XXII. 전기장

Electric field

22.1 전기장

공간상에 $\rho(\vec{r})$의 전하분포(또는 점전하 q)와 시험전하 q_0의 상호작용은 다음과 같이 일어난다.

1. 전하분포 $\rho(\vec{r})$또는 점전하 q가 주위 공간에 전기장을 형성한다.
2. 이렇게 형성된 전기장 안에 시험전하 q_0가 놓이면 q_0는 전기장에 의해 힘을 받는다.

주어진 전하분포에 의한 점 P에서 **전기장 $\vec{\boldsymbol{E}}$**는 P에 놓인 시험전하 q_0가 무한히 작아질 때 단위 전하당 받는 힘을 뜻한다.그 단위는 [N/C]이다.

전기장선은 전기장의 형태를 가시화하는 방법이다. 전기장선과 전기장 벡터 사이에는 다음 관계가 있다.

- 어떤 점에서 직선 전기장선의 방향이나 곡선 전기장선의 접선 방향이 그 점에서 전기장 벡터 $\vec{E}$의 방향이다.
- 전기장선에 수직한 평면의 단위 면적당 전기장선의 수가 $\vec{E}$의 크기와 비례한다.

전기장선은 양전하에서 출발해 멀어지는 쪽으로 뻗어 나가고, 음전하 쪽으로 모여든다.

22.2 점전하가 만드는 전기장

점전하로부터 r인 곳에 양의 시험전하 q_0가 놓여 있으면

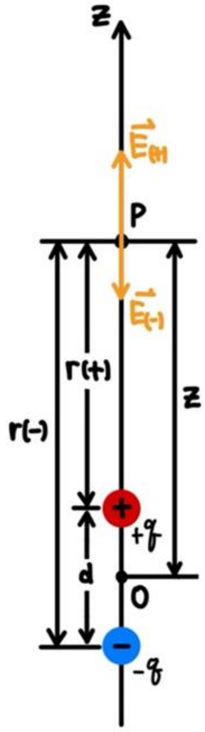
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r} \quad (\text{정전기력})$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad (\text{전기장})$$

이때 전기장의 방향은 힘의 방향과 같고, 전기장의 범위는 점전하 주위 모든 점이다.

여러 점전하가 있다면 이들이 만드는 알짜 전기장은 중첩 원리를 통해 구할 수 있다.

22.3 전기쌍극자가 만드는 전기장



왼쪽과 같이 거리 d 만큼 떨어진 두 점전하 $q, -q$로 이루어진 전기쌍극자가 있다고 하자. 두 점전하를 잇는 축 위의 한 점 P에서의 전기장을 구해보자.

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2x}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2x}\right)^{-2}\right] \end{aligned}$$

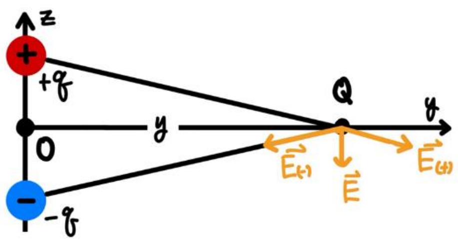
이때 $z \gg d$ 라면 이항정리를 이용한다.

$$z \gg d \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[1+\frac{d}{z}-1+\frac{d}{z}\right] = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

전기 쌍극자모멘트 $\vec{p} = qd\hat{z}$ 를 사용하면 다음과 같이 정리된다.

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}$$

이번엔 전기쌍극자의 중심에서 수직으로 y만큼 떨어진 점 Q에서의 전기장의 크기를 구하자.



y방향 성분은 서로 상쇄된다. z방향 성분만 구하자.

점 Q에서 두 전하까지 거리 같으므로

$$\begin{aligned} E &= 2E_z = 2E_{(+)}\sin\theta \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{y^2+d^2/4}\right)\left(\frac{d/2}{\sqrt{y^2+d^2/4}}\right) \end{aligned}$$

여기서 θ는 y축과 점전하와 점 Q를 잇는 직선의 사잇각이다. 따라서,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{(y^2+d^2/4)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{y^3}\left(1+\frac{d^2}{4y^2}\right)^{-3/2}$$

이고, 만약 $y \gg d$라면 다음과 같다.

