Statique des fluides

C. Lacpatia

Aug 03, 2023

CONTENTS

0.1: Compétences

- Distinguer le statut des forces de pression et des forces de pesanteur en terme de force volumique ou surfacique
- Connaître les ordres de grandeurs des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère
- Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
- S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann
- Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées.
- Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante des forces de pression.
- Evaluer une résultante des forces de pression.
- Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède.
- Exploiter la loi d'Archimède
- Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide du gradient.
- Etablir l'équation locale de la statique des fluides.

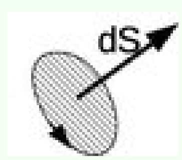
0.1 Comprendre le contexte

0.1.1 Préambule: Surfaces orientées

0.1.1.1 Vecteur surface

Important 0.1

Vecteur surface élémentaire
Soit une surface infinitésimale de surface d^2S, on peut orienté la surface, c'està-dire choisir un sens dans lequel la traversée de la surface est positif. On définit alors le vecteur surface $\overrightarrow{d^2S}$ comme le vecteur de norme d^2S orienté perpencidulairement à la surface et dirigé dans le sens d'orientation choisi de la surface.



0.1.1.2 Vecteur surface: Orientation

Important 0.2

Surface fermée et non fermée.
Une surface fermée est une surface qui divise l'espace en deux parties et où il est impossible de passer d'une partie à l'autre sans traverser la surface. On définit alors un intérieur et un extérieur.

Convention d'orientation pour les surfaces fermées. Pour une surface fermée, on oriente par convention le vecteur surface vers l'extérieur.

Convention d'orientation d'une surface non fermée. Pour une surface non fermée, l'orientation de la surface est arbitraire sauf si l'on oriente le contour sur lequel s'appuie la surface. Ce cas ne sera traité qu'en fin d'année. Pour l'instant , on choisira arbitrairement (c'est-à-dire intelligement) l'orientation de la surface.

0.1.2 Forces de pression et pression

0.1.2.1 Pression et forces de pression: Définitions

Rappel : Actions de contact: Contrainte normale et tangentielle Dans une action de contact, on distingue au niveau des actions ponctuelles la composante normale à la surface de contact et la composante tangentielle à la surface de contact. La composante tangentielle correspond aux frottements et la composante normale aux **forces de pression**.

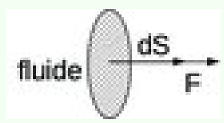
Dans le cadre de l'étude de l'action d'un fluide, on va séparer l'étude de l'action tangentielle et de l'action normale.

Le but de cette séquence est d'étudier les forces de pression dans le cadre de la **statique des fluides**, c'est-à-dire que l'on va supposer que le fluide est **au repos**.

Important 0.3

Pression
A l'échelle macroscopique (notre échelle), on définit la **pression** comme une grandeur scalaire positive correspondant à l'intensité de la force normale exercée **par unité de surface**.
Pour une surface infinitésimale d^2S, on relie la force de pression à la pression:

$$\overrightarrow{d^2F} = P\overrightarrow{d^2S}$$



où le vecteur $\overrightarrow{d^2S}$ est orienté vers l'extérieur du système qui **exerce** la force de pression.

Relation force pression. Cas fini. Dans le cas d'une action globale d'un fluide sur le système mécanique étudié, la force de pression résultante s'écrit comme la somme de la force ponctuelle sur toute la surface de contact:

$$\overrightarrow{F} = \iint_{M \in \Sigma_{contact}} P(M)\overrightarrow{d^2S}(M)$$

0.1.2.2 Remarques sur la composante tangentielle (en ligne)

0.1.2.3 Origine microscopique de la pression (en ligne)

0.1.3 Equation fondamental de la statique des fluides

0.1.3.1 Particule de fluide

Important 0.4

Particule de fluide
Dans un fluide, on peut isoler mentalement un volume infinitésimal $d^3\tau_Q$ autour d'un point Q. On appelle ce petit élément **particule de fluide**.

