Mécanique

C. Lacpatia

Aug 03, 2023

CONTENTS

CHAPTER

ONE

CINÉMATIQUE ET CINÉTIQUE DU POINT

1.1: Compétences

- Etablir les expressions du vecteur vitesse, du vecteur accélération et du vecteur position dans le cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Etablir les expressions du vecteur position et du vecteur vitesse dans le cas des coordonnées sphériques. Savoir établir l'expression du vecteur accélération dans des cas simples.
- Etablir, à partir d'un schéma, le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées. Construire le tridère local associé à chaque système de coordonnées et en déduire les composantes du vecteur vitesse.
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
- Cas du mouvement circulaire: Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires.
- Cas du mouvement circulaire: Identifier le lien entre le vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.
- Situer qualitativement le vecteur accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.
- Connaître les caractéristiques cinétiques d'un point matériel et pouvoir les calculer dans différentes systèmes de coordonnées pour des mouvements usuels.
- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.

Nous allons commencer par étudier les mouvements de points matériels. Les mouvements d'un tel système sont décrits uniquement par ses mouvements de translation (rectiligne ou non). Il n'y a pas de *rotation* d'un point sur lui même.Nous allons présenté ses éléments *cinématiques* (décrivant le mouvement sans matérialité du point) et *cinétiques* (décrivant le mouvement du point avec son inertie : on tient compte de sa masse.)

1.1 Comprendre le contexte.

1.1.1 Cinématique du point

1.1.1.1 Référentiel

Important 1.1

Référentiel
Un référentiel $\mathfrak{R}$ est un ensemble de points rigides - c'est-à-dire fixes les uns par rapports aux autres - auquel on associe une horloge. Comme le temps est absolu en mécanique classique, l'horloge est la même quelque soit le référentiel.

Important 1.2

Repère associé à un référentiel
En physique, on associe à un référentiel, un(des) repère(s) $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ soit la donnée d'un point (O) dans le référentiel (c'est-à-dire par rapport aux points rigides définit précédemment) et une base de 3 vecteurs dans ce même référentiel.

1.1.1.2 Position et trajectoire

1.1.1.2.1 Vecteur position

Vecteur position: Définition

Important 1.3

Vecteur position
On définit la position d'un point matériel M dans un référentiel $\mathfrak{R}$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ où O est un **point fixe** du référentiel.

Important 1.4

Equation horaire et trajectoire
L'évolution du mouvement du point matériel $OM(t)$ est appelée équation horaire. Elle est aussi définie par les composantes du vecteur position dans la base de projection. La courbe paramètrée (ou trace) ainsi définie est appelée trajectoire.

Expression du vecteur position

Important 1.5

Expressions
On peut exprimer le vecteur position dans les différents repères. Les vecteurs des bases locales sont exprimées au point M mobile:

- Coordonnées cartésiennes: $x_M(t)\overrightarrow{e_x} + y_M(t)\overrightarrow{e_y} + z_M(t)\overrightarrow{e_z}$.
- Coordonnées cylindrique: $r_M(t)\overrightarrow{e_r} + z_M(t)\overrightarrow{e_z}$.
- Coordonnées sphériques: $r_M(t)\overrightarrow{e_r}$.

Attention

On rappelle que les bases cylindriques et sphériques sont des bases **locales** dont les vecteurs vont varier lorsque le point M se déplace. Il faudra donc tenir compte de leur dérivées temporelles.

1.1.1.2.2 Trajectoires usuelles

Trajectoire rectiligne

Important 1.6

Mouvement rectiligne
Un mouvement rectiligne est un mouvement dont la trajectoire est portée par une droite (ou un segment) fixe dans le référentiel d'étude. Il se fait suivant une direction de l'espace: c'est un mouvement à 1 degré de liberté.

Trajectoire circulaire

Important 1.7

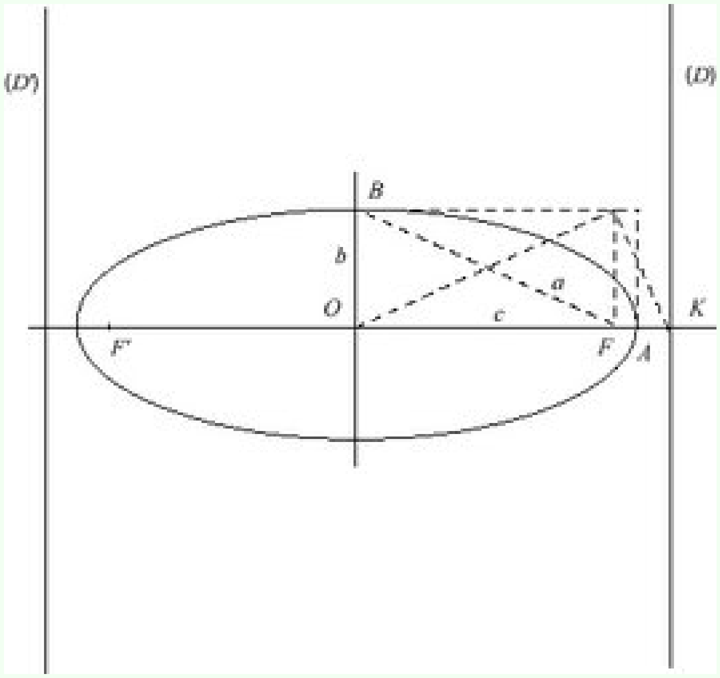
Mouvement circulaire
Un mouvement est dit circulaire si le point M se déplace sur un cercle (ou une portion de cercle) fixe dans le référentiel R. C'est aussi un mouvement à 1 degré de liberté.

Trajectoire elliptique

Important 1.8

EllipseUne ellipse est une courbe fermée qu'on peut caractériser/reconnaître de plusieurs manières:

- *Lieu géométrique (peu usité): Soit deux points, appelées foyers, F_1 et F_2 et un réel positif K, l'ensemble des points M tel que $MF_1 + MF_2 = K$ décrit une ellipse. Le milieu du segment F_1F_2 est appelé centre de l'ellipse.*
- Représentation polaire (**fondamentale**): Soit un point F centre d'un repère polaire. L'ensemble des points M dont les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{FM}$ sont tels que $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $p > 0$ et $0 \leq e < 1$ décrit une ellipse. **Le point F est un des foyers de l'ellipse**. On dit que p est le **paramètre de l'ellipse** et que **e** est l'excentricité de l'ellipse.
- Représentation cartésienne (très utile). L'ensemble des M dont les coordonnées (x, y) sont telles que: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ décrit une ellipse dont le centre est le centre du repère.
- Représentation paramétrique (utile): L'ensemble des M dont les coordonnées $(x(t) = a\cos t; y(t) = b\sin(t))$ décrit une ellipse dont le centre est le centre du repère.



Trajectoire parabolique

Important 1.9

Parabole
Une parabole est une courbe non fermée qu'on peut caractériser/reconnaître de plusieurs manières:

- Représentation polaire (**fondamentale**): Soit un point F centre d'un repère polaire. L'ensemble des points M dont les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{FM}$ sont tels que $r = \frac{p}{1+e\cos\theta-\theta_0}$ avec $p > 0$ et $e = 1$ décrit une parabole. **Le point F est appelé foyer de la parabole**. On dit que p est le **paramètre de la parabole** et que **e** est l'excentricité de la parabole.
- Représentation cartésienne (très utile). L'ensemble des M dont les coordonnées (x, y) sont telles que: $y = ax^2 + bx + c$ décrit une parabole d'axe de symétrie parallèle à Oy.

Coniques

Important 1.10

Equation polaire d'une conique
En choisissant correctement l'origine du repère polaire, on peut exprimer l'équation polaire d'une conique sous la forme:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 \pm e\cos(\theta - \theta_0)}$$

Le centre du repère est alors appelée foyer de la conique. A noter que l'ellipse et la parabole possède deux foyers symétriques par rapport au centre de la conique (centre de symétrie de la conique).
p est appelée paramètre de l'ellipse et e excentricité. En changeant l'origine des angles, on peut faire en sorte de $\theta_0 = 0$.

De nombreuses propriétés seront vues sur les coniques lors du cours sur les potentiels newtoniens. On retiendra déjà que la valeur de l'excentricité déterminer le type de conique:

- ellipse: $0 \leq e < 1$
- parabole: $e = 1$
- hyperbole: $e > 1$. Attention, en coordonnées polaires, les asymptotes sont en général obliques.

1.1.1.3 Vecteur vitesse

1.1.1.3.1 Vecteur vitesse: Définition

Important 1.11

Vecteur vitesse
Soit O un point fixe du référentiel R et M un point mobile. La vitesse du point M dans le référentiel R est définit comme la dérivée temporelle du vecteur position dans le référentiel R.

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = (\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt})_R$$

1.1.1.3.2 Expression du vecteur vitesse

Important 1.12

Expressions du vecteur vitesse
Le vecteur vitesse s'exprime.
En coordonnées cartésiennes:

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées cyindriques:

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées spheriques:

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

1.1.1.4 Vecteur accélération

1.1.1.4.1 Vectreur accélération: Définition

Important 1.13

Vecteur accélération
On définit l'accélération d'un point M dans un un référentiel R comme la dérivée du vecteur vitesse dans le

référentiel R.

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = (\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt})_R = (\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2})_R$$

1.1.1.4.2 Vecteur accélération: Expressions

Important 1.14

Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.
En coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'écrit:

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$$

Important 1.15

Vecteur accélération en coordonnées cylindriques.
En coordonnées cylindriques, le vecteur accélération s'écrit:

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$$

1.1.1.4.3 Relation géométrique entre vitesse et accélération

Important 1.16

Mouvement uniforme, accélérié et décéléré

- Un mouvement est dit **uniforme** si la **norme** de la vitesse est constante au cours du mouvement.
- Si la norme diminue, on dit que le mouvement est décéléré. Si la norme augmente, il est accéléré.

Important 1.17

Relation vitesse et accélération

- Dans un mouvement uniforme, le vecteur accélération est soit nul, soit perpendiculaire au vecteur vitesse.
- Dans un mouvement accéléré, le vecteur accélération forme avec le vecteur vitesse un angle en valeur absolue inféreure à $\pi/2$
- Dans un mouvement décéléré, le vecteur accélération forme avec le vecteur vitesse un angle en valeur absolue supérieure à $\pi/2$

1.1.1.4.4 Vectreur accélération: Base de Frenet

Important 1.18

Base de Frenet
La base de Frenet est une **base locale** définie **pour une trajectoire plane**. Elle est définit par deux vecteurs unitaires:

- Un vecteur tangeant à la trajectoire $\overrightarrow{u_T}$ et dirigé dans le sens du mouvement
- Un vecteur normale à la trajectoire $\overrightarrow{u_N}$ et dirigé de manière à ce que l'angle $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N}) = +\frac{\pi}{2}$.

Important 1.19

Composantes de l'accélération.
Pour un mouvement plan, on peut décomposer l'accélération en deux composantes:

- l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ suivant $\overrightarrow{u_T}$ Cette composante de l'accélération est réponsable de la variation de vitesse (en norme: accélération et décélération)
- l'accélération normale $\overrightarrow{a_N}$ suivant $\overrightarrow{u_N}$ Cette composante de l'accélération est responsable de la déviation du mobile (changement de direction et donc courbure de la trajectoire.

Une étude des composantes de l'accélération montre qu'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a_T}| &= \left|\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\right| \\ |\overrightarrow{a_N}| &= \frac{v^2}{|R|} \end{aligned}$$

où R est appelé rayon de courbure. Il peut varier dans le temps et reflète… la courbure de la trajectoire en un point.

1.1.1.5 Cas du mouvement circulaire

1.1.1.5.1 Mouvement circulaire: Généralités

On rappelle qu'un mouvement circulaire est un mouvement dont la trajectoire est portée par un cercle fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}$ considéré. On notera R_0 le rayon du cercle.

Important 1.20

Système de coordonnées et expressions
Les coordonnées utiles pour un tel mouvement sont les coordonnées cylindriques d'axe Oz perpendiculaire au plan du cercle. On a alors les relations:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} &= r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{a_{M/\mathfrak{R}}} &= -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \end{aligned}$$

Important 1.21

Accélération tangentielle et normale
Remarquons que la direction radiale e_r est toujours perpendiculaire au mouvement et la direction orthoradiale e_θ est toujours tangente au mouvement. Il vient que:

- L'accélération tangentielle vaut: $\overrightarrow{a_T} = R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$ où v est la **composante** de l'accélération sur e_θ.
- L'accélération normale vaut: $\overrightarrow{a_N} = -R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{v^2}{R_0}\overrightarrow{e_r}$

Important 1.22

Vecteur tournant
On définit le vecteur tournant comme: $\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \tag{1.2}$$

Vous devez savoir prouver ces formules.

1.1.1.5.2 Cas d'un mouvement circulaire uniforme

Important 1.23

Expressions
Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, il vient que l'accélération est purement centripète: elle est bien orthogonale au mouvement. Son expression est alors: $\overrightarrow{a_{M/\mathfrak{R}}} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$

1.1.2 Cinétique du point

Il s'agit d'une partie très courte ayant pour but d'apprendre à calculer les caractéristiques **cinétiques** qu'on associe à un point **matériel**. La matérialité d'un point introduit son **inertie**. Il s'agit du concept physique qui permettra de faire le lien entre les actions du milieu extérieur et le mouvement du système mécanique. Nous apprendrons à calculer ces caractéristiques et donnerons un sens au **moment cinétique** qui nous servira à étudier les rotations et les mouvements circulaires (entre autre…).

1.1.2.1 Point matériel et inertie

Important 1.24

Point matériel
- Un point matériel est une modélisation idéalisée d'un objet ponctuel matériel, c'est-à-dire d'une portion infinitésimale de matière.
- Un point matériel ne nécessite que la données de 3 coordonnées de repérage dans l'espace et de masse (cf. suite).

Important 1.25

Masse intertielle.
- La capacité que possède un objet matériel à résister à toute variation de mouvement est appelé **inertie**.
  - Pour un point matériel, la propriété d'inertie est représentée par une grandeur scalaire positive appelée **masse inertielle** dans l'unité est le kg. Plus la masse inertielle d'un objet est grande, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

La masse est inertielle est indépendante du temps et du référentiel considéré: il s'agit d'une caractéristique propre au point matériel. Pour un système fermé (n'échangeant pas de matière), elle est conservée.

1.1.2.2 Eléments cinétiques

1.1.2.2.1 Quantité de mouvement

Important 1.26

Quantité de mouvement d'un point matériel
Soit M un point matériel de masse inertielle m. On définit la quantité de mouvement d'un point M dans le référentiel R par la grandeur:

$$\overrightarrow{p_{M/R}} = m\overrightarrow{v_{M/R}}$$

1.1.2.2.2 Moment cinétique d'un point matériel

Moment cinétique: Définition

Important 1.27

Moment cinétique par rapport à un point.
Soit un point M de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v_{M/R}}$, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/R}}$ rapport au référentiel R et A un point. Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point A dans le référentiel R est défini par le vecteur:

$$\overrightarrow{L_{A/R}(M)} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p_{M/R}}$$

Important 1.28

Moment cinétique par rapport à un axe.
Soit un axe Δ orienté. On note B un point de cet axe et $\overrightarrow{u_\Delta}$ un vecteur unitaire directeur de l'axe. On définit un moment cinétique rapport à l'axe Δ:

$$L_{\Delta/R} = \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{L_{B/R}}(M)$$

Attention

Scalaire et vecteur
Le moment cinétique par rapport à un point est un **vecteur** et le moment cinétique par rapport à un axe est un **scalaire**. Il est important de faire cette différence.

Moment cinétique: Interprétation

1.1.2.3 Energie cinétique

Important 1.29

Energie cinétique d'un point matériel
On appelle énergie cinétique d'un point matériel M de masse m dans le référentiel R, la quantité scalaire:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{M/R}^2$$

1.2 S'entrainer

- exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : pas d'activités
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement)
- des approfondissement (Aller plus loin) : pas pour ce chapitre

1.2.1 Méthodes

1.2.1.1 Cinématique

1.2: Calcul d'une accélération en coordonnées sphériques.

On considère un point M contraint à se déplacer sur une sphère fixe de rayon R_0. Il part du pôle Nord de la sphère en direction du pôle Sud à une vitesse v_0 constante. Déterminer le vecteur accélération et l'évolution des coordonnées sphériques du point M dans un repère sphérique associé au référentiel de la boule.

1.3: Cas d'un satellite géostationnaire.

