Electrocinétique

C. Lacpatia

Aug 03, 2023

CONTENTS

CHAPTER

ONE

BASES DE L'ÉLECTROCINÉTIQUE

1.1: Compétences

- Savoir que la charge est quantifiée.
- Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charges
- Exprimer la condition d'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence
- Relier la loi des noeuds au postulat de la conservation de la charge
- Utiliser la loi des mailles
- Réécrire la loi des noeuds en terme de potentiel électrique
- Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur
- Citer les ordres de grandeurs des tensions et intensités dans différentes domaines d'application
- Exprimer la puissance échangée entre un dipôle et le reste du circuit et déterminer si elle est reçue ou fournie par le dipôle
- Analyser le comportement générateur ou récepteur d'un dipôle de manière graphique ou analytique
- Étudier la caractéristique statique d'un dipôle pouvant être non linéaire.
- Utiliser les relations entre l'intensité et la tension
- Connaître les relations intensité-tension dans les cas usuels (résistance, bobine, condensateur, source)
- Citer les ordres de grandeurs des composants R, L et C
- Exprimer la puissance dissipée par effet Joule
- Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine
- Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente
- Modéliser une source non idéale en utilisant la représentation de Thévenin
- Établir et exploiter les relations de diviseurs de tension ou de courant
- Appréhender les conséquences des résistances d'entrée et de sortie des appareils sur le fonctionnement du circuit.

1.1 Connaître le contexte

De manière générale dans les cours, ces parties présentent :

- le contexte d'étude (but, ordre de grandeur, postulat d'étude…)
- les éléments importants **à connaître par coeur** (définitions, propriétés, principes et lois, théorèmes…)
- quelques démonstrations **à connaître par coeur**

1.1.1 Décrire la conduction électrique à notre échelle : Courant et Tension

1.1.1.1 Charge électrique

Important 1.1

Charge électrique

- **Définition** : La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière qui lui permet d'interagir avec les champs électromagnétiques. L'unité usuelle de mesure de la charge électrique est le Coulomb (C).
- **Conservation de la charge** : La charge est une grandeur qui se conserve, c'est-à-dire qu'elle ne peut ni être détruire, ni être produite.
- **Quantification de la charge** : On observe[1] que la charge Q de tout système est un multiple entier de la charge élementaire $e = 1.609 \times 10^{-19}$C.

[1] **Expérience de Millikan —**La quantification de la charge a été observée par Millikan (1909) en étudiant la suspension de gouttes d'huile sous l'effet d'un champ électrostatique.

1.1.1.2 Conduction et courant

1.1.1.2.1 Phénomène de conduction

Conduction : Le phénomène de conduction correspond au déplacement de charges dans un matériau (solide ou liquide).

Important 1.2

Courant électrique et intensité.
Le courant électrique **à travers** une section S **orienté arbitrairement** correspond au passage des charges de conduction à travers cette section par unité de temps.
La grandeur mesurant le courant électrique est l'**intensité du courant**. Elle se définit comme le débit de charge à travers la surface, c'est-à-dire la quantité de charge traversant la surface S par unité de temps.

1.1.1.2.2 Intensité et intensité moyenne

Important 1.3

Intensité
L'intensité qu'on calcule générale est l'intensité instantanée, c'est-à-dire la mesure du débit en faisant tendre la durée Δt vers 0. En utilisant les notations différentielles, on a alors :

$$i = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$$

avec q la quantité de charge traversant la surface orientée.

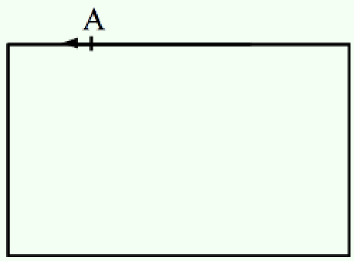
1.1.1.2.3 Ordres de grandeur des courants électriques (en ligne)

1.1.1.3 Potentiel électrique et tension

1.1.1.3.1 Potentiel électrique

Important 1.4

Potentiel électrique



La force qu'exerce un champ électrique sur une charge q dérive d'une énergie potentielle. Si l'on note $E_{p,el}$ l'énergie potentielle associée à cette force sur une charge q en un point A du circuit, on définit le **potentiel électrique** V_A du circuit au point A par $V_A = \frac{E_{p,el}}{q}$.

Important 1.5

Référence des potentiels - Masse
Comme l'énergie potentielle, le potentiel est défini à une constante près. On peut donc choisir le point du circuit où le potentiel électrique est nul. On parle de **référence des potentiels** ou **masse**.

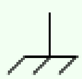


Fig. 1.1: Symbole d'un point de masse dans le schéma d'un circuit électrique

Important 1.6

Tension (différence de potentiel)

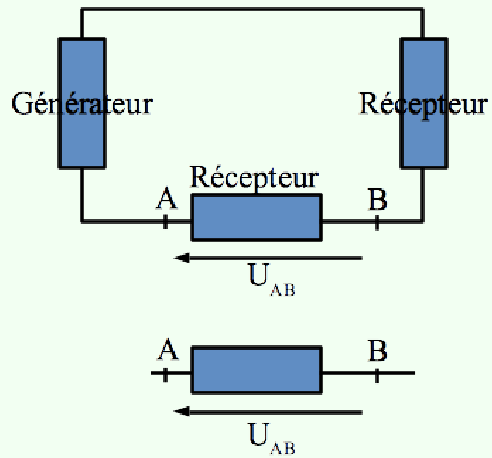


Fig. 1.2: Représentation d'une tension sur un circuit

On appelle tension U_{AB} (ou différence de potentiel entre deux points A et B) la différence $U_{AB} = V_A - V_B$. Dans un schéma de circuit électrique, elle est représentée par une fléche pointant vers le premier point (ici A).

1.1.1.3.2 Analogie entre un circuit hydraulique et un circuit électrique (en ligne)

1.1.1.3.3 Ordre de grandeurs des tensions (en ligne)

1.1.1.4 Approximation des régimes quasi-stationnaires

1.1.1.4.1 Ondes électriques dans les circuits (en ligne)

1.1.1.4.2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Important 1.7

Un circuit dans lequel le temps de propagation des perturbations est **très faible devant** le temps de variation des grandeurs en un point du circuit est un circuit fonctionnant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. On peut alors considérer que les phénomènes de propagation sont instantanés et que les grandeurs du circuits (potentiel et intensités) varient en même temps sous l'effet d'une perturbation.

Attention

Le fait qu'elles varient en même temps ne signifie pas qu'elles varient de la même manière.
C'est bien la variation **spatiale** associée à la propagation de l'onde électrique qui est négligée, pas la variation **temporelle** des grandeurs : en un point (et donc en tout point) du circuit, tension et intensité peuvent varier.

1.1.1.4.3 Définitions utiles

1.2: Définitions utiles

Voici quelques éléments de vocabulaire utiles quand étudie un circuit électrique.

- Fil de connexion : Un fil de connexion est un élément du circuit où tous les points ont le même potentiel.
- Bornes (ou pôles) : Point de potentiel reliant un composant électronique au circuit.
- Dipôles : Composants électroniques composés de deux bornes. Ce seront les composants que nous étudierons principalement.
- Maille : Ensemble de dipôles reliées entre eux par des fils de connexion et formant une boucle fermée.
- Noeud : Un noeud est un point où se rencontrent au moins trois fils : le débit d'électrons se sépare (ou converge) donc en ce point.

Important 1.8

Dipôles en série et en parallèle

- Deux dipôles sont **en série** lorsqu'ils sont reliées entre eux par un fil de connexion **et qu'il n'y a pas de noeud au niveau de cette liaison.**
- Deux dipôles sont **en parallèle** lorsque leurs bornes sont reliées deux à deux.
- Un ensemble de dipôles en série forme une **branche**.

1.1.1.4.4 Intensité dans une branche dans l'ARQS

Important 1.9

Intensité dans une branche dans l'ARQS Dans l'ARQS, l'intensité est la même en tout point d'une même branche (c'est-à-dire d'un ensemble de dipôles et fils de connexion sans noeud).

1.1.2 Étudier un circuit : les bases

1.1.2.1 Lois de Kirchhoff

Important 1.10

- **Loi des mailles** : La somme des tensions d'une maille est nulle en orientant les tensions dans le même sens.
- **Loi des noeuds** : L'ensemble des courants entrant dans un noeud est égale à l'ensemble des courant sortant du même noeud.

1.1.2.2 Étude énergétique d'un dipôle

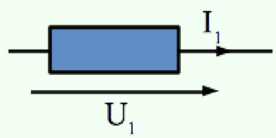
L'étude énergétique consiste à déterminer la puissance instantanée reçue ou fournie par un dipôle au reste du circuit puis en déduire l'énergie reçue ou fournie durant une durée Δt.

1.1.2.2.1 Convention générateur et récepteur pour un dipôle

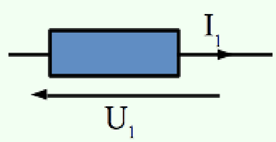
Important 1.11

Convention générateur et récepteur

- Pour un dipôle D, si l'on oriente l'intensité I_1 qui le traverse et la tension U_1 à ses bornes dans le même sens, on dit qu'il est orienté **en convention générateur.**



- Pour un dipôle D, si l'on oriente l'intensité I_1 qui le traverse et la tension U_1 à ses bornes en sens contraire, on dit qu'il est orienté **en convention récepteur.**



1.1.2.2.2 Puissance échangée entre un dipôle et le reste du circuit

Important 1.12

Puissance instantanée échangée entre un dipôle et le reste du circuit

La puissance instantanée échangée entre un dipôle et le reste du circuit a pour expression :

$P = U_1 \times I_1$

avec U_1 la tension à ses bornes et I_1 l'intensité qui le traverse.

- En convention récepteur, elle correspond à la **puissance que reçoit** le dipôle du reste du circuit.
- En convention générateur, elle correspond à la **puissance que fournit** le dipôle au reste du circuit.

1.1.2.2.3 Comportement générateur et récepteur d'un dipôle

- Le **comportement d'un dipôle n'est pas arbitraire mais exprime ce qui se passe physiquement dans le circuit. Ce dernier ne peut être choisi arbitrairement (contrairement aux conventions) et doit être déterminer par des calculs (nous en verrons par la suite) ou étude (graphique par exemple). C'est le calcul de la puissance échangée** et l'**étude de son signe** qui déterminer le **comportement du dipôle**.

- Le **comportement** d'un dipôle peut changer au cours d'une expérience.

	Comportement récepteur	Comportement générateur
Convention générateur	P < 0	P > 0
Convention récepteur	P > 0	P < 0

Il est conseillé de chercher à comprendre pourquoi on obtient tel signe à partir de l'interprétation de la puissance échangée établie précédemment.

1.1.3 Dipôles électriques: Généralités

Les lois de Kichhoff sont insuffisantes. Il faut aussi pouvoir relier tension et intensité.Ces relations dépendront du type de dipôle dans le circuit.

1.1.3.1 Point de fonctionnement et caractéristique statique

Important 1.13

Point de fonctionnement

- Un **point de fonctionnement** d'un dipôle est un couple $(U; I)$ de tension et intensité pouvant exister pour le dipôle en fonctionnement indépendant du temps.
- La **caractéristiques statique** d'un dipôle est l'ensemble des points de fonctionnement du dipôle.

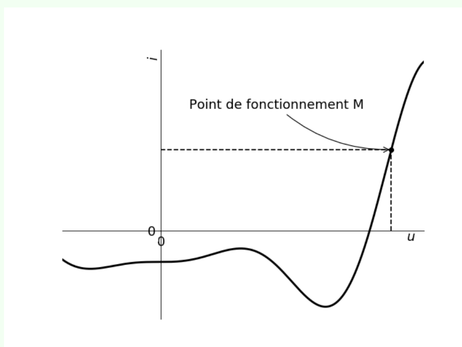


Fig. 1.3: Caractéristique statique d'un dipôle

1.1.3.2 Typologie des dipôles

Important 1.14

Dipôle symétrique ou polarisé

- Un dipôle **symétrique** est un dipôle dont la caractéristique statique est symétrique par rapport à l'origine (0;0).
  - En conséquence, un dipôle symétrique peut-être branché dans les deux sens sans changer son fonctionnement.
- Un dipôle qui n'est pas symétrique est un dipôle **polarisé**
  - Le sens de branchement d'un dipôle polarisé a son importance.

Important 1.15

Dipôle passif ou actif

- Un dipôle **passif** est un dipôle dont la caractéristique passe par l'origine.
- Si la caractéristique ne passe pas par l'origine, on dit que le dipôle est **actif.**

1.1.3.3 Equation d'évolution

Important 1.16

Equation d'évolution L'intensité qui traverse un dipôle est relié à la tension entre ses bornes par une équation mathématique appelée **équation d'évolution du dipôle**

1.1.3.4 Dipôle linéaire

Important 1.17

Un dipôle est dit **linéaire** si son équation d'évolution est une équation différentielle linéaire.

$$a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) = b_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + ... + b_1 \frac{di(t)}{dt} + b_0 i(t) + F(t)$$

L'ordre de l'équation différentielle est le rang de la dérivée la plus grande.

- **Circuit linéaire** Un circuit linéaire est un circuit composé uniquement de composants linéaires.

Important 1.18

Caractéristique statique des dipôles linéaires La caractéristique statique d'un dipôle linéaire est une droite dont l'équation s'écrit $a_0 U - b_0 I = F_0$.

1.1.4 Dipôles linéaires passifs

1.1.4.1 Résistance ou conducteur ohmique

Important 1.19

Résistance ou conducteur ohmique
Un conducteur ohmique ou résistance est un dipôle dont l'équation d'évolution est **en convention récepteur:**

$$u(t) = Ri(t)$$

où R est appelée **résistance**. Son inverse $G = 1/R$ est appelée **conductance**

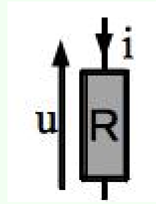


Fig. 1.4: Schéma d'une résistance

1.1.4.1.1 Puissance perdue par effet Joule (en ligne)

1.1.4.2 Condensateur

Important 1.20

Condensateur et capacité

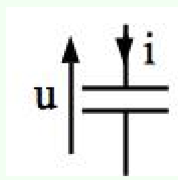


Fig. 1.5: Schéma d'un condensateur

Un condensateur (ou capacitance) est un dipôle linéaire passif constitué de deux armatures métalliques dont l'équation d'évolution est:

$$q(t) = Cu(t)$$

où q(t) est la chargée portée par l'armature où pointe la flèche de la tension u(t).
C est appelée capacité du condensateur.

Important 1.21

Energie stockée dans un condensateur
Lorsqu'on applique une tension u à ses bornes, un condensateur stocke une énergie :

$$E_{el} = \frac{1}{2}Cu^2$$

1.1.4.3 Bobine idéale et inductance

Important 1.22

Bobine ou inductance

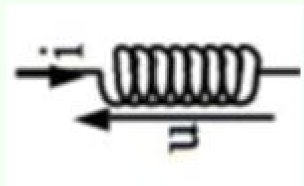


Fig. 1.6: Schéma d'une bobine

Une inductance (ou bobine) est un dipôle dont l'équation d'évolution **en convention récepteur** est:

$$u(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Important 1.23

Energie stockée dans une bobine
Lorsqu'un courant i circule dans une bobine, celle-ci stocke une énergie :

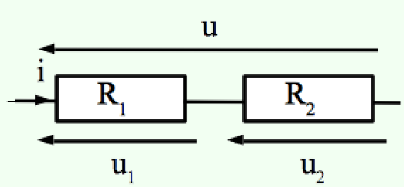
$$E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$$

1.1.5 Association de résistances

1.1.5.1 Résistances en série

Important 1.24

Résistance équivalente à deux résistances en série Deux résistances R_1 et R_2 en série sont équivalentes à une seule résistance de valeur $R_{eq} = R_1 + R_2$



1.3: Démonstration

Comme expliqué précédemment, il suffit d'exprimer l'équation d'évolution. Ici, les deux résistances étant en série, la tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle: $u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$
L'équation d'évolution d'une résistance étant $u = R_{eq}i$, on peut identifier les deux expressions avec

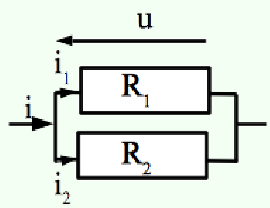
$R_{eq} = R_1 + R_2.$

1.1.5.2 Résistances en parallèle

Important 1.25

Résistance équivalente à deux résistances en parallèle

Deux résistances R_1 et R_2 en parallèle sont équivalentes à une seule résistance de valeur $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$ (soit de conduction $G_{eq} = G_1 + G_2$)



1.4: Démonstration

Comme expliqué précédemment, il suffit d'exprimer l'équation d'évolution. Ici, les deux résistances étant en parallèle, l'intensité qui entre dans le dipôle complet est la somme des intensités circulant dans chaque dipôle: $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = u(\frac{1}{R_1} + \frac{u}{R_2})i$

L'équation d'évolution d'une résistance étant $i = u\frac{1}{R_{eq}}$, on peut identifier les deux expressions avec $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

1.1.6 Dipôles linéaires actifs

1.1.6.1 Sources idéales

Important 1.26

Source idéale de tension

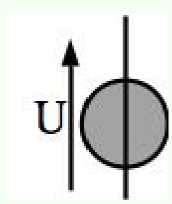


Fig. 1.7: Schéma d'une source idéale de tension

Une source idéale de tension est un dipôle dont la tension est une caractéristique propre du dipôle et ne varie pas, quelque soit l'intensité qui la traverse.

On appelle la tension à ses bornes **force électromotrive (f.e.m.)**

Important 1.27

Source idéale de courant

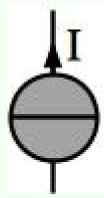


Fig. 1.8: Schéma d'une source idéale de courant

Une source idéale de courant est un dipôle dont l'intensité est une caractéristique propre du dipôle et ne varie pas, quelque soit la tensionà ses bornes.
On appelle l'intensité qui la traverse **courant électromoteur (c.e.m.)**

1.1.6.2 Source réelle: Electromoteur

Important 1.28

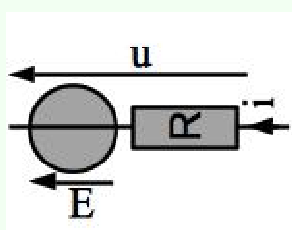
Electromoteur
Un électromoteur linéaire est une **modélisation** d'une source donc la relation tension-intensité est:

$$u = E - Ri$$

où E est la fem (à vide) de l'électromoteur et R sa résistance interne.

Important 1.29

Modélisation de Thévenin d'un électromoteur



Un électromoteur peut être modélisé par une source idéale de tension de fem E en série avec une résistance R

1.1.7 Etude d'un circuit linéaire

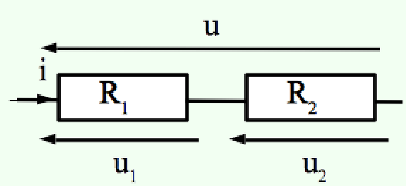
Pour étudier un circuit linéaire (ie. trouver une ou plusieurs grandeurs du circuit), il existe différentes méthodes:

- Utiliser les lois des noeuds et des mailles combinées (cf. l'*exemple ici* (page 15))
- Utiliser une(des) loi(s) des noeuds traduites en terme de potentiel (cf. *le même exemple* (page 15))
- Reconnaître et utilisée des ponts diviseurs comme présentés ci-dessous. Cette méthode est souvent combinée avec l'utilisation de résistances équivalentes.

1.1.7.1 Pont diviseur de tension

Important 1.30

Pont diviseur de tension
Considérons N résistances en série dont les résistances sont $\{R_i | i \in [\![1; n]\!]\}$ aux bornes de laquelle la tension est u.



L'intensité circulant dans l'ensemble est:

$$i = \frac{u}{\sum_{i=1}^{i=n} R_i}$$

Et la tension u se divise dans chaque dipôle. La tension aux bornes de la résistance R_k est:

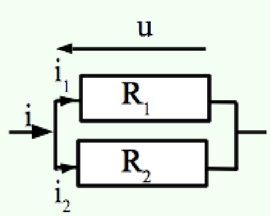
$$u_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{i=n} R_i} u$$

Cf. *cet exemple* (page 15) pour savoir comment repérer un pont diviseur de tension.

1.1.7.2 Pont diviseur de courant

Important 1.31

Pont diviseur de courant Considérons N résistances en parallèle dont les conductances sont $\{G_i | i \in [\![1; n]\!]\}$ dans laquelle entre une intensité totale i.



La tension aux bornes de l'ensemble est:

$$u = \frac{i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}$$

Et le courant i se divise dans chaque branche. L'intensité aux bornes de la résistance R_k est:

$$i_k = \frac{G_k}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i} i$$

1.2 Maitriser les méthodes

- Méthodes : Vision miscroscopie de la conduction, étude de circuit, dipôles équivalents et études énergétiques
- Activités : Résistances d'entrée et de sortie
- Applications : Exercice dans le polycopié et deux exercices en ligne (questions de base[3] et manipulation de circuits[4])
- Entrainements : Dans le polycopié
- Approfondissements : Pas d'approfondissement mais deux devoirs libres dont celui sur l'Amplificateur opérationnel[5] qui fera office de cours et qui sera à traiter durant les vacances.

1.2.1 Méthodes d'étude

Les corrections sont en ligne.

1.2.1.1 Calculer une intensité par des considérations microscopiques.

Cette méthode ne sera pas souvent utilisée dans ces chapitres mais est très utile pour comprendre le passage du microscopique au macroscopique.

1.5: Exercice

Estimer le nombre d'électrons par unité de volume pouvant participer à la conduction électrique. On donne :

- Masse molaire du cuivre : $M_{Cu} = 63.5 \text{g.mol}^{-1}$
- Masse volumique du cuivre : $\rho_{Cu} = 9 \times 10^3 \text{kg.m}^{-3}$

1.6: Exercice

On considère un fil de cuivre de section $S = 1\text{mm}^2$ parcourue par une intensité $I = 1\text{A}$. Estimer la vitesse des électrons en considérant qu'ils ont tous la même vitesse. Commenter cette vitesse.

