Chapitre 1: Ondes progressives

I Description générale

♥ Définition I.1: Ondes

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

Elle se déplace avec une vitesse déterminée qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation. On appelle cette vitesse la **célérité** de l'onde dans le milieu.

- ⋆ Une onde transporte de l'énergie sans transporter de matière.
- ⋆ La progression d'une onde est décrite par des grandeurs dont la variation sera à la fois dans le temps et dans l'espace : $G(M,t)$.

Exemples d'ondes usuelles. On donne quelques grandeurs usuelles utilisées pour décrire l'onde.

- ⋆ La corde vibrante (ondes mécaniques) : Déformation de la corde $z(M,t)$ et tension de la corde $\overrightarrow{T}(M,t)$.
- ⋆ A la surface de l'eau : Altitude de la surface $z(M,t)$.
- ⋆ Ondes électriques dans un câble hors ARQS : Intensité $I(M,t)$ et Tension $U(M,t)$
- ⋆ Ondes acoustiques : vitesse de l'air $v(M,t)$ et surpression de l'air $p(M,t)$
- ⋆ Ondes électromagnétiques : Champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ et champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$

II Modélisation mathématique

Pour la suite, on considère une onde décrite par une grandeur $y(M,t)$.

II.1 Cas général

La fonction mathématique à deux variables précédentes peut-être vue de deux manière suivant qu'on fixe l'un ou l'autre des paramètres :

- ⋆ on fixe une position M_0 (on peut écrire une fonction d'une variable : $y_{M_0}(t) = y(M_0,t)$). On décrit alors l'évolution temporelle de la perturbation au point M. Le tracé graphique serait un *chronogramme*.
- ⋆ on fixe un instant t_0 (on peut écrire une fonction de l'espace : $y_{t_0}(t) = y(M,t_0)$). On décrit alors la *forme spatiale* de la perturbation à un instant donné. On peut voir cela comme une "photographie" de l'onde à un instant donné.

♥ Propriété II.1: Retard à la propagation

Considérons une onde passant d'un point A à un point B en un temps Δt_{AB}. Si l'évolution temporelle de la perturbation au point A est décrite par $y_A(t) = y(A,t)$, alors l'évolution temporelle de la perturbation au point B sera :

$$y_B(t) = y(B,t) = y(A, t - \Delta t_{AB}) \tag{1.1}$$

On appelle Δt_{AB} le retard dû à la propagation de l'onde.

- ⋆ Très souvent, le point A choisi est le point "source" où l'onde est créée mais ce n'est pas une obligation.
- ⋆ Il existe aussi une relation similaire pour la vision "photo" où on fixe les instants mais sa description dans le cas général étant compliqué, on ne l'abordera que dans le cas rectiligne (cf. suite).

♥ Démonstration

Supposons qu'à un instant t_1, la perturbation en A soit $y_0 = y_A(t_1)$. Comme l'onde met un temps Δt_{AB} pour arriver au point B, alors la perturbation au point B vaudra y_0 au temps $t_1 + \Delta t_{AB}$ soit :

$$y_B(t_1 + \Delta t_{AB}) = y_A(t_1)$$

soit en posant $t = t_1 + \Delta t_{AB}$:

$$\begin{cases} y_B(t) & = y_A(t - \Delta t_{AB}) \\ y(B,t) & = y(A, t - \Delta t_{AB}) \end{cases} \tag{1.2}$$

Cette relation est vraie pour tout t.

II.2 Cas d'une propagation rectiligne en milieu homogène

Pour cette partie, on considère que la propagation est rectiligne. On paramètre l'axe de propagation comme l'axe Ox et pour un point M sur l'axe, on repère sa position par x_M soit $y(M,t) = y(x_M, t)$. On suppose de plus que le milieu est homogène donc la célérité de l'onde est constante sur tout le trajet de l'onde et notée v.

♥ Propriété II.2: Ondes progressive rectiligne - Première description

Soit une onde qui se propage dans la direction des x croissant et deux points A et B où passent l'onde alors :

$$y(x_B, t) = y(x_A, t - \frac{x_B - x_A}{v}) \tag{1.3}$$

Si le chronogramme de l'onde au point $O(x = 0)$ est donné par la fonction $g(t) = y(0, t)$ [a], alors pour tout point M de coordonnées x sur l'axe, on a :

$$y(x, t) = g(t - \frac{x}{v}) \tag{1.4}$$

a. O pourra *par exemple* être le point source.

Il suffit donc que connaître le chronogramme de l'onde à la source (ou en un point) et sa célérité pour pouvoir exprimer le chronogramme de l'onde en tout point.

♥ Démonstration

Il suffit de remarque que le retard dû à la propagation est alors $\Delta t_{AB} = \frac{x_B - x_A}{v}$.

♥ Propriété II.3: Ondes progressive rectiligne - Deuxième description

Soit une onde qui se propage dans la direction des x croissant et deux instants t_1 et t_2 alors :

$$y(x, t_1) = y(x - v(t_2 - t_1), t_2) \tag{1.5}$$

Si la forme de l'onde à l'instant $t = 0$ est donnée par la fonction $h(x) = y(x, 0)$, alors pour tout instant t, on a :

$$y(x, t) = h(x - vt) \tag{1.6}$$

Il suffit donc que connaître la forme de l'onde à l'instant initial (ou à un instant donné) et sa célérité pour pouvoir exprimer la forme de l'onde à tout instant.

♥ Démonstration

Si l'on connaît la forme de l'onde à l'instant t_1 : $y_{t_1}(x) = y(x, t_1)$ et si l'onde se propage à la vitesse v suivant les x croissants, alors la forme de l'onde à l'instant t_2 est celle de l'onde à l'instant t_1 mais décalée d'une distance correspondant à la distance parcourue par l'onde soit : $d = v(t_2 - t_1)$.
Décalé l'allure d'une fonction (ici de x) suivant l'axe des abscisses d'une distance d revient à faire le changement de variable $x \to x - d$ donc :

$$y_{t_2}(x) = y_{t_1}(x - d)$$

soit l'expression proposée.

♥ Propriété II.4: Onde régressive

Une onde régressive est une onde qui se propage suivant les x décroissant [a]. Les deux descriptions précédents deviennent alors :

$$\begin{cases} y(x,t) = & g(t+\frac{x}{v}) \\ y(x,t) = & h(x+vt) \end{cases} \tag{1.7}$$

a. On parle aussi d'onde progressive suivant les x décroissants...

Il suffit de remarquer que l'onde passe d'abord au point B (première description) ou que la forme est décalé en sens inverse pour comprendre le changement de signe.

II.3 Ondes planes progressives harmoniques

♥ Définition II.1: Onde plane progressive harmonique

Une **onde plane progressive harmonique** (OPPH) est une onde se propageant rectilignement et dont la forme [a] est un sinusoïde.

On lui associe une fréquence temporelle f et une pulsation $\omega = 2\pi f$. *Dans un milieu homogène*, la forme mathématique de l'onde est donc :

- ⋆ Pour une onde se déplaçant suivant les x croissants :

$$y(x,t) = y_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = y_m \cos\left(\omega t - kx\right) \tag{1.8}$$

- ⋆ Pour une onde se déplaçant suivant les x décroissants :

$$y(x,t) = y_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right) = y_m \cos\left(\omega t + kx\right) \tag{1.9}$$

avec $k = \frac{\omega}{v}$ le nombre d'onde.

a. temporelle ou spatiale

Le caractère "plan" est associé à la propagation rectiligne. Ce principe sera abordé par la suite.