0.1.3.2 Equivalent volumique des forces de pression

Important 0.5

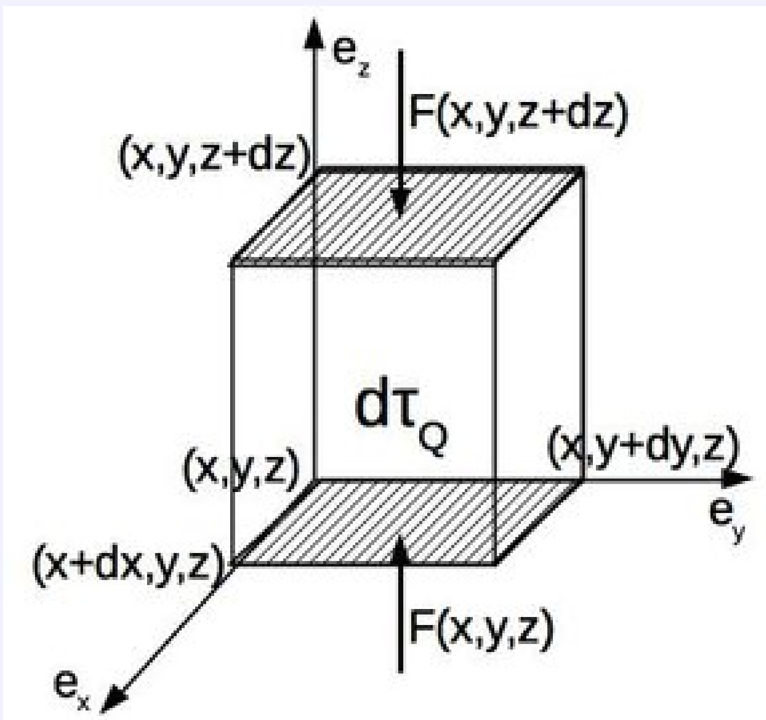
Equivalent volumique des forces de pression
Pour une particule de fluide en un point M dans un fluide où le champ de pression est P, la résultante des forces de pression s'appliquant sur la particule de fluide peut se réécrire sous la forme:

$$\overrightarrow{d^3F_{pression}} = -\overrightarrow{grad}Pd^3\tau_Q$$

On obtient ainsi une expression proportionnelle au volume donc **comme si** l'action de la pression s'exerçait en volume. D'où le nom **d'équivalent volumique des forces de pression**.

0.2: Démonstration

On va se placer dans un système de coordonnées cartésiennes où le point M est de coordonnées (x,y,z). La démonstration peut se généraliser aux différents systèmes de coordonnées mais l'introduction du gradient permettra cette généralisation.
On s'intéresse plus particulièrement aux actions de pression sur les deux faces inférieures et supérieures (c'est-à-dire aux côte z et z+dz).



La pression sur la surface supérieure est $P(x,y,z+dz)$ (les variations suivant x et y feraient apparaître des termes d'ordre 2 et sont donc négligés) donc la force exercée sur la partie s'écrit: $\overrightarrow{d^2F_{P,z+dz}} = -P(x,y,z+dz)dxdy\overrightarrow{e_z}$.
La pression sur la surface inférieure est $P(x,y,z)$ (les variations suivant x et y feraient apparaître des termes d'ordre 2 et sont donc négligés) donc la force exercée sur la partie s'écrit: $\overrightarrow{d^2F_{P,z}} = P(x,y,z)dxdy\overrightarrow{e_z}$.

La résultante des deux forces considérées ci-dessus est donc:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d^3F_{P,1}} &= (P(x,y,z) - P(x,y,z+dz))\, dxdy\overrightarrow{e_z} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} dxdydz\overrightarrow{e_z} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} d^3\tau_Q\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

On a utilisé ici la définition du taux de variation (on rappelle qu'en notation différentielle, le passsage à la limite est implicite): $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$. La différence est qu'ici, la fonction P dépend aussi de x et de y, donc c'est une dérivée partielle.
Remarquons que le raisonnement précédent s'applique aussi aux actions sur les faces perpendiculaires aux axes $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. Donc la résultante totale des forces s'écrit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d^3F_{pression}} &= -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\right) d^3\tau_Q \\ \overrightarrow{d^3F_{pression}} &= -\overrightarrow{grad} P d^3\tau_Q\end{aligned}$$

0.1.3.3 Equation fondamentale de la statique des fluides

Important 0.6

Equation fondamentale de la statique des fluides
Dans un fluide **au repos** soumis à la seule action extérieure du champ de pesanteur $\vec{g}$, le champ de pression P est donné par l'équation:

$$\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P = 0$$

0.3: Démonstration

On va travailler sur une particule de fluide et appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen. Le bilan des forces a déjà été fait. Leurs somme est égale à 0 puisque le fluide est supposé au repos (donc la particule de fluide aussi). Il vient:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \rho\vec{g}d^3\tau_Q - \overrightarrow{grad}Pd^3\tau_Q \\ \vec{0} &= \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P\end{aligned}$$

0.1.4 Cas des fluides incompressibles

0.4: Note:

Un fluide est _*incompressible* si sa masse volumique est la même quelques soient les conditions de pression.

