I. 미분방정식

Differential Equations

1.1 정의와 용어

미분방정식의 정의

하나 또는 둘 이상의 독립변수에 대해, 하나 또는 그 이상의 미지의 함수 (또는 종속변수)의 도함수를 포함하는 방정식을 **미분방정식(DE, differential equation)**이라 한다.

미분방정식은 형태(type), 계수(order), 선형성(linearity) 등을 기준으로 분류할 수 있다.

종류에 따른 DE의 분류

하나의 독립변수에 대해 하나 또는 그 이상의 미지의 함수의 상도함수만을 포함하는 방정식을 **상미분방정식(ODE, ordinary differential equation)**이라 한다.

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy = 0, \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + 3y$$

두 개 또는 그 이상의 독립변수에 대해 하나 또는 그 이상의 미지의 함수의 편도함수를 포함하는 방정식을 **편미분방정식(PDE, partial differential equation)**이라 한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

상도함수의 표시

상도함수는 1. 라이프니츠식 표기법(Leibniz notation)과 2. 프라임 표기법(prime notation)으로 표기될 수 있다.

라이프니츠식 표기법: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$

프라임 표기법: $y', y'', y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$

프라임 표기법은 4계 도함수 이상에 대해선 y''''등으로 표기하지 않고 숫자로 표현한다. 라이프니츠식 표기법은 독립변수와 종속변수 모두 명확히 나타낸다는 점에서 프라임 표기법과 다르다. 이외에도 물리학 등의 분야에선 뉴턴의 점 표기법(dot notation)도 쓰인다.

계수에 따른 DE의 분류

미분방정식의 계수(order of differential equation)는 DE에서 가장 높은 도함수의 계수를 의미한다. 예를 들면,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 2y = e^{2x}$$

위 ODE는 2계 상미분방정식이다. 1계 상미분방정식은 종종 아래와 같이 **미분형식(differential form)**으로 쓰이기도 한다.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

기호 하나의 종속변수를 갖는 n계 상미분방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

그러면 F는 $n+2$개 변수 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$의 실수 값인 함수이다. $y^{(n)}$을 나머지 $n+1$개 변수로 유일하게 표현할 수 있다고 생각한다면 다음과 같이 이를 나타낼 수 있을 것이다.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

이를 $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$의 **정규형(normal form)**이라고 한다. 예를 들어 다음 두 정규형은 각각 1계와 2계 상미분방정식을 나타낸다.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

선형성에 따른 DE의 분류

함수 F가 $y, y', \cdots, y^{(n)}$에 대해 선형이면 n계 상미분방정식은 **선형(linear)**이라고 한다. 선형 ODE는 다음과 같이 표현될 것이다.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

or

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

이때 종속변수 y와 모든 도함수 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$의 차수는 1이며, 이들의 계수 $a_0, a_1, \cdots, a_n$는 상수이거나 독립변수 x에만 의존한다.

비선형(nonlinear) ODE는 선형이 아닌 ODE를 뜻한다. 좌변에 $\sin y, e^y$등의 항이 나타나면 그 ODE는 비선형 ODE가 된다.

상미분방정식의 해

구간 I에서 정의되고 I에서 적어도 n개의 연속인 도함수를 갖는 임의의 함수 ϕ를 n계 상미분방정식에 대입했을 때 미분방정식을 만족한다면 ϕ를 구간에서 방정식의 해(solution)라고 한다.

즉 n계 상미분방정식의 해 $\phi(x)$는 적어도 n개의 도함수를 갖고 구간 I에 대해 다음을 만족한다.

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0$$

예를 들어 $y = e^{x^2}$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $\frac{dy}{dx} = 2xy$의 해가 된다.

여기서 구간 I는 정의구간(interval of definition), 존재구간(interval of existence), 유효구간(interval of validity) 또는 해의 정의역(domain of solution) 등으로 불린다.

구간 I에서 항등적으로 0이 되는 미분방정식의 해를 자명한 해(trivial solution)이라고 한다.