Un satellite géostationnaire est un satellite en orbite circulaire autour de la terre à une altitude $h = r - R_T$ où R_T est le rayon de la Terre (r est le rayon de l'orbite). L'orbite est équatoriale et il reste fixe par rapport à un point de la Terre. Il est soumis à une accélération dans le référentiel géocentrique:

$$\vec{a} = -g_0(\frac{R_T}{r})^2\overrightarrow{e_r}$$

Calculer r avec $g_0 = 9,8\text{m.s}^{-1}$ et $R_T = 6400\text{km}$.

1.4: Mouvement uniformément accéléré

On considère un point M donc le vecteur accélération est constant. Déterminer l'équation horaire du point M pour une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et une position initiale M_0 à $t = 0$.

1.2.1.2 Cinétique

1.2.1.2.1 Calcul de moment cinétique

1.5: Exercice

Soit un repère cartésien de centre O associé à un référentiel $\mathfrak{R}$.
On considère un point matériel M de masse M en mouvement rectiligne sur un axe Oz à une vitesse $v(t)$.

1. Exprimer la quantité de mouvement de M dans le référentiel $\mathfrak{R}$.
2. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport au point O dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Commenter sa valeur.
3. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe Ox dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Commenter sa valeur.
4. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe Bx dans le référentuel $\mathfrak{R}$. On donne les coordonnées de $B(a, b, 0)$. Commenter.

1.6: Exercice

On considère un point M sur une trajectoire circulaire de centre O et d'axe Oz. Exprimer la quantité de mouvement dans une base cylindrique ainsi que le moment cinétique de M sur l'axe Oz.

1.2.2 Exercices d'application

Ces exercices d'application directe sont à faire à la suite du cours pour vérifier votre compréhension des méthodes. Vous pourrez confronter votre travail avec celui de vos camarades et poser des questions sur cet exercice en classe mais il ne sera pas donné de correction complète.

1.7: Vecteur vitesse

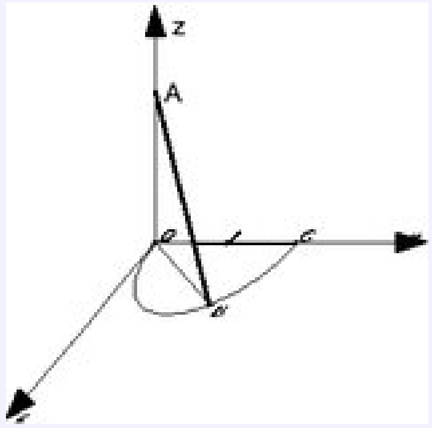
Retrouver les expressions du vecteur vitesse dans les différents systèmes de coordonnées en dérivant directement le vecteur position exprimés dans ces systèmes.

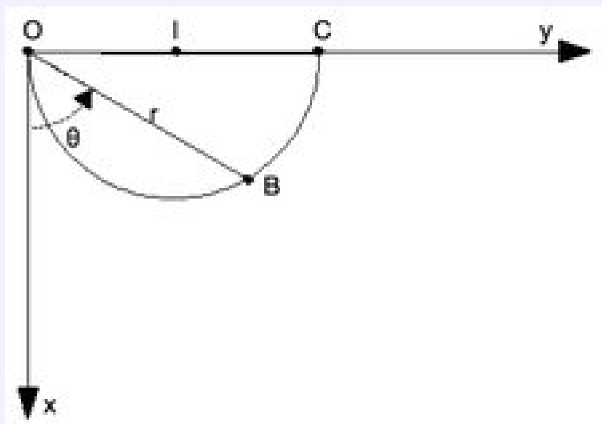
1.8: Chute d'une règle

Une barre rectiligne AB de longueur fixe $2b$ se déplace dans le référentiel R repéré par $(O, \overrightarrow{u_x}x, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ de telle sorte que:

- son extrémité A se trouve sur le demi-axe positif Oz.
- son extrémité B décrit le demi-cercle de plan (xOy) de centre $I(0, b, 0)$ et de rayon b, à la vitesse angulaire (par rapport à I) ω constante et positive. A l'instant $t = 0$, B se trouve en O.

On note ϕ l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$.





1. Déterminer la durée T du mouvement
2. Déterminer une relation simple entre ϕ et θ.
3. Etablir les expressions en fonction du temps t des coordonnées polaires r et θ de B (cf. Figure).
4. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ en fonction de ω et t.
5. Calculer les coordonnées cylindriques (R, Θ) puis cartésiennes X, Y et Z du milieu J de la barre.
6. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_J}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_J}$ de J, ainsi que leur normes.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Trigonométrie.*
- $\Longrightarrow$ *Vitesse en cartésien.*

1.9: Rotation de la Terre

On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6400$km et tournant sur son axe en 24h à vitesse angulaire constante ω. On considère un point M situé à une colatitude θ. L'axe (Oz) de référence étant l'axe de révolution de la Terre.

1. Déterminer ω.
2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M en fonction de ω, R_T et t. On prendra soin de définir correctement le repère de projection.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Base sphérique.*

- $\Longrightarrow$ *Vitesse en spérique.*

1.10: Moment cinétique sur un axe.

On considère point matériel M de masse m en mouvement. On considère un axe Δ orienté fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$ et deux points A et B sur l'axe Δ.
Montrer que le moment cinétique de M sur l'axe Δ dans $\mathfrak{R}$ est le même qu'on le calcul avec le point A ou avec le point B.

Point utile pour cet exercice

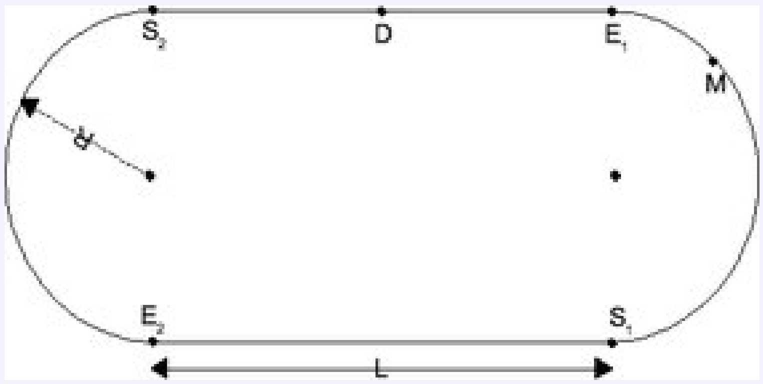
- $\Longrightarrow$ *Moment cinétique.*

1.2.3 Entrainement : Cinématique du point

1.2.3.1 Vélodrome

1.11: Exercice

On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point matériel M, qui s'entraîne sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles de rayon $R = 20\text{cm}$ relié par deux lignes droites de longueurs $L = 62\text{cm}$. Le cycliste part de D, milieu d'une ligne droite avec une vitesse nulle. Il exerce un effort constant qui se traduit par une accélération tangentielle au mouvement constante a_1. On note C_1 et C_2 les centres des deux demi-cercles.



1. De D, le cycliste se dirige vers le point E_1, entrée du demi-cercle. Justifier que l'accélération normale à la vitesse est nulle puis calculer le temps t_{E1} de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E1} en E_1 en fonction de a_1 et L.
2. On étudie le mouvement du cycliste dans le demi-cercle entre E_1 et S_1.
   1. Justifier l'utilisation d'une base cylindrique dont on précisera le centre. On prendra l'angle θ par rapport à l'axe C_1E_1.
   2. Déterminer le temps que t_{S1} de passage en S_1 en fonction de a_1, L et R ainsi que la vitesse v_{S1} en S_1.
   3. On note $v(t)$ la vitesse du cycliste à chaque instant. Montrer que l'accélération normale au mouvement est non nulle dans le demi-cercle et qu'elle vaut à chaque instant $a_N = \frac{v(t)^2}{R}$.
3. Calculer de même les temps de passage t_{E2}, t_{S2}, t_D respectivement en S_1, S_2, D (après un tour) ainsi que les vitesses v_{E1}, v_{E2}, v_D.
4. La course se fait sur quatre tours et est longue de 1km mais on ne s'intéresse ici qu'au premier tour effectué en $T_1 = 18,155\text{s}$ (par le britannique Chris Roy aux Championnats du monde de 2007).
5. Déterminer la valeur de l'accélération a1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est d'environ $v_D = 60\text{km.h}^{-1}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Base de Frenet*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire circulaire.*
- $\Longrightarrow$ *Vitesse et accélération en cylindrique.*

1.2.3.2 Trajectoire d'un bateau

1.12: Exercice

On s'intéresse à une planète semblable à la Terre mais entièrement recouverte d'eau. On assimile la planète à une sphère de rayon R. Un bateau se déplace à la surface de cette planète, avec une vitesse constante V_0 et toujours en direction du Nord-Est.

1. Exprimer les différentes composantes de la vitesse en projection dans la base de coordonnées sphériques associé au repère terrestre.
2. Déterminer par intégration des équations précédentes, les expressions de la colatitude θ et de la longitude ϕ en fonction du temps.
3. Quelle est la date d'arrivée au pôle?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Base sphérique.*
- $\Longrightarrow$ *Vitesse en sphérique.*

1.2.3.3 Poursuite

1.13: Exercice

Quatre robots repérés par les points A,B,C et D sont initialement aux sommets d'un carré de côté a et de centre O. Le robot A est programmé pour toujours se diriger vers B avec une vitesse de norme constante v, de même B se dirige toujours vers C à vitesse v… . On s'intéresse au mouvement de A.
Déterminer alors les équations paramétriques du mouvement de A (équation horaire) en fonction de t et v puis l'instant t_0 d'arrivée en O.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Base cylindrique.*
- $\Longrightarrow$ *Vitesse en cylindrique.*
- $\Longrightarrow$ *Symétrie.*

CHAPTER

TWO

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

La cinématique ne fait que décrire le mouvement d'un point. Pour connaître les causes des modifications d'un mouvement, il faut étudier la dynamique et le concept d'actions/de force.

2.1: Compétences

- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens
- Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé.
- Mettre en équation le mouvement sans frottements d'un système dans un champ de pesanteur.
- Prendre en compte la traînée pour modéliser une situation réelle.
- Appliquer le théorème du moment cinétique sur un axe ou un point
- Établir un bilan des actions sur un système ou plusieurs systèmes en interaction.
- Établir une relation graphique ou analytique entre des forces modélisant des actions sur un point matériel dans un cas statique.
- Prévoir qualitativement l'effet d'une force résultante l'évolution d'un point matériel.
- Connaître les cas d'actions ponctuelles usuelles et leurs expressions: rappel d'un ressort, interaction gravitationnelle, interaction coulombiennes, force de Lorentz, action du champ de pesanteur, tension d'un fil…
- Calculer le moment d'une action ponctuelle sur un axe ou par rapport à un point.
- Interpréter le moment d'une action ponctuelle en terme d'effet sur la rotation d'un point matériel.

2.1 Comprendre le contexte.

2.1.1 Description des actions mécaniques ponctuelles

2.1.1.1 Interactions et actions: définitions

2.1.1.2 Actions: Types de description

Important 2.1

Action ponctuelle
Une action ponctuelle **d'un système** Σ_1 **sur un système** Σ_2 est une action agissant sur un point (matériel) du système Σ_2.

Tout système possédant une extension spatiale, il s'agit d'une modélisation théorique d'une action mécanique.

Important 2.2

Action résultante (ou globale).
Une action résultante sur un système Σ_2 est une action du milieu extérieur modélisable par le regroupement **arbitraire** d'un ensemble d'actions ponctuelles sur le système Σ_2.

2.1.1.3 Action ponctuelle: Modélisation et typologie

2.1.1.3.1 Modélisation mathématique

Important 2.3

Modélisation d'une action ponctuelle
Soit une action ponctuelle $\mathfrak{A}_{1\to 2}$ d'un système Σ_1 sur un système Σ_2. On modélise mathématiquement cette action par deux caractéristiques:

- sa force $\overrightarrow{F}(\mathfrak{A}_{1\to 2})$ (noté souvent simplement $\overrightarrow{F}$) qui donne la direction et le sens vers laquelle l'action tend à entraîner le système et avec quelle intensité elle tend à entraîner le système.
- son point d'application.

Par principe physique, les caractéristiques d'une action sont indépendante du référentiel considéré.

Attention

La force $\overrightarrow{F}$ donne la direction et le sens vers laquelle l'action tend à entraîner le système mais cela ne veut pas dire que le sytèmeva aller dans sa direction. Son inertie peut lui permettre de continuer dans une autre direction. Il sera simplement dévié (plus ou moins fortement suivant son inertie et l'intensité de la force).

Exemple: Un objet lancé vers le haut subit l'action de la pesanteur dirigée vers le bas mais il continue à monter (en étant par contre ralenti).

2.1.1.3.2 Moment d'une action

Définition

Important 2.4

Moment d'une action ponctuelle/d'une force par rapport à un point.
Soit une action ponctuelle $\mathfrak{A}_{1\to 2}$ d'un système Σ_1 sur un système Σ_2 modélisée par une force $\overrightarrow{F}$ et un point d'application A.
Soit un point B de l'espace. On définit le moment $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F})$ (ou $\overrightarrow{M_B}(\mathfrak{A}_{1\to 2})$) de l'action $\mathfrak{A}_{1\to 2}$ (ou moment de la force $\overrightarrow{F}$) par rapport au point B par:

$$\overrightarrow{M_B}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

Important 2.5

Moment d'une action ponctuelle/force par rapport à un axe.
Soit une action ponctuelle $\mathfrak{A}_{1\to 2}$ d'un système Σ_1 sur un système Σ_2 modélisée par une force $\overrightarrow{F}$ et un point d'application A.

Soit un axe Δ orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$. On définit le moment $M_\Delta(\overrightarrow{F})$ (ou $M_\Delta(\mathfrak{A}_{1\rightarrow 2})$) de l'action $\mathfrak{A}_{1\rightarrow 2}$ (ou moment de la force $\overrightarrow{F}$) par rapport à l'axe Δ par:

$$M_\Delta\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}\right)$$

où B est un point de l'axe Δ.

Attention

Ne pas confondre moment d'une force et moment cinétique. Ils n'ont même pas la même unité.

Moment d'une force: Interprétation (en ligne)

Important 2.6

Interprétation
On retiendra que le moment d'une action sur un axe Δ donne la **tendance** qu'à cette action à faire tourner le système autour de l'axe. Il donne par son signe le sens dans lequel cette tendance se fait.

Attention

- Il s'agit d'une **tendance** pour l'action considéré. (notion d'inertie)
- Cela ne veut pas dire que le système est en rotation autour de l'axe, il peut même être immobile (les considérations sur les moments sont très important en statique des systèmes de points).
  - Comme pour la force, le moment donne une tendance qui sera réalisée ou non suivant l'existence d'autres actions et suivant l'inertie et le mouvement initial du système.

2.1.1.3.3 Actions ponctuelles usuelles

Nous allons présenter ici les actions usuelles dont les caractéristiques des forces doivent être connues. Il s'agit pour la plupart d'action ponctuelle s'exerçant sur des points matériels, il ne sera donc en général pas précisé le point d'application parce qu'il est alors évident.

On distingue les interactions à distance et les interactions de contact.

- Les premières regroupent des interactions fondamentales (gravitation et électromagnétisme) et des dérivées (pesanteur).
- Les secondes, représentent des actions résultant de multiples actions (principalement électrostatiques) à l'échelle microscopique. On parle aussi d'actions surfaciques puisque les actions microscopiques se font en surface. *Il s'agit donc d'action globales mais dans certains cas, on peut les assimiler à des actions ponctuelles: quand le contact se fait sur une surface très petite (qu'on peut considérer à un point) ou quand on assimile le système à un point matériel.*

Actions à distance

Force de Lorentz

Important 2.7

Force de Lorentz
Soit un point matériel M chargé de charge q et un champ électromagnétique donc les expressions vectorielles au point M sont $\overrightarrow{E}(M)$ et $\overrightarrow{B}(M)$. Alors le champ électromagnétique exerce une action dont la force, appelée force de Lorentz s'écrit:

$$\overrightarrow{F}_{Lorentz} = q\left(\overrightarrow{E}(M) + \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} \wedge \overrightarrow{B}(M)\right)$$

où $\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel d'étude.

Forces newtoniennes

Important 2.8

Interactions gravitationnelles
Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2. Les deux masses sont en interaction dites gravitationnelles. L'action de M_1 sur M_2 est modélisée par une force dirigée de M_2 vers M_1 dont l'expression est:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{grav,1\to 2}} &= -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}\\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}\end{aligned}$$

où G est la constante de gravitation universelle dont l'expression est $G = 6.67\times 10^{-11}\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$.
Dans la seconde expression, r est la distance M_1M_2 et $\overrightarrow{u_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire porté par la droite orientée de M_1 vers M_2.