0.1.4.1 Equation barométrique

Important 0.7

Equation barométrique - Champ de pression pour un fluide incompressible
Dans un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 dans un champ de pesanteur d'intensité g, le champ de pression ne dépend que de la profondeur. La variation de pression $\Delta P = P(h_2) - P(h_1)$ entre les **profondeurs** h_2 et h_1 s'écrit:

$$\Delta P = P(h_2) - P(h_1) = \rho_0 g(h_2 - h_1)$$

0.5: Démonstration

On applique l'équation fondamental de la dynamique avec ρ_0 uniforme (on oriente l'axe z vers le bas et les axes x et y sont horizontaux):

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} & = \rho_0 g \end{cases} \tag{1}$$

Les deux premières équations permette de dire que le champ de pression ne dépend que de z. On peut donc réécrire P comme une fonction d'une seule variable $P(z)$ et la dérivée partielle suivant z devient une dérivée droite. En intégrant entre $z = h_1$ et $z = h_2$, il vient l'équation demandée (on rappelle que ρ_0 est uniforme).

0.1.5 Cas des gaz parfait: Atmopshère isotherme

On va maintenant supposer que le fluide est un gaz parfait. On va donc pouvoir utiliser l'équation d'état des gaz parfaits pour relier la masse volumique et la pression. Le problème est qu'on fait apparaître la température qui peut aussi varier dans l'espace. On va donc devoir faire une hypothèse sur la température. Dans le cadre du cours, on suppose pour faire simple que l'atmosphère est isotherme, c'est-à-dire que la température est uniforme. On reviendra sur cette hypothèse par la suite.

0.1.5.1 Champ de pression pour un atmosphère isotherme d'un gaz parfait.

Hint: *Rappel :Equation d'état d'un gaz parfait.* On rappelle que l'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit:

$$\begin{aligned} PV &= nRT \\ P\frac{m}{\rho} &= nRT \\ \frac{P}{\rho} &= \frac{n}{m}RT \\ \frac{P}{\rho} &= \frac{RT}{M} \end{aligned}$$

avec M la masse molaire du gaz parfait et R la constante des gaz parfaits.

Important 0.8

Champ de pression pour un gaz parfait sous l'hypothèse isotherme.
Une atmosphère de gaz parfait à température uniforme dans un champ de pesanteur uniforme possède pour champ de pression P(z) (où z est l'**altitude**):

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z=0)\exp(-\frac{Mgz}{RT}) \\ &= P(z=0)\exp(-\frac{M_P gz}{k_B T}) \end{aligned}$$

où M_P est la masse d'une particule du gaz, M sa masse molaire, $R = 8.314$J.K^{-1}.mol^{-1} la constante des gaz parfaits et $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J.K^{-1}. On remarquera que $R = N_A k_B$.

0.6: Démonstration

On prend un axe Oz vertical vers le haut et deux axe Ox et Oy horizontaux. A nouveau, la projection de l'équation fondamentale sur x et y montre que le champ de pression ne dépend ni de x, ni de y. On écrira donc bien $P(z)$ et on remplace la dérivée partielle par rapport à z par une dérivée droite. L'équation d'état établie précédemment permet de réécrire l'équation fondamentale de la statique des fluides et de la résoudre:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} + \frac{PM}{RT}g = 0 \\ P(z) = Ae^{-\frac{Mgz}{RT}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{Mgz}{RT}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{M_P gz}{\frac{R}{N_A}T}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{M_P gz}{k_B T}} \end{aligned}$$

0.1.5.2 Facteur de Boltzmann

Important 0.9

Généralisation (Admise): Facteur de Boltzmann
D'une manière plus générale, si un système de n_0 particules par unité de volume est **en équilibre à une température T**, le nombre de particule par unité de volume $n(E_p)$ ayant l'énergie potentielle E_p est:

$$n(E_p) = A\exp(-\frac{E_p}{k_B T})$$

Le terme exponentielle porte le nom de **facteur de Boltzmann**. La constante A est une constante de normalisation telle que la somme du nombre de particules dans chaque état donne n_0.