[3] https://stanislas.edunao.com/mod/quiz/view.php?id=12828
[4] https://stanislas.edunao.com/mod/quiz/view.php?id=12829
[5] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12833

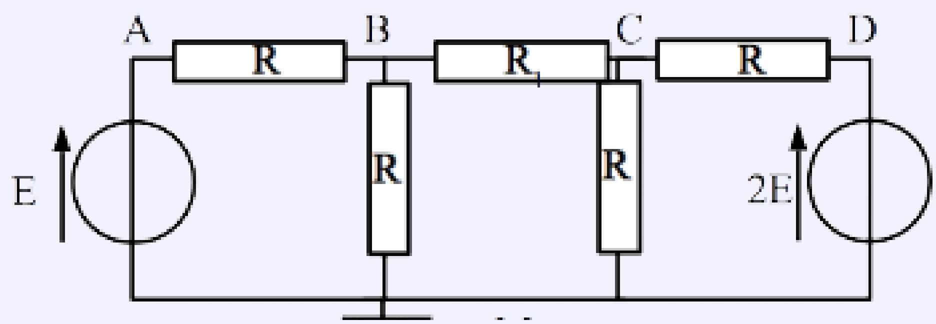
1.2.1.2 Etudier un circuit électrique linéaire

1.2.1.2.1 Par les lois de Kirchhoff

Le but de cet exercice est d'apprendre à mettre en application tout ce qui a été vu précédemment. Nous utiliserons deus méthodes : la loi des noeuds en terme de potentiel. On pourra néanmoins s'entraîner à reprendre l'exercice en utilisant des tensions et la loi des mailles.

1.7: Exercice

On considère le circuit ci-dessous. Déterminer la tension U_{BC}.



1.2.1.2.2 Repérer et utiliser un pont diviseur de tension

Le but de cet exercice est d'apprendre à utiliser un pont diviseur de tension. La méthode peut s'appliquer aussi au cas d'un pont diviseur de courant.

1.8: Exercice (très classique)

Déterminer la condition reliant les résistance pour que la tension U_{AB} soit nulle (on dit que le pont est alors équilibré).

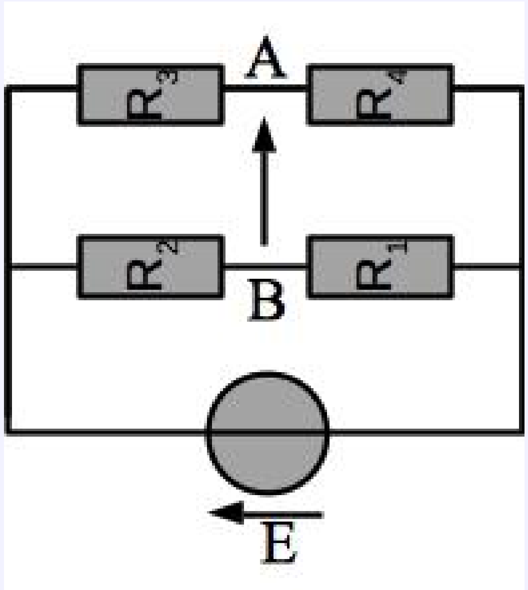


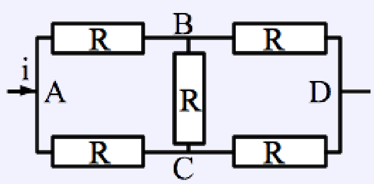
Fig. 1.9: Pont de Wheatstone

1.2.1.3 Dipôles équivalents

1.2.1.3.1 Dipôle équivalent par les équations d'évolution

On se propose ici de voir comment déterminer un dipôle équivalent plus simple (une résistance) à partir d'un maillage. On verra aussi l'utilisation des symétries.

1.9: Exercice

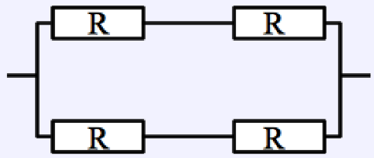


Déterminer la résistance équivalente au réseau de résistance ci-contre.

1.2.1.3.2 Dipôle équivalent par manipulation des schémas

On se propose ici de voir comment déterminer un dipôle équivalent plus simple (une résistance) à partir d'un maillage. Nous utilisons cette fois des transformations successives des circuits basés sur les résistances équivalentes établies précédemment.

1.10: Exercice



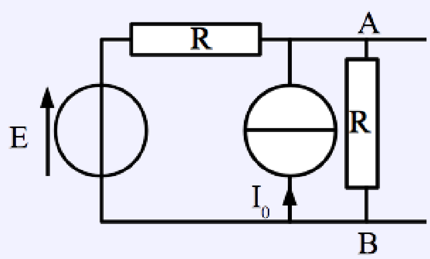
Déterminer la résistance équivalente au réseau de résistance ci-contre.

1.2.1.3.3 Déterminer un modèle de Thévenin équivalent

Cet exercice propose d'apprendre à montrer qu'un dispositif peut être remplacé par un modèle de Thévenin en déterminant ses caractéristiques. Nous étudierons deux méthodes: l'établissement de l'équation d'évolution comme utilisé précédemment pour la détermination d'un dipôle équivalent et le calcul de deux points particuliers.

1.11: Exercice

Montrer que le circuit ci-dessous est équivalent à un modèle de Thévenin entre les bornes A et B dont on déterminera les caractéristiques.



1.2.1.4 Etudes énergétiques

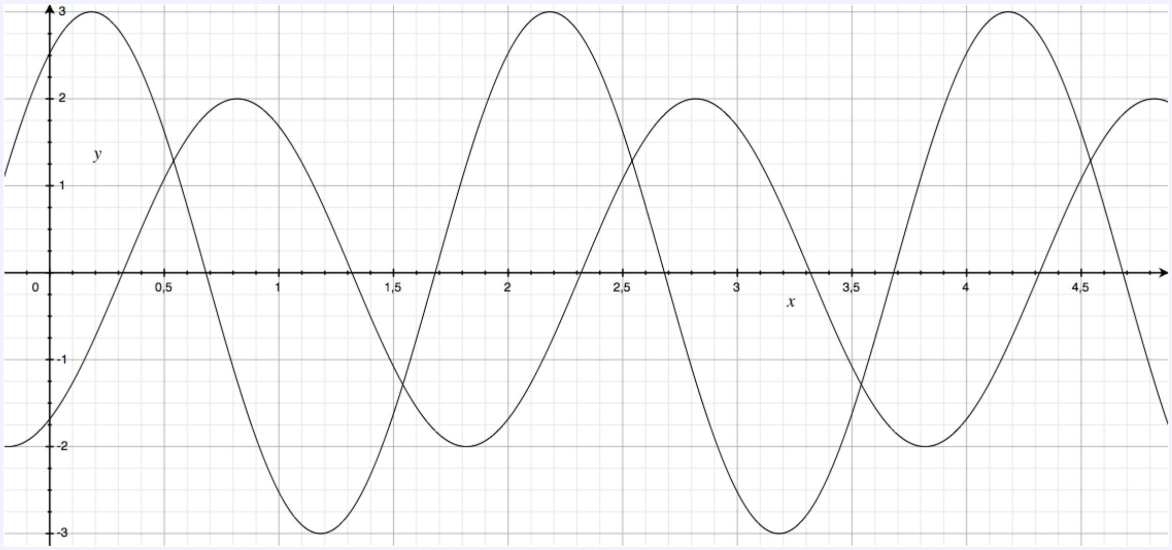
1.2.1.4.1 Déterminer les comportements récepteurs/générateurs graphiquement.

Il s'agit d'apprendre le principe de base de l'étude des comportements générateurs et récepteurs d'un dipôle et d'observer aussi que ces comportements peuvent changer en régime variable.

1.12: Exercice

On considère un dipôle D dans un circuit. Les évolutions de l'intensité qui le traverse et de la tension à ses bornes en convention générateur sont données ci-après. Déterminer les temps récepteurs et les temps générateurs, c'est-à-dire les moments où le dipôle se comporte comme un récepteur et les moments où le dipôle se comporte comme

un générateur.
Remarque : pour cet exercice, peu importe quelle courbe représente l'intensité ou la tension.



1.2.1.4.2 Déterminer analytiquement les comportements générateurs/récepteurs

Il s'agit ici de voir comment déterminer une puissance instantanée puis l'énergie échangée durant une période donnée. Les équations données ici correspondent au dipôles étudiées précédemment.

1.13: Exercice

On considère un dipôle D orientée en convention générateur. On a trouvé que l'intensité qui circulait dans le dipôle a pour expression : $i(t) = i_m \sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$ et que la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$ avec $u_m > 0$ et $i_m > 0$

1. Exprimer la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$. S'agit-il d'une puissance reçue ou fournie ?
2. Montrer que $p(t)$ est un signal sinusoïdal dont on précisera les caractéristiques. On note T la période de $p(t)$
3. Déterminer l'énergie fournie par le dipôle durant une période T. Le dipôle a-t-il un comportement globalement générateur ou récepteur ?

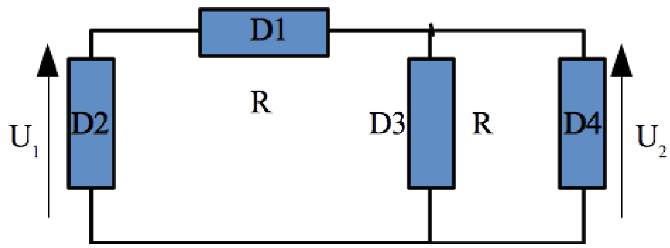
1.2.1.4.3 Déterminer les comportements de dipôles dans un circuit

On travaille ici en régime indépendant du temps de manière à pouvoir utiliser simplement les lois de Kirchhoff. On considère le circuit ci-après et on donne les caractéristiques suivantes :

- D_2 et D_4 sont des accumulateurs : leur tension est imposées de l'extérieur. La tension U_1 aux bornes de D_2 est connue et positive. La tension U_2 est réglable (mais constante durant la manipulation) et de signe quelconque.
- D_1 et D_3 sont deux conducteurs ohmiques : en convention récepteur la relation intensité-tension est : $u = Ri$

1.14: Exercice

Déterminer, suivant les valeurs de U_2 les comportements récepteurs/générateurs des deux dipôles D_2 et D_4.



1.2.2 Activité : Résistance d'entrée et résistance de sortie

Important 1.32

A retenir - Résistance d'entrée d'un instrument de mesure Un instrument de mesure comme un multimètre ou un oscilloscope possède ses propres caractéristiques électriques. Du point de vue du reste du circuit, ce comportement, en régime indépendant du temps, peut-être **modélisé** par une résistance qu'on appelle **résistance d'entrée de l'appareil.**

Important 1.33

A retenir - Résistance de sortie d'un générateur, d'une source Lorsqu'on utilise un générateur (GBF comme générateur basse fréquence en TP) en pratique, on règle la tension qu'il doit délivrer. Cela revient à régler la fem de la source étudiée précédemment. Néanmoins, dans une source réelle, l'intensité demandée occasionne une chute de tension qu'on **modélise** par une résistance en série avec la fem (modèle de Thévenin). Cette résistance est appelée **résistance de sortie** du générateur.

1.2.2.1 Utilisation des ponts diviseurs pour étudier l'influence des résistances d'entrée et de sortie.

Le but est autant d'apprendre à utiliser les ponts diviseurs que d'observer théoriquement l'influence des résistances d'entrée et de sortie et d'en déduire les valeurs optimales de ces grandeurs.

Dans les deux exercices posés ici, les circuits ne sont pas dessinés. **Il est vivement conseillé de s'entraîner à les dessiner**.

1.15: Exercice

On considère un circuit constitué d'un générateur modélisé par la représentation de Thévenin $(E; R_S)$ et d'une résistance R. L'utilisateur règle sur le générateur la tension E et attend normalement que la tension aux bornes de R soit celle qu'il a réglé.

1. Exprimer la tension aux bornes u_R de la résistance R. L'utilisateur obtient ce qu'il attend en toute rigueur.
2. A quelle condition peut-on considérer que $u_R \approx E$? En déduire la condition que doit vérifier une impédance de sortie pour ne pas influer sur le circuit.
3. Méthode de la tension de moitié : Si l'on suppose que R est variable, pour quelle valeur de R, la tension u_R vaudra E/2 ? En déduire une méthode expérimentale pour mesurer la résistance interne d'un GBF.

Important 1.34

A retenir

- **Influence de la résistance interne :** Pour qu'un GBF influe peu sur le circuit, il faut que sa résistance de sortie soit très faible devant les résistances du circuit. Si cette condition n'est pas réalisée, la tension à la sortie du GBF ne sera pas la tension réglée (sa fem) mais elle sera plus faible.
- **Méthode de la tension de moitié :** Pour déterminer la résistance de sortie d'un générateur, on réalise deux

étapes:

1. On lui branche une résistance variable R dont on a réglé la valeur assez haute. On peut ainsi mesurer la valeur de la tension E délivrée lorsque R_S est négligeable en mesurant la tension aux bornes de R.
2. On diminue R jusqu'à mesurer une tension E_2 aux bornes de R. On a alors $R = R_S$.

1.16: Exercice

On considère une résistance R dont on veut connaître la tension à ses bornes. On branche un voltmètre de résistance d'entrée R_e en parallèle de R pour mesurer sa tension.

1. Quelle la résistance équivalente R_{eq} de l'ensemble des deux résistances ?
2. On peut considérer que le circuit n'est pas influencé par le voltmètre si la résistance équivalente est à peu près égale à R. A quelle condition sur R_e, cette approximation est valable. En déduire les bonnes caractéristiques d'une résistance d'entrée pour un voltmètre.
3. On ne place pas dans l'approximation précédente et une intensité i arrive sur l'ensemble résistance+voltmètre. Quelle est la chute d'intensité $\Delta i = i - i_R$ avec i_R l'intensité circulant dans la résistance ?

Important 1.35

A retenir

- **Influence de la résistance interne :** Pour qu'un voltmètre influe peu sur un circuit, il faut que son impédance d'entrée soit grande devant les impédances du circuit.
- Attention : pour un ampèremètre, il faudrait une tension faible à ses bornes donc une résistance d'entrée faible.

1.2.3 Activités d'application

Cet exercice d'application directe est à faire à la suite du cours pour vérifier votre compréhension des méthodes. Vous pourrez confronter votre travail avec celui de vos camarades et poser des questions sur cet exercice en classe mais il ne sera pas donné de correction complète.

1.2.3.1 Energétique

1.17: Exercice

On appelle résistance 1/4W, une résistance pouvant dissiper au maximum une puissance P=0.25W. Déterminer, en fonction de R et P la tension maximale qu'on peut mettre à ses bornes et estimer la gamme de valeur de tension pour des résistances usuelles.

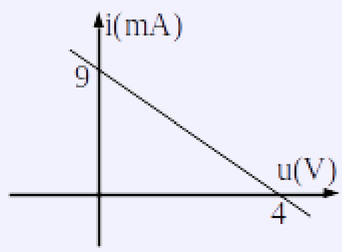
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Puissance électrique *(page 6)*.

1.2.3.2 Etude d'une source réelle

1.18: Exercice

1. On considère une source réelle modélisable soit par un modèle de Thévenin de fem E et de résistance interne R_1, soit par une source idéale de courant η en parallèle d'une résistance R_2. Montrer que les deux sources sont équivalentes à condition d'avoir $R_1 = R_2$ et $E = R_1\eta$.
2. On considère une source réelle modélisable soit par un modèle de Thévenin de fem E et de résistance interne R. Montrer que la puissance maximale que peut délivrer la source est $\frac{E^2}{4R}$
3. On considère un dipôle D dont la caractéristique est donnée ci-dessous. Déterminer les caractéristiques de sa modélisation de Thévenin.



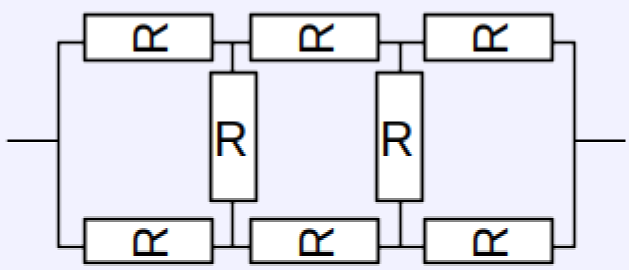
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Puissance électrique *(page 6)*.
- $\Longrightarrow$ Modèle de Thévenin *(page 12)*.

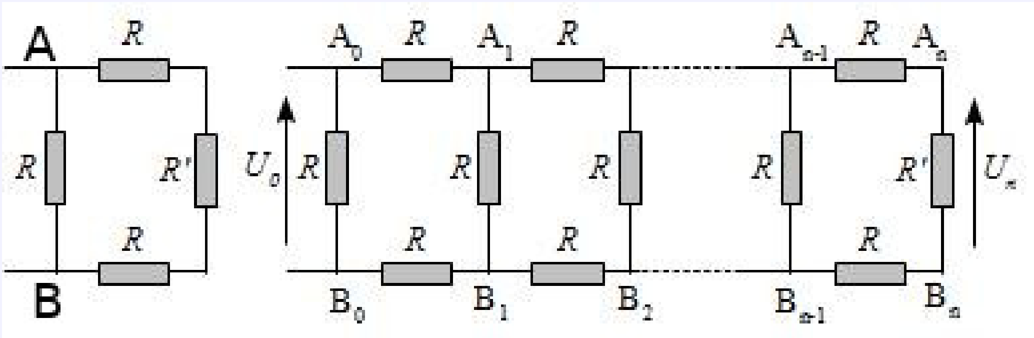
1.2.3.3 Résistances équivalentes

1.19: Exercice

On considère le réseau de résistances suivantes. Déterminer la résistance équivalente en déterminant la relation u(i).



1.20: Exercice



1. Déterminer R' pour que la résistance équivalente entre A et B soit égale à R' du premier circuit ci-dessus.
2. En déduire la valeur de U_{n+1} dans le second circuit ci-dessus si R' a la valeur déterminée à la question précédente.
3. Quelle est la valeur de la résistance équivalente entre A_0 et B_0 dans le second circuit?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Association de dipoles *(page 10)*.

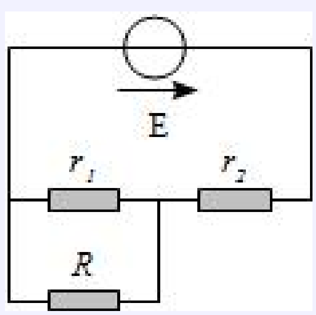
1.2.3.4 Mise en équation

1.21: Exercice

1. Reprendre le montage du pont de Wheatstone et retrouver la tension U_{AB} en utilisant la loi des noeuds en terme de potentiel.

1.22: Exercice

Exprimer le rendement η du diviseur de tension représenté sur le circuit ci-dessous (le rapport de la puissance dissipée dans la résistance de charge R à la puissance fournie par la tension E) en fonction de r_1, r_2 et R



Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Ponts diviseurs *(page 15)*.

1.2.4 Entrainement : Bases

1.2.4.1 Puissance et énergie

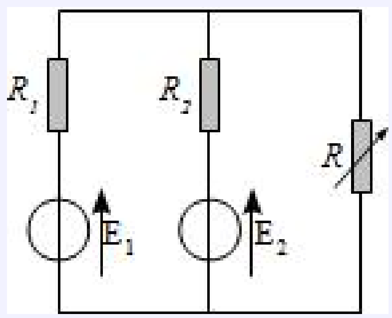
1.23: Dipôles linéaires passifs

Calculer la puissance instantanée reçue puis l'énergie emmagasinée durant une période pour:

1. un condensateur C dont la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi)$
2. une bobine L dont l'intensité la traversant est $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi)$
3. une résistance R dont la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi)$

1.24: Accumulateurs

On considère le circuit suivant où R est une résistance variable et les fem E_1 et E_2 sont positives et $E_1 > E_2$. Déterminer suivant les valeurs de R le comportement recepteur ou générateur deux fem.



Point utile pour cet exercice

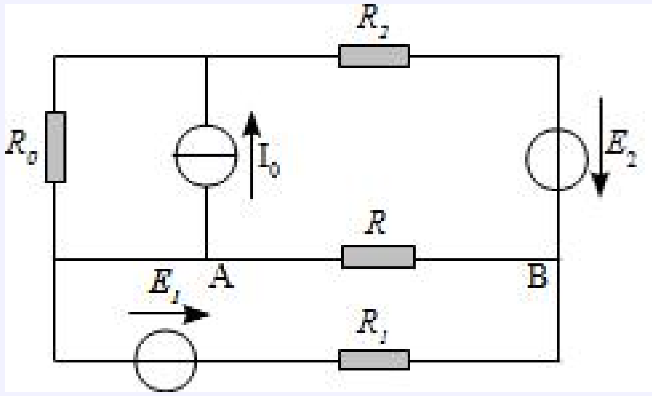
- ⟹ Ponts diviseurs *(page 15).*
- ⟹ Lois de Kirchoff *(page 5).*
- ⟹ Puissance électrique *(page 6).*

1.2.4.2 Applications des lois de Kirchoff

1.25: Circuit divers

On considère le circuit ci-dessous. Déterminer l'intensité i qui traverse la résistance R (de la gauche vers la droite) en utilisant

1. les lois des noeuds et des mailles
2. la loi des noeuds en termes de potentiels

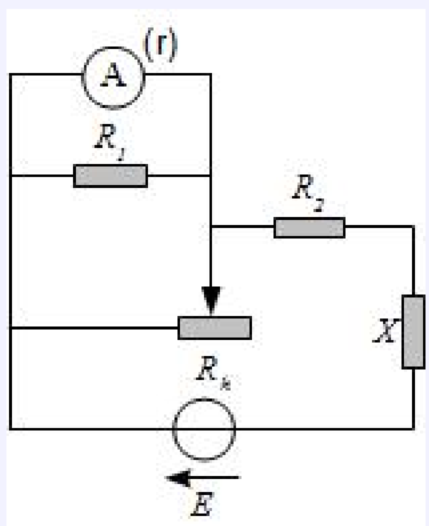


Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Loi des noeuds en terme de potentiel *(page 15)*.
- $\Longrightarrow$ Lois de Kirchoff *(page 5)*.