Important 2.9

Champ de gravitation
Soit un point M_1 de masse m_1. On dit que le point M_1 créé dans tout point P de l'espace un **champ de gravitation** $\overrightarrow{\mathfrak{G}_{M_1}}(P)$ dont l'expression est:

$$\overrightarrow{\mathfrak{G}_{M_1}}(P) = -Gm_1\frac{\overrightarrow{M_1P}}{M_1P^3}$$

Si l'on place en un point P un point matériel M_2 de masse m_2, alors le point M_2 subira une action gravitationnelle de la part de M_1: $\overrightarrow{F_{grav,1\to 2}} = m_2\overrightarrow{\mathfrak{G}_{M_1}}(P = M_2)$.

Important 2.10

Interactions coulombiennes (ou électrostatiques)
Soit deux points matériels M_1 et M_2 chargés de charges respectives q_1 et q_2. Les deux charges sont en interac-

tion dites coulombiennes. L'action de M_1 sur M_2 est modélisée par une force portée par la droite M_1M_2 dont l'expression est:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{elec,1\rightarrow 2}} &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}\\ &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{1\rightarrow 2}}\end{aligned}$$

où ϵ_0 est la **permittivité électrique du vide** dont l'expression est $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$s^4.A^2.kg^{-1}.m^{-3} soit $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9910^9 S.I.$.
Dans la seconde expression, r est la distance M_1M_2 et $\overrightarrow{u_{1\rightarrow 2}}$ est le vecteur unitaire porté par la droite orientée de M_1 vers M_2.

Important 2.11

Champ électrique
Soit un point M_1 de charge q_1. On dit que le point M_1 créé dans tout point P de l'espace un **champ électrique** $\overrightarrow{E_{M_1}}(P)$ dont l'expression est:

$$\overrightarrow{E_{M_1}}(P) = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1P}}{M_1P^3}$$

Si l'on place en un point P un point matériel M_2 de charge q_2, alors le point M_2 subira une action coulmbienne de la part de M_1: $\overrightarrow{F_{grav,1\rightarrow 2}} = q_2\overrightarrow{E_{M_1}}(P = M_2)$.

Pesanteur sur un point matériel

Important 2.12

Champ de pesanteur
A la surface de la Terre, tout corps massique est attiré vers "le bas" par une action appelée poids. Pour un point matériel M de masse m, la force qui s'applique s'écrit $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur au point M. Il est dirigé vers "le bas" (en réalité, il permet de définir la verticale (principe du fil à plomb)).

Actions de contact

Tension d'un fil

Important 2.13

Tension d'un fil ou d'une tige rigide.
La tension d'un fil ou d'une tige rigide est l'action qu'exerce un fil/une tige sur un système accroché au fil/à la tige (c'est une action de contact). Dans le cas d'un fil/une tige fin(e) dont la torsion n'a pas d'influence (ou qui ne se tord pas), on peut assimiler cette action à une action ponctuelle.
La force exercée par le fil/la tige n'a pas d'expression connue a priori mais on sait que dans le cas d'un fil, elle est alors nécessairement vers le fil et non vers le système accroché (un fil ne peut que tirer le système). Pour une tige, la force peut être dans les deux directions.

Important 2.14

Cas d'une fil/d'une tige parfaite Un fil/une tige parfaite est un fil/tige sans masse. Dans ce cas la tension exercée en chaque point du fil/tige sur l'autre partie du fil est la même en tout point du fil/tige est égale à la tension exercée à chaque extrémité du fil/tige sur les systèmes accrochée. De plus la tension du fil/tige est alors tangente au fil/tige.

Action d'un ressort: Force de rappel élastique

Important 2.15

Action d'un ressort
Soit un système accroché à un ressort. En général, on considère le point d'accroche comme ponctuel et la force exercée par le ressort à son extrémité sur le système comme tangente au ressort. Si le ressort est de masse négligeable (cas usuel), alors la force exercée par le ressort sur un système accroché à son extrémité s'écrit si sa longueur est l:

$$\overrightarrow{F_{ressort \to extremite}} = -k\left(l - l_0\right)\overrightarrow{u_{ext}} = -k\Delta l\overrightarrow{u_{ext}}$$

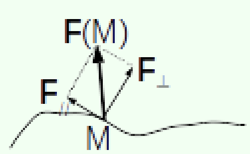
où l_0 est la longueur à vide du ressort, k sa raideur et $\overrightarrow{u_{ext}}$ un vecteur unitaire tangent à l'axe de ressort et dirigé vers l'extérieur du ressort.
$\Delta l = l - l_0$ est appelé allongement du ressort.

Contact solide et contact fluide

Important 2.16

Composante tangentielle et composante normale
En un point de contact M entre le système et le solide/fluide (qu'on appellera Σ_{ext}), l'action ponctuelle (modélisée par la force $\vec{F}(M)$ peut-être décomposée en deux composantes:

- une composante normale à la surface de contact $\overrightarrow{F_{\perp}}(M)$
- une composante tangentielle à la surface de contact $\overrightarrow{F_{//}}(M)$



Important 2.17

Action d'un fluide L'action d'un fluide sur un point matériel est modéliée par une action de **frottements fluides qui s'oppose à la vitesse.** On distingue deux cas:

- **Cas laminaire** : Aux faibles vitesses, l'écoulement est dit laminaire et la force de frottement fluide est proportionnelle à la vitesse par rapport au fluide.
$$\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{M/fluide}$$
- **Cas turbulent** : Aux fortes vitesses, l'écoulement est dit turbulent et la force de frottement fluide est proportionnelle au carré de la vitesse par rapport au fluide.
$$\vec{f} = -k\left\|\vec{v}_{M/fluide}\right\|\vec{v}_{M/fluide}$$

Important 2.18

Actions d'un solide : Lois phénoménologiques de Coulomb
En un point de contact solide-solide, la force de contact $\overrightarrow{R}$ se décompose en deux composantes, l'une tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ et l'autre normale $\overrightarrow{R_N}$ ($\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$). On déduit expérimentalement les comportements suivants:

- La **composante normale** est telle qu'elle empêche l'interpénétration des systèmes (contrainte cinématique). Elle est dirigée vers l'intérieur du solide qui subit l'action. Son annulaion signifie la perte de contact.
- La **composante tangentielle** a un comportement qui dépend de l'état relatif des deux solides:
  - *en cas d'immobilité relative des deux solides*, l'action complète est telle qu'elle permet l'immobilité relative (somme des forces nulle si l'on est dans un référentiel galiléen). La composante tangentielle est de norme nécessairement **inférieure** à $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu_S \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où μ_S est appelé coefficient de frottement statique. Lorsque cette condition est mise en défaut, alors le système se met en mouvement.
  - *en cas de mouvement relatif des deux solides* (on dit qu'il y a glissement au point M), la composante tangentielle s'oppose à la vitesse relative au point M. Sa norme est **égale** à $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_D \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où μ_D est appelé coefficient de frottement dynamique.
- Quelque soit le système, $\mu_D < \mu_S$, c'est-à-dire qu'il est plus facile de maintenir un solide en mouvement par rapport à un autre solide malgré les frottements que de mettre en mouvement le même solide.

Attention

Il faut faire attention à plusieurs points:

- la condition d'immobilité est une **inéquation**. Elle ne permet PAS de déterminer la force ou le moment de l'action. Ces derniers se détermine par application des théorèmes fondamentaux dans un cas statique (immobilité relative des deux solides).
- Dans tous les cas, la composante normale se déduit de la contrainte cinématique imposée.
- La condition de contact est importante pour déterminer s'il y a décollement.
- Il faut faire attention à l'orientation de la composante tangentielle qui change en fonction de la vitesse. Cela signifie qu'on doit souvent faire l'étude du mouvement par phase en fonction du sens de déplacement.

2.1.2 Théorèmes fondamentaux de la mécanique classique

Les théorèmes fondamentaux permettent de relier action et mouvement.

2.1.2.1 Lois de Newton et conséquences

2.1.2.1.1 Lois de Newton

Important 2.19

Système isolé et pseudo-isolé

- Un point matériel qui n'est soumis à aucune force est dit isolé.
- Un point matériel soumis à un ensemble de forces dont la résultante (i.e. la somme) est nulle est dit pseudo-isolé.

Important 2.20

Première loi de Newton (Principe d'inertie) Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé possède un mouvement rectiligne uniforme.

Important 2.21

Deuxième loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)
Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel M au cours du temps est égale à la somme des forces s'exerçant sur les systèmes:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\rightarrow M}}$$
$$m\left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\rightarrow M}}$$

La deuxième expression n'est valable que si le système est fermé, c'est-à-dire qu'il n'échange pas de matière avec l'extérieur.

Important 2.22

Troisième loi de Newton (Lois des actions réciproques)
Si un point matériel A exerce sur un point B une force $\overrightarrow{f_{A\rightarrow B}}$ alors le point B exerce sur le point A une force $\overrightarrow{f_{B\rightarrow A}}$ telle que:

- $\overrightarrow{f_{B\rightarrow A}} = -\overrightarrow{f_{A\rightarrow B}}$
- $\overrightarrow{f_{B\rightarrow A}}$ et $\overrightarrow{f_{A\rightarrow B}}$ sont sur la même droite: la droite (AB)

2.1.2.1.2 Relativité galiléenne

Important 2.23

Référentiels galiléens usuels
Il n'existe pas de référentiel galiléen strict connu. Néanmoins, de nombreux référentiels peuvent être considérés comme galiléen sur des périodes de temps suffisamment courte.

- Le référentiel héliocentrique dans lequel le Soleil et 3 étoiles lointaines sont supposées fixes (sur plusieurs années voire plusieurs décennies)
- Le référentiel géocentrique dans lequel la Terre et 3 étoiles lointaines sont supposées fixes (quelques mois). Il est translation quasi-circulaire par rapport au référentiel héliocentrique
- Le référentiel terrestre dont laquelle la Terre (en tant que solide) est supposée fixe pour des courtes expériences (quelques heures). Il est rotation autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique.
- A une échelle plus petite, le référentiel lié au noyau atomique pourra être considéré comme galiléen sur des temps très courts.

Important 2.24

Infinité des référentiels galiléens.
Tout référentiel en translation rectiligne uniforme avec un référentiel galiléen est aussi un référentiel galiléen.

Démonstration Considérons un référentiel galiléen noté $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ et un second référentiel $\mathfrak{R}$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_{R/RG}}$ par rapport à $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.

Première méthode: On considère un point matériel isolé. Il possède un mouvement de translation rectiligne uniforme (à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$) dans $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ car ce référentiel est galiléen. Dans $\mathfrak{R}$, sa vitesse est: $\overrightarrow{v_{/R}} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{R/RG}} = \overrightarrow{cste}$: il possède aussi un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathfrak{R}$ donc $\mathfrak{R}$ est aussi galiléen.

Deuxième méthode: On considère un point matériel soumise un ensemble de force dont la résultante est $\overrightarrow{F}$. Le principe fondamental dans $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ s'écrit: $m\overrightarrow{a_{RG}} = \overrightarrow{F}$

Or:

$$m\overrightarrow{a_{\mathfrak{R}}} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{R}}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{RG}}} + \overrightarrow{v_{R/RG}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{RG}}}}{dt} = m\overrightarrow{a_{\mathfrak{RG}}}$$
$$\Longrightarrow m\overrightarrow{a_{\mathfrak{R}}} = \overrightarrow{F}$$

En particulier si le mobile est isolé ($\overrightarrow{F} = 0$), l'accélération dans $\mathfrak{R}$ est nulle et le système est donc dans un mouvement de translation rectiligne uniforme: c'est un référentiel galiléen.

2.1.2.2 Théorème du moment cinétique

2.1.2.2.1 Enoncé

Important 2.25

Théorème du moment cinétique. Enoncé par rapport à un point.
Soit un point matériel M. Dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée du moment cinétique du point M en un point A fixe dans $\mathfrak{R}$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées en M par rapport au même point A.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O/\mathfrak{R}}}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F})$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}/\mathfrak{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{dt}}_{\mathfrak{R}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}\right)_{\mathfrak{R}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AM}\right)_{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}} + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}\right)_{\mathfrak{R}} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{V_{M/\mathfrak{R}}} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}}_{=0} + \overrightarrow{AM} \wedge \left(\sum \overrightarrow{F_{\to M}}\right) \\
&= \sum \overrightarrow{M_A\left(F_{\to M}\right)}
\end{aligned}$$

Important 2.26

Théorème du moment cinétique. Enoncé par rapport à un axe.
Soit un point matériel M. Dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée du moment cinétique du point M sur un axe Δ orienté fixe dans $\mathfrak{R}$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées en M par rapport au même axe Δ.

Démonstration Il suffit d'appliquer le TMC en un point de l'axe et de projeter l'équation sur un vecteur directeur de l'axe.

2.2 S'entrainer

- exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : pas d'activités
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement) : : En plus des exercices du cours, un devoir libre est accessibvle ici[2]. *Attention, il est assez difficile.*
- des approfondissement (Aller plus loin)

2.2.1 Méthodes : Actions

2.2.1.1 Forces et mouvement.

On se propose d'étudier qualitativement l'effet d'une action sans utiliser les théorèmes.

2.2: Exercice

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il est soumis à deux actions: son poids $\overrightarrow{P}$ d'amplitude mg dirigé verticalement vers le bas et l'action du plan incliné $\overrightarrow{R}$ qu'on suppose perpendiculaire au plan.

1. Proposer un système de coordonnées permettant d'étudier le mouvement de M sur le plan (on suppose que M reste sur le plan incliné). Préciser les expressions vectorielles des forces modélisant les deux actions qui s'appliquent sur le point M.
2. Déduire des contraintes imposées l'expression de $\overrightarrow{R}$.
3. Justifier qualitativement que le point matériel M va glisser le long du plan.

2.2.1.2 Utilisation du moment

2.3: Exercice

Dans tout le problème, on travaille dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}_T$.
On considère une petite masse m assimilable à un point matériel M accrochée à une tige rigide de longueur l sans masse dont l'autre extrémité est relié à un point fixe O. On considère que la tige ne se déforme pas et qu'elle exerce une action ponctuelle sur la masse dont la force est dirigé le long de la tige. L'ensemble est placé dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ de sorte que le point M.
On supposera que le mouvement de M reste dans un plan vertical contenant le point O.

1. Proposer un paramétrage adapté à l'étude du mouvement du point M puis déterminer dans ce système de coordonnées les vecteurs position, vitesse et accélération ainsi que le moment cinétique calculé par rapport au point O.
2. Faire un bilan des actions appliquées sur le point M et donner l'expression vectorielle des forces associées. (Remarque: pour un point matériel, on parle aussi de bilan des forces).
3. Calculer le moment de chaque action/force par rapport au point O et commenter leurs expressions. En déduire qualitativement l'évolution du mouvement du point M (on distinguera deux types de mouvement possibles).
4. Peut-on déterminer, sans le PFD, l'expression de la force exercée par la tige sur le point M ? Pourquoi ?

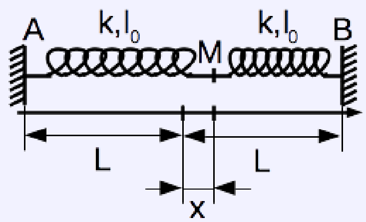
[2] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12848

2.2.1.3 Détermination de la force de rappel

On va présenter ici une méthode permettant de déterminer l'expression de la force de rappel élastique.

2.4: Exercice

On considère deux ressorts horizontaux de raideur identique k et de longueur à vide l_0. Ils sont attachées comme représentés ci-dessous. Déterminer la force exercée par chaque ressort sur le point matériel M en fonction de la coordonnées x de M.



2.2.2 Méthodes : Applications des théorèmes

Les exercices seront corrigés en cours.

2.2.2.1 Mouvement dans un champ de pesanteur

Cet exercice présente plusieurs points de méthodes extrêment importants :

- la méthode générale d'étude d'un système mécanique
- l'application du principe fondamental de la dynamique
- l'utilisation de différentes d'intégration: primitivation, équation différentielle linéaire et **séparation des variables**.

