

# Chapitre 1: Description des champs magnétiques

Nous avons vu en mécanique comment on pouvait interpréter les champs magnétiques comme des intermédiaires pratiques entre les causes et les effets des actions magnétiques<sup>1</sup>.

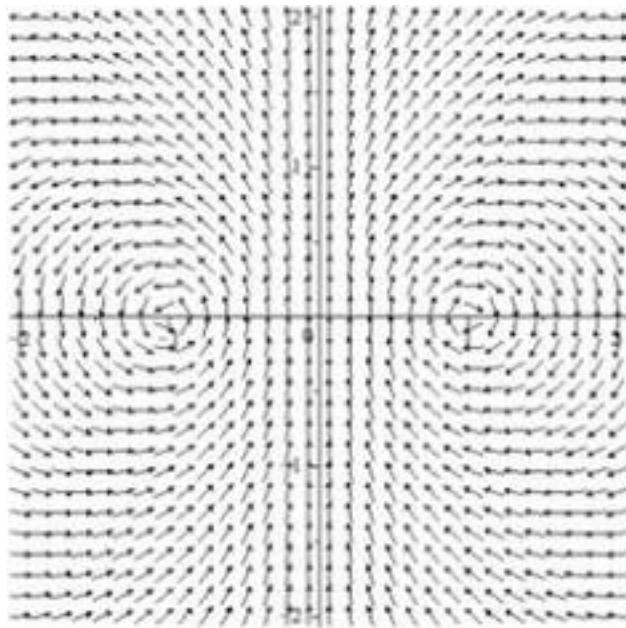
Nous allons voir ici comment décrire les champs magnétiques créés par des systèmes et quelles propriétés ces champs possèdent avant, dans les chapitres suivant, d'étudier quelques effets des champs magnétiques.

## I Cartes de champ magnétique

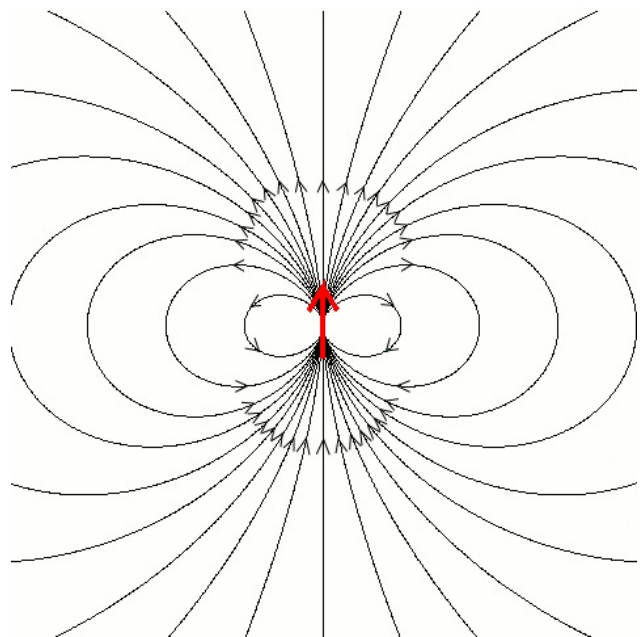
### ♥ Définition I.1: Ligne de champ magnétique

Une ligne de champ magnétique est une courbe dans l'espace avec laquelle le champ magnétique est colinéaire en tout point de la-dite courbe.

On peut matérialiser l'allure des lignes de champ au moyen de limaille de fer agissant comme des boussoles.



(a) Carte de champ de deux fils. L'intensité est identique dans les deux fils mais n'est pas dans le même sens.



(b) Carte de champ pour un petit aimant droit.

1. Pour rappel, les champs magnétiques acquiert une réalité d'objet physique à part entière dans la théorie électromagnétique de Maxwell.

### ♥ Propriété I.1: Propriétés générales des cartes de champ

Ces propriétés sont admises :

- Orientation locale : au voisinage de passage d'un courant  $I$ , les lignes de champ magnétique bouclent autour de l'intensité en suivant la règle du tire-bouchon/règle de la main droite en cohérence avec  $I$ .
- Réciproquement, si une ligne de champ boucle, alors un courant traverse nécessairement la boucle. On peut orienter l'intensité par la même règle que précédemment.
- Le champ magnétique en un point donné est proportionnel à l'intensité  $I$  qui circule dans le circuit.
- En un point où deux lignes se croisent, le champ est nécessairement nul.

## II Systèmes magnétiques usuels

### II.1 Cas à connaître

#### ♥ Propriété II.1: Cas à connaître

**Solénoïde infini** : Soit une bobine de longueur infinie<sup>a</sup>.

Le champ magnétique est (admis) nul à l'extérieur de la bobine et à l'intérieur, il a pour expression :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad (1.1)$$

où  $n$  est le nombre de spire par unité de longueur,  $I$  l'intensité qui parcourt les spires et  $\vec{e}_z$  le vecteur axial **orienté en cohérence** avec  $I$  et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

**Fil infini** : Soit un fil infini parcouru par une intensité  $I$ <sup>b</sup>, alors le champ magnétique créé par le fil est :

$$\vec{B}(M(r, \theta, z)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (1.2)$$

où le système de coordonnées cylindriques est défini par rapport à un axe Oz orienté dans le sens et la direction de  $I$ .

a. c'est-à-dire de longueur  $L$  grande devant le rayon de la bobine

b. c'est-à-dire de longueur  $L$  grande devant la distance au fil où l'on exprime le champ magnétique.

### II.2 Dipôles magnétiques

On rappelle qu'une surface infinitésimale est orientée par un vecteur surface  $\vec{d^2S}$  perpendiculaire à la surface. Si la surface totale est fermée,  $\vec{d^2S}$  doit être orienté vers l'extérieur.

On renvoie au cours de statique des fluides pour les calculs de  $\vec{d^2S}$ .

### ♥ Définition II.1: Convention d'orientation d'un contour

Considérons une surface non fermée<sup>a</sup>  $S$  orientée vers un vecteur  $\vec{d^2S}$ .

On peut alors définir le contour **fermé** qui entoure la surface  $S$ . Par convention, ce contour est orienté en cohérence (règle de la main droite/du tire-bouchon) avec le vecteur surface.

<sup>a</sup>. En général dans le cas du programme, cette surface sera une surface plane.

### ♥ Définition II.2: Approximation dipolaire

Soit un système magnétique  $\Gamma$  de taille caractéristique  $L$ . L'**approximation dipolaire** consiste à considérer le champ magnétique créé par  $\Gamma$  uniquement en des points situés à une distance  $r$  grande devant  $L$ . On par alors de dipôles électrostatiques.

- Exemple : Pour une spire circulaire de rayon  $R$ , alors  $L = R$ , on s'intéresse uniquement au champ magnétique créé à une distance  $r \gg R$  du centre de la spire.
- Exemple : Un aimant droit est en général considéré comme un dipôle magnétique car les phénomènes magnétiques sont microscopiques donc sa taille caractéristique est de l'ordre de la taille des atomes/molécules.
- L'approximation dipolaire est aussi utilisée pour définir les dipôles électrostatiques utilisés en chimie. Comme les dipôles électrostatiques, les dipôles magnétiques regroupent une très quantités de systèmes.

### ♥ Propriété II.2: Champ magnétique dans l'approximation dipolaire

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on peut montrer que le champ magnétique créé en un point  $P$  par le système placé au point  $O$ , appelé alors **dipôle magnétique**, s'exprime comme :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5} \quad (1.3)$$

avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  et  $\vec{M}$  une grandeur intrinsèque du dipôle appelé **moment dipolaire magnétique**.

La carte de champ d'un dipôle magnétique est celui de l'aimant droit représenté Figure 1.1b

### ♥ Propriété II.3: Moment dipolaire magnétique

On distingue plusieurs cas :

- Pour un circuit à une maille parcouru par une intensité  $I$ , le moment dipolaire magnétique est défini par :

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad (1.4)$$

avec  $\vec{S} = \iint d^2S$  le vecteur surface du circuit <sup>a</sup> **orienté en cohérence avec l'intensité  $I$ .**

- Pour un aimant permanent, le moment magnétique  $\vec{M}$  permanent est une donnée de l'aimant. Son orientation définit le pôle Nord (point de  $\vec{M}$ ) et le pôle Sud de l'aimant.
- Il peut arriver qu'un système non magnétique acquiert un moment magnétique **induit** en présence d'un champ magnétique extérieur. De tels systèmes seront étudiés en deuxième année. On peut néanmoins faire le parallèle avec les dipôles électriques permanents et induits étudiés en chimie.

a. Dans le cas du programme, le circuit sera plan et  $\vec{S} = S \vec{u}_\perp$  un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire.

## II.3 Ordres de grandeurs de champ magnétique

- Cas d'un aimant permanent/électroaimant :
  - Aimants néodyme : 0,3 à 1 T
  - IRM (électro-aimant) : 6T
  - Champ magnétique terrestre :  $0.5 \times 10^{-5} \text{T} = 0.5 \text{gauss}$
- Cas d'un circuit électrique :  $B \sim \frac{\mu_0 I}{D}$  avec  $D$  la distance entre le point et le circuit <sup>2</sup>.

## III Flux magnétique

### III.1 Généralités

#### ♥ Définition III.1: Flux d'un champ de vecteur

Soit un champ vectoriel  $\vec{B}(M)$  défini en tout point  $M$  de l'espace et une surface  $\Sigma$  quelconque orientée décomposée en un ensemble de surface plane infinitésimale  $d^2S$ . On définit le flux du (pseudo-)vecteur  $\vec{B}$  à travers  $\Sigma$  comme l'intégrale :

$$\Phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot d^2S(M) \quad (1.5)$$

2. Démontré par le théorème d'Ampère vu en deuxième année.

### ♥ Propriété III.1: Flux magnétique à travers une surface fermée

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul :

$$\Phi = \oint_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{S}(M) = 0 \quad (1.6)$$

## III.2 Cas d'un tube de champ

### ♥ Définition III.2: Tube de champ

Un tube de champ est une surface fermée, orientée de l'intérieur vers l'extérieur, constituée d'une surface latérale ( $S_L$ ) uniquement formée de lignes de champ et de deux surfaces quelconques ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) la fermant à ses extrémités.

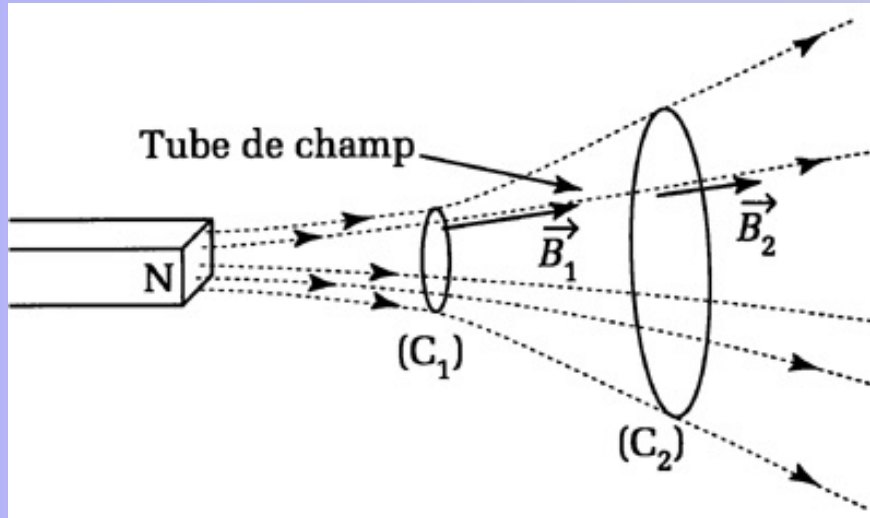


FIGURE 1.2

### ♥ Propriété III.2: Conservation du flux magnétique

Soit un tube de champ dont les surfaces d'entrée et de sortie sont notées  $C_1$  et  $C_2$  (cf. Figure 1.2).

$$\Phi_{C_1}(\vec{B}_1) = \Phi_{C_2}(\vec{B}_2) \quad (1.7)$$

avec les deux flux orientés dans le même sens<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>. Par exemple dans le sens des lignes de champ.

### ♥ Démonstration

Le flux du champ magnétique à travers le tube de champ complet est nul par propriété. De plus, sur la surface latérale du tube,  $\vec{B} \perp d^2\vec{S}$  donc le flux y est nul. Il reste, en orientant bien  $d^2\vec{S}$  vers

l'extérieur :

$$\iint_{C_1} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} + \iint_{C_2} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0 \implies - \iint_{C_1} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{C_2} \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$$

Pour  $C_2$ ,  $d^2\vec{S}$  est orienté dans le même sens que les lignes de champs mais par  $C_1$ , c'est l'inverse. En prenant les notations de la propriété, on retrouve la relation attendue.

### ♥ Propriété III.3: Conséquence de la conservation du flux

- Le champ magnétique a tendance à diminuer lorsque les lignes de champ s'écarte<sup>a</sup>
- Le champ magnétique a tendance à augmenter lorsque les lignes de champ se resserent.
- Le champ magnétique est localement uniquement dans une zone où les lignes de champ sont parallèles.

a. cas la surface de  $C_2$  sera plus grande que la surface de  $C_1$ .

## IV Symétries des courants et des champs magnétiques.

### IV.1 Distributions de courants.

#### ♥ Définition IV.1: Typologie des courants

On distingue trois types de descriptions des courants :

- la distribution **linéique** : couramment utilisée lorsqu'on assimile les fils des circuits à des lignes à une dimension. On définit alors l'intensité  $I$  parcourant un fil et son orientation.
- la distribution **volumique** de courant : lorsque des charges se déplacent dans un volume, on peut noter  $\vec{v}$  leur vitesse,  $q$  leurs charges et  $n$  la densité volumique de particules de conduction<sup>a</sup>. On définit alors la **densité volumique de courant** en tout point  $M$  du conducteur :

$$\vec{j}(M) = n(M)q(M)\vec{v}(M) \quad (1.8)$$

Son expression dans le conducteur donne toutes les informations sur le phénomène de conduction et permet de calculer l'intensité globale circulant dans un conducteur (cf. suite)

- la distribution **surfactive** de courant : Cela revient à négliger une des dimensions du conducteur en décrivant la conduction dans une "nappe" de courant. Les charges de conduction étant alors réparties en surface, on définit la densité surfactive de particules de conduction  $n_S$ <sup>b</sup>. et la **densité surfactive de courant** :

$$\vec{j}_S = n_S q \vec{v} \quad (1.9)$$

On peut aussi établir une relation entre  $\vec{j}_S$  et l'intensité qui traverse la nappe de courant.

a. On définit au passage la densité volumique de charge de conduction :  $\rho = nq$ .

b. On définit au passage la densité surfactive de charge de conduction :  $\sigma = n_S q$ .

