Chapitre 1: Mécanique quantique

Ce chapitre est principalement orienté autour d'activités/exercices analysant les principales expériences qui ont amené au concept de dualité onde-corpuscule. Plusieurs de ces activités utilisent des vidéos accessibles en ligne.

I Etat des lieux en mécanique classiques

✍ Exercice I.1: Ondes et corpuscules en mécanique classique

Q1. En mécanique classique, la matière est composée de corpuscule. Rappeler brièvement les grandeurs physiques qui permettent de décrire un corpuscule. Citer les corpusucules usuels qui composent la matière à l'échelle microscopie.

Q2. En électromagnématisme classique, la lumière est considérée comme une onde.

- **Q2.a.** Quelle expérience menée au 19ème siècle a permis de mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière ?
- **Q2.b.** Quelles grandeurs physiques décrivent une onde ? une onde harmonique ?

♥ A retenir: Onde et corpuscule en physique classique

On retiendra qu'en mécanique classique, les objets physiques sont soit des corpuscules : électrons, protons…, soit des ondes : lumière.

Celà n'empêche pas les ondes et les corpuscules d'interagir. Ainsi, la théorie classique prévoit l'interaction entre la matière et la lumière.

II La dualité onde-corpuscule

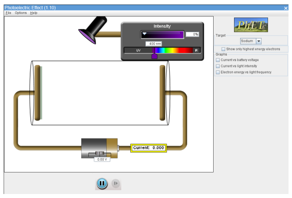
On se propose d'analyser ici quelques expériences qui ont conduit à remettre en cause la description précédente et comment on les décrit aujourd'hui.

II.1 Effet photoélectrique

Utiliser pour l'exercice suivant la simulation réglable suivante [1]

Le montage simulé représente deux plaques métalliques reliées à une pile qui impose une différence de potentiel (réglable grâce au curseur sur la pile). Entre les deux, un vide poussé est maintenu.

1. Elle nécessite l'usage de Javascript, mais à moins que vous ne l'ayez sciemment desactivé, cela devrait fonctionner.



Capture d'écran de la simulation.

Simulation de l'effet photoélectrique.

Une lampe (d'intensité et de longueur d'onde réglable) permet éclairer la plaque de gauche.

Les options sur la gauche permettent d'observer certains graphiques.

✍ Exercice II.1: Observation de l'effet photoélectrique

Pour ces premières questions, veillez à régler l'intensité de la lampe à 0 et à choisir du sodium (composition des plaques).

Q1. Dans quel sens faut-il orienté la tension de la pile pour que des électrons émis par la plaque de gauche soient attirés par la plaque de droite. Choisir une tension de 8V dans ce sens.

Q2. Pourquoi n'observe-t-on pas de courant ? Proposer un profil de potentiel électrique entre les deux plaques expliquant cette impossibilité. On notera W_S la hauteur de la barrière d'énergie empêchant les électrons de se déplacer. On l'appelle **travail d'extraction**.

En laissant une longueur d'onde de $\lambda = 400nm$, éclairer la plaque de gauche avec une lampe d'intensité avec une intensité de 100%.

Q3. Que se passe-t-il ? Quel est le sens du courant ?

Q4. Que se passe-t-il si on inverse la tension de la pile ?

♥ Définition II.1: Effet photoélectrique

L'effet photoélectrique est un phénomène d'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par de la lumière.

En pratique cette émission nécessite une énergie minimale, appelée **travail d'extraction** W_S, pour que l'électron puisse quitter le métal. Ce travail d'extraction dépend de la nature du métal.

Exemple : $W_{S,Sodium} = 2.5eV$.

✍ Exercice II.2: Caractéristiques de l'effet photoélectrique

Q1. Remettre une tension de 8V dans le "bon sens" et descendre l'intensité à 1% (garder une longueur d'onde de 400nm). Observer suffisament longtemps : vous devriez observer quelques électrons qui sont arrachés de la plaque (ça peut prendre quelques minutes).

Q2. Faire les tests à 300nm et à 600nm (à 1% et à 100%). Observe-t-on l'effet photoélectrique pour chaque longueur d'onde ?

