# 第8章 股票市场风险指标分解

清华大学经管学院 朱世武
zhushw@sem.tsinghua.edu.cn
Resdat样本数据：www.resset.cn
SAS论坛： www.resset.cn

The Power to Know

# 协方差阵引出特征值

## 风险指标-特征值

风险是投资者未来收益的一种不确定性，通常证券市场上由资产价格波动导致的投资者收益的不确定性被称为纯市场风险。

包含n支股票股市的收益可以用一个n维随机向量来表示

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

其中是 $r_i$ 第i种股票收益。

设随机向量 $\mathbf{r}$ 的协方差形成的矩阵为，$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix}$

其中，$V_{ii}$ 是 $r_i$ 的方差，$i \neq j, V_{ij}$ 是 $r_i$ 和 $r_j$ 的协方差。

The Power to Know.

设有一投资组合（ $a_1,\cdots,a_n$ ），$a_i$ 是购买第i种股票的数额，于是相应的组合收益为，

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n = \mathbf{a}'\mathbf{r}$$

组合的方差为：

$$\sigma^2(\mathbf{a}'\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j V_{ij} (= \mathbf{a}'\mathbf{V}\,\mathbf{a})$$

利用组合的方差表达式，就可以给出整个股市收益风险的一个更合理的度量。

当 $b_i = ca_i, i = 1, 2, \cdots, n$，也即投资组合按的分配 $a_1, \cdots, a_n$ ，成c倍增加时，$\sigma^2(\mathbf{b}'\mathbf{r}) = c^2\sigma^2(\mathbf{a}'\mathbf{r})$ ，风险 $\sigma^2(\mathbf{b}'\mathbf{r})$是 $\sigma^2(\mathbf{a}'\mathbf{r})$ 的 $c^2$ 倍 。

因此，只须考虑 $\mathbf{a}'\mathbf{a} = 1$ ，即 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$的这种投资组合，它的方差代表了这个方向所有投资组合的状况。

使 $\sigma^2(\mathbf{a}'\mathbf{r})$在约束条件$\mathbf{a}'\mathbf{a} = 1$ 之下达到极大值的那个投资组合就是风险最大的方向，同样地，相应的最小值就是风险最小的方差 。

协方差阵**V**的最大特征值就是最大风险相应的方差，它相应的特征向量就是最大风险方向；它的最小特征值就是最小风险的方差，相应的特征向量就是最小风险方向。

# 风险指标的分解算法

对于上面定义的度量整个股市风险指标---最大特征值， 可以对其进行风险的分解，例如按板块来分，用 $\lambda^*$ 表示**V**的最大特征值，即，

$$\lambda^* = \max_{\mathbf{a}'\mathbf{a}=1} \mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}$$

将r按板块分割成k组，即

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{(1)} \\ \vdots \\ r_{(k)} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{matrix}, n = n_1 + \cdots + n_k$$

**V**相应地分块，此时

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V_{11}} & \mathbf{V_{12}} & \cdots & \mathbf{V_{1k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{V_{k1}} & \mathbf{V_{k2}} & \cdots & \mathbf{V_{kk}} \end{pmatrix},$$

其中， $\mathbf{V_{ij}}$为 $n_i \times n_j$ 矩阵，（ $i, j = 1, 2, \ldots, k$ ）

设 $\lambda^*$ 相应的特征向量记为 $\mathbf{a}^*$，则 $\lambda^* = \mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{V}\mathbf{a}^*$，并 $\mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{a}^* = 1$。将 $\mathbf{a}^*$ 也按板块相应地分解，即，

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^*_{(1)} \\ \mathbf{a}^*_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^*_{(k)} \end{pmatrix},$$

于是

$$\lambda^* = \mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{V}\mathbf{a}^* = \sigma^2\left(\mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{r}\right) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{a}^{*\prime}_{(\mathbf{i})}\mathbf{r}_{(i)}\right).$$

进一步令，

$$x_i = \mathbf{a}^{*\prime}_{(\mathbf{i})}\mathbf{r}_{(i)} \Big/ \left(\mathbf{a}^{*\prime}_{(\mathbf{i})}\mathbf{V}_{\mathbf{ii}}\mathbf{a}^*_{(\mathbf{i})}\right)^{\frac{1}{2}}, i = 1, 2, \cdots, k$$

易见 $\sigma^2(x_i)=1$，也就是每一板块中由 $\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{r}_{(i)}$ 形成的单位风险（投资组合），这个 $x_i$ 才是形成 $\lambda^*$ 风险值的一个根源。于是令

$$\begin{cases} c_i = \dfrac{\left(\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{V}_{\mathrm{ii}}\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*}}, i=1,2,\cdots,k \\ w_i = \mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*} \end{cases}$$