♥ Définition II.2: Longueur d'onde

Pour une onde plane progressive harmonique, la **longueur d'onde** (ou période spatiale) λ est la distance minimale qui sépare deux positions où la perturbation est la même à chaque instant.

♥ Propriété II.5: Relation de dispersion

Pour une onde plane progressive harmonique, on a la relation appelée relation de dispersion :

$$\lambda f = v \tag{1.10}$$

♥ Démonstration

Soit A et B distant d'une longueur d'onde soit $x_B = x_A + \lambda$. On doit avoir :

$$y_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_A}{v}\right)\right) = y_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_A + \lambda}{v}\right)\right)$$

soit :

$$\begin{aligned}
\omega\left(t - \frac{x_A}{v}\right) &= \omega\left(t - \frac{x_A + \lambda}{v}\right) + 2m\pi \\
\omega\frac{x_A}{v} &= \omega\frac{x_A + \lambda}{v} - 2m\pi \\
2m\pi &= \omega\frac{\lambda}{v} \\
\frac{\omega\lambda}{2\pi v} &= m
\end{aligned}$$

Le caractère "minimale" de λ impose $m = 1$ donc : $\boxed{f\lambda = v}$.

III Surface d'onde

✎ Problème 1: Surface d'onde

Une **surface d'onde** (où front d'onde) est l'ensemble des points possédant le même retard sur la source de l'onde.

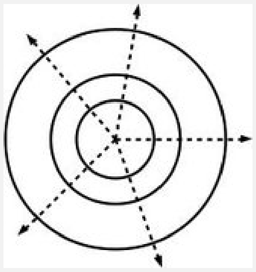


FIGURE 1.1 – Les surfaces d'ondes sont en traits pleins et en pointillés les "rayons" de l'onde correspond à la direction de propagation.

Dans le cas d'une OPPH, un même retard implique **un même déphasage avec la source**.

♥ Propriété III.1: Théorème de Malus (Admis)

Lorsque le phénomène de diffraction peut-être négligé , le trajet d'une onde matérialisée par le trajet de l'énergie suivant des "rayons" est perpendiculaire au surface d'onde (cf. Figure 1.1).

♥ Définition III.1: Types d'ondes

On distingue (non exhaustif) :

⋆ **Les ondes planes** : Les fronts d'onde sont des plans et la direction de propagation est donc rectiligne. L'amplitude ne dépend pas de la position transverse à la propagation.

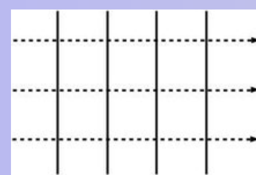


FIGURE 1.2 – Ondes planes

⋆ **Les ondes circulaire** [a] : Les fronts d'onde sont des cercles et la direction de propagation est radiale. L'amplitude varie alors avec la distance.

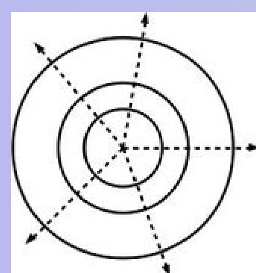


FIGURE 1.3 – Ondes circulaires

a. on pourra généraliser l'idée à une onde sphérique à 3 dimensions

Types d'ondes usuelles

IV S'entraîner

IV.1 Méthodes

Corrigé des exercices méthodes

Ondes progressives et retard

♥ Méthode IV.1: Retard d'une onde

On considère une source Laser émettant une onde assimilable à une plane se dirigeant dans la direction des x positifs. L'onde est émise dans le plan du point $S_0(x = 0)$ et le champ électrique émis est représenté ci-après (on parlera de "trains d'onde").

L'onde se propage à travers différents milieux comme présentés ci-après. On a noté les indices de réfraction de chaque milieu. On admet que, même si le signal n'est pas entièrement sinusoïdal, la fréquence de la portion assimilable à un sinusoïde définit la fréquence du signal émis.

On donne les abscisses des points représentés :

	S_0	S_1	S_2	S_3
Abscisses (en μm)	$x_0 = 0$	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$	$x_3 = 10$

Et celles des dioptres :

	n_0/n_1	n_1/n_2	n_2/n_3
Abscisses (en μm)	$x_{01} = 3.5$	$x_{1/2} = 6.3$	$x_{2/3} = 7.1$

Q1. Quelques grandeurs caractérisent la propagation d'une onde ? d'une OPPH ? Lesquelles peuvent varier durant la propagation du signal ? Déterminer ces caractéristiques au point S_0 et préciser le domaine d'émission du Laser.

Q2. Exprimer le retard de l'onde passant par chaque point représenté sur le graphique. En déduire l'expression temporelle du champ électrique en chaque point (on considèrera le champ électrique comme une grandeur scalaire).

♥ Méthode IV.2: Retard d'une ondes - Trajet non rectiligne

On considère un miroir plan et une source S située à une distance H du miroir (le milieu entre le miroir et la source est optiquement assimilable à du vide). On suppose que la source émet une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ mais que pour simplifier l'étude, l'amplitude de l'onde est la même sur tout le trajet [a]

On considère un point M situé aussi à une distance H du miroir et à une distance d de S.

Q1. Représenter les deux rayons issus de S qui vont arriver au point M.

Q2. Déterminer l'expression du champ électrique (scalaire) associé à chacun des deux rayons sachant que lors de la réflexion, l'onde se déphasage de π en plus du retard à la propagation. On donnera la réponse en fonction de E_m l'amplitude du champ émis, ω la pulsation du signal, d, H, λ et t.

a. En réalité, elle diminue avec le carré de la distance.

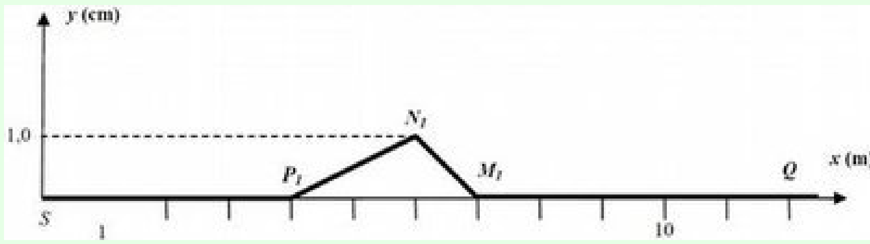
♥ A retenir: Calculer le retard d'une onde

On retiendra que la détermination de la forme mathématique d'une onde passe par le calcul du retard à la propagation. Ce dernier ce calcul **en tenant compte des variations possibles de vitesse et de direction de l'onde sur son parcours.**

IV.2 Applications

✍ Exercice IV.1: Onde progressive

On étudie la propagation sans amortissement d'une perturbation le long d'une corde élastique. A la date $t = 0$, le front de l'onde présenté sur le graphique finit d'être émis à l'extrémité S de la corde. A la date $t_1 = 2,3$s, on prend un cliché de la corde ; la Figure suivante reproduit le cliché avec deux échelles de longueurs différentes suivant l'horizontale et suivant la verticale. M_1 est la position du front de l'onde à la date t_1, N_1 celle de la crête et P_1 celle de la queue de l'onde.



