VIII- Logarithmes, exponentielles, puissances

A l'origine, les logarithmes ont été conçus pour remplacer les multiplications par des additions, de façon à faciliter les calculs. On doit à J. Neper, dans les années 1600, la réalisation d'une première table de logarithmes, d'où le nom de logarithme népérien qui lui est aujourd'hui associé. Jusqu'à une époque récente –les années 1960- , les règles à calcul étaient basées sur des graduations logarithmiques, avant d'être définitivement supplantées par les calculettes.

La fonction logarithme, *ln x* ou *log*(*x*) , intervient dans de nombreux domaines. Elle caractérise notamment toutes sortes de phénomènes évolutifs à croissance lente. On utilise aussi un logarithme pour définir un niveau sonore, ou encore pour l'échelle de Richter à propos des séismes. La fonction logarithme comble aussi un vide : On sait que la dérivée de x^n (avec n entier relatif) est nx^{n-1}, mais on n'obtient jamais ainsi $x^{-1} = 1/x$ (pour $n = 0$, la dérivée est 0), ou encore une primitive de x^a est $x^{a+1}/(a+1)$ sauf si $a = -1$). Maintenant c'est la fonction *ln x* qui aura comme dérivée $1/x$, ou encore une primitive de $1/x$ est *ln x*.

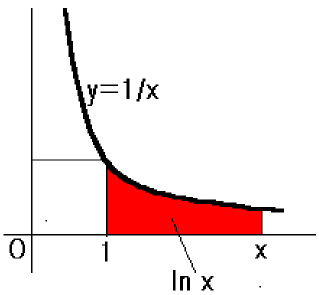
1) La fonction logarithme népérien

Définition du logarithme népérien par une intégrale (ou une aire)

Plaçons-nous sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*+}$. La fonction $y=1/x$ est continue sur cet intervalle. Elle admet des primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$, et la primitive qui s'annule pour $x=1$ est $\int_1^x \frac{1}{t}dt$. Par définition, on appelle logarithme népérien (noté *ln*) cette intégrale, soit :

$ln\ x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Si l'on veut, *ln x* est représentée par une aire algébrique (ici égale à l'aire géométrique) :



On a déjà plusieurs propriétés du logarithme qui découlent de sa définition :

- la fonction *ln* est définie sur $\mathbb{R}^{*+} =]0, \infty[$
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, et sa dérivée est $(\ln x)' = 1/x$.
- Comme la dérivée est positive, la fonction *ln* est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- *ln* 1= 0.
- Comme la fonction *ln* est croissante, on en déduit le signe de *ln x* :
  ln x >0 pour $x>1$, et *ln x* <0 sur]0, 1[.

Propriété fondamentale

Le logarithme transforme un produit en somme, et une puissance en multiplication,

soit , avec *a* et *b* > 0 et *n* entier :

$ln\ (a\ b) = ln\ a\ +ln\ b$ [1]

$ln\ (a^{n}) = n\ ln\ a$ [2] .

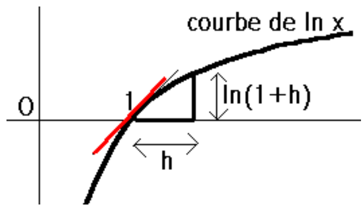
Notamment, $ln\ (1/a) = -\ ln\ a$. On a aussi $ln\ (a\ /\ b) = ln\ a - ln\ b$.

Limites

* $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ [3]

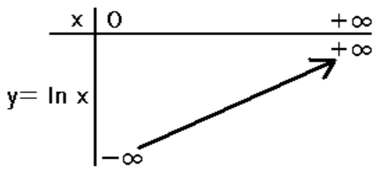
* $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ [4]

* $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ [5]



Courbe représentative

Les résultats précédents donnent le tableau de variations de la fonction *ln*, et la courbe en découle



[1] Pour le démontrer, prenons la fonction $y = ln\ ax$ sur R*+. Sa dérivée est $a\ /\ ax = 1/x$. De même que $ln\ x$, c'est une primitive de $1/x$ sur ***R****+. D'où $ln\ ax = ln\ x + K$. En faisant $x=1$, on en déduit $K = a$. D'où $ln\ ax = ln\ x + ln\ a$.

