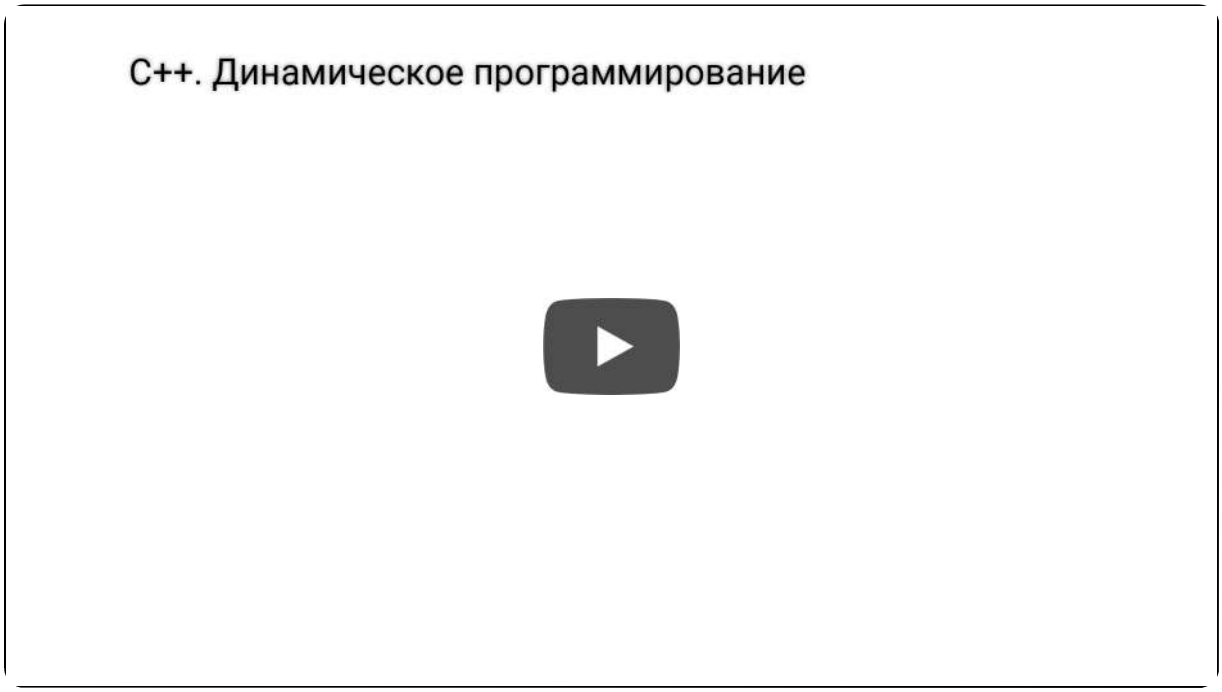
C++. Динамическое программирование.



Динамическое программирование — метод решения задачи путём разбиения её на меньшие подзадачи, которые имеют такую же структуру. Для того чтобы задача решалась методом динамического программирования, она должна обладать следующими свойствами:

- оптимальная подструктура (оптимальное решение задачи может быть составлено из оптимальных решений её подзадач)
- пересекающиеся подзадачи (одна и та же подзадача нужна для решения большого количества других подзадач)
- возможность мемоизации (ограничения на память позволяют запоминать ответы на все решённые подзадачи)

Первое свойство необходимо как для задач на динамическое программирование, так и для задач на рекурсию. Второе и третье свойства отличают задачи на динамическое программирование от задач на рекурсию и, как правило, позволяют сократить время работы с экспоненциального до полиномиального.

Рекурсивные методы решения задач, как правило, производят полный перебор

всех вариантов. Динамическое программирование также производит полный перебор всех вариантов, но делает это оптимизированно за счёт мемоизации (каждая подзадача решается только один раз и её решение сохраняется).

Задача. Нахождение N-го числа Фибоначчи. Числа Фибоначчи — это ряд чисел, который определён первыми двумя членами $F_0 = 0, F_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}, N \geq 2$. Можно выписать несколько первых членов этого ряда:

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$

$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$

Рекурсивный алгоритм нахождения N-го числа Фибоначчи выглядит следующим образом:

```
int F(int n) {
    if (n < 2) return n;
    return F(n - 1) + F(n - 2);
}
```

Этот рекурсивный алгоритм работает за экспоненциальное время. Можно показать, что время работы этого алгоритма есть $O(a^N)$, где $a \approx 1.6$.