### ♥ Propriété IV.1: Densité volumique de courant et intensité

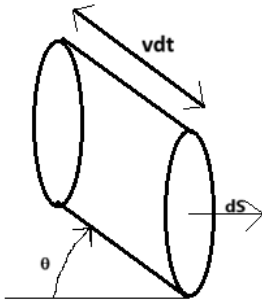
Soit un conducteur en volume parcouru par une densité volumique de charge  $\vec{j}$ <sup>a</sup> et une surface  $S$  du conducteur orientée. L'intensité qui circule à travers  $S$  correspond au flux de  $\vec{j}$  à travers  $S$  :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{d^2S} \quad (1.10)$$

<sup>a</sup>. On peut trouver une expression similaire dans le cas de courants de surface mais elle n'est pas au programme. Les quelques cas rencontrés sont des cas simples où le calcul de  $I$  pourra se faire sans intégration.

Dans le cas de  $\vec{j}$ , le terme de **flux** prend un sens très concret.

### ♥ Démonstration



Considérons la quantité de charge  $q$  traversant une surface orientée  $\vec{d^2S}$  entre  $t$  et  $t + dt$ . Ces charges parcourent une distance  $vdt$  durant cet instant.<sup>a</sup> Elles doivent donc être situées à une distance inférieure à  $vdt$  de la surface à l'instant  $t$  et dans le cylindre s'appuyant sur  $\vec{d^2S}$  dans la direction de  $\vec{v}$ .

La quantité de charges qui traverse la surface entre  $t$  et  $t + dt$  est donc  $d^3q = qndSv \cos \theta dt$  avec  $\theta$  comme défini sur la figure. Soit, en utilisant un produit scalaire :

$$d^2I = \frac{d^3q}{dt} = nq\vec{v} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (1.11)$$

Pour obtenir l'intensité totale, il suffit d'intégrer sur toute la surface.

<sup>a</sup>. La surface étant infinitésimale tout comme l'intervalle de temps  $dt$ , on peut considérer que la densité de charge ainsi que leur vitesse est la même autour de  $\vec{dS}$ .

### Symétries d'un champ de vecteur

### ♥ Définition IV.2: Plan de symétrie/d'antisymétrie

Soit une distribution de courant  $\vec{j}(M)$ <sup>a</sup> et un plan  $\Pi$ , on dit que :

- le plan  $\Pi$  est plan de symétrie de la distribution de courant  $\vec{j}$  si pour tout point  $M$  de l'espace et son symétrique  $M'$  par rapport à  $\Pi$  alors  $\vec{j}(M')$  est le symétrique de  $\vec{j}(M)$  par  $\Pi$ .
- le plan  $\Pi$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courant  $\vec{j}$  si pour tout point  $M$  de l'espace et son symétrique  $M'$  par rapport à  $\Pi$  alors  $-\vec{j}(M')$  est le symétrique de  $\vec{j}(M)$  par  $\Pi$ .

<sup>a</sup>. Linéique, surfacique ou volumique. Dans le cas linéique, on peut associer un vecteur à l'intensité  $I$ .



### ♥ Propriété IV.2: Plans de symétrie et parité des composantes

Soit une distribution de courant  $\vec{j}(M)$  et un plan  $\Pi$ . On définit un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que  $\vec{e}_x \perp \Pi$ <sup>a</sup> et on note  $\vec{j} = j_x(x, y, z)\vec{e}_x + j_y(x, y, z)\vec{e}_y + j_z(x, y, z)\vec{e}_z$ .

- Si  $\Pi$  est un plan de symétrie des courants,  $j_x(x, y, z)$  est une fonction impaire en  $x$  et  $j_y(x, y, z)$  et  $j_z(x, y, z)$  sont des fonctions paires en  $x$ .
- Si  $\Pi$  est un plan d'antisymétrie des courants,  $j_x(x, y, z)$  est une fonction paire en  $x$  et  $j_y(x, y, z)$  et  $j_z(x, y, z)$  sont des fonctions impaires en  $x$ .

a. On pourrait aussi utiliser une base cylindrique d'axe Oz perpendiculaire à  $\Pi$

### ♥ Démonstration

Ce n'est pas une démonstration à proprement parlé mais on pourra se convaincre de ces propriétés grâce aux schéma ci-après.

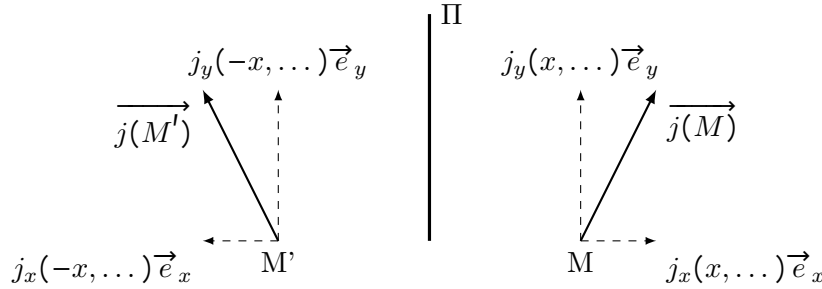


FIGURE 1.3 – Plan de symétrie

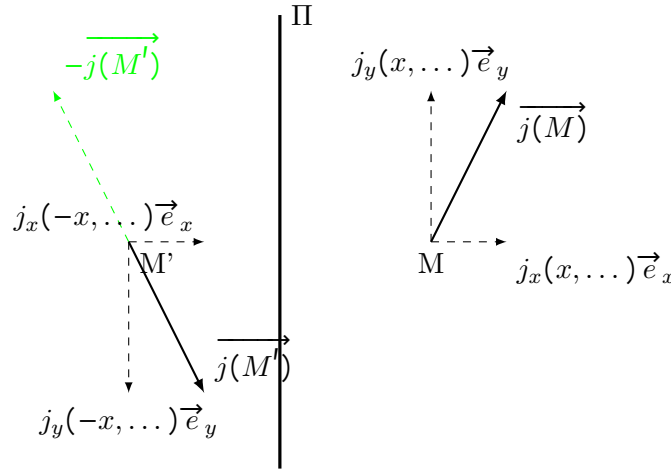


FIGURE 1.4 – Plan d'antisymétrie

### ♥ Propriété IV.3: Cas des points du plans

Soit une distribution de courant  $\vec{j}$  et un plan  $\Pi$ . Soit enfin un point  $M$  appartenant au plan.

- Si  $\Pi$  est un plan de symétrie des courants,  $\vec{j}(M)$  est contenu dans le plan.
- Si  $\Pi$  est un plan d'antisymétrie des courants,  $\vec{j}(M)$  est orthogonal au plan.



## ♥ Démonstration

- Considérons un plan de symétrie et un point  $M$  sur ce plan.  $\vec{j}(M)$  doit être son propre symétrique. Or si  $\vec{j}(M)$  possède une composante en dehors du plan, son symétrique sera opposé et on aurait  $\vec{j}(M) \neq \vec{j}(M)$  ce qui est absurde.
- Considérons un plan d'antisymétrie et un point  $M$  sur ce plan.  $\vec{j}(M)$  doit être son propre anti-symétrique. Or si  $\vec{j}(M)$  possède une composante dans le plan, son symétrique sera identique et son anti-symétrique sera opposé et on aurait  $\vec{j}(M) \neq \vec{j}(M)$  ce qui est absurde.

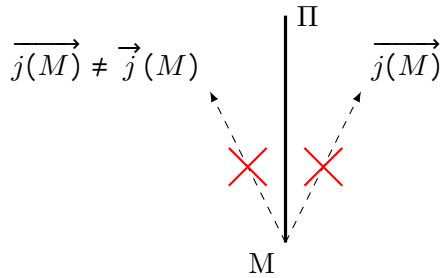


FIGURE 1.5 – Plan de symétrie :  $\vec{j}$  ne peut être hors du plan.

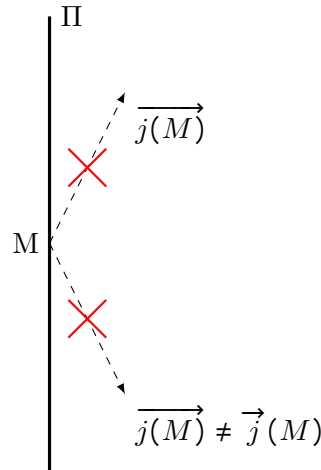


FIGURE 1.6 – Plan d'antisymétrie :  $\vec{j}$  ne peut être inclus dans le plan.

## Invariances

### ♥ Définition IV.3: Invariances d'un champ de vecteur

Soit une distribution de vecteur  $\vec{j}(M)$ . On dit qu'elle est invariante par une transformation  $T$  si  $\vec{j}(M') = \vec{j}(M)$  avec  $M' = T(M)$ . On distinguera deux types d'invariances :

- les invariances par rotation : dans un système de coordonnées correctement choisi,  $\vec{j}$  ne va pas dépendre d'une coordonnées angulaire  $\theta$  ou  $\phi$ .
- les invariances par translation : dans un système de coordonnées correctement choisi,  $\vec{j}$  ne va pas dépendre d'une coordonnées  $x, y$  ou  $z$ .

## IV.2 Cas du champ magnétique

## ♥ Définition IV.4: Pseudovecteur

Un pseudovecteur est un vecteur dont le sens dépend de l'orientation de l'espace, c'est-à-dire du choix d'orientation d'une base directe. **Le champ magnétique est un pseudovecteur.** Il vient les propriétés suivantes :

- Les définitions des plans de symétrie et d'antisymétrie sont inversés.
  - Il vient que les propriétés géométriques sont inversées :
    - Un pseudovecteur est **orthogonal à ses plans de symétries**.
    - Un pseudovecteur est **contenu dans ses plans d'antisymétrie**.
- 
- Ces vecteurs sont en général issu d'un produit scalaire de deux vecteurs "vrais" comme le moment cinétique par exemple.
  - L'inversion des définitions de plans de symétrie et d'antisymétrie est associé au problème de chiralité : une base directe devient, par symétrie planaire, une base indirecte. Comme le sens d'un pseudovecteur s'inverse quand on change l'orientation de l'espace, cela inverse les propriétés de symétrie (*ceci n'est pas une démonstration*).

## ♥ Propriété IV.4: Principe de Curie

La symétrie des causes se retrouve dans la symétrie des effets. Ainsi, dans le cas du champ magnétique qui est :

- Les plans de symétrie des courants sont aussi les plans de symétrie des champ magnétique.
- Les plans d'antisymétrie des courants sont aussi les plans de symétrie des champ magnétique.
- Les invariances des courants sont les invariances du champ magnétique.

## ♥ A retenir: Liens entre courants et champs magnétiques

**ATTENTION :** On rappelle que les courants sont inclus dans leur plans de symétrie et orthogonaux à leur plans d'anti-symétrie. Pour les courants c'est l'inverse. On pourra retenir que :

- Les *champs magnétiques* sont orthogonaux aux plans de symétrie **des courants**.
- Les *champs magnétiques* sont inclus dans les plans d'anti-symétrie **des courants**.
- Les invariances des courants restent les invariances des champs magnétiques.

—  $\Rightarrow$  Exemples en exercice méthode [V.2](#).

## V S'entraîner

### V.1 Méthodes



Corrigés

#### 🔧 Exercice V.1: Ordres de grandeur

- Q1.** Estimer l'intensité nécessaire circulant dans un fil pour créer, à 1cm, un champ magnétique de l'ordre de celui d'un aimant droit.
- Q2.** On considère un ensemble de  $N$  fil très proches et tous parcourus par une intensité  $I$ . Estimer le nombre de fils  $N$  nécessaire pour obtenir un champ magnétique de l'ordre de celui d'un aimant droit à 1cm des fils.

#### ♥ A retenir: Aimant permanent et circuit

On retiendra qu'il est presque impossible de créer un circuit électrique seul capable de créer un champ magnétique équivalent à celui d'un aimant permanent.

- En général, **on négligera donc souvent le champ magnétique des circuits devant ceux des aimants permanents.**
- On peut néanmoins créer des aimants qui ne s'active que lorsqu'un circuit proche est parcouru par un courant : des **électro-aimants**. Leur principe est basé sur le fait que des milieux, dits magnétiques, modifient les propriétés du milieu. Il faut alors changer la perméabilité du vide  $\mu_0$  par celle du milieu  $\mu = \mu_0 \mu_r$  avec  $\mu_r$  (perméabilité relative) pouvant atteindre plusieurs milliers. Les courants nécessaires, deviennent alors plus accessibles (mais encore importants).

#### ♥ Méthode V.1: Calcul d'intensité

- Q1.** On considère un fil infini de rayon  $R$  parcouru par une distribution axiale uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ . Calculer l'intensité qui traverse une section transverse du cylindre (orientée suivant  $+\vec{e}_z$ ).
- Q2.** On considère une nappe de courant de largeur  $L$  suivant  $Oz$  et infinie suivant  $Oy$  parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_S = j_s \vec{e}_y$ . Calculer l'intensité qui traverse une ligne transverse de la nappe. On procédera par une bilan de charge traversant cette ligne.

#### ♥ Méthode V.2: Symétries et structure du champ magnétique

Pour les distributions suivantes :

- Proposer un système de coordonnées adaptés à l'étude des symétries et invariances.
- Déterminer les plans de symétrie, d'antisymétrie et les invariances des distribution de courant.

