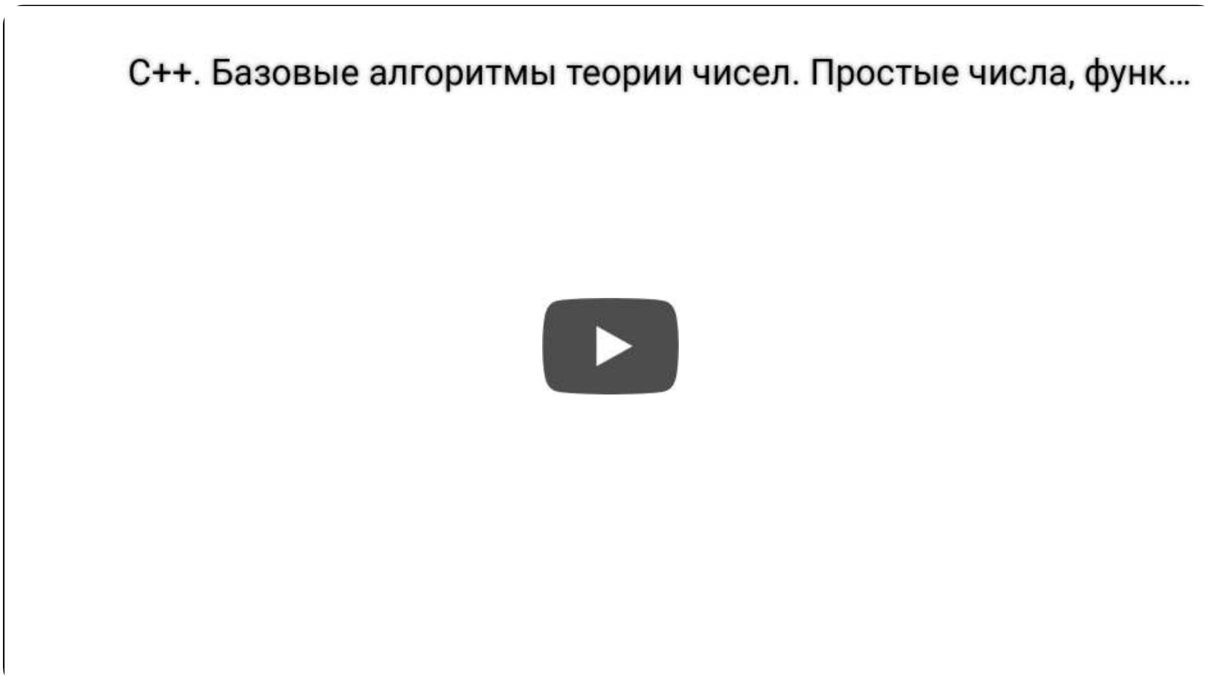
Простые числа. Функции делителей.



Натуральное число p называется простым, если у него ровно 2 различных натуральных делителя: 1 и оно само.

Рассмотрим алгоритм проверки числа на простоту. Пусть дано натуральное число n. Необходимо проверить, является ли оно простым.

Утверждение. Если n — составное, то у него найдётся натуральный делитель $d > 1$ такой, что $d \leq \sqrt{n}$.

Доказательство. Предположим, что это не так, и все делители составного числа числа n, кроме единицы, строго больше $\sqrt{n}$. Выберем теперь такой делитель d, что $1 < d < n$. Так как число n составное, то такой делитель существует. Тогда, так как $d > \sqrt{n}$, то число n/d меньше $\sqrt{n}$ и при этом является делителем n. Таким образом, мы пришли к противоречию, значит, утверждение доказано от противного.

Теперь понятно, как проверить число n на простоту за вычислительную сложность $O(\sqrt{n})$. Для этого достаточно перебрать все числа в интервале $[2; \sqrt{n}]$ и проверить, есть ли среди них хотя бы один делитель n. Если делитель нашёлся, то число n составное, а иначе — простое.

Рассмотрим некоторые функции, связанные с делителями:

- $\sigma_0(n)$ — количество делителей числа n.
- $\sigma_1(n)$ — сумма делителей числа n.

Выпишем некоторые соотношения, связанные с $\sigma_0(n)$ и $\sigma_1(n)$.

Напомним, что по основной теореме арифметики любое натуральное число $n > 1$ можно едиственным образом представить в виде произведения $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ — простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — натуральные числа.

Докажем, что $\sigma_0(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_s + 1)$.

Заметим, что любой делитель d числа n представим в виде $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$, где $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ для всех i в интервале $[0; s]$. Таким образом, значения каждого β_i можно выбрать $\alpha_i + 1$ способом. А значит, по правилу произведения из курса комбинаторики получаем формулу: $\sigma_0(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_s + 1)$.

Выпишем формулу для $\sigma_1(n)$:

$$\sigma_1(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2})\dots(1 + p_s + \dots + p_s^{\alpha_s})$$

Для доказательства этого факта достаточно раскрыть скобки у этого выражения и понять, что получается сумма из слагаемых $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$, каждое из которых является делителем числа n, и при этом в этой сумме будут встречаться все делители.

Определение. Функция f **мультипликативна**, если для любых натуральных чисел a и b, таких что $gcd(a, b) = 1$, выполнено $f(ab) = f(a)f(b)$.

Заметим, что функции $\sigma_0(n)$ и $\sigma_1(n)$ мультипликативны.