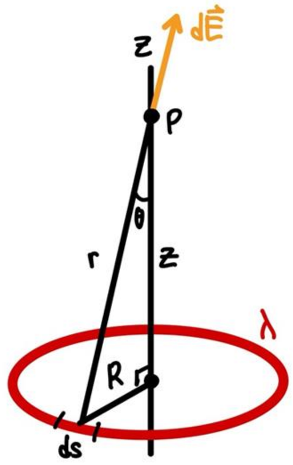
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{y^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$$

주목할 점은 쌍극자 주변의 점에서 전기장의 크기는 쌍극자 중심으로부터 떨어진 거리의 세제곱에 반비례한다는 점이다(근사를 적용하였을 때). 따라서 쌍극자의 전기장이 단일 점전하에 의한 전기장보다 더 급격하게 감소한다는 것을 알 수 있다.

22.4 선전하가 만드는 전기장

연속적이며 균일한 전하 분포의 경우 적분을 이용해 전기장을 계산하는 것이 일반적이다. 이때 전하 밀도로 표현하는 것이 편리하다,

아래와 같이 선전하밀도 λ인 반지름 R의 얇은 플라스틱 고리가 있다. 고리의 중심으로부터 수직으로 z만큼 떨어진 지점 P에서 전기장의 크기를 구하자.



$$dq = \lambda ds, dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2}$$

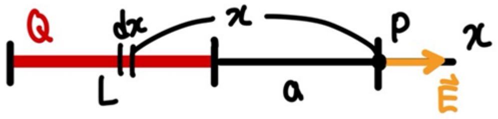
$$dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}ds$$

$$E = \int dE cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ 이므로

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\ (+z\ 방향)$$

아래와 같이 전하량 Q인 길이 L의 얇은 막대가 있다. 막대의 연장선상에 있는 점 P에서의 전기장의 크기를 구하자,



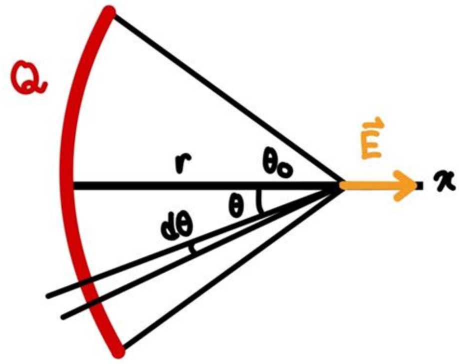
$$dq = \lambda dx, dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}$$

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)$$

여기서 $\lambda = \frac{Q}{L}$ 이므로

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)\ (+x\ 방향)$$

아래와 같이 전하량 Q인 반지름 r의 원호 모양의 선전하가 있다. 원호 중심에서의 전기장의 크기를 구하자.



$$dq = \lambda dx = \lambda r d\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\, d\theta$$

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta\, d\theta$$

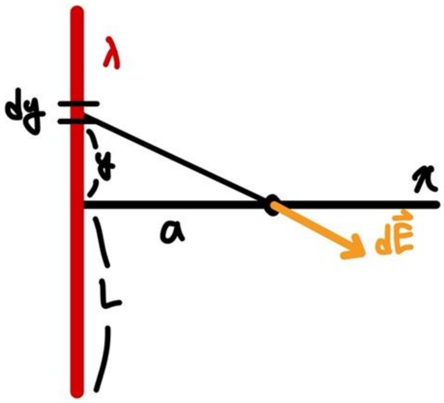
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta_0$$

여기서 $\lambda = \frac{Q}{2r\theta_0}$이므로

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\ (+x\,방향)$$

아래와 같이 선전하밀도 λ이고 길이 $2L$인 막대의 중심으로부터 막대에 수직하게 a만큼 떨어진 점에서 전기장의 크기를 구하자.

y축 방향 전기장 성분은 대칭성에 의해 상쇄될 것이다. 따라서 x축 방향 성분만 구한다.