2.5: Exercice

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$. On oriente l'axe Oz tel que $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

1. Cas d'une chute libre. On suppose que le mobile est initialement immobile à une altitude h.
   1. Cas sans frottements: Exprimer $z(t)$ et en déduire le temps que met le mobile pour atteindre l'altitude $z = 0$. Déterminer la vitesse à cet instant.
   2. Cas avec frottements linéaires: On suppose que le solide est soumis à une force de frottements du type $\overrightarrow{F} = -\lambda\vec{v}$
      1. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $v(t)$
      2. En déduire l'existence d'une vitesse limite v_l
      3. Déterminer $v(t)$ puis $z(t)$.
      4. Exprimer un temps caractéristique au bout duquel on peut considérer que le mobile a atteint sa vitesse limite.
   3. Cas de frottements quadratiques: On suppose que le solide est soumis à une force de frottements du type $\overrightarrow{F} = -k\|\vec{v}\|\vec{v}$. On note $v(t)$ telle que $\vec{v} = v(t)\overrightarrow{e_z}$.
      1. Sachant que le mobile a toujours du déplacement vers le bas, expliciter $\overrightarrow{F}$.
      2. En déduire l'équation différentielle qui régit l'évolution de $v(t)$
      3. Déterminer la vitesse v_l (en norme) telle que le mouvement soit rectiligne uniforme.
      4. Réécrire l'équation différentielle sous la forme: $m\dot{v} - kv^2 = -kv_l^2$.
      5. En déduire $v(t)$ puis $z(t)$.

6. Exprimer $z(v)$. Montrer qu'on peut déterminer une distance H caractéristique sur laquelle la vitesse limite v_l est atteinte.

2. Tir balistique: On suppose que le mobile est tiré du point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos \alpha \overrightarrow{e_x} + v_0 \sin \alpha \overrightarrow{e_z}$.
   1. On néglige à nouveau les frottements.
      1. Déterminer, par une intégration vectorielle, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.
      2. Déterminer l'altitude la plus haute atteinte et la portée x_{max}, c'est-à-dire la distance à laquelle retombe le mobile à l'altitude $z = 0$. En déduire l'angle α pour lequel la portée est la plus grande à v_0 fixée.
      3. Pour atteindre une distance $x_1 < x_{\text{max}}$ à v_0 fixé, montrer qu'on peut choisir deux angles de tir possible. Qualifier ces deux tirs.
      4. On veut déterminer l'ensemble des points qui ne peuvent pas être atteinte par le mobile si l'on fixe v_0 Montrer que ces points sont situé dans une portion du plan délimitée par une parabole dont on déterminera l'équation.
   2. On considère maintenant des frottements fluides linéaires: $\overrightarrow{F} = -\lambda \vec{v}$
      1. Intégrer vectoriellement l'équation en $\vec{v}(t)$ obtenue. En déduire $\overrightarrow{OM}(t)$
      2. Exprimer l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.
      3. Montrer que, même si l'on permet au mobile de descendre jusqu'à $z = -\infty$, il ne pourra pas dépasser une portée limite x_{lim}

2.2.2.2 Système masse-ressort

Outre les points évoquées précédemment, nous étudier le cas où l'équation différentielle linéaire est du second ordre. On verra ici le cas d'un oscillateur harmonique.

2.6: Exercice

On considère un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'une des extrémités est accrochée en un point fixe A et l'autre extrémité en un point matériel M de masse m. Le ressort est maintenu vertical et le point M glisse sans frottements (A est toujours au dessus de M).
On repère la position de M sur un axe Ox vertical vers le haut où l'origine O est telle que la coordonnées x de M est nulle quand le système est au repos.

1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.
2. Déterminer l'équation qui régit l'évolution de $x(t)$.
3. En déduire l'expression de $x(t)$ si le point M est initialement immobile et que la longueur initialement du ressort est l_1.

2.2.2.3 Perle sur un cerceau

Cet exercice va montrer comment appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel.

2.7: Exercice

On considère une perle assimilable à un point matériel M de masse m considère à glisser sans frottements sur un cerceau de rayon R et de centre O dans le plan est vertical.
Etablir l'équation d'évolution de l'angle entre la verticale descendante et $\overrightarrow{OM}$ au moyen du théorème du moment cinétique puis simplifier l'équation obtenue si l'on suppose le mouvement de la perle de faible amplitude autour de sa position d'équilibre stable.

2.2.2.4 Atome de Bohr

On va utiliser ici les différents théorèmes, non pas pour déterminer le mouvement (qui sera connu) mais pour déterminer certaines caractéristiques du système (ici le moment cinétique).

2.8: Exercice

Soit un proton O de charge +e fixe et un électron M de charge -e (et de masse me) en mouvement circulaire uniforme (rayon R) autour du proton (supposé fixe). L'expérience montre que l'énergie totale du système est quantifiée sous la forme: $E_n = -\frac{K}{n^2}$ (on prend l'origine des énergies potentielles nulle à l'infini). Montrer que le moment cinétique de l'électron par rapport à O est quantifié.
On donne l'expression de l'énergie potentielle de l'électron sous l'action seule du proton: $E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ où r est la distance proton-électron.

2.2.2.5 Mouvement d'un traineau

2.9: Exercice

On considère un traineau assimilable à un point matériel de masse m glissant sur un sol horizontal avec une vitesse v constante. Le contact avec le sol suit les lois de Coulomb avec un coefficient de frottements dynamique f_d. L'existence des frottements impose, pour maintenir une vitesse constante $\vec{v}$ une traction $\overrightarrow{T}$par un utilisateur. Celle-ci se fait au moyen d'une corde avec un angle α avec l'horizontale.

1. Déterminer la norme T de la traction en fonction de α, f, m et g.

2.2.3 Applications

2.2.3.1 Actions mécaniques

2.10: Interaction électromagnétique

On considère un champ électromagnétique dont les deux parties électriques et magnétiques ont la même origine. Dans ces conditions, on montre qu'en norme $B \sim \frac{E}{c}$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Dans le cadre de la mécanique relativiste $v \ll c$, montrer que la partie magnétique de l'interaction de Lorentz est toujours négligeable en norme devant la partie électique.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Interactions usuelles.*

2.11: Variation du champ de gravitation

1. Déterminer l'altitude à laquelle le champ de gravitation a diminué de 1% par rapport à son intensité au niveau de la mer.
2. Sachant que le champ de pesanteur est constitué à plus de 90% par l'action de la gravité, commenter l'hypothèse d'un champ de pesanteur uniforme et ses possibles limites.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Interactions usuelles.*

2.12: Mouvement d'une planète

Le mouvement d'une planète du système solaire, dans les hypothèses des lois de Kepler est une ellipse dont l'un des foyers des le Soleil. Dans ce cadre d'hypothèses, la seule action subit par la planète est l'action gravitationnelle exercée par le Soleil. La planète et le Soleil sont assimilés à des points matériels.

1. Représenter qualitativement la trajectoire de la planète dans le référentiel héliocentrique. En quel point de l'ellipse la force gravitationnelle est-elle la plus forte ? la plus faible ?
2. Représenter deux points où la planète est accéléré, deux points où la planète est ralentie et deux points où l'accélération est normale à la vitesse. Que se passe-t-il en ces points ?
3. Que vaut le moment de la force gravitationnelle calculée au Soleil ? On remarquera que malgré sa valeur, le mouvement de rotation de la planète autour du Soleil évolue.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Interactions usuelles.*
- $\Longrightarrow$ *Cinématique du point.*
- $\Longrightarrow$ *Moment d'un force.*

2.2.3.2 Théorèmes

2.13: Expérience de Milikan

On place des goutellettes d'huile chargée de masse m et de charge q entre deux plaques et on maintient les deux plaques distantes d'une distance d à une différence de potentiel U orienté de la plaque du haut vers la plaque vers le bas. Il règne alors entre les plaque un chaque électrique $\overrightarrow{E} = \frac{U}{d}\overrightarrow{e_z}$ avec $\overrightarrow{e_z}$ un vecteur unitaire vertical orienté vers le haut. On suppose le champ de pesanteur uniforme.
Exprimer la charge q en fonction des autres grandeurs introduites et de l'intensité du champ de pesanteur.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Interactions usuelles.*
- $\Longrightarrow$ *PFD.*

2.14: Jeux aquatiques

Un baigneur (masse $m = 80\text{kg}$) saute d'un plongeoir situé à une hauteur $h = 10\text{m}$ au-dessus de la surface d'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur (on prendra $g = 10\text{m.s}^{-2}$) durant la chute. On note Oz l'axe vertical descendant, O étant le point de saut.

1. Déterminer la vitesse v_e d'entrée dans l'eau ainsi que le temps de chute t_e. Faire l'application numérique.

Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. Il subit en plus de la pesanteur:

- une force de frottement: $\overrightarrow{f_v} = -k\vec{v}$ (où $\vec{v}$ est la vitesse dans le référentiel terrestre et $k = 250\text{kg/s}$).
- la poussée d'Archimède: $\overrightarrow{\Pi_A} = -\frac{m}{d_h}\vec{g}$ ($d_h = 0,9$ est la densité du corps humain).

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement à laquelle obéit la vitesse en projection sur Oz, notée v_z. On posera $\tau = m/k$.
2. Intégrer cette équation.
3. Déterminer la vitesse limite v_L en fonction de m, k, g et d_h. Faire l'application numérique.
4. Exprimer la vitesse $v(t)$ en fonction de v_e, v_L, τ et t. Déterminer à quelle instant le baigneur commence à remonter. Faire l'application numérique.
5. En prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine, exprimer $z(t)$. En déduire la profondeur maximale pouvant être atteinte.
6. En fait il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de 1m/s pour pouvoir

se repousser avec ses pieds: à quel instant t_2 atteint-il cette vitesse et quelle est la profondeur minimale du bassin?

Le même baigneur décide maintenant d'effectuer un plongeon. On suppose qu'il entre dans l'eau avec un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et une vitesse $v_e = 8$m.s^{-1}. Les forces qui s'exercent sur lui sont les mêmes que précédemment mais le coefficient k est divisé par deux en raison d'une meilleure pénétration dans l'eau. On repère le mouvement par les axes Ox (axe horizontal de même sens que $\overrightarrow{v_0}$) et Oz (vertical descendant comme précédemment); le point O est le point de pénétration dans l'eau.

1. Déterminer les projections des équations du mouvement sur Ox et Oz.
2. En déduire les composantes de la vitesse dans l'eau en fonction du temps. Existe-t-il une vitesse limite?
3. Le plongeur peut-il atteindre le fond de la piscine situé à 4m?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Pesanteur.*
- $\Longrightarrow$ *PFD.*
- $\Longrightarrow$ *Méthodes de résolution du PFD (ordre 1).*

2.2.4 Entrainement

2.15: Saut à l'elastique

Dans tout le problème, on ne tient pas compte des frottements de l'air. Un fabricant de saut à l'élastique donne les caractéristiques suivant pour un type d'élastique:

- Type M: pour un poids de 65 à 95kg
- Longueur à vide (notée l_0): de 6m à 50m pour des sites de saut de 30m à 250m.
- Tension appliquée sur un élastique pour un allongement de 100%: 200kg
- Tension appliquée sur un élastique pour un allongement de 200%: 325kg

On prendra $g = 9.8$m.s^{-2}.

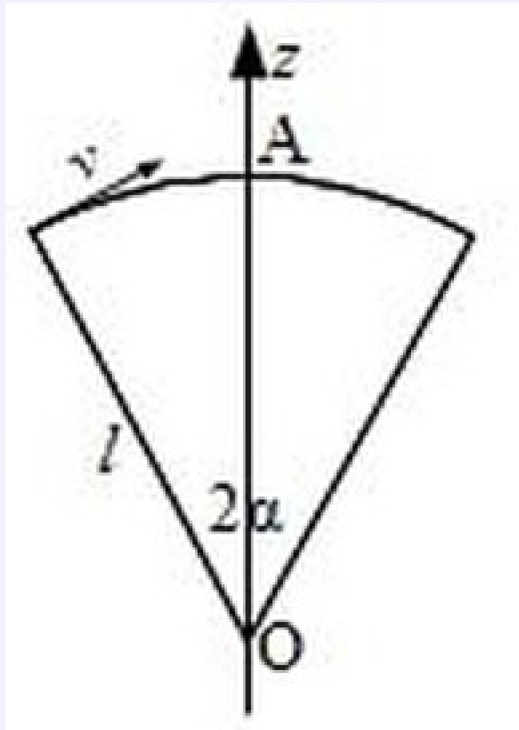
1. Traduire la fiche technique en langage correct pour la physique.
2. La tension de l'élastique obéit-elle à une loi type ressort: $T = k(l - l_0)$ où T est la tension appliquée et l la longueur de l'élastique?
3. On supposera dans la suite que la tension est de la forme $T = k(l - l_0)$. A partir des données, déterminer une valeur moyenne de la constante de raideur de l'élastique k pour un élastique de $l_0 = 6$m.
4. On veut savoir à quelle hauteur remonterait une masse test M de masse minimale (ici $m = 65$kg) si elle est lâchée sans vitesse initiale, l'élastique tendu au maximum. On prendra l'exemple d'un élastique de $l_0 = 6$m, dont le point d'attache est à la hauteur $h = 18$m au dessus du point de départ.
   1. Déterminer l'expression de l'altitude $z(t)$ et de la vitesse $\dot{z}(t)$ tant que l'élastique est tendu.
   2. Calculer l'instant t_1 pour lequel l'élastique n'est plus tendu. En déduire la vitesse de M à cet instant.
   3. Déterminer la hauteur maximale atteinte par l'objet.
5. On réalise maintenant un saut normal, à partir du point d'attache, sans vitesse initiales (le sauteur a les mêmes caractéristiques que la masse test et on utilise le même élastique).
   1. Déterminer le point le plus bas atteint par le sauteur et l'accélération ressentie en ce point.
   2. En réalité, les frottements de l'air entraîne l'immobilisation du sauteur après plusieurs oscillations. A quelle hauteur s'immobilise-t-il?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Pesanteur.*
- $\Longrightarrow$ *Action d'un ressort.*
- $\Longrightarrow$ *PFD.*

- $\Longrightarrow$ *Méthodes de résolution du PFD (ordre 2).*

2.16: Cascade en voiture



Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle franchit une bosse (cf. Figure)), modélisée par deux portions rectilignes raccordés par un arc de cercle de rayon l, de centre O et d'ouverture angulaire 2α.

1. Faire un bilan sommaire des forces extérieures.
2. A quelle condition garde-t-elle contact avec le sol? A.N.: $\alpha = 10°; l = 5$m. (on pourra considérer que le centre d'inertie touche le sol pour simplifier l'étude).

La voiture est maintenant assimilée à un point matériel de masse $m = 1000$kg. On prend $l = 130$m et $\alpha = 15°$. La voiture est au sommet de la bosse (point noté A) avec une vitesse de $v_0 = 125$km.h^{-1} (on ne cherche pas à savoir comment elle est arrivée là). Sa vitesse n'est plus forcément constante.

On suppose que durant la descente, la composante "motrice" de l'action de contact avec le sol est de valeur algébrique F constante (positive pour une accélération, négative pour un freinage).

1. Déterminer une équation différentielle du mouvement de $M(r, \theta)$faisant intervenir la dérivé seconde de θ. On prendra l'origine des angles θ suivant la verticale, c'est-à-dire suivant la direction OA.
2. Après avoir multiplié l'équation par $\dot{\theta}$, l'intégrer.
3. Déterminer l'expression vérifiée par l'angle θ_d pour lequel la voiture quitterait le sol.
4. Calculer cet angle dans le cas où le conducteur coupe le moteur en A (on prendra $g = 9.8$m.s^{-2}). Conclure.
5. Est-il préférable d'accélérer ou de freiner? Calculer la valeur de F pour que la voiture arrive à la fin de la bosse (fin de l'arc de cercle) sans encombre. Est-ce une valeur minimale ou maximale?
6. On reprendra cette étude par une application du théorème du moment cinétique.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Pesanteur.*
- $\Longrightarrow$ *PFD.*

- $\Longrightarrow$ *Détermination d'une force.*
- $\Longrightarrow$ *Condition de contact.*
- $\Longrightarrow$ *Méthodes de résolution du PFD (multiplication par la dérivée première).*

2.17: Arrosage

Un tuyau demi-cylindrique de section négligeable est posé sur le sol. Sur une longueur l, le demi-cylindre est percé d'un très grand nombre de petits trous régulièrement répartis. Il en sort des jets d'eau, tous perpendiculaires au tuyau d'arrosage selon tous les angles entre 0 et π à la même vitesse v_0. Le débit total (masse d'eau dispersée par unité de temps) est D_m. On suppose que chaque jets d'eau se comporte de manière indépendante et on néglige les frottements de l'air.

1. Déterminer la distance x de portée du jet d'eau pour un trou en fonction de l'angle θ que fait le jet au départ du tuyau.
2. En déduire la longueur élémentaire dx arrosée par les jets sortis des trous situé entre les angles θ et $\theta + d\theta$ puis la surface dS arrosée par ces mêmes jets.
3. Déterminer le débit élémentaire dD sortant entre les angles θ et $\theta + d\theta$.
4. En déduire la densité d'arrosage d, c'est-à-dire la masse reçue par unité de temps et par unité d'air (on fera attention aux angles arrosant la même surface élémentaire).