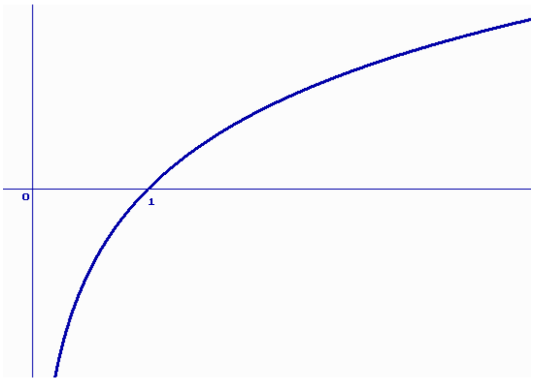
[2] Pour *n* entier, cette propriété est une conséquence de la précédente

[3] Prenons *x* sous la forme 2^{n}, d'où $ln\ 2^{n} = n\ ln\ 2$. Lorsque *n* tend vers +∞, cela revient à faire tendre *x* vers +∞, et *n* ln2 tend vers +∞.

[4] Posons $X= 1/x$. Lorsque *x* tend vers 0+, *X* tend vers +∞. $ln\ x = ln\ (1/X) = -\ ln\ X$ qui tend vers -∞ lorsque *X* tend vers +∞.

[5] Plaçons-nous au voisinage de 1. Le taux d'accroissement est $ln\ x\ /(x-1)$. En prenant comme infiniment petit $h = x - 1$, il vaut aussi $ln\ (1+h)\ /h$. En passant à la limite, le taux d'accroissement devient la dérivée de $ln\ x$ en 1, soit $1/x$ pour $x = 1$, c'est-à-dire 1.

La courbe présente deux branches infinies. D'une part, lorsque x tend vers 0, $ln\ x$ tend vers -∞. La courbe admet l'axe des y comme asymptote. D'autre part, lorsque x tend vers +∞, y tend vers +∞. En formant le rapport $ln\ x / x$, on verra qu'il tend vers 0. La courbe admet une branche parabolique de direction Ox.



Croissances comparées

Lorsque l'on cherche une limite dans le cadre d'une multiplication entre une puissance de *x* et une puissance de *ln x*, et que l'on tombe sur une forme indéterminée, la puissance de *x* l'emporte sur la puissance du logarithme.

Notamment, prenons $\frac{\ln x}{x}$ lorsque x tend vers +∞. On obtient une forme indéterminée ∞/∞. Dans ce cas, c'est x qui l'emporte (ou encore $ln\ x$ est négligeable devant x au voisinage de +∞) : $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0.

Pour démontrer que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 pour x tendant vers +∞, on procède ainsi :

- On commence par démontrer que $ln\ x < x$ sur $\boldsymbol{R}^*+$. Il suffit pour cela d'étudier la fonction auxiliaire $g(x)= x - ln\ x$, dont la dérivée est $1 - 1/x = (x-1)/x$. La dérivée est négative ou nulle sur]0, 1] et positive ou nulle sur [1, +∞[. La fonction g admet un minimum en $x = 1$ et son minimum vaut $g(1)=1$. On en déduit que g(x)>0, d'où $ln\ x < x$.
- L'inégalité précédente permet d'écrire : pour x>0, $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, soit $\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$, ou $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 2$. Alors $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Plus précisément on a l'encadrement, dès que x est supérieur à 1 : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Et quand x tend vers +∞, $\frac{\ln x}{x}$ est pris en sandwich entre 0 et une quantité qui tend vers 0, et donc tend vers 0.