1.26: Ohmètre à tarage shunt

On considère le montage suivant qui modélise un ohmmètre à tarage shunt. Il comporte un générateur de f.e.m. E (de résistance interne négligeable), un milliampèremètre de résistance interne r, un rhéostat de résistance variable R_h et des résistors R_1, R_2. La résistance X est la résistance à mesurer.



1. Exprimer l'intensité i dans le milliampèremètre en fonction de E, R_1, R_2, R_h, r, X. Quelle est cette intensité i_0 lorsque B et C (bornes de X) sont court-circuités?
2. L'avantage du tarage shunt est qu'on peut choisir R_h très grande devant r. Donner dans ce cas l'expression de i sous la forme $\frac{kE}{X+R}$ en déterminant k et R.
3. En déduire l'expression de X en fonction de i, i_0 et R.

Point utile pour cet exercice

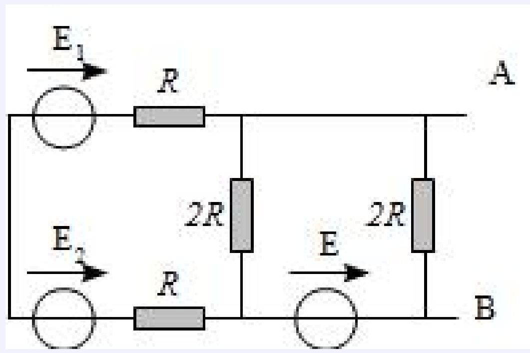
- $\Longrightarrow$ Ponts diviseurs *(page 15)*.
- $\Longrightarrow$ Lois de Kirchoff *(page 5)*.

1.2.4.3 Dipôles équivalents

1.27: Générateur équivalent

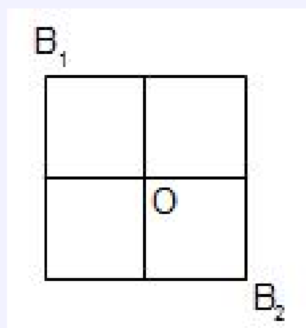
On considère le circuit suivant.

1. Déterminer le générateur de Thévenin du circuit équivalent entre les bornes A et B.
2. Donner la valeur de E pour laquelle le circuit est équivalent à une résistance pure (entre A et B) dont on précisera la valeur. A.N.: $R = 5\Omega; \mathrm{E}_1 = 2\mathrm{V}; \mathrm{E}_2 = 8\mathrm{V}$



1.28: Maillage carré

On considère le maillage suivant où chaque segment est une résistance R. Déterminer la résistance équivalente pour le dipôle pris entre B_1 et B_2 puis entre O et B_2.



Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Lois de Kirchoff *(page 5).*
- $\Longrightarrow$ Dipôles équivalents *(page 16).*

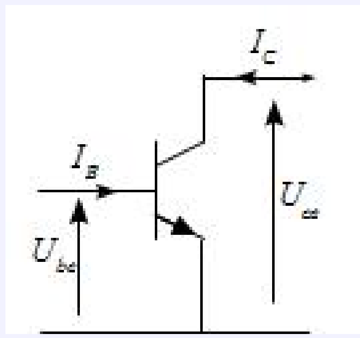
1.2.4.4 Résistances d'entrée et de sortie

1.29: Transistor bipolaire

Un transistor bipolaire est un tripôle qui est toujours utilisé comme un quadripôle en rendant une de ses électrodes communes à l'entrée et la sortie. En régime linéaire basse fréquence, les équations d'un transistor bipolaire en émetteur commun E sont: $u_{be} = ri_B + \mu u_{ce}$ et $i_C = \beta i_B + \frac{u_{ce}}{\rho}$. On désire déterminer les valeurs des différentes grandeurs données dans l'équation.

1. *Modéliser ce composant à l'aide de composants fondamentaux.

2. On place ensuite un générateur idéal de courant entre B et E et un ampèremètre à la place du générateur de tensions entre C et E. Pour un courant de 10,00mA en entrée, on mesure au multimètre un courant de 0,9981 A. Grâce à une protocole adapté, on mesure $r = 2000\Omega$ et $\rho = 20,00\text{k}\Omega$. \begin{enumerate}1. Déterminer le gain en tension et le gain en courant.
3. Connaissant les valeurs de μ et β, proposer un protocole expérimental pour mesurer les valeurs de r et ρ.
4. L'impédance d'entrée d'un voltmètre étant de $1\text{M}\omega$ et la chute de tension maximale de l'ampèremètre de 0,2V, a-t-on eu raison de les considérer comme idéaux?
5. Calculer l'amplification $A = \frac{i_c}{i_b}$ quand un résistor R_L est connecté entre les bornes C et E. A.N.: $R_L = 1\text{k}\Omega$



1.2.5 Capacités numériques

1.2.5.1 Redressement simple alternance

Cet exercice est basé sur la résolution d'équations stationnaires dont la méthode est proposée ici[6]. **On fera l'activité correspondate avant de se lancer dans cet exercice et on utilisera directement la fonction `scipy.optimize.bisect` pour résoudre une équation.**

On considère un générateur de tension modélisé par un modèle de Thévenin composé d'une f.e.m. de tension E et d'une résistance de sortie $R = 50\Omega$. Il est relié à une diode D dont la relation intensité tension est:

$$i = I_s \left(\exp\left(\frac{u_D}{V_D}\right) - 1 \right)$$

avec $I_s = 95\mu\text{A}$ et $V_D = 30\text{mV}$

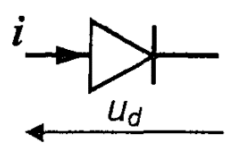


Fig. 1.10: Titre

Point de fonctionnement :

1. Justifier que si l'on trace les caractéristiques statiques de la diode et du générateur de Thévenin, l'intersection des deux courbes donne l'intensité circulant dans le circuit et la tension aux bornes des deux dipôles en régime indépendant du temps. On précisera notamment les conventions choisies pour tracer chaque caractéristique. On appelle ce point, le point de fonctionnement du circuit.

[6] https://pcsi3physiquestan.github.io/capacites_numeriques/equation_stationnaire.html

2. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement pour $E < 0$ puis pour E supérieur à V_D.
3. Montrer, dans le cas général que la tension u aux bornes du générateur doit, à un instant t doit vérifier l'équation suivante:

$$I_s \left(\exp\left(\frac{u}{V_D}\right) - 1 \right) - \frac{E-u}{R} = 0$$

1. On note f précédente dont u doit être racine. Tracer u pour $E = 1$V sur un intervalle où f s'annulle et estimer graphiquement la valeur de u.
2. Utiliser la fonction `bisect` pour trouver u lorsque $E = 1$V.

   Redressement monoalternance : On suppose maintenant que $E(t)$ est une tension sinusoïdale:

$$E(t) = E_0 \cos 2\pi f t$$

avec $E_0 = 2$V et $f = 50$Hz.

1. Même si E varie, pourquoi u est toujours racine de f à chaque instant t ?
2. Ecrire une fonction `Esource(t:float) -> float` qui renvoie la valeur de $E(t)$ et, si ce n'est pas déjà fait une fonction `f(u:float) -> float` qui renvoie $f(u)$ (on prendra la valeur $E_{instantanee} = E(t)$ comme une valeur globale pour la fonction `f`)`.
3. Créer un vecteur E_k contenant les 1000 valeurs $E(t_k)$ aux instants t_k équirépartis sur 2 périodes de E.
4. Pour chaque valeur E_k, déterminer la tension u_k et l'intensité i_k correspondant au point de fonctionnement du circuit et stocker ces valeurs dans deux listes. Transformer ensuite ces listes en des vecteurs.
5. Tracer $u_R(t) = Ri(t)$ grâce aux résultats précédents puis lui superposer $E(t)$. Pourquoi parle-t-on de redressement monoalternance ?

CHAPTER

TWO

RÉGIME TRANSITOIRE

2.1: Compétences

- Distinguer, sur un relevé expérimental (évolution temporelle), régime transitoire et régime permanent.
- Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine.
- Établir les conditions initiales d'un circuit.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit.
- Déterminer analytiquement la réponse temporelle à partir de l'équation différentielle qu'elle doit vérifiée.
- Déterminer l'état d'un système dans un régime forcé indépendant du temps en utilisant les comportements des bobines et condensateurs dans ce genre de régime.
- Ecrire sous forme canonique l'équation différentielle pour un système d'ordre 1 ou 2
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire suivant la typologie du système.
- Réaliser des bilans énergétiques et des bilans de puissances sur des systèmes d'ordre 1 ou 2.
- Analyser, sur des relevés expérimentaux, le type de régime transitoire en fonction des paramètres caractéristiques pour un système d'ordre 2.
- Connaître la nature de la réponse d'un système d'ordre 2 en fonction de la valeur du facteur de qualité ou du coefficient d'amortissement.
- Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique.
- Savoir réaliser une étude complète d'un système de son précédent état à son nouvel état forcé en déterminer le régime transitoire.

2.1 Connaître le contexte

De manière générale dans les cours, ces parties présentent :

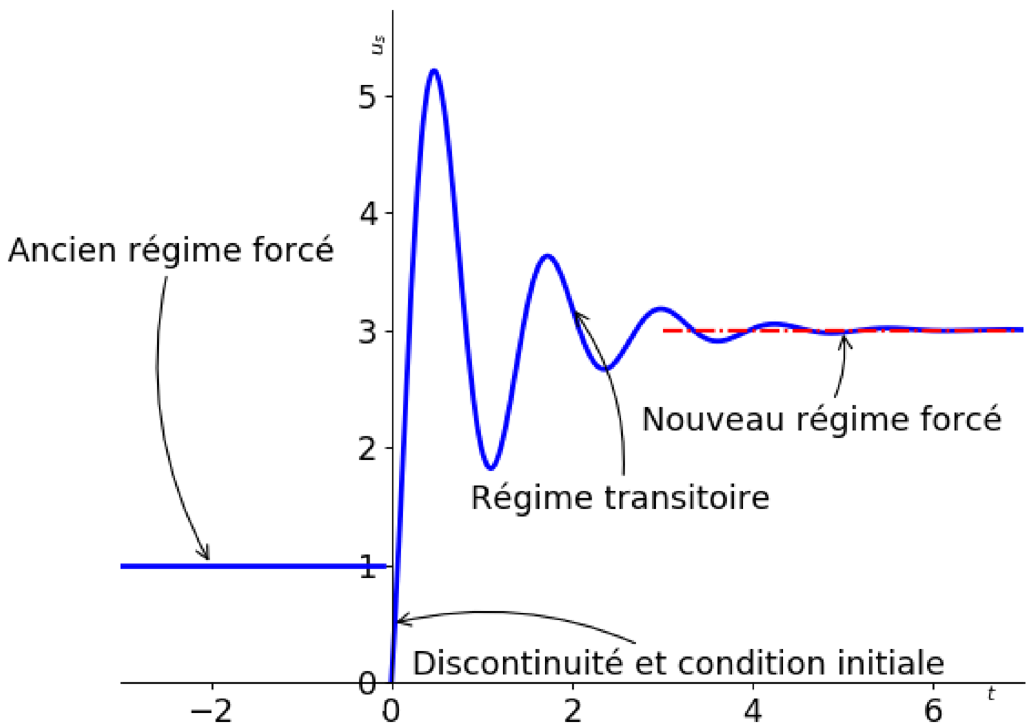
- le contexte d'étude (but, ordre de grandeur, postulat d'étude…)
- les éléments importants **à connaître par coeur** (définitions, propriétés, principes et lois, théorèmes…)
- quelques démonstrations **à connaître par coeur**

2.1.1 Régime transitoire et régime forcé

2.1.1.1 Régimes de fonctionnement: régime transitoire et régime forcé

Important 2.1

Différents régimes



Lorsque la grandeur d'entrée varie brusquement pour passer d'une forme à une autre, le système (ses grandeurs) va évoluer durant un temps fini (non nul) pour tendre (s'il est stable) vers un nouveau régime.

- L'évolution entre le régime forcé précédent et le nouveau régime forcé est appelé **régime transitoire.**
- Si le système est **stable**, les grandeurs du systèmes vont tendre vers un état dépendant du système lui-même, de la grandeur considérée et **de la grandeur d'entrée.** On parle alors de **régime forcé.**

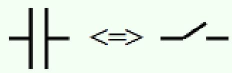
En général, la forme mathématique des grandeurs du système tend à prendre une forme similaire à la forme mathématique de la grandeur d'entrée.

2.1.1.2 Etude d'un circuit en régime forcé indépendant du temps

2.1.1.2.1 Condensateur et bobine en régime indépendant du temps

Important 2.2

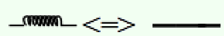
Condensateur en régime indépendant du temps



En régime indépendant du temps, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Important 2.3

Bobine en régime indépendant du temps



En régime indépendant du temps, une bobine est équivalent à un fil.

Cf. *cet exercice* (page 41) pour utiliser ces propriétés

2.1.1.3 Caractéristiques des régimes transitoires (en ligne)

2.1.1.3.1 Etude expérimentale

2.1.1.3.2 Dépassement

2.1.1.3.3 Temps caractéristique et temps de réponse

Pour voir le lien entre temps de réponse en temps caractéristique, traiter *cet exercice* (page 47)

2.1.1.4 Etude d'un portrait de phase (en ligne)

2.1.2 Méthodes d'analyse d'un régime transitoire

Nous avons vu quelques caractéristiques du régime transitoire comme son temps caractéristique ou encore l'étude de régime forcé. L'étude du régime transitoire passe par l'étude de la réponse temporelle qu'il convient de déterminer. Pour cela il faut:

- déterminer l'équation qui régit l'évolution de la grandeur qui nous intéresse. Nous verrons qu'il s'agit d'une équation différentielle et qu'elle possède certaines propriétés importantes
- déterminer les conditions initiales qui permettront de déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution. Il faut noter que souvent, ces dernières ne sont pas données mais doivent être déterminées.
- Déterminer l'évolution temporelle (u(t) ou i(t) ou le deux) de la grandeur qui nous intéresse. Cela passe par la résolution de l'équation différentielle établie précédemment en utilisant les conditions initiales.

2.1.2.1 Mise en équation

Un exemple de mise en équation est donné *ici* (page 42). Nous verrons aussi par la suite la mise en équation de circuits RC et RLC série.

2.1.2.2 Détermination des conditions initiales

2.1.2.2.1 Continuité des grandeurs

Important 2.4

- La **tension aux bornes d'un condensateur** est une grandeur nécessairement continue.
- **L'intensité qui circule dans une bobine** est une grandeur nécessairement continue.

Une détermination des CI est proposée ici *(page 43).*

2.1.2.3 Evolution temporelle

Rappel : Méthode de résolution On rappelle ici la méthode de résolution d'une équation différentielle. Insistons sur le fait que l'ordre de résolution est fondamental.

1. Déterminer à partir de l'équation homogène la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. **Ne pas utiliser la méthode de la variation de la constante en physique.**
3. En déduire la solution générale de l'équation avec second membre en sommant les deux fonctions précédentes.
4. Déterminer les constantes d'intégration à partir des conditions initiales.

Autre étudesA partir de la solution déterminée précédemment, on peut être amené à:

1. Tracer l'évolution temporelle.
2. Analyser un tracé temporel donné pour l'associer au système ou déterminer certaines caractéristiques (conditions initiales, régime forcé, type de régime pour un circuit d'ordre 2 - cf. suite - …)
3. Faire un bilan de puissance ou un bilan énergétique en déterminant la puissance reçue/fournie ou l'énergie reçue/fournie par les différents dipôles.
4. …

Un exemple est donnée *ici* (page 43)

2.1.3 Stabilité des systèmes linéaires d'ordre 1 et 2

2.1.3.1 Stabilité des systèmes linéaires d'ordre 1 et 2

Important 2.5

Condition de stabilité des systèmes linéaires d'ordre 1 et 2 Un système linéaire d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de **l'équation homogène** sont tous de même signe.

2.1.4 Caractéristiques d'un système d'ordre 1

Dans cette partie et la partie suivante, les résultats sont données mais il faut savoir systématiquement les démontrer avant de les utiliser. Un exemple complete d'étude est donné *ici* (page 39)

2.1.4.1 Forme canonique

Important 2.6

Forme canonique de l'équation différentielle. Pour une grandeur dans un système d'ordre 1, l'équation différentielle se met sous la forme canonique suivante:

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \frac{1}{\tau}X(t) = F(t)$$

Comme on le verra, τ est le temps caractéristique du système.

2.1.4.2 Evolution temporelle

Important 2.7

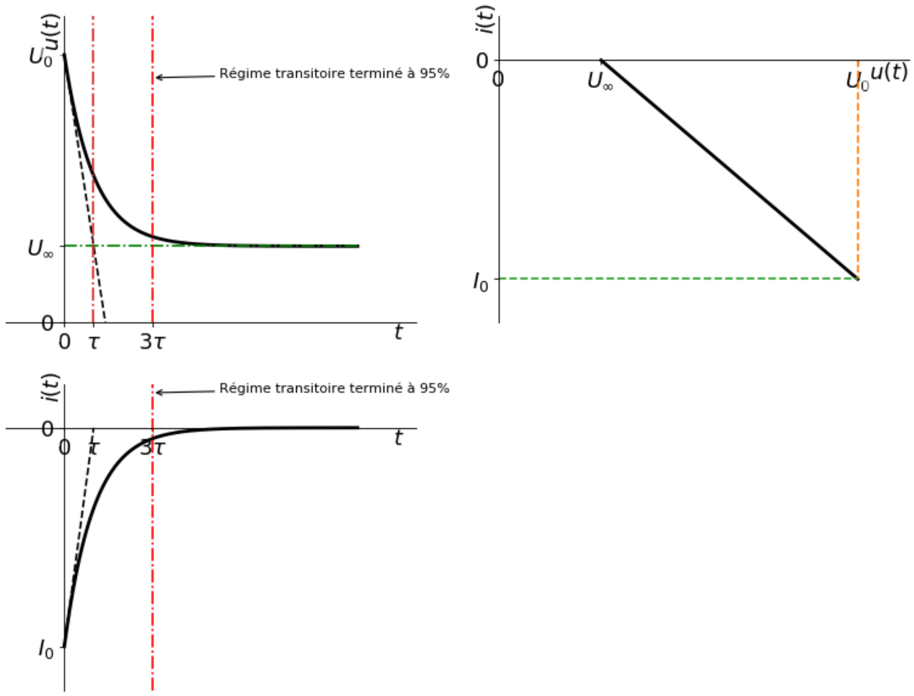
Forme temporelle La solution générale de *l'équation homogène* a pour forme $Ae^{-t/\tau}$ *On rappelle qu'il faut ensuite déterminer la solution particulière qui va dépendre de la tension en entrée.*

Important 2.8

Temps caractéristique d'un système d'ordre 1 La forme générale de la solution de l'équation homogène montre tout de suite que τ est le temps caractéristique du système.

Important 2.9

Evolution temporelle: tracé On a représenté ci-dessous l'évolution temporelle (t>0) vers un régime forcé indépendant du temps ainsi que le portrait de phase. On peut en tirer plusieurs informations



Le temps caractéristique fait office de facteur d'échelle comme on peut le voir. On peut le mesurer de deux manières:

- A $t = \tau$, l'écart entre X(t) et l'état final ($X(t = +\infty)$) vaut 37% de l'écart entre $X(t = 0^+)$ et l'état final.
- Si l'on trace la tangeante à X(t) à un instante t_1. Son intersection avec l'asymptote horizontale à $+\infty$ (donc avec la droite $y = X(+\infty)$ se fait à l'instant $t_1 + \tau$.

2.1.4.3 Etude énergétique

Nous ne généralisons pas les conclusions obtenues ici mais présentons une *méthode permettant de réaliser un bilan de puissance et un bilan d'énergie ici* (page 39).

2.1.5 Caractéristiques d'un système d'ordre 2

2.1.5.1 Système d'ordre 2: Forme canonique

Important 2.10

Forme canonique des systèmes d'ordre 2

L'équation différentielle qui régit l'évolution d'un système d'ordre 2 peut se mettre une des formes suivantes:

$$\frac{\mathrm{d^2X}}{\mathrm{dt^2}}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t) \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d^2X}}{\mathrm{dt^2}}(t) + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t) \tag{2.2}$$

On appelle

- Q: le facteur de qualité du système
- ξ: le coefficient d'amortissement du système
- ω_0: la pulsation propre du système

Important 2.11

Type de régimes

La forme mathématique correspondant à la solution dépend de la valeur du facteur de qualité Q (ou du coefficient d'amortissement ξ) car ce dernier influe sur la valeur du discriminant de l'équation caractéristique Δ. A chaque expression différente correspond un type de régime:

	Δ	Q	ξ	Forme ESSM
Régime apériodique	> 0	< 1/2	> 1	$A\exp r_1 t + B\exp r_2 t$
Régime critique	= 0	= 1/2	= 1	$\exp r_0 t\,(At+B)$
Régime pseudo-périodique	< 0	> 1/2	< 1	$\exp \lambda t\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$

On rappelle que :

- r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristiques
- r_0 est la solution double lorsque le discriminant est nul
- λ et Ω sont respectivement la partie réelle de r_1 et r_2 et la partie imaginaire (en valeur absolue) de r_1 et r_2 lorsque le discriminant est négatif. On appelle Ω **la pseudo-pulsation** du système.