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Pesanteur.*
- $\Longrightarrow$ *PFD.*
- $\Longrightarrow$ *Calcul différentiel.*

2.2.5 Méthodes numériques

L'application de ces méthodes numériques nécessitent d'avoir d'abord travailler sur la résolution numérique d'équations différentielles d'ordre 1[3] et d'ordre 2[4]. Une fois que vous aurez traité ces parties, vous pourrez faire les exercices suivant. Les méthodes écrites devront être modifiées pour le deuxième exercice.

2.2.5.1 Période d'un pendule simple

Attention, les angles sous Python sont en radians.

On considère un pendule simple de longueur $l = 1\mathrm{m}$ dans un champ de pesanteur $g = 9.81\mathrm{m.s}^{-2}$. On néglige tout frottement.

1. Ecrire l'équation différentielle que doit vérifier l'angle θ que fait la tige avec la verticale descendante puis mettre ce problème sous la forme d'un problème d'Euler $\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}}(t) = F(Y(t), t)$ en précisant les expressions de $Y(t)$ et $F(Y(t), t)$. Quelle est la taille de $Y(t)$.
2. En utilisant la fonction native `odeint` de `scipy.integrate` obtenir l'évolution de l'angle θ sur 30s pour une pendule lâché d'un angle $120°$ sans vitesse initiale.
3. Ecrire une `periode(alph:float) -> float` qui, après avoir résolution le problème d'Euler précédent pour un pendule lâché sans vitesse initiale d'un angle `alph` sur une durée de $100s$s, déterminer la période du signal. Pour cela, vous devrez :
   - Déterminer N le nombre de changement de signe de $\theta(t)$ (dont le nombre d'annulations).
   - La durée δt entre la première et la dernière annulation.

[3] https://pcsi3physiquestan.github.io/capacites_numeriques/elec_reponse_o1.html
[4] https://pcsi3physiquestan.github.io/capacites_numeriques/elec_reponse_o2.html

- La période $T = \frac{2\delta t}{N-1}$

4. Tracer la période des oscillations du pendule pour des angles entre $alph = 10°$ et $alph = 150°$ par pas de $10°$. Analyser.

2.2.5.2 Portée d'un tir de badminton

La trajectoire d'un volant de badminton (masse $m = 5.3$g) nécessite de prendre en compte les frottements de l'air. La forme du volant et sa vitesse impose un régime d'écoulement d'air turbulent et la force de frottement de l'air sur le volant est alors modélisée par:

$$\vec{f_v} = -\frac{1}{2}\rho\pi R^2 C_x \left\|\vec{v}\right\| \vec{v}$$

avec $\rho = 1.29 \times 10^{-3}$kg.m^{-3} la masse volumique de l'air, $R = 3.4$cm le rayon du volant de badminton (face au flux d'air), $C_x = 0.65$ le coefficient de trainée du volant dans l'air et $\vec{v}$ la vitesse du volant dans l'air.

Soumis de plus à la pesanteur $g = 9.81$m.s^{-2}, l'étude théorique de la trajectoire du volant est délicate. On se propose de l'étude de manière numérique pour une vitesse initiale $V_0 = 60$m.s^{-1} et un angle de départ $alph$ variable. L'altitude initiale du volant est $h_0 = 2$m.

1. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution du volant de badmintion et mettre ce problème sous la forme d'un problème d'Euler $\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}}(t) = F(Y(t), t)$ en précisant les expressions de $Y(t)$ et $F(Y(t), t)$. Quelle est la taille de $Y(t)$.
2. Ecrire une fonction `euler(f:callable, v0:float, alph:float, pas:float) -> (numpy.ndarray, numpy.ndarray)` qui réalise le schéma d'intégration d'Euler explicite et renvoie l'évolution des coordonnées de position et de vitesse pour une vitesse initiale `v0` et un angle `alph` initial. **L'intégration ne devra pas s'arrêter pour un temps défini mais lorsque l'altitude du volant devient négative.**
3. Tracer la trajectoire du volant pour un angle de $45°$ en choisissant un pas d'intégration correct.
4. Ecrire une fonction `portee(alph:float)` qui renvoie la portée estimée du tir pour un angle `alph`.
5. Tracer la portée du tir en fonction de l'angle $alph$ et déterminer la gamme d'angle acceptable pour un retour de fond de court où la portée doit être entre 9m et 12m.

CHAPTER

THREE

APPROCHE ÉNÉRGÉTIQUE

3.1 Comprendre le contexte

3.1.1 Théorèmes énergétiques

3.1: Compétences

- Calculer la puissance et le travail d'une force
- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
- Savoir que la puissance dépend du référentiel
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou le théorème de la puissance cinétique de manière appropriée en fonction des contextes
- Utiliser le théorème de l'énergie mécanique ou le théorème de la puissance mécanique de manière appropriée en fonction des contextes
- Établir et connaître l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, gravitationnelle, élastique, de torsion et électrostatique.
- Distinguer forces conservatives et non conservatives. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.

3.1.1.1 Travail et puissance des actions mécaniques

3.1.1.1.1 Travail et puissance d'une action ponctuelle

Important 3.1

Travail élémentaire d'une action ponctuelle
Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. On définit le travail élémentaire de cette action sur un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ par:

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Ce travail correspond à l'énergie apportée par le système Σ_1 au système ponctuel M lorsque ce dernier se déplace de manière infinitésimale de $\overrightarrow{dOM}$.
Ce **transfert** d'énergie **dépend a priori du déplacement élémentaire considéré**.

Important 3.2

Travail sur un déplacement fini d'une action ponctuelle
Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. Si le point M se déplace sur un chemin Γ. On définit le travail $W(\overrightarrow{F})$ de cette action sur un déplacement fini le long du chemin Γ par la somme (intégrale) des travaux élémentaires le long de chemin:

$$W_\Gamma(\overrightarrow{F}) = \int_{M\in\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Ce travail correspond à l'énergie apportée par le système Σ_1 au système ponctuel M lorsque ce dernier se déplace sur le chemin Γ.
Ce **transfert** d'énergie **dépend a priori du chemin parcouru**.

Important 3.3

Puissance transmise par une action ponctuelle
Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. Si à un instant t, le point M possède une vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$, on définit la puissance $P_{\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F})$ par cette action au système M dans le référentiel $\mathfrak{R}$ par:

$$P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$$

Cette puissance correspond à la puissance apportée par le système Σ_1 au système ponctuel M à un instant t dans le référentiel $\mathfrak{R}$.
Ce **transfert** d'énergie **dépend a priori du référentiel considéré**.

Important 3.4

Relation puissance-travail
On a la relation suivante pour une même action:

$$P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F}) = \frac{\delta W(\overrightarrow{F})}{\mathrm{dt}}$$

Remarque: Le point pour l'expression du déplacement élémentaire doit être fixe dans $\mathfrak{R}$.
Cette expression se démontre en remarquant que $\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}}_{\mathfrak{R}}$

3.1.1.1.2 Travail et chemin

Attention

Dépendance et notation
Le travail d'une action **dépend du chemin considéré**. Il ne s'agit donc PAS de la variation d'une grandeur d'état (c'est-à-dire définie pour un état donné de position et vitesse).
Le travail correspond donc à une grandeur mathématique particulière. Le travail infinitésimal doit donc être noté δW (l'important c'est le δ) et le travail sur un déplacement fini W (l'important est l'absence de Δ).
Il est important de faire la différence avec les grandeurs d'état (comme l'énergie cinétique) dont on calcule une **variation** (notée avec un d ou Δ suivant que la transformation soit infinitésimale ou finie) et les grandeurs d'échange comme le transfert d'énergie mécanique (ou travail) dont le **transfert** est noté avec un δ ou rien.

3.1.1.2 Forces/actions conservatives et énergie potentielle

Nous avons vu précédemment que le travail d'une action dépendant a priori du chemin parcouru entre 2 points. Il existe néanmoins une classe de forces où ce n'est plus le cas. Le travail ne dépendra plus que des positions A et B. Ces actions ont en physique un rôle extrêment important au point qu'on va les particulariser: ce sont les actions conservatives.

3.1.1.2.1 Forces/actions conservatives: définition

Important 3.5

Actions ponctuelle conservatives
Il existe des actions dont le travail sur un trajet entre deux points A et B **ne dépend que des positions des points A et B** mais pas du chemin parcouru entre les deux.

Important 3.6

Energie potentielle
Puisque le travail de l'action du point A au point B ne dépend pas du chemin parcouru mais uniquement des positions A et B, il existe une fonction **de la seule position** notée E_p dont la variation $E_p(B) - E_p(A)$ permet de déterminer le travail de l'action de A à B. On appelle cette fonction **énergie potentielle** et elle est définit de telle sorte que le travail de l'action du point A au point B vaut:

$$W_{A\to B} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = -\Delta E_{p,A\to B}$$

Remarque: On dit que la force dérive d'une énergie potentielle.

3.1.1.2.2 Energie potentielle et force

Important 3.7

Relation force et énergie potentielle
L'expression précédennte démontre immédiatement la relation suivante:

$$dE_p = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$
$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$$

La dernière expression permet de déduire de l'énergie potentielle l'expression de la force dans tous les types de repères.

3.1.1.2.3 Forces conservatives usuelles

Energie potentielle de pesanteur

Important 3.8

Cas d'un point matériel
L'action du poids sur un point matériel M dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est:

$$E_{p,pes} = mgh + K$$

où h est l'altitude et K une constante - on rappelle que l'énergie potentielle est définie à une constant près.

Force de Lorentz

Important 3.9

Partie électrique
L'action sur un point matériel du champ électrique indépendant du temps $\overrightarrow{E}$ dérive d'une énergie potentielle appelée énergie potentielle électrostatique. Elle s'écrit sous la forme $E_p(M) = qV(M)$ où q est la charge du point matériel et V(M) est le potentiel électrique dépendant du seul champ électrique (et pas du point matériel sur lequel il agit). On a la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$.
Remarque: Le potentiel électrique est celui introduit en électrocinétique. Cette expression ne sera utilisée qu'en fin d'année.

Forces newtoniennes

Important 3.10

Potentiel newtonien Soit un point O de masse m_O et/ou de chargeq_O agissant sur un point M de masse m et/ou de charge q. Les forces gravitationnelles et coulombiennes dont les expressions sont de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$dans un système de coordonnées de sphérique centrée au point O dérivent d'une énergie potentielle appelées respectivement énergie potentielle de gravitation et énergie potentielle électrostatique et dont l'expression est:

$$E_p = -\frac{K}{r} + Cste$$

Actions de rappel

Important 3.11

Action de rappel d'un ressort L'action de rappel d'un ressort dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est:

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2$$

3.1.1.3 Théorèmes énergétiques

3.1.1.3.1 Théorème de l'énergie cinétique

Important 3.12

Théorème de l'énergie cinétique
Soit un point matériel M de masse m. La variation d'énergie cinétique du point M dans un référentiel galiléen entre deux instants est égale à la somme du travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point M entre les deux instants considérés.

$$\Delta E_{C,A\rightarrow B} = W_{A\rightarrow B}(\overrightarrow{F})$$
$$dE_c = \delta W(\overrightarrow{F})$$

où $\overrightarrow{F}$ est la résultante totale des forces s'appliquant sur le point matériel M. La première écriture consiste à appliquer le théorème de l'énergie cinétique sur un chemin fini d'un point A à un point B (on a rappelle que le travail des forces dépend a priori du chemin choisi). La seconde traite le cas d'un déplacement infinitésimal.

Important 3.13

Théorème de la puissance cinétique
En référentiel galiléen (sous les mêmes hypothèses que précédemment):

$$\frac{\mathrm{dE}_{\mathrm{c}/\mathfrak{R}}}{\mathrm{dt}} = P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F})$$

3.1.1.3.2 Théorème de l'énergie mécanique

Important 3.14

Théorème de l'énergie mécanique
Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel M de masse m entre deux points A et B d'un système est égale au travail des seules forces non-conservatives sur le trajet entre A et B.
On peut déduire du théorème précédent le théorème de la puissance mécanique.

3.1.1.3.3 Interprétation des théorèmes (en ligne)

3.1.2 Systèmes conservatifs

3.2: Compétences

Toutes ces compétences concernent les systèmes conservatifs.

- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif: trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.
- Identifier le cas des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable au modèle de l'oscillateur harmonique

- Mettre en évidence les effets non linéaires lorsqu'on s'éloigne du voisinage d'une position d'équilibre.
- Evaluer l'énergie minimale pour franchir une barrière de potentiel.

Dans toute l'étude, on supposera que le système est ponctuel. Plusieurs caractéristiques peuvent se généraliser aux systèmes de points mais ces derniers possédant normalement plusieurs degré de liberté, la généralisation peut devenir quelques fois complexes.

Important 3.15

Système conservatif
Un système mécanique est dit conservatif si son énergie mécanique est conservé durant le mouvement. Cela implique que les seules forces qui s'appliquent sur le système sont conservatives ou ne travaillent pas.

Important 3.16

Positivité de l'énergie cinétique

- Cette propriété est bien plus générale mais elle a des conséquences particulière dans les mouvements conservatifs. En effet, **l'énergie cinétique est positive ou nulle**.
- Il vient que l'**énergie potentielle du mobile doit nécessairement être inférieure ou égale à l'énergie mécanique**.
  Dans le cas d'un système conservatif où l'énergie mécanique est une constante, cela signifie que l'énergie potentielle est majorée et que **les zones de l'espace où l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie mécanique sont des zones inaccessibles pour le système. On parle de barrières de potentiels.**
  De plus, si le système atteint un point où l'énergie potentielle égale l'énergie mécanique, alors en ces points, la vitesse du mobile s'annule (puisque l'énergie cinétique y est nulle). C'est en général un point de rebroussement du système.

Important 3.17

Position d'équilibre et énergie potentielle
Nous étudierons plus en détail cette propriété pour les système conservatifs à 1 degré de liberté mais on peut déjà remarqué que **les positions d'équilibre correspondent à des extrema d'énergiz potentielle** (maximum, minimum ou point col).

En effet, la résultante des forces est nulle en une position d'équilibre. Or la force étant moins le gradient de l'énergie potentielle, il vient la propriété précédente (dans un système conservatif, la résultante des forces dérive d'une énergie potentielle).

3.1.2.1 Système à 1 degré de liberté

Il est délicat de visualiser les propriétés précédentes et d'autres que nous allons voir pour des systèmes à multiples degrés de liberté car on ne peut avoir de représentation graphique simple de l'énergie potentielle. Par contre, pour un système à 1 degré de liberté, les représentations sont possibles. Nous allons travailler sur un tel système qui sera très présent en physique.

3.1.2.1.1 Système à 1 degré de liberté et profil

Important 3.18

Système à 1 degré de liberté
Un système à degré de liberté est un système où toutes les grandeurs peuvent être décrites comme des fonctions d'une seule coordonnée de l'espace $(x, \theta...)$. Il s'agit en général dun mouvement rectiligne ou d'un mouvement de rotation.

3.1.2.1.2 Etats et barrière de potentiel

Zonnes accessibles et barrière de potentiel

Important 3.19

Zones accessibles
On va s'intéresse ici au cas des systèmes conservatifs : l'énergie mécanique est une constante.
On rappelle la positivité de l'énergie cinétique qui permet d'écrire la condition suivante: un point de coordonnées x est accessible par le système si $E_p(x) \leq E_m$: l'énergie potentielle est bornée. Cela définit des zones interdites et des zones accessibles.