Les autres cas de limites se déduisent de celui-ci, en procédant à des changements de variables.

Par exemple, prenons $x \ln x$ lorsque x tend vers 0+. Posons $X = 1/x$. Quand x tend vers 0+, X tend vers $+\infty$, et $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$, et l'on applique le résultat précédent. Finalement $x \ln x$ tend vers 0. Remarquons que la propriété de croissance comparée s'applique bien : lorsque x tend vers 0+, $x \ln x$ est de la forme indéterminée $0.\infty$. Dans ce cas, c'est x qui l'emporte et l'on a bien : $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0^-$.

Passons maintenant au cas général : $\frac{(\ln x)^a}{x^b}$ avec a et b positifs. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a une forme indéterminée ∞/∞. Pour montrer que c'est x^b qui l'emporte, on fait :

$$\frac{(\ln x)^a}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}}\right)^a$$, et l'on pose $X = x^{b/a}$, avec X qui tend aussi vers $+\infty$

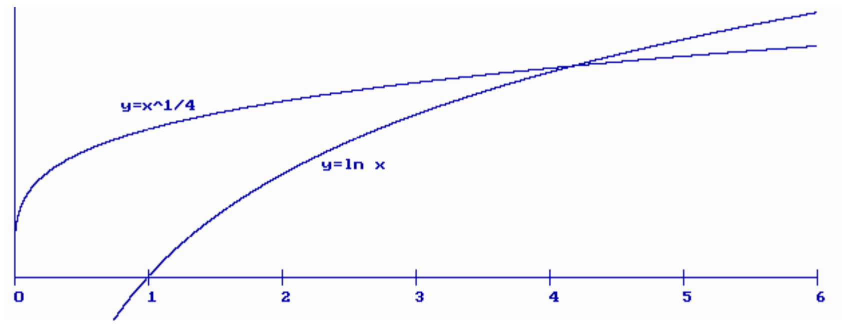
$$= \left(\frac{\ln X^{a/b}}{X}\right)^a = \left(\frac{a}{b} \frac{\ln X}{X}\right)^a.$$ Sachant que $\ln X / X$ tend vers 0, il en est de même de $\frac{(\ln x)^a}{x^b}$.

Remarque : Le fait que le logarithme soit négligeable face à une puissance de x à l'infini indique que la fonction logarithme a une croissance très lente.

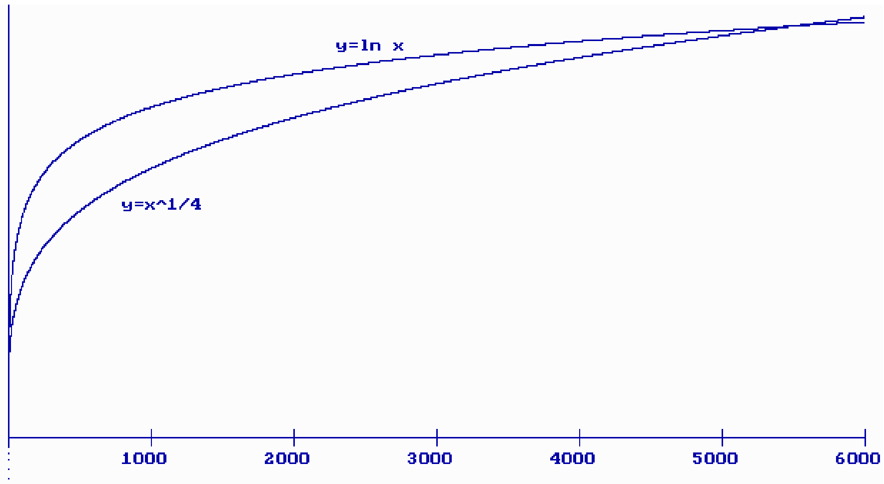
On peut le constater en comparant les deux fonctions suivantes :

Exercice : Position relative des courbes d'équation $y = \ln x$ et $y = x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$.

