

# Lógica Proposicional

# Proposiciones

- Una proposición es una oración a la que se le puede asignar un único valor de verdad : **verdadero o falso**.

Ejemplos:

- El sol está caliente.
- La Tierra está hecha de queso.
- 5 más 5 es igual a 55.
- El dígito decimal número 500 del número  $\pi$  es 7.
- (Probablemente no sepa si esto último es verdadero o falso, pero seguramente es verdadero o falso ).

- Las siguientes no son proposiciones (¿por qué?):
  - ¿Estas aburrido?
  - ¡Por favor, no te vayas!
  - Ella me ama.
  - $x$  es un número entero.
  - Esta oración es falsa.

# *Conectores lógicos proposicionales*

- En la gramática del lenguaje natural, los conectores proposicionales binarios, más otros como: pero, porque, a menos que, aunque, así que, sin embargo , etc., se denominan "**conjunciones**" porque "**juntan**", es decir, conectan oraciones.
- En lógica usamos los **conectores proposicionales para conectar proposiciones**.

Dada las proposiciones: “ Dos más dos son cinco ” y “ El sol está caliente ”

INGLES	ESPAÑOL	REPRESENT
NOT	NO	$\neg$ negación
AND	Y	$\wedge$ conjunción
OR	O	$\vee$ disyunción
THEN	ENTONCES	$\Rightarrow$ implicación
IF ONLY IF	SI y SOLO SI	$\Leftrightarrow$ doble implicación o equivalencia

### VARIABLES PROPOSICIONALES

p= Michael Jordan es el mejor jugador de baloncesto

q= Fumar es dañino para la salud

r= 100 es mayor que 1

- 
- ✓ Una proposición que es verdadera para cada interpretación se dice que es una tautología o ley lógica.
  - ✓ Una proposición que es falsa para cada interpretación se dice que es una contradicción o insatisfactoria.

## Conectores Lógicos

# Aritmética Proposicional

- *La proposición  $\neg A$  es verdadera si y sólo si la proposición  $A$  es falsa .*
- *La proposición  $A \wedge B$  es verdadera si y sólo si ambos  $A$  y  $B$  son verdaderos .*
- *La proposición  $A \vee B$  es verdadera si y sólo si cualquiera de  $A$  o  $B$  (posiblemente ambos) es verdadero .*
- *La proposición  $A \rightarrow B$  es verdadera si y sólo si  $A$  es falso o  $B$  es verdadero, es decir, si la verdad de  $A$  implica la verdad de  $B$  .*
- *La proposición  $A \leftrightarrow B$  es verdadera si y sólo si  $A$  y  $B$  tienen los mismos valores de verdad .*

Conjunción

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1

Disyunción

$p$	$q$	$p \vee q$
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

# Tablas de Equivalencia

Si entonces

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	0	0
0	1	1
0	0	1
1	1	1

Si y solo si

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1

“ Dos más dos son cinco ” y “ El sol está caliente ”

Se puede formar las proposiciones:

- “ No se **da** el caso de que dos más dos sean cinco . ”
- “ Dos más dos es igual a cinco **y** el sol está caliente ”.
- “ Dos más dos es igual a cinco **o** el sol está caliente ”.
- “ **Si** dos más dos es igual a cinco , **entonces** el Sol está caliente ”.
- “ Dos más dos es igual a cinco **si y solo si** el Sol está caliente .”



# Tabla de Verdad

$p$	$\neg p$	$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
		F	T	F	T	T	F
		F	F	F	F	T	T

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$\neg\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg(q \wedge \neg r)$	$p \vee \neg(q \wedge \neg r)$	$(p \vee \neg(q \wedge \neg r)) \rightarrow \neg\neg r$
-----	-----	-----	----------	--------------	-------------------	-------------------------	--------------------------------	---

T	T	T	F	T	F	T	T	T
---	---	---	---	---	---	---	---	---

T	T	F	T	F	T	F	T	F
---	---	---	---	---	---	---	---	---

T	F	T	F	T	F	T	T	T
---	---	---	---	---	---	---	---	---

T	F	F	T	F	F	T	T	F
---	---	---	---	---	---	---	---	---

F	T	T	F	T	F	T	T	T
---	---	---	---	---	---	---	---	---

F	T	F	T	F	T	F	F	T
---	---	---	---	---	---	---	---	---

F	F	T
---	---	---

F	F	F
---	---	---

# Ejemplos

- “No se da el caso de que dos más dos sean cinco” es cierto;
- “Dos más dos son cinco y el Sol calienta” es falso;
- “Dos más dos es igual a cinco o el Sol está caliente” es cierto;
- “Si dos más dos son cinco, entonces el Sol está caliente” es cierto (aunque no tiene sentido).

- “ *La lógica no es fácil o si la lógica es divertida entonces es fácil y no aburrida.* ”
- “ *(La lógica no es fácil) o ((si la lógica es divertida) entonces ((la lógica es fácil) y (la lógica no es aburrida))).* ”

“ *La lógica es divertida* :  $A$

“ *La lógica es aburrida* ” :  $B$

“ *La lógica es fácil* ” :  $C$

$$(\neg C) \vee (A \rightarrow (C \wedge \neg B))$$

$$(\neg \mathbf{T}) \vee (\mathbf{T} \rightarrow (\mathbf{T} \wedge \neg \mathbf{F})) = \mathbf{F} \vee (\mathbf{T} \rightarrow (\mathbf{T} \wedge \mathbf{T})) = \mathbf{F} \vee (\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}) = \mathbf{F} \vee \mathbf{T} = \mathbf{T}.$$

# Lógica Proposicional,

- **La Conjunción en lenguaje natural** no necesariamente es conmutativa
  - “ El niño tiró la piedra y la ventana se rompió ”
  - “ La ventana se rompió y el niño tiró la piedra ”
- **En cambio, la conjunción lógica proposicional sí es conmutativa**
- La conjunción también se usa a menudo para conectar oraciones no completas sino solo partes, para evitar repeticiones.
  - Por ejemplo, " **La princesita es inteligente y hermosa** " lógicamente significa "La princesita es inteligente y la princesita es hermosa ".