2.1.5.2 Différents régimes de fonctionnement

2.1.5.2.1 Régime apériodique

Solution de l'équation homogène On rappelle que la solution de l'équation homogène dans le cas où $\Delta > 0$, c'est-à-dire $Q < 1/2$ (ou $\xi > 1$ est:

$$X(t) = A\exp^{r_1 t} + B\exp^{r_2 t}$$

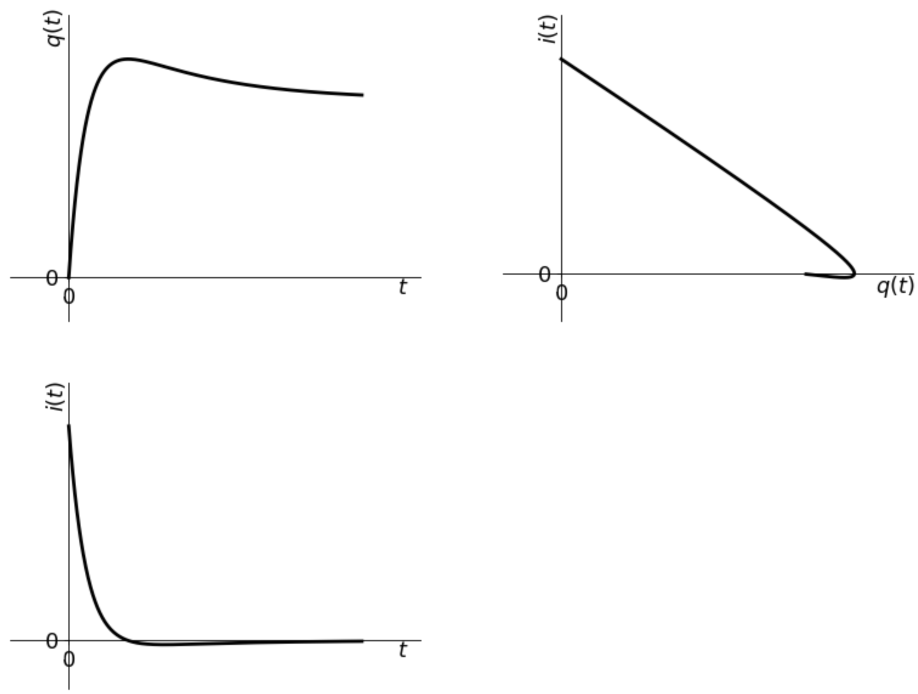
avec:

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$$

Analyse des expressions Remarquons que dans le cas où les coefficients sont positifs, les deux racines sont négatives: on retrouve le principe de stabilité du système.

2.2: Tracés temporels et portrait de phase



2.1.5.3 Régime critique

Solution de l'équation homogène On rappelle que la solution de l'équation homogène dans le cas où $\Delta = 0$, c'est-à-dire $Q = 1/2$ (ou $\xi = 1$ est:

$$X(t) = \exp^{r_0 t}(At + B)$$

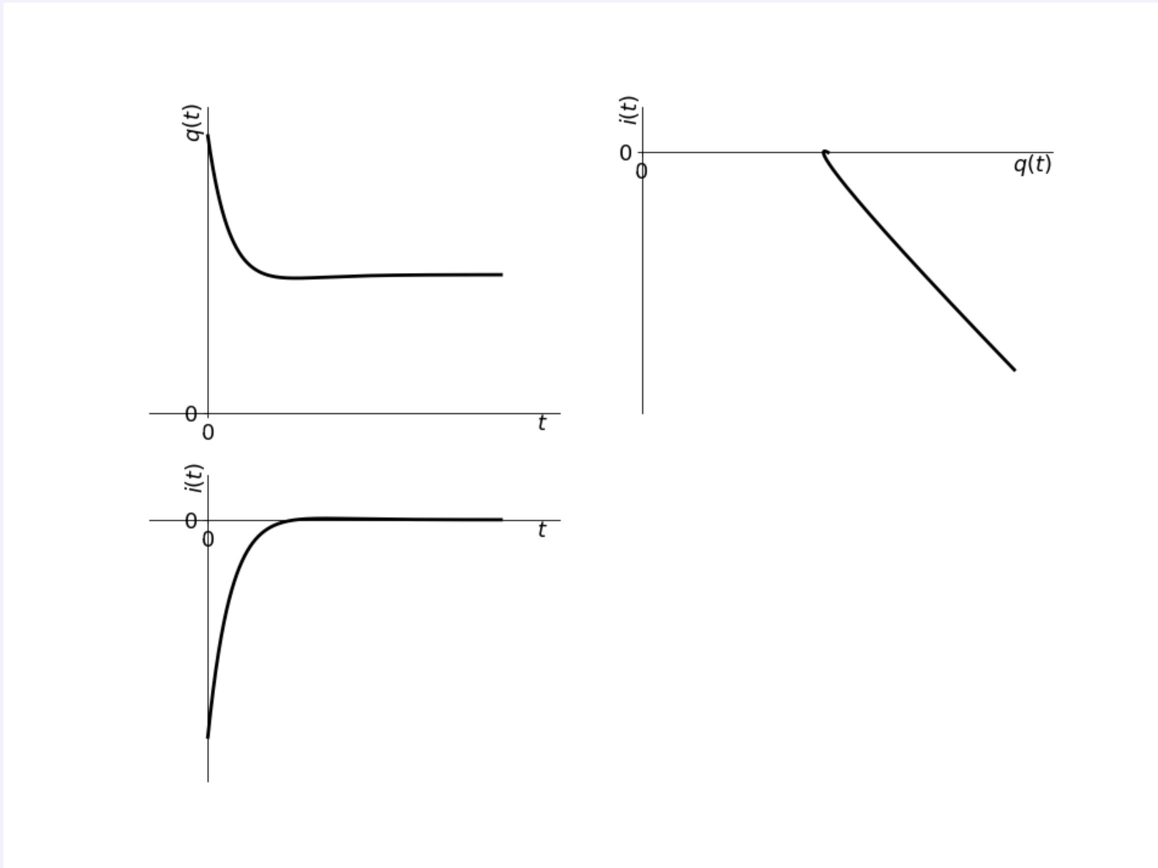
avec:

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

Analyse des expressions Remarquons que dans le cas où les coefficients sont positifs, la racine double est négative: on retrouve le principe de stabilité du système.

2.3: Tracés temporels et portrait de phase

Remarquons qu'il y a beaucoup de similarités avec le régime apériodique en terme de tracé. Pris séparément, on ne peut pas savoir si un tel tracé vient d'un régime apériodique ou critique.
Nous verrons en activité un moyen de comparer les deux tracés (quand on a les deux).



2.1.5.4 Régime pseudo-périodique

2.1.5.4.1 Solution analytique

Solution de l'équation homogène On rappelle que la solution de l'équation homogène dans le cas où $\Delta < 0$, c'est-à-dire $Q > 1/2$ (ou $\xi < 1$ est:

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp^{-\lambda t}\left(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t\right) \\ &= \exp^{-\lambda t}\left(C \sin\left(\Omega t + \phi\right)\right) \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} \lambda &= Re(r_{1,2}) = -\frac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega &= \left|Im(r_{1,2})\right| = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{aligned}$$

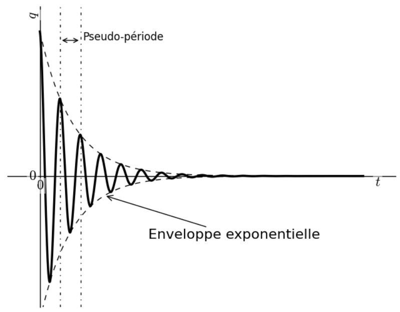
Analyse des expressions Remarquons que dans le cas où les coefficients sont positifs, le coefficient de l'exponentielle (issue de la partie réelle des racines) est négatif: on retrouve le principe de stabilité du système.

2.1.5.4.2 Tracé temporelle

Tracé temporelleL'expression $X(t) = \exp^{-\lambda t}\left(D\sin^{\Omega t+\phi}\right)$ permet de dessiner facilement l'évolution de X(t) en régime pseudo-périodique.

En effet, on remarque qu'il s'agit d'un signal sinsoïdal de pulsation Ω ou plutôt **pseudo-sinusoïdal** car l'amplitude décroît de *manière exponentielle* (page **??**).

Pour représenter X(t), il faut d'abord représenter son **enveloppe exponentielle**: $D\exp^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$. On représente alors à l'intérieur de l'enveloppe un sinusoïde (dont l'amplitude décroît) de **pseudo-période** $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.



2.1.5.4.3 Régime pseudo-périodique: Décrément logarithmique

Important 2.12

Décrément logarithmique.
Pour un régime pseudo-périodique de pseudo-période T, on définit le décrément logarithmique δ par:

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t) - u(t = +\infty)}{u(t+T) - u(t = +\infty)}\right)$$

Important 2.13

Relation entre le décrément logarithmique et le facteur de qualité On peut montrer que ('sentraîner à le faire - correction en ligne):
$\$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\$$\end{basic}

2.1.5.4.4 Portrait de phase (en ligne)

2.2 Maitriser les méthodes

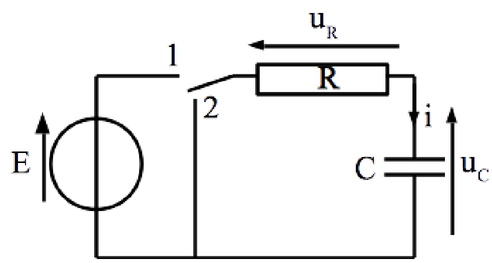
- Méthodes : Etude d'un régime transitoire et mise en équation
- Activités : Etude des équations d'un même système, oscillateur harmonique, Temps caractéristique et énergie
- Applications : En plus des applications du polycopié. Des interrogations de cours sont en ligne ici[7] et ici[8].

[7] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12840
[8] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12841

- Entrainements : En plus des TDs, deux devoirs libres sont en ligne[9]. Le second[10] nécessite d'avoir travaillé sur l'amplificateur opérationnel avant.
- Approfondissements : Un approfondissement basé sur l'introduction de dipôles non linéaires dans les circuit est disponible en ligne[11]

2.2.1 Exemple : Etude d'un système d'ordre 1

On se propose de retrouver les caractéristiques précédentes sur l'exemple suivant:



L'interrupteur étant en position 1 depuis un temps long, il bascule à t=0 en position 2.

2.4: Mise en équation

Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de u_C pour $t > 0$.

2.5: Evolution temporelle

Déterminer $u_C(t)$ et $i(t)$ pour $t > 0$ et tracé leur allure temporelle.

2.2.1.1 Etude énergétique

2.6: Bilan de puissance et d'énergie

1. Réaliser un bilan de puissance du circuit RC précédent.
2. Réaliser un bilan d'énergie du circuit RC précédent entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

2.2.1.2 Application à la réponse indicielle d'un circuit RC

Nous allons étudier la réponse indicielle qui permettra de rappeler la méthode pour la recherche de la solution particulière. Il est conseillé de s'entraîner à faire l'exercice avant de regarder les réponses.

2.7: Exercice

On considère toujours le circuit RC mais après un temps long en position 2, l'interrupteur bascule à t=0 en position 1.

1. Déterminer avec peu de calculs l'état final de $u_C(t)$
2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ puis déterminer $u_C(t)$.

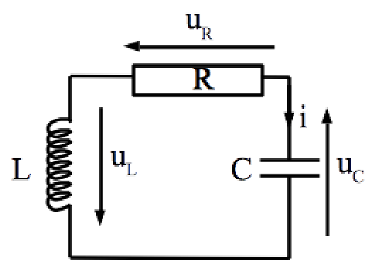
[9] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12836
[10] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12838
[11] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=15006

3. En déduire i(t).
4. Réaliser un bilan de puissance et un bilan énergétique sur l'ensemble du circuit.

2.2.2 Exemple : Etude d'un système d'ordre 2

2.2.2.1 Régime libre

Nous allons étudier un exemple de système d'ordre 2 basé sur le circuit suivant (appelé circuit RLC série en régime libre) :



Cette fois, on suppose les conditions initiales connues à t=0 :

$$i(t=0) = i_0 \tag{2.3}$$

$$u_C(t=0) = 0 \tag{2.4}$$

2.8: Mise en équation

Obtenir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique en utiliser le facteur de qualité.

2.9: Cas apériodique

Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime apériodique.

2.10: Cas critique

Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime critique.

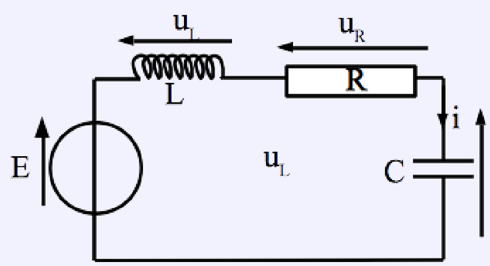
2.11: Cas pseudo-périodique

1. Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
2. Estimer une durée caractéristique du régime transitoire pour un régime pseudo-périodique et en déduire le nombre de pseudo-périodes qu'on peut voir. Commenter ce nombre quand Q devient grand.

2.2.2.2 Réponse indicielle d'un RLC série

2.12: Exercice

On considère le circuit suivant (E est constant). A t=0, le condensateur est complètement déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit.



1. Exprimer la tension aux bornes du condensateur dans le nouveau régime forcé.
2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. En déduire les expressions du facteur de qualité et de la pulsation propre. Les comparer au cas du régime libre.
3. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour t>0 dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
4. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour t>0 dans le cas d'un régime apériodique.
5. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour t>0 dans le cas d'un régime critique.

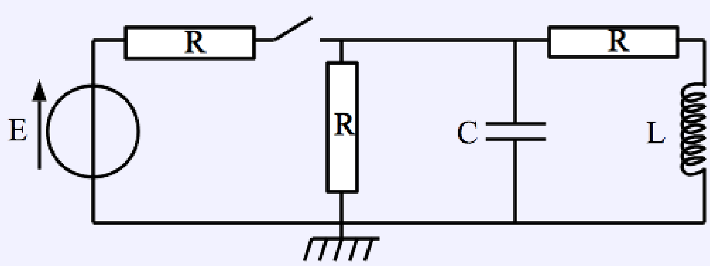
2.2.3 Exemples d'étude

2.2.3.1 Etude d'un régime indépendant du temps.

Cet exercice explique la méthode d'étude d'un régime indépendant du temps

2.13: Exercice

Étudier le circuit suivant en régime indépendant du temps lorsque l'interrupteur est ouvert. On déterminera toutes les intensités.



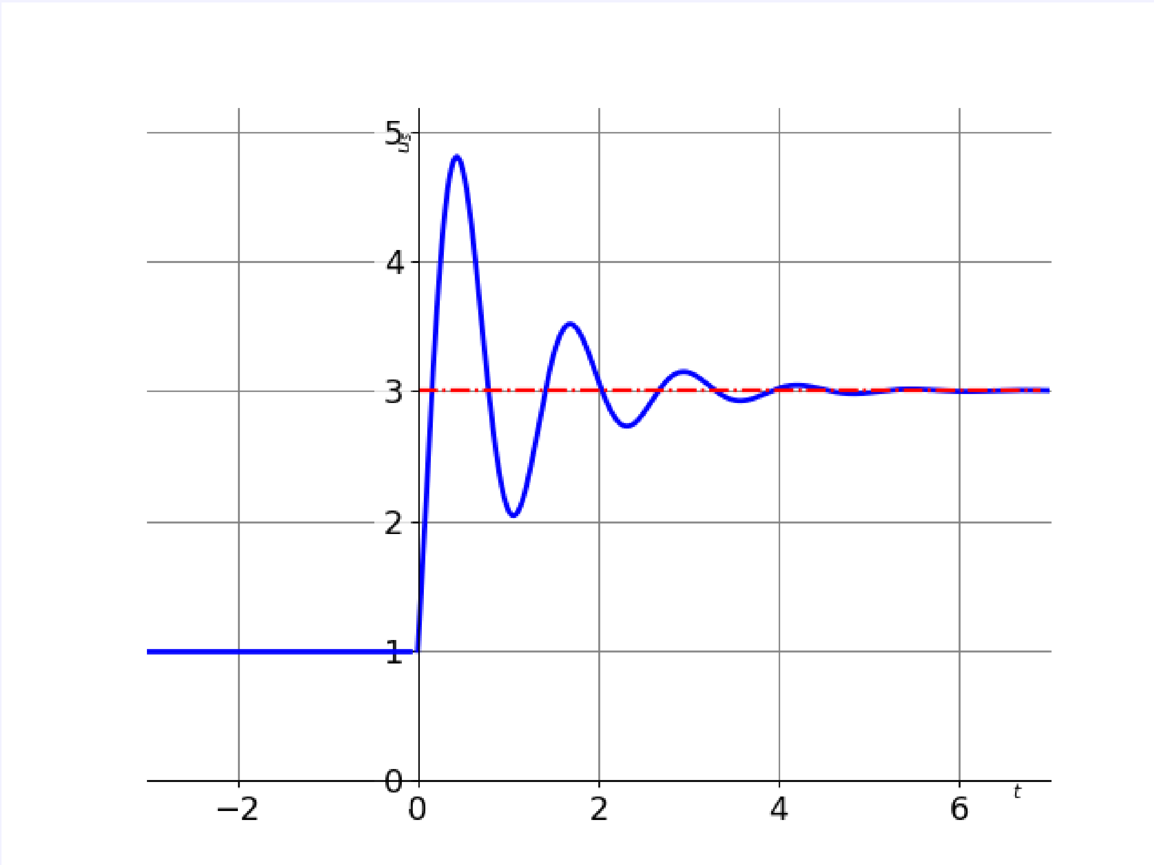
2.14: Exercice

Etudier le circuit précédent en régime indépendant du temps lorsque l'interrupteur est fermé. On déterminera toutes les intensités.

2.2.3.2 Caractéristiques d'un régime transitoire

2.15: Régime apériodique - Temps de réponse

Déterminer le temps de réponse à 95% pour le signal dont l'évolution est représentée ci-dessous.



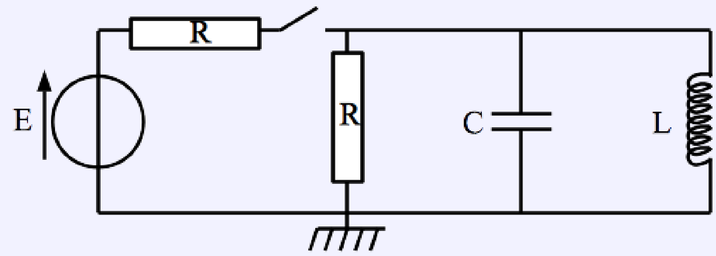
2.2.3.3 Mise en équation d'un système

2.2.3.3.1 Déterminer l'équation différentielle (Lois de Kirchhoff)

On se propose ici de voir comment déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution d'une grandeur au moyen des lois de Kirchhoff.

2.16: Exercice

On considère le circuit suivant. L'interrupteur est ouvert depuis un temps long. A t=0, on ferme l'interrupteur. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité qui circuledans la bobine pour $t > 0$.

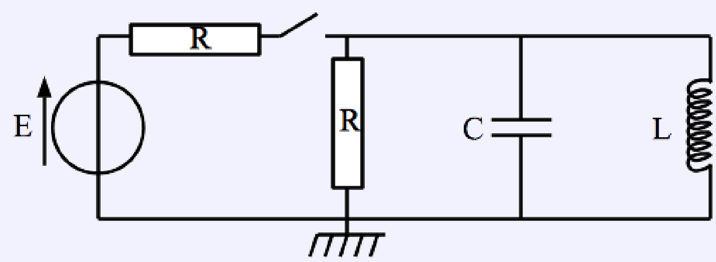


2.2.3.3.2 Déterminer des conditions initiales

Cet exercice explique comment déterminer les conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle. Il fait suite au précédent

2.17: Exercice

On considère le circuit. L'interrupteur est ouvert depuis un temps long. A t=0, on ferme l'interrupteur. On rappelle qu'on a déterminé l'équation différentielle pour i_L pour t > 0 (prendre les notations précédentes). Déterminer les conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation précédente.



2.2.3.3.3 Exemple d'autres études

Nous allons voir ici l'exemple d'autres études à partir soit de l'équation différentielle, soit de la forme temporelle. On rappelle qu'on peut aussi obtenir des information du circuit même (en régime forcé par exemple). Il est conseillé d'essayer de faire cet exercice avant de regarder la réponse.

2.18: Exercice

On traaille avec le même système que précédemment. On rappelle que l'équation qui régit l'évolution de i_L(t) est:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{i_l}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{2}{RC}\frac{\mathrm{di_l}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{LC}i_l = -\frac{E}{RLC}$$

Conditions initiales: $i_l(t = 0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{di_l}}{\mathrm{dt}}(t = 0^+) = 0$

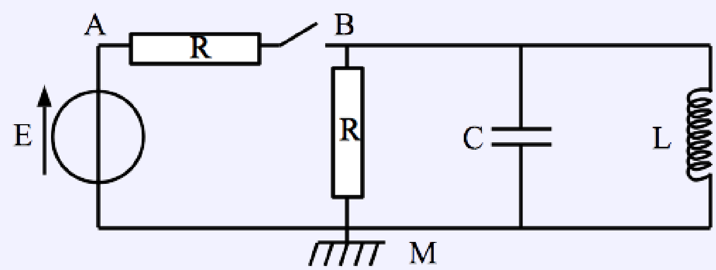
1. Déterminer $i_l(t)$ dans l'hypothèse $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$.
2. En déduire la puissance reçue par le bobine p(t).
3. Déterminer l'énergie reçue par la bobine entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

2.2.4 Activités

2.2.4.1 Equations dans un même circuit.

2.19: Exercice

On reprend le circuit suivant:



1. Déterminer les équations différentielles qui régissent les évolutions de:
   - la tension aux bornes du condensateur
   - l'intensité circulant dans le condensateur
   - l'intensité circulant dans la f.e.m.
2. Comparer ces équations et celle obtenues pour i_L. On notera les différences et les ressemblances et on les associera aux différences et ressemblances dans la solution de l'équation.

