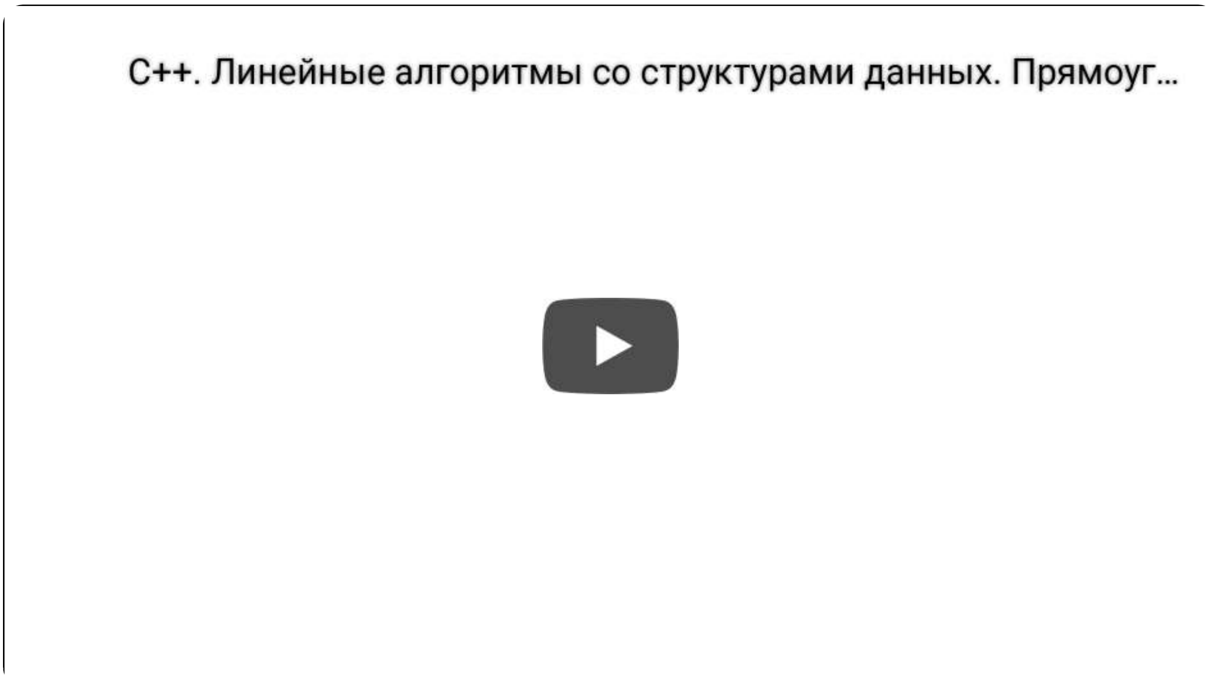
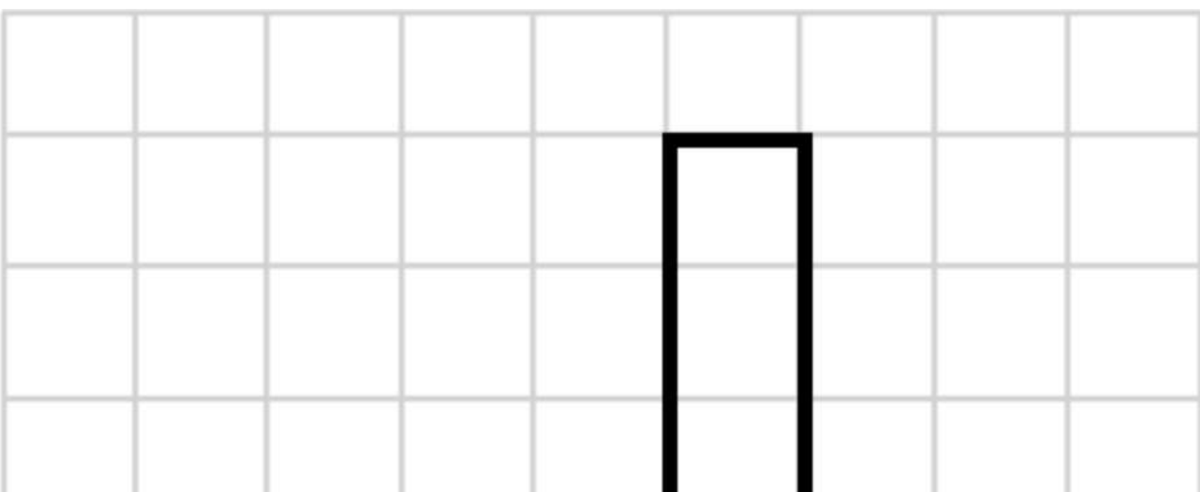