Q3. Afficher le graphique du courant en fonction de l'intensité lumineuse. Faire varier l'intensité lumineuse en fixant différentes longueur d'onde. La **présence** d'un courant dépend-elle de l'intensité lumineuse ? L'intensité du courant électrique dépend-elle de l'intensité lumineuse ?

Q4. Afficher le graphique de l'énergie des électrons émis en fonction de la longueur d'onde. Leur énergie dépend-elle de l'intensité lumineuse ? De la longueur d'onde ? De la tension aux bornes de la pile ? Identifier deux cas possibles suivant la longueur d'onde et l'existence d'une "longueur d'onde seuil" (en déterminant sa valeur).

♥ Propriété II.1: Effet photoélectrique et effet de seuil

- Lors de l'effet photoélectrique, l'énergie des électrons libérés **ne depend que de la longueur d'onde de la lumière** et non de son intensité ou de la tension aux bornes de la pile.

  Ce phénomène ne peut s'expliquer avec l'interprétation classique de la lumière comme une onde. En effet, si la lumière était une onde, l'énergie des électrons libérés dépendrait de l'intensité lumineuse et non de la longueur d'onde.
- De plus, on observe un **effet "de seuil"** c'est-à-dire que l'effet photoélectrique nécessite une fréquence **suffisament grande** [a]

  A nouveau, l'effet de seuil ne peut s'expliquer classiquement. Dans une vision ondulatoire, augmenter l'intensité à longueur d'onde fixée suffirait à passer la barrière d'énergie. En effet, l'énergie d'une onde est proportionnelle à son amplitude (intensité lumineuse) et non à sa fréquence.

a. longueur d'onde suffisament petite

C'est à cause de cet effet, qu'Albert Einstein a proposé en 1905 un modèle de la lumière comme étant composée de particules appelées **photons** (modèle corpusculaire).

♥ Définition II.2: Photon

Dans le modèle corpusculaire de la lumière, un photon est une particule de lumière qui transporte une énergie proportionnelle à sa fréquence ν. Ses caractéristiques sont les suivantes :

- Son énergie est donnée par la relation dite de Planck-Einstein :

$$E = h\nu \tag{1.1}$$

- Sa masse est nulle
- Sa quantité de mouvement est [a] (**relation de de Broglie**) :

$$\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u} = \frac{h\nu}{c}\vec{u} = \frac{h}{\lambda}\vec{u} \tag{1.2}$$

où $h = 6.626 \times 10^{-34}$J.s est la constante de Planck et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans la direction et sens de propagation de la lumière.

a. Bien que sans masse, le photon est relativiste car il se déplace à...la vitesse de la lumière. Cela modifie la relation entre énergie et quantité de mouvement.

On définit aussi le vecteur d'onde $\vec{k}$ du photon comme étant $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ d'où :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{1.3}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

✍ Exercice II.3: Interprétation de l'effet photoélectrique

Q1. Dans le modèle corpusculaire, l'électron absorbe un photon. En déduire une inégalité entre la longueur d'onde et le travail d'extraction pour que l'électron soit libéré. En déduire la longueur d'onde seuil pour le sodium. Comparer à la valeur trouvée dans la simulation.

Q2. Si la longueur d'onde est plus faible que la longueur d'onde seuil, que devient l'énergie "supplémentaire" ?

Q3. Citer un exemple d'utilisation de l'effet photoélectrique.

On se retrouve alors face à un paradoxe :

- ⋆ les expériences de diffraction et d'interférence nécessitent un modèle ondulatoire de la lumière.
- ⋆ l'effet photoélectrique nécessite un modèle corpusculaire de la lumière.

On va donc devoir considérer que la lumière est à la fois une onde et un corpuscule. C'est ce qu'on appelle la **dualité onde-corpuscule**.

♥ Définition II.3: Dualité onde-corpuscule

La dualité onde-corpuscule est le fait que la lumière (et la matière [a]) se comporte à la fois comme une onde et comme un corpuscule.

a. cf. suite

Ces deux comportements ne sont pas décorélés. La relation de Planck-Einstein montre en effet que la fréquence du modèle ondulatoire est liée à la quantité de mouvement du modèle corpusculaire.