1) Tracer sur ordinateur ces deux courbes sur]0, 5]. Constater que la courbe du ln traverse celle de $y = x^{1/4}$. Que va-t-il se passer pour de plus grandes valeurs de x ? Le vérifier en traçant les deux courbes sur]0, 6000]. Conclure sur la position relative des deux courbes.



Avec ce tracé des deux courbes, on a l'impression que la courbe du *ln* monte plus vite que celle de $y = x^{1/4}$, puisqu'elle la dépasse pour x de l'ordre de 4,2. Mais on sait que sa croissance finit par devenir beaucoup plus lente que celle de $y = x^{1/4}$. Il est donc sûr que la courbe de $y = x^{1/4}$ va à nouveau traverser celle de *ln*. On le constate sur le dessin suivant, pour x approximativement égal à 5500. Finalement la courbe de *ln* commence par être au-dessous, puis elle passe au-dessus, et enfin repasse définitivement en dessous.

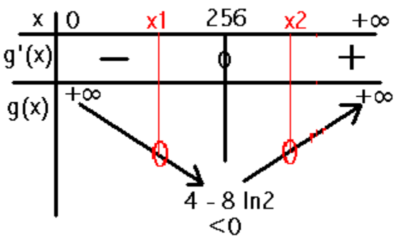


2) Vérifier cela théoriquement.

Prenons la fonction auxiliaire $g(x) = x^{1/4} - \ln x$ sur $\boldsymbol{R}$*+. Sa dérivée est :

$g'(x) = \frac{1}{4x^{3/4}} - \frac{1}{x} = \frac{x^{1/4} - 4}{4x}$. Elle s'annule pour $x^{1/4} = 4$, c'est-à-dire $x = 4^4 = 256$.

Comme la fonction $y = x^{1/4}$ est croissante, la dérivée est négative pour $x<256$, et positive pour $x>256$. D'où le tableau de variation :



Le minimum m, pour $x=256$, est négatif. Sur]0, 256], la fonction est continue et décroissante. Elle réalise une bijection de]0, 256] sur [+∞, m]. Le nombre 0, qui est dans l'ensemble d'arrivée, admet un antécédent unique x_1 de l'ordre de 4,2. Il en est de même sur l'intervalle [256, +∞[, dont l'image est [m,+∞[, avec x_2 de l'ordre de 5500 tel que $g(x_2)=0$. On en conclut que la courbe du *ln* commence par être au-dessous de celle de $y = x^{1/4}$, puis au-dessus, en enfin au-dessous.

La fonction logarithme, comme bijection de *R**+ dans *R*

Puisque la fonction *ln* est dérivable sur ***R****+, elle est aussi continue. Etant strictement croissante et continue sur *R**+, elle réalise une bijection de ***R****+ =]0, +∞[sur]*ln*(0), *ln*(+∞)[=]- ∞, +∞[= ***R***. Ainsi, tout nombre réel (de l'ensemble d'arrivée) admet un antécédent unique dans ***R****+. Notamment 1 a pour antécédent un nombre appelé e, de l'ordre de 2,718 , tel que $\ln e = 1$. [6]

[6] Comme $\ln e = 1$, on dit que *ln* est le logarithme en base e. On définit plus largement un logarithme en base a par $\log_a x = \ln x / \ln a$, et l'on a aussi $\log_a a = 1$. Notamment en base 2, si l'on a $y = 2^n$, alors $\log_2 y = n \log_2 2 = n$.

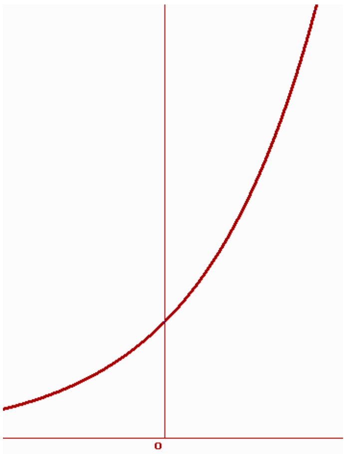
Etant une bijection, la fonction *ln* admet une bijection réciproque, appelée exponentielle, et notée pour le moment *exp*(x). On l'écrira aussi e^{x}.