0.1.6 Expression de la résultante des forces de pression

0.1.6.1 Théorème d'Archimède

Important 0.10

Théorème d'Archimède
Tout corps entièrement immergé au repos subit de la part du fluide une force opposée à celle du poids du volume de fluide déplacé. On appelle cette force la poussée d'Archimède. D'une manière plus générale, elle est définie comme la résultante des forces de pression du fluide (ce devrait être une intégrale double):

$$\overrightarrow{\Pi_A} = \oint_{\Sigma} -P(M)\overrightarrow{d^2S(M)} = -m_{\text{fluide déplacé}}\vec{g}$$

0.1.6.2 Non application du théorème d'Archimède

0.7: Cas de non application

Le théorème d'Archimède ne s'applique que si le corps est entièrement immergé dans les fluide, c'est-à-dire qu'il n'y pas de contact solide en certains points.
Sinon, il ne s'applique pas. Par exemple un corps posé au fond de l'eau ou un système dont seule une aprtie est en contact avec le fluide (barrage).

Si le théorème d'Archimède ne s'applique pas, la résultat des forces de pression ne peut se calculer qu'au moyen de l'intégrale:

$$\iint_{M\in\Sigma} P\overrightarrow{d^2S}$$

Hint: Calcul de la résultante des forces

Calculer la résultante des forces nécessite de choisir un système de coordonnées adapté puis d'exprimer chaque élément de l'intégrale dans ce système. Les étapes sont donc:

1. Choisir un système de coordonnées adapté aux symétries du problème. Normalement, le vecteur surface doit s'exprimer simplement suivant un seul vecteur.
2. Exprimer le vecteur surface dans le système de coordonnées. On rappelle qu'on distingue le calul de dS comme un produit des déplacements élémentaires et l'expression du vecteur unitaire portant $\overrightarrow{dS}$.
3. Exprimer le champ de pression dans le système de coordonnées. En général, on utilise l'équation fondamentale de la statique des fluides ou ses corollaires (comme l'équation barométrique).
4. Réécrire alors l'intégrale et en déduire les variables d'intégration. On déterminer alors les bornes d'intégration de chaque intégrale en fonction de la surface d'intégration.
5. Dans le cadre du programme, l'intégrale de surface à calculer est une intégrale à variable séparable. On calcule donc séparément deux intégrales qu'on multiplie.

0.2 S'entrainer

- exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : pas d'activités
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement)
- des approfondissement (Aller plus loin) : pas pour ce chapitre

0.2.1 Méthodes

0.2.1.1 Fluides incompressibles

0.8: Validité du modèle incompressible

Dans le cas de l'eau, on peut donner le coefficient de compressibilité isotherme:

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = 5 \times 10^{-10}\mathrm{Pa}^{-1}$$

où l'indice T signifie que la température est maintenue constante.

1. Rappeler la valeur numérique de la masse volumique de l'eau
2. Déduire du coefficient χ_T une relation entre la variation $d\rho$ et la variation dP.
3. En déduire une estimation de la variation relative $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ pour une variation d'altitude Δz en considérant que le champ de pression suit le modèle d'un fluide incompressible.
4. Estimer la variation d'altitude nécessaire pour observer une variation de 1% de la masse volumique. Commenter l'hyptohèse de fluide incompressible dans le cas de l'eau.

0.9: Baromètre

Le baromètre le plus courant est le baromètre de Torricelli. Il s'agit d'un tube en U fermé à une extrémité et l'autre extrémité est ouverte et à l'air libre. Du côté fermé, le mercure est surmonté par du vide en première approximation (P=0).

1. Exprimer la différence de hauteur h entre les deux surfaces libres du mercure.
2. On donne la masse volumique du mercure $\rho_{Hg} = 13,5 \times 10^3\mathrm{kg.m}^{-3}$. Justifier l'utilisation du mercure plutôt que de l'eau pour faire un baromètre.
3. Expliquer la définition de l'unité de pression mmHg (millimètre de mercure): $1\mathrm{mmHg} = 133,3\mathrm{Pa}$