II.2 La diffraction de la matière

En 1927 Thomson de son côté et Davisson et Gerner du leur réalisent un expérience de **diffraction d'un faisceau d'électrons** par une fente fine ou un cristal. Depuis, des expériences de diffraction pour des atomes et molécules ont été réalisées.

Depuis 1989, on a aussi réalisé des expériences d'interférences de matière (électron 1989, Hélium 1991, fullerènes 1999). Il s'agit de la "classique" expérience des fentes d'Young. Notons néanmoins que sa réalisation pratique pour de la matière est plus complexe que pour la lumière.

✍ Exercice II.4: Diffraction de la matière

Q1. Que peut-on en conclure sur la nature des électrons suite à ces expériences ?

Q2. Dans leur expérience, Davisson et Gerner bombardèrent du nickel (paramètre de maille $a = 0.215nm$) avec des électrons. La formule de Bragg permet de relier l'angle de diffraction en normale rasante aux paramètres de l'expérience : $2a\sin\theta = \lambda$. Ils mesurèrent un angle de 50°. Estimer ainsi la longueur d'onde des électrons.

♥ Propriété II.2: Onde de matière

D'un point de vue quantique, il faut associer à un corpuscule de quantité de mouvement $\vec{p}$, un caractère ondulatoire dont la longueur d'onde λ (ou le vecteur d'onde $\vec{k}$) sont reliées à $\vec{p}$ par **la relation de de Broglie** :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u} \tag{1.4}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans la direction et sens de propagation de la matière.

✍ Exercice II.5: Diffraction. Energie et quantité de mouvement

Q1. En considérant que les électrons se déplacent dans le vide, estimer la quantité de mouvement puis l'énergie des électrons dans l'expérience de Davisson et Gerner.

Q2. En réalité, l'énergie des électrons était de 54eV. Expliquer les causes possibles de cet écart.

Q3. Pourquoi à énergie constante, la diffraction de corpuscule plus gros est-elle plus difficile à observer ?

II.3 Observation de la dualité

Les expériences précédentes ont remis en cause le caractère uniquement corpusculaire de la matière et uniquement ondulatoire de la lumière. Mais de nombreuses expériences confirment les deux comportements "classiques" : **on ne peut renoncer au comportement ondulatoire de la lumière comme on ne peut renoncer au comportement corpusculaire de la matière**. On doit donc accepter que matière et lumière ont un comportement ondulatoire et corpusculaire. C'est ce qu'on appelle la **dualité onde-corpuscule**.

Interférences électrons à électrons.

✍ Exercice II.6: Interférences électrons à électrons

En 1989, des chercheurs [a] réalisent une expérience d'interférences d'électrons par une source. . .d'électrons uniques.

Observer la vidéo suivante sur les observations faites durant cette expérience. Expliquer l'aspect dual de l'interprétation ondes-corpuscules de la matière.

a. *Tonomura, A., Endo, J., Matsuda, T., Kawasaki, T., & Ezawa, H. (1989). Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. Am. J. Phys, 57(2), 117-120.* Cette expérience a été désignée comme plus belle expérience de physique par les lecteurs de Physics World en 2002.

II.4 Critères quantiques

♥ Propriété II.3: Critère sur la longueur d'onde

Par analogie avec l'approximation de l'optique géométrique, on peut considérer que l'approche quantique de la matière est nécessair si **les dimensions du corps considéré sont de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie** associé au système.

♥ Propriété II.4: Critère sur l'action

Le traitement quantique devient nécessaire si **l'action caractéristique S du système est de l'ordre de la constante de Planck**.