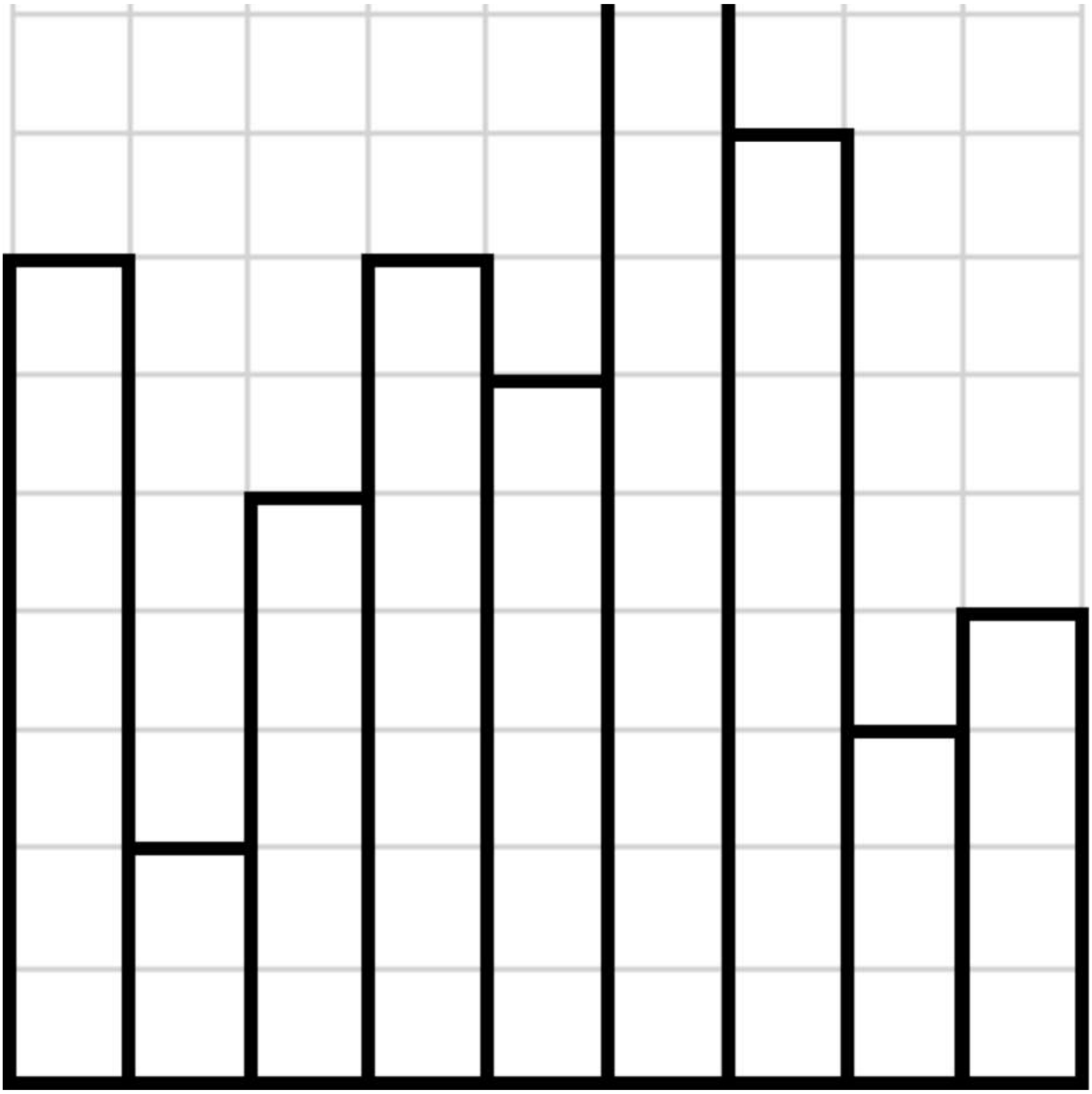
Прямоугольник наибольшей площади, вписанный в гистограмму