2.20: A retenir

On retiendra que:

- l'équation homogène **est la même pour toute les grandeurs d'un même circuit**.
  - Cela signifie que le temps caractéristique sera le même quelque que soit la grandeur, c'est pourquoi on parle de temps caractéristique **du système**. (*Idem pour* ω_0 *et* Q)
- le second membre dépend de la grandeur.
  - Cela signifie que que la solution particulière **et donc le régime forcé** sera **différent** pour chaque grandeur du système.
- Ce sera aussi le cas pour les constantes d'intégration qui dépendront *en plus* des conditions initiales (contrairement au régime forcé qui ne dépend pas de CI).

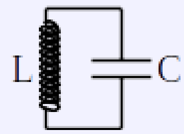
2.2.4.2 Oscillateur harmonique

Nous allons étudié ici le cas d'un oscillateur non amorti appelé **oscillateur harmonique.** Reconnaître un tel oscillateur passe par l'établissement de son équation différentielle caractéristique. Nous verrons ensuite son évolution. Le régime "transitoire" n'en est pas un puisqu'il ne s'atténue pas (mais il ne diverge pas non plus).

Si la mise en équation sera faite sur un circuit électrique particulier, il s'agit d'un système très important car il se retrouve partout en physique (mécanique, mécanique quantique, électromagnétisme…) et ses caractéristiques générales doivent être maîtrisées pour être adaptée à n'importe quel système.

2.21: Exercice

On considère le circuit suivant (la bobine est idéale). A $t = 0$, le condensateur est chargé à $q(t = 0) = q_0$ et l'intensité qui le traverse est i_0 (en convention récepteur).



1. En appliquant la loi des mailles, montrer que l'évolution de la tension aux bornes du condensateur dans le circuit est régit la l'équation: $\frac{\mathrm{d}U_C^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 U_C = 0$
2. Si l'on est en régime indépendant du temps, que vaut alors $U_C(t)$?
3. Montrer que la tension $u_C(t)$ va évoluer de manière sinusoïdale et préciser sa pulsation d'oscillation ainsi que sa période d'oscillation.
4. Exprimer complètement $u_C(t)$ avec les conditions initiales données dans l'énoncé.
5. Exprimer l'énergie $E_{el}(t)$ emmagasinée dans le condensateur.
6. Exprimer l'énergie $E_{mag}(t)$ emmagasinée dans la bobine.
7. En déduire l'énergie totale emmagasinée dans le système LC. Commenter son évolution temporelle.
8. Représenter graphiquement les évolutions deE_{el} et E_{mag}. Pourquoi parle-t-on d'échange d'énergie entre deux réservoirs ?
9. Calculer l'énergie moyenne stockée dans le condensateur puis l'énergie moyenne stockée dans la bobine.

Important 2.14

A retenir

- **Equation d'un oscillateur harmonique.** Un oscillateur harmonique est un système dont les grandeurs suivent une équation d'évolution sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t)$$

ω_0 est appelée la **pulsation propre** de l'oscillateur.

- **Evolution temporelle.** Un oscillateur harmonique est une oscillateur non amorti sinusoïdal: sans excitation extérieure (solution de l'équation homogène), ses grandeurs ont une évolution temporelle décrite par **un sinusoïde qui ne s'atténue pas**. La pulsation des oscillations est la pulsation propre.
- **Etude énergétique.** Un oscillateur harmonique est en général constitué de **deux réservoirs d'énergie qui s'échange l'énergie** de manière périodique.
  - Ici, c'est l'énergie stockée par le condensateur et celle stockée par la bobine.
  - Dans un oscillateur mécanique (système masse ressort par exemple), l'énergie est échangée entre l'énergie cinétique et l'énergie de rappel élastique (cf. mécanique).
  - Par contre **l'énergie totale reste constante**. Cela explique que les oscillations ne s'atténuent pas.

2.2.4.3 Temps caractéristique d'un système d'ordre 2

On se propose d'étudier l'influence du facteur de qualité sur le rapidité d'un système.

2.22: Exercice

On considère un système d'ordre 2 de facteur de qualité Q et de pulsation propre ω_0.

1. A quelle condition sur Q est-on en régime apériodique. Estimer la temps caractéristique de la durée du régime transitoire en fonction de Q et ω_0. Interprêter l'évolution de ce temps caractéristique en fonction de Q.
2. A quelle condition sur Q est-on en régime critique. Estimer la temps caractéristique de la durée du régime transitoire en fonction de Q et ω_0.
3. A quelle condition sur Q est-on en régime pseudo-périodique. Estimer la temps caractéristique de la durée du régime transitoire en fonction de Q et ω_0. Interprêter l'évolution de ce temps caractéristique en fonction de Q.

4. Tracer l'évolution du temps caractéristique en fonction de Q et retrouver le fait que le régime critique est le plus rapide.
5. Commenter le rôle de ω_0.

2.23: A retenir - Système rapide et régime critique

Pour obtenir un système rapide, il faut se placer dans un régime proche du régime critique, soit avoir un facteur de qualité proche de 1/2.
Il s'agit là d'une première inerprétation du facteur de qualité: on donnant une information sur l'intensité de l'amortissement, il donne aussi une idée sur la rapidité du système.

- Lorsque le facteur de qualité est faible, l'amortissement est fort et l'intensité électrique (ou la vitesse en mécanique) est faible: les pertes, proportionnelles à i^2 sont donc faible et le système s'amortit lentement.
- Lorsque le facteur de qualité est fort, l'amortissement est faible et le système va donc s'amortir lentement.
- C'est pour une valeur entre les deux (autour du régime critique) que le système sera le plus rapide.

2.24: A retenir - Loi d'échelle

Quelque soit la valeur de Q, le temps caractéristique est toujours proportionnel à $\frac{1}{\omega_0}$. La pulsation propre est donc un facteur d'échelle pour la rapidité du système. Plus la pulsation propre est grande, plus le système va réagir vite. Comme nous le verrons avec l'étude fréquentielle, ce facteur d'échelle est très important aussi lorsqu'il s'agit d'étudier le comportement du système forcé par une entrée sinusoïdale.

2.2.4.4 Etude énergétique

2.25: Exercice

On considère un dipôle RLC série en régime libre.

1. Faire un bilan de puissance. Commenter l'évolution de l'énergie emmagasinée par le dipôle RLC.
2. Dans le cas d'un régime apériodique, exprimer l'évolution de l'énergie emmagasinée dans la bobine et dans le condensateur ainsi que l'énergie totale emmagasinée dans le dipôle RLC.

On considère un dipôle RLC série branché à une source idéale de tension E.

1. Faire un bilan de puissance. Commenter l'évolution de l'énergie emmagasinée par le dipôle RLC.
2. Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, exprimer l'évolution de l'énergie emmagasinée dans la bobine et dans le condensateur ainsi que l'énergie totale emmagasinée dans le dipôle RLC.

2.26: Bilan de puissance et d'énergie.

Dans un dipôle RLC en régime libre, la bobine et le condensateur perdent de la puissance. Elle est intégralement dissipée par effet Joule dans la résistance. L'énergie stockée tend à diminuer jusqu'à 0
Lorsqu'on branche une fem E, la puissance reçue par la bobine et le condensateur correspond à la puissance fournir par E moins celle dissipée par la résistance. Suivant que la résistance dissipe plus d'énergie que ne fournit la fem ou l'inverse, l'énergie stockée tend à augmenter ou diminuer. On finit par tendre vers une énergie stockée uniquement dans le condensateur **(pour CE circuit, pas dans tous les cas)**.

2.2.5 Applications

2.2.5.1 Autour du temps caractéristique

2.27: Interprétation d'un temps caractéristique

On considère le signal ci-après.

$$e_m \exp(-t/\tau)$$

1. D'après vos connaissances de terminales, quel est le temps caractéristiques ?
2. Déterminer le temps de réponse à N%. L'exprimer pour N=95 puis pour N=99 et montrer qu'ils sont proportionnels âu temps caractéristiques. Retrouver ainsi une interprétation de ce dernier.

2.28: Régime apériodique

On considère le signal suivant:

$$2 * e_m \exp(-\frac{2t}{T}) - 4 * e_m \exp(-\frac{5t}{T}) + 3e_m$$

En comparant les temps caractéristiques des deux exponentielles, déterminer une estimation du temps caractéristique su signal total après avoir préciser l'état final.

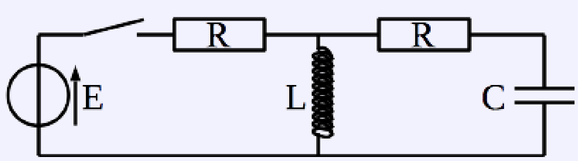
2.29: Homogénéité

Montrer que les grandeurs RC et L/R sont homogènes à des temps et que la grandeur LC est homogène à un temps au carré.

2.2.5.2 Conditions initiales et régime permanent

2.30: Exercice

On considère le circuit suivant, l'interrupteur est fermé depuis un temps long. A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.



1. Déterminer le régime permanent pour $t < 0$.
2. Déterminer le régime permanent atteint pour $t \to \infty$.
3. Déterminer les conditions initiales à $t = 0^+$

On déterminera toutes les intensités et les tensions.

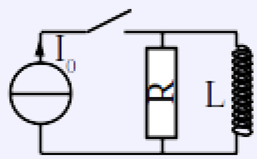
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Conditions initiales *(page 32)*.
- $\Longrightarrow$ Régime indépendant du temps *(page 31)*.

2.2.5.3 Circuits d'ordre 1 et 2

2.31: Circuit RL

On considère le circuit ci-après. L'interrupteur est depuis un temps long fermé. A $t = 0$, il s'ouvre.



1. Déterminer l'intensité circulant dans la bobine à $t = 0$.
2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la bobine.
3. Déterminer $i(t)$ pour $t > 0$
4. Tracer l'évolution temporelle de $i(t)$ et le portrait de de la bobine $(i(t); \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}})$.
5. Déterminer l'énergie perdue par la bobine de $t = 0$ à $t = +\infty$ et l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance. Commenter.

2.32: Circuit RL bis

On considère le même circuit. L'interrupteur est depuis un temps long ouvert. A $t = 0$, il se ferme.

1. Déterminer l'intensité circulant dans la bobine à $t = 0$.
2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la bobine.
3. Déterminer $i(t)$ pour $t > 0$
4. Tracer l'évolution temporelle de $i(t)$ et le portrait de de la bobine $(i(t); \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}})$.
5. Déterminer l'énergie perdue par la bobine de $t = 0$ à $t = +\infty$ et l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance ainsi que l'énergie fournie par la source idéale de courant. Commenter.

2.33: Cas extrêmes

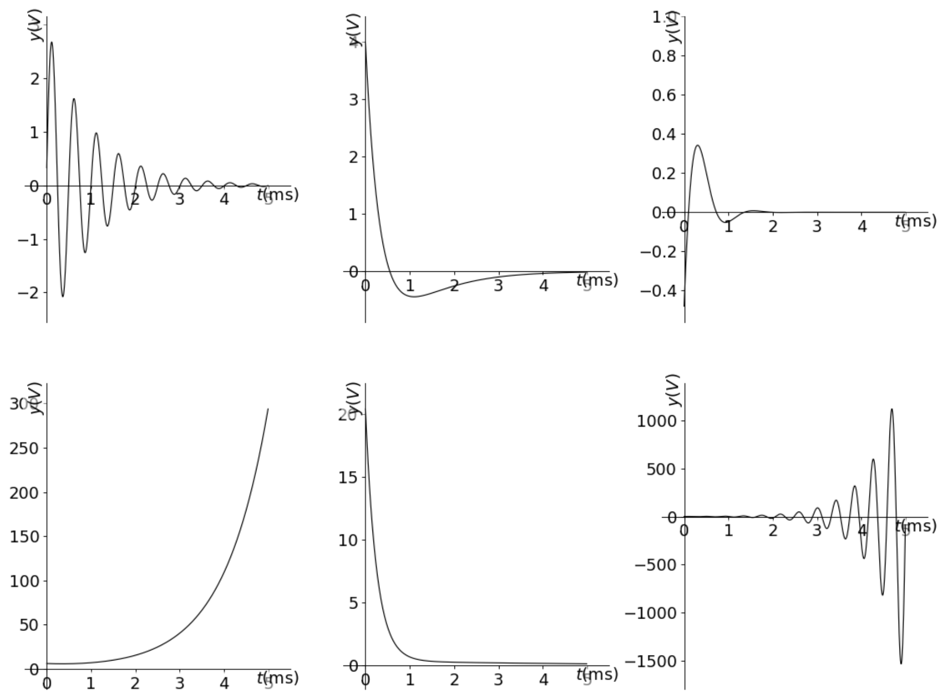
On considère un circuit RLC série. Déterminer les intervalles de valeurs de R permettant d'observer un régime apériodique. un régime critique. un régime pseudo-périodique.

- Quel régime observe-t-on si $RC \gg L/R$?
- Quel régime observe-t-on si $RC \ll L/R$?

2.34: Etude graphique

Pour les graphiques ci-dessous, déterminer:

1. si le régime est pseudo-périodique ou apériodique/critique
2. si le système est stable
3. le nouveau régime permanent établi lorsqu'il existe



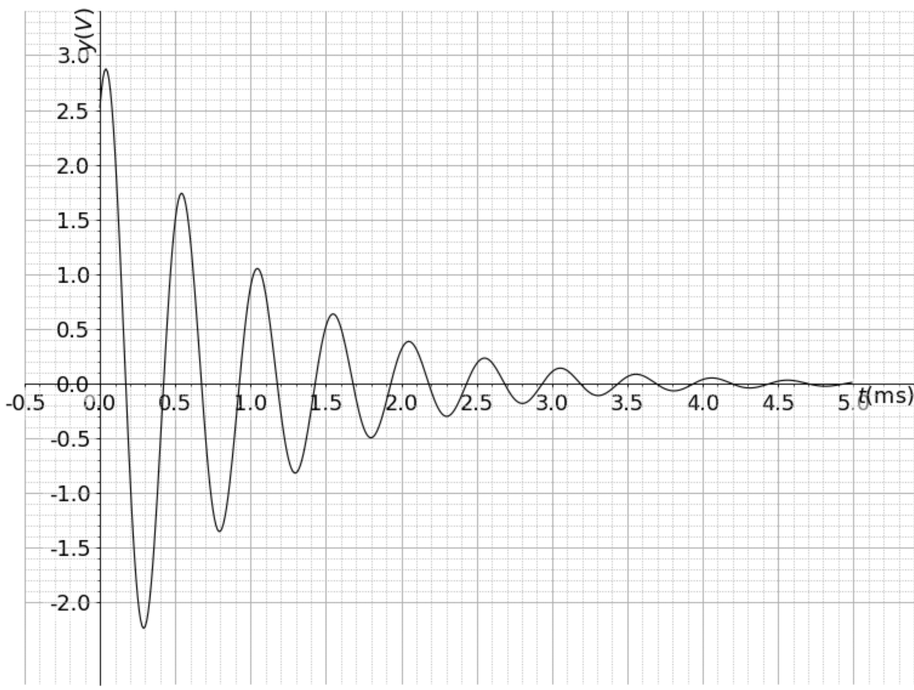
2.35: Décrément logarirthmique

- Question préliminaire. Montrer que (n est une entier):

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+nT)} \right)$$

- Mesurer pour le signal $u(t)$ ci-dessous les valeurs successives des maxima (au moins 6)
- En déduire des valeurs de δ pour n allant de 1 à 6 puis une valeur moyenne de δ.

Remarque: En séance de travaux pratiques, on réalisera plutôt une régression linéaire car les différentes mesures de delta dépendent l'une de l'autre.



2.36: RLC parallèle

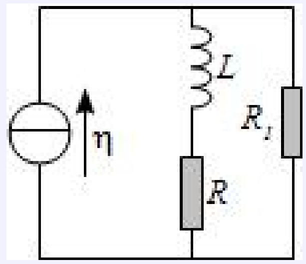
On considère une résistance R, une inductance L et un condensateur C branchés en parallèle.

1. Déterminer le facteur de qualité et la pulsation propre du circuit. Les comparer au cas du RLC série.
2. A quelle condition sur R,L et C observe-t-on un régime pseudo-périodique. Donner alors l'expression générale de l'intensité circulant dans la résistance sans calculer les constantes d'intégration.
3. Vers quoi doit tendre la valeur de R pour qu'on obtienne un oscillateur harmonique ? Commenter.
4. On branche en parallèle de R une source idéale de courant de cem η. A $t = 0$, l'intensité dans la bobine est nulle et la tension aux bornes de C est nulle aussi. Déterminer $i(t)$ l'intensité circulant dans la résistance en régime apériodique.

2.2.6 Entrainement : Régimes de fonctionnements

2.2.6.1 Circuits d'ordre 1

2.37: Circuit d'ordre 1



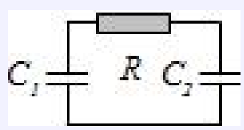
1. Calculer i, l'intensité qui circule dans la bobine. On donne $i(t=0)=0$.
2. En déduire i_1 et u_1 (tension aux bornes de R_1 et courant circulant dans R_1).
3. Tracer i et i_1 en fonction du temps.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Conditions initiales *(page 32)*.
- $\Longrightarrow$ Mise en équation *(page 42)*.

2.38: Deux condensateurs

On considère le circuit électrique de la figure ci-après. A t=0, $q_1 = Q_1$ et $q_2 = 0$. Donner l'évolution ultérieure (tensions et intensité) et faire un bilan énergétique.



Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ Conditions initiales *(page 32)*.
- $\Longrightarrow$ Mise en équation *(page 42)*.

2.39: Circuit soumis à une rampe.

On branche en parallèle une bobine d'inductance $L = 10$mH (non parcourue par un courant avant t=0), une résistance $R = 1$kΩ et un générateur idéal de courant qui fournit une rampe de courant η de pente λ en partant de 0A et jusqu'à un courant $I_0 = 1$A (atteint pour un temps t_0) puis reste constant.

1. Établir l'équation d'évolution de $i(t)$ le courant qui traverse la bobine quand le générateur débite une rampe de courant. Que vaut $i(0^+)$?
2. Pour $t < t_0$, chercher une solution particulière sous la forme $i_O(t) = \alpha t + \beta$. En déduire $i(t)$ pour $t < t_0$ de l'équation.
3. Calculer t_0 en fonction de λ et I_0. Discuter suivant les valeur de λ et I_0 les parts relatives données au régime transitoire et au régime "permanent" — on définira ces deux régimes.
4. On prend $\lambda = 1$A.s^{-1}, quelle approximation peut-on faire? Que vaut $i(t_0)$? En déduire l'évolution de $i(t)$ après $t = t_0$.
5. Calculer l'énergie délivrée par le générateur pendant les deux périodes $[0; t_0]$ et $[t_0; +\infty]$. La comparer avec l'énergie délivrée par un générateur délivrant un échelon de courant I_0 branché en parallèle à R et L. Commenter.

Point utile pour cet exercice

- ⟹ Conditions initiales *(page 32)*.
- ⟹ Mise en équation *(page 42)*.

2.2.6.2 Circuits d'ordre 2

2.40: Oscillateur faiblement amorti

On considère un circuit RLC série en régime libre. A $t = 0$, l'intensité circulant dans le circuit est I_0 et la tension aux bornes du condensateur et nulle.
On suppose de plus que $RC \ll \frac{L}{R}$.

1. Préciser le type de régime pour le système.
2. Dans l'approximation proposée, simplifier l'expression de la pseudo-pulsation.
3. Comparer le temps caractéristique du réigme transitoire et la pseudo-période du signal. En déduire l'allure graphique de q(t).
4. Déterminer l'expression complète de q(t).

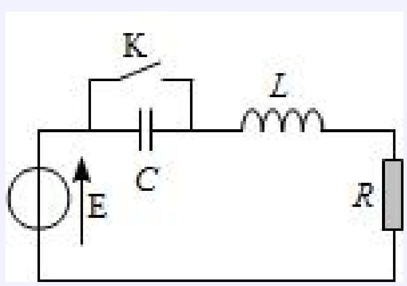
Point utile pour cet exercice

- ⟹ Conditions initiales *(page 32)*.
- ⟹ Mise en équation *(page 42)*.

2.41: Protection d'un interrupteur

Dans le circuit ci-dessous, l'interrupteur K est fermé et à t=0, on l'ouvre.

1. Expliciter la tension $u(t)$ aux bornes de K dans le cas où $L/R >> RC$.
2. On donne $L = 10\text{mH}, \text{E} = 5\text{V}, \text{R} = 50\Omega$. Évaluer la valeur maximale de $u(t)$ en l'absence du condensateur (l'interrupteur a alors une propre capacité de 10pF). On attend de l'initiative dans les calculs.
3. Justifier l'emploi d'un condensateur. Déterminer la valeur de celui-ci pour limiter la valeur maximale de $u(t)$ à 500V.



Point utile pour cet exercice

- ⟹ Conditions initiales *(page 32)*.
- ⟹ Mise en équation *(page 42)*.

CHAPTER

THREE

RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

3.1: Compétences

- Savoir que la réponse forcée d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale de même fréquence
- Réaliser une étude fréquentielle pour étudier les caractéristiques d'un système ou sa réponse à une excitation sinusoïdale
- Utiliser une étude fréquentielle pour prévoir la réponse à un signal décomposé spectralement
- Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique
- Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente
- Utiliser la construction de Fresnel et les méthodes complexes pour étudier un régime sinusoïdal for
- Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité
- Mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude d'une résonance en tension (pour un RLC série)
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes de réponse en amplitude et en phase
- Expliquer la complémentarité des informations présentes sur les graphes d'amplitudes et de phase, en particulier dans le cas d'une résonance en tension (pour un RLC série) de facteur de qualité modéré.

Nous avons étudié précédemment le régime forcé indépendant du temps. Mais très souvent, la grandeur (tension) d'entrée n'est pas constante et le régime forcé non plus. Nous allons voir ici l'étude d'un régime forcé particulier: le régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire lorsque l'entrée est un sinusoïde.

3.1 Connaître le contexte

De manière générale dans les cours, ces parties présentent :

- le contexte d'étude (but, ordre de grandeur, postulat d'étude…)
- les éléments importants **à connaître par coeur** (définitions, propriétés, principes et lois, théorèmes…)
- quelques démonstrations **à connaître par coeur**

3.1.1 Intérêt de l'étude fréquentielle (en ligne)

Cette partie ne présente pas d'élements à apprendre mais sert à comprenre l'intérêt du régime sinusoïdal forcé. Il est donc important de bien comprendre les raisonnements.