Можно немного модифицировать этот алгоритм так, чтобы он работал по принципу динамического программирования за время $O(N)$. Для этого необходимо добавить запоминание тех подзадач, которые уже были решены. Необходимо завести массив, назовём его dp, который изначально заполнен

значениями -1. Если $dp[i]$ равно -1, то значит задача для значения i ещё не была решена, и мы будем решать её как в рекурсивном случае, в противном случае сразу вернём значение $dp[i]$, которое уже было найдено ранее и сохранено в нашем массиве. Код имеет следующий вид:

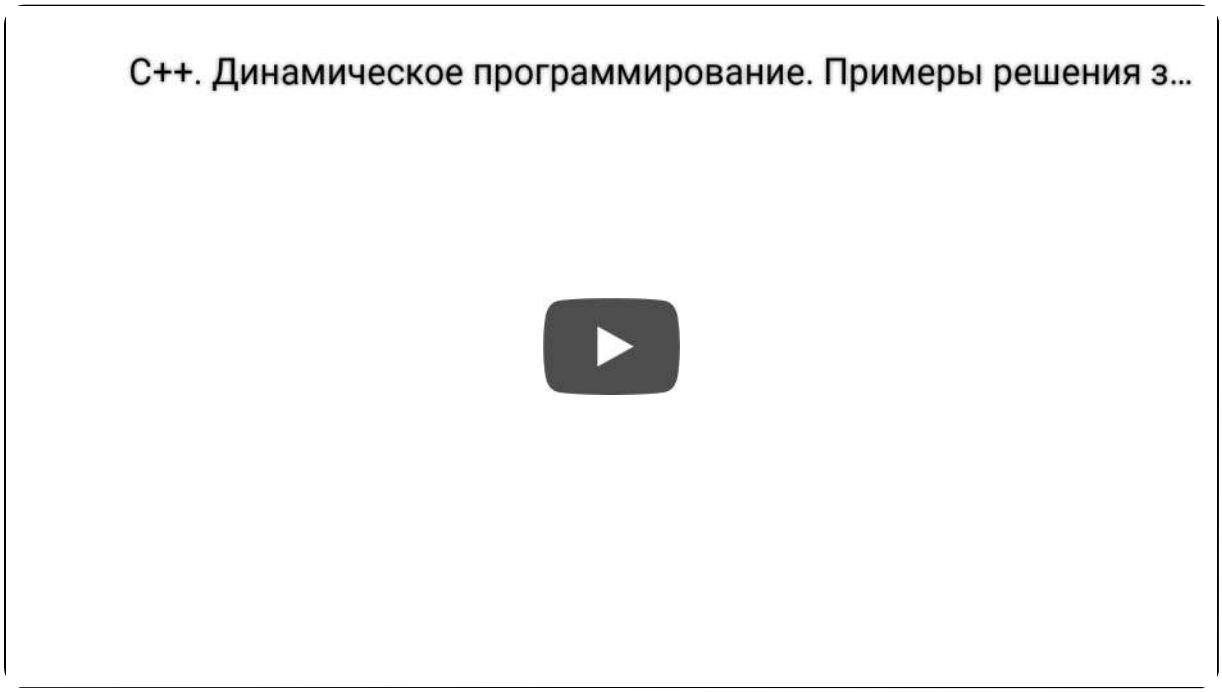
```
int F(int n) {
    if (dp[n] != -1) return dp[n];
    if (n < 2) return n;
    return dp[n] = F(n - 1) + F(n - 2);
}
```

Такой подход к реализации алгоритма принято называть нисходящим, потому что решая задачу, мы переходим к её подзадачам. Есть и восходящий подход, который состоит в решении задач подряд от меньших к большим с запоминанием результатов. Реализация такого алгоритма для $n > 0$ имеет следующий вид:

```
cin >> n;
dp.resize(n + 1);
dp[0] = 0;
dp[1] = 1;
for (int i = 2; i < n + 1; ++i)
    dp[n] = dp[n - 1] + dp[n - 2];
```

Для данного примера может показаться, что восходящий способ проще, чем нисходящий. Но если задача зависит не от одного параметра, а от двух или трёх, то нисходящий способ, как правило, оказывается проще.

Задача "Лесенка"



Задача "Лесенка"

На лестнице, состоящей из n ступеней, записаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Необходимо пройти по лестнице, стартуя перед первой ступенькой (можно считать, что старт начинается на нулевой ступени, которая соответствует поверхности земли), и дойти до последней ступени. На каждом шагу можно перейти на следующую по счёту ступень или перешагнуть через одну ступень. Необходимо найти максимальное значение, которое может принимать сумма чисел, записанных на тех ступеньках, на которые мы наступили при прохождении лестницы.

Пусть $dp[i]$ — это максимальное значение суммы чисел на пройденных ступеньках, если мы шли и остановились на ступени номер i. Для заполнения массива dp будем использовать восходящий способ.