Qu'est ce qu'une action ? **Cela n'a rien à voir avec l'appelation action dans le "Bilan des actions mécaniques"** :

- ⋆ Définition rigoureuse :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \tag{1.5}$$

  où $E(t)$ est l'énergie. Cette définition ne sera pas utilisée et n'est pas à connaître.
- ⋆ En pratique, on peut observer que l'action est homogène à une énergie multipliée par le temps, soit aussi une quantité de mouvement multipliée par une distance ou encore un moment cinétique. **On déterminer donc une action caractéristique en déterminer les grandeurs caractéristiques précédentes pour un système.**

II.5 Bilan

♥ A retenir: Bilan sur la dualité onde-corpuscule

- ⋆ La lumière comme la matière est à la fois une onde et un corpuscule. C'est ce qu'on appelle **la dualité onde-corpuscule**.
- ⋆ ulinePour la lumière : l'aspect corpusculaire est décrit par le photon dont l'énergie est donnée par le **relation de Planck-Einstein**

$$E = h\nu$$

  et la quantité de mouvement par la relation de de Broglie

$$\overrightarrow{p} = \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{u}$$

- ⋆ Pour la matière : l'aspect ondulatoire est décrit par la relation de de Broglie :

$$\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k} = \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{u}$$

- ⋆ Critères quantiques : on peut observer la dualité onde-corpuscule si les dimensions du système sont de l'ordre de sa la longueur d'onde de de Broglie ou si l'action caractéristique du système est de l'ordre de la constante de Planck.

III Inégalites d'Heisenberg

La matière est donc duale mais il n'est pas possible d'observer précisement ces deux aspects en même temps. C'est ce que traduira Werner Heisenberg par son principe d'incertitude.

♥ Propriété III.1: Inégalités d'Heisenberg

Considérons un système suivant une évolution unidimensionnelle suivant un axe x. On associe sa position à une grandeur x et sa quantité de mouvement àune grandeur p_x. L'indétermination Δx sur la position x et l'indétermination Δp_x sur l'impulsion p_x sont reliés par la relation :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.6}$$

- ⋆ Le principe d'indétermination relie position et quantitié de mouvement suivant un axe particulier. Il y a la même relation entre y et p_y par exemple. Par contre, il n'y a pas de contrainte entre l'indétermination sur x et sur p_y.
- ⋆ Les inégalités d'Heisenberg souligne que l'on ne peut observer simultanément et avec une précision infinie les deux aspects corpusculaire (position x) et ondulatoire (quantité de mouvement p_x associé à la longueur d'onde par la relation de de Broglie).
- ⋆ Ce principe rend aussi caduque la notion de trajectoire. En effet, si préciser la position rend d'autant plus incertaine la vitesse, on ne peut "suivre" une particule.
- ⋆ Il est important de noter que ce principe n'est pas une conséquence de la mesure mais une propriété fondamentale de la matière.

Comme nous le verrons dans les exercices méthodes, les inégalités d'Heisenberg nous permettrons d'interpréter certains éléments de la mécanique quantique :

- ⋆ l'énergie minimale d'un système n'est PAS l'énergie potentielle minimale.
- ⋆ certains ordres de grandeurs comme l'ouverture angulaire d'un faisceau diffracté.

IV Fonction d'onde

La description des interférences nécessite un traitement ondulatoire (quand même !). L'idée a donc été d'associer à chaque particule une fonction dont le comportement peut être associé à celui d'une onde : on y trouvera donc *possiblement* un terme de propagation et une amplitude et donc les caractéristiques d'une onde. Mais comme on va le voir, on pourra aussi avoir une interprétation de concepts corpusculaires.

IV.1 Fonction d'onde et amplitude de probabilité

♥ Définition IV.1: Fonction d'onde d'un système

La connaissance de l'état d'un système donnée à un instant donné est entièrement contenu dans une fonction appelée fonction d'onde $\Psi(M,t)$. Cette fonction doit posséder la caractéristique suivante (entre autre) : elle est complexe par nature.

L'existence de la fonction d'onde ainsi que ses propriétés est en réalité le premier postulat de la mécanique quantique.