$$dq = \lambda dy$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{a^2+y^2}\frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}}$$

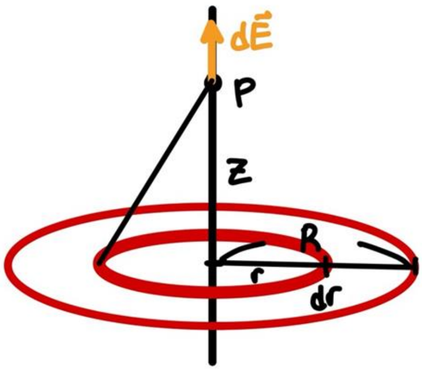
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a dy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

따라서

$$E_x = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2L}{\sqrt{a^2+L^2}}$$

22.5 대전된 원판이 만드는 전기장

면전하밀도가 σ인 반지름 R인 얇은 원판이 있다. 원판의 중심으로부터 수직하게 z만큼 떨어진 점 P에서 전기장의 크기를 구하자.



$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\frac{2rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

따라서

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)\ (+z\text{ 방향})$$

여기서 z는 유한한데 R이 무한히 커지면, 즉 무한 평면이 되면 전기장은 아래와 같이 수렴한다.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

반대로 R이 유한한데 z가 0으로 수렴해도 같은 효과가 발생한다.

22.6 전기장 안의 점전하

전기장 안에서 대전된 입자에 작용하는 정전기력은 다음과 같다.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

여기서 $\vec{E}$는 외부 전기장으로, 입자 자신이 만드는 장은 포함되지 않는다.

이를 이용한 실험인 밀리컨의 기름방울 실험으로 기본전하를 측정할 수 있었다.

$cf)$ 밀리컨의 기름방울 실험

스위치 열고(전기장 X) 종단 속력 측정: (중력) = (부력) + (저항력), $F = 6\pi\eta r v\ (Stoke's\ law)$

$$\therefore 0 = \frac{4\pi}{3}r^3(\rho_0-\rho_a)g - 6\pi\eta r v_t, r = \sqrt{\frac{9\eta r v_t}{2(\rho_0-\rho_a)g}}$$

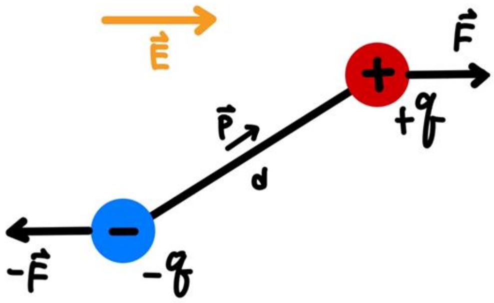
스위치 닫으면 외부 전기장 의한 힘 작용, (중력) = (부력) + (저항력)+(전기력)

$$qE = \frac{4\pi}{3}r^3(\rho_0-\rho_a)g - 6\pi\eta r v = \frac{4\pi}{3}r^3(\rho_0-\rho_a)g\left(1-\frac{v}{v_t}\right)$$

$$q = \frac{18\pi}{E}\sqrt{\frac{v_t^3\eta^3}{2(\rho_0-\rho_a)g}}\left(1-\frac{v}{v_t}\right),\ \ q = ne(n = \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

22.7 전기장 안의 쌍극자

$\vec{E}$와 $\vec{p}$로 쌍극자의 운동을 설명할 수 있다. 전기장 안에서 쌍극자의 토크는 다음과 같이 계산된다.



$$\tau = Fx\sin\theta + F(d-x)\sin\theta = Fd\sin\theta$$

$$\tau = qEd\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

주의: θ가 작아지는 방향으론 $\tau = -pE\sin\theta$ 이다.

전기쌍극자는 $\vec{E}$와 $\vec{p}$가 나란할 때 가장 낮은 퍼텐셜 에너지를 가진다.

$$U = -W = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\tau d\phi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} pE\sin\phi\, d\phi = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

따라서 $\theta = 0$일 때 최소 퍼텐셜 에너지, $\theta = \pi$일 때 최대 퍼텐셜 에너지를 가진다.