— En déduire l'orientation et les dépendances du champ magnétique en tout point de l'espace.

**Q1.** Un fil infini parcouru par une intensité  $I$

**Q2.** Une spire circulaire parcourue par une intensité  $I$ . On précisera l'orientation du champ sur l'axe de la spire ainsi que dans le plan de la spire.

**Q3.** Une bobine infinie constituée de spires jointives parcourues par une intensité  $I$ .

### ♥ A retenir: Structure et symétrie

On retiendra la méthode pour déterminer la structure d'un champ magnétique (i.e. orientation et dépendance) :

1. Choix d'un système de coordonnées judicieux
2. Déterminer de l'orientation de  $\vec{B}$  grâce aux plans de symétrie et d'antisymétrie des courants : on annule ainsi certaines **composantes de  $\vec{B}$** .
3. Déterminer les invariances des composantes de  $\vec{B}$  vis-à-vis de certaines **coordonnées du point  $M$**  grâce aux invariances des courants.

### ♥ Méthode V.3: Champ magnétique tournant

On considère deux bobines longues qui pourront être assimilées à des bobines infinies quant au champ magnétique qu'elles créent. Ces deux bobines sont disjointes et leurs axes forment un angle de  $90^\circ$  (on ne s'intéressera pas ici à la manière de réaliser en pratique une telle configuration). Les deux bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de même amplitude  $I_0$ , de même pulsation  $\omega$  mais déphasé de  $\pi/2$ . Montrer que le champ magnétique résultant est un champ tournant dont on déterminera les caractéristiques.

### ♥ A retenir: Champ magnétique tournant

On retiendra :

- la méthode pour créer un champ magnétique tournant au moyen de bobinage tournés les un par rapport aux autres et déphasés en fonction <sup>a</sup>.
- L'expression obtenue : il est important de reconnaître l'expression d'un champ magnétique tournant en coordonnées cartésiennes ou cylindriques.

<sup>a</sup>. On a présenté ici la méthode la plus simple mais peu usité avec deux bobines. En pratique, on utilise trois bobines déphasés de  $\pi/3$  : c'est le **triphase**.

## V.2 Activités

### Problème 1: Origine et ordre de grandeur

Le magnétisme possède deux origines :

- Le mouvement "physique" des particules chargées.
- Le spin  $\vec{S}$  des particules chargées : c'est une grandeur purement quantique qui possède les mêmes comportements mathématiques qu'un moment cinétique (on parle d'ailleurs de

moment cinétique intrinsèque) mais qui ne correspond pas physiquement à un mouvement de rotation observable de la particules (les échelles sont trop petites pour pouvoir encore parler de trajectoire).

### Echelle microscopique

#### Moment magnétique orbital

A l'échelle microscopique, les électrons sont en mouvement autour du noyau. Le mouvement crée donc un champ magnétique propre. Le mouvement des électrons est un mouvement orbital autour du noyau, on peut donc lui associer un moment cinétique orbital par rapport au noyau.

On s'intéresse ici au cas de l'atome d'hydrogène.

- Q1.** Montrer que le mouvement orbitalaire de l'électron est à l'origine un moment magnétique  $\vec{m}_L$  appelé **moment magnétique orbital** proportionnel au moment cinétique  $\vec{L}_O$  de l'électron calcul au point O où est le proton :

$$\vec{m}_L = \gamma \vec{L} \quad (1.12)$$

où  $\gamma$  est appelé **rapport gyromagnétique**.

- Q2.** Le modèle de Bohr prévoit la quantification du moment cinétique :  $\|\vec{L}\| = n\hbar$ . En déduire que le moment magnétique est aussi quantifié sous la forme :

$$\|\vec{M}\| = n\mu_B \quad (1.13)$$

$\mu_B$  est appelé magneton de Bohr.

#### Moment magnétique de spin

Les expériences réalisées sur les atomes comme les expériences de Stern et Gerlach ont montré que le modèle orbital ne suffit à décrire le moment magnétique atomique. **On doit superposer au moment magnétique orbital, un moment magnétique dit "de spin" ou "intrinsèque" :**

$$\vec{m}_{tot} = \vec{m}_L + \vec{m}_{spin} \quad (1.14)$$

Ce moment est propre à chaque particule et peut être relié à une grandeur appelé **moment cinétique intrinsèque** ou **spin**  $\vec{S}$ <sup>a</sup> : grandeur physique intrinsèque à une particule qui possède les mêmes propriétés mathématiques qu'un moment cinétique orbital mais *qui ne correspond à aucun mouvement de l'électron*. On a alors proportionnalité :

$$\vec{m}_{spin} = g\gamma \vec{S} \quad (1.15)$$

où  $g$  est appelé facteur de Landé et ne dépend que de la particule considérée.<sup>b</sup>

a. Pour l'électron  $\|\vec{S}\| = \hbar/2$

b. Pour l'électron  $g = 2$ , pour le proton,  $g = 5.586$  et pour le neutron  $g = -3.826$ .

## Echelle macroscopique et champ magnétique terrestre

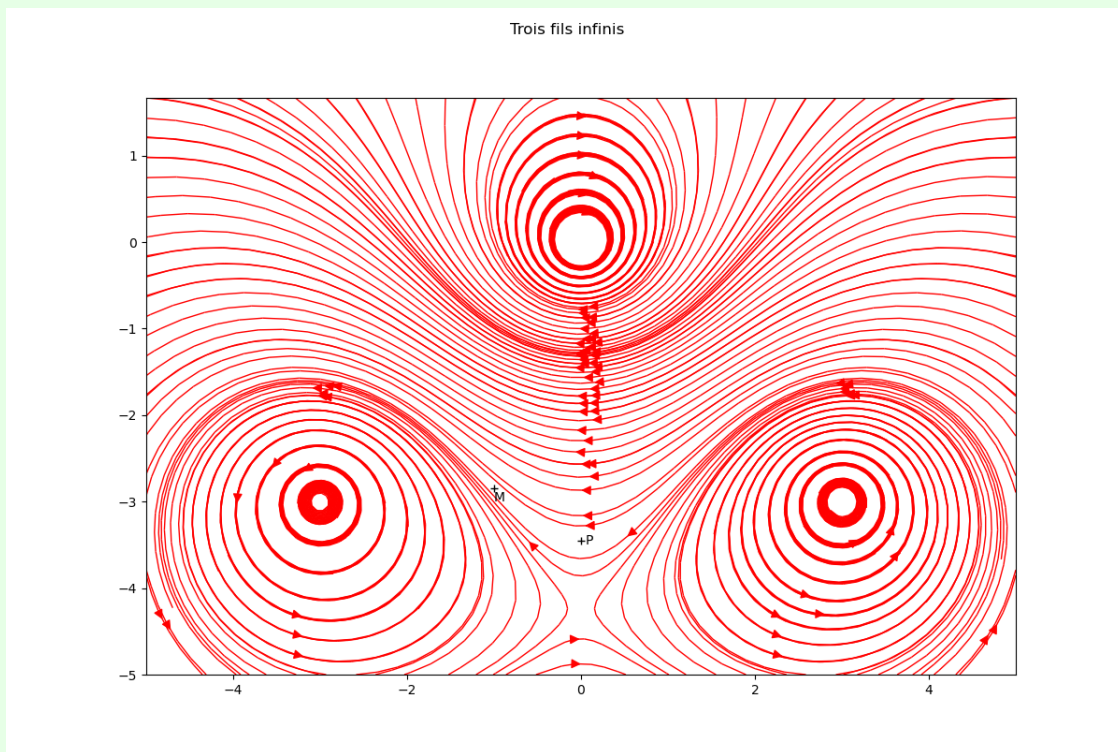


Milieux magnétiques

## V.3 Applications

## 🔗 Exercice V.2: Lecture d'une carte de champ

Trois fils infinis longs et parallèles entre eux sont parcourus par des courants  $I_1$  (bas gauche),  $I_2$  (bas droite) et  $I_3$  (haut centre). Les lignes de champ sont représentées sur la carte ci-dessous.



- Q1.** Expliquer pourquoi il était attendu que les lignes de champs soient contenues dans le plan perpendiculaire au fil.
- Q2.** Déterminer le signe de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  en les orientant comme sortant de la feuille vers le lecteur.
- Q3.** Que peut-on très probablement dire de  $I_1$  et  $I_2$  ?
- Q4.** En extrapolant le tracé de lignes de champ déterminer approximativement la position d'un point A où le champ sera nul.
- Q5.** Préciser si le champ magnétique sera plus fort autour de P ou de M.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\implies$  Carte de champ magnétique.
- $\implies$  Symétrie d'un champ magnétique.
- $\implies$  Flux d'un champ magnétique.

*Éléments de correction (sans justification) :*

- Q1.** Utiliser un plan d'antisymétrie des courants.  
**Q2.**  $I_1 > 0$ ,  $I_2 > 0$ ,  $I_3 < 0$   
**Q3.**  $I_1 = I_2$   
**Q4.** Point où se croisent les lignes de champ vers  $(0, -4)$ .  
**Q5.** Utiliser la conservation du flux.

### ✎ Exercice V.3: Structure du champ magnétique

Déterminer les orientations et dépendances du champ magnétique pour les distributions suivantes :

- Q1.** Un cylindre infini parcouru par une distribution volumique de courant uniforme suivant l'axe du cylindre.  
**Q2.** Une bande infinie de largeur  $L$  parcouru par des courants surfaciques uniformes dans la direction infini de la bande. On précisera l'orientation du champ sur l'axe médian de la nappe ainsi que dans le plan de la nappe.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\implies$  Symétries des distributions de courant
- $\implies$  Principe de Curie pour le champ magnétique

*Éléments de correction (sans justification) :*

- Q1.**  $\vec{B}(M(r, \theta, z)) = B_z(r) \vec{e}_z$   
**Q2.** On note  $\vec{e}_x$  le vecteur normal au plan de la bande et  $\vec{e}_y$  tel que  $\vec{j}_S = j_s \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{B}(M(x, y, z)) &= B_x(x, z) \vec{e}_x + B_z(x, z) \vec{e}_z \\ \vec{B}(M(x = 0, y, z)) &= B_x(x = 0, z) \vec{e}_x \\ \vec{B}(M(x = 0, y, z = 0)) &= \vec{0}\end{aligned}$$

## Entrainement

### ✎ Exercice V.4: Spin et moment magnétique

On se propose ici de montrer, dans le cas de l'électron pour le modèle du spin ne peut correspondre à un mouvement. On suppose (raisonnement par l'absurde), que ce moment magnétique est associé à un moment intrinsèque de l'électron, donc à un mouvement de l'électron sur lui-même<sup>a</sup>

On modélise pour simplifier l'électron comme un disque de rayon  $R = 2.8 \times 10^{-15}$  m, de masse  $m_E = 9.1 \times 10^{-31}$  kg uniformément répartie et de charge  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C uniformément répartie tournant autour de son axe à une vitesse angulaire  $\omega$ . On admet que son moment d'inertie est alors :

$$J = m_E \frac{R^2}{2}$$



- Q1.** En assimilant le disque à un ensemble de spires de rayon  $r \in [0, R]$  et d'épaisseur  $dr$ , déterminer le moment magnétique total de l'électron.
- Q2.** Des mesures expérimentales conduisent à obtenir un moment magnétique de norme  $\mu_B$ , le magnéton de Bohr. En déduire l'énergie cinétique et la vitesse à la périphérie du disque. Commenter.
- Q3.** \*Reprendre l'étude précédente mais en considérant que l'électron une sphère uniformément chargée en surface. On donne le moment cinétique d'une boule de masse uniformément répartie sur un de ses axes :  $J = \frac{2}{5}m_ER^2$ .

*a.* Ce moment magnétique étant intrinsèque, il ne peut correspondre qu'à un mouvement interne de l'électron.

### Exercice V.5: Matériau ferromagnétique (Recherche)

- Q1.** A partir du magnéton de Bohr, proposer un modèle et une estimation permettant de déterminer le moment magnétique maximal d'un aimant droit de réfrigérateur composé de Fer.
- Q2.** En déduire l'intensité du champ magnétique créé à quelques centimètre de l'aimant en utilisant l'expression du champ magnétique données dans le cours. Comparer aux valeurs trouvées.

# Chapitre 2: Actions de Laplace

En mécanique, nous avons vu l'action d'un champ magnétique sur une particule chargée. Mais la force de Lorentz magnétique ne peut décrire l'action, à l'échelle macroscopique, d'un champ magnétique sur un circuit ou un dipôle magnétique car ce sont des édifices **neutres**. On utilise alors à cette échelle les **actions de Laplace**.

## I Modélisation générale

### ♥ Propriété I.1: Action sur un élément de circuit infinitésimal

Soit un petit élément de circuit conducteur  $\vec{dl}(M)$  situé en un point M, parcouru par une intensité  $I$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . Le champ magnétique exerce une action <sup>a</sup> sur le petit élément  $\vec{dl}$  dont la force est appelée **force de Laplace** et a pour expression :

$$\vec{dF}(M) = I \vec{dl} \wedge \vec{B}(M)$$

<sup>a</sup>. considérée comme ponctuelle

### ♥ Théorème I.1: Action résultat sur un circuit

Pour une branche *Branche* parcouru par une intensité  $I$ , l'action résultante de toute les actions de Laplace s'obtient par intégration :

$$\begin{cases} \vec{F}_L &= \int_{M \in \text{Branche}} I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}(M) \\ \vec{M}_{L,A} &= \int_{M \in \text{Branche}} \vec{AM} \wedge (I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}(M)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\vec{M}_{L,A}$  est le moment résultant de l'action de Laplace sur la branche. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>. Pour rappel, on doit donner la force résultante ET le moment résultant pour décrire une action globale.

**Cas d'un circuit fermé :** Le calcul est le même mais on repère que le contour d'intégration est fermé sur la notation intégrale :

$$\begin{cases} \vec{F}_L &= \oint_{M \in \text{Branche}} I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}(M) \\ \vec{M}_{L,A} &= \oint_{M \in \text{Branche}} \vec{AM} \wedge (I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}(M)) \end{cases} \quad (2.2)$$

## II Approche énergétique



Analyse microscopique

On retiendra principalement que, même si l'action sur le système est celle d'un champ magnétique, cette action peut fournir un travail non nul contrairement à l'action de Lorentz magnétique.