♥ Propriété IV.1: Probabilité de présence

Soit une particule dont la fonction d'onde est $\Psi(M,t)$. La probabilité de présence dP [a] dans un volume $d\tau$ à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$dP = A\left|\Psi(M,t)\right|^2 d\tau \tag{1.7}$$

$\Psi^2(M,t)$ est appelée **densité de probabilité de présence**.

a. de détecter la présence de la particule

- La constante A est une constante de normalisation de sorte que la probabilité totale de présence de la particule dans l'espace soit égale à 1 :

$$\int_{\mathbb{R}^3} dP = A\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Psi(M,t)\right|^2 d\tau = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Psi(M,t)\right|^2 d\tau} \tag{1.8}$$

  Celà implique aussi que la fonction d'onde soit normalisable, c'est-à-dire de carrré sommable sur $\mathbb{R}^3$.
- il s'agit d'une probabilité de présence. **Ce qui signifie que tant qu'on a pas réalisé une observation (humaine, appareil...), on ne sait pas où se trouve la particule.**

Le concept de fonction d'onde associe les deux aspects :

- La densité de probabilité correspond au caractère corpusculaire.
- Le caractère complexe conduit à une inégalité triangulaire pour la densité de probabilité : cela permet d'expliquer les interférences (cf. V.4 p.12).

♥ Définition IV.2: Etat stationnaire

Un état stationnaire est un état dont la fonction d'onde ne dépend pas du temps *en module*. Il est donc de la forme :

$$\Psi(M,t) = \psi(M)f(t) \tag{1.9}$$

avec $|f(t)| = 1$.

Ces états sont importants car dans le cas d'un système soumis à une énergie potentielle indépendante du temps [a] (Admis) :

- l'énergie E d'un tel système est constante dans le temps (Admis) et $f(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$.
- tous les états non stationnaires peuvent être exprimés comme une superposition d'états stationnaires [b]. Mais leur énergie n'est pas constante dans le temps.

a. On parle d'hamiltonien indépendant du temps en mécanique quantique.
b. C'est-à-dire une combinaison linéaire : l'ensemble des états d'un système forment un espace vectoriel dont les états propres forment une base

IV.2 Utilisation de la fonction d'onde

On utilise la fonction d'onde pour expliquer deux phénomènes :

1. Interprétation des expériences d'interférence : cf. V.4 p.12
2. Quantification des états liés

♥ Définition IV.3: Quantification des états liés

La **quantification** des états de la matière correspond au caractère quantifié des états accessible, c'est-à-dire que certaines caractéristiques (énergie, moment cinétique…) ne peuvent prendre que **des valeurs discrètes**.

♥ Propriété IV.2: Quantification des états liés (Admis)

En mécanique quantique, les états liés d'un système sont quantifiés.

- ⋆ Cette propriété est admise et ne sera démontrée en PCSI que pour le cas du puits de potentiel infini. (cf. V.5 p.13).
- ⋆ Un état lié étant d'énergie constante, il est stationnaire.
- ⋆ L'exemple le plus connu est celui **des états d'énergie des atomes qui sont quantitiés**.

V S'entraîner

V.1 Méthodes

Critère quantique

♥ Méthode V.1: Utiliser le critère quantique

Q1. En utilisant le critère sur la longueur d'onde, expliquer pourquoi un homme qui marche ne nécessite pas un traitement quantique .

Q2. En utilisant le critère sur l'action, justifier qu'une planète gravitant autour d'un Soleil ne nécessite pas un traitement quantique mais qu'un électron autour d'un noyau le nécessite.

Inégalités d'Heisenberg

♥ Méthode V.2: Inégalité d'Heisenberg et diffraction

On considère un faisceau de particules matérielles de longueur d'onde λ se propageant dans la direction Ox. On place un écran percé d'un trou de largeur a de manière à réduire la taille du faisceau.

Q1. Rappeler ce qu'il va se passer si l'on réduite trop la taille du trou .

Q2. Estimer dans ces condition une indétermination sur la position transverse z de la particule .

Q3. En déduire une indétermination minimale sur la quantité de mouvement p_z .

Q4. En déduire une estimation de l'élargissement du faisceau en sortie en calculant l'ouverture angulaire du faisceau $\sin u$. Commenter ce qu'on observe.

