Lógica Proposicional

Proposiciones

- Una proposición es una oración a la que se le puede asignar un único valor de verdad : **verdadero o falso.**

Ejemplos:

- El sol está caliente.
- La Tierra está hecha de queso.
- 5 más 5 es igual a 55.
- El dígito decimal número 500 del número PI es 7.
- (Probablemente no sepa si esto último es verdadero o falso, pero seguramente es verdadero o falso).

- Las siguientes no son proposiciones (¿por qué?):
  - ¿Estas aburrido?
  - ¡Por favor, no te vayas!
  - Ella me ama.
  - x es un número entero.
  - Esta oración es falsa.

Conectores lógicos proposicionales

- En la gramática del lenguaje natural, los conectores proposicionales binarios, más otros como: pero, porque, a menos que, aunque, así que, sin embargo , etc., se denominan "**conjunciones**" porque "**juntan**", es decir, conectan oraciones.
- En lógica usamos los **conectores proposicionales para conectar proposiciones**.

Dada las proposiciones: " Dos más dos son cinco " y " El sol está caliente "

INGLES	ESPAÑOL	REPRESENT
NOT	NO	¬ negación
AND	Y	Λ conjunción
OR	O	V disyunción
THEN	ENTONCES	=> implicación
IF ONLY IF	SI y SOLO SI	<=> doble implicación o equivalencia

VARIABLES PROPOSICIONALES

p= Michael Jordan es el mejor jugador de baloncesto

q= Fumar es dañino para la salud

r= 100 es mayor que 1

- ✓ Una proposición que es verdadera para cada interpretación se dice que es una tautología o ley lógica.
- ✓ Una proposición que es falsa para cada interpretación se dice que es una contradicción o insatisfactoria.

Conectores Lógicos

Aritmética Proposicional

- *La proposición* $\neg A$ *es verdadera si y sólo si la proposición* A *es falsa .*
- *La proposición* $A \wedge B$ *es verdadera si y sólo si ambos* A *y* B *son verdaderos .*
- *La proposición* $A \vee B$ *es verdadera si y sólo si cualquiera de* A *o* B *(posiblemente ambos) es verdadero .*
- *La proposición* $A \rightarrow B$ *es verdadera si y sólo si* A *es falso o* B *es verdadero, es decir, si la verdad de* A *implica la verdad de* B *.*
- *La proposición* $A \leftrightarrow B$ *es verdadera si y sólo si* A *y* B *tienen los mismos valores de verdad .*

Tablas de Equivalencia

Conjunción

p	q	p ∧ q
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1

Disyunción

p	q	p ∨ q
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

p	¬p
1	0
0	1

Si entonces

p	q	p => q
1	0	0
0	1	1
0	0	1
1	1	1

Si y solo si

p	q	p <=> q
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1

“ Dos más dos son cinco ” y “ El sol está caliente ”

Se puede formar las proposiciones:

- “ No se **da** el caso de que dos más dos sean cinco **.** ”
- “ Dos más dos es igual a cinco **y** el sol está caliente ”**.**
- “ Dos más dos es igual a cinco **o** el sol está caliente ”**.**
- “ **Si** dos más dos es igual a cinco **, entonces** el Sol está caliente ”.
- “ Dos más dos es igual a cinco **si y solo si** el Sol está caliente **.**”

Tabla de Verdad

p	$\neg p$	p	q	$p \land q$	$p \lor q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
		F	T	F	T	T	F
		F	F	F	F	T	T

Ejemplos

- “No se da el caso de que dos más dos sean cinco” es cierto;
- “Dos más dos son cinco y el Sol calienta” es falso;
- “Dos más dos es igual a cinco o el Sol está caliente” es cierto;
- “Si dos más dos son cinco, entonces el Sol está caliente” es cierto (aunque no tiene sentido).

- *“ La lógica no es fácil o si la lógica es divertida entonces es fácil y no aburrida. ”*

- *“ (La lógica no es fácil) o ((si la lógica es divertida) entonces ((la lógica es fácil) y (la lógica no es aburrida))). ”*

“ La lógica es divertida : A

“ La lógica es aburrida ” : B

“ La lógica es fácil ” : C

$$(\neg C) \vee (A \to (C \wedge \neg B))$$

Lógica Proposicional,

- **La Conjunción en lenguaje natural** no necesariamente es conmutativa
  - “ El niño tiró la piedra y la ventana se rompió ”
  - “ La ventana se rompió y el niño tiró la piedra ”
- **En cambio, la conjunción lógica proposicional sí es conmutativa**

- La conjunción también se usa a menudo para conectar oraciones no completas sino solo partes, para evitar repeticiones.