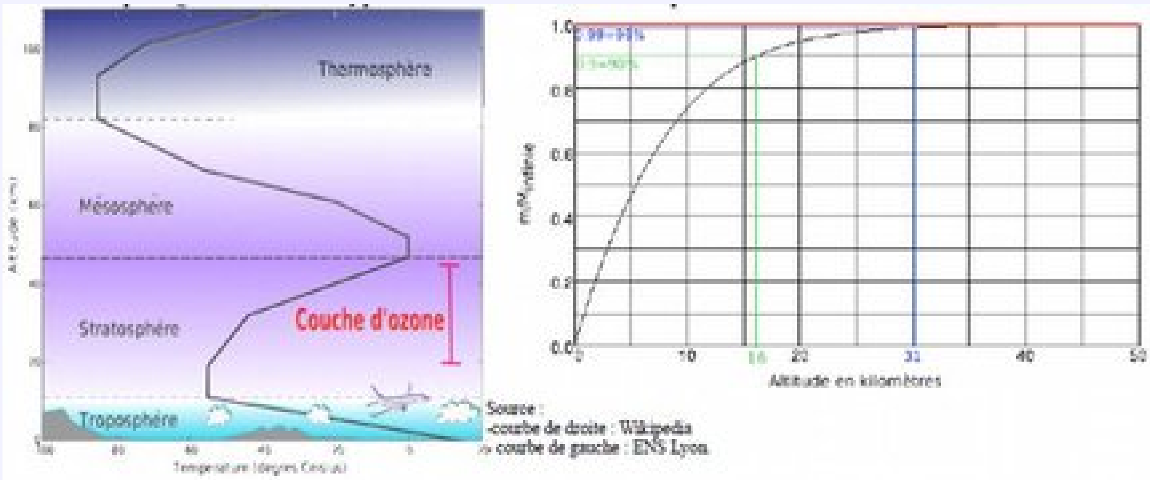
0.2.1.2 Gaz parfait

0.10: Ordres de grandeurs

On considère une atmosphère isotherme d'un gaz parfait.

1. Donner une expression d'une altitude caractéristique H qui gouverne l'échelle sur laquelle la pression varie notablement.
2. Estimer H pour de l'air à la température $T = 273\mathrm{K}$. Quelle hypothèse pourra être fait pour des gaz enfermée dans une enceinte de taille "normale"?
3. Déterminer le champ de masse volumique. En déduire par intégration la masse totale de l'atmosphère (on supposera pour simplifier le calcul que la terre est plate !).

4. On donne ci-dessous le profil de température et le profil de la masse d'atmosphère contenue sous l'altitude z. Commenter la validité du modèle isotherme.



0.2.1.3 Théorème d'Archimède

0.11: Iceberg

On veut calculer le volume émergé de l'iceberg qu'on suppose de masse m répartie uniformément et de volume V. On suppose de plus que l'air et l'eau sont pour les dimensions considérées des fluides homogènes.
On donne: $\rho_{glace} = 0,9\rho_{eau}$ et $\rho_{air} \ll \rho_{glace}$.

0.12: Ballon ascensionnel

On s'intéresse à un ballon de volume V constant gonflé avec un gaz plus léger que l'air atmosphérique. Dans ce modèle, nous supposerons que le volume V est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer que la masse volumique de l'air qui entoure le ballon est constante. On la note: ρ_{air} On note m la masse totale du ballon et (ρ sa masse volumique moyenne, c'est-à-dire que $\rho = \frac{m}{V}$, il faut compter dans m la masse du gaz ET de l'enceinte).

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du ballon en supposant le théorème d'Archimède applicable.
2. On suppose qu'à une altitude z_0, le ballon est à l'équilibre. Faut-il augmenter ou diminuer la masse volumique du ballon pour monter? Justifier qu'on chauffe alors le gaz à l'intérieur pour s'élever.
3. Pour descendre, on ouvre en général une soupape qui libère du gaz. Justifier la manoeuvre.

0.2.1.4 Calcul de force de pression

0.13: Barrage

On considère un barrage assimilable à un demi-cylindre de hauteur H et de rayon R. L'eau est retenue à "l'intérieur" du demi-cylindre. Calculer la résultante des forces de pression exercée sur le barrage. On prendra l'origine des **profondeur** z à la surface de l'eau où l'atmosphère supérieur y impose une pression P_0. Faire l'application numérique pour un barrage de 10m de haut de rayon 30m.

0.2.2 Exercices d'application

0.2.2.1 Verrin hydraulique

0.14: Exercice

On considère un verrin constitué d'un réservoir de section S_1 relié par le fond à un second réservoir de section $S_2 < S_1$. Deux plateaux de masses négligeables et de sections S_1 et S_2 ferment le réservoir de chaque côté et il est rempli d'eau.