2) La fonction exponentielle

Par définition, la fonction exponentielle est l'inverse du logarithme, soit :

$y = \exp(x)$ avec $x \in \boldsymbol{R}$ équivaut à $x = \ln y$ avec $y \in \boldsymbol{R}^{*}+$

D'où $\ln(\exp(x)) = x$, ce qu'on écrira aussi : $\ln e^{x} = x$
et $\exp(\ln x) = x$, ou $e^{\ln x} = x$



Les propriétés de l'exponentielle découlent de celles du logarithme.

La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\boldsymbol{R}$, avec cette particularité : la dérivée de l'exponentielle est égale à l'exponentielle :
$\exp(x))' = \exp(x)$ [7]
Elle est croissante, et réalise une bijection de $\boldsymbol{R}$ sur $\boldsymbol{R}^{*}+$. L'exponentielle est partout positive.
On a notamment $\exp(0)= 1$ et $\exp(1) = e$, ce qui conduit à choisir la notation e^{x} au lieu de $\exp(x)$: $e^{0}= 1$ et $e^{1}= e$. Les règles des puissances s'appliquent à l'exponentielle :
$e^{a+b} = e^{a} e^{b}$
$(e^{a})^{b}=e^{ab}$.

Limites:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

La courbe admet une branche parabolique de direction verticale en $+\infty$, et une asymptote horizontale qui est l'axe des x en $-\infty$.

---

[7] Pour $y = \exp(x)$ ou $x = \ln y$, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x)$

On a aussi :

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (c'est la limite du taux d'accroissement en 0).
- En cas d'indétermination entre une puissance de x et une puissance d'exponentielle en multiplication, c'est toujours l'exponentielle qui l'emporte.

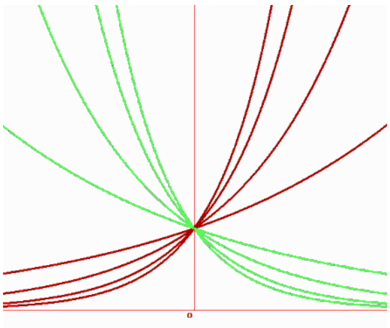
3) Exponentielles généralisées a^x

Il s'agit de la fonction a^x, où a est une constante. Par définition, puisque $a = e^{\ln a}$,

$a^x = e^{x \ln a}$.

D'où la règle : quand on a à étudier une fonction du type a^x on doit aussitôt la remplacer par $e^{x \ln a}$.

Cette fonction n'a de sens que si $a > 0$. Lorsque a est supérieur à 1, $\ln a > 0$ et la courbe de $y = a^x$ est croissante, comme pour e^x. Mais si a est strictement compris entre 0 et 1, $\ln a$ est négatif, et la courbe est décroissante, comme pour e^{-x}. La dérivée $(a^x)'$ s'obtient en dérivant $e^{x \ln a}$, d'où $(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a$.



En rouge les courbes de $y = 4^x, 3^x, 2^x, \sqrt{2}^{\,x}$
en vert celles de $(1/4)^x, (1/3)^x, (1/2)^x, (1/\sqrt{2})^x$

4) Fonctions puissances

Il s'agit de x^a. On connaît déjà cette puissance lorsque a est un entier relatif, ou un nombre rationnel (une fraction d'entiers). Grâce à l'exponentielle et au logarithme, cette fonction puissance va maintenant avoir un sens pour a réel quelconque, puisque par définition :