해곡선

상미분방정식의 해 ϕ의 그래프를 **해곡선(solution curve)**이라고 부른다. ϕ는 미분 가능한 함수이므로 정의구간 I에서 연속이다, 이 때, 함수 ϕ의 정의역과 해(solution) ϕ의 정의구간 I는 다를 수 있다. 따라서 둘의 그래프도 차이 날 수 있다.

같은 함수 ϕ라도 함수로 정의될 때와 미분방정식의 해로 정의될 때의 정의역이 다르다. 예를 들어 $y = \frac{1}{x}$가 함수로 정의되었을 때는 정의역이 0을 제외한 모든 실수이다. $y = \frac{1}{x}$은 선형 1계 ODE $xy' + y = 0$의 해이기도 하다. 어떤 미분방정식의 해라고 말할 수 있는 것은 구간 I에서 정의되고 그 구간에서 미분 가능하며 방정식을 만족하는 함수라는 것을 의미한다. $y = \frac{1}{x}$은 $x = 0$ 에서 미분 불가능하므로 $(-\infty, 0), (4, \infty)$와 같이 0을 포함하지 않는 임의의 구간 위에서 미분방정식의 해가 된다. 그러나 구간 I를 $(4, \infty)$로 택했을 때 $y = \frac{1}{x}$로 정의된 해곡선은 정의구간 $(0, \infty)$에서 $y = \frac{1}{x}$로 정의된 해곡선의 일부분에 불과하기 때문에 구간 I는 가능한 한 큰 구간으로 선택한다. $((-\infty, 0), (0, \infty)$로 정의)

양함수 해와 음함수 해

종속변수가 단지 독립변수와 상수로만 표현된 해를 **양함수 해(explicit solution)**라고 한다. 그러나 모든 미분방정식의 해가 양함수 해 $y = \phi(x)$로만 구해지진 않는다. 가끔은 해 ϕ를 음함수적으로 정의한 $G(x, y) = 0$ 표현 또는 관계식을 만족해야만 한다.

관계식 $G(x, y) = 0$에 대하여 구간 I에서 미분방정식과 관계식을 만족하는 함수 ϕ가 적어도 하나 존재할 때 $G(x, y) = 0$를 구간 I에서 상미분방정식의 **음함수 해(implicit solution)**라고 한다. 관계식 $G(x, y) = 0$은 구간 I에서 함수 ϕ(양함수 꼴)가 숨겨져 있을 것이란 가정 하에 구간 I에서 상미분방정식의 음함수 해이다.

예를 들어 $x^2 + y^2 = 25$는 개구간 $(-5, 5)$에서 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$의 음함수 해이다. 이 음함수 해는 두 개의 양함수 해 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$를 포함하고 있다.

해들의 집합족

1계 미분방정식 $F(x,y,y')=0$의 해를 구할 때, 항상 한 개의 임의의 상수 c를 포함하는 해 집합 $G(x,y,c)=0$을 **1개의 매개변수를 갖는 해의 집합족(one-parameter family of solution)**이라 한다. 마찬가지로 n계 미분방정식 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 의 임의의 n 개의 상수 $c_1,c_2\cdots,c_n$ 을 포함하는 해 집합 $G(x,y,c_1,c_2\cdots,c_n)=0$을 **$n$개의 매개변수를 갖는 해의 집합족($n$-parameter family of solution)**이라 한다.

미분방정식은 매개변수(들)의 무한한 선택에 대응하는 무한히 많은 해를 가질 수 있다. 그러나 때때로 미분방정식은 해의 집합족의 원소가 아닌 해를 갖는다.

임의의 상수 c가 들어있지 않은 해, 즉 c에 특정한 값을 대입한 해를 **특수해(particular solution)**라 하며, 해들의 집합족에서 임의의 매개변수에 상수를 대입함으로써 얻어질 수 없는 해를 **특이해(singular solution)**라 한다.

예를 들어 미분방정식 $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$ 의 1개의 매개변수를 갖는 해 집합족은 $y=\left(\frac{1}{4}x^2+c\right)^2, c\geq 0 \ on \ (-\infty,\infty)$ 이다. 여기서 c에 0을 대입한 $y=\frac{1}{16}x^4$는 특수해이며, 해 집합족에 포함되지 않는 $y=0$은 특이해이다.