1. Au dessus de chaque plateau on trouve la même atmosphère. Quelle est la différence de hauteur entre les deux plateaux à l'équilibre?
2. Les plateaux sont à l'équilibre et on pose sur le plateau S_1 une masse M. Quelle force F faut-il appliquer sur le plateau S_2 pour maintenir l'ensemble à l'équilibre. Commenter.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Liquide peu compressible.*

0.2.2.2 Atmophère non isotherme

0.15: Exercice

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait et on suppose que le profil de température est $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$ avec z l'altitude ($z = 0$ au sol). Déterminer le champ de pression en supposant l'atmosphère au repos et le champ de pesanteur uniforme.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Equation fondamentale de la statique des fluides.*
- $\Longrightarrow$ *Gaz parfait.*

0.2.2.3 Glaçon

0.16: Exercice

Un glaçon flotte dans un verre d'eau. De quelle hauteur l'eau a monté quand le glaçon a complètement fondu.

Point utile pour cet exercice

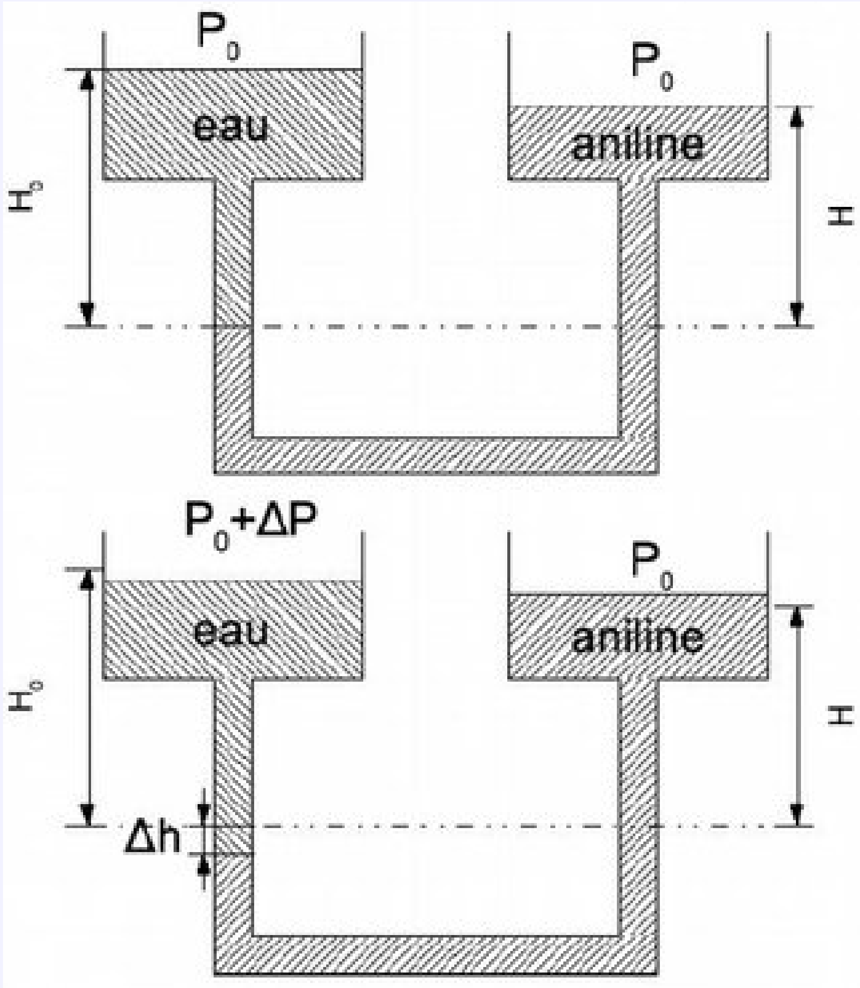
- $\Longrightarrow$ *Théorème d'Archimède.*

0.2.3 Travaux dirigés

0.2.3.1 Baromètre différentiel

0.17: Exercice

Un manomètre différentiel et constitué de 2 récipients cylindriques de sections S_1 et S_2 reliés par un tube de section intérieure s constante. L'ensemble contient deux liquide incompressibles non miscibles: l'eau, de masse volumique ρ_0 et l'aniline, de masse volumique ρ. Initialement la pression au dessus des deux récipients est P_0.



1. Déterminer une relation entre H et H_0.
2. On provoque au-dessus de l'eau une surpression ΔP. Déterminer le déplacement Δh de la surface de séparation entre l'eau et l'aniline dans le tube.
3. Evaluer la sensibilité du manomètre: $\frac{\Delta h}{\Delta P}$. Commenter.