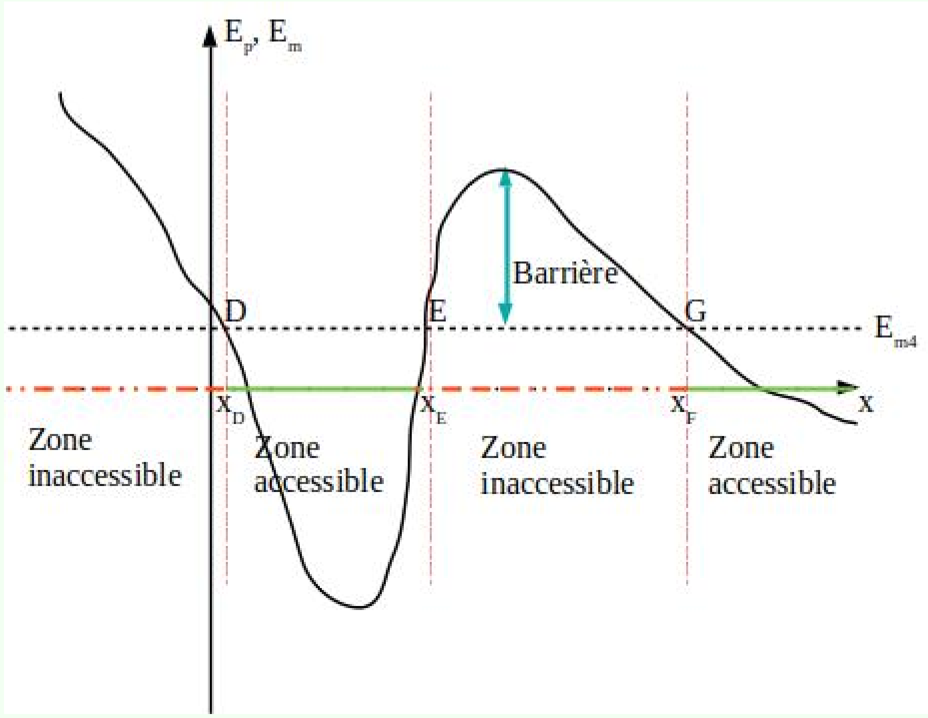


Fig. 3.1: Zones accessibles et inaccessibles

Dans l'exemple ci-dessus, si le système possède une énergie mécanique égale à E_{m4}, toutes les positions de x_D à x_E et les positions de x_F à l'infini sont accessibles et les autres sont inaccessibles.

Important 3.20

Barrière de potentiel
Remarquons que le mobile ne peut passer de la zone DE à la après F. En effet, pour passer de la première zone à la seconde, il faudrait passer par des points entre E et F qui sont inaccessibles par leur trop forte énergie potentielle. On dit qu'il y a une **barrière d'énergie potentielle**.
Suivant ses conditions initiales, le système sera soit "bloqué" entre D et E, soit entre F et l'infini.

Etats liés et de diffusion

Important 3.21

Etats liés et de diffusion
On remarque sur les états précédents deux types d'états très particuliers: des états où le système est **confiné** dans une portion d'espace (état "entre DE"). On parle d'état **lié**.
Des états où le système peut s'éloigner indéfiniment (état "supérieur à F"), on parle **d'état de diffusion**.

3.1.2.1.3 Equilibre et stabilité

Condition d'équilibre

Important 3.22

Condition d'équilibre
Les positions d'équilibre d'un système conservatif sont nécessairement des positions où l'énergie potentielle possède un extremum (ou plus généralement un point d'annulation de la dérivée).

Stabilité des positions des d'équilibre

Important 3.23

Stabilité
Une position d'équilibre est dite stable si, en écartant légèrement le mobile de cette position d'équilibre, il reviendra de lui-même vers la position d'équilibre.
Si la position n'est pas stable, elle est dite instable.

Important 3.24

Energie potentielle et stabilité
Si en une position d'équilibre, la dérivée seconde est strictement positive, alors c'est une position d'équilibre stable.
Si en une position d'équilibre, la dérivée seconde est strictement négative, alors c'est une position d'équilibre instable.
Si elle est nulle, on ne peut conclure.

3.3: Démonstration

On peut utiliser l'une des deux méthodes énoncées précédemment pour prouver cette propriété. Nous allons ici utiliser la propriété de stabilité des équation différentielle linéaires mais on pourrait très bien utiliser l'analyse du signe de l'accélération (s'entraîner à le faire).
On rappelle que la force s'écrit $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}}(x)\overrightarrow{e_x}$. Pour linéairise le PFD, nous allons développer l'énergie potentielle à l'ordre 2. Il vient:

$$E_p(x) \approx_{x\approx x_{eq}} E_p(x_{eq}) + \underbrace{\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}}(x_{eq})}_{=0}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})\left(x - x_{eq}\right)^2$$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}} \approx_{x\approx x_{eq}} -0 - 0 - \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})\left(x - x_{eq}\right)$$

$$m\ddot{x} = F(x) \approx -\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})\left(x - x_{eq}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x_{eq} = m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x$$

La dernière équation est stable si la dérivée seconde est positive et instable si la dérivée seconde négative. Si elle est nulle, il faut faire un développement limité à un ordre supérieur. Mais l'équation obtenue n'est pas linéaire, la seule méthode utilisable sera de vérifier le signe de l'accélération.

Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

Important 3.25

Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable
Autour d'une position d'équilibre stable, le système va rester confiné et se comporte comme un oscillateur harmonique de pulsation propre $\sqrt{\frac{\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{E_p}}{\mathrm{dt}^2}(x_{eq})}{m}}$.
La preuve est directe à partir de l'équation obtenue précédemment:

$$m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{E_p}}{\mathrm{dx}^2}(x_{eq})x = \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{E_p}}{\mathrm{dx}^2}(x_{eq})x_{eq}$$

3.1.2.1.4 Effet des frottements

3.2 S'entrainer

- des exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : pas d'activités
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement) : En plus des exercices du cours, un devoir libre est accessible ici[5]. Il traite des équilibre et de la notion de bifurcation.
- des approfondissement (Aller plus loin) : Une étudede l'ammoniac est disponible en ligne. Plusieurs formes d'énoncés sont proposés : de la forme "expert" où presque aucune information n'est donnée à la forme "standard" ou l'exercice est très guidé.

3.2.1 Méthodes

3.2.1.1 Calcul du travail d'une force.

Nous allons voir ici la méthode permettant de calculer le travail d'une force. Dans le cadre du programme, le point centrale est le paramétrage. Il permet d'obtenir une expression simple de l'intégrale à calculer.

3.4: Exercice

On considère un point M sur une trajectoire circulaire dans un plan vertical. On repère l'angle θ que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (O est le centre du cercle) par rapport au point le plus bas du cercle. Déterminer le travail du poids sur M lorsqu'il passe du point $\theta = 0$ au point $\theta = \theta_1$.

[5] https://stanislas.edunao.com/course/view.php?id=987%C2%A7ion=5

3.2.1.2 Application du TEM/TEC

3.5: Toboggan circulaire

On considère une masse m ponctuelle qui se déplace sans frottements sur une demie-sphère de centre O et de rayon R. Elle est soumise à un champ de pesanteur g et est lâchée du sommet avec une vitesse très faible vers la droite. La masse décolle-t-elle de la sphère? On utilisera deux méthodes différentes (utilisant respectivement le TEC puis le TEM) pour répondre à la question.

3.2.1.3 Systèmes conservatifs

3.6: Propriétés états liés (en ligne).

Démontrer les propriétés suivantes spour un état lié d'un système conservatif.
- Les points extrêmes atteints par un état liés sont les points où $E_p = E_m$.
- Un état lié est nécessairement périodique
- L'évolution de la vitesse est symétrique à l'aller et au retour.

3.7: Saut à l'elastique

On prend l'exercice du *saut à l'élasique* (page 31). L'élastique est toujours modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 lorsqu'il est tendu et n'exerce aucune force lorsqu'il est détendu.
On veut savoir à quelle hauteur remonterait une masse test M de masse minimale (ici $m = 65$kg) si elle est lâchée sans vitesse initiale, l'élastique tendu au maximum : le point d'attache est à la hauteur $h = 18$m au dessus du point de départ.

1. Déterminer l'altitude atteinte en utilisant l'énergie potentielle.

3.2.2 Exercices d'application

3.8: Frottements fluides

Démontrer qu'une force de frottements fluides linéaires est nécessairement non-conservatives.
Indice: On cherchera à démontrer que le travail d'un trajet A vers B est nécessairement du même signe qu'un travail de B vers A.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Puissance d'une force.*

3.9: Relation force-énergie

Etablir dans chaque système de coordonnées les relations entre les composantes de la force et les dérivées partielles de l'énergie potentielle.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Force conservative.*
- $\Longrightarrow$ *Gradient.*

3.10: Système conservatif

On considère un point matériel M de masse m attaché au bas d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est attaché à un plafond fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose le champ de pesanteur uniforme et on prend l'origine des *altitudes* ($z = 0$) quand la longueur du ressort est l_0.

1. Déterminer l'énergie potentielle du système et montrer qu'il est conservatif en l'absence de frottements. Déduire *de l'énergie potentielle* la position d'équilibre et vérifier sa stabilité.
2. On lâche le mobile sans vitesse initiale de $z = 0$. Déterminer les altitudes extrêmes z_{min} et z_{max} ainsi que la vitesse maximale du mobile.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Barrière de potentiel.*
- $\Longrightarrow$ *Position d'équilibre et stabilité.*

3.2.3 Entrainement

3.11: Pendule simple modifié

On considère un pendule simple modifié. Un mobile ponctuel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement. On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. A la verticale et en dessous de O, un clou planté en O' avec OO'=L/3, qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche. Quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil 2L/3.
A la date t=0, le mobile est lâché sans vitesse initiale avec une inclinaison $\theta(0) = \theta_0 > 0$. On note t_1 la date de première rencontre du fil avec le clou et t_2 la date de la première annulation de la vitesse du mobile pour formule. L'intervalle $[0; t_1[$ est nommé première phase du mouvement, l'intervalle $]t_1; t_2[$ est nommé deuxième phase du mouvement. A la date t_1^-, le fil n'a pas encore rencontré le clou et à la date t_1^+, le fil vient de toucher le clou.

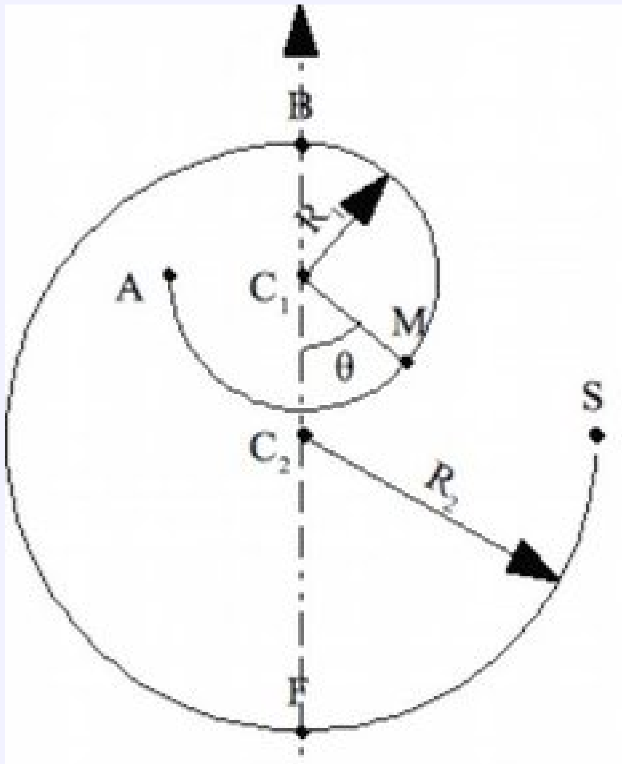
1. Par le théorème de la puissance mécanique (dérivée du théorème de l'énergie mécanique), établir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement.
2. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_1^- de M à la date t_1^-. En déduire la vitesse angulaire ω_1^- à cette date.
3. Dans l'hypothèse des petites oscillations (pour cette question uniquement), déterminer la durée δt_I de la première phase.
4. Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. Déterminer la vitesse v_1^+ de M à la date t_1^+. En déduire la vitesse angulaire ω_1^+ à cette date.
5. Déterminer l'angle θ_2 atteint à l'instant t_2.
6. On se place à nouveau dans le cadre des petites oscillations. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, donner sans calcul la durée δt_{II} de la deuxième phase.
7. Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie cinétique.*
- $\Longrightarrow$ *Pendule aux petits angles.*

3.12: Mouvement d'un anneau sur une piste

On considère le dispositif suivant où un objet assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste de deux parties circulaires de rayons R_1 et R_2 et de centres C_1 et C_2 dans un plan vertical. On repère la position de M par l'angle θ dont le centre de référence est soit C_1 (partie (1)), soit C_2 (partie (2)). On prend les angles croissants dans le sens trigonométrique et $\theta_A = -\pi/2$. Il n'y a pas de frottements et on note g l'accélération de la pesanteur.



1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(\theta)$ de M en supposant $E_p = 0$ au point $B(\theta = \pi)$. On distinguera les cas (1) et (2).
2. Tracer l'allure de $E_p(\theta)$
3. Déterminer les positions angulaires d'équilibre et leur stabilité.
4. L'anneau est initialement en A. Il est lancé avec une vitesse V_0 (dans le sens trigonométrique).
    1. Montrer graphiquement qu'on doit imposer une condition sur la vitesse V_0 pour que le mobile M atteignent le point F.
    2. Exprimer cette condition en fonction des données du problème.
    3. En déduire la vitesse du mobile en F (notée V_F) quand cette condition est remplie.
    4. La condition précédente remplie, l'anneau sort-il de la piste en S? A quelle vitesse (notée V_S)?
5. Déterminer à chaque instant la valeur de l'accélération normale en fonction de V la vitesse du mobile et des rayons R_1 et R_2 pour chaque partie (1) et (2).
6. Dans la partie (1), déterminer la réaction de la piste sur l'anneau. S'il était remplacé par une bille roulant à l'intérieur de la piste, quelle serait la condition sur formule pour que la bille reste sur la piste.
7. Même question pour la partie (2).

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie mécanique.*

- $\Longrightarrow$ *Barrière de potentiel.*
- $\Longrightarrow$ *Position d'équilibre et stabilité.*

3.13: Equilibre de charges et petits mouvements

Tous les mouvements ont lieu suivant l'axe Ox et on néglige l'effet du poids. La force électrostatique exercée par un point M_1 de charge q_1 sur un point M_2 de charge q_2 est: $\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2. On travaille dans un référentiel R supposé galiléen.

1. Un point matériel de charge q est fixé en O, origine du repère. Un autre point matériel M de charge identique q, initialement à droit de O, à la distance a de O, est abandonné sans vitesse initiale.
   1. Déterminer en fonction de $x = OM > 0$, l'énergie potentielle associée à la force électrostatique subie par M. On la prendra par convention nulle pour M à l'infini.
   2. Le point M est-il dans un état lié ou de diffusion?
   3. Déterminer la vitesse du point M lorsqu'il est à l'infini.
2. Un autre point matériel fixe O' de charge 4q est ajouté à une distante 2a à droite de O. Le point M est placé entre O et O'.
   1. Déterminer vectoriellement la résultante des forces qui s'exerce sur M en fonction de x=OM ($0 < x < 2a$). En déduire la position d'équilibre. On la notera par la suite x_0.
   2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ du point et étudier la stabilité de la position d'équilibre x_0 pour 0 < x < 2a.
   3. Représenter l'allure de $E_p(x)$ pour la particule de charge q pour $x \in [0; 2a]$. Calculer la valeur de l'extremum $E_p(x_0)$.
3. On lâche sans vitesse initiale la particule M (de charge q, masse m) au voisinage du point d'équilibre.
   1. Justifier qu'on puisse faire l'approximation $(x - x_0) \ll 1$ pour tout le mouvement.
   2. Etablir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de cette position
   3. En déduire la pulsation des petites oscillations et la forme de $x(t)$.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Position d'équilibre et stabilité.*

3.14: Bille accrochée à deux ressorts

On considère le mouvement d'une bille M de masse m pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de plan vertical, de centre O et de rayon R. On note AB le diamètre horizontale du cerceau, Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical et θ l'angle entre Ox et OM. Le sens trigonométrique est pris positif (on suppose que $\theta_B = 0$). On suppose que le cerceau est fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dans tout le problème, on prendra comme origine des potentiels le point le plus bas du cerceau.

1. Dans un premier temps, la bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k dont la seconde extrémité est fixée en B.
   1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur la bille M. Quelles sont les forces qui travaillent?
   2. Déterminer l'expression de la longueur du ressort en fonction de R et θ. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique pour le point M.
   3. Déduire du théorème de l'énergie mécanique l'équation différentielle du mouvement.
   4. Déterminer à partir de l'équation différentielle les position d'équilibre et étudier leur stabilité par linéarisation de l'équation. On note θ_d la position d'équilibre pour $\theta \in [-\pi; 0]$.
   5. Retrouver les conclusions précédentes par une étude de l'énergie potentielle.
2. Dans la suite, en plus du ressort précédent, on attache la bille à un deuxième ressort identique au premier mais dont la seconde extrémité est fixée en A.
   1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur la bille M. Quelles sont les forces qui travaillent?
   2. Déterminer l'expression de la longueur du second ressort en fonction de R et θ. En déduire l'expression

de l'énergie potentielle élastique du le point M pour le second ressort.