- Varias otras palabras conjuntivas en el lenguaje natural, como *pero*, *sin embargo*, *aunque*, *mientras que*, *mientras*, etc., se traducen en lógica proposicional como conjunción lógica.

- la proposición A en la implicación  $A \rightarrow B$  se llama antecedente y la proposición B es el consecuente de la implicación.



## LOGICA PROPOSICIONAL

### Equivalencias Lógicas

1. Doble negación	$\sim(\sim p) \equiv p$
2. Leyes Conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
3. Leyes Asociativas	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4. Leyes Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Leyes de Idempotencia	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
6. Leyes de Identidad	$p \vee F \equiv p$ $p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$ $p \wedge V \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $p \vee \sim p \equiv V$
7. Leyes de De Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
8. Implicación	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$
9. Contraposición	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
10. Equivalencia	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
11. Reducción al absurdo	$p \leftrightarrow q \equiv ((p \wedge \sim q) \rightarrow F)$

# Lógica Proposicional

1.  $p \vee p \equiv p$  (idempotent law)
2.  $p \wedge p \equiv p$  (idempotent law)
3.  $[p \vee q] \vee r \equiv p \vee [q \vee r]$  (associative law)
4.  $[p \wedge q] \wedge r \equiv p \wedge [q \wedge r]$  (associative law)
5.  $p \vee q \equiv q \vee p$  (commutative law)

6.  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  (commutative law)
7.  $p \wedge [q \vee r] \equiv [p \wedge q] \vee [p \wedge r]$  (distributive law over  $\vee$ )
8.  $p \vee [q \wedge r] \equiv [p \vee q] \wedge [p \vee r]$  (distributive law over  $\wedge$ )
9.  $p \vee [p \wedge q] \equiv p$
10.  $p \wedge [p \vee q] \equiv p$

11.  $p \vee 0 \equiv p$
12.  $p \wedge 1 \equiv p$
13.  $p \vee 1 \equiv 1$
14.  $p \wedge 0 \equiv 0$
15.  $p \vee \neg p \equiv 1$
16.  $p \wedge \neg p \equiv 0$  (contradiction)
17.  $\neg[\neg p] \equiv p$  (double negation)

18.  $\neg 1 \equiv 0$
19.  $\neg 0 \equiv 1$
20.  $\neg[p \vee q] \equiv \neg p \wedge \neg q$  (De Morgan's law)
21.  $\neg[p \wedge q] \equiv \neg p \vee \neg q$  (De Morgan's law)
22.  $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$  (definition  $\Rightarrow$ )
23.  $[p \Leftrightarrow q] \equiv [p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]$  (definition  $\Leftrightarrow$ )

# Lógica Implícita

1.  $p \approx q \Rightarrow [p \wedge q]$
2.  $[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow r] \approx p \Rightarrow q$
3.  $\neg q \Rightarrow \neg p \approx p \Rightarrow q$
4.  $[p \Rightarrow q] \wedge [\neg p \Rightarrow q] \approx q$
5.  $[p \Rightarrow r] \wedge [q \Rightarrow r] \approx [p \vee q] \Rightarrow r$
6.  $\neg p \Rightarrow [q \wedge \neg q] \approx p$
7.  $p \Rightarrow [q \wedge \neg q] \approx \neg p$
8.  $\neg p \Rightarrow p \approx p$
9.  $p \Rightarrow \neg p \approx \neg p$

10.  $p \Rightarrow [\neg q \Rightarrow [r \wedge \neg r]] \approx p \Rightarrow q$
11.  $[p \wedge \neg q] \Rightarrow q \approx p \Rightarrow q$
12.  $[p \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p \approx p \Rightarrow q$
13.  $[p \Rightarrow q] \wedge [\neg p \Rightarrow r] \approx q \vee r$
14.  $\neg p \Rightarrow q \approx p \vee q$
15.  $p \Rightarrow q \approx q \vee \neg p$
16.  $p \approx p \vee q$
17.  $p \wedge q \approx p$
18.  $p \approx q \Rightarrow p$

# Demostración Ley de Morgan

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \vee q</math></b>
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

$$\neg[p \vee q] \equiv \neg p \wedge \neg q$$

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>\neg[p \vee q]</math></b>	<b><math>\neg p \wedge \neg q</math></b>
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

# Ejercicios

Aplicar lógica proposicional al siguiente enunciado:

Si un triángulo tiene tres ángulos entonces un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen 4 ángulos rectos por consiguiente los cuadrados **no** tienen cuatro ángulos rectos.

Por lo tanto los rombos **no** tienen cuatro ángulos rectos

Identificar proposiciones :

I

P: un triángulo tiene 3 ángulos

Q : un cuadrado tiene 4 ángulos rectos

R : su suma vale dos ángulos rectos

S: los rombos tienen 4 ángulos rectos

$P \rightarrow Q$

$P \wedge R$

$S \rightarrow \neg Q$

-----

$\neg S$