On donne: $\rho_0 = 0.998\text{g.cm}^{-3}; \varrho = 1.024\text{g.cm}^{-3}; \text{g} = 9.81\text{m.s}^{-2}; \text{S}_1 = \text{S}_2 = 100\text{s}$

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Liquide peu compressible.*

0.2.3.2 Bateau

0.18: Exercice

On considère un bateau modélisé pour simplifié par un cylindre de hauteur H et de rayon R, l'axe du cylindre étant horizontal. Le bateau et sa cargaison possèdre une masse m et il flotte à la surface de l'eau. Déterminer de deux manières différentes une relation que doit vérifier la hauteur z_0 du bateau qui reste immergé *(Facultatif : on pourra essayer de la résoudre numériquement par dichotomie en choisissant des ordre de grandeur pour un bateau).*

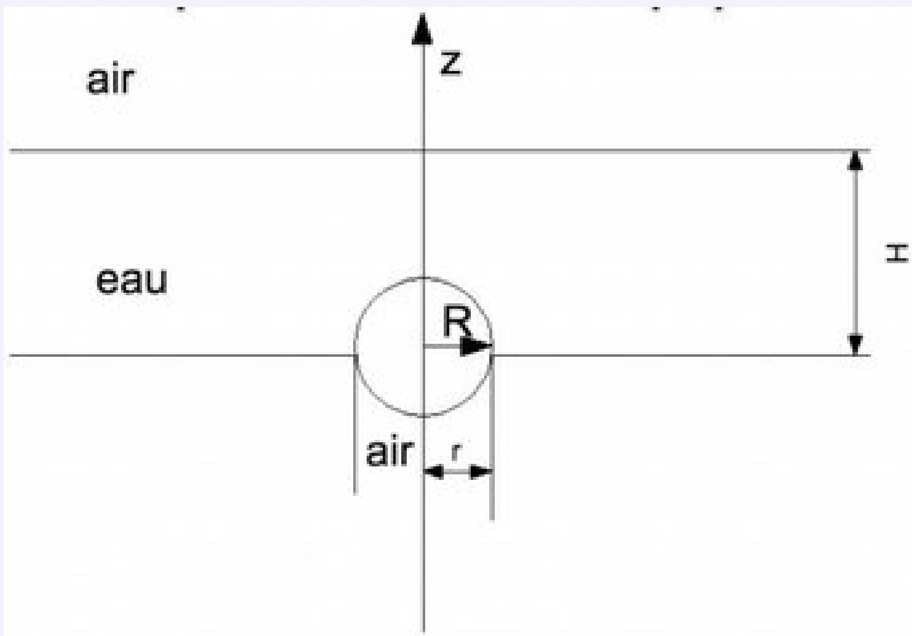
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Résultante des actions de pression.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème d'Archimède.*
- $\Longrightarrow$ *Liquide peu compressible.*

0.2.3.3 Bille au fond d'un évier

0.19: Exercice

Une sphère de bois de masse volumique ρ et de rayon R, de masse uniformément répartie est complètement immergée dans un bassin d'eau (de masse volumique ρ_e) de profondeur H de telle manière qu'elle bouche un trou circulaire de rayon r.



1. Calculer la force qu'exerce la bille sur le fond du bassin.
2. Si on baisse le niveau de l'eau dans le bassin, pour quelle hauteur d'eau la sphère va remonter à la surface en supposant qu'elle n'émerge pas encore au décollage?
3. Cette configuration est-elle possible avec les données numériques ci-dessous?

Données: $\rho = 850\mathrm{km.m^{-3}}; \varrho_\mathrm{e} = 1000\mathrm{kg.m^{-3}}; \mathrm{H} = 0.7\mathrm{m}; \mathrm{R} = 0.2\mathrm{m}; \mathrm{r} = 0.1\mathrm{m}; \mathrm{g} = 9.8\mathrm{m.s^{-2}}$

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Résultante des actions de pression.*
- $\Longrightarrow$ *Liquide peu compressible.*

0.2.3.4 Numérique : Etude de l'atmosphère terrestre

But : étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.

0.2.3.4.1 Modélisation de l'atmosphère

Dans le cadre du modèle ISA (International Standard Atmosphere), l'atmosphère est divisée en différentes couches, au sein desquelles la température est supposée suivre une loi affine[1]. La valeur du gradient vertical de température dans chacune de ces couches est normalisée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd  # Pour l'affichage des données
"""Données normalisées pour chaque couche de l'atmosphère.
Vous pourrez utiliser ces vecteurs par la suite.
"""

couche = ["Troposphère", "Tropopause", "Stratosphère", "Stratosphère", "Stratopause",
 ↪"Mesosphère", "Mesosphère", "Mesopause"]
altitude = [0, 11, 20, 32, 47, 51, 71, 85]
gradient = [- 6.5, 0, + 1.0, + 2.8, 0, - 2.8, - 2.0, "NA"]  # Attention il faudrait␣
 ↪traiter le dernier élément qui n'est pas un nombre.