3. Exprimer le théorème de l'énergie cinétique (forme locale) pour le point M. En déduire l'équation différentielle du mouvement. Qu'observe-t-on?
4. Déterminer la résultante des forces de rappel élastique et justifier l'observation précédente.
5. Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
6. Déterminer l'expression de la réaction $\overrightarrow{N}$ du cerceau en fonction de θ sachant qu'on abandonne la bille depuis $\theta = \theta_0$ sans vitesse initiale. (On supposera $|\theta_0| \approx \pi/2$).
7. En déduire la condition à vérifier pour que la bille quitte le cerceau.
8. Quelle est la condition nécessaire sur k, R, m, g pour que la bille reste sur le cerceau lorsqu'elle est à l'équilibre.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Ressort.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Position d'équilibre et stabilité.*

CHAPTER

FOUR

APPLICATIONS

4.1 Oscillateurs

4.1: Compétences

- Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique
- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques
- Connaître la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer la réponse détaillée à partir des racines du polynômes caractéristiques.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.
- Mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation.
- Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
- Expliquer la complémentarité des informations présentes sur les graphes d'amplitude et de phase, en particulier dans le cas de résonance d'élongation de facteur de qualité modéré.
- Remarque: Les compétences générales d'analyse des filtres sont aussi importantes pour ce chapitre.

4.1.1 Mise en équation

Le but de cette partie est de voir des exemples de mise en équation sur le cas simple du système masse-ressort.

Nous aborderons aussi quelques éléments de modélisation des systèmes atomiques.

4.1.1.1 Oscillateur harmonique

4.2: Exercice

L'équation d'un oscillateur harmonique est un système dont l'évolution est régit par une équation différentielle de la forme:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

On considère un ressort de raideur k et de longueur l_0 accroché d'un côté à un point A de côte x_A fixe et de l'autre à une masse m assimilable à un point matériel noté M. Le point M glisse sans frottements sur un axe Ox de sorte que le ressort reste horizontal. On note x la position du point M par rapport à un point O de référence. Pour cet exercice, le point O est confondu avec le point A.

1. Exprimer l'équation d'évolution de x(t).
2. En comparant l'équation d'un oscillateur LC en électrocinétique à celle obtenue ici. Proposer des grandeurs analogues entre k,m,L et C

4.1.1.2 Oscillateur amorti

4.3: Exercice

Un oscillateur (linéaire) amorti possède comme équation différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

On reprend le cas précédent du système masse-ressort mais on suppose que le système est soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\lambda\vec{v}$.

1. Déterminer la nouvelle équation qui régit l'évolution de x. Introduire les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité.
2. Déduire une analogie avec la résistance électrique d'un circuit RLC série.
3. Retrouver, en utilisant l'analogie précédente les valeurs de la pulsation propre, du facteur de qualité et du coefficient d'amortissement.

Remarque: Comme précédemment, on réalisera un changement de variable $X = x - x_{eq}$ pour s'affranchir du second membre constant et étudier uniquement les variations autour de la position d'équilibre.

4.1.1.3 Oscillateur forcé

Nous allons étudier deux manières de forcer un oscillateur: par une force extérieure sinusoïdale ou en faisant bouger l'autre extrémité du ressort.

4.4: Exercice

On considère l'oscillateur amorti étudié précédemment. On applique à la masse m une force supplémentaire $\overrightarrow{F}(t) = F_m \cos\omega t\overrightarrow{e_x}$.

On pose X(t) l'écart à la position d'équilibre.

1. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de X(t)
2. En déduire la représentation complexe $\underline{X}$ de X(t). Commenter le comportement fréquentielle de la réponse en élongation.

4.5: Exercice

On considère à nouveau l'oscillateur amorti mais sans la force ajotée précédemment. Par contre, on fait bouger le point A de sorte que $\overrightarrow{OA} = x_m \cos\omega t\overrightarrow{e_x}$.

On pose X(t) l'écart à la position d'équilibre lorsque $\overrightarrow{OA} = 0$.

1. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de X(t)
2. En déduire la représentation complexe $\underline{X}$ de X(t). Commenter le comportement fréquentielle de la réponse en élongation.

4.1.2 Oscillateur harmonique

4.1.2.1 Oscillateur harmonique: Equation

Important 4.1

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique
Un oscillateur harmonique est un système dont l'équation d'évolution s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

On rappelle qu'on peut annuler le second membre **constant** en procédant à un changement de variable $X = x - x_{eq}$. Pour la suite, on étudiera directement l'équation sans second membre.

Important 4.2

Energie potentielle
La résultante des forces en mécanique s'écrit donc sous la forme $\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{e_x}$ et elle dérive d'une énergie potentielle sous la forme $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
Attention: ces expressions seront à modifier suivant le système de coordonnées choisi.

4.1.2.2 Evolution temporelle

4.6: Exercice

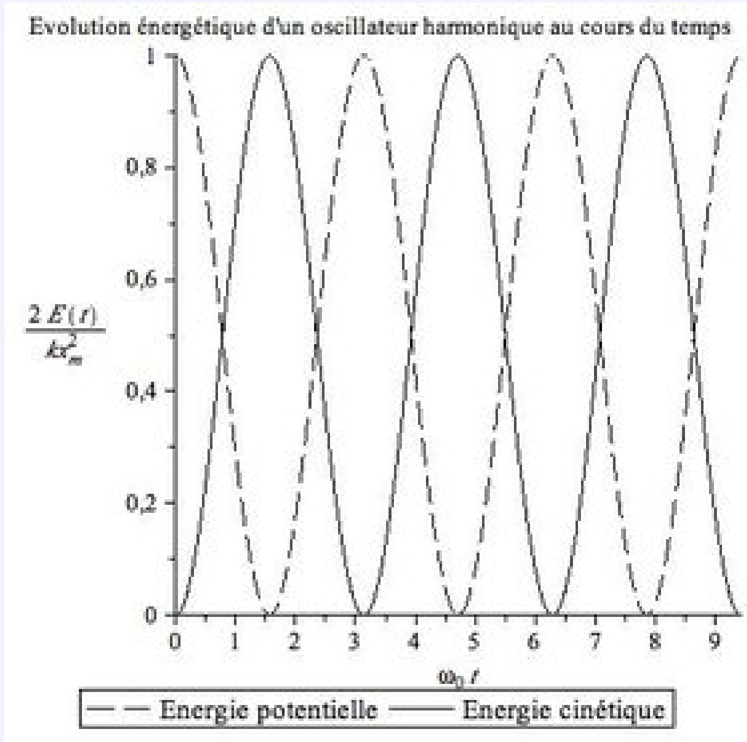
1. Donner les deux formes générales de $X(t)$
2. Déterminer les constantes d'intégration sous les deux formes pour des conditions initialles à $t = 0$: $x(t = 0) = x_0; v(t = 0) = v_0$.
3. Vérifier qu'il y a **isochronisme** des oscillations.
4. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $X(t)$.

4.1.2.3 Evolution énergétique

4.7: Exercice

On suppose que les oscillations sont d'amplitude x_0.

1. Exprimer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique au cours du temps.
2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique
3. On a représenté graphiquement l'évolution temporelle des grandeurs énergétiques. Commenter les échanges d'énergie.



4.1.3 Oscillateur amorti

4.1.3.1 Oscillateur amorti: Equation

Important 4.3

Oscillateur amorti
Un oscillateur amorti est un oscillateur donc l'équation s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

On rappelle qu'on réalise souvent un changement de variable pour annuler le second membre constant.
On n'a pas donné ici l'expression avec le coefficient d'amortissement mais on peut réaliser l'étude au moyen de ce dernier aussi.

Important 4.4

Evolution énergétique
Le théorème de la puissance mécanique donne:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(E_p + E_c\right) &= P(\overrightarrow{f_{fluide}}) \\ &= -\lambda v^2 \\ &< 0\end{aligned}$$

On observe que l'énergie mécanique va diminuer au cours du temps. Suivant le régime on pourra observer des échanges amortis entre les deux réservoirs d'énergie que sont l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

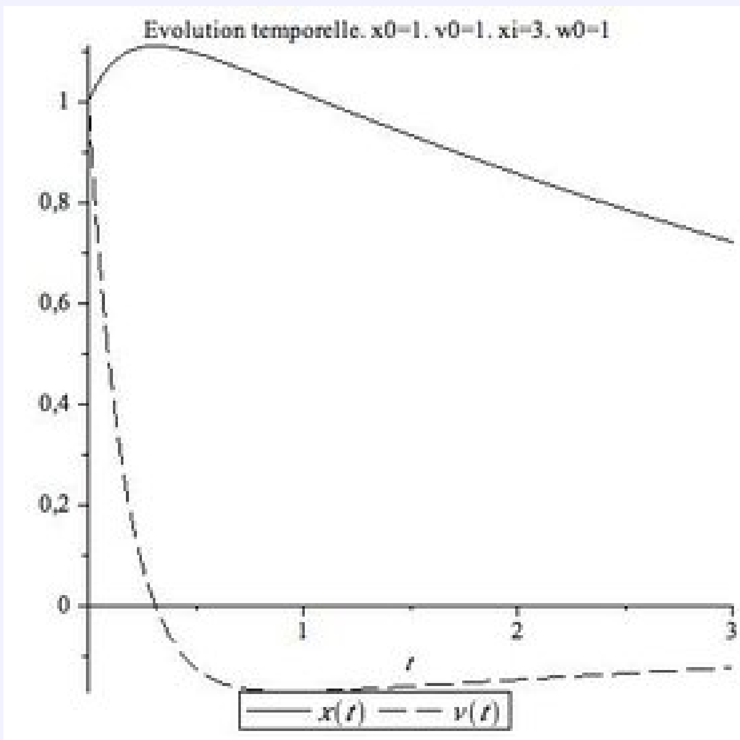
4.1.3.2 Oscillateur amorti: Régimes de fonctionnement

4.1.3.2.1 Régime apériodique

4.8: Exercice

On considère un oscillateur amorti en régime apériodique.

1. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = x_0$ et $V(t = 0) = V_0$.
2. Estimer le temps caractéristique d'un tel régime en fonction du coefficient d'amortissement.



4.1.3.2.2 Régime critique

4.9: Exercice

On considère un oscillateur amorti en régime critique.

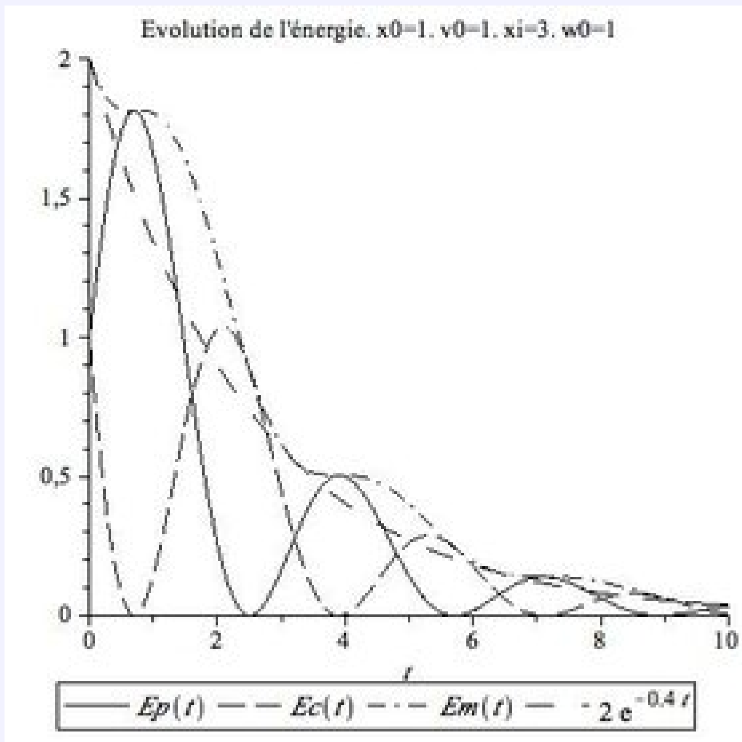
1. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = x_0$ et $V(t = 0) = V_0$.
2. Estimer le temps caractéristique d'un tel régime.

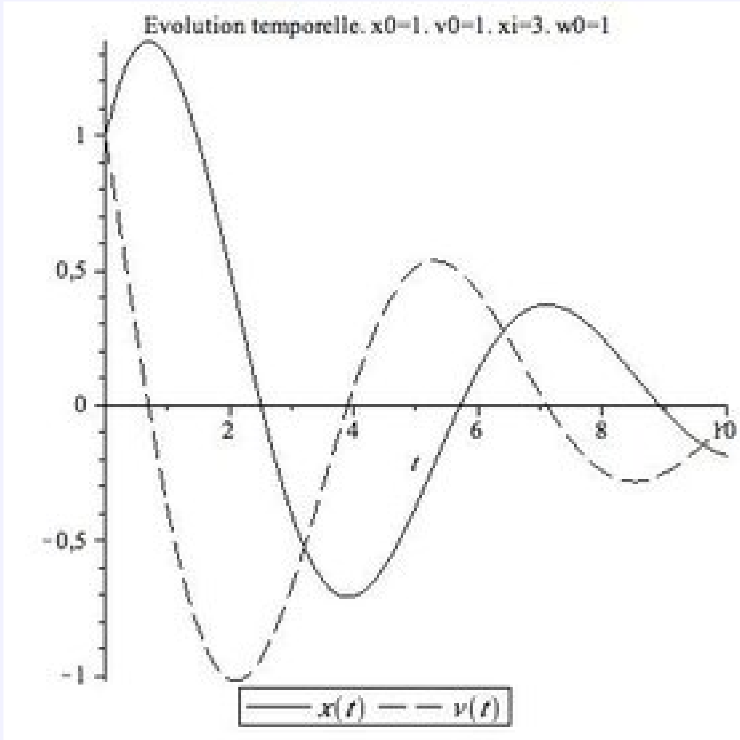
4.1.3.2.3 Régime pseudo-périodique

4.10: Exercice

On considère un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique.

1. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = x_0$ et $V(t = 0) = V_0$.
2. Quelles sont les caractéristiques de l'évolution temporelle ?
3. Estimer le temps caractéristique d'un tel régime en fonction du coefficient d'amortissement.
4. Définir le décrément logarithmique et l'exprimer en fonction du coefficient d'amortissement.
5. Commenter l'évolution énergétique représentée ci-dessous.





4.1.3.2.4 Temps caractéristique

4.11: Exercice

Représenter le temps caractéristique du système en fonction du coefficient d'amortissement et commenter ce graphique.

4.1.4 Oscillations forcées

On se place maintenant dans le cas d'un oscillateurs amorti soumis à une force sinusoïdale. On s'intéresse uniquement au cas du régime sinusoïdal forcé. Comme étudié précédemment, on réalise le changement de variable nécessaire pour annuler second membre constant. On va étudier deux types de réponses: la réponse en élongation et la réponse en vitesse.

4.1.4.1 Oscillations forcées: Equation

4.12: Réponse en position

1. Déterminer la réponse en position en régime forcé. On déterminera l'amplitude complexe puis l'amplitude réelle et la phase. Quel type de filtrage est réalisé.
2. Etudier l'existence d'une résonance en fonction du coefficient d'amortissement.
3. Pour $\xi = 1$, déterminer la fréquence de coupure.
4. Etudier l'allure du diagramme de Bode.

4.13: Réponse en vitesse

1. Déterminer la réponse en vitesse en régime forcé. On déterminera l'amplitude complexe puis l'amplitude réelle et la phase. Quel type de filtrage est réalisé.
2. Déterminer la pulsation de résonance et étudier la largeur de la bande passante.
3. Etudier l'allure du diagramme de Bode.

4.14: Réponse en puissance

1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que la puissance moyenne fournie par la force excitatrice est proportionnelle à l'amplitude de la vitesse au carré du système.
2. En déduire la réponse fréquentielle en puissance et son allure. Pour quelle pulsation la puissance absorbée par l'oscillateur est-elle maximale ?