Q1. L'onde qui se propage le long de la corde est-elle transversale ou longitudinale ? Que représente son amplitude $y(x, t)$?

Q2. Calculer la célérité de l'onde le long de la corde.

Q3. Quelle est la durée τ du mouvement d'un point de la corde au passage de l'onde ?

Q4. A la date t_1, quels sont les points de la corde qui s'élèvent ? ceux qui descendent ?

Q5. Dessiner sur le graphique donné ci-dessous, l'aspect de la corde à la date $t_2 = 3,6$s.

Q6. Soit le point Q de la corde situé à 12.0m de S.

- **Q6.a.** A quelle date t_3 commence t-il à bouger ?
- **Q6.b.** A quelle date t_4 passe-t-il par un maximum d'altitude ?
- **Q6.c.** A quelle date t_5 cesse-t-il de bouger ?
- **Q6.d.** A l'aide des résultats précédents, schématiser l'allure de la courbe $y_Q = f(t)$ où y_Q représente l'élongation du point Q à la date t.

Chapitre 2: Superposition de deux ondes

I Position du problème

I.1 Paramétrage

On considère deux sources S_1 et S_2 émettant chacune un signal physique se propageant dans le milieu environnant et représentée par la grandeur Y dont l'expression en un point M à un instant t sera notée $Y(M,t)$. On suppose que ces deux ondes sont sinusoïdales de fréquence f_1 et f_2. On note :

- ⋆ $Y_1(M,t) = Y_{1m}\cos(\omega_1 t + \phi_{M,1})$ pour l'onde issue de la source S_1 (appelée onde 1).
- ⋆ $Y_1(M,t) = Y_{2m}\cos(\omega_2 t + \phi_{M,2})$ pour l'onde issue de la source S_2 (appelée onde 2).

En pratique la phase à l'origine $\phi_{M,i}$ a pour cause un déphasage à la source ET le déphasage introduit par le retard à la propagation entre S_i et M.

♥ Propriété I.1: Principe de superposition

Pour la très grande majorité des ondes, les grandeurs qui les décrivent suivent un principe de superposition. Ainsi la grandeur résultante $Y(M,t)$ au point M sera :

$$Y(M,t) = Y_1(M,t) + Y_2(M,t)$$

♥ Définition I.1: Ondes cohérentes et ondes synchrones

Rappel : Le déphasage d'un signal sinusoïdal 2 sur un autre signal sinusoïdal 1 est la différence de phase :

$$\Phi_{2/1}(M,t) = \varphi_2(M,t) - \varphi_1(M,t) = (\omega_2 - \omega_1)\,t + \phi_{M,2} - \phi_{M,1}$$

Les deux ondes sont dites :

- ⋆ **synchrones** si elles ont la même fréquence.
- ⋆ **cohérentes** si elles ont la même fréquence ET que leur déphasage initiaux (aux sources) sont constants. Dans ce cas le déphasage entre les deux ondes est *constant.*

Synchronisme et cohérence

Représentation de Fresnel et différents cas

I.2 Différents cas

♥ A retenir: Différents cas et importance du déphasage.

L'étude en annexe montre que deux ondes qui vont se superposer en un même point ne donneront pas nécessairement une onde d'amplitude plus importante.

- ⋆ Le critère important est le **déphasage** entre les deux ondes : on maximise l'amplitude por deux ondes en phase et on le minimise pour des ondes en opposition de phase.
- ⋆ Suivant que les ondes soient cohérentes ou non, le déphasage sera constant ou non et l'on observe différents phénomènes :
  - — ondes asynchrones mais de fréquences proches : **battements** (cf. Méthode III.1 p.16)
  - — ondes cohérentes : **interférences**
  - — sinon tout se passe comme si les signaux était "indépendants" en M.

II Interférences

Les interférences peuvent être réalisées avec tout types d'ondes mais nous nous limiterons ici à décrire le concept pour des ondes lumineuses.

II.1 Position du problème

On considère deux sources lumineuses qui émettent chacune des ondes lumineuses **cohérentes**, c'est-à-dire de même fréquence $f_1 = f_2 = f$ et dont le déphasage en un point donné est constant. On traitera pour simplifier le champ électrique comme une grandeur scalaire E. Les champs électriques des deux ondes s'écrivent :

$$E_1(M) = E_{1m}\cos(2\pi f t + \phi_{M,1}) \tag{2.1}$$
$$E_2(M) = E_{2m}\cos(2\pi f t + \phi_{M,2}) \tag{2.2}$$

♥ Théorème II.1: Onde résultante

L'onde résultant de la superposition de deux ondes sinusoïdales cohérentes est aussi une onde sinusoïdales de même fréquence f et dont l'amplitude E_{totalm} dépend des amplitudes des ondes qui interfèrent **ET du déphasage $\Delta\Phi_M = \phi_{M,2} - \phi_{M,1}$ entre les deux ondes au point M**.

Si les deux ondes ont la même amplitudes E_0, alors le champ électrique se met sous la forme :

$$E_{total}(M,t) = A\cos(\Delta\Phi_M/2)\cos(2\pi ft + \varphi) \tag{2.3}$$

avec φ une phase à l'origine dont l'expression n'est pas à connaître.

Le cas où les ondes n'ont pas la même amplitude sera traité en exercice.

♥ Démonstration

La démonstration n'est à savoir que lorsque les deux ondes ont la même amplitude qu'on note E_0. On sait que $E_{total}(M,t) = E_{m1}\cos(2\pi ft+\phi_{M,1})+E_{m2}\cos(2\pi ft+\phi_{M,2})$ par principe de superposition. On suppose de plus que $E_{m1} = E_{m2} = E_0$. En utilisant les formules de trigonométrie, il vient :

$$\begin{aligned} E_{total}(M,t) &= 2E_0(\cos(\frac{2\pi ft + \phi_{M,1} - (2\pi ft + \phi_{M,2})}{2})\cos(\frac{2\pi ft + \phi_{M,2} + (2\pi ft + \phi_{M,2})}{2})) \\ &= 2E_0(\cos(\frac{\phi_{M,1} - \phi_{M,2}}{2})\cos(2\pi ft + \frac{\phi_{M,1} + \phi_{M,2}}{2})) \end{aligned}$$

On obtient l'expression demandée avec : $A = 2E_0$

II.2 Interférences constructives et destructives.

♥ Définition II.1: Interférences constructives et destructives

Le phénomène précédent (*l'amplitude résultant dépend du déphasage entre les deux ondes*) est appelé **phénomène d'interférences**.

- ⋆ Lorsque l'amplitude résultante est maximale, on parle **d'interférence constructive.**
- ⋆ Lorsque l'amplitude résultante est minimale, on parle **d'interférence destructive.**

L'expression précédente, comme la représentation de Fresnel (cf. Figure 2.1) montre que :

- ⋆ Les interférences constructives correspondent à un déphasage $\Delta\Phi_M = 0[2\pi] = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.
- ⋆ Les interférences destructives correspondent à un déphasage $\Delta\Phi_M = \pi[2\pi] = (2m+1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

II.3 Grandeurs caractéristiques

Dans la plupart des cas, la phase à l'origine de chaque onde a principalement pour origine le retard à la propagation et est donc lié au chemin parcouru et à la célérite de l'onde.[1]

1. Les grandeurs décrites ici sont principalement utilisées pour les ondes lumineuses. Pour les autres ondes (sonores par exemple), on raisonne sur le déphasage.