"""Affichage des données
La syntaxe utilisée n'est pas à connaître.
"""
datas = pd.DataFrame({
    "Couche atmosphérique" : couche,
    "Altitude de la base (km)" : altitude,
    "Gradient thermique vertical (K/km)" : ["{:.1f}".format(i)  if type(i)==float␣
 ↪else i for i  in gradient]
})

datas.style
```

```
<pandas.io.formats.style.Styler at 0x2a2a00e31f0>
```

On propose ici de déterminer numériquement la loi de variation de la pression atmosphérique avec l'altitude z dans le cadre du modèle ISA, en supposant que l'atmosphère est **un gaz parfait au repos** dans le référentiel terrestre galiléen et en négligeant les variations de la pesanteur avec l'altitude. On fixe les valeurs de la température et de la pression au niveau du sol (en z = 0) respectivement à :

$$\begin{cases} T_{sol} &= 288K \\ P_{sol} &= 1.013 \times 10^5 Pa \end{cases}$$

On utilisera les données obtenues pour étudier les mouvements d'un ballon sonde.

Données numériques. On prend :

$$\text{Accélération de la pesanteur :} \qquad g = 9.81 m.s^{-2} \tag{1}$$

$$\text{Masse molaire de l'air :} \qquad M_{air} = 29 g.mol^{-1} \tag{2}$$

$$\text{Constante des gaz parfaits :} \qquad R = 8.314 J.K^{-1}.mol^{-1} \tag{3}$$

[1] https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Atmosph%C3%A8re_normalis%C3%A9e&oldid=181118275

0.2.3.4.2 Mise en équation

1. Montrer que si l'on suppose que l'air suit le modèle du gaz parfait. Alors les profils de pression et température doivent suivre le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}(z) &= k_{ISA}(z) \\ \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dz}}(z) &= -\frac{M_{air}g}{RT(z)} \times P(z) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} T(z=0) &= T_{sol} \\ P(z=0) &= P_{sol} \end{cases}$$

0.2.3.5 Détermination du profil de pression et température

Attention aux unités m/km.

Exercice 1 :

1. Ecrire une fonction `kISA` qui prend comme argument une altitude `z` et qui renvoie le gradient de température $k_{ISA}(z)$ associé. Pensez à utiliser les listes définies au début. *On supposera que l'altitude reste toujours inférieure à 85km, on ne s'occupera donc pas du cas de la Mésopause.*
2. Utiliser `odeint` (ou `solve_ivp`) pour déterminer le profil de température et de pression dans l'atmosphère.
3. Tracer le profil de température et de pression dans l'atmosphère pour le modèle ISA.

0.2.3.6 Dimensionnement d'un ballon-sonde atmosphérique

Les ballons-sonde stratosphériques constituent une solution simple et relativement économique pour envoyer une charge dans l'atmosphère. Équipés de capteurs divers, ils peuvent par exemple permettre de relever les valeurs de la pression, de la température, de l'humidité ou encore devitesse du vent dans les différentes couches de l'atmosphère traversées

0.2.3.6.1 Position du problème

On considère ici un ballon-sonde stratosphérique "ouvert", constitué d'une enveloppe de volume V ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium ($M_{He} = 4,0 g.mol^{-1}$) ; l'enveloppe garde un volume constant tout au long de l'ascension. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à la pression atmosphérique. La masse de l'ensemble { enveloppe (hors hélium) + nacelle + instruments embarqués } est $m = 10kg$.

Exercice 2 : On souhaite que le ballon atteigne une altitude z_{max} choisie.

1. Estimer le volume V de l'enveloppe qui permet d'atteindre cette altitude puis le diamètre du ballon associé. Vous devrez :

- Préciser la modélisation et le paramétrage du problème. On discutera notamment des hypothèses choisies.
- Tracer V et d en fonction dez_{max}.
- Estimer V et d pour $z_{max} = 36km$ en procédant par dichotomie pour trouver l'indice donnant l'altitude la plus proche de z_{max}. Commenter la possibilité pour des amateurs de réaliser un tel ballon.