可以得到 $\lambda^*$的板块分分解式，

$$\lambda^* = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{r}_{(\mathrm{i})}\right) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*\prime}\mathbf{V}_{\mathrm{ii}}\mathbf{a}_{(\mathrm{i})}^{*})^{\frac{1}{2}}x_i\right) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k}w_i(c_i x_i)\right)$$

$w_i$

于是对于不允许卖空的股市，可以得出结论，最大风险值是由各个板块单位风险组合 $x_i$ 的线性函数 $c_i x_i$引起的，权重 $w_i$ 正好是 $\lambda^*$ 对应的特征向量分割后板块对应部分 $a^*_{(i)}$ 的长度平方。

而对于允许卖空的股市，由于，

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}^{*\prime}_{(\mathbf{i})} \mathbf{a}^{*}_{(\mathbf{i})} = \mathbf{a}^{*\prime} \mathbf{a}^{*} = 1$$

因此 $w_i$ 就是权重。

容易看出，对于最小特征值，也完全可以作类似的分解。

# 相关计算程序

## 计算环境

时期：2005年的一个周期。

数据：使用日对数收益数据，即股票当日收盘价对数与前日收盘价对数之差。计算沪深股市所有上市股票的收益数据，其中，计算年周期时，剔除交易小于100天的股票，季周期时剔除交易小于50天的股票，月周期剔除交易小于15天的股票，用周作为周期时，剔除该周所有新上市股票。停牌时的收益数据用0代替，即假定该天的价格与前一天相同。新股第二天才记收益，其计算周期内上市前的收益数据用0代替，即假定在计算周期内发行新股其上市前的股价恒为上市日收盘价。

样本：年周期内沪深股市满足条件的所有A股股票。

复权：在计算股票的拆细、除权、除息等股利分配日的对数收益时，价格全复权。

板块：本章用根据流通股本划分板块。按照市场上一般的标准，流通股本在1个亿以上的个股划为大盘股，5000万至1个亿的个股划为中盘般，不到5000万规模的划为小盘股。

计算数据集：股本变动历史数据集FINCOMP.SHARES，行情与分配数据集FINCOMP.QUOTDISTS。

# 实现算法

1.确定计算周期中满足条件的所以上市股票，并按板块排列如下：

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{(1)} \\ \vdots \\ r_{(k)} \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{matrix},n=n_1+\cdots+n_k$$

其中，n为股市所有股票数；k为将这n支股票分为k个板块，本次计算n=72，k=3。

2.计算周期内所选股票的收益，得到一$n \times m$ 矩阵，即得到随机

向量 $\mathbf{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 的m个样本 $\mathbf{r}^{(1)},\cdots,\mathbf{r}^{(m)}$ 。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(1)'} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{(m)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{n2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

其中，m表示计算周期内股市的交易天数，文中m=241。

3. 估计随机向量 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 的方差---协方差矩阵。

$$\Sigma = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}\left(\mathbf{r}^{(t)} - \overline{\mathbf{r}}\right)\left(\mathbf{r}^{(t)} - \overline{\mathbf{r}}\right)' = \frac{1}{m-1}\left((\mathbf{r}^{(1)} - \overline{\mathbf{r}}),\cdots,(\mathbf{r}^{(m)} - \overline{\mathbf{r}})\right)\begin{pmatrix} (\mathbf{r}^{(1)} - \overline{\mathbf{r}})' \\ \vdots \\ (\mathbf{r}^{(m)} - \overline{\mathbf{r}})' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\left(\mathbf{r}^{(1)},\cdots,\mathbf{r}^{(m)}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(1)\prime} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{(m)\prime} \end{pmatrix} - m\overline{\mathbf{r}}\,\overline{\mathbf{r}}'\right)$$

其中， $\overline{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\mathbf{r}^{(t)}$

4. 求协方差阵的最大特征的相应的特征向量。
5. 对最大特征进行分解，计算其它相关指标。

# 实现程序

（参见教材）

# 计算结果

求得全部方差之和为trV=0.0298066, 该协方差阵前6个特征值（从大到小排列）。

| | 第一( $\lambda^*$) | 第二 | 第三 | 第四 | 第五 | 第六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 特征值 | 0.012115 | 0.002892 | 0.001434 | 0.000843 | 0.000687 | 0.000604 |
| 贡献率 | 40.64385 | 9.703119 | 4.811291 | 2.829623 | 2.30519 | 2.027338 |
| 累计贡献率 | 40.64385 | 50.34697 | 55.15826 | 57.98788 | 60.29307 | 62.32041 |

由表可以看出，最大特征值$\lambda^* = \mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{V}\mathbf{a}^*$=0.012115， $\mathbf{a}^{*\prime}\mathbf{a}^* = 1$，前两个主要方向相应的方差之和占全部方差的50%以上，因此，前两个特征根对应的投资组合方向反映了全年主要变化。