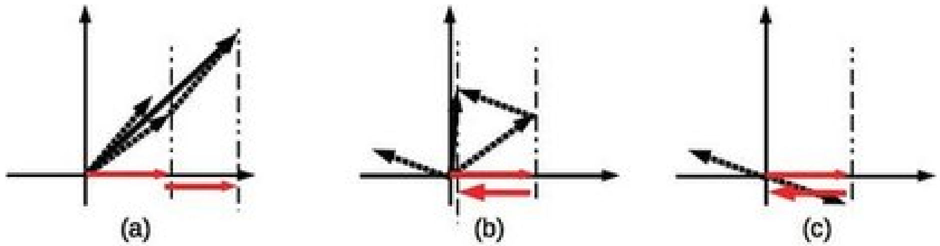


FIGURE 2.1 – Différents cas d'interférences constructives (a), destructives (c), quelconques (b)

♥ Définition II.2: Chemin optique

Soit une onde lumineuse parcourant un chemin Γ et on note $n(M)$ l'indice de réfraction en tout point M du chamin Γ. On définit le chemin optique de l'onde sur le chemin Γ par :

$$S = \int_\Gamma n(M)ds(M) \tag{2.4}$$

où $ds = dOM$ est la distance infinitésimale parcourue sur le chemin.

Si deux ondes arrivent en un point M avec des chemins optiques $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, on définit la **différence de chemin optique de l'onde 2 sur l'onde 1** :

$$\delta = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1 \tag{2.5}$$

♥ Propriété II.1: Interprétation et cas à connaître

Le chemin optique correspond à la distance qu'aurait parcouru l'onde dans le même temps si elle s'était propagée dans le vide.

Si le milieu est homogène :

$$S = nD \tag{2.6}$$

avec D la distance parcouru.

On sera souvent amené à calculer un chemin optique sur une succession de trajets dans des milieux homogènes.

♥ Démonstration

Le cas particulier d'une propagation dans un milieu homogène est trivial en remarquant que la propagation est alors rectiligne et que n ne dépend pas de M.
De plus ($v(M)$ est la célérité de l'onde au point M et c la cérélité de la lumière dans le vide) :

$$\begin{aligned} S &= \int_\Gamma c\frac{ds(M)}{v(M)} \\ &= c\int_\Gamma dt(M) \\ &= c\Delta t_\Gamma \end{aligned}$$

avec $dt(M)$ le temps mis par l'onde pour parcourir la distance $ds(M)$ et Δt_Γ le temps mis pour parcourir le chemin Γ en entier.
On obtient la distance parcourue dans le vide dans le même temps Δt_Γ.

♥ Propriété II.2: Lien entre déphasage et chemin optique

Soit deux ondes cohérentes interférant en un point M où leur chemin optique sont $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ et la différence de chemin optique $\delta = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1$. Le déphasage entre les deux ondes s'écrit :

$$\Delta\Phi_M = -\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta + \left(\phi_{0,2} - \phi_{0,1}\right) \tag{2.7}$$

où les $\phi_{0,i}$ sont les phases à l'origine aux sources des deux ondes et λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

- ⋆ Il peut arriver qu'un déphasage supplémentaire soit ajoutée suivant le trajet de l'onde (cf. le cas de la réflexion sur le miroir (Exercice IV.2 p.9)).
- ⋆ Ces déphasages supplémentaires comme les phases à l'origine peuvent être "transformées" mathématiquement en ralongeant les chemins optiques (Exercice III.3 p.19).
- ⋆ **Intérêt : La différence de chemin optique est directement une grandeur géométrique qui peut donc se calculer facilement à l'aide d'un schéma.**

♥ Démonstration

On peut reprendre la démonstration précédente pour calculer la différence de chemin optique (Δt_{Γ_1} et Δt_{Γ_2} sont les temps de parcours des ondes sur chaque chemin) :

$$\delta = c\left(\Delta t_{\Gamma_2} - \Delta t_{\Gamma_1}\right)$$

On a associé précédemment le retard temporel de l'onde au déphasage : $\phi_{M,i} = -\omega\Delta t_{\Gamma_i}$ soit :

$$\delta = -\frac{c}{\omega}\left(\phi_{M,2} - \phi_{M,1}\right)$$

En remarquant que $\frac{c}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, il vient l'expression demandée.

♥ Définition II.3: Ordre d'interférence

On définit l'ordre d'interférence $p(M)$ en un point M par :

$$p(M) = \frac{\delta}{\lambda_0} \tag{2.8}$$

avec δ la différence de chemin optique au point M.

♥ Propriété II.3: Cas des interférences constructives et destructives

- Pour des interférences constructives, la différences de chemin optique est un nombre entier de fois longueur d'onde et l'ordre d'interférence un nombre entier.

$$\begin{cases} \delta_{constructif} & = m\lambda_0 \\ p_{constructif} & = m \end{cases} \tag{2.9}$$

avec $m \in \mathbb{Z}$

- Pour des interférences destructives, la différences de chemin optique est un nombre demi-entier de longueur d'onde et l'ordre d'interférence un demi-entier.

$$\begin{cases} \delta_{constructif} & = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \\ p_{constructif} & = m + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $m \in \mathbb{Z}$

- On peut donc se limiter à calculer la différence de chemin optique sans remonter au déphasage dans de nombreux cas pour déterminer les positions d'interférences constructives ou destructives.
- L'ordre d'interférence étant un nombre entier, il permet de "repérer" chaque interférences constructives (chaque frange pour les fentes d'Young) en partant de l'endroit où $p = 0$. On peut de plus "compter" le nombre de franges brillantes par une simple différence d'ordre entre deux points pour peu que p soit monotone entre des deux points.
- S'entraîner à démontrer cette propriété.

III S'entraîner

III.1 Méthodes

Corrigés des exercices Méthodes

Battements

Dans cet exercices, les ondes ne sont pas synchrones mais légèrement décalées en fréquence.

♥ Méthode III.1: Etude des battements

On considère deux ondes issues de deux sources S_1 et S_2 asynchrones de fréquences respectives f_1 et f_2. On considère qu'il s'agit d'ondes sonores de fréquences très proches l'une de l'autre. On considère de plus pour simplifier que les deux ondes ont la même amplitude de surpression : p_0.

Les deux ondes arrivent en un même point M et on note $\phi_{2/1}$ le déphasage de l'onde 2 sur l'onde 1 au point M.

Q1. Exprimer la superpression totale $p(M,t)$ au point M.

Q2. Montrer que, si $f_2 \approx f_1$ celle-ci s'apparente à un signal sonore de fréquence f_f à préciser, modulé en amplitude par un sinusoïde de fréquence f_m à préciser aussi en fonction de f_1 et de $\Delta f = f_2 - f_1 \ll f_1$. Représenter graphiquement l'évolution de $p(M,t)$.

Q3. En dessinant la représentation de Fresnel des signaux à deux instants choisis, retrouver les ampitudes maximales et minimale de la surpression.

Q4. L'intensité sonore ressentie $I(M,t)$ est proportionnelle à l'amplitude au carré de $p(M,t)$. Représenter son évolution temporelle.

Q5. Expliquer comment peut-on remonter expérimentalement à Δf à partir du tracé de $I(M,t)$.