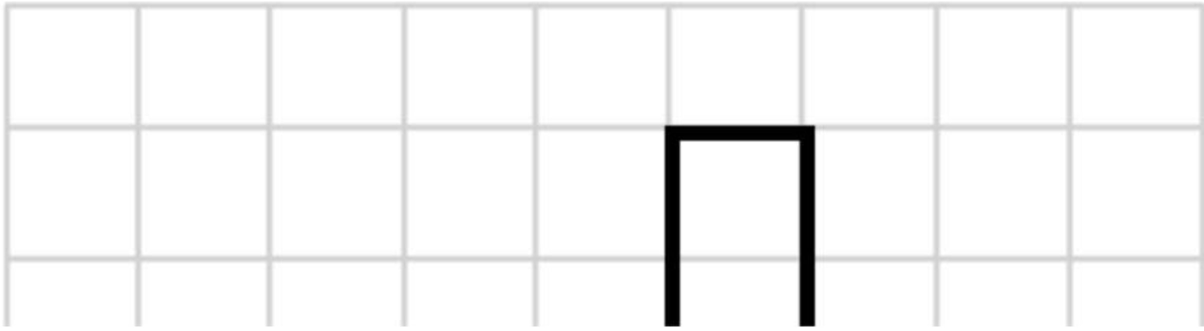
Гистограмма является многоугольником, сформированным из последовательности прямоугольников, выровненных на общей базовой линии. Прямоугольники имеют равную ширину, но могут иметь различные высоты. На рисунке изображена гистограмма, которая состоит из прямоугольников с высотами $7, 2, 5, 7, 6, 12, 8, 3, 4$. Все прямоугольники на этом рисунке имеют ширину, равную 1.