3.1.1.1 Rappel: Linéarité

3.1.1.2 Rappel: Décomposition spectrale

3.2: Bilan

On présente ici la méthode générale d'étude donnée précédemment. Il reste une partie qui a été donnée sans explication: l'étude fréquentielle à proprement parler. Il s'agit:

- d'observer qu'un régime sinusoïdal forcé est un régime où les grandeurs oscillent à la même pulsation que l'entrée. (Cette observation sera affirmée en cours puis observée en TP).
- d'apprendre à chercher la réponse forcée et plus précisément ses caractéristiques: amplitude et phase (ou déphasage avec l'entée). Nous verrons que la méthode utilisée change des études précédents: on introduira les grandeurs complexes.
- d'étudier ses caractéristiques pour connaître le comportement **fréquentiel** (c'est-à-dire par rapport à la fréquence) du système (aux hautes fréquences, aux basses fréquences…) de manière à prévoir, même qualitativement son comportement face à un signal plus complexe (amplification, filtrage…)

3.1.1.3 Linéarité et spectre

Important 3.1

Linéarité et spectre Un système linéaire ne peut ajouter de composante spectrale à un signal, c'est-à-dire que les composantes spectrales d'un signal en sortie d'un système linéaire sont forcément celle du signal d'entrée.

3.1.2 Régime sinusoïdal forcé

Important 3.2

Régime sinusoïdal forcé Lorsqu'un circuit **linéaire stable** est soumis **à une excitation sinusoïdale**, le régime transitoire s'atténue au bout d'un temps et il s'établit un régime forcé appelé régime sinusoïdal forcé. Toutes les grandeurs variables du circuit **ont alors la forme mathématique d'un sinusoïde de même pulsation que l'excitation.**

3.1.2.1 Représentation complexe des signaux sinusoïdaux

Important 3.3

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal
Considérons un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$. On définit la représentation complexe $\underline{s}(t)$ du signal $s(t)$ par la grandeur:

$$\underline{s}(t) = s_m \exp j\left(\omega t + \varphi\right)$$

On définit aussi l'amplitude complexe $\underline{s_m}$ du signal $s(t)$ par la grandeur:

$$\underline{s_m} = s_m \exp(j\varphi) = \frac{\underline{s}(t)}{\exp j\omega t}$$

Important 3.4

Relation complexe-réel. On a les relations suivantes:

$$\text{Grandeurs réelle :} s(t) = \Re\left(\underline{s(t)}\right)$$
$$\text{Amplitude (réelle) :} s_m = \left|\underline{s_m}\right| = \left|\underline{s(t)}\right|$$
$$\text{Phase à l'origine :} \varphi = \arg(\underline{s_m})$$

Ces relations sont fondamentales car elles permettent de déduire les caractéristiques (amplitude et phase à l'origine) du signal réel (ce qui nous intéresse au final) connaissant la grandeurs complexes associées (ce qu'on déterminera en premier).

3.1.2.1.1 Opérations sur les grandeurs complexes

Important 3.5

Combinaison linéaire La représentation complexe de la combinaison linéaire de deux signaux **de même pulsation** est égale à la même combinaison linéaire des représentations complexes de deux mêmes signaux:

$$s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \Longrightarrow \underline{s} = \lambda_1 \underline{s_1} + \lambda_2 \underline{s_2} \text{ avec } (\lambda_1;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Important 3.6

Dérivation et intégration La représentation complexe de la dérivée d'un signal sinusoïdal de pulsation ω est égale à la représentation complexe du même signal sinusoïdal multiplié par $j\omega$:

$$\underline{\frac{\text{ds}}{\text{dt}}} = j\omega\underline{s}$$

La représentation complexe de la primitive - de valeur moyenne nulle - d'un signal sinusoïdal de pulsation ω est égale à la représentation complexe du même signal sinusoïdal divisé par $j\omega$:

$$\underline{\int_s dt} = \frac{\underline{s}}{j\omega}$$

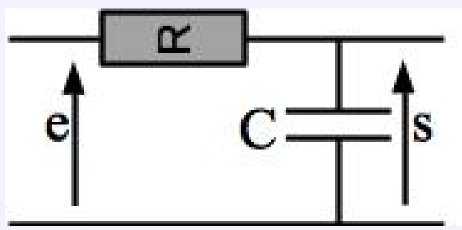
3.1.2.1.2 Intérêt des grandeurs complexes (en ligne)

Nous allons voir à travers l'étude du cas présenté précédemment l'intérêt de la grandeur complexe. Essayer de le résoudre avec les grandeurs réelles (on rappelle qu'on sait que le régime forcé est un régime sinusoïdal de même pulsation que l'entrée) puis passer à la correction pour voir l'utilisation des complexes.

3.3: Exercice

On rappelle qu'on étudie le circuit ci-après. Le point qui reste à prouver est l'étude fréquentielle, c'est-à-dire l'étude du régime sinusoïdal forcé par un sinusoïde quelconque de pulsation ω. On rappelle que le but est prouver que la tension aux bornes du condensateur pour une entrée de la forme $e(t) = e_m \cos \omega t$est de la forme:

$$\frac{e_m}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos (\omega t - \arctan (RC\omega))$$



3.1.2.2 Impédances complexes

3.1.2.2.1 Impédances complexes

Position du problème Soit un dipôle linéaire passif. Dans un circuit en régime permanent sinusoïdal,

- il est parcouru par un courant $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_i)$ dont la représentation complexe est: $\underline{i}(t) = i_m e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$
- la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_u)$ dont la représentation complexe est: $\underline{u}(t) = u_m e^{j\phi_u} e^{j\omega t}$.

3.4: Impédance et admittance complexe

*On définit l'**impédance complexe** d'un dipôle par la grandeur:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u_m}}{\underline{i_m}}$$

Elle ne dépend pas du temps mais peut dépendre de la pulsation du signal d'entrée.
*On définit **l'admittance complexe** comme l'inverse de l'impédance complexe:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{i_m}}{\underline{u_m}}$$

3.1.2.2.2 Impédances des dipôles usuels

Important 3.7

Impédances usuelles

- Cas d'une résistance: $\underline{Z} = R$
- Cas d'une bobine: $\underline{Z} = jL\omega$
- Cas d'un condensateur: $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

Les *exercices méthodes* (page 58) montrent l'utilisation des impédances.

3.1.2.3 Etude fréquentielle: Méthode et résultats importants

3.1.2.3.1 Etude haute et basse fréquence d'un circuit

Il est important de pouvoir analyser le comportement asymptotique d'un système, c'est-à-dire les comportements haute et basse fréquence. On peut pour celà utiliser deux méthodes:

- Etablir les équations et étudier le comportement limites des expressions complexes quand la pulsation tend vers 0 (basse fréquence) et vers l'infini (haute fréquence).
- Analyser directement le circuit en remplçant les condensateurs et bobines par des équivalents haute et basse fréquence. On parle d'étude rapide et l'on va préciser cette méthode.

Important 3.8

Comportements basse fréquence de C et L
A basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et une bobine comme un fil.

Important 3.9

Comportements haute fréquence de C et L
A haute fréquence, un condensateur se comporte comme un fil ouvert et une bobine comme un interrupteur.

Cf. *cet exemple* (page 60)

3.1.2.3.2 Formes canoniques

Il faut pouvoir déterminer quelle forme est applicable à la grandeur étudié puis mettre l'expression calculée sous la forme en identifiant les élements caractéristiques (pulsation propre et facteur de qualité). Pour choisir la forme à appliquer, il faut connaître **l'ordre du système** et **les comportements haute et basse fréquence**.

Important 3.10

Comportement passe-bas d'ordre 2 Pour une grandeur d'un système d'ordre 2 dont le comportement haute fréquence est nul et le comportement basse fréquence non nul, sa représentation complexe peut se mettre sous la forme:

$$\underline{s} = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est appelée pulsation réduite (attention, elle est sans dimension!).

Important 3.11

Comportement passe-bande d'ordre 2 Pour une grandeur d'un système d'ordre 2 dont le comportement haute et basse fréquence est nul, sa représentation complexe peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{Aj\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\end{aligned}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est appelée pulsation réduite (attention, elle est sans dimension!).

D'autres formes seront données dans le chapitre suivant.

3.2 Maitriser les méthodes

- Méthodes : Etude d'un circuit en RSF et caractéristiques HF et BF
- Activités : Etudes du RLC série
- Applications
- Entrainements : Un devoir libre est disponible en ligne[12] sur le RSF.

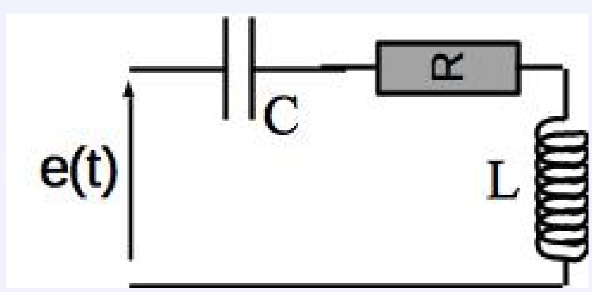
3.2.1 Méthodes : Etudier un circuit en RSF

3.2.1.1 Etude d'un circuit RLC série

Nous allons voir ici comment utiliser directement les représentations complexes sur un circuit.

3.5: Exercice

On considère un dipôle RLC série relié à une source idéale de tension délivrant une tension $e(t) = e_m \cos \omega t$. Déterminer la tension aux bornes du condensateur et l'intensité traversant le dipôle en régime sinuoïdal forcé.

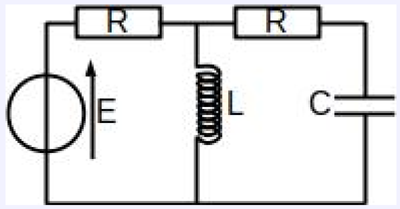


[12] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12842

3.2.1.2 Utilisation de la loi des noeuds en terme de potentiel

3.6: Exercice

On considère le circuit ci-dessous où E est la tension d'entrée. Déterminer la tension $\underline{s}$ aux bornes du condensateur en régime sinusoïdal forcé.



3.2.1.3 Passage fréquentiel-temporel

3.2.1.3.1 Passage réel-complexe

On parle aussi de passer du temporel au fréquentiel et inversement : il suffit de remplacer les dérivées par es $j\omega$.

3.2.1.3.2 Méthode: Du fréquentiel au temporel

3.7: Passage du fréquentiel au temporel

On peut aussi faire l'inverse et déduire d'une étude des grandeurs complexes, l'équation différentielle qui le relit. Il faut (pour deux grandeurs s et e reliée):

1. mettre le rapport $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ sous forme d'une fraction de deux polynômes en ω: $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$.
2. mettre l'égalité sous la forme$Q(j\omega)\underline{s} = P(j\omega)\underline{e}$.
3. Remplacer chaque facteur $(j\omega)^n$ par la dérivée $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$

3.8: Exercice

On considère un système dont la relation entrée sortie entre les grandeurs complexes (on parle de fréquentiel) est:

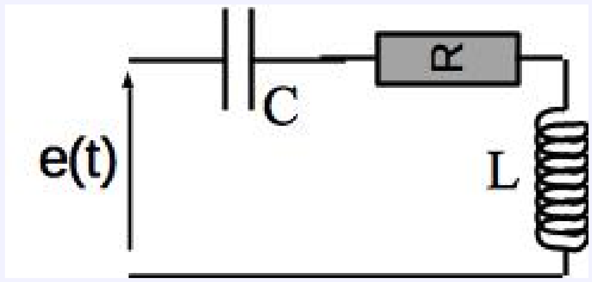
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Déterminer l'équation différentielle qui relie les grandeurs $s(t)$ à $e(t)$.

3.2.1.4 Etude fréquentielle

3.9: Analyse HF et BF

On considère le circuit RLC série ci-après. On veut étudier le comportement fréquentiel de certaines grandeurs. On rappelle qu'il s'agit d'étudier les caractéristiques du régime sinusoïdal forcé pour une entrée sinusoïdale quelconque.



Etudier la réponse haute et basse fréquence de l'intensité circulant dans le circuit et de la tension aux bornes du condensateur pour le circuit RLC série.

3.2.2 Activités

Ces deux activités seront traitées en cours.

3.2.2.1 Cas passe-bande

3.10: Exercice

1. On considère le circuit RLC série. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{i}$ de l'intensité circulant dans le circuit.
2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{i}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.
3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre i et e en fonction de Q, ω_0, R et e_m.
4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum. On parle de **résonance**. Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale ainsi que l'amplitude maximale i_{max}.
5. Déterminer la **bande passante**, c'est-à-dire la gamme de fréquence/pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est supérieure à $\frac{i_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$. On calculera aussi la largeur de la bande passante.
6. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.
7. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et représentation le daphasage en fonction de la fréquence.

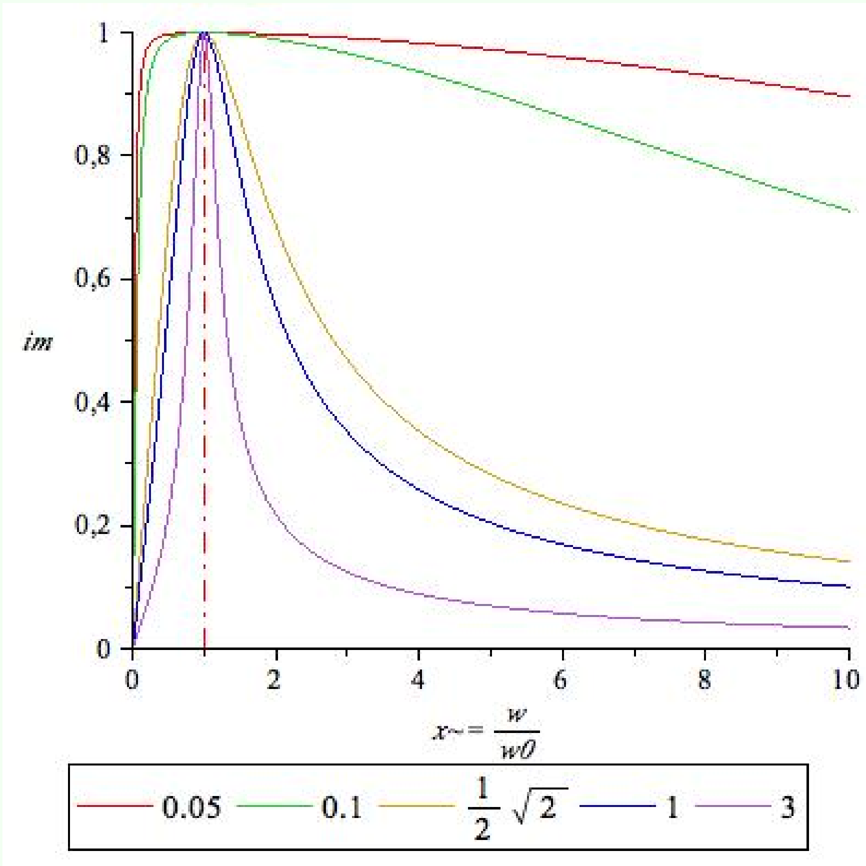
Important 3.12

Bilan : A retenir
On retiendra:

- les caractéristiques hautes et basses fréquences nécessaires et la forme canonique associées lorsque le système est d'ordre 2.
- la forme générale de la réponse fréquentielle (allure en fonction de la fréquence) en amplitude réelle et en

déphasage.

- l'existence d'une **résonance**, c'est-à-dire d'un maximum d'amplitude en fonction de la fréquence/pulsation dont la pulsation de résonance est toujours ω_0.
- La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.



3.2.2.2 Cas passe-bas

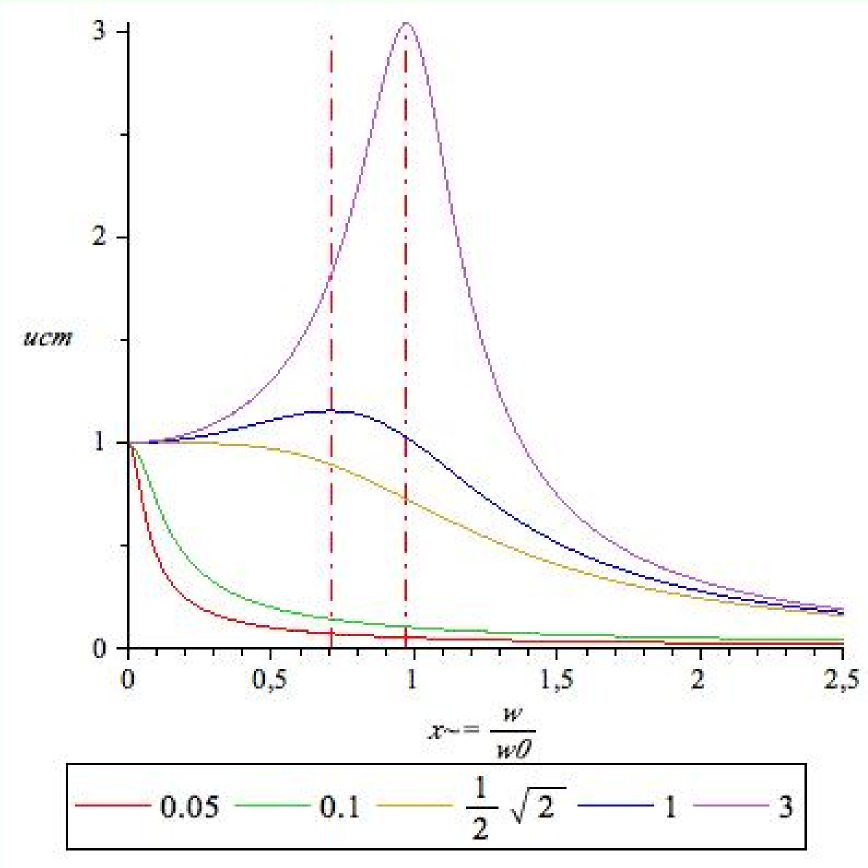
3.11: Exercice

1. On considère le circuit RLC série. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{u_C}$ de la tension aux bornes du condensateur.
2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{u_C}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.
3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre u_C et e en fonction de Q, ω_0 et e_m.
4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On parle de **résonance**. Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale.
5. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.
6. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et représentation le daphasage en fonction de la fréquence.

Important 3.13

Bilan : A retenir
On retiendra:

- les caractéristiques hautes et basses fréquences nécessaires et la forme canonique associées lorsque le système est d'ordre 2.
- la forme générale de la réponse fréquentielle (allure en fonction de la fréquence) en amplitude réelle et en déphasage.
- l'existence d'une **résonance**, c'est-à-dire d'un maximum d'amplitude en fonction de la fréquence/pulsation conditionnée au facteur de qualité: il doit être supérieur à $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Lorsque la résonance existe, la pulsation de résonance dépend du facteur de qualité.



3.2.3 Application

Ces exercices d'application directe sont à faire à la suite du cours pour vérifier votre compréhension des méthodes. Vous pourrez confronter votre travail avec celui de vos camarades et poser des questions sur cet exercice en classe mais il ne sera pas donné de correction complète.

3.2.3.1 Généralités

3.12: Manipulation des complexes

Déterminer le module et la phase à l'origine des grandeurs réelles associées aux représentations complexes suivantes puis tracer leur représentation de Fresnel. (Les grandeurs non soulignées sont des réels positifs.)

$$\underline{s} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = \frac{1}{1 - LC\omega^2} e_m e^{-j\pi/3}$$
$$\underline{s} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = \frac{-K}{1 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = jRC\omega e_m e^{j\varphi}$$
$$\underline{s} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + jRC\omega} e_m$$

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes.*

3.13: Modélisation d'une impédance

On considère un dipôle dont l'impédance se met sous la forme $\underline{Z} = R + jX$ avec R et X réels.

1. Montrer que si X est positif, le dipôle peut être modélisé par une inductance en série avec une résistance donc on exprimera les valeurs en fonction de R, X et ω.
2. Montrer que si X est négatif, le dipôle peut être modélisé par un condensateur en parallèle avec une résistance donc on exprimera les valeurs en fonction de R, X et ω.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes.*
- $\Longrightarrow$ *Impédances usuelles.*

3.14: Passage temporel-fréquentiel

A partir des équations différentielles ci-dessous, exprimer la représentation complexe $\underline{s}$ dans un régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{3R}{L}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + \frac{4}{(RC)^2} s = 2RC\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}$$
$$4LC\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + 2RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + Ks = K'e$$
$$4LC\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + 2\frac{L}{R}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + Ks = K'LC\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{e}}{\mathrm{dt}^2}$$

3.15: Passage fréquentiel-temporel

Déduire des équations ci-dessous les équations différentielles qui relient s et e. Discuter alors de la stabilité de chaque système

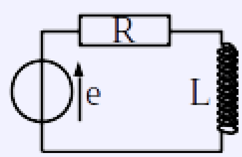
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + 3RC\omega}$$
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-(RC\omega)^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{(RC\omega)^2}{1 - LC\omega^2 - jRC\omega}$$
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{K}{1 - 3jRC\omega}$$
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{KjRC\omega}{1 + 3jRC\omega}$$

3.2.3.2 Etude d'une réponse

3.16: Circuit RL

On considère un dipôle constitué d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L en série. Il est branchée aux bornes d'une tension d'entrée e. Exprimer la tension aux bornes de la bobine en régime forcé lorsque la tension d'entrée est:

1. Cas 1 : $e(t) = e_1 \cos \omega_1 t + e_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$
2. Cas 2 : $e(t) = e_1 \sin \omega_1 t + e_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$



- On devra mélanger deux méthodes: l'utilisation des complexes déterminer le régime sinusoïdal forcé puis en déduire la réponse complète en utilisant la linéarité du système.
- Pour le cas des sinusoïdes, pensez qu'on peut prendre la partie imaginaire pour avoir une méthode simple d'étude.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Réponse d'un filtre linéaire*
- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes*

3.2.3.3 Etude fréquentielle

3.17: RLC parallèle

On considère trois dipôles R, L et C branchés en parallèle. On alimente le dipôle ainsi formé par un source modélisée par un modèle de Thévenin de résistance r et de force électromotrice E sinusoïdale. On étudie le régime sinusoïdal forcée.
Étudier la réponse fréquentielle pour l'intensité circulant dans la bobine et la tension aux bornes du dipôle RLC.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Résonance et bande passante*

3.2.4 Entrainement

3.2.4.1 Etude fréquentielle

3.18: Antirésonance

On considère un dipôle RLC série alimenté par une tension sinusoïdale. On s'intéresse à la tension u aux borne de l'ensemble L+C en régime sinusoïdal forcé.

