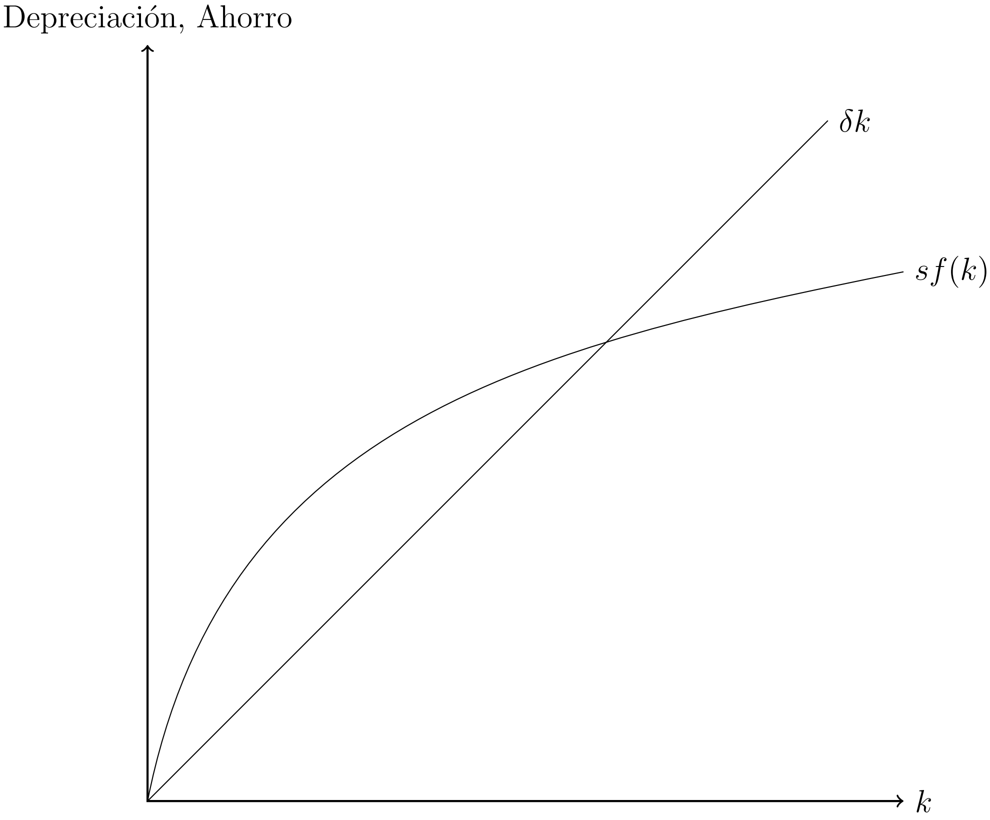
$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{K}{AL} + \frac{\dot{L}}{L} \frac{K}{AL}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - a * k + n * k$$

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{k} + a * k - n * k$$

$$\dot{k} = s * f(k) - (n + a + \delta) * k$$

Gráfico. Capital per cápita, depreciación y ahorro



3. (a) El modelo de Solow viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

(i) Si el progreso tecnológico es 2, la Elasticidad Producto – Capital per – cápita es igual a 0,4; la tasa de depreciación 0,08; la tasa de ahorro 0,25 y la tasa de crecimiento de la población 0,04. Encontrar el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita. Grafique los resultados.

$$y_t = A * k_t^{\alpha}$$

$$\dot{k} = s * f(k) - (n + \delta) * k$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$y_t = 2 * k_t^{0.4}$$

$$\dot{k} = 0.25 * y_t - (0.04 + 0.8) * k$$

$$\dot{k} = 0.25 * 2 * k_t^{0.4} - (0.04 + 0.8) * k$$

$$\dot{k} = 0.5 * k_t^{0.4} - 0.84 * k$$

(ii) Encuentre el capital per – cápita de oro, compare el resultado con el obtenido en el inciso i), apóyese con un gráfico.

$$c^* = f(k^*) + (\delta + n) * k^*$$

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0$$

$$k^{oro} = A\alpha k^{\alpha-1} = (\delta + n)$$

$$k^{oro} = (\frac{(\delta + n)}{A * \alpha})\frac{1}{\alpha - 1}$$

(iii) Si la tasa de ahorro aumenta hasta 0,3 ¿Qué sucede con el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita, la tasa de crecimiento del capital per – cápita, la tasa de crecimiento del producto per – cápita? Grafique y discuta los resultados.

$$\dot{k} = s * f(k) - (n + \delta) * k//1/k_t$$

$$\frac{\overset{\bullet}{k}}{k} = s * k_t^{-0.6} - (n + \delta) = 0$$

En estado estacionario la tasa de crecimiento del stock de capital es 0.