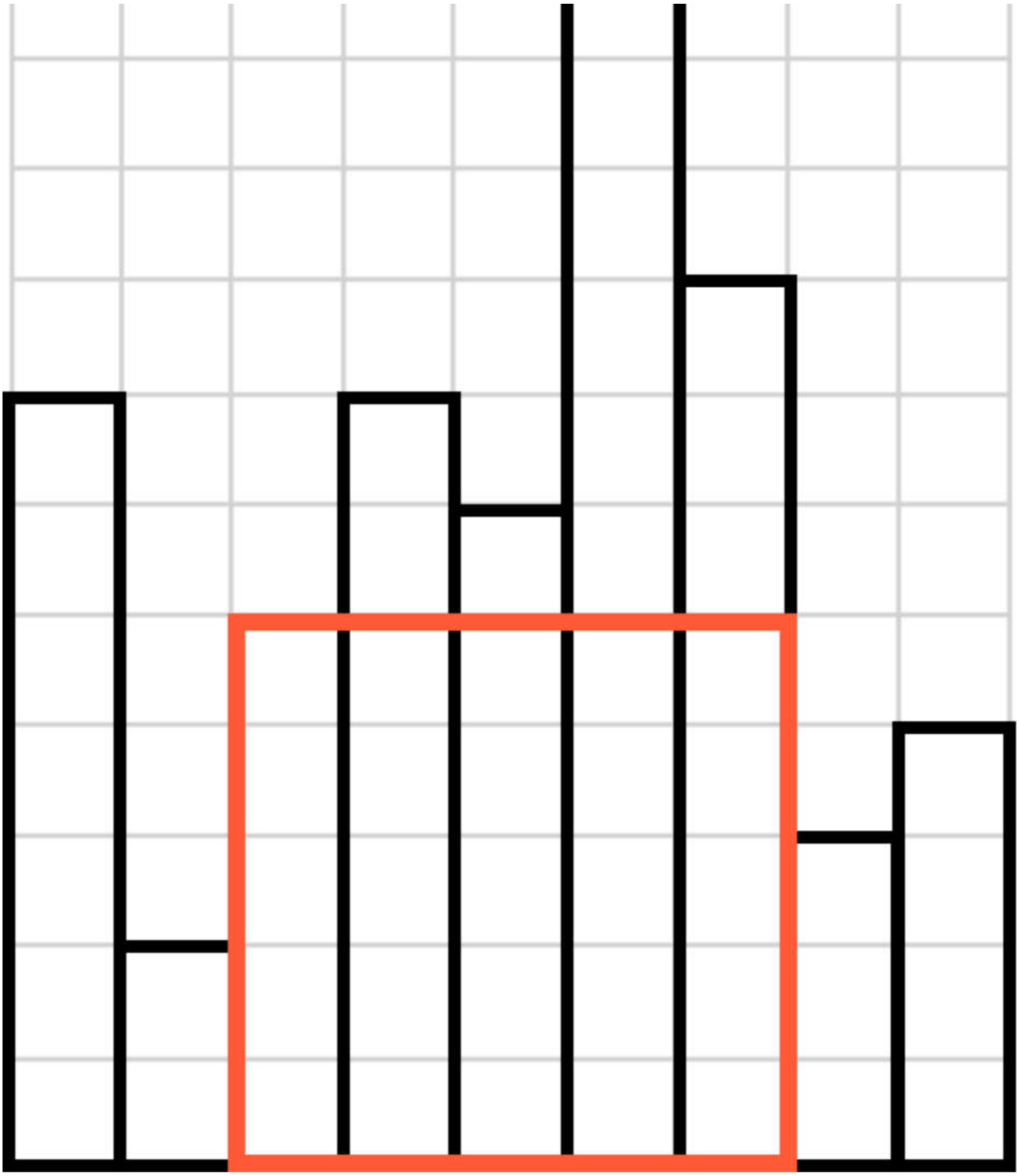




Задача Найдите максимальную площадь прямоугольника, лежащего на базовой линии, который можно вписать в гистограмму с высотами $h_1, h_2 \ldots h_n$.

Например, в гистограмму, рассмотренную выше, можно вписать квадрат 5×5. Он и будет прямоугольником наибольшей площади.





Докажем, что высота искомого прямоугольника обязательно совпадает с одним из столбцов. Предположим, что это не так, и ответом является вписанный прямоугольник, высота которого не совпадает ни с одним из столбцов. Тогда мы можем увеличивать его высоту до тех пор, пока не упрёмся в завершение какого-то из столбцов. А это значит, что наше предположение неверно, и утверждение доказано.

Будем перебирать значения элементов массива h_i (кандидатов на высоту искомого прямоугольника). Для каждой фиксированной высоты h_i будем подбирать левую и правую границы прямоугольника. При этом влево мы можем продлить границы прямоугольника до ближайшей слева высоты, меньшей h_i. Аналогично вправо до ближайшей справа высоты, меньшей h_i.

Заметим, что с помощью предыдущей задачи для каждой высоты мы можем заранее предпосчитать ближайшую высоту справа, меньшую неё. Аналогично, развернув массив, мы можем предпосчитать для каждой высоты минимальную высоту слева, меньшую неё.

Таким образом, мы можем написать линейный алгоритм для решения задачи. Он состоит из следующих этапов:

- Считаем массивы l и r. В l_i хранится индекс ближайшего элемента слева, меньшего h_i. В r_i хранится индекс ближайшего элемента справа, меньшего h_i.
- Проходим по всем высотам h_i. Максимальная площадь прямоугольника, основанного на i-том элементе, будет вычисляться по формуле $h_i \cdot (r_i - l_i - 1)$.

Заметим, что каждый этап выполняется за линейное время. Это значит, что и вся задача имеет линейную сложность $O(n)$.

Задачу можно обобщить, сделав ширину столбцов различной. Назовем её w_i. В этом случае задача также может быть решена за линейное время. При этом массивы l_i и r_i считаются также. На этапе подсчёта максимальной площади появляется проблема вычисления ширины прямоугольника, ограниченного l_i и r_i элементами. Эту проблему можно решить, предпосчитав префиксные суммы для массива w_i. Тогда мы сможем отвечать на запрос ширины прямоугольника между l_i и r_i за $O(1)$.