Espérance d’une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. Intuitivement, l’espérance mathématique désigne la valeur moyenne attendue sur un grand nombre de tirages.

Formulation mathématique

Soit $\mathbb{X}$ l’ensemble des valeurs prises par X.

$\forall x \in \mathbb{X}$ on note $p(X = x)$ la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne la valeur x sur un tirage.

L’espérance de la variable aléatoire X est alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{X}} p(X = x)x$$

Prenons le cas particulier où $\mathbb{X} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ (on dit que c’est une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs). On note alors $p_k = p(X = x_k)$. La définition de l’espérance se développe alors de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

L’égalité précédente est déduite du fait que la somme des probabilités (au dénominateur) vaut 1 (X prend forcément une des valeurs à l’issue d’un tirage). Cette dernière notation est équivalente à une moyenne pondérée, dans laquelle les poids sont les probabilités p_k et les valeurs sont les x_k, $\forall k \in [1..n]$.

Exercice : Calculez l’espérance mathématique des variables aléatoires suivantes :

1. X est le résultat d’un lancer de dé 6 classique non pipé. à n faces équiprobables numérotées de 0 à $n - 1$.
2. X est la valeur d’une carte tirée dans un jeu de 52 cartes. Toutes les têtes valent 10, l’as vaut 1.
3. X est le bénéfice du joueur dans une lotterie. Le prix du ticket est de c euros, le jackpot est à C euros, avec une probabilité de remporter le jackpot de $1/N$. On considère qu’il n’y a pas de lot de consolation.

Arbres de probabilité et processus composés de plusieurs variables aléatoires

On introduit à présent une seconde variable aléatoire Y, également discrète et prenant un nombre fini de valeurs, avec $\mathbb{Y}$ l’ensemble des valeurs y_k prises par Y.

On effectue successivement un tirage sur X puis sur Y, et on définit $Z = f(X,Y)$ une nouvelle variable aléatoire. Le résultat du tirage de Z est donné par $z = f(x,y)$ avec x et y les résultats des tirages respectifs de X et Y.

Si on fixe une valeur z, la probabilité pour que Z prenne cette valeur z est donnée par $p(Z = z) = p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y|X = x)$. Pour rappel, $p(y|x)$ signifie *la probabilité de y sachant x*. L'espérance de Z s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}} p(Z = z)z \\
&= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(X = x)p(Y = y|X = x)f(x,y) \\
&= \sum_{x} p(X = x) \sum_{y} p(Y = y|X = x)f(x,y)
\end{aligned}$$

Composition des espérances

Si on note $Y'(x)$ la fonction qui à tout $x \in \mathbb{X}$ associe la variable aléatoire qui prend la valeur $y'_x = f(x,y)$ avel la probabilité $p_x(Y'(x) = y'_x) = p(Y = y|X = x)$.

Exercice : Donner l'expression de $\mathbb{E}(Y'(x))$ en fonction de x et y.

On a alors :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{x} p(X = x)\mathbb{E}(Y'(x))$$

L'espérance de Z est donc égale à l'espérance d'une variable aléatoire T définie par :

$$p\left(T = \mathbb{E}(Y'(x))\right) = p(X = x) \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

Exercice : On considère le jeu suivant : Chaque partie commence par lancer une pièce. Si le résultat est pile, on tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Si le résultat est face, on tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Si la carte tirée est un as, on remporte +10, sinon, rien ne se passe.

1. Dessiner l'arbre de probabilités de ce jeu. Placez les probabilités et les résultats des tirages sur sur les arrêtes, et les gains sur les feuilles.
2. Déterminer l'espérance de gain après avoir fait "pile". après avoir fait "face". Placez les valeurs obtenues sur les neouds correspondants de l'arbre.
3. Déterminer l'espérance de gain avant d'avoir lancé la pièce.