$$\gamma_{\overset{\bullet}{k}} = 0$$

$$k_t^{-0.6} = \frac{(n + \delta)}{s}$$

Reemplazando los datos:

$$k_t^{-0.6} = \frac{(0.08 + 0.04)}{0.3}$$

$$k_t = 0.04^{-\frac{1}{0.6}}$$

(iv) Si la tasa de depreciación cae hasta 0,06 ¿Qué sucede con el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita, la tasa de crecimiento del capital per – cápita y la tasa de crecimiento del producto per – cápita? Grafique los resultados

$$k_t^{-0.6} = \frac{(0.04 + 0.06)}{s}$$

$$k_t^{-0.6} = \frac{(0.1)}{0.4}$$

$$k_t = 0.25^{-\frac{1}{6}}$$

4. (a) El modelo Solow – Swan se caracteriza por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

(i) a) El progreso tecnológico es 2, la Elasticidad Producto – Capital per – cápita es igual a 0,55; la tasa de depreciación 0,9; la tasa de ahorro 0,4 y la tasa de crecimiento demográfica es 0,05. Encontrar el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita. Grafique los resultados.

Producción per cápita

$$y_t = k_t^{\alpha}$$

Ley de moviemiento del capital

$$\dot{k} = s * f(k) - (n + \delta) * k$$

Tasa de crecimiento del Stock de capital

$$\frac{\dot{k}}{k} = s * k_t^{\alpha-1} - (n + \delta) = 0$$

$$s * k_t^{\alpha-1} = (n + \delta)$$

$$k_t^{\alpha-1} = \frac{n + \delta}{s}$$

$$k_t^* = (\frac{n + \delta}{s})^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

(ii) Encuentre el capital per – cápita de oro y el nivel de producción per – cápita de oro, ¿El capital de estado estacionario es mayor o menor al capital de oro (per – cápita)? compare el resultado con el obtenido en el inciso a), respalde su resultado con un gráfico.

$$k_t^* = (\frac{0.05 + 0.9}{0.4})^{\frac{1}{0.55 - 1}}$$

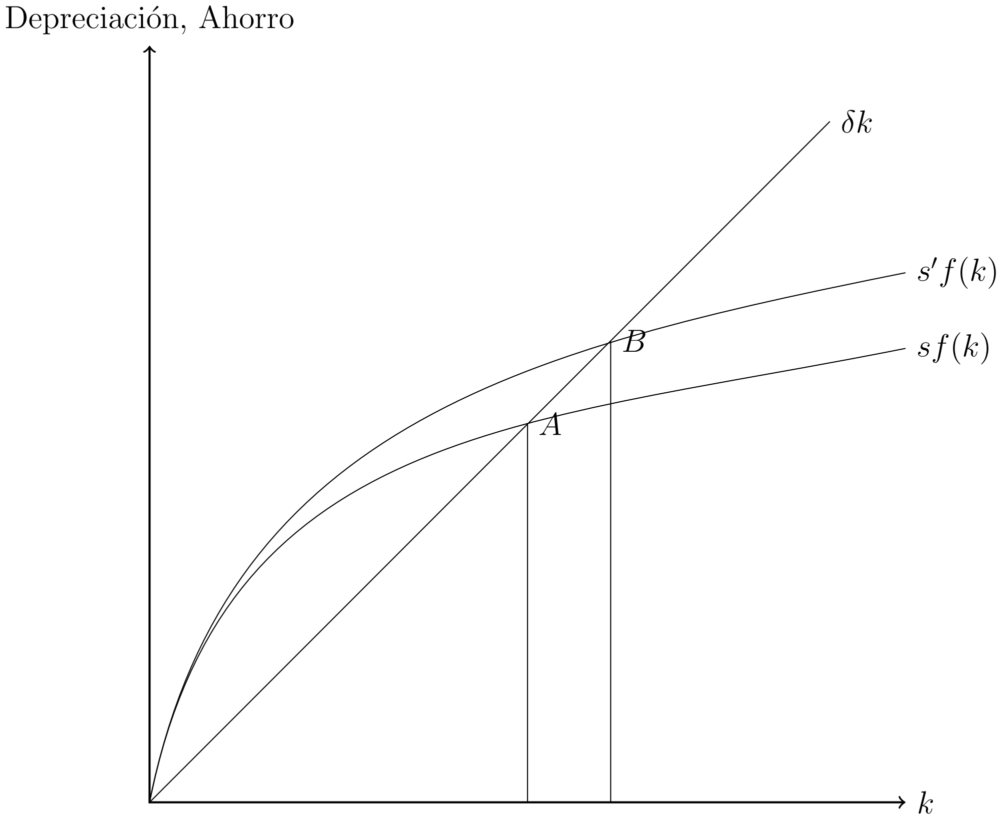
$$k_t = (\frac{0.95}{0.4})^{\frac{1}{-0.45}}$$

$$k_t = 0,14$$

(iii) Si la tasa de ahorro aumenta hasta 0,5 ¿Qué sucede con el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita, la tasa de crecimiento del capital per – cápita, la tasa de crecimiento del producto per – cápita? Grafique y discuta los resultados.