## III Cas particuliers usuels

Dans tous les cas usuels à connaître, on fait l'hypothèse d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

### III.1 Cas d'un circuit fermé à une maille

#### ♥ Théorème III.1: Cas d'un circuit fermé.

Un circuit **fermé** parcouru par une intensité  $I$  plongé dans un champ magnétique **uniforme**  $\vec{B}$  subit une action de Laplace par le champ magnétique qui est un **couple** (le moment résultant est noté  $\vec{\Gamma}_L$ <sup>a</sup>) est :

$$\begin{cases} \vec{F}_L &= \vec{0} \\ \vec{\Gamma}_L &= \vec{M} \wedge \vec{B} \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $\vec{M}$  le moment magnétique du circuit<sup>b</sup>

a. Rappel : Pour un couple ce moment est indépendant du point de calcul. C'est pourquoi on ne le précise pas ici.

b. Pour rappel,  $\vec{M} = I\vec{S}$  avec  $\vec{S}$  le vecteur surface.

#### ♥ Démonstration

Les cas à connaître sont :

- La démonstration générale pour la force résultante.
- Le cas d'une spire rectangulaire pour le moment résultant.

### Résultante des forces

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \oint_{\text{circuit}} (I \vec{dl} \wedge \vec{B}) \\
 &= I \left( \oint_{\text{circuit}} \vec{dl} \right) \wedge \vec{B} && \text{car } I \text{ et } \vec{B} \text{ uniformes} \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

car on somme les vecteurs  $\vec{dl}$  en revenant au point de départ (circuit fermé).

### Moment résultant

Comme expliqué, nous allons prouver uniquement la relation  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  dans le cas d'une spire rectangulaire.

Paramétrage : On considère donc une spire rectangulaire de côtés  $2a$  et  $2b$  et on paramètre un système de coordonnées cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de sorte que la spire soit dans le plan Oxy avec la longueur  $2a$  suivant Ox et la largeur  $b$  suivant Oy (Figure 2.1). O est de plus le centre du rectangle.

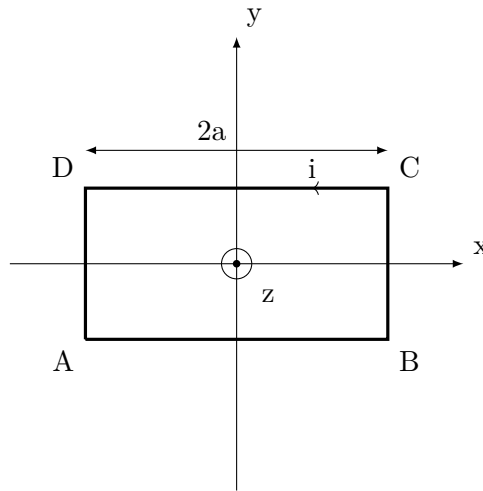


FIGURE 2.1 – Cas de la spire rectangulaire

Le champ est uniforme mais d'orientation quelconque donc on pose :

$$\vec{B} = B_{0x} \vec{e}_x + B_{0y} \vec{e}_y + B_{0z} \vec{e}_z$$

**Le moment ne dépendant pas du point de calcul (couple), on peut le choisir. On choisit ici le point O, centre du rectangle.**

On retiendra une relation importante du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{L,O} &= \oint_{M \in \text{Branche}} \vec{OM} \wedge (I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}) \\
 &= I \oint_{M \in \text{Branche}} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{dl} - (\vec{OM} \cdot \vec{dl}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

On doit séparer l'intégrale en 4 parties car  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{dl}$  s'écrivent différemment pour chaque côté :

$$\begin{aligned} \text{— Sur AB : } & \begin{cases} \overrightarrow{OM} &= x_M \vec{e}_x - b \vec{e}_y \\ \overrightarrow{dl} &= dx \vec{e}_x \end{cases} \\ \text{— Sur BC : } & \begin{cases} \overrightarrow{OM} &= a \vec{e}_x + y_m \vec{e}_y \\ \overrightarrow{dl} &= dy \vec{e}_y \end{cases} \\ \text{— Sur CD : } & \begin{cases} \overrightarrow{OM} &= x_M \vec{e}_x + b \vec{e}_y \\ \overrightarrow{dl} &= -dx \vec{e}_x \end{cases} \\ \text{— Sur DA : } & \begin{cases} \overrightarrow{OM} &= -a \vec{e}_x + y_m \vec{e}_y \\ \overrightarrow{dl} &= -dy \vec{e}_y \end{cases} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{L,O} &= I \int_{-a}^a [(x_M B_{0x} - b B_{Oy}) \vec{e}_x - x_M \vec{B}] dx \\ &+ I \int_{-b}^b [(a B_{0x} + y_M B_{Oy}) \vec{e}_y - y_M \vec{B}] dy \\ &- I \int_{-a}^a [(x_M B_{0x} + b B_{Oy}) \vec{e}_x - x_M \vec{B}] dx \\ &- I \int_{-b}^b [(-a B_{0x} + y_M B_{Oy}) \vec{e}_y - y_M \vec{B}] dy \end{aligned}$$

On peut utiliser le fait que l'intégrale d'une fonction impaire entre  $-x_0$  et  $x_0$  est nulle pour supprimer les termes en  $y_M$  et  $x_M$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{L,O} &= I \int_{-a}^a [(-b B_{Oy}) \vec{e}_x] dx \\ &+ I \int_{-b}^b [(a B_{0x}) \vec{e}_y] dy \\ &- I \int_{-a}^a [(b B_{Oy}) \vec{e}_x] dx \\ &- I \int_{-b}^b [(-a B_{0x}) \vec{e}_y] dy \\ \vec{M}_{L,O} &= 2abI (B_{Ox} \vec{e}_y - B_{Oy} \vec{e}_x) \end{aligned}$$

Or, avec :  $\vec{M} = I \vec{S} = 2abI \vec{e}_z$ , il vient que :

$$\begin{aligned} \vec{M} \wedge \vec{B} &= (2abI \vec{e}_z) \wedge (B_{Ox} \vec{e}_x + B_{Oy} \vec{e}_y + B_{Oz} \vec{e}_z) \\ &= 2abI (B_{Ox} \vec{e}_y - B_{Oy} \vec{e}_x) \end{aligned}$$

On a bien égalité des deux expressions, donc :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{M}_{L,O} = \vec{M} \wedge \vec{B}} \quad (2.5)$$

### ♥ Propriété III.1: Considérations énergétiques

Soit un circuit **fermé** parcouru par une intensité  $I$  plongé dans un champ magnétique **uniforme**  $\vec{B}$  et subissant donc une action de Laplace par le champ magnétique. **Si le moment magnétique  $\vec{M}$  est constant**<sup>a</sup> alors l'action de Laplace dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est :

$$E_{P,L} = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (2.6)$$

a. Ce qui signifie que le circuit est indéformable et parcouru par une intensité constante.

*Le caractère conservatif peut se généraliser à un circuit déformable/d'intensité variable si ces variations ne sont pas causées par le champ magnétique lui-même. Ce cas n'est pas au programme.*

### ♥ Démonstration

Le moment<sup>a</sup> étant toujours perpendiculaire à  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$ , on peut n'étudier que la rotation de la spire autour d'un axe  $Oz'$  perpendiculaire aux deux vecteurs en notant  $\theta = (\vec{B}, \vec{M})$ <sup>b</sup> l'angle entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$ . La puissance transmise s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P_L &= \vec{M} \wedge \vec{B} \\ &= -MB \sin \theta \dot{\theta} \\ &= -\frac{d}{dt} (-MB \cos \theta) = -\frac{d}{dt} (\vec{M} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

*Attention, ce raisonnement ne marche que si la norme de  $M$  ne varie pas dans le temps, c'est-à-dire si  $I$  et la surface de la spire sont constants.*

a. Pour rappel, la force étant nul, la puissance transmise s'écrit uniquement avec le moment résultant.

b. Orienter l'angle dans ce sens permet de fixer  $\vec{B}$  et faire varier  $\vec{M}$  dans le "bon" sens quand  $\theta$  augmente, ce qui est attendu pour un calcul de puissance : c'est la spire qui doit bouger.

## III.2 Cas d'un dipôle magnétique

### ♥ Théorème III.2: Cas d'un dipôle magnétique (Admis)

Un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  plongé dans un champ magnétique **uniforme**  $\vec{B}$  subit une action de Laplace par le champ magnétique qui est un couple :

$$\begin{cases} \vec{F}_L &= \vec{0} \\ \vec{\Gamma}_L &= \vec{M} \wedge \vec{B} \end{cases} \quad (2.7)$$

**Si le dipôle est rigide**, c'est-à-dire si  $\vec{M}$  est constant, alors cette action dérive d'une énergie potentielle :

$$E_{P,L} = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (2.8)$$

## IV S'entraîner

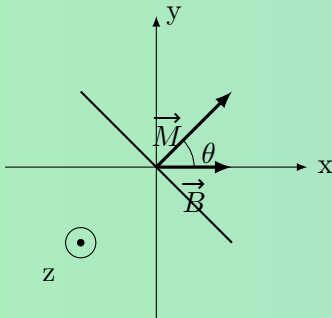
### IV.1 Méthodes



Corrigés des exercices

#### ♥ Méthode IV.1: Position d'équilibre d'un circuit fermé indéformable

*Compétence : Utiliser les données (force et moment) de l'action résultante de l'action de Laplace sur un circuit fermé pour étudier un système.*



On considère une spire carré de côté  $a$  parcourue par un courant  $I$  maintenu constant. Elle est en liaison pivot parfaite avec un bâti. L'axe de la liaison étant vertical.

La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ . On définit un système de coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$  tel que  $\theta = (\vec{B}, \vec{M})$  avec  $\vec{M}$  le moment magnétique de la spire.

**Q1.** Déterminer les positions d'équilibre de la spire et leur stabilité.

#### ♥ A retenir: Equilibre dans un champ magnétique

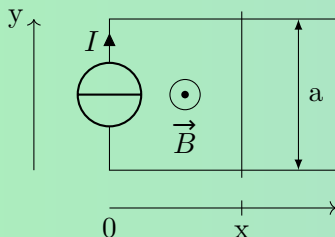
On retiendra que, plongé dans un champ magnétique uniforme, un système magnétique tend à aligner son moment magnétique  $\vec{M}$  **dans le même sens et même direction** que le champ magnétique  $\vec{B}$ .

Cette propriété est utilisée :

- dans les boussoles : les aiguilles aimantées s'alignent sur le champ magnétique.
- dans les moteurs synchrones : un champ magnétique tournant entraîne un aimant permanent.

#### ♥ Méthode IV.2: Cas d'un circuit déformable

*Compétence : Calculer par intégration directe une force résultante sur une portion mobile d'un circuit déformable.*



On considère des rails parallèles très longs et conducteurs distants d'une distance  $a$ . A leur extrémité gauche ils sont reliés entre eux par une source idéale de courant de cem  $I$  constant.

Une tige conductrice de masse  $m$  est posée sur les rails de sorte qu'il se forme un circuit électrique fermé. Sa position  $x$  est repérée sur un axe donnée sur le schéma.



L'ensemble est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  uniforme (et  $B_0 > 0$ ), constant et perpendiculaire au plan du circuit ainsi formé.

On fait les hypothèses suivantes :

- La barre reste perpendiculaire aux deux rails (elle a donc un mouvement de translation)
- Elle glisse sans frottements sur les rails.
- Les rails ET la barre sont horizontales.

A l'instant initial, la barre est immobile à  $x = x_0$ .

- Q1.** Justifier qualitativement pourquoi la barre va se mettre en mouvement. Dans quel sens se déplace-t-elle suivant le signe de  $I$ , intensité circulant dans le circuit ?
- Q2.** Retrouver quantitativement le résultat précédent en déterminant la force exercée par le champ magnétique sur la barre en fonction de  $B_0$ ,  $I$  et  $a$ .
- Q3.** En déduire la puissance reçue par la barre en fonction des données précédentes et de  $\dot{x}$ . Compte-tenu de la première question, commenter le signe de la puissance reçue. D'où vient/où va l'énergie ?

## IV.2 Exercice d'application

### 🔧 Exercice IV.1: Définition de l'Ampère

L'unité Ampère est définie comme l'intensité circulant dans deux fils infinis situé à une distance de 1m telle que la force exercée par un fil un unité de longueur (1m) de l'autre fil soit égale à  $2 \cdot 10^{-7}$  N.

Pour rappel, le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par une intensité  $I$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (2.9)$$

où  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur de la base cylindrique d'axe Oz confondu avec le fil et orienté dans le même sens que  $I$ .

- Q1.** Retrouver la valeur de cette force au moyen des formules données du champ magnétique créé par un fil infini.
- Q2.** Commenter le caractère attractif/répulsif de la force d'interaction suivant les sens de parcours des intensités.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Définition de la force de Laplace (Section I).
- $\Rightarrow$  Calcul d'une résultante des forces par intégration (Méthode IV.2).

### 🔧 Exercice IV.2: Moment et puissance

**Dans ce problème, on néglige l'action de la pesanteur sur les éléments mobiles.**

On considère une tige de longueur  $L$  maintenue à une extrémité au bati par une liaison pivot. Un système, non détaillé ici, permet de maintenir une intensité  $I$  constante dans la tige allant de la liaison pivot à l'autre extrémité de la tige.

La tige est, de plus, plongée dans un champ magnétique constant et uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  avec  $\vec{e}_z$  suivant l'axe de la liaison pivot. On définit un système de coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$  pour décrire le mouvement de tout point de la tige.