1. Déterminer l'amplitude complexe de u puis son amplitude réelle. En déduire la valeur maximale de l'amplitude réelle $u_{\max}$.
2. Montrer que l'amplitude s'annule pour une pulsation qu'on déterminera. On parle d'antirésonance.
3. On définit la bande coupée comme la bande de fréquence pour laquelle l'amplitude réelle $u_m(\omega)$ soit telle que $u_m(\omega) \leq \frac{u_{\max}}{\sqrt{2}}$. Préciser sa largeur.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Résonance et bande passante*

3.2.4.2 Etude d'une réponse

3.19: Détection

On considère un circuit constitué d'une résistance R en série avec un condensateur C. L'ensemble est reliée à une source de tension $e(t)$ fournissant une tension: $e(t) = e_m \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$ avec $\omega_1 = 1.01\omega_2 = \frac{50}{RC}$.
Déterminer la tension aux bornes du condensateur en régime forcé. Simplifier l'expression par approximation en utilisant les ordres de grandeurs des pulsations mises en jeu.

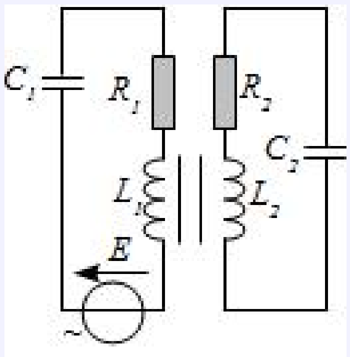
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Réponse d'un filtre linéaire*
- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes*

3.2.4.3 Etude de circuits

3.20: Circuits couplées

On considère le circuit ci-dessous. Les deux bobines sont sous influence mutuelle, c'est-à-dire qu'à la tension habituelle d'une bobine s'ajoute pour la bobine du circuit $\alpha (\alpha \in \{1,2\})$, une tension $M\frac{\mathrm{d}i_\beta}{\mathrm{d}t}$ avec $\beta \in \{2,1\}$
On supposera de plus que les composants sont égaux deux à deux. Déterminer en régime sinusoïdal forcé les représentations complexes des courants circulant dans chaque circuit puis les charges aux armatures des condensateurs.

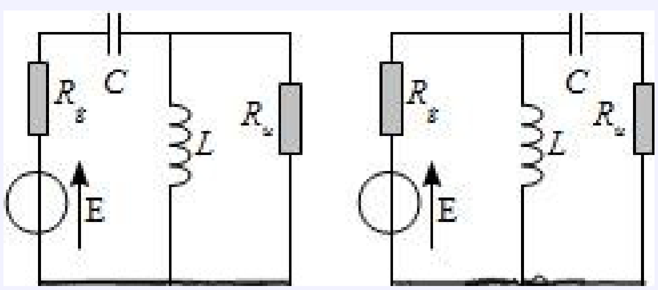


Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes*

3.21: Adaptation d'impédance

On considère le circuit ci-dessous. On veut que le dipôle composé des composants L, C variables et R_u fixée soit équivalent à une résistance pure R_g fixée.



1. Déterminer suivant les valeurs relatives de R_u et R_g le circuit permettant cette réalisation et les valeurs de L et C à choisir.
2. Déterminer dans les conditions précédentes la puissance instantanée puis la puissance moyenne reçue par le dipôle équivalent.

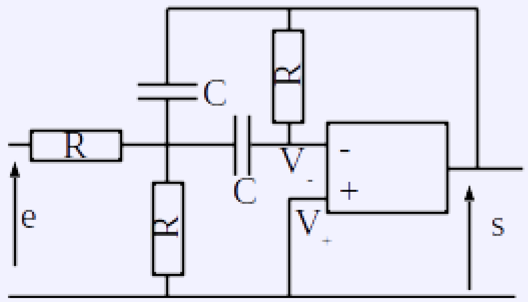
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes*
- $\Longrightarrow$ *Impédances usuelles*

3.2.4.4 Système actif.

3.22: Exercice

On considère le circuit ci-dessous. L'amplificateur linéaire intégré est supposé idéal fonctionnant en régime linéaire. Dans ces conditions, les courants entrant aux bornes + et - de l'amplificateur linéaire intégré sont nuls et la différence de potentiel $\epsilon = V_+ - V_- = 0$.



1. Déterminer par une étude rapide les comportements haute et basse fréquence du système pour la tension s.
2. Déterminer la tension s en régime sinusoïdal forcé et faire son étude fréquentielle (amplitude réelle et déphasage avec l'entrée). On pensera à vérifier la cohérence avec l'étude rapide précédente et à mettre la représentation complexe de s sous forme canonique.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude d'un circuit en RSF*
- $\Longrightarrow$ *Manipulation des complexes*
- $\Longrightarrow$ *Amplificateur linéaire intégré*

CHAPTER

FOUR

FILTRAGE LINÉAIRE

4.1: compétences

- Comprendre l'intérêt et la typologie des filtres basé sur **leur fonction de transfert.**
- Utiliser une fonction de transfert d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude d'une réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitation sinusoïdales, à un signal périodique.
- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après la fonction de transfert

4.1 Connaître le contexte

De manière générale dans les cours, ces parties présentent :

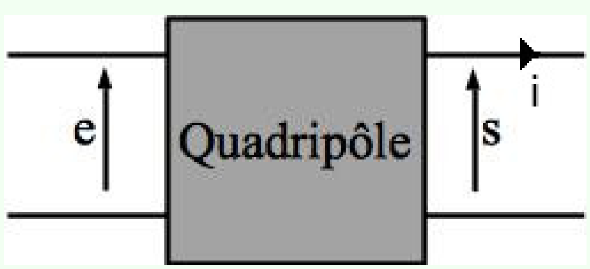
- le contexte d'étude (but, ordre de grandeur, postulat d'étude…)
- les éléments importants **à connaître par coeur** (définitions, propriétés, principes et lois, théorèmes…)
- quelques démonstrations **à connaître par coeur**

4.1.1 Filtre: définition et caractéristiques

4.1.1.1 Filtrage: Principe

Important 4.1

Fonction de transfert/Filtre
On définit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ comme le rapport des amplitudes complexes des tensions d'entrée e et de sortie s en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω quand la sortie est ouverte.
Un filtre est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend explicitement de la pulsation ω.



4.1.1.2 Caractéristiques générales d'un filtre

Important 4.2

Gain réel, argument et gain en décibel Les caractéristiques d'un filtre sont:

- son module $G = \frac{s_m}{e_m}$, appelé **gain réel**: il correspond au rapport des amplitudes réelles
- sa argument ou **phase**: il va correspondre au déphasage que va avoir la sortie sur l'entrée.
- son **gain en décibel** défini par $G_{db} = 20 \log \frac{s_m}{e_m}$ (attention: c'est une grandeur réelle): on verra que c'est une manière plus pratique de se représenter le rôle et l'efficacité d'un filtre.

4.1.1.3 Types de filtres

Les filtres sont de différents types suivant leur finalité. Nous ne présentons ici que les types de filtres les plus utilisés (et ceux que vous devez connaître). **Dans le cadre du programme**, on peut associer à chaque type de filtre des comportements haute et basse fréquence précis. C'est en étudiant ces comportements qu'on déterminera le type de filtre.

Important 4.3

Types de filtres

- les filtres dit passe-bas: leur but est de laisser passer les basses fréquences et de couper les hautes fréquences. Normalement, on utilise ces filtres pour laisser passer une gamme de fréquence jusqu'à une fréquence voulue (qu'on appellera fréquence de coupure) et couper les fréquence plus rapides.
  - **On reconnaît les filtres passe-bas par un comportement basse fréquence non-nul et un comportement haute-fréquence nul.**
- les filtres dit passe-haut: leur but est de laisser passer les hautes fréquences et de couper les basses fréquences. Normalement, on utilise ces filtres pour laisser passer une gamme de fréquence à partir une fréquence voulue (qu'on appellera fréquence de coupure) et couper les fréquence plus lentes.
  - **On reconnaît les filtres passe-haut par un comportement basse fréquence nul et un comportement haute-fréquence non-nul.**
- les filtres dit passe-bande: leur but est de laisser passer une bande de fréquence entre deux fréquences choisies (qui sont appelées fréquences de coupure).
  - **On reconnaît les filtres passe-bande par un comportement basse fréquence et un comportement haute-fréquence nul.**
- les filtres dit coupe-bande (ou réjecteur de bande): leur but est de couper une bande de fréquence entre deux fréquences choisies (qui sont appelées fréquences de coupure).
  - **On reconnaît les filtres coupe-bande par un comportement basse fréquence et un comportement haute-fréquence non-nul et égaux. Il existe (et surtout) aussi une fréquence pour laquelle le gain s'annule.**

4.1.1.4 Diagramme de Bode

Important 4.4

Diagramme de Bode Le diagramme de Bode est la représentation graphique utilisée pour les filtres linéaires. Il consiste à représenter le gain en décibel et la phase du filtre en fonction de log(ω).

Important 4.5

DécadeUne décade est un intervalle de pulsation $[\omega_1; \omega_2]$ (ou de pulsation réduite $[x_1; x_2]$, ou encore de fréquence $[f_2; f_2]$) tel que $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_2}{f_1} = 10$. Autrement dit, quand on avance d'une décade, on multiplie par dix la pulsation.
Sur un diagramme de Bode, une décade correspond à un écart $\Delta(\log(x)) = 1$.

4.1.1.5 Etude fréquentielle d'un filtre: Bilan

Cf. l'*exemple d'étude ici* (page 72)

BilanEtudier un filtre permet de prévoir son comportement face à une réponse quelconque (cf. suite) mais aussi de choisir les composants pour réaliser tel ou tel type de filtrage. Lors d'une étude fréquentielle d'un filtre peut:

- Déterminer le type de filtre, soit par une étude des limites de la fonction de transfert, soit par une étude rapide du circuit à haute et basse fréquence.
- Déterminer la fonction de transfert. On peut alors déterminer la phase du filtre ainsi que son gain réel.
- Etudier le gain réel pour déterminer le comportement du filtre (résonance, bande passante, type, ordre…)
- Tracer le diagramme de Bode pour pouvoir retrouver/obtenir les caractéristiques précédentes. On peut aussi y figurer le comportements asymptotiques (sous forme d'asymptotes horizontales ou obliques). Nous verrons que cette étude asymptotique peut être très utile pour étudier la réponse d'un filtre.

4.1.2 Caractéristiques générales

4.1.2.1 Bande passante et fréquence de coupure

Important 4.6

Bande passante et fréquence de coupure

- La **bande passante** d'un filtre est l'intervalle de fréquence pour lesquelles le gain réel est supérieur au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$.
- Les **fréquences de coupure** sont les fréquences telles que le gain réel soit égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$.

4.1.2.2 Caractère pseudo-dérivateur et pseudo-intégrateur

Important 4.7

Comportement dérivateur

- Un système dérivateur est un système dont la relation temporelle s'écrit $s(t) = \frac{K}{\omega_0}\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}(t)$. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit: $\underline{H} = jK\frac{\omega}{\omega_0}$.
- Un comportement pseudo dérivateur se traduit sur un diagramme de Bode par une asymptote oblique de pente $+20\mathrm{dB}/\mathrm{decade}$

Important 4.8

Comportement intégrateur

- Un système intégrateur est un système dont la relation temporelle s'écrit $s(t) = K\omega_0 \int e(t)$. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit: $\underline{H} = \frac{K}{j\omega/\omega_0}$.
- Un comportement pseudo intégrateur se traduit sur un diagramme de Bode par une asymptote oblique de pente $-20\text{dB}/\text{decade}$

4.1.3 Mise en cascade des filtres (en ligne)

4.1.3.1 Mise en cascade. Généralités

4.1.3.2 Quadripôle et impédances

4.1.3.3 Mise en cascade des filtre et impédances

Important 4.9

Mise en cascade

- Deux filtres mis en cascade auront des comportement indépendants si **l'impédance de sortie du premier est très faible devant l'impédance d'entrée du second.**
- Dans ces conditions, on peut étudier les deux filtres séparément et obtenir la fonction de transfert complète par multiplication.

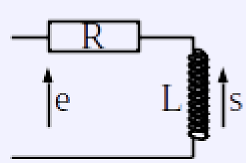
4.2 Maitriser les méthodes

- Méthodes : Etude d'un filtre et de sa réponse
- Activités : Typologie des filtres
- Applications
- Entrainements : En plus du polycopié, un devoir libre sur les filtres[13]

4.2.1 Méthodes

4.2.1.1 Etude d'un filtre

4.2: Exercice



1. Déterminer le type de filtre par une étude haute et basse fréquence.

[13] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12846

2. Déterminer la fonction de transfert du filtre et en déduire son gain réel, son gain en décibel, sa phase. On introduira la pulsation propre ω_0 telle que:

$$\underline{H} = \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{Ajx}{1 + jx}$$

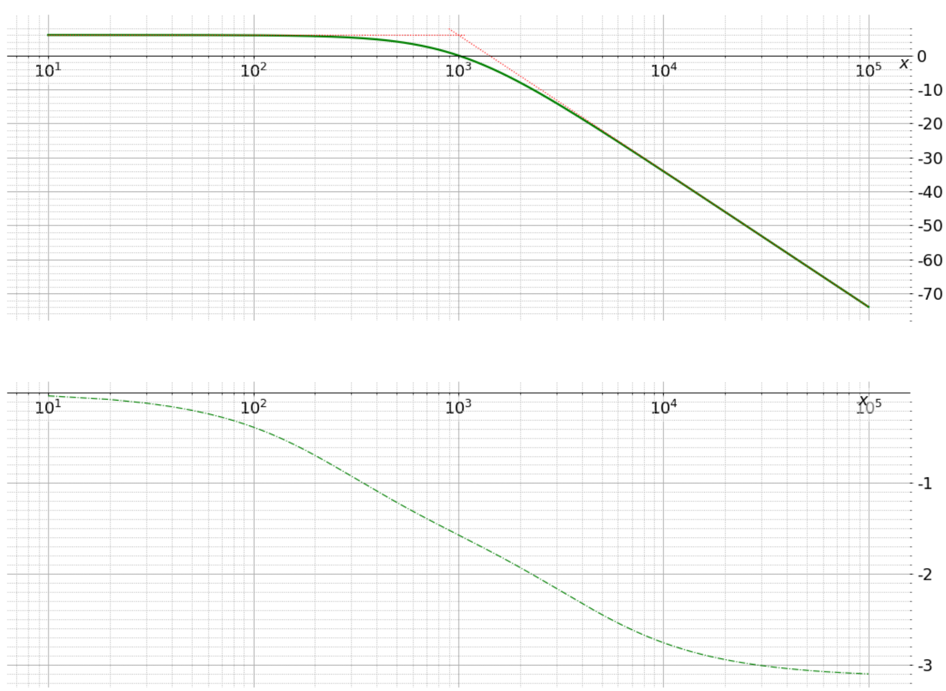
On veut tracer le diagramme de Bode. Montrer que:

1. Le gain réel est strictement croissant
2. Il est maximal à haute fréquence. Préciser sa valeur.
3. La fonction $G_{dB}(\log(x))$ possède une asymptote oblique en $\log(x) \to -\infty$ de pente $+20\text{dB}/\text{decade}$.
4. La phase est strictement décroissante. On déterminera ses valeurs asymptotiques.
5. Tracer le diagramme de Bode.

4.3: Analyse d'un diagramme de Bode

On considère un filtre dont le diagramme de Bode (tracé en fonction de $\log(\omega)$)est donné ci-après.

1. Préciser le type de filtre.
2. On peut déterminer graphiquement la pulsation propre de deux manières: elle se trouve à l'intersection des asymptotes haute et basse fréquence du filtre et pour **ce filtre**, la phase à la pulsation propre vaut $-\pi/2$. Déterminer la pulsation propre par les deux méthodes et vérifier la cohérence des deux résultats.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la représentation $G_{dB}(log(\omega))$ sur le diagramme de Bode en gain. En déduire, dans cette zone la relation temporelle approchée entre la sortie et l'entrée.
4. On définit une fréquence de coupure comme une fréquence pour laquelle le gain est égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. Déterminer numériquement la valeur de la pulsation de coupure.



4.2.1.2 Réponse d'un filtre

4.4: Réponse d'un filtre à des sinusoïdes

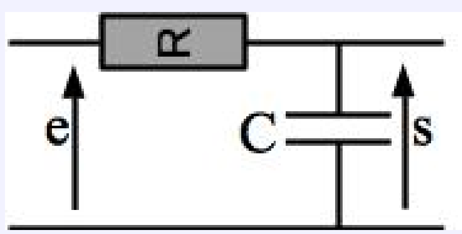
On reprend le filtre précédent dont la fonction de transfert est $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

1. Nous allons commencer par établir la réponse exacte du filtre.
    1. Exprimer le signal de sortie $s(t)$ pour un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude e_m.
    2. On considère un signal d'entrée $e(t) = e_1 \cos \omega_1 t + e_2 \cos \omega_2 t$ avec $\omega_1 = 0.1\omega_0$ et $\omega_2 = 10\omega_0$. Exprimer la réponse exacte du filtre.
2. Nous allons maintenant assimiler la réponse du filtre à sa version idéale.
    1. A basse fréquence, simplifier l'expression du gain et de la phase à l'ordre 0.
    2. A haute fréquence, simplifier l'expression du gain et de la phase à l'ordre 0.
    3. On considère un signal d'entrée $e(t) = e_1 \cos \omega_1 t + e_2 \cos \omega_2 t$ avec $\omega_1 = 0.1\omega_0$ et $\omega_2 = 10\omega_0$. Dans le cadre d'approximation par un filtre idéal, exprimer la tension de sortie.
    4. Comparer graphiquement les représentations graphiques de la réponse exacte et de la réponse "tout-ou-rien" qui vient d'être établie.
3. Nous allons maintenant assimiler la réponse du filtre à ses comportements asymptotiques établies lors du tracé du diagramme de Bode.
    1. A basse fréquence, on rappelle qu'on a montré que la fonction de transfert peut se réécrire $\underline{H} = jx$. En déduire la relation temporelle entrée-sortie à basse-fréquence. Comment se comporte le filtre pour un signal dont le spectre est entièrement inférieur à la bande fréquence ω_0 ?

4.5: Cas d'un signal d'entrée périodique - Préambule

On considère le filtre ci-dessous.

1. Déterminer rapidement le type de filtre puis la fonction de transfert. En déduire le gain réel et la phase. On mettra la fonction de transfert sous la forme $\underline{H} = \frac{A}{1+jx}$ avec x la pulsation réduite.
2. Justifier que le gain réel est strictement décroissant. Montrer que la représentation du gain en décibel sur un diagramme de Bode $G_{dB}(\log(x))$ admet une asymptote oblique à haute fréquence de pente $-20\text{dB}/\text{decade}$
3. On définit la bande passante du filtre comme la gamme de fréquence où le gain réel est supérieur au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. Déterminer la bande passante.



4.6: Cas d'un signal d'entrée périodique

On considère le filtre précédent et on envoie en entrée un signal créneau d'amplitude E. On admet que la décomposition spectrale du signal créneau est:

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)2\pi f t)}{2k+1}$$

1. Donner la réponse exacte du filtre pour une fréquence du créneau $f = f_0$ avec f_0 la fréquence propre associée à la pulsation propre.
2. Donner une réponse approchée du filtre en assimilant sa réponse à celle d'un filtre idéal lorsque $f = f_0/2$.
3. Déduire de la fonction de transfert la relation temporelle entrée-sortie à haute fréquence. Quel comportement possède le filtre dans ce domaine spectral ? En déduire une réponse approchée du filtre en utilisant

ses comportements asympotiques lorsque $f = 10 f_0$

4.2.2 Activités : Typologie des filtres

Pour chaque filtre, démontrer les caractéristiques - qui sont aussi à connaitre par coeur - à partir de la forme canonique.

4.2.2.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

Important 4.10

Forme canonique
Un filtre passe bas d'ordre 1 peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et la pulsation propre ω_0.

CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF est nulle et la limite BF est non nulle.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- le gain réel est strictement décroissant.
- SI $H_0 > 0$: La phase passe de 0 à $-\pi/2$ et elle vaut $-\pi/4$ à la pulsation propre.
- La pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à basse fréquence et une asymptote oblique de pente $-20 dB/decade$ à haute fréquence.

Diagramme de Bode On retrouve les caractéristiques précédentes sur le *diagramme de Bode* (page 76).

4.2.2.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

Important 4.11

Forme canonique
Un filtre passe haut d'ordre 1 peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H} = \frac{jH_0 x}{1 + jx}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et la pulsation propre ω_0.

CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF est non nulle et la limite BF est nulle.