$$k_t = (\frac{0.95}{0.4})^{\frac{1}{-0.45}}$$

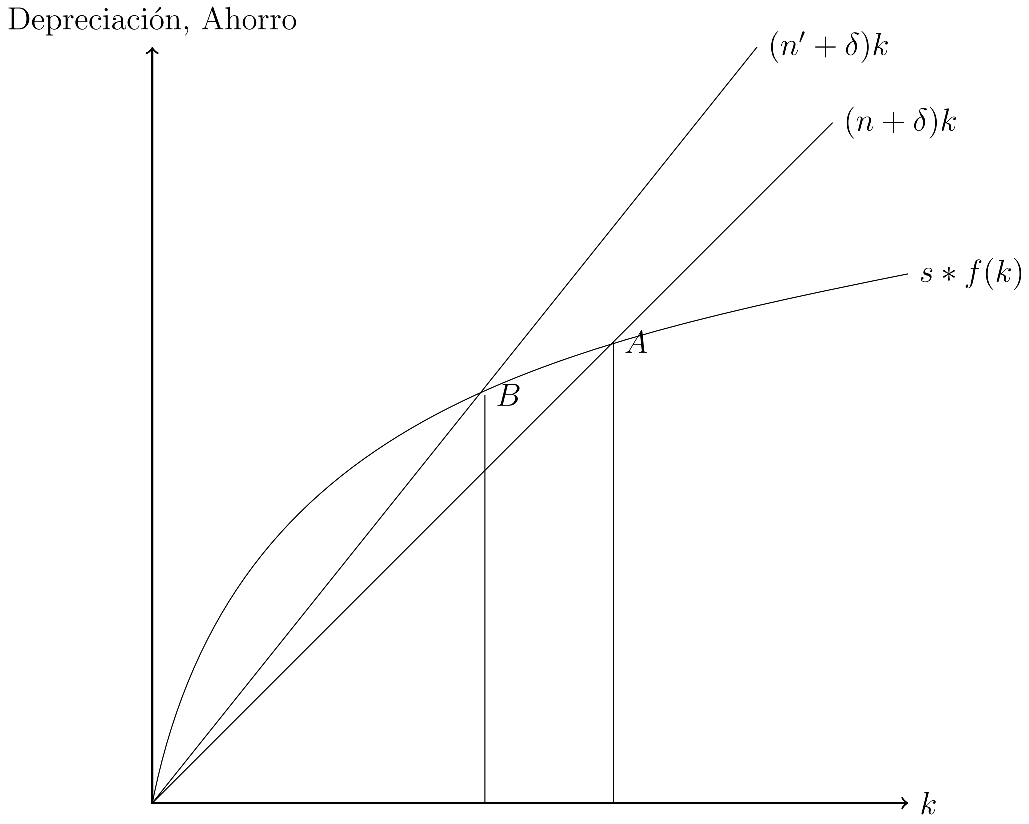
$$k_t = 0,24$$



(iv) Si la tasa de crecimiento demográfica aumenta hasta 0,06 ¿Qué sucede con el nivel de capital per – cápita de estado estacionario, la producción per – cápita y la tasa de crecimiento del capital per – cápita? Grafique los resultados.

$$k_t^* = (\frac{0.06 + 0.9}{0.4})^{\frac{1}{0.55-1}}$$

$$k_t^* = 0.1429$$


Depreciación, Ahorro
$(n' + \delta)k$
$(n + \delta)k$
$s * f(k)$
A
B
k

5. (a) El modelo AK viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = AK_t$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

$$S_t = I_t$$

Stock de capital de Oro

$$k^{oro} = (\frac{(\delta + n)}{A * \alpha})^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$\dot{k} = s * f(k) - (n + a + \delta) * k$$

(i) Si el progreso tecnológico es 2, la tasa de ahorro es 20%, la tasa de depreciación es del 18% y la tasa demográfica es de 6%. Encuentre la tasa de crecimiento del capital per – cápita y la tasa de crecimiento del producto per – cápita, realice una grafica.

$$k^{oro} = (\frac{(0.18 + 0.06)}{2})$$
$$k^{oro} = 0.12$$

(ii) Suponga que el nivel de capital per – cápita es de 150, encuentre la producción per – cápita, realice una grafica

$$Y_t = AK_t$$

$$y_t = A * k_t$$

$$y_t = 2 * 1.50$$

$$y_t = 3$$

(iii) Si el ahorro disminuye a un 15%, ¿Qué sucede con la tasa de crecimiento del capital y del producto per – cápita? Elabore gráficos para respaldar su respuesta

Tasa de crecimiento del Stock de Capital

$$\gamma_{\dot{k}} = 0$$

$$k_t = \frac{(n + \delta)}{A * s}$$

$$k_t = \frac{(0.06 + 0.18)}{2 * 0.15}$$

$$k_t = 0.8$$

(iv) Si la tasa de depreciación cae a un 14%, ¿Qué sucede con la tasa de crecimiento del capital y del producto per – cápita? Elabore gráficos para respaldar su respuesta

$$k_t = \frac{(n + \delta)}{A * s}$$

$$k_t = \frac{(0.06 + 0.14)}{2 * 0.2}$$

$$k_t = 0.5$$