- Q1.** On note  $\omega > 0$  la vitesse angulaire de la tige autour du pivot. Déterminer, par intégration, la puissance fournie par les actions de Laplace à la tige. Commenter son signe en fonction de  $I$ .
- Q2.** Déterminer, par intégration, le moment résultant de l'action de Laplace sur l'axe du pivot. Retrouver ainsi la puissance transmise.
- Q3.** Le bati assure, par l'intermédiaire de la liaison pivot une vitesse angulaire  $\omega$  constante. Quelle puissance doit fournir le bati à la tige ? Commenter son signe.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Définition de l'action de Laplace (Section I).
- $\Rightarrow$  Calcul d'une puissance par intégration (Méthode IV.2).

*Eléments de correction (sans justification) :*

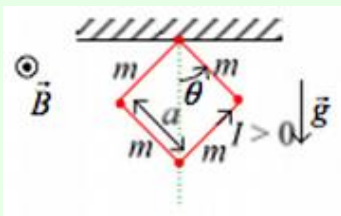
**Q1.**  $P_L = -\frac{L^2 I B_0 \omega}{2}.$

**Q2.**  $M_{L,Oz} = \frac{L^2 I B_0}{2}.$

**Q3.**  $P_{pivot} = -P_L.$

### IV.3 Exercice d'entraînement

#### 🔧 Exercice IV.3: Equilibre d'un losange conducteur



On considère un circuit formé de 4 tiges rigides de masses  $m$  et de longueur  $a$ . Le circuit, fermé est parcouru par un courant  $i$  constant. Le point supérieur est fixé sur un plafond fixe dans un référentiel galiléen. Le point inférieur est contraint à ne pouvoir bouger que sur un axe verticale fixe. Ce mouvement s'effectue sans frottements. L'ensemble du losange ne peut que se translater sur lui-même. L'ensemble est placé dans un champ de pesanteur uniforme vers le bas et dans un champ magnétique dirigé suivant la normale au plan du losange.

- Q1.** Etudier les positions d'équilibre du système et leur stabilité par une étude énergétique. On admettra que la force de Laplace dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est  $E_p = -I\Phi$  où  $\Phi$  est le flux du champ magnétique à travers le losange.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Système conservatif.
- $\Rightarrow$  Equilibre et stabilité.

*Eléments de correction (sans justification) :*

$$\sin^2 \theta_{eq} + \frac{mga}{2Ia^2} \sin \theta_{eq} - 1 = 0$$

### ✎ Exercice IV.4: Pression magnétique

On considère une bobine longue constituée de spires jointives ( $n$  spires par mètre) de rayon  $R$ .

- Q1.** Pour un petit élément  $\vec{dS}$  de la bobine, déterminer la force exercée par le champ magnétique créé par la bobine sur ce petit élément. En déduire la "pression" magnétique exercée par le champ magnétique et commenter le terme de "pression".
- Q2.** Au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses (Toulouse), on réalise des bobines non destructives (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas détruites après la génération du champ magnétique) pouvant aller jusqu'à 80T. Déterminer la pression magnétique subit par le bobinage. Commenter.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Force de Laplace infinitésimale.
- $\Rightarrow$  Solénoïde infini.

*Eléments de correction (sans justification) :*

$$P_{mag} = \frac{B^2}{\mu_0}$$

### ✎ Exercice IV.5: Interaction entre un aimant et une spire

Un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}_1 = M_1 \vec{u}_z$  est situé en un point  $O_1$ . Une spire circulaire  $S_2$ , de rayon  $R_2$ , parcourue par un courant  $i_2$  constante, a son centre  $O_2$  situé sur l'axe  $O_1 z$ . La distance  $O_1 O_2$  est égale à  $d$ , l'axe de la spire est suivant  $\vec{e}_z$ .

- Q1.** Déterminer la force de Laplace exercée par le dipôle sur la spire en utilisant la formule du champ magnétique créé par un dipôle magnétique donnée dans le cours.
- Q2.** On considère  $R_2 \ll d$ . Simplifier l'expression précédente.
- Q3.** \*En assimilant la spire à un dipôle magnétique, retrouver l'expression précédente.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Intégration d'une force de Laplace
- $\Rightarrow$  Utilisation du moment dipolaire magnétique.

*Eléments de correction (sans justification) :*

$$\vec{F} = -\frac{3\mu_0 I R^2 M_1 d}{2(R^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z$$

# Chapitre 3: Induction

## I Généralités

### I.1 Observations expérimentales

Expérimentalement, on observe que :

- Un aimant se déplaçant dans une bobine crée une tension aux bornes de la bobine
- Une bobine alimentée se déplaçant dans une autre bobine crée une tension aux bornes de la bobine
- Une bobine alimentée par un courant variable crée dans une bobine l'entourant une tension

Les différentes expériences réalisées montrent la création d'une force électromotrice **induite** à l'intérieur des différents circuits lorsque, du "point de vue" du circuit, le champ magnétique semble changer (par variation temporelle ou déplacement) : c'est le phénomène **d'induction**.

De plus, dans tous les cas considérés, on observe que la fem induite va créer un courant et donc un champ magnétique **qui s'oppose à la cause qui lui a donné naissance** (c'est-à-dire ici à la variation du champ  $\vec{B}$ <sup>1</sup>). On parle de **loi de modération**.

### I.2 Lois générales

#### ♥ Propriété I.1: Loi de Lenz

Un phénomène d'induction suit un **loi de modération**, c'est-à-dire que l'effet produit tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance

*Cette loi permet de prévoir qualitative le signe ou la monotonie de certaines grandeurs (tension, intensité, champ magnétique...).*

#### ♥ Théorème I.1: Loi de Faraday

Soit un circuit conducteur  $\Gamma$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Si le flux du champ magnétique à travers le circuit, noté  $\phi$ , varie, alors le circuit est le siège d'une force électromotrice induite  $e$  telle que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.1)$$

La fem  $e$  est **orientée dans le circuit en cohérence avec la surface de calcul du flux  $\phi$  (règle du tire-bouchon)**.

La convention d'orientation est cruciale pour ne pas faire des erreurs dans la mise en équation.

1. Cette formulation sera précisée ensuite.

Le phénomène d'induction nécessite donc un flux variable. On peut le faire de deux manières<sup>2</sup> :

- Le champ magnétique est lui-même variable et le circuit est fixe (**induction de Neumann**).
- Le circuit se déplace ou se déforme dans un champ magnétique constant (**induction de Lorentz**).

## II Champs variables et circuits fixes

### II.1 Auto-induction

**Position du problème :** Un circuit électrique parcouru par un courant électrique engendre un champ magnétique  $\vec{B}_{\text{propre}}$  et donc a priori *un flux magnétique non nul à travers le circuit lui-même* (on parle de **flux propre**  $\phi_{\text{propre}}$ ).

#### ♥ Définition II.1: Auto-induction

Le phénomène d'induction causé sur un circuit  $\Gamma$  par son flux propre, c'est-à-dire par lui-même est appelé **auto-induction**.

Le phénomène d'induction nécessite bien entendu que l'intensité qui circule dans le circuit soit variable.

#### ♥ Théorème II.1: Auto-inductance

Soit un conducteur parcouru par une intensité  $I$ , le flux propre  $\phi_{\text{propre}}$ <sup>a</sup> peut s'écrire :

$$\phi_{\text{propre}} = LI \quad (3.2)$$

avec  $L$  l'**auto-inductance** du circuit<sup>b</sup>. Elle ne dépend que de la géométrie du conducteur<sup>c</sup>.

Le phénomène d'auto-induction peut donc être modélisée par une inductance et la relation intensité tension **en convention récepteur** est :

$$u = L \frac{dI}{dt} \quad (3.3)$$

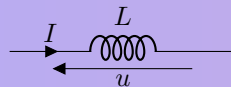
a. flux à travers le conducteur du champ magnétique créé par le conducteur lui-même

b. On oriente la surface de calcul du flux de sorte que  $L > 0$

c. Et du milieu dans lequel se trouve le circuit (cf. 2ème année)

Si l'on définit  $e$  la fem induite en cohérence avec l'orientation de la surface de calcul du flux pour appliquer la loi de Faraday, alors (cf. cas de la bobine longue) :

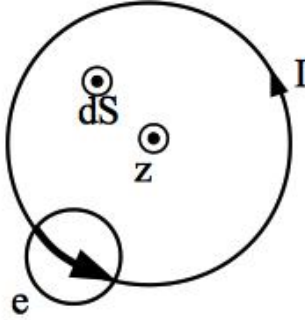
$$u = -e$$



2. Non exhaustif.

## ♥ Démonstration

Le cas général est admis. La démonstration de la propriété précédente n'est à connaître que pour le cas d'une bobine longue.



Considérons une bobine de longueur  $D$  contenant  $N$  spires jointives circulaires de section  $S$  parcourues par un courant  $i(t)$ . Pour rappel, le champ magnétique créé par la bobine longue ( $D \gg \sqrt{S}$ ) s'écrit :

$$\vec{B}_{propre} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{D} i(t) \vec{e}_z \quad (3.4)$$

avec  $\vec{e}_z$  l'axe de la bobine orienté en cohérence avec le sens de circulation de l'intensité  $i(t)$ .

Nous allons :

1. déterminer le flux propre de la bobine et montrer que  $\phi_{propre} = Li(t)$ . Cela permettra de déterminer l'expression de l'auto-inductance d'une bobine longue.
2. déterminer la fem auto-induite pour retrouver le modèle d'une bobine  $u = L \frac{di}{dt}$ .

1. Le champ magnétique est suivant  $\vec{e}_z$  et son flux se fait donc à travers chacune des  $N$  spires. On a donc :  $\phi_{bobine} = N\phi_{spire}$ .

Pour une spire, on oriente sa surface en cohérence avec  $i(t)$  soit  $d^2\vec{S} = d^2S \vec{e}_z = r dr d\theta \vec{e}_z$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{spire} &= \iint_{spire} \mu_0 \frac{N}{D} i(t) \vec{e}_z \cdot d^2\vec{S} \vec{e}_z \\ &= \mu_0 \frac{N}{D} i(t) \iint_{spire} d^2S \\ &= \mu_0 \frac{N}{D} i(t) S \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} \phi_{propre} &= \mu_0 \frac{N^2}{D} i(t) S \\ L &= \mu_0 \frac{N^2}{D} S \end{cases} \quad (3.5)$$

2. Pour déterminer la fem induite, on applique la loi de Faraday. Le flux a déjà été calculé et  $e$  doit être orienté en cohérence avec le vecteur surface soit dans la même direction que  $i$  :

$$e = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Si l'on paramètre la bobine en convention récepteur, on doit définir la tension à ses bornes :

$$u = -e = L \frac{di}{dt} \quad (3.6)$$

On retrouve bien l'équation d'une bobine d'auto-inductance  $L$ .

Cette démonstration montre aussi la méthode de calcul d'une auto-inductance pour un circuit donné : On calcul le flux du champ magnétique à travers le circuit et on identifie à  $\phi_{propre} = LI$ .

## II.2 Induction mutuelle

**Position du problème :** Considérons deux circuits parcourus par des intensités  $I_1$  et  $I_2$ . Chaque circuit crée un champ magnétique et donc un flux magnétique sur son propre circuit  $\phi_{propre}$  et un champ magnétique et donc un flux magnétique au niveau de l'autre circuit (on parle de **flux mutuels**  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $\phi_{2 \rightarrow 1}$ ).

### ♥ Définition II.2: Induction mutuelle

Soit deux circuits  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  parcourus respectivement par des intensités  $I_1$  et  $I_2$  variables, alors il se produit, en plus de l'auto-induction, un phénomène d'induction supplémentaire dans chaque circuit appelé **induction mutuelle**.

### ♥ Théorème II.2: Coefficient d'induction mutuelle

Soit deux circuits  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  parcourus respectivement par des intensités  $I_1$  et  $I_2$ , alors le flux du champ magnétique se décompose, pour chaque circuit en deux termes, le flux propre et le **flux mutuel** de  $\Gamma_1$  sur  $\Gamma_2$  (reciproquement de  $\Gamma_2$  sur  $\Gamma_1$ ) :

$$\begin{cases} \phi_{\vec{B} \rightarrow \Gamma_1} &= \phi_{propre,1} + \phi_{mutuel,2 \rightarrow 1} \\ \phi_{\vec{B} \rightarrow \Gamma_2} &= \phi_{propre,2} + \phi_{mutuel,1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ces flux mutuels sont proportionnels aux intensités circulant dans l'autre circuit :

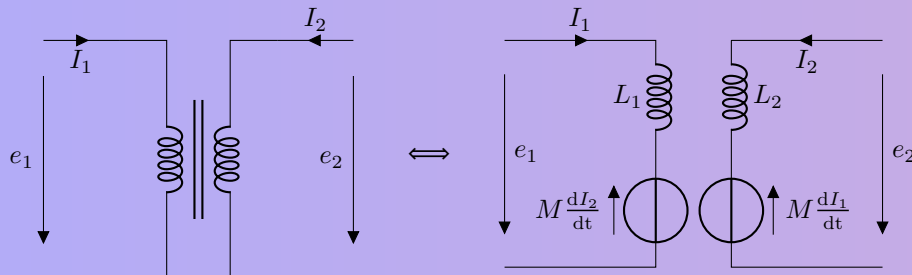
$$\begin{cases} \phi_{mutuel,2 \rightarrow 1} &= M_{2 \rightarrow 1} I_2 \\ \phi_{mutuel,1 \rightarrow 2} &= M_{1 \rightarrow 2} I_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $M = M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$  appelé **coefficient d'induction mutuel** et dépend de la géométrie des deux circuits ainsi que de leurs positions relatives. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>. Suivant l'orientation des intensités, on peut avoir  $M = M_{1 \rightarrow 2} = -M_{2 \rightarrow 1}$ .

Remarque : Il va donc naître une fem supplémentaire <sup>a</sup> dans chaque circuit :

$$\begin{cases} e_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases} \quad (3.9)$$



<sup>a</sup>. Orientée en respectant la loi de Faraday.