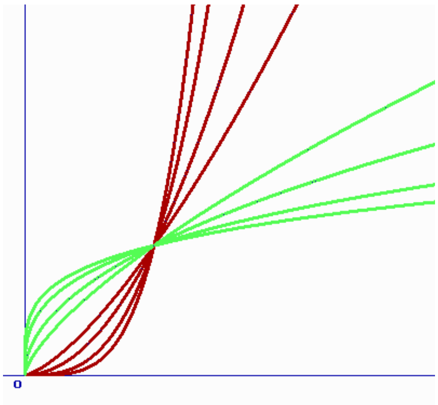
$x^a = e^{a \ln x}$

Quand on a à étudier une fonction du type x^a on aura intérêt à la remplacer aussitôt par $e^{a \ln x}$.

Lorsque a est un nombre réel quelconque, cette fonction n'existe que pour $x>0$.

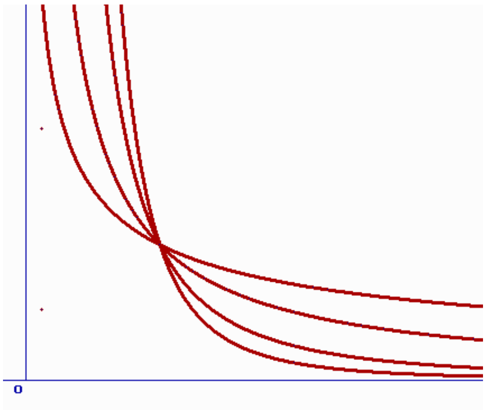
Sa dérivée sur $\boldsymbol{R}^*{+}$ est $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a\, x^{a-1}$. On retrouve la formule classique de dérivation d'une puissance.

Selon les valeurs de *a*, la courbe représentative présente l'une des formes suivantes.



Cas ou l'exposant *a* est positif :

* Lorsque *a* est supérieur à 1, on retrouve une demi-parabole d'axe vertical pour $y = x^2$, et une forme analogue dans le cas général.
* Lorsque *a* est entre 0 et 1, on retrouve la demi-parabole d'axe horizontal pour $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$



Cas où l'exposant *a* est négatif, on retrouve notamment une branche d'hyperbole pour $a = -1$ ($y = 1/x$)

5- Exercices

Exercice 1

On considère la fonction telle que $f(x) = x^x$.

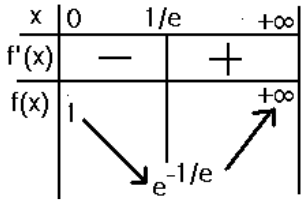
1) Donner son ensemble de définition, et étudier cette fonction. Tracer la courbe représentative.

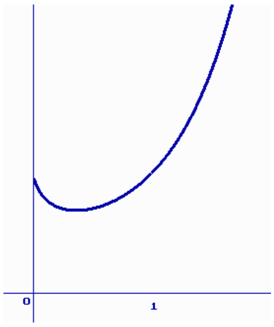
Pour traiter cette fonction de *x*, le seul moyen est d'écrire $x^x = e^{x \ln x}$. Cette expression existe si et seulement si $x > 0$, à cause du logarithme. D'où l'ensemble de définition $D = \boldsymbol{R}^{*+}$. Comme mélange de fonctions classiques, la fonction est continue et dérivable sur *D*. La dérivée est : $f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + \frac{x}{x}) = f(x)(\ln x + 1)$. Comme $f(x)$ est toujours positif, à cause de l'exponentielle, la dérivée est du signe de $\ln x + 1$. Elle s'annule pour $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} = 1/e \approx 0{,}37$. Comme $\ln x$ est une fonction croissante., $\ln x + 1$ aussi, elle passe donc du signe moins au signe plus quand *x* augmente.

On en déduit le tableau de variations, la fonction admet un minimum en $1/e$, et celui-ci vaut $(1/e)^{1/e} = (e^{-1})^{1/e} = e^{-1/e} \approx 0{,}69$.