  Por ejemplo, **" La princesita es inteligente y hermosa "** lógicamente significa **"La princesita es inteligente y la princesita es hermosa ”.**

- Varias otras palabras conjuntivas en el lenguaje natural, como *pero*, *sin embargo*, *aunque*, *mientras que*, *mientras*, etc., se traducen en lógica proposicional como conjunción lógica.

- la proposición A en la implicación A -> B se llama antecedente y la proposición B es el consecuente de la implicación.

LOGICA PROPOSICIONAL

Equivalencias Lógicas

1. Doble negación	$\sim(\sim p) \equiv p$
2. Leyes Conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
3. Leyes Asociativas	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4. Leyes Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Leyes de Idempotencia	$p \vee p \equiv p$ $\quad$ $p \wedge p \equiv p$
6. Leyes de Identidad	$p \vee F \equiv p$ $\quad$ $p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$ $\quad$ $p \wedge V \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $\quad$ $p \vee \sim p \equiv V$
7. Leyes de De Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
8. Implicación	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$
9. Contraposición	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
10. Equivalencia	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
11. Reducción al absurdo	$p \leftrightarrow q \equiv ((p \wedge \sim q) \rightarrow F)$

Lógica Proposicional

1. $p \vee p \equiv p$ (idempotent law)
2. $p \wedge p \equiv p$ (idempotent law)
3. $[p \vee q] \vee r \equiv p \vee [q \vee r]$ (associative law)
4. $[p \wedge q] \wedge r \equiv p \wedge [q \wedge r]$ (associative law)
5. $p \vee q \equiv q \vee p$ (commutative law)
6. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (commutative law)
7. $p \wedge [q \vee r] \equiv [p \wedge q] \vee [p \wedge r]$ (distributive law over ^)
8. $p \vee [q \wedge r] \equiv [p \vee q] \wedge [p \vee r]$ (distributive law over ˅)
9. $p \vee [p \wedge q] \equiv p$
10. $p \wedge [p \vee q] \equiv p$
11. $p \vee 0 \equiv p$
12. $p \wedge 1 \equiv p$
13. $p \vee 1 \equiv 1$
14. $p \wedge 0 \equiv 0$
15. $p \vee \neg p \equiv 1$
16. $p \wedge \neg p \equiv 0$ (contradiction)
17. $\neg[\neg p] \equiv p$ (double negation)
18. $\neg 1 \equiv 0$
19. $\neg 0 \equiv 1$
20. $\neg[p \vee q] \equiv \neg p \wedge \neg q$ (De Morgan's law)
21. $\neg[p \wedge q] \equiv \neg p \vee \neg q$ (De Morgan's law)
22. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (definition =>)
23. $[p \Leftrightarrow q] \equiv [p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]$ (definition <=>)

Lógica Implícita

1. $p \approx q \Rightarrow [p \wedge q]$
2. $[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow r] \approx p \Rightarrow q$
3. $\neg q \Rightarrow \neg p \approx p \Rightarrow q$
4. $[p \Rightarrow q] \wedge [\neg p \Rightarrow q] \approx q$
5. $[p \Rightarrow r] \wedge [q \Rightarrow r] \approx [p \vee q] \Rightarrow r$
6. $\neg p \Rightarrow [q \wedge \neg q] \approx p$
7. $p \Rightarrow [q \wedge \neg q] \approx \neg p$
8. $\neg p \Rightarrow p \approx p$
9. $p \Rightarrow \neg p \approx \neg p$
10. $p \Rightarrow [\neg q \Rightarrow [r \wedge \neg r]] \approx p \Rightarrow q$
11. $[p \wedge \neg q] \Rightarrow q \approx p \Rightarrow q$
12. $[p \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p \approx p \Rightarrow q$
13. $[p \Rightarrow q] \wedge [\neg p \Rightarrow r] \approx q \vee r$
14. $\neg p \Rightarrow q \approx p \vee q$
15. $p \Rightarrow q \approx q \vee \neg p$
16. $p \approx p \vee q$
17. $p \wedge q \approx p$
18. $p \approx q \Rightarrow p$

Demostración Ley de Morgan

p	q	p ∨ q
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

$\neg[p \vee q] \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	¬[p ∨ q]	¬p ∧ ¬q
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Ejercicios

Aplicar lógica proposicional al siguiente enunciado:

Si un triángulo tiene tres ángulos entonces un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen 4 ángulos rectos por consiguiente los cuadrados **no** tienen cuatro ángulos rectos.
Por lo tanto los rombos **no** tienen cuatro ángulos rectos

Identificar proposiciones :

P: un triángulo tiene 3 ángulos
Q : un cuadrado tiene 4 ángulos rectos
R : su suma vale dos ángulos rectos
S: los rombos tienen 4 ángulos rectos

$P \rightarrow Q$
$P \wedge R$
$S \rightarrow \neg Q$

$\neg S$