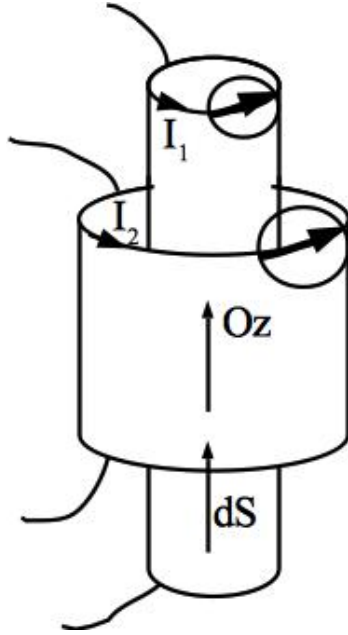


## ♥ Démonstration

Le cas général est admis. La démonstration à connaître est le cas de deux bobines longues coaxiales.

On va montrer :

- La proportionnalité entre les flux mutuels et les intensités.
- L'égalité des coefficients d'induction mutuelle.
- Le modèle électrique des deux bobines en influence.



Considérons deux bobines longues de même axe. On suppose que l'une est imbriquée dans l'autre, de sorte que l'approximation du champ créé par une bobine infinie reste valable. On note  $I_i, D_i, S_i$  et  $N_i$  les intensités, longueur, section et nombre de spire de la bobine  $i$ .

On pose  $D_1 > D_2$  et  $S_2 > S_1$ <sup>a</sup>. On suppose que les intensités "tournent" dans le même sens en progressant en cohérence avec l'axe orienté  $Oz$  des bobines.

Le champ magnétique total est la superposition des deux champs magnétiques créés par chaque solénoïde :

- $\vec{B}_1$  tel que  $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{D_1} I_1 \vec{e}_z$  à l'intérieur du solénoïde 1 et nulle à l'extérieur y compris à gauche et à droite du solénoïde (Admis).
- $\vec{B}_2$  tel que  $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{D_2} I_2 \vec{e}_z$  à l'intérieur du solénoïde 2 et nulle à l'extérieur y compris à gauche et à droite du solénoïde (Admis).

a. S'entraîner avec d'autres configurations.

**Détermination du coefficient d'induction mutuel  $M_{1 \rightarrow 2}$  :** Le flux de  $\vec{B}$  à travers la bobine 2 est donc :

$$\phi = \underbrace{\phi(\vec{B}_2 \rightarrow 2)}_{\phi_{\text{propre},2}} + \underbrace{\phi(\vec{B}_1 \rightarrow 2)}_{\phi_{1 \rightarrow 2}}$$

Le flux propre correspond à l'auto-induction et a été étudié précédemment. On ne s'intéresse ici qu'au second membre : le flux mutuel de 2 sur 1.

Considérons une spire de la bobine 2, le flux de  $\vec{B}_1$  est :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{B}_1 \rightarrow \text{spire}_2) &= \iint_{\text{spire}_2} \vec{B}_1 \cdot d^2\vec{S} \\ &= \iint_{M \in S_1} \vec{B}_1 \cdot d^2\vec{S} + \iint_{M \in S_2 \text{ et } M \notin S_1} \underbrace{\vec{B}_1 \cdot d^2\vec{S}}_0 \end{aligned}$$

On se restreint à l'intégrale sur la surface  $S_1$  car  $S_1 < S_2$  et le champ est nul à l'extérieur de la bobine :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{B}_1 \rightarrow \text{spire}_2) &= \iint_{M \in S_1} \mu_0 \frac{N_1}{D_1} I_1 \vec{e}_z \cdot d^2\vec{S} \vec{e}_z \\ &= \mu_0 \frac{N_1 S_1}{D_1} I_1 \end{aligned}$$

Comme  $D_2 < D_1$ , les  $N_2$  spires sont plongées dans  $\vec{B}_1$ , donc :

$$\phi_{\vec{B}_1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 S_1 N_2}{D_1} I_1 \quad (3.10)$$

On a donc : <sup>b</sup>

$$M_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 S_1 N_2}{D_1} \quad (3.11)$$

**Détermination du coefficient d'induction mutuel  $M_{2 \rightarrow 1}$  :** Le calcul est le même sauf :

- on intègre sur toute la surface de la spire de la bobine 1 puisque  $S_1 < S_2$  : le flux a donc la même expression en remplaçant  $\frac{N_1 I_1}{D_1}$  par  $\frac{N_2 I_2}{D_2}$ .
- on se limite à une longueur  $D_2$  de la bobine 2 car  $D_2 < D_1$  et le champ est nul avant et après la bobine 1 : le nombre de spire ayant un flux non nul n'est donc plus  $N_2$  mais  $D_2 \frac{N_1}{D_1}$

Il vient :

$$\begin{cases} \phi_{B_2 \rightarrow 1} &= \mu_0 \frac{N_2 S_2 N_1}{D_2} I_2 \\ M_{2 \rightarrow 1} &= \mu_0 \frac{N_2 S_2 N_1}{D_2} = M_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (3.12)$$

**Modèles électriques :** En combinant les flux mutuels et les flux propres, il vient, avec  $e_1$  et  $e_2$  orientés en cohérence avec  $d^2 \vec{S}_1$  et  $d^2 \vec{S}_2$  (on pose  $M = M_{2 \rightarrow 1} = M_{1 \rightarrow 2}$ ) :

$$\begin{cases} e_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases} \quad (3.13)$$

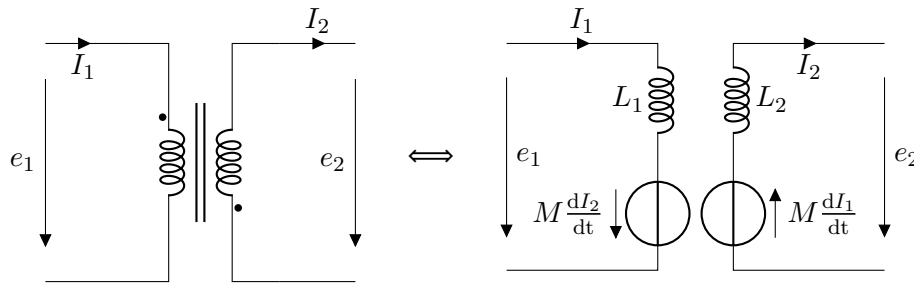
soit le modèle proposé.

b. A nouveau cet exercice montre comment trouver le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines.

**Si l'on inverse l'une des deux intensités** (par exemple  $I_2$  :) alors le flux mutuel  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  change de signe (le champ magnétique est inversé) si l'on garde la même orientation pour la surface (et donc pour  $e_1$ ), il vient que  $M_{2 \rightarrow 1} = -M_{1 \rightarrow 2}$  soit :

$$\begin{cases} e_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases} \quad (3.14)$$

Le schéma électrique devient alors :



Pour faire la différence entre les deux cas, on ajoute un point sur chaque bornes où l'intensité doit être prise entrante comme sur la figure précédente (gauche).

### ♥ Propriété II.1: Influence totale et coefficient d'induction mutuelle (Admis)

Quand deux dipôles sont en influence mutuelle, on peut montrer que :

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (3.15)$$

Si  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , alors les deux dipôles sont dits **en influence totale**. Alors le flux magnétique sortant du dipôle 1 entre complètement dans le dipôle 2 (et réciproquement). Cela signifie qu'il existe un tube de champ entre les deux dipôles.

## II.3 Etude énergétique

### ♥ Propriété II.2: Densité d'énergie magnétique (Admis)

Soit un volume  $d^3\tau(M)$  autour d'un point  $M$  où règne un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . On associe alors au champ magnétique une énergie, dite énergie magnétique dont l'expression est :  $d^3E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \left\| \vec{B}(M) \right\|^2 d^3\tau$ . On définit la densité d'énergie magnétique <sup>a</sup> :

$$\epsilon_{mag} = \frac{1}{2\mu} \left\| \vec{B}(M) \right\|^2 \quad (3.16)$$

<sup>a</sup>. Energie par unité de volume

### ♥ Propriété II.3: Energie stockée par auto-induction

Soit un dipôle  $D$  de coefficient d'auto-induction  $L$ , alors lorsqu'il est parcouru par un courant  $I$ , il stocke une énergie sous forme magnétique :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3.17)$$

### ♥ Démonstration

Le caractère magnétique de l'énergie stockée est admis. On rappelle ici la démonstration permettant de mettre la puissance reçue par le dipôle électrique sous la forme d'une dérivée d'une énergie. La puissance reçue par le dipôle est :

$$P_r = u(t)I(t) = LI(t)\frac{dI}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) (t)$$

On retrouve bien que la puissance reçue peut se mettre sous la forme de la dérivée d'une grandeur qu'on définit <sup>a</sup> comme étant l'énergie stockée.

<sup>a</sup>. A une constante près.

### ♥ Propriété II.4: Energie stockée par induction mutuelle

Soit deux dipôle  $D_1$  et  $D_2$  en induction mutuelle de coefficient d'induction, alors lorsqu'il est parcouru par des courants respectifs  $I_1$  et  $I_2$ , le système  $\{D_1 + D_2\}$  stocke, *en plus de l'énergie stockée par auto-induction*; une énergie sous forme magnétique :

$$E_{mag,mut} = MI_1I_2 \quad (3.18)$$

soit une énergie totale stockée :

$$E_{mag} = \frac{1}{2}LI_1^2 + \frac{1}{2}LI_2^2 + MI_1I_2 \quad (3.19)$$

On remarque ici l'intérêt de l'influence totale : en maximisant  $M$ , on maximise l'énergie stockée.

### ♥ Démonstration

Le caractère magnétique de l'énergie stockée est admis. La puissance reçue par l'ensemble des deux dipôles est :

$$\begin{aligned} P_r &= u_2(t)I_2(t) + u_1(t)I_1(t) \\ &= I_1(t) \left( L \frac{dI_1}{dt}(t) + M \frac{dI_2}{dt}(t) \right) + I_2(t) \left( L \frac{dI_2}{dt}(t) + M \frac{dI_1}{dt}(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}LI_1^2 + \frac{1}{2}LI_2^2 + MI_1I_2 \right)(t) \end{aligned}$$

On retrouve bien que la puissance reçue peut se mettre sous la forme de la dérivée d'une grandeur qu'on définit <sup>a</sup> comme étant l'énergie stockée.

<sup>a</sup>. A une constant près.



Exemples d'applications

### ♥ Définition II.3: Etude d'un transformateur

Le transformateur utilise l'induction mutuelle pour transférer, sans contact, de la puissance d'une bobine 1 (appelée **primaire**) vers une bobine 2 (appelée **secondaire**). Le symbole d'un transformateur réel est donné Figure 3.1<sup>a</sup>.

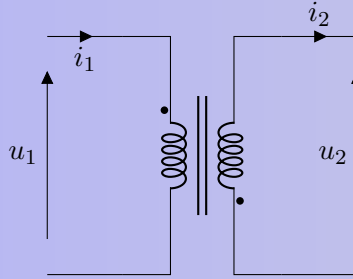


FIGURE 3.1 – Schéma d'un transformateur réel.

Il permet de modifier les valeurs de tension et d'intensité entre le secondaire et le primaire. On définit :

- le rapport de transformation en tension :

$$m = \frac{u_2}{u_1} \quad (3.20)$$

- le rapport de transformation en courant :

$$m_I = \frac{i_2}{i_1} \quad (3.21)$$

- le rendement en puissance :

$$\eta = \frac{P_{fournie/secondeire}}{P_{recue/primaire}} \quad (3.22)$$

Un transformateur idéal est un transformateur dont le rendement en puissance est égale 1 : il n'y a aucune perte. On le représente de manière différente pour signaler qu'il est idéal (Figure 3.2)

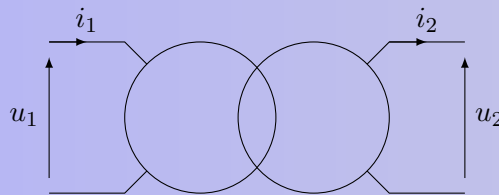


FIGURE 3.2 – Schéma d'un transformateur idéal.

a. Attention, le sens des intensités ont été modifiées par rapport à l'étude précédente.

On distingue :

- les transformateurs élévateur de tension  $m > 1$
- les transformateurs abaisseur de tension  $m < 1$
- les transformateurs d'isolement  $m = 1$  (leur seul rôle de supprimer tout contact électrique entre le primaire et le secondaire.)

Le transformateur et ses caractéristiques seront étudiées dans les exercices méthodes (IV.2 p.53)

### III Circuits mobiles dans un champ magnétique constant.

L'étude des circuits mobiles combine deux éléments : l'induction (au niveau des circuits électriques) et les actions de Laplace (au niveau des systèmes mécaniques). Le champ magnétique, jouant un rôle dans les deux phénomènes, sert de vecteur à la **transduction électro-mécanique** : c'est-à-dire la transformation d'une énergie sous une autre forme : du mécanique à l'électrique (**génératrice**) ou de l'électrique vers le mécanique (**moteur**).

#### ♥ Propriété III.1: Conversion de puissance électromécanique

Considérons un circuit mobile dans un champ magnétique extérieur **constant**. On peut établir une succession de causes et d'effets :

- Le circuit étant mobile, le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers le circuit varier et une fem  $e$  va naître dans le circuit.
- Si le circuit est fermé, alors une intensité  $i$  va y circuler : le mobile sera donc soumis à une force de Laplace  $F_L$  qui va pouvoir modifier ou maintenir la vitesse  $v$  du mobile.

On peut montrer que, **sous l'hypothèse d'un champ magnétique constant**, alors on l'égalité des puissances ( $i$  est en convention générateur avec  $e$ ) :

$$\begin{cases} P_{recue, fem\ e} &= P_{fourni, Laplace} \\ ei &= F_L v \end{cases} \quad (3.23)$$

C'est-à-dire que la puissance fournie par le circuit électrique à la fem d'induction  $e$  est égale à la puissance reçue par le mobile de l'action de Laplace. C'est la base du principe de la transduction électro-mécanique.

On distinguera :

- Les **moteurs électriques** :  $P_{fourni, Laplace} > 0$  et  $P_{fournie, fem\ e} = -P_{recue, fem\ e} < 0$  : le circuit fourni de la puissance électrique <sup>a</sup> qui est convertie par {induction + force de Laplace} en puissance mécanique pour maintenir le mouvement du mobile.
- Les **génératrices électriques** :  $P_{fourni, Laplace} < 0$  et  $P_{fournie, fem\ e} = -P_{recue, fem\ e} > 0$  : le mouvement <sup>b</sup> du mobile occasionne une perte de puissance mécanique par l'action de Laplace qui est transformée (induction) en puissance électrique qui sera fournie au reste du circuit.