♥ A retenir: Inégalités d'Heisenberg et incertitude

On retiendra que les inégalités d'Heisenberg permettent d'expliquer simplement plusieurs effets quantiques et ondulatoire. Les raisonnements porte alors sur les indéterminations considérées comme des incertitudes [a]. Mais attention, **il ne s'agit QUE d'estimation d'ordre de grandeur car ce ne sont pas de vrais calculs des indétermination**.

a. C'est d'ailleurs une des premières interprétation qui a été donnée des inégalités d'Heisenberg

♥ Méthode V.3: Inégalités d'Heisenberg et minimum d'énergie

Le principe d'indétermination permet aussi d'expliquer pour l'énergie minimale d'un système ne peut être égale au minimum d'énergie contrairement au cas classique.

Q1. Généralités : On considère un système mécanique possédant une position d'équilibre stable, donc un minimum d'énergie potentielle. Si le système est dans cet état, que peut-on dire de l'indétermination sur la position ? En déduire l'indétermination minimale sur la quantité de mouvement. Commenter.

Cas de l'oscillateur harmonique. On considère un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de masse m. On rappelle que les états stationnaires sont quantifiées et que l'état d'énergie le plus bas ne correspond pas $E = E_{p,min} = 0$ mais $E_0 = \frac{\hbar}{2}\omega_0$.

Q1. En considérant le mouvement d'un oscillateur d'un point de vue classique, justifier que l'énergie mécanique du système puisse s'écrire sous la forme : $E = \frac{p_{x,m}^2}{4m} + \frac{kx_m^2}{4}$ où p_m et x_m sont respectivement les amplitudes d'oscillations des grandeurs respectives p_x et$x$.

Q2. En considérant le mouvement de l'oscillateur, proposer une relation simple entre $p_{x,m}$ et l'indétermination Δp_x et de même entre x_m et l'indétermination Δx

Q3. En utilisant les relations de Heisenberg, montrer que l'énergie mécanique possède un minorant qui est une fonction de $E_{\min}(\Delta x)$.

Q4. En étudiant la fonction $E_{\min}(\Delta x)$, trouver la valeur minimale que peut prendre l'énergie du système. La comparer avec l'énergie minimale de l'oscillateur harmonique quantique.

♥ A retenir: Inégalités d'Heisenberg et minimum d'énergie

On retiendra la méthode pour déterminer une estimation du minimum d'énergie et montrer qu'il est supérieure à $E_{p,min}$.

Fonction d'onde

♥ Méthode V.4: Interprétation de l'expérience d'interférences

On considère l'expérience d'interférences avec des électrons. Montrer, en utilisant la notion de probabilité de présence que l'observation sur un écran en présence des deux fentes n'est PAS la somme des observations en présence de chaque fente seule.

Indication : la fonction d'onde suit le principe de superposition.

♥ Méthode V.5: Puits de potentiel infini

Soit un système Σ (potentiellement un électron, un atome...) évoluant dans un puits de potentiel infini de largeur L et d'énergie potentielle nulle à l'intérieur du puits :

$$\begin{cases} E_p(0 < x < L) = 0 \\ E_p(x < 0 \; OU \; x > L) = +\infty \end{cases}$$

On note $\Psi_n(x)$ la fonction d'onde du système dans le puits de potentiel. On admet que les zones où l'énergie potentielle est infinie impose une probabilité de présence nulle soit $\Psi(M,t) = 0$ si $E_p(M) = +\infty$.

On veut chercher ici les états stationnaires, et on rappelle (admis) que la fonction d'onde est de la forme :

$$\Psi(x) = \psi(x) f(t) = \psi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \tag{1.10}$$

avc E l'énergie du système.

La résolution de l'équation de Schrödinger, équation fondamentale de la mécanique quantique conduirait (cf. 2ème année en PC) à :

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right) \tag{1.11}$$

où λ est la longueur d'onde de la fonction d'onde et α une phase à l'origine.

Q1. Calculer la densité de probabilité de présence d'un état stationnaire. Trouver une interprétation au terme "stationnaire". Retrouver un sens à λ et commenter les points de probabilité nulle.

Q2. Montrer qu'avec les conditions aux limites imposées, λ ne peut prendre que des valeurs discrètes qu'on notera λ_n. Exprimer l'énergie E_n d'un état associé à λ_n. Conclure quant à la quantification des états d'énergie.