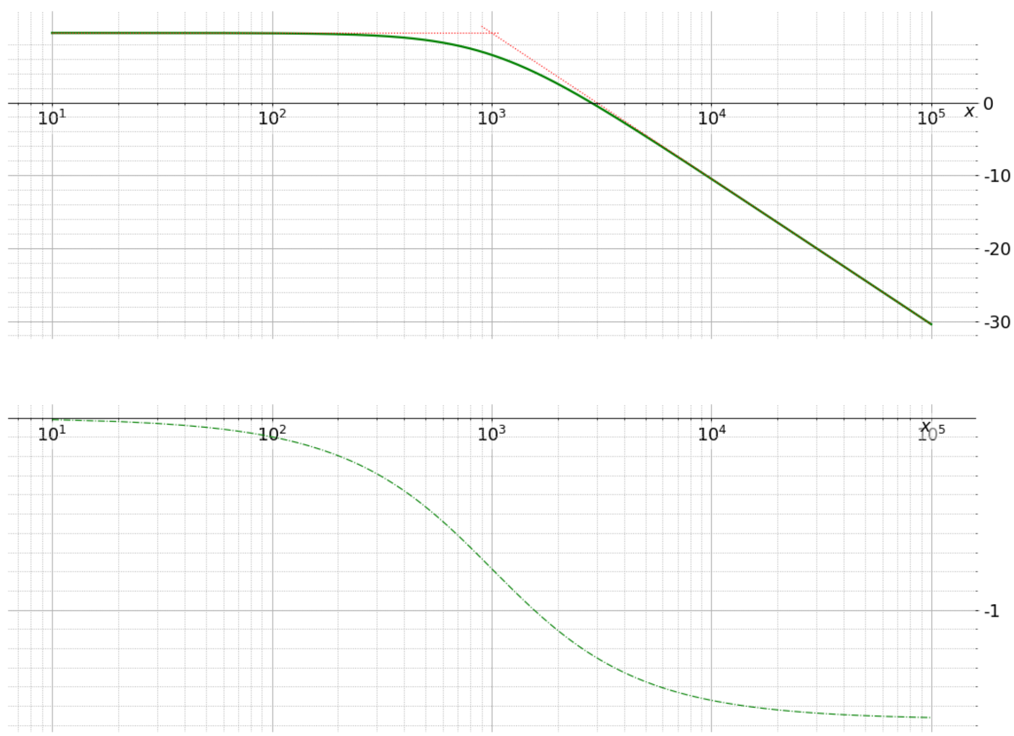


Fig. 4.1: Filtre passe-bas d'ordre 1

- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- le gain réel est strictement croissant.
- la pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.
- Si $H_1 > 0$: La phase passe de $\pi/2$ à 0 et elle vaut $\pi/4$ à la pulsation propre.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à haute fréquence et une asymptote oblique de pente $20dB/decade$ à basse fréquence.

Diagramme de Bode On retrouve les caractéristiques précédentes sur le *diagramme de Bode* (page 77).

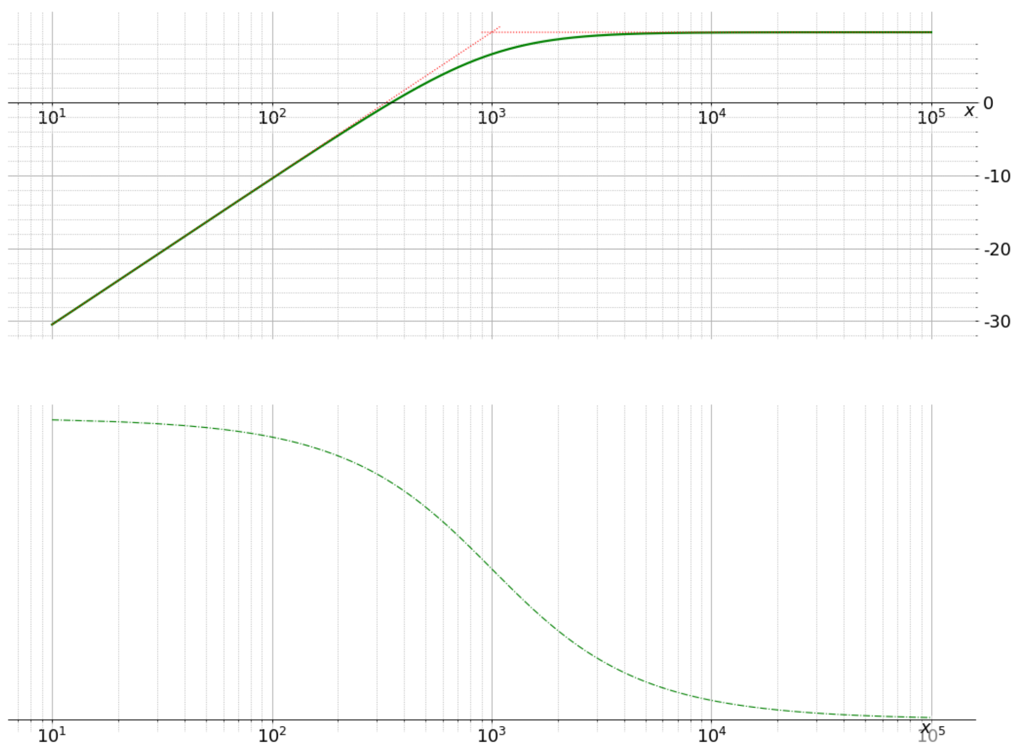


Fig. 4.2: Filtre passe-haut d'ordre 1

4.2.2.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

Important 4.12

Forme canonique
Un filtre passe bas d'ordre 2 peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF est nulle et la limite BF est non nulle.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- l'existence d'une résonance conditionnée à un facteur de qualité tel que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fréquence de résonance dépend du facteur de qualité. Elle tend vers 0 quand Q décroit et vers la pulsation propre quand Q augmente.
- La phase passe de 0 à $-\pi$ (ou de π à 0 si $H_0 < 0$). Elle vaut $-\pi/2$ (ou $\pi/2$) à la pulsation propre.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à basse fréquence et une asymptote oblique de pente $-40dB/decade$ à haute fréquence.

[Diagramme de Bode()]On retrouve les caractéristiques précédentes sur le *diagramme de Bode* (page 78). Plusieurs tracés sont représentés pour différentes valeurs de Q.

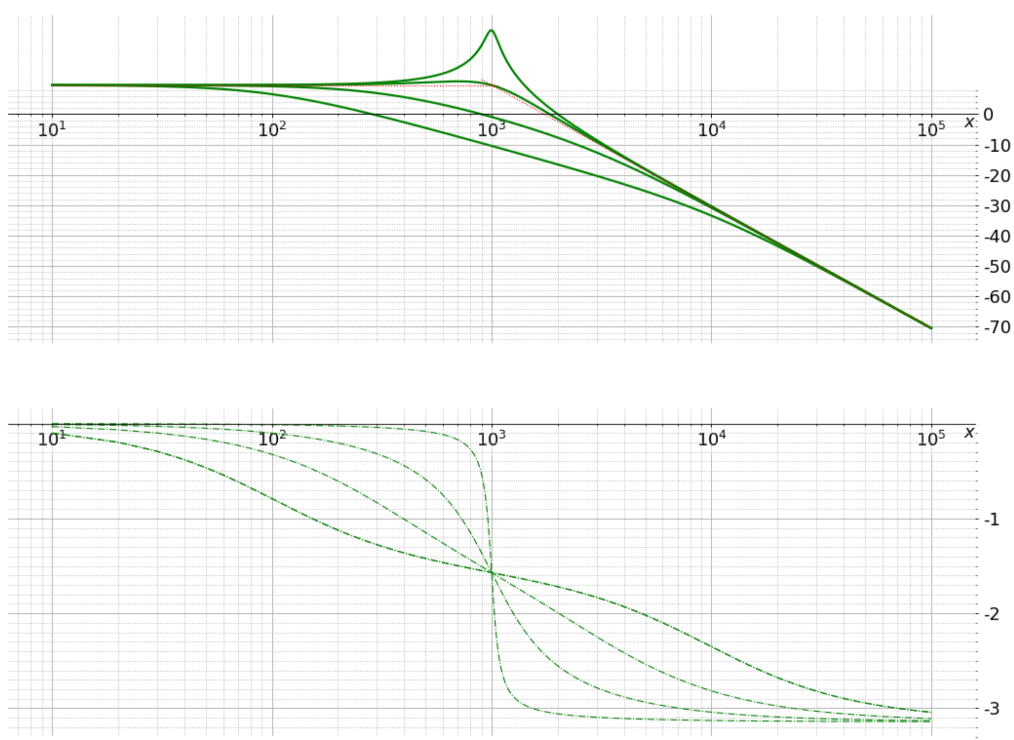


Fig. 4.3: Filtre passe-bas d'ordre 2

4.2.2.4 Filtre passe-haut d'ordre 2

Important 4.13

Forme canonique
Un filtre passe haut d'ordre 2 peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H} = \frac{-H_1 x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF est non nulle et la limite BF est nulle.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- l'existence d'une résonance conditionnée à un facteur de qualité tel que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fréquence de résonance dépend du facteur de qualité. Elle tend vers l'infini quand Q décroit et vers la pulsation propre quand Q augmente.
- La phase passe de π à 0 (ou de 0 à $-\pi$ si $H_1 < 0$). Elle vaut $\pi/2$ (ou $-\pi/2$) à la pulsation propre.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à haute fréquence et une asymptote oblique de pente $40dB/decade$ à basse fréquence.

Diagramme de Bode On retrouve les caractéristiques précédentes sur le *diagramme de Bode* (page 80). Plusieurs tracés sont représentés pour différentes valeurs de Q.

4.2.2.5 Filtre passe-bande d'ordre 2

Important 4.14

Forme canonique
Un filtre passe bande d'ordre 2 peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{H_2}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{jH_2\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\end{aligned}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF est nulle et la limite BF est nulle.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- l'existence d'une résonance quelque soit la valeur du facteur de qualité. La fréquence de résonance est toujours la pulsation propre.
- La bande passante possède une largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Les pulsations de coupure sont symétriques **sur un diagramme de Bode**: $\omega_{c1} \times \omega_{c2} = \omega_0^2$.

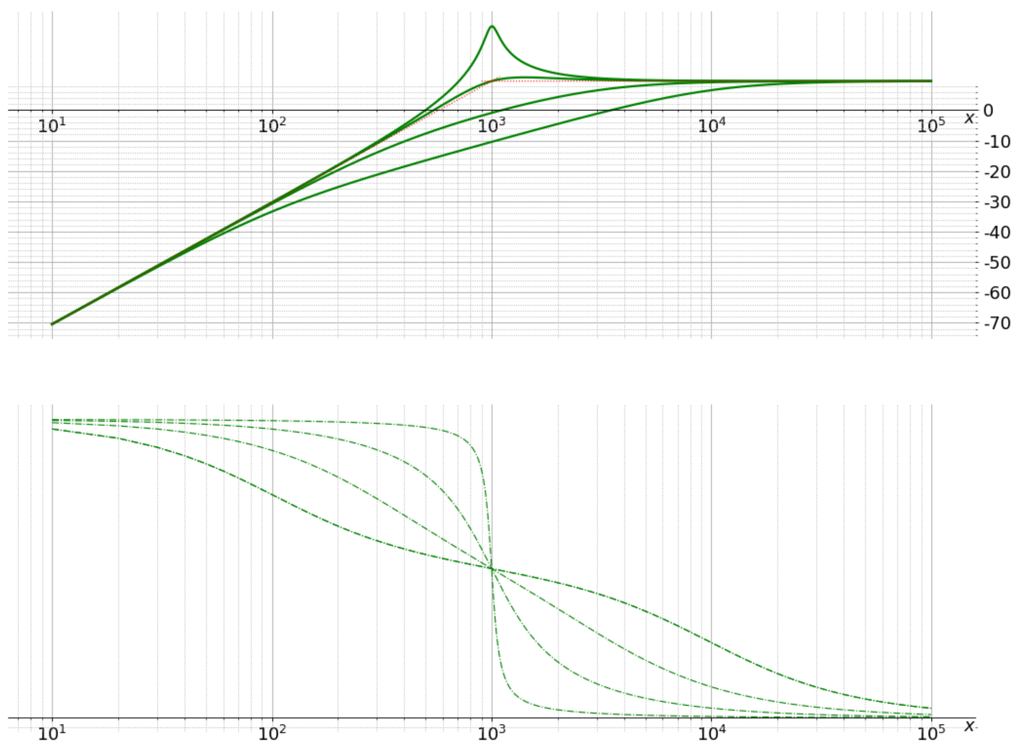


Fig. 4.4: Filtre passe-haut d'ordre 2

- Si $H_2 > 0$: La phase passe de $\pi/2$ à $-\pi/2$ et elle vaut 0 à la pulsation propre, on dit que les signaux entrée et sortie sont **en phase**.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote oblique à basse fréquence de pente 20dB/decade et une asymptote oblique de pente $-20dB/decade$ à haute fréquence.

Diagramme de Bode On retrouve les caractéristiques précédentes sur le *diagramme de Bode* (page 81). Plusieurs tracés sont représentés pour différentes valeurs de Q (H_2 et ω_0 étant fixés).

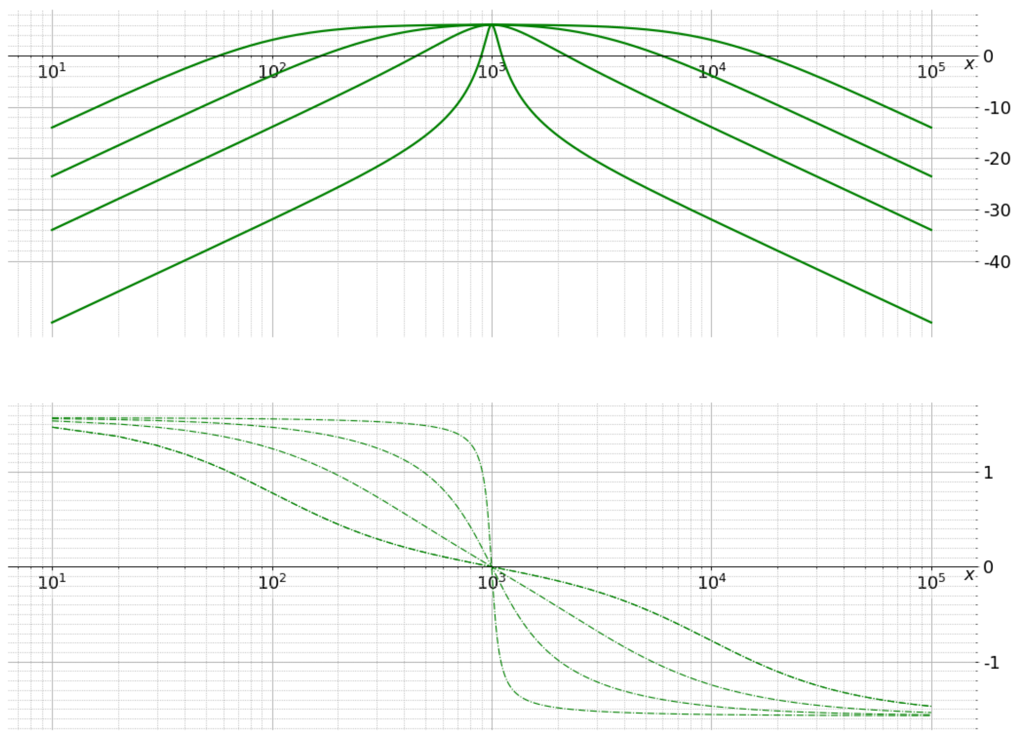


Fig. 4.5: Filtre passe-bande d'ordre 2

4.2.2.6 Filtre coupe-bande d'ordre 2

Important 4.15

Forme canonique
Un filtre coupe bande d'ordre 2 peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H} = \frac{H_3(1 - x^2)}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

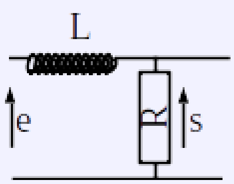
CaractéristiquesLes caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont:

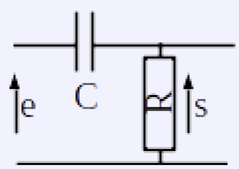
- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre: la limite HF et la limite BF sont égales et non nulles.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- l'existence d'une anti-résonance: le gain s'annule à la pulsation propre.
- La bande coupée (définie comme la bande de fréquence où le gain est inférieure au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$) possède une largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Les pulsations de coupure sont symétriques **sur un diagramme de Bode**: $\omega_{c1} \times \omega_{c2} = \omega_0^2$.

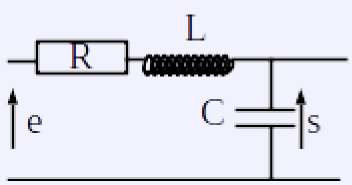
4.2.3 Entrainement : Filtrage linéaire

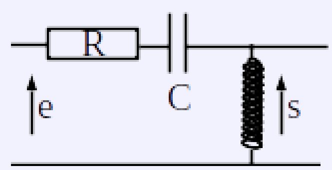
4.7: Etude fréquentielle

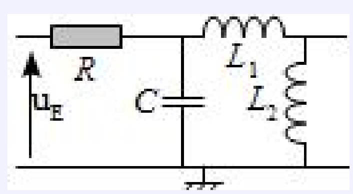
Pour chaque filtre ci-dessous, déterminer rapidement son type puis par le calcul sa fonction de transfert. On introduira la pulsation propre et si nécessaire le facteur de qualité et l'on précisera les asymptotes haute et basse fréquence sur le diagramme de Bode.
Pour les filtre d'ordre 1, on déterminera de plus la monotonie et la pulsation de coupure.
Pour les filtres d'ordre 2 passe-haut et bas, on déterminera l'existence possible d'une résonance ainsi que la pulsation de résonance. On déterminera aussi les valeurs particulières de la phase.
Pour les filtres passe-bande et coupe-bande, on déterminera la bande passante (ou la bande coupée) et on montrera que le produit des pulsations de coupure vaut la pulsation propre au carré.

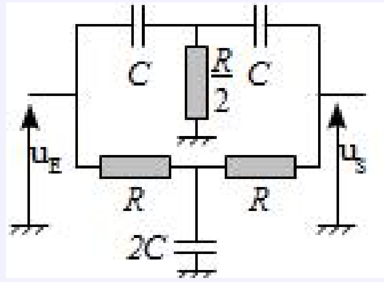








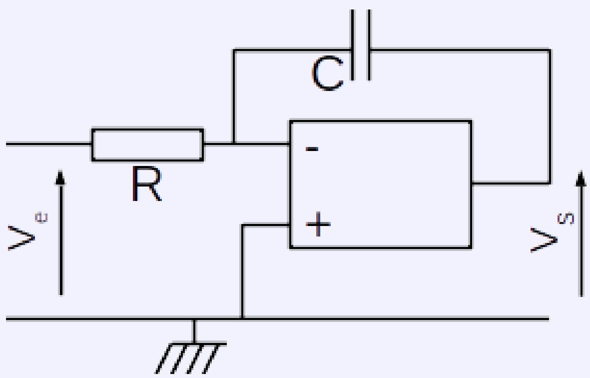




4.8: Intégrateur pur

Cet exercice traite un montage que vous DEVEZ reconnaître et savoir étudier comme une question de cours.

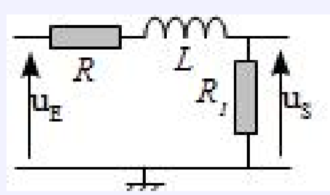
1. Déterminer la relation entrée sortie du montage suivant en grandeur complexe puis la relation temporelle entrée-sortie. Justifier ainsi l'appelation du montage.
2. Proposer une utilisation pratique de ce montage en sortie d'un capteur qu'on précisera. Quel problème ce montage risque-t-il de poser à basse fréquence ?
3. Déterminer l'impédance d'entrée du montage.



4.9: Réponse d'un filtre d'ordre 1

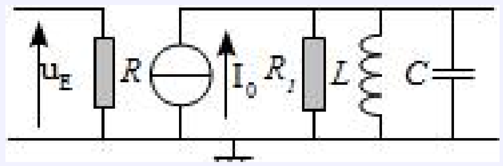
On considère le filtre ci-après. On prend $R = R_1 = 50\Omega$ et $L = 10\text{mH}$

1. Déterminer le type de filtre puis la fonction de transfert.
2. Donner une expression approchée (réfléchir au type de réponse approché le plus approprié) de $u_S(t)$ pour: \begin{enumerate}1. un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 10kHz et d'amplitude 1V.
3. un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 100Hz et d'amplitude 1V.
4. un signal d'entrée créneau de période T=0,1ms.
5. Représenter graphiquement $u_E(t)$ et $u_S(t)$ pour les trois signaux précédents et le comparer aux réponses exactes (on pourra utiliser une calculatrice graphique ou un simulateur). Commenter.



4.10: Réponse d'un filtre d'ordre 2

On place une bobine L_1 et un condensateur C_1 dans le circuit collecteur d'un transistor à effet de champ de façon à réaliser un amplificateur sélectif. Le montage ainsi obtenu est équivalent à celui ci-après. On a: $\underline{I_0} = s\underline{v_e}$. s étant supposé constant et réel pour le domaine de fréquence étudié.



1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ sous la forme: $\underline{H} = \frac{A_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ en notant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Quelle est la nature de ce filtre? Quelle est sa bande passante?

On envoie en entrée un signal périodique de pulsation $\omega = \omega_0$. On définit le taux d'harmonique de rang n d'un signal périodique par le rapport $\tau_n = \frac{V_n}{V_1}$ de l'amplitude V_n de l'harmonique de rang n à l'amplitude V_1 du fondamental. On note $\tau_{n,s}$ et $\tau_{n,e}$ les taux d'harmoniques respectifs des signaux d'entrée et de sortie.

1. Calculer le taux d'atténuation $\delta_n = \frac{\tau_{n,s}}{\tau_{n,e}}$ de l'harmonique de rang n en fonction de Q et de n.
2. On choisit alors la valeur de Q pour laquelle le taux d'atténuation est de -40dB pour l'harmonique de rang 2. Quelle valeur de Q réalise cette condition?

On envoie un signal créneau d'amplitude variant entre E_1 et E_2 de pulsation ω_0 en entrée. Celui-ci peut se décomposer en séries de Fourier ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la période du créneau):

$$e(t) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(E_1 - E_2)}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\frac{2\pi}{T_0}t)$$

1. Représenter sur un graphique [fréquence;amplitude], le diagramme du signal puis donner l'allure du signal temporelle de sortie en le justifiant.