Lorsque x tend vers 0+, x ln$x$ prend la forme indéterminée 0 . ∞, mais dans ce cas c'est x qui l'emporte, et x lnx tend vers 0, d'où $y= e^{x\ln x}$ tend vers 1.

Lorsque x tend vers +∞, x ln$x$, de la forme +∞ .+∞, tend vers +∞, et l'exponentielle aussi. Pour étudier cette branche infinie, formons $\frac{y}{x}=\frac{x^x}{x}=x^{x-1}=e^{(x-1)\ln x}$, on constate que ($x$ – 1) ln$x$ tend vers + ∞, donc y/x tend vers l'infini, ce qui indique que la courbe admet une branche parabolique de direction Oy.





2) Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0. En appelant $\underline{f}$ la fonction prolongée, est-elle dérivable en 0 ?

Prenons comme fonction prolongée $\underline{f}$ telle que $\underline{f}(x)$ = $f(x)$ sur ***R****+, et $\underline{f}(0)$ = 1. Cette fonction est maintenant définie sur ***R***+. Comme $\underline{f}$ admet une limite 1 lorsque x tend vers 0 et qu'on a aussi $\underline{f}(0)$=1, cette fonction est continue en 0.

Pour étudier la dérivabilité en 0, formons le taux d'accroissement au voisinage de 0, en utilisant le fait que x ln$x$ tend vers 0 : $\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\ln x$. On sait que $\frac{e^X-1}{X}$ tend vers 1 lorsque X tend vers 0, d'où $\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$ aussi. Comme ln$x$ tend vers -∞, le taux d'accroissement tend vers -∞. La fonction n'est pas dérivable en 0, mais la courbe admet une tangente verticale en ce point.

Exercice 2

Etudier la fonction *f* telle que $f(x)=x\frac{e^x+1}{e^x-1}$

La division est impossible si e^x = 1, soit x = 0. D'où l'ensemble de définition ***R****.

Formons $f(-x)=-x\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-x\frac{e^{-x}(1+e^x)}{e^{-x}(1-e^x)}=f(x)$. Même si cela ne se voyait pas, la fonction est paire. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, et on peut réduire l'intervalle d'étude à ***R****+.

Limite en 0 : $f(x)$ est de la forme indéterminée 0 / 0, mais on a $f(x)=\frac{x}{e^x-1}(e^x+1)$ et l'on sait que $\frac{e^x-1}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. $f(x)$ tend donc vers 2 (on pourrait d'ailleurs prolonger f par continuité en 0).

Limite en $+\infty$: Comme $\frac{e^x+1}{e^x-1}\approx\frac{e^x}{e^x}=1$, $f(x)\approx x$ tend vers $+\infty$. Pour étudier la branche infinie, formons $f(x) / x$ qui tend vers 1. Enfin :

$f(x)-x=x(\frac{e^x+1}{e^x-1}-1)=x\frac{2}{e^x-1}\approx\frac{2x}{e^x}$, dans ce cas d'indétermination ∞/∞ l'exponentielle l'emporte, et $f(x)-x$ tend vers 0. La courbe admet une asymptote oblique qui est la première bissectrice du repère, d'équation $y = x$.

Dérivée : $f'(x)=\frac{e^{2x}-2xe^x-1}{(e^x-1)^2}$. Pour connaître son signe, qui est celui du numérateur, prenons la fonction auxiliaire $g(x)=e^{2x}-2xe^x-1$, dont la dérivée est $g'(x) = 2e^x(e^x - x - 1)$. La courbe de l'exponentielle est située au-dessus de sa tangente en O d'équation $y = x + 1$, d'où $g'(x)$ est toujours positive, et g est croissante sur $\boldsymbol{R}+$ à partir de $g(0)=0$. A son tour g est positive sur $\boldsymbol{R}^*+$, et $f'(x)$ aussi, d'où f est croissante sur $\boldsymbol{R}^*+$.