Q3. Que vaut l'énergie minimale du système ? Comparer au cas classique.

Q4. Déterminer l'écart relatif $\frac{\Delta E}{E}$? Expliquer dans ce cas pourquoi on parle de "limite classique aux grands nombres quantiques" (ou de "continuum" d'énergie).

♥ A retenir: Puits de potentiel infini

- ⋆ les états stationnaires dans un puits de potentiel infini ont des énergies quantifiées.
- ⋆ la méthode (forme mathématique initiale admise) pour démontrer la quantification de la longueur d'onde puis de l'énergie. A l'image de la corde de Melde, une étude graphique serait possible.
- ⋆ l'énergie minimale du système ne correspond plus à l'énergie potentielle minimale.
- ⋆ aux grands nombres quantiques (n grand), les états quantifiés sont *relativement* proches de sorte qu'on puissent parler d'un continuum.

Densité de probabilité de présence des états stationnaires dans un puits de potentiel infini.

V.2 Entraînement

✍ Exercice V.1: Ordres de grandeurs

Q1. Estimer la quantité de photons reçus par seconde par une photo-cathode de surface $S = 1\text{cm}^2$ exposée au rayonnement d'un lampe au sodium ($\lambda = 589\text{nm}$)ponctuelle émettant avec une puissance $P = 15\text{W}$ à une distance $d = 1\text{m}$.

Q2. Estimer la quantité de photons reçus par seconde par la pupille dilatée d'un humain regardant une étoile de rayon $R = 10^5\text{km}$ émettant principalement dans le rouge comme un corps noir et située à une distance de 20 années lumières. On sait que :

- ⋆ Pour un corps noir, la puissance rayonnée par unité de surface du corps noir **à sa surface** est $P_S = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan.
- ⋆ La longueur d'onde correspondant au maximum d'émission est reliée à la température du corps noir par la loi de déplacement de Wien : $\lambda_{max} T = cste = 0.2898\text{K.cm}$

Q3. Commenter la difficulté d'obtenir une éclairement "un photon par un photon".

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Relation de Planck-Einstein

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. Photons par seconde de la lampe : $N \sim \times 10^{14}\text{s}^{-1}$

Q2. Photons par seconde de l'étoile : $N = 10^2\text{s}^{-1}$

✍ Exercice V.2: Pression de radiation

Soit un faisceau monochromatique de puissance surfacique P_S et de longueur d'onde λ se réfléchissant sur un miroir parfait en incidence normale. Par un bilan de quantité de mouvement sur les photons, déterminer la pression (appelée pression de radiation) exercée par le faisceau lumineux sur le miroir. On supposera le milieu environnant assimilable au vide.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Relation de Planck-Einstein
- ⋆ Relation de de Broglie
- ⋆ Pression cinétique

Eléments de correction (sans justification) : Pression de radiation : $P = \frac{2P_S}{c}$

✍ Exercice V.3: Ordres de grandeurs (bis)

En utilisant les inégalités d'Heisenberg :

Q1. Pour une balle de Tennis (m = 60g) frappée à 100km.h^{-1}. Estimer l'indétermination minimale sur la position de la balle si l'on peut mesurer sa vitesse à 0.1km.h^{-1}. Le principe d'indétermination a-il une influence a priori sur l'étude du mouvement d'une balle de Tennis ?

Q2. Pour un électron orbitant autour d'un atome estimer l'indétermination sur la position Δx. En déduire l'indétermination sur la vitesse v_x. Commenter.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Inégalités d'Heisenberg
- ⋆ Energie mécanique
- ⋆ Moment cinétique

✍ Exercice V.4: Energie minimale d'un atome

Q1. On considère le mouvement des électrons comme des orbites circulaires de rayons R autour du noyau. Utiliser les inégalités Heisenberg pour justifier l'existence d'une orbite de rayon minimal

Q2. Toujours sous l'hypothèse d'un mouvement circulaire, montrer que l'hypothèse de la quantification du moment cinétique $\overrightarrow{L} = n\hbar\overrightarrow{e_z}$ conduit à montrer la quantification de l'énergie de l'atome. On précisera l'expression des niveaux d'énergie.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Inégalités d'Heisenberg
- ⋆ Mouvement à force centrale newtonien

Eléments de correction (sans justification) :

V.3 Problèmes

✎ Problème 1: Etude de l'oscillateur harmonique

On se propose d'aller plus loin dans l'étude de l'oscillateur harmonique.