<sup>a</sup>. par l'intermédiaire d'une source branchée sur le moteur

<sup>b</sup>. maintenu par un système externe

Des exemples d'étude de différents transducteur électromécanique seront traitées à la section IV.1.

On distingue différents types de transducteurs électromécaniques :

- les machines linéaires (la pièce mobile est en translation par rapport au bati) : moins fréquemment utilisés du fait de la taille d'un tel système, ils permettent néanmoins de comprendre le processus de transduction sur un cas simple : les rails de Laplace.
- les machines synchrones : le rotor est un aimant permanent plongé dans un champ magnétique tournant créé par un circuit situé sur le stator.
- les machines asynchrones : le rotor est un circuit électrique plongé dans un champ magnétique tournant créé par un autre circuit situé sur le stator.
- les machines à courant continu : elles exploitent des géométries particulièrement permettant d'assurer un mouvement continu malgré un champ magnétique permanent et constant et des courants constants.

## IV S'entraîner

### IV.1 Méthodes

Pour rappel, les démonstrations du cours donnent aussi les méthodes pour déterminer un coefficient d'auto-induction ou d'induction mutuelle en calculant un flux propre ou un flux mutuel.



Corrigé des exercices méthodes

#### ♥ Méthode IV.1: Loi de Lenz

- Q1.** Justifier qualitativement que l'auto-induction suit bien la loi de Lenz.
- Q2.** On considère les deux bobines en influence mutuelle étudiées au théorème II.2. Montrer qualitativement (sans utiliser les équations et en utilisant la loi de Lenz) que si  $I_1$  augmente, alors  $I_2 < 0$ .
- Q3.** A partir de l'égalité des puissances dans un moteur électrique ou une génératrice électrique, justifier qu'on suit bien une loi de modulation.

#### ♥ Méthode IV.2: Etude d'un transformateur

On considère un transformateur idéal. Les notations reprennent celle de la définition II.3 p.51.

- Q1.** Par un bilan de puissance, montrer que :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{m} \quad (3.24)$$

On considère le transformateur comme formé de deux bobines :

- une bobine 1 de  $N_1$  spires correspondant au primaire
- une bobine 2 de  $N_2$  spires correspondant au secondaire

Les hypothèses permettant d'obtenir un transformateur sont les suivantes :

- les deux bobines sont en influence totale. Ainsi le flux traversant **chaque spire** de la bobine 1 est égale au flux traversant chaque spire de la bobine 2. On note  $\Phi_c$  ce flux (appelé **flux commun**).<sup>a</sup>
- on néglige les pertes par effet Joule dans les bobines et dans le circuit magnétique.
- on néglige les effets d'auto-induction dans les bobines.

- Q2.** Montrer, sous ces hypothèses que :

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.25)$$

<sup>a</sup>. Cela nécessite en général la présence d'un circuit magnétique de perméabilité relative très grande.



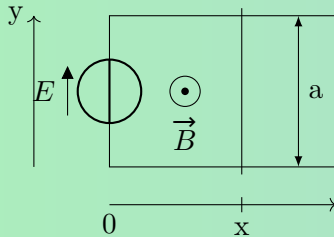
### ♥ A retenir: Cas du transformateur idéal

On retiendra que pour un transformateur idéal (Bien faire attention à l'orientation des grandeurs pour le rapport en intensité.) :

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.26)$$

### ♥ Méthode IV.3: Etude du rail de Laplace

On présente ici la version plus simple de l'étude du rail de Laplace, elle peut-être augmentée de différents éléments supplémentaire (auto-induction, ressorts...).



On considère à nouveau des rails parallèles très longs et conducteurs distants d'une distance  $a$ . A leur extrémité gauche ils sont reliés entre eux par une source idéale de tension de fem  $E$  constante.

Une tige conductrice de masse  $m$  est posée sur les rails de sorte qu'il se forme un circuit électrique fermé. Sa position  $x$  est repérée sur un axe donnée sur le schéma.

L'ensemble est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  uniforme (et  $B_0 > 0$ ), constant et perpendiculaire au plan du circuit ainsi formé.

On fait les hypothèses suivantes :

- La barre reste perpendiculaire aux deux rails (elle a donc un mouvement de translation)
- Elle glisse sans frottements sur les rails.
- Les rails ET la barre sont horizontales.

A l'instant initial, la barre est immobile à  $x = x_0$ .

- Q1.** Justifier qualitativement la naissance d'une fem induite et prévoir son signe initiale si  $E > 0$ .
- Q2.** Mettre en équation le système en établissant deux équations couplées, l'une sur l'intensité  $i$  et l'autre et la vitesse  $v$  (telle que  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ ) de la barre puis en déduire les deux équations différentielles non couplées qui régissent les évolutions de  $i$  et  $v$ .
- Q3.** Déterminer la vitesse limite de la barre. Commenter ce que vaut alors l'intensité  $i$ .
- Q4.** Retrouver l'égalité des puissances énoncées en cours. A-t-on ici un moteur ou une génératrice ?
- Q5.** La barre étant à sa vitesse limite, on coupe la fem (soit  $E = 0$ ), comment évolue la vitesse ? Proposer une application. Préciser ses avantages et inconvénients.

### ♥ A retenir: Etude d'un circuit mobile/déformable

On retiendra la méthode d'étude d'un circuit mobile ou déformable qui combine :

- un théorème mécanique (ici TRD, mais cela peut aussi être un TMC ou un théorème énergétique comme dans l'exercice suivant).
- une loi des mailles sur le circuit en utilisant la loi de Faraday.

**Il est important de bien penser à l'orientation de la fem  $e$  qui DOIT être en cohérence avec le vecteur surface pour le calcul du flux magnétique.**

## ♥ Méthode IV.4: Spire en rotation

*Cette étude permet de comprendre comment peut se faire l'étude d'un moteur (en rotation). A nouveau, il s'agit ici d'un modèle de base (on peut faire tourner le champ, tenir compte de l'auto-induction...)*

Considérons une spire rectangulaire (rotor) rigide de côtés  $a$  et  $b$  en liaison pivot parfaite avec le bati (stator) autour d'un axe  $Oz$ . La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme et constant dirigé dans la direction  $Ox$   $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .

Dans tout le problème, on néglige l'auto-induction.

- Q1.** Expliquer pourquoi, si l'on veut maintenir la spire en rotation uniforme, elle doit être entraînée par un moteur.
- Q2.** La spire possède une résistance  $r$  et tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  constante. Déterminer la puissance moyenne que doit fournir le moteur. Le système spire est-il alors un moteur ou une génératrice ?
- Q3.** On ouvre très légèrement la spire (de sorte que le flux de  $B$  reste inchangé) et on branche sur la spire une résistance  $R \gg r$  au moyen de fil gainée protégée du champ magnétique. Déterminer la puissance moyenne fournie à la résistance  $R$ .
- Q4.** Comment modifier la loi des mailles si l'on tient compte de l'auto-induction d'auto-inductance  $L$  ? On ne demande pas toute l'étude précédente.

## ♥ A retenir: Cas d'un circuit en rotation

Dans le cas des circuits en rotation, on retiendra :

- l'utilisation du moment de l'action de Laplace avec le moment magnétique.  
**Comme pour l'orientation de  $e$ , il faut bien faire attention à la cohérence entre l'orientation de  $i$  et du vecteur surface pour le moment magnétique.**
- à cause de l'induction, la force de Laplace ne dérive pas d'une énergie potentielle. On ne peut donc pas utiliser  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ .

## ♥ Méthode IV.5: Etude d'une machine à courant continu

*Nous allons étudier une machine à courant continu dans le cas de la machine à entrefer plan. Plusieurs relations utiles seront généralisées en bilan. On étudie ici le système en fonctionnement moteur.*

Le moteur à entrefer plan est basé sur le principe de faire tourner un rotor grâce à des courants radiaux et un champ magnétique axial.

Comme montré sur la Figure 3.3, deux ensemble d'aimants dont les pôles opposés se font face créent entre eux (dans l'**entrefer**) un champ magnétique suivant l'axe du moteur.

Le rotor, disque conducteur est placé dans l'entrefer et des balais métalliques sont en contact avec lui au niveau de l'axe de rotation et de sa périphérie. Ils permettent de relier le rotor à une source servant à alimenter le moteur.

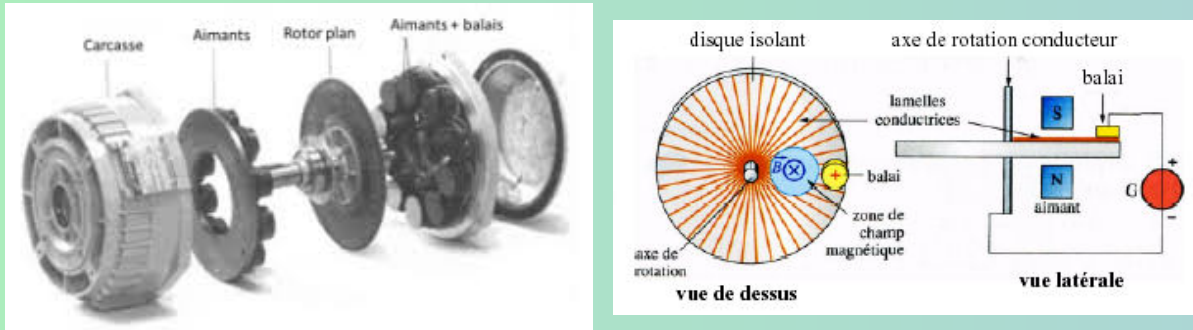


FIGURE 3.3 – Moteur à entrefer plan

**Etude qualitative**

- Q1.** On relie le rotor à une source idéale de tension  $E$ . Montrer que le rotor va se mettre à tourner et préciser son sens suivant le sens du branchement de la source.
- Q2.** Expliquer comment s'effectue le transfert de puissance (HP).
- Q3.** Ce moteur pourrait-il fonctionner en génératrice ?

**Etude quantitative.**

Pour étudier le système précédent, on paramètre un système de coordonnées cylindriques dont l'axe est l'axe de rotation du rotor. On propose un modèle simplifié :

- Le disque est de rayon  $R$ .
  - on assimile les lignes de courant dans le disque à une seule ligne de courant suivant la direction  $\vec{e}_r$ , parcouru par un courant  $i$ . Le circuit complet est alors de résistance  $R_0$  et son coefficient d'auto-induction est  $L_0$ .
  - Le champ magnétique est uniforme suivant l'axe  $Oz$  :  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ .
  - Le rotor possède un moment d'inertie  $J$  sur l'axe.
  - Une charge est portée par l'arbre du moteur. Sous son influence, l'arbre exerce une action (liaison pivot) de moment  $-\Gamma_u$ .
  - On néglige les frottements de l'air et des balais.
- Q4.** Comment orienter  $i$  pour que le moment magnétique  $\Gamma_L$  des actions de Laplace sur la ligne de courant qui parcourt le disque projeté sur l'axe de rotation soit positif si  $i > 0$ . Exprimer alors ce moment et le mettre sous la forme  $\Gamma_L = Ki$ .
- Q5.** La description qualitative du phénomène d'induction est imprécise, on ne peut donc pas utiliser la loi de Faraday ici. En utiliser le bilan de puissance du cours, montrer que  $e = K\omega$  avec  $\omega$  la vitesse angulaire du rotor. On réfléchira soigneusement à l'orientation de  $e$ .
- Q6.** En déduire les équations différentielles électriques et mécaniques du moteur.
- Q7.** Déterminer  $\omega$  et  $i$  en régime établi. Que vaut alors la puissance fournie par la source et celle reçue par la charge ? En déduire le rendement du moteur.

## ♥ A retenir: Modélisation électrique d'une machine à courant continu.

On peut généraliser (Admis) plusieurs résultats démontrés précédemment pour les machines à courant continu possédant d'autres géométries<sup>a</sup>.

Dans une machine à courant continu, on distingue un **aimant permanent situé sur le stator** qui crée un champ magnétique constant dans une zone appelée *entrefer*. Dans cet entrefer, un rotor conducteur peut tourner tout en étant relié à un circuit électrique extérieur pouvant être une source (moteur) ou un récepteur (génératrice).

Soit  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du rotor,  $i$  l'intensité qui traverse le circuit du rotor,  $e$  la fem induite aux bornes du moteur **en convention récepteur** et  $\Gamma_L$  le moment exercé pour les actions de Laplace sur le rotor. On admet que :

$$\begin{cases} \Gamma_L &= K i \\ e &= K \omega \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $K$  est une constante dépendant de la géométrie de la machine appelée **coefficient de couple**. On pourra utiliser directement ces relations sur une machine à courant continu quelque soit sa géométrie (qui est d'ailleurs souvent non spécifiée).

a. Machine à entrefer cylindrique par exemple.

A cette modélisation, on peut ajouter les effets résistifs et auto-inductifs en mettant une résistance  $R$  et une inductance  $L$  en série avec  $e$ .

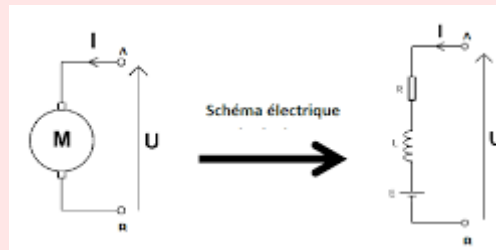


FIGURE 3.4 – Modélisation électrique d'une MCC

Côté mécanique, le TMC sur l'arbre du moteur, en tenant compte des autres actions extérieures permet d'étudier son mouvement.