조각적으로 정의된 해

예를 들어 미분방정식 $xy'-4y=0$의 1개의 매개변수를 갖는 해 집합족은 $y=cx^4 \ on \ (-\infty,\infty)$ 이다. 이때 다음과 같은 조각적으로 정의된 해를 예시로 들 수 있을 것이다.

$$y=\begin{cases}-x^4, & x<0\\ x^4, & x\geq 0\end{cases}$$

연립 상미분방정식

연립 상미분방정식(system of ODE)은 한 개의 독립변수를 가지는 두 개 이상의 미지의 도함수를 포함하는 두 개 이상의 방정식을 말한다.

예)

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{dx}=f(t,x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=g(t,x,y)\end{cases}$$

위와 같은 연립방정식의 해는 동일한 구간에서 정의되고 그 구간에서 연립방정식 중 각각의 식을 만족하는 가능한 함수의 쌍 $x=\phi_1(t)$, $y=\phi_2(t)$ 이다.

1.2 초깃값 문제

x_0를 포함하는 어떤 구간 I에서 다음과 같이 x_0에서 명시된 n개의 조건에 따른 n계 미분방정식

미분방정식: $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

초기 조건: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ (여기서 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$은 임의의 상수)

의 해를 구하는 것을 **n계 초깃값 문제(Initial Value Problem)**라 부른다.

예1) 초깃값 문제: $y' = y, y(0) = 3$

미분방정식의 1개의 매개변수 해 집합족: $y = ce^x$

∴ 초깃값 문제의 해: $y = 3e^x$

예2) 초깃값 문제: $y' + 2xy^2 = 0, y(0) = -1$

미분방정식의 1개의 매개변수 해 집합족: $y = \frac{1}{x^2+c}$

∴ 초깃값 문제의 해: $y = \frac{1}{x^2-1}$

↳ 함수로 볼 때 정의역은 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

미분방정식의 하나의 해로 본다면 $y = \frac{1}{x^2-1}$ $I = (-\infty, -1)$, $y = \frac{1}{x^2-1}$ $I = (-1, 1)$, $y = \frac{1}{x^2-1}$ $I = (1, \infty)$.

초깃값 문제의 해로 본다면 $y = \frac{1}{x^2-1}$ $I = (-1, 1)$ (정의구간이 $x = 0$을 포함한다)

예3) 초깃값 문제: $x'' + 16x = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

미분방정식의 2개의 매개변수 해 집합족: $x = c_1 cos4t + c_2 sin4t$

∴ 초깃값 문제의 해: $x = -2cos4t + \frac{1}{4}sin4t$ $(-\infty, \infty)$

존재성과 유일성

$\frac{dx}{dy} = f(x, y), y(x_0) = y_0$의 1계 IVP를 생각하자.

① (x_0, y_0)가 $R: a \le x \le b, c \le y \le d$의 내부점

⇔ $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\} \subset R$ 인 실수 r 존재 (경계는 X, $r > 0$)

② $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ 이 R에서 연속이면 $[a, b]$ 포함 어떤 구간 $I_0: (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ 와 구간 I_0에서 정의하는 IVP의 유일한 해인 함수 $y(x)$ 갖는다.

위 조건은 해의 존재성과 유일성을 보장하기 위한 충분조건이지, 필요조건은 아니다.

존재성과 유일성에 대한 구간

$y(x)$가 1계 IVP의 해일 때, 다음 x축 상의 세 집합은 일반적으로 같지 않다.

- 함수 $y(x)$의 정의역
- 해 $y(x)$가 정의되거나 존재하는 구간 ($f(x,y)$가 연속하는 단일 구간)
- 존재성과 유일성에 대한 구간 (+$\frac{\partial f}{\partial y}$ 연속)

정리: 존재성 판단 → $f(x,y)$ 연속 판단, 유일성 판단 → $\frac{\partial f}{\partial y}$ 연속 판단.