Q1. On considère un pendule simple macroscopique utilisable en salle de TP. Estimer au moyen des formules du cours l'énergie de l'état fondamdental $n = 1$. Déterminer l'amplitude des oscillations associées. Est-il raisonnable de le distinguer de l'état $E_{p,min} = 0$?* Estimer pour le même pendule l'écart entre deux niveau d'énergie et lui associer l'écart entre deux l'amplitude d'oscillation des deux états. Peut-on parler de continuum ?

On s'intéresse maintenant à un oscillateur quelconque (possiblement microscopique) et à la fonction d'onde.

Q2. Observer l'animation ci-après et commenter brièvement la densité de probabilité en fonction du nombre quantique. On s'intéressera notamment à interprêter les variations aux nombres quantiques ainsi que l'annulation de la densité de probabilité en certains points .

Q3. On considère le modèle classique d'un oscillateur harmonique possédant une énergie mécanique E. Rappeler l'expression de $v(t)$.

Q4. L'oscillateur est dans le noir est on prend aléatoirement une photo (avec flash) du montage pour situer le mobile. Expliquer, grâce à $v(t)$ si la probabilité de présence de l'oscillateur sur la photo serra plus plus grande au centre ou sur les côtés .

Q5. On s'intéresse maintenant à l'oscillateur quantique. Comparer la probabilité de présence pour $n = 1$ avec le cas classique.

Q6. Faire la même comparaison pour un grand nombre quantique. Commenter.

Animation. Etats stationnaire. Puits quantique.

✎ Problème 2: Etats non stationnaires et puits de potentiel

Cet exercice a pour but de montrer comment les états non stationnaires permettent de relier certaines grandeurs physiques usuelles à la fonction d'onde.
Soit un système Σ (potentiellement un électron, un atome...) On considère un puits de potentiel infini :

$$\begin{cases} E_p(0 < x < L) = 0 \\ E_p(x < 0 OU x > L) = \infty \end{cases}$$

On rappelle que la fonction d'onde des états stationnaires prend la forme :

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$$

et que l'énergie E et la longueur d'onde λ sont quantifiés :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2}$$

On considère une balle (tennis par exemple) glissant sans frottements dans une pièce. Les rebonds sur les murs sont supposés élastiques de sorte que l'allure du potentiel proposés en préambule puisse être considéré comme acceptable.

Q1. Estimer l'énergie minimale de balle dans une approche quantique puis la vitesse minimale associée. La distinction entre énergie potentielle minimale et énergie minimale dans ce cadre a-t-elle encore un sens ?

Q2. En considérant une vitesse acceptable pour une balle de tennis et une incertitude acceptable sur cette vitesse, justifier qu'on puisse considérer que l'état de la balle n'est pas un état stationnaire mais une superposition d'état stationnaire dont on déterminera approximativement le nombre quantique moyen n_{moy} (à commenter) et l'intervalle Δn d'états autour de n_{moy} qui se superposent.

Q3. Observer la vidéo (QrCode "Superposition") correspondant à une simulation d'un puits de potentiel infini avec un système dont la fonction d'onde est une superposition d'état quantique stationnaires (on a pris des états entre $n_{moy} - \Delta n$ et $n_{moy} + \Delta n$ et on a sommé les fonctions d'onde). Commenter l'allure obtenue de la probabilité de présence.

Q4. Observer les deux autres vidéos de comparaison de densité de probabilité de présence. Analyser ces vidéos et commenter ce qu'on obtient on commentera notamment ce qu'on obtiendrait avec la balle de tennis.

Superposition   Influence de n moyen   Influence de Δn

FIGURE 1.2 – Simulation dans un puits de potentiel infini