II. 직선운동

Motion Along a Straight Line

2.1 위치, 변위, 평균속도

위치와 변위

물체의 위치는 어떤 기준점에 대한 상대적 위치로 나타내며, x축과 같은 수직전에서는 **원점**(또는 영점)이 기준점이다. 축의 **양의 방향**은 숫자 또는 좌표가 증가하는 오른쪽 방향이고, 반대 방향은 **음의 방향**이다. 위치는 시간 t의 함수인 $x(t)$로 나타낼 수 있다.

위치 x_1에서 다른 위치 x_2까지의 거리를 **변위** $\Delta\boldsymbol{x}$라 하고 다음과 같이 표기한다.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

변위는 방향과 크기를 가지는 **벡터량**이다.

평균속도와 평균속력

평균속도 v_{avg}는 특정한 시간간격 Δt와 그동안의 변위 Δx의 비율로 다음과 같이 나타낸다.

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

이것을 그래프로 해석하면, 평균속도는 $x - t$ 그래프에서 특정한 두 점을 연결하는 직선의 기울기이다. 한 점은 $(x_i\ , t_i)$, 다른 한 점은 $\left(x_f, t_f\right)$ 일 것이다.

평균속력 s_{avg}는 변위를 포함하는 평균속도와 달리 방향을 고려하지 않고 움직인 전체 거리(이동 거리)만을 고려한다. 평균속력은 방향을 포함하지 않아 부호가 없다.

$$s_{avg} = \frac{이동\ 거리}{\Delta t}$$

2.2 순간속도와 속력

순간속도와 순간속력

주어진 순간의 속도를 **순간속도**라 한다. 어느 순간의 속도는 시간간격 Δt가 0에 수렴할 때의 평균속도로 구할 수 있다. Δt가 점점 작아짐에 따라 평균속도는 극한값으로 접근한다.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

이 식을 통해 v는 주어진 순간에 입자의 위치 x가 시간에 따라 변하고 있는 비율이다. 즉 v는 t에 대한 x의 미분이다. 이를 그래프로 해석하면, 어느 순간의 v는 $x-t$ 그래프(곡선)에서 그 순간을 나타내는 점에서의 기울기이다. 순간속도도 벡터량으로, 크기와 방향을 가진다. **속력**은 속도의 크기로, 방향을 무시한 속도이다. (주의: 속력과 평균속력은 완전히 다를 수 있다.)

2.3 가속도

입자의 속도가 변할 때 입자는 **가속도** 운동을 한다. 한 축을 따라 움직일 때 시간간격 Δt 동안의 **평균가속도** a_{avg}는 다음과 같이 정의한다.

$$a_{avg} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

시간 t_i에서 입자의 속도는 v_i이고, t_f에서의 속도는 v_f이다. **순간가속도**는 시간에 대한 속도의 미분함수로 다음과 같다. 즉, 임의의 순간의 입자의 가속도는 그 점에서 $v(t)$ 곡선의 기울기이자, 위치함수 $x(t)$의 시간에 대한 2차 미분이다. 가속도는 크기와 방향을 갖는 벡터량이다.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.4 등가속도 운동

대부분의 운동에서 가속도는 일정한 경우가 많으므로 이런 경우에 대한 운동방정식을 구해볼 필요가 있다. 가속도가 일정하다면 평균가속도와 순간가속도는 같으며 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$a = a_{avg} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

여기서 v_0는 시간 $t = 0$에서의 속도이고, v는 이 이후의 시간 t에서의 속도이다. 속도를 가속도에 대해 표현하자.

$$v = v_0 + at$$

같은 방법으로 평균속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_{avg} = \frac{x - x_0}{t - 0}, \qquad x = x_0 + v_{avg}t$$

여기서 x_0는 시간 $t = 0$에서의 입자의 위치이다.

속도함수는 시간에 대해 선형적으로 증가하므로 평균속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_{avg} = \frac{1}{2}(v_0 + v) = v_0 + \frac{1}{2}at$$

위 식을 위치에 관한 식에 대입하면

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

또, 이를 이용해 다음과 같은 식도 만들 수 있다.

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0)$$

이번엔 가속도를 적분하여 위 식들을 유도해보자.

$$dv = adt$$

$$\int dv = \int adt = a\int dt$$

$$v = at + C$$

적분상수 C는 $t = 0$을 대입했을 때 속력으로 v_0에 해당한다. 같은 방법으로

$$dx = vdt$$

$$\int dx = \int vdt = \int (v_0 + at)dt = v_0 \int dt + a\int tdt$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C'$$

적분상수 C'는 $t = 0$을 대입했을 때 위치로 x_0에 해당한다.

2.5 자유낙하 가속도

자유낙하 시 물체는 일정한 가속도로 가속된다. 이 가속도를 **자유낙하 가속도**(또는 중력 가속도) 라고 부르며 g로 표기한다. 그 값은 대략 9.8 m/s^2이다.

2.6 그래프 적분을 이용한 운동 해석

물체의 가속도와 시간 관계의 그래프에서 적분하여 어떤 주어진 구간에서 물체의 속도를 구할 수 있다.

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} adt$$

이는 시간 t_0에서 t_1까지 시간 축과 가속도 곡선 사이 면적이라는 기하학적 의미를 가진다. 같은 방법으로 위치도 속도-시간 그래프를 적분하여 계산할 수 있다.

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

이는 시간 t_0에서 t_1까지 시간 축과 속도 곡선 사이 면적이라는 기하학적 의미를 가진다.