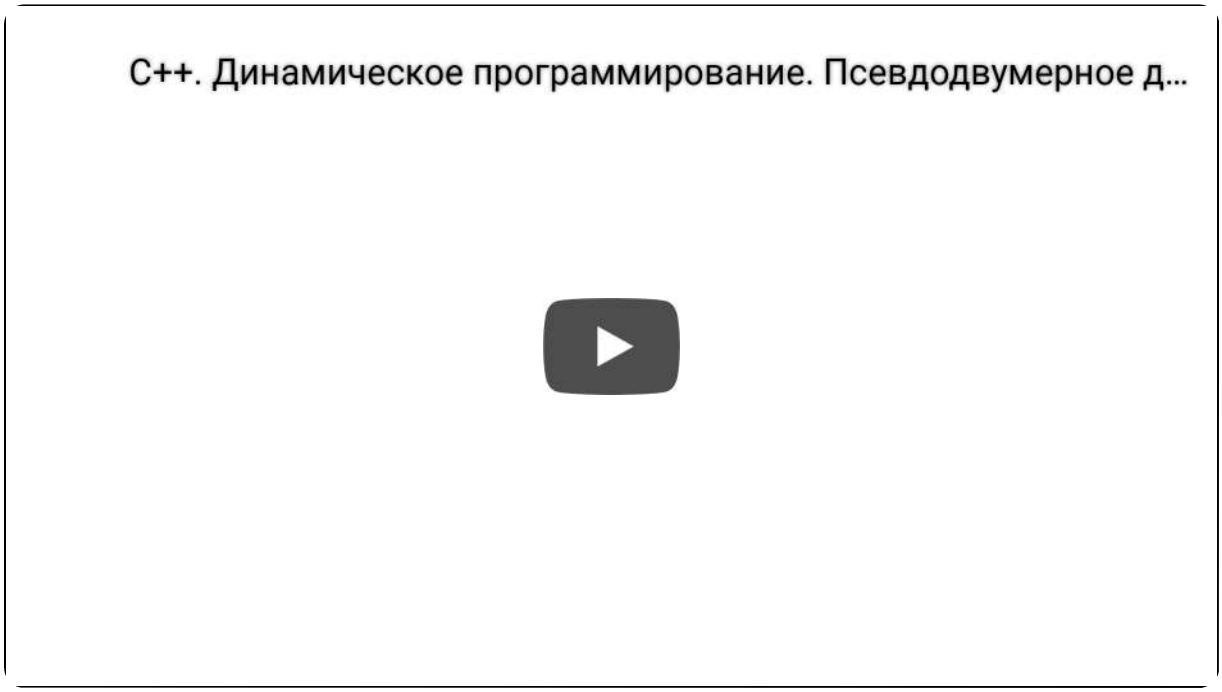
Для удобства заполнения введём так называемый барьерный элемент, а именно заполним значение $dp[0] = 0$. Далее заполним значение $dp[1] = a[1]$. Для всех ступеней, начиная со второй, будем находить значение по следующей формуле перехода: $dp[i] = \max(dp[i-1], dp[i-2]) + a[i]$, потому что на ступень i мы могли попасть или непосредственно со ступени $i-1$, или $i-2$. Нам в любом случае необходимо заранее заполнить два стартовых значения в

массиве dp, а барьерный элемент упрощает заполнение, так как пару значений $dp[0]$ и $dp[1]$ заполнить вручную проще, чем пару значений $dp[1]$ и $dp[2]$.

При решении этой задачи хорошо видно, как мы используем свойство оптимальной подструктуры. Чтобы найти оптимальную стоимость, за которую можно дойти до ступени i, мы рассматриваем ступени, из которых мы в неё могли прийти, и используем оптимальную стоимость, за которую можно дойти до этих ступеней, чтобы посчитать ответ для ступени i.

В итоге ответ будет равен значению $dp[n]$.

Псевдодвумерное динамическое программирование



Псевдодвумерное динамическое программирование это — такой тип задач, в которых уже недостаточно одномерного массива для хранения результатов, а нужен двумерный массив, но при этом одна из его размерностей мала, например, равна двум. В таком случае бывает удобно не заводить двумерный массив, а завести два одномерных массива. Также в таких задачах, как правило, заполнение значений происходит в одном цикле.

Задача. Даны два целых числа $n > 0$ и $2 \leq k \leq 10$. Требуется найти количество последовательностей длины n, которые состоят из цифр от 0 до $k - 1$ и в которых нет двух подряд идущих нулей.

Пусть $dp[i][0]$ — это количество последовательностей длины i, которые заканчиваются на цифру 0, а $dp[i][1]$ — это количество последовательностей длины i, которые заканчиваются не на цифру 0. Таким образом, мы имеем массив $dp[i][j]$, у которого вторая размерность равна двум.

Начинаем заполнение с последовательностей длины один:

$dp[1][0] = 1$

$dp[1][1] = k - 1$

Далее для всех значений $i \geq 2$ можно записать формулы пересчёта:

$dp[i][0] = dp[i-1][1]$

$dp[i][1] = (k-1) \cdot (dp[i-1][0] + dp[i-1][1])$