## IV.2 Applications

### 🔧 Exercice IV.1: Transimpédance

On considère un transformateur parfait de rapport en tension  $m$ . Le primaire est relié à un générateur de Thévenin de f.e.m.  $e_1(t)$  et de résistance de sortie  $R_g$ . La sortie est reliée à une impédance  $\underline{Z}$ . Montrer que circuit est équivalent à celui d'une impédance  $\underline{Z}_{eq}$  branchée directement sur le générateur de Thévenin dont on déterminera l'expression. On parle de transimpédance.

Eléments de correction (sans justification) :  $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}/m^2$

### ✎ Exercice IV.2: Deux bobines en induction mutuelle

On considère deux bobines identiques d'auto-inductance  $L = L_1 = L_2$  et de résistance  $R = R_1 = R_2$ . On note  $M$  le coefficient d'induction mutuelle entre les deux,  $u_e$  la tension aux bornes de la première bobine et  $u_s$  la tension aux bornes de la seconde.

- Q1.** Etablir la fonction de transfert  $\underline{H}_0 = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$ . Si l'on suppose l'ALI idéal, que devient le rapport de transformation en tension ?
- Q2.** On branche sur la seconde bobine une impédance  $\underline{Z}$ . exprimer en déduire  $\underline{u}_s$  sous la forme  $\underline{u}_s = \underline{H}_0 \underline{u}_e - \underline{Z}_S \underline{i}_2$  avec  $\underline{i}_2$  l'intensité circulant dans la deuxième bobine en convention générateur et  $\underline{Z}_S$  qu'on exprimera en fonction de  $R, L, M$ . Comment appelle-t-on  $\underline{Z}_S$  ?

*Points utiles pour cet exercice*

- $\implies$  Modélisation de l'auto-induction
- $\implies$  Modélisation de l'induction mutuelle
- $\implies$  Etude des filtres
- $\implies$  Modélisation de Thévenin

*Eléments de correction (sans justification) :*

- Q1.**  $\underline{H}_0 = \frac{jM\omega}{R+jL\omega} \underline{u}_e$ . Cas idéal ( $R = 0$ ) :  $m = \frac{M}{L}$ .
- Q2.**  $\underline{u}_S = \frac{jM\omega}{R+jL\omega} \underline{u}_e - \left[ \frac{(jM\omega)^2 + (R+jL\omega)^2}{R+jL\omega} \right] \underline{i}_2$ .

### ✎ Exercice IV.3: Machines interconnectées

On considère deux machines à courant continu de caractéristiques identiques : même résistance  $R$ , d'auto-inductance négligeable, même coefficient de couple  $K$  et même moment d'inertie  $J$ .

Les arbres des deux machines sont reliés entre eux. On néglige tout frottements. La machine 1 est reliée à une source de fem constant  $E$  et la machine 2 est reliée à une résistance  $R_u$ .

- Q1.** Expliquer qualitativement le fonctionnement moteur ou générateur de chaque machine.
- Q2.** Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse angulaire  $\omega$  de l'arbre commun aux deux machines.
- Q3.** A  $t = 0$ , l'arbre est immobile, en déduire  $\omega(t)$  puis  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  pour  $t > 0$ .
- Q4.** Déterminer le rendement en puissance  $\eta = \frac{P_{recue, R_u}}{P_{fournie, R}}$  après un temps long.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\implies$  Modélisation des machines à courant continu.
- $\implies$  Lois des mailles
- $\implies$  Solide en rotation

*Eléments de correction (sans justification) :*

- Q1.** Machine 1 : moteur. Machine 2 : Génératrice.
- Q2.** Equation différentielle :

$$J\dot{\omega}K^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R + R_u} \right) \omega = \frac{KE}{R}$$

$$\text{On posera } \tau = \frac{JR(R+R_u)}{(2R+R_u)K^2}$$

- Q3.** Par intégration :

$$\omega(t) = \frac{E(R + R_u)}{(2R + R_u)K} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{Q4. } \eta = \frac{R_u}{2R+R_u}$$

### IV.3 Entraînement

#### ✎ Exercice IV.4: Pince ampèremétrique

On considère un tore de section carré de côté  $a$  et de rayon moyen  $R$  sur lequel on a enroulé  $n$  spires jointives, les deux extrémités du fil étant court-circuités. On note Oz l'axe du tore et dans un repère cylindrique, chaque spire est contenue dans un plan. Le circuit est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

**Q1.** Justifier que le champ magnétique a pour forme  $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$ .

On admet que le champ magnétique créé par un tel dispositif est :

- nul à l'extérieur du tore
- $\vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  à l'intérieur du tore.

**Q2.** Déterminer le flux du champ magnétique à travers le tore. En déduire l'inductance propre du tore.

On place sur l'axe Oz un fil infini parcouru par un courant  $i$ . La résistance totale du bobinage est noté  $r$  et et au lieu d'un court-circuit, le fil du tore est fermé sur un voltmètre d'impédance interne  $R_V$ .

Pour rappel, le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par une intensité  $i$  est, dans un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz orienté suivant  $i$  :

$$\vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (3.28)$$

**Q3.** Déterminer le flux mutuel du champ magnétique du fil infini à travers le tore.

**Q4.** Si  $i$  varie, exprimer la force électromotrice d'induction dans le tore en fonction de  $i$  et  $I$  et des autres paramètres du tore. En déduire l'équation différentielle qui relie  $i(t)$  et  $I(t)$ .

**Q5.** Déterminer  $I(t)$  en régime sinusoïdal forcé et en déduire la valeur mesurée par le voltmètre. Préciser l'intérêt d'un tel dispositif et ses limites.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Symétrie des champs.
- $\Rightarrow$  Flux du champ magnétique.
- $\Rightarrow$  Loi de Faraday.
- $\Rightarrow$  Régime sinusoïdal forcé.

#### ✎ Exercice IV.5: Pertes dans un conducteur

*Dans tout le problème, on néglige les phénomènes d'auto-induction.*

Préambule : On considère une spire de rayon  $R$  et de résistance  $R_0$  plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z$  où  $\vec{e}_z$  est l'axe de la spire.

**Q1.** Justifier l'existence d'un courant dans la spire.

**Q2.** Déterminer, en régime forcé, la représentation complexe de l'intensité circulant dans la spire

puis  $i(t)$  grandeur réelle correspondante. En déduire la puissance moyenne perdue par effet Joule.

On remplace la spire par un conducteur cylindrique de rayon  $a$ , de hauteur  $H$  et de conductivité  $\gamma$ .

**Q3.** \*Pourquoi naît-il à nouveau des courants. Comment les appelle-t-on ?

On admet que les courants induits sont à nouveau orthoradiaux et qu'on peut les étudier en assimilant le conducteur à un empilement des spires de rayon  $r$  compris entre 0 et  $a$  et situées entre  $z = 0$  et  $z = H$ . Ces spires, dont le fil serait de section  $dS = drdz$ , possèdent alors une résistance électrique :

$$R(r) = \frac{2\pi r}{\gamma drdz} \quad (3.29)$$

**Q4.** Déduire de l'étude faite en préambule la puissance moyenne dissipée par une spire puis en déduire la puissance moyenne dissipée par le conducteur complet. Commenter la dépendance (générale) de cette puissance en  $\omega$ .

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Flux du champ magnétique.
- $\Rightarrow$  Loi de Faraday.
- $\Rightarrow$  Effet Joule.

#### Exercice IV.6: Double rail de Laplace

On considère deux rails fixes et parallèles (distances  $a$  les séparant) conducteurs de résistance négligeable et de dimensions infinies. On place sur ces rails deux tiges perpendiculairement aux rails de sorte que chacune réalise un contact avec les deux rails. Chaque tige possède alors une résistance  $r$  identique. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique constant et uniforme d'axe  $Oz$  perpendiculaire au circuit rectangulaire formé par les tiges et les rails. A l'instant initiale, les deux tiges sont séparées d'une distance  $L$  et on communique une vitesse  $v_0$  (vers la gauche) à la tige de gauche, la tige de droite étant immobile.

**Q1.** Déterminer qualitativement le mouvement des deux tiges en fonction du temps.

**Q2.** Retrouver ces conclusions par une étude quantitative.

*Points utiles pour cet exercice*

- $\Rightarrow$  Flux du champ magnétique.
- $\Rightarrow$  Action de Laplace.

#### Exercice IV.7: Haut-parleur

Un haut-parleur électrodynamique est un transducteur électro-acoustique. Il est constitué d'une membrane attachée au bati et pouvant vibrer en transmettant ainsi une puissance à l'air environnant, créant une onde acoustique. L'élasticité et les faibles vibrations de la membrane permettent de modéliser la liaison entre celle-ci et le bati par un système rigide (la membrane) reliée au bati par un ressort de raideur  $k$ .



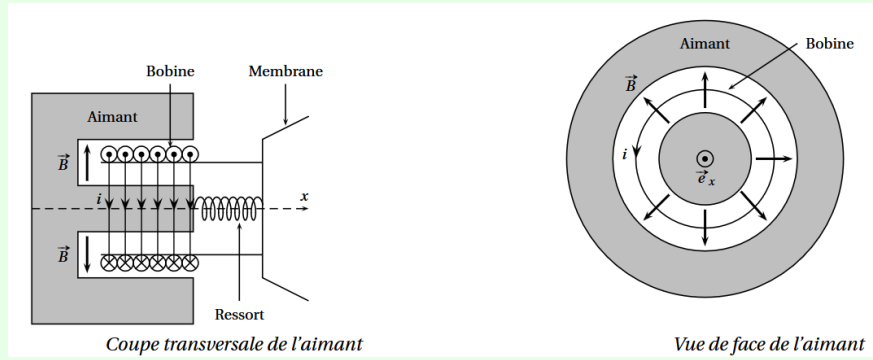


FIGURE 3.5 – Modélisation d'un haut-parleur

Pour faire vibrer la membrane, cette dernière est collée à un bobinage (Figure 3.5) d'axe  $Ox$ . Ce dernier est placé dans l'entrefer d'un aimant et un système de contact non représenté sur la figure permet d'alimenter le bobinage.

#### Dimensionnement et hypothèses :

- On note  $N$  le nombre de spires et  $a$  leur rayon de sorte que la bobine possède une longueur  $l = 2\pi Na$ . On note  $R_e$  la résistance électrique du bobinage et  $L_e$  son auto-inductance.
- On note  $x$  la position de la membrane avec  $x = 0$  lorsque le ressort est à sa longueur à vide.
- On suppose que l'action de l'air sur la membrane peut être assimilée à une force de frottements fluide linéaire :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ .
- On suppose que le champ magnétique créé par l'aimant dans l'entrefer est à symétrie axiale, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire :

$$\vec{B}(M(r, \theta, x)) = B_r(r, x)\vec{e}_r + B_x(r, x)\vec{e}_x \quad (3.30)$$

On admet de plus que dans l'entrefer, la composante  $B_r$  ne dépend pas sensiblement de  $x$ .

- On admet, dans un premier temps, que la variation du flux magnétique à travers le solénoïde lorsque celui-ci se déplace suivant l'axe  $Ox$  peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\phi_{spire}}{dt} = -K\dot{x}$$

où  $K$  dépend de  $\vec{B}$  et de la géométrie du bobinage.

#### Analogie avec le rail de Laplace.

- Q1.** Expliquer pourquoi ce modèle permet de traiter la membrane "comme si" c'était une tige glissant sur des rails de Laplace distants d'une distance  $a_{eq}$ <sup>a</sup>. Que vaudrait alors  $K$ ? Quels éléments doivent être ajoutés? On précisera leurs caractéristiques.
- Q2.** On note  $e(t)$  la tension de la source qui alimente le haut-parleur. En utilisant cette analogie, établir les deux équations différentielles couplées qui régissent l'évolution de  $i$ , l'intensité circulant dans la bobine et de  $x$ . On orientera  $i$  en convention générateur pour la source  $e(t)$ .
- Q3.** On étudie le système en régime sinusoïdal forcé. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{v}{e}$  avec  $v(t) = \dot{x}(t)$ . Commenter physiquement ses comportements haute et basse fréquence.
- Q4.** Déterminer l'impédance d'entrée du haut-parleur et la mettre sous la forme :

$$\underline{Z}(\omega) = R_e + jL_e\omega + \frac{1}{R_m + \frac{1}{jC_m\omega} + jL_m\omega} \quad (3.31)$$

où l'on exprimera en fonction de  $K, k, \lambda$  et  $m$ .



**Expression du flux**

Cette partie est plus délicate et n'est à traiter QUE si la partie précédente a été bien comprise. Nous allons justifier, sous l'hypothèse de champ axial l'expression de  $\frac{d\phi}{dt}$ .

On considère un cylindre d'axe Ox, de section  $S$  situé entre les abscisses  $x_S$  et  $x_S + dx$

**Q5.** Que peut-on dire du flux magnétique à travers ce cylindre ?

On note  $\phi_S(x_S)$  le flux à travers la section de  $S$  située à la cote  $x_S$ .

**Q6.** Exprimer le flux magnétique à travers le cylindre comme la somme de 3 termes :  $\phi_S(x_S)$ ,  $\phi_S(x_S + dx)$  et un terme qu'on exprimera en fonction de  $B_r(r, x_S)$ ,  $a$  et  $dx$ .

**Q7.** En déduire que :

$$\frac{d\phi_S}{dx} = -2\pi a B_r(r, x_S) \quad (3.32)$$

On considère une spire placée à une cote  $x_S$  et se déplaçant pendant un temps  $dt$  d'une distance  $dx = \dot{x}dt$ <sup>b</sup>.

**Q8.** Montrer que pour la spire,  $\frac{d\phi_{spire}}{dt}$  peut se mettre sous la forme  $-K_{spire}\dot{x}$ .

**Q9.** Dans l'hypothèse où  $B_r$  varie peu avec  $x$  dans l'entrefer, en déduire la valeur de  $K$  pour la spire complète en fonction de  $B_r$  et  $l$  la longueur de fil de la bobine. Quelle valeur donner à  $a_{eq}$  pour compléter l'analogie avec le rail de Laplace ?

---

a. Ne pas chercher à exprimer  $a_{eq}$  en fonction des grandeurs du haut-parleur.

b. Sous l'hypothèse de non déformation du bobinage,  $\dot{x}$  est le même pour toutes les spires.