Q6. Si les deux ondes s'étaient rencontrées en un point $M_1 \neq M$ après avoir fait un trajet différent, les résultats précédents seraient-ils à modifier ?

♥ A retenir: Etude des battements

- ⋆ Les battements se produisent lorsqu'on somme deux signaux (pas forcément des ondes) **de fréquences très proches**.
- ⋆ Le signal résultant aura **l'allure d'un signal modulé en amplitude** dont la porteuse est la fréquence moyenne et la modulante la différence des deux fréquences.
- ⋆ *La représentation de Fresnel permet de retrouver facilement les amplitudes maximales et minimales* et donc de représenter la grandeur résultante sans même avoir besoin de déterminer mathématiquement son expression (utile pour des amplitudes différentes).
- ⋆ Pour les battements, le **déphasage varie** de sorte que l'amplitude maximale et minimale sera observée **en tout point mais à des instants différents** (pas de zone claire ou de zone sombre mais une variation temporelle de l'intensité).

Interférences

♥ Méthode III.2: Fentes d'Young

Un éclairage LASER cohérent et monochromatique de longueur d'onde λ_0 éclaire un ensemble de deux fentes parallèles de longueur L et de largeur ϵ distantes l'une de l'autre de a. On suppose que $L \gg a$ et $a \gg \epsilon$ de sorte qu'on peut assimiler les fentes à des fentes de longueur infinies et d'épaisseur nulle.

On place un écran parallèle aux fentes à une distance D des fentes telle que $D >> a$ et on visualise la figure lumineuse en une zone proche du centre de l'écran (défini en regard du centre de la double fente). La figure, appelée figure d'interférences obtenues, est données figure suivante (la courbe correspond au profil d'intensité mesuré grâce à un capteur CCD).

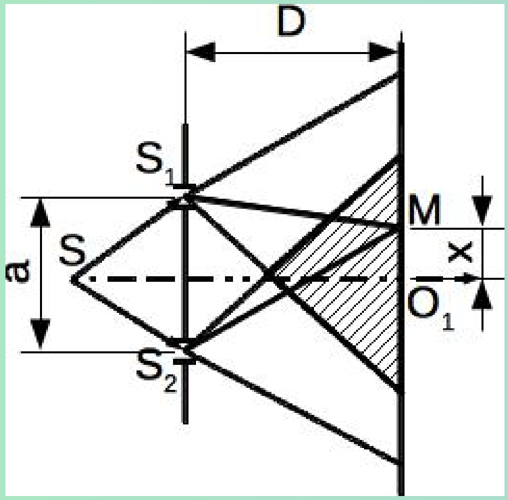


FIGURE 2.2 – Zone d'interférences

La diffraction permet de considérer les deux fentes S_1 et S_2 comme de nouvelles sources (des sources secondaires) qui émettent dans (presque) toutes les directions. Les interférences ont lieu dans tout une zone d'espace : on parle d'interférences délocalisées.

Etude de la figure d'interférences

Q1. Déterminer la différence de chemin optique en un point M de coordonnées $(x; 0)$ sur l'écran sans approximation puis simplifier l'expressoin obtenue pour $x \ll D$.

Q2. En déduire l'ordre d'interférence et le déphasage entre les deux ondes dans le cadre de l'approximation $x \ll D$.

Q3. Déterminer les positions où l'interférence est contructive, destructive. Commenter la forme des zones claires et sombres.

Q4. Déterminer l'interfrange, distance entre deux franges d'égale intensité.

Q5. Comparer les données aux observations expérimentales faites ci-dessous.

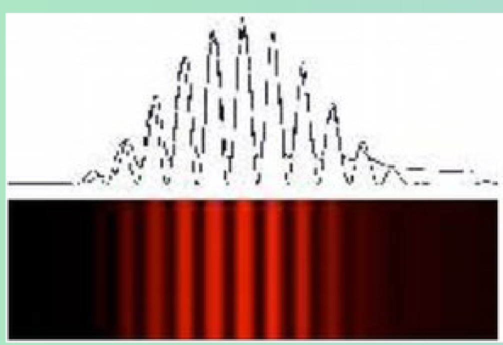


FIGURE 2.3 – Figure d'interférences

Intérêt de l'ordre d'interéférence

Q6. Exprimer l'ordre d'interférence au centre de la figure (appelé O_1). Correspond-il à une frange brillante ou sombre ?

Q7. Exprimer l'ordre d'interférence en un point M de l'écran situé à une abscisse x.

Q8. Exprimer au moyen de l'interfrange le nombre de franges située entre O_1 et M. Retrouver l'interprétation de l'interfrange.

♥ A retenir: Etude d'interférences

- ⋆ L'étude des interférence consiste à déterminer le déphasage en un point M (sur un écran ou dans l'espace). On peut se limiter au calcul de la différence de chemin optique dans plusieurs cas.
- ⋆ Les cas d'interférences constructives et destructives se déterminent grâce aux conditions établies en cours. Contrairement aux battements, l'amplitude **ne varie pas** pour un point donné mais varier dans l'espace : on observe des zones claires et des zones sombres.
- ⋆ L'ordre d'interférences est utiles pour "compter" ou repérer les franges claires.
- ⋆ Des effets comme la diffraction ou la perte de cohérence peuvent limiter la figure d'interférence.

Effet de la perte de cohérence

♥ Méthode III.3: Modification du déphasage

On reprend l'exemple de l'exercice IV.2 p.9 où un miroir réfléchi un faisceau issu d'un point S situé à une distance H. Un point M est aussi à la distance H du miroir et à une distance d de S.

On rappelle que la réflexion sur le miroir ajoute un déphasage de π à l'onde réfléchie.

Q1. Calculer le déphasage de l'onde réfléchie au point M. Montrer que la réflexion revient à soustraire $\lambda/2$ au chemin optique.

Q2. Déterminer les points M où les interférences sont constructives dans l'hypothèse $H \gg d$.

♥ A retenir: Modification du déphasage

- ⋆ Il arrive que le déphasage soit modifié par certains phénomènes. Il est alors conseillé de raisonner sur le déphasage et non sur le chemin optique.

♥ Méthode III.4: Interférences à l'infini et projection

*Il s'agit, **pour la première année**, d'une méthode d'étude avancée mais qui deviendra un classique en deuxième année.*

On reprend le dispositif des fentes d'Young précédent mais on s'intéresse à la figure d'interférence observées à l'infini.

Q1. Quelle grandeur va alors caractériser un point de l'image à l'infini ?

Q2. En utilisant le théorème de Malus et le principe de retour inverse, montrer que la différence de chemin optique se limite à la distance entre S_2 et le projeté de S_1 sur le rayon 2. En déduire la différence de chemin optique.

Q3. Exprimer alors les conditions d'intérférence constructives et destructives.

Q4. Comment faire pour observer la figure d'interférences à l'infini... sur un écran. Déduire alors les conditions d'interférences constructives et l'interfrange sur l'écran.

III.2 Applications

✍ Exercice III.1: Battements avec amplitudes différentes

On considère en un point M deux signaux sonores d'amplitudes p_1 et p_2 différentes ($p_1 > p_2$) et de fréquence différentes f_1 et $f_2 = f_1 + \Delta f$ avec $\Delta f \ll f_1$.

Q1. Réaliser la représentation de Fresnel des deux signaux ainsi que leur somme dans les cas :

- **Q1.a.** quelconque
- **Q1.b.** lorsque la supression résultante est maximale
- **Q1.c.** lorsque la surpression résultante est minimale.

Q2. En déduire p_{min} et p_{max} surpression résultante minimale et maximale.

Q3. En déduire, sans déterminer complètement l'expression mathématique, le tracé de la surpression résultante $p(M, t)$.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude des battements (p.16)

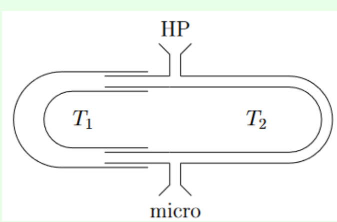
Eléments de correction (sans justification) :

$$p_{min} = p_1 - p_2;\ p_{max} = p_1 + p_2$$

✍ Exercice III.2: Bilan sur les Interférences

Reproduire dans un tableau le bilan des grandeurs caractéristiques qu'on peut calculer pour étudier une figure d'interférences et donner les valeurs possibles qu'elles peuvent prendre pour des cas d'interférences constructives et des cas d'interférences destructives.

✍ Exercice III.3: Application aux ondes sonores



On considère un trombone modélisé par le schéma ci-après. La partie gauche peut coulisser, ralongeant le trajet de l'onde sonore dans cette partie. Un haut-parleur émet un son à une fréquence de $f = 1.5kHz$ et un microphone enregistre le signal en sortie. En déplaçant T_1, on fait varier l'amplitude du signal observé qui passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_1 de $d = 11.5cm$

Q1. Déterminer la longueur d'onde puis la célérité du son dans l'air pour l'expérience réalisée.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Conditions d'interférences destructives et constructives
- ⋆ Relation de dispersion

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $\lambda = d/2$; $c = \lambda f$.

III.3 Entraînement

✍ Exercice III.4: Trous d'Young

On considère une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ, ponctuelle située au point S et émettant dans le vide. A une distance D_1 de S, on place une plaque opaque percé de 2 trous S_1 et S_2 distants de a. On suppose que ces deux trous sont de taille ϵ très faibles. On note O le milieu de S_1S_2 et Ox l'axe normale au plan. Dans un premier temps, la source S est située sur l'axe Ox. On note Oy l'axe passant par les deux trous et Oz l'axe perpendiculaire dans le plan de la plaque.

Q1. Quelle phénomène justifie qu'à la sortie des trous, on puisse considérer l'existence d'un faisceau élargi. Rappeler alors la relation (approximative) entre l'ouverture angulaire du faisceau et la taille du trou.

Q2. Faire un schéma du dispositif en représentant les faisceaux sortant des deux trous. Justifier qu'on puisse observer des interférences entre deux ondes lumineuses dans un zone qu'on précisera.

Q3. Dans l'hypothèse d'un trou infiniment petit, que devient cette hypothèse ? Quel problème pratique pose l'utilisation d'un trou top petit ? On supposera ce problème non limitant dans l'étude faite ici et on supposera $\epsilon = 0$ dans toute la suite du problème de sorte que l'on puisse les assimiler à deux sources nouvelles sources ponctuelles secondaires.

On place un écran parallèle à la plaque à une distance D_2 de la plaque et on suppose $D_2 \gg a$. Sur l'écran, on repère la position d'un point à ses coordonnées (y, z) par rapport au centre A, intersection de l'écran et de l'axe Ox. On s'intéresse à l'éclairement en un point M de coordonnées $(y_M, 0)$. On suppose $D_2 \gg y_M$.

Q4. On considère l'onde passant par le trou S_1.

- **Q4.a.** Exprimer la distance SS_1M parcouru par l'onde.
- **Q4.b.** En déduire le champ électrique associé à cette onde au point M (on prendre S comme origine des phases et on traitera le champ électrique comme une grandeur scalaire) et simplifier alors cette expression en utilisant les approximations de l'énoncé.

Q5. Répondre aux questions précédentes pour l'onde passant par le trou S_2.

Q6. Associer à chaque champ électrique précédente sa représentation complexe. En déduire la représentation complexe de l'onde résultante puis déterminer par le calcul l'amplitude réelle de l'onde résultante en un point M de coordonnées $(y_M, 0)$ sur l'écran.

Q7. En déduire les positions franges brillantes et l'interfrange.

Q8. On déplace la source S d'une distance d dans la direction Oy. On suppose les résultats précédents toujours vrais, déterminer le nombre de franges brillantes que l'on voit défiler au point $A(0; 0)$ sur l'écran pendant l'opération.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Retard d'une onde
- ⋆ Conditions d'interférences destructives et constructives
- ⋆ Interfrange
- ⋆ Représentation complexe

✍ Exercice III.5: Filtre interférentiel

On considère une lame à face parallèle d'épaisseur e et d'indice n entouré à gauche et à droite par de l'air. Un faisceau monochromatique de longueur d'onde λ arrive sur la face de gauche avec un angle d'incidence i.

Q1. Réaliser le tracé des deux premiers rayons transmis à droite de la lame et justifier que les interférences ont lieu à l'infini.

Q2. On ne considère que les deux premiers rayons transmis. Déterminer pour $i \ll 1$ et en travaillant à l'ordre 1, la condition sur l'épaisseur λ pour qu'on observe des interférences constructives.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Retard d'une onde
- ⋆ Conditions d'interférences destructives et constructives
- ⋆ Lois de Snell Descartes

Chapitre 3: Ondes stationnaires

I Généralités

♥ Définition I.1: Onde stationnaire

Une onde stationnaire est une perturbation qui ne se propage pas.

Mathématiquement, cela correspond à un découplage entre temporel et spatial : $y(x,t) = f(x) \times g(t)$. En général, on traire des ondes stationnaires sinusoïdales :

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi) \tag{3.1}$$

- ⋆ On parle malgré tout d'onde car une onde stationnaire en général le phénomène résultant de la propagation simultanée dans des sens opposés de plusieurs ondes progressives de même fréquence et de même amplitude.

♥ Définition I.2: Noeuds et ventres

Dans une onde stationnaire, on observe que l'amplitude d'oscillation est une fonction de l'espace. On distingue :

- ⋆ Les lieux d'amplitude maximale : les **ventres**.
- ⋆ Les lieux d'amplitude minimale (nul) : les **noeuds**

Leurs positions se déduisent de l'expression mathématique précédente (cf. Exercice IV.1 p.24).

II Obtenir une onde stationnaire

Comme on le verra en exercice, une onde stationnaire s'obtient en général en superposant deux ondes progressant en sens opposés mais de même amplitude (cf. Exercice IV.2 p.24).

Cette configuration s'obtient généralement grâce à une réflexion parfaite (cf. Exercice IV.3 p.24).

III La corde de Melde

*En pratique, on ne peut avoir une corde infinie. L'onde incidente est produite à une distance L du point de fixation par un système excitateur. C'est un tel système appelée **corde de Melde**, qui a été étudié en TP : on a observé alors un phénomène de résonance pour différentes fréquences toutes multiples d'une première (le fondamental).*

*On peut, d'un point de vue plus théorique imaginer la corde de Melde fixée aux deux extrémités et vibrant d'elle même. Les fréquences pour laquelle la corde peut vibrer sont appelées des **modes propres**. C'est ce système que nous allons étudier en exercice méthode. Nous montrerons que :*

- ⋆ *ces modes propres correspondent aux fréquences de résonance.*

⋆ *ils sont donc tous des multiples du premier mode propre qui est appelé le fondamental.*

Modes propres et résonance

IV S'entrainer

IV.1 Méthodes

Corrigé des exercices méthodes

♥ Méthode IV.1: Position des noeuds et des ventres

On considère une onde stationnaire de forme :

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\sin(kx) \tag{3.2}$$

Q1. Déterminer la position des ventres et des noeuds en fonction de la longueur d'onde.