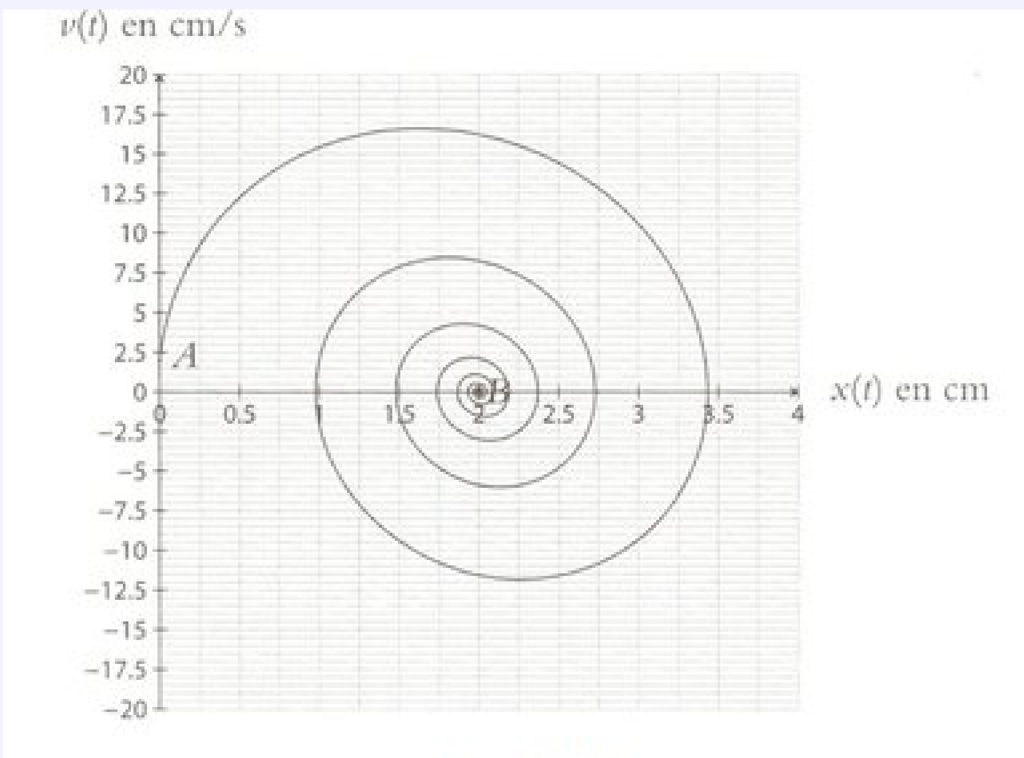
4.1.5 Entrainement : Oscillateurs

4.15: Etude d'un portrait de phase

On fait l'étude d'un oscillateur M de masse $m = 0.2$kg astreint à se déplacer suivant l'axe Ox de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$. Il est soumis aux forces suivantes:

- la force de rappel d'un ressort de caractéristiques (k, l_0).
- une force de frottements visqueux linéaire de coefficients de frottement λ
- une force constante $\overrightarrow{F_C} = F_C\overrightarrow{u_x}$.

Le portrait de phase $(X(t); V(t) = \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t))$de l'oscillateur étudié est donné sur la figure Figure E.6. On souhaite pouvoir en tirer les valeurs des différents paramètres de l'oscillateur.



On donne les abscisses correspondant aux croisements de la trajectoire de phase avec l'axe des abscisses:

Croisement	1	2	3	4	5
t(s)	0.31	0.65	0.97	1.3	1.62

1 Établir l'équation différentielle du mouvement de M et la mettre sous la forme: $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 X_0$ où x est l'allongement du ressort (par rapport à l_0). Les grandeurs w_0, Q et X_0 sont à exprimer en fonction des données.

1. Dans le cas d'une solution pseudo-périodique, exprimer $x(t)$: on définira le temps de relaxation énergétique τ et la pseudo-période Ω que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q.
2. Déterminer la vitesse de l'élongation au début et à la fin du mouvement.
3. Déterminer la vitesse maximale atteinte ainsi que l'élongation maximale.
4. En déduire la pseudo-période T et la pseudo-pulsation Ω.
5. On définit le décrément logarithmique par: $\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)-x_B}{x(t+nT)-x_B}\right)$ où $x(t)$ et $x(t+nT)$ correspondent aux élongations aux temps t et $t+nT$ et x_B correspond à l'élongation finale de M. Exprimer δ en fonction de T et τ. En choisissant une valeur de n la plus grande possible pour les données dont on dispose déterminer δ puis τ.
6. Déduire des résultats précédents le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.
7. Déterminer la raideur du ressort k, le coefficient de frottement λ et la force F_C sachant que $l_0=1$cm.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Oscillateur amorti.*
- $\Longrightarrow$ *Régime pseudo-périodique.*
- $\Longrightarrow$ *Portrait de phase.*
- $\Longrightarrow$ *Decrément logarithmique.*

4.16: Amortisseur

On considère l'amortisseur d'un véhicule. Chaque roue supporte un quart de la masse de la voiture assimilé (la quart de voiture) à un point M de masse $m=500$kg et relié à la voiture par un amortisseur dont le ressort a une constante de raideur $k=2,5\times10^4 N.m^{-1}$.
Le point M subit aussi un frottement visqueux $\vec{f}=-\lambda\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse verticale de M par rapport au sol. On donne $\lambda=5\times10^3$kg.s^{-2}. Le véhicule franchit à vitesse constante un défaut de chaussée de hauteur h=5cm. Son inertie est suffisante pour qu'il ne se soulève pas immédiatement mais acquiert une vitesse verticale $v_0=0,5$m.s^{-1}. On pose $\alpha=\lambda/m$. On note Z_i la cote du point M avant le passage du défaut (on suppose qu'il n'y a pas de mouvement vertical avant le défaut).

1. On note $Z(t)$ la cote du point M. Établir l'équation différentielle pour Z après le passage de l'obstacle. On introduira la grandeur α.
2. Déterminer $Z(t)$ en fonction des données. Calculer numériquement α et Ω et en déduire qu'on peut simplifier légèrement l'expression de $Z(t)$. On gardera cette simplification par la suite.
3. Les passagers sont sensibles à l'accélération verticale de la voiture. Calculer sa valeur maximale.
4. Il faut éviter des oscillations susceptibles de provoquer chez les passagers le mal des transports, en se plaçant dans les conditions critiques. Pour quelle masse par roue est-ce réalisé, k et λ restant inchangés?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Oscillateur amorti.*
- $\Longrightarrow$ *Régime pseudo-périodique.*
- $\Longrightarrow$ *Ressort.*

4.17: Frottements solides

On considère un mobile M de masse m se déplaçant selon un axe horizontal (Ox) et assimilé à un point matériel. Ce mobile est soumis à une force de rappel $\overrightarrow{f_R} = -kx\overrightarrow{e_x}$ (longueur à vide nulle) et à une force de frottement solide de coefficient de frottement dynamique f_D et statique f_S. Pour simplifier le problème, on prendra ici $f_D = f_S$ et on parlera de coefficient de frottement solide. On pose le mobile M en un point d'abscisse x_0 sans vitesse initiale.

1. Montrer que pour que le mobile se mette en mouvement, il faut que $|x_0| > x_{m0}$ où x_{m1} est à exprimer en fonction de f,m,g et k.
2. On suppose que $x_0 > x_{m0}$. Montrer que le mouvement du solide se décompose en plusieurs phase. Déterminer $x_1(t)$, abscisse du mobile au cours de la première phase.
3. Déterminer l'instant t_1 pour lequel cette première phase s'arrête. A quelle condition le mobile s'arrête-il complètement à la fin de la première phase? On exprimera cette condition sous la forme $x_{m0} < |x_0| < x_{m1}$.
4. Dans le cas où on est à la limite d'immobilisation complète du mobile à la fin de la première phase, déterminer le travail de la force de frottement pendant cette phase et faire un bilan énergétique.
5. On suppose maintenant que le mobile ne s'immobilise pas définitivement à t_1. Déterminer $x_2(t)$ abscisse du mobile pendant la seconde phase et en déduire la pseudo-période des oscillations du mobile.

On suppose que le mobile réalise N oscillations complètes avant de s'arrêter à $x_{fin} = a$. On note m=2N et $x_i(t)$ l'abscisse du mobile au cours de la i-ème demie-période (soit la i-ème phase du mouvement). i varie donc de 1 à m. On note aussi t_i l'instant pour lequel se termine la i-ème phase du mouvement. Le temps t_m est donc le temps pour lequel le mouvement s'achève complètement. On note enfin X_i l'abscisse atteinte à la fin de la i-ème oscillation. On a donc $X_m = a$.

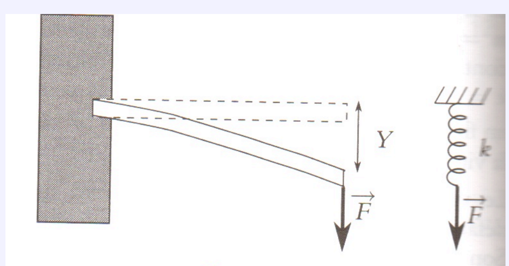
1. Quelles conditions vérifient les X_i pour $1 \leq i \leq m-1$?
2. Établir une relation de récurrence entre X_i et X_{i+2}. En déduire une relation entre X_m et x_0 puis x_0 en fonction de a.
3. Comparer le comportement de cet oscillateur avec l'oscillateur amorti par frottement fluide et tracer $x(t)$.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Oscillateur amorti.*
- $\Longrightarrow$ *Frottements solides.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de l'énergie mécanique.*

4.18: Elasticité d'une fibre de verre

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser: on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500 \text{kg.m}{-1}$.



La fibre de verre de longueur l et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige le poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche. La flèche Y est donnée par la relation suivante: $Y = \frac{7l^3F}{Ed^4}$ où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques, on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10}S.I.$

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young?
2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et l.
3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $l = 7$mm et de diamètre $d = 10\mu$m.
4. Donner (à la justifiant) l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur k lorsque sa longueur est l. En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Oscillateur amorti.*
- $\Longrightarrow$ *Unités et dimensions.*
- $\Longrightarrow$ *Energie potentielle.*

4.19: Piscine à vagues

Pour créer des vagues dans une piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à une masse immergée sur un côté du bassin. Soit une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V plongée dans l'eau de masse volumique ρ_{eau}. Cette masse est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 accroché à son extrémité en un point A. On note Oz l'axe vertical vertical passant par A et orienté vers le bas et on prend O comme origine. A l'équilibre, la masse M est située en z = h. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose dans un premier temps que A est immobile et A=O.

1. On suppose d'abord que la masse M est dans l'air. On ne tient pas compte des frottements.
   1. Etablir la condition d'équilibre de la masse M dans l'air.
   2. En déduire l'équation différentielle du mouvement en z de la masse M si le mouvement s'effectue dans l'air.
   3. Quelle est la nature du mouvement? On donnera les expressions de ses principales caractéristiques.
2. Du fait que le mouvement a lieu dans l'eau, comment doit-on modifier les équations précédentes (on ne tiendra toujours pas compte des frottements).
3. On tient compte désormais des frottements visqueux: $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
   1. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par z.
   2. Dans le cas d'un amortissement faible et en supposant que $z(0) = h_1 > h$ et $\dot{z}(0) = 0$, déterminer $z(t)$?
4. A l'aide d'un piston, on impose un mouvement sinusoïdal au point de suspension A du ressort. Cela revient à appliquer une force $\vec{f} = aM\omega_2^2\cos(\omega_2 t)\overrightarrow{u_z}$ à la masse M. On pose $Z = z - h$ l'écart à la position d'équilibre.
   1. Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.
   2. Dans le cas d'un amortissement faible, justifier que la solution complète pour $Z(t)$ serait somme de 2 termes dont on précisera le sens mais qu'on ne calculera pas.
   3. A partir de l'équation différentielle, déterminer l'expression de l'amplitude complexe Z des oscillations en régime sinusoïdal forcé. On utilisera les grandeurs: $a, x = \frac{\omega}{\omega_0}, \tau = \frac{M}{\alpha}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.
   4. On se place en régime permanent établi. Déterminer les deux conditions nécessaires pour qu'on puisse avoir des oscillations d'amplitude supérieure à a, l'une portant sur la valeur minimale de la masse M et l'autre sur l'intervalle de pulsations à utiliser.
   5. Quelle est alors la pulsation pour laquelle l'amplitude est la plus grande?
   6. Donner l'expression de l'amplitude correspondante en fonction de a, M, k et α.

Point utile pour cet exercice

- ⟹ *Oscillateur harmonique.*
- ⟹ *Oscillateur amorti.*
- ⟹ *Oscillateur forcé.*
- ⟹ *Réponse en position.*

4.20: Vibration d'une molécule diatomique

La molécule HCl est modélisée, selon un axe fixe, par deux masses ponctuelles distantes de r. Puisque l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène, il peut être considéré comme fixe. Seul le noyau d'hydrogène de masse m est alors susceptible de se déplacer, il subit l'énergie potentielle d'interaction:

$$E_p(r) = \frac{C}{r^n} - \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où C, α et n sont des constantes positives. En l'absence de toute champ extérieur, la distance à l'équilibre est r_0. L'énergie minimale à fournir pour dissocier cette molécule sera notée E_d.

1. Interpréter physiquement les deux termes de l'énergie potentielle et représenter l'allure de $E_p(r)$.
2. Interpréter graphiquement l'énergie E_d et déterminer son expression.
3. Repérer r_0 sur le graphique et déterminer son expression. Vérifier que la position est stable.
4. En réalité, la molécule peut vibrer légèrement autour de sa position d'équilibre r_0. Déterminer l'équation du mouvement et en déduire la pulsation ω_0 des petites oscillations. On introduira la constante de raideur équivalente k.
5. Des mesures spectroscopiques permettent d'accéder expérimentalement à r_0, ω_0 et E_d. Calculer les valeurs des constantes C, α et n. On donne:

$$m = 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}; \text{e} = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}; \text{r}_0 = 1.27 \times 10^{-10}\text{m}; \tag{4.1}$$
$$\omega_0 = 5.45 \times 10^{14}\text{rad.s}^{-1}; \text{E}_\text{d} = 400\text{kJ.mol}^{-1} \tag{4.2}$$

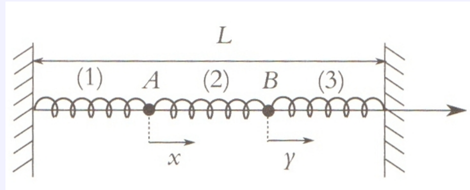
1. Le temps de réponse caractéristique de la molécule est $\tau = 10^{-9}s$. Donner le facteur de qualité de cet oscillateur. Commenter cette valeur.
2. La molécule est maintenant excitée à sa fréquence propre par un champ électrique $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$; nous supposons que la force subie alors par le noyau d'hydrogène est $F(t) = \beta E(t)$ où $\beta(t)$ est de l'ordre de l'unité. Déterminer l'amplitude des oscillations forcées.
3. Dans quel domaine de longueur d'onde faudrait-il travailler pour briser cette liaison en l'éclairant? Quelle marge possède-t-on sur le choix de la longueur d'onde?
4. Discuter la validité du modèle linéaire, et le choix de la longueur d'onde excitatrice.

Point utile pour cet exercice

- ⟹ *Système conservatif.*
- ⟹ *Position d'équilibre et stabilité.*
- ⟹ *Oscillateur harmonique.*
- ⟹ *Oscillateur amorti.*
- ⟹ *Oscillateur forcé.*

4.21: Système de deux points matériels

Deux points matériels A et B de même masse m sont reliés entre eux par un ressort de raideur K et à deux points fixes par deux ressorts de raideur k. L'ensemble coulisse sans frottements sur une tige horizontale fixe. On note $\vec{u}$ un vecteur unitaire de cet axe. On note x et y les élongations de A et B comptées à partir de leur position d'équilibre.



1. Ecrire les relations à l'équilibre reliant les longueurs à vide des ressorts (l_0 pour (1) et (3), L_0 pour (2)) et les longueurs à l'équilibre (l_{eq} pour (1) et (3), L_{eq} pour (2)).
2. Le point A subit une force supplémentaire $\vec{f} = m\Gamma_0 \cos(\omega t)\vec{u}$. Déterminer les équations du mouvement. En déduire deux équations différentielles liées.

On cherche pour x et y, des solutions au régime sinusoïdal forcé de la forme $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \psi)$. On définit les grandeurs complexes associés $\underline{X} = X_0 e^{j\omega t+\phi}$ et $\underline{Y} = Y_0 e^{j\omega t+\psi}$. Montrer que les solutions des équations différentielles précédentes sont:

$$\underline{X} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)} \Gamma_0 e^{j\omega t}$$
$$\underline{Y} = \frac{\omega_3^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)} \Gamma_0 e^{j\omega t}$$

où $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des grandeurs à exprimer en fonction de k,K et m.

1. Déduire des expressions précédents $X_0(\omega), Y_0(\omega), \phi(\omega)$ et $\psi(\omega)$.
2. Représenter $X_0(\omega), Y_0(\omega)$ en fonction de ω. Pourquoi y a-t-il des résonances infinies?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Oscillateur forcé.*
- $\Longrightarrow$ *Etude fréquentielle.*

4.2 Etude des pendules

4.22: Compétences