♥ A retenir: Noeuds et ventres

Les noeuds et les ventres d'une onde stationnaires sont régulièrement espacés. L'écart entre un noeud et un ventre est $\lambda/4$.

♥ Méthode IV.2: Superposition d'ondes progessives

Q1. Montrer que la superposition de deux ondes planes, l'une progressant suivant les x positifs et l'autre suivant les x négatifs produira une onde stationnaire si les deux ondes sont de même amplitude.

♥ Méthode IV.3: Utiliser une condition aux limites

On considère une onde plane harmonique progressant suivant les x positive avec une pulsation ω et une amplitude y_0 sur une corde infinie entre $x = -\infty$ et $x = 0$.

En $x = 0$, la corde est fixée de sorte que $y(x = 0, t) = 0$.

Q1. Pourquoi y a-t-il forcément naissance d'une onde progressant suivant les x négatifs (c'est-à-dire une onde réfléchie) ?

Q2. En utilisant la condition aux limites, déterminer l'expression de l'onde réfléchie puis en déduire que l'onde résultante est une onde stationnaire.

♥ A retenir: Superposition d'ondes progressives et conditions aux limites

On retiendra :

- ⋆ la méthode pour montrer que la superposition de deux ondes de même amplitude produit une onde progressive.

FIGURE 3.1 – Simulation de la superposition des deux ondes progressives

- ⋆ L'utilisation d'une condition aux limite nulle permet de réaliser une telle configuration. Cela correspond à une réflexion parfait réalisée de différentes manières suivant le types d'onde : réflexion sur un miroir parfait, fixation d'une corde...
- ⋆ *Conseil :* Si vous avez le choix du paramètrage, positionner la condition aux limites nulle en $x = 0$ pour ne pas avoir une phase à l'origine non nulle.
- ⋆ *Attention :* Les deux exemples précédents montrent que la forme de l'onde stationnaire peut varier (produit de cos, de sin, ou des deux). Il faut donc s'adapter en fonction des expressions données et vérifier la cohérence avec les conditions aux limites.

♥ Méthode IV.4: La corde de Melde

On considère une corde de longueur L attachée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. On s'intéresse ici aux fréquences à laquelle la corde peut vibrer d'elle-même [a] de manière sinusoïdale.

La vibration de la corde crée des ondes progressives (de célérité c) et la fixation de la corde implique (cf. supra) qu'il y aura a priori une onde régressive et une onde progressive [b] :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_+(x,t) + y_-(x,t) && (3.3) \\ &= y_{0-}\cos(\omega t - kx) + y_{0+}\cos(\omega t + kx + \psi) && (3.4) \end{aligned}$$

Q1. En utilisant la condition en $x = 0$, montrer que l'onde résultante est stationnaire.

Q2. En utilisant l'autre condition aux limites, montrer, par une méthode graphique que les longueurs d'onde sont **quantifiées** (c'est-à-dire qu'elles ne peuvent prendre que des valeurs discrètes) et déterminer ces longueurs d'onde et les fréquences associées.

Q3. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

a. Vibration sans amortissement : on néglige donc les frottements.

b. Il y a de multiples réflexions donc de multiples ondes progressives/régressives mais mathématiquement, on peut toujours récrire la somme d'ondes progressives/régressives de même fréquence comme une seule onde progressive/régressive.

♥ A retenir: Modes propres d'une ondes stationnaire

On retiendra :

- ⋆ qu'une onde confinée sur une longueur finie ne peut prendre que des valeurs de longueur d'onde/fréquence discrètes. Ces fréquences sont toutes multiples d'une fréquence fondamental. On parle de **quantification des modes propres du système.**
- ⋆ les deux méthodes de détermination des longueurs d'onde : graphique (où on admet souvent que l'onde est stationnaire) et analytique (où l'on démontre en général le caractère stationnaire au préalable.)

On retrouve ces quantifications des modes propres en mécanique quantique pour les états liés (on parle alors d'*état stationnaire*). Les premières explications de cette quantification ont d'ailleurs été basés sur la conception ondulatoire de la matière.

IV.2 Applications

✍ Exercice IV.1: Cavité LASER résonante

Un LASER est une source lumineuse monochromatique. Si l'émission de la lumière est due à des phénomènes de transitions entre les niveaux d'énergie d'atomes. On place généralement ce milieu dans un cavité résonante dont l'intérêt est d'affiner la sélection des longueurs de la source et ainsi obtenir une lumière la plus monochromatique possible.

On se propose de préciser le mode de fonctionnement de la cavité résonnante au moyen d'un modèle simple (donc imparfait mais déjà intéressant). On suppose que celle-ci est composée de deux miroirs plans parfaits face à face distants d'une distance d et séparés par du vide. On note Ox l'axe perpendiculaire aux miroirs. Entre les deux miroirs se propage une onde électromagnétique monochromatique plane pouvant se propager dans les deux sens. Les miroirs sont supposés parfaits c'est-à-dire qu'il réfléchissent entièrement le rayonnement. Cela implique (admis) que le champ électrique doit être nul sur les miroirs. On décrit la vibration électromagnétique par le champ électrique de l'onde en tout point de l'espace : $\overrightarrow{E(x,t)} = E_y(x,t)\overrightarrow{e_y}$.

Q1. Quelle autre grandeur physique décrit la propagation d'une telle onde ?

Q2. Préciser dans le cas d'une onde progressive monochromatique de pulsation ω se déplaçant dans le sens des x positifs l'expression générale du champ électrique.

Q3. Justifier simplement la présence d'une onde régressive monochromatique, c'est-à-dire se déplaçant dans le sens des x négatifs. Donner son expression générale puis l'expression de l'onde électromagnétique résultante dans la cavité.

Q4. Exprimer les deux conditions aux limites qui en découlent. En déduire que l'onde résultante est une onde stationnaire et que les pulsations permises pour l'onde sont quantifiées.

Q5. En réalité, le rayonnement est émis par le milieu amplificateur du LASER composé de différents atomes. Pour de nombreuses raisons, cette émission ne produit pas un rayonnement monochromatique mais une gamme de fréquence. Pourquoi une telle cavité permet de sélectionner une fréquence et donc d'obtenir une lumière monochromatique ?

Q6. (Recherche) En réalité, la lumière d'un LASER n'est pas rigoureusement monochromatique. Rechercher les ordres de grandeurs de largeurs de raie de LASER (courant ou non) ainsi que les origines possibles d'un tel élargissement.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Forme mathématique d'une onde progressive.
- ⋆ Grandeurs associées aux ondes électromagnétique.
- ⋆ Etude mathématique des modes propres.

✍ Exercice IV.2: Tuyau ouvert

On considère le cas d'un tuyau ouvert aux deux extrémités et on cherche les fréquences correspondant aux modes propres d'une onde acoustique stationnaire. On admet que pour un tel tuyau, on attend un ventre de vitesse aux deux extrémités. On réalisera une étude graphique pour déterminer les modes propres.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude graphique des modes propres.

Eléments de correction (sans justification) : Vous devez trouver la même condition de quantification que pour la corde de Melde étudiée en exercice méthode.

IV.3 Entraînement

Les questions marquées (2A) sont suffisament guidées pour être traitées en première année mais font plus référence au programme de deuxième année.

✍ Exercice IV.3: Corde vibrante

On considère une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Sa masse linéique est μ et elle est tendue par une tension T_0. La vitesse de propagation des ondes mécaniques sur la corde est alors : $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

Q1. Quelle grandeur permet de décrire la vibration de la corde ?

Q2. Montrer que v est bien homogène à une vitesse.

Q3. Rappeler brièvement pourquoi on doit décrire la vibration de la corde comme la superposition de deux ondes. Préciser leurs expressions générales.

Q4. On cherche les pulsations ω auxquelles cette corde peut vibrer. Quelle est alors la forme générale de l'onde résultante ?

Q5. Exprimer les conditions que doit satisfaire l'onde ? En déduire les pulsations quantifiées auxquelles la corde peut vibrer. On précisera le fondamental ω_0.

Q6. (2A) *On peut montrer que la puissance moyenne transportée par une onde mécanique progressive monochromatique le long de la corde est de la forme : $\langle P(x)\rangle = a\langle Y^2(x,t)\rangle$ où a est une constante qu'on ne déterminera pas. Montrer que pour une onde stationnaire, il n'y a pas d'énergie transportée. Donner un autre sens au terme "d'onde stationnaire".

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude mathématique des propres.
- ⋆ Forme mathématique d'une onde progressive.

✍ Exercice IV.4: Le pipeau

Comme les instruments à corde, la production du son dans les instruments à vent est basé sur le principe d'ondes stationnaires. Nous allons illustrer ce principe en modélisant le fonctionnement du pipeau quand tous les trous sont bouchés (Fa). Dans une telle flûte, le son est produit par un résonateur (l'ouverture du pipeau) à une extrémité de l'instrument et se propage le long du tube se section droite S de longueur $L = 10$cm. On note Ox l'axe du tube, O étant la côte du résonateur. On suppose que la célérité du son dans le tube (rempli d'air) est $c = 344\text{m.s}^{-1}$. On rappelle que les deux grandeurs décrivant la propagation de l'onde sont la vitesse d'agitation d'une tranche d'air : $v(x,t)$ et la surpression engendrée par le passage de l'onde sonore : $p(x,t)$.

On précise aussi qu'on a la relation : $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$ où ρ_0 est la masse volumique de l'air au repos.

Q1. On suppose que le résonateur crée une onde plane progressive de fréquence f se propageant dans la direction des x croissants. On note v_{0+} l'amplitude de l'oscillation de la vitesse et p_{0+} l'amplitude de l'oscillation de la pression. Donner les expressions de $v_+(x,t)$ et $p_+(x,t)$ associées à cette onde en tout point du tube (utiliser les grandeurs définies dans l'énoncé).

Q2. Justifier la relation : $\lambda f = c$ où λ est la longueur d'onde de l'onde sonore dans le milieu.

Q3. (2A)Montrer que $\rho_0 c v_{0+} = p_{O+}$.

Q4. Au bout du tube, l'ouverture brutale provoque une réflexion d'onde dans le sens inverse de propagation. On note v_{0-} l'amplitude de l'oscillation de la vitesse et p_{0-} l'amplitude de l'oscillation de la pression. Donner les expressions de $v_-(x,t)$ et $p_-(x,t)$ associées à cette onde réfléchie en tout point du tube (utiliser les grandeurs définies dans l'énoncé).

Q5. (2A)Montrer que $\rho_0 c v_{0+-} = -p_{O-}$.

Q6. Donner l'expression de la surpression $p(x,t)$ et de la vitesse d'une tranche d'air $v(x,t)$ de l'onde résultante dans le tube.

Q7. Le résonateur et l'ouverture du tube impose un effondrement de la pression aux extrémités soit $p(0,t) = p(L,t) = 0$.

Q8. Montrer, en déterminant $p(x,t)$ que l'onde résultante est alors une onde stationnaire dans les fréquence possible sont quantifiées.

Q9. Déterminer $v(x,t)$. Comparer la position des noeuds de pression et de vitesse.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude mathématique des propres.
- ⋆ Forme mathématique d'une onde progressive.

IV.4 Problème

✎ Problème 2: Modes propres et résonance

Comme expliqué dans un annexe, il est difficile de réaliser un mode propre. Pour les étudier, on étudie plutôt les phénomènes de résonance du système soumis à une excitation sinusoïdale. Cet exercice revient sur ce point et propose de montrer qu'on retrouve les mêmes fréquences dans le cas de la corde de Melde.

Les méthodes utilisées ici sont un peu différentes mais elles préparent aux méthodes qui seront utilisées en seconde année et utilise des notions mathématiques déjà usitées : les représentations complexes.

Modes propres. On considère une corde de longueur L fixée en $x = 0$ et en $x = L$.

Q1. Quelle forme faut-il donner à la corde à l'instant $t = 0$ pour observer uniquement le fondamental ? Commenter.

Q2. On admet que si l'on donne à la corde une forme quelconque (par exemple en la pinçant en un point), son évolution temporelle peut-être décrite comme une combinaison linéaire de modes propres. En observant la forme mathématique obtenues, comment appellerait-on cette somme ? Justifier alors le terme de "fondamental" pour la premièr fréquence.

Résonance. Position du problème : On considère une corde de longueur L fixée en $x = 0$ et excitée en $x = L$ par un vibreur qui impose une vibration :

$$y(L,t) = y_m \cos \omega t \tag{3.5}$$

On admet que l'onde résultante est la superposition de deux ondes de pulsation ω (régime sinusoïdal forcé [a]) :

$$y(x,t) = y_{0-} \cos(\omega t - kx + \psi_-) + y_{0+} \cos(\omega t + kx + \psi_+) \tag{3.6}$$

Q1. Pourquoi ne peut-on pas cette fois choisir $\psi_- = 0$ a priori ?

Q2. Pour traiter le problème des phases, on va utiliser les représentations complexes. Donner les représentations complexes : du signal imposé par le vibreur, de l'onde progressive (suivant $+x$), de l'onde régressive (suivant $-x$). On notera $\underline{Y}_{0-}$ et $\underline{Y}_{0+}$ les amplitudes complexes associées aux deux dernières.

Q3. En utilisant les conditions aux limites, établir les équations que doivent vérifier $\underline{Y}_{0-}$ et $\underline{Y}_{0+}$ puis en déduire les deux amplitudes complexes en fonction de k, L, y_m.

Q4. En déduire l'expression de la grandeur réelle $y(x,t)$.

Q5. Qu'observe-t-on aux modes propres ?

En pratique, de nombreux phénomènes empêchent les résonances infinies :

- ⋆ *les frottements*
- ⋆ *l'elasticité de la corde (le système devient non linéaire)*

Néanmoins, tant que les amplitudes de vibration ne sont pas trop grande, ces deux phénomènes n'empêchent pas une concordance entre les fréquences de résonance et les modes propres.

a. Ce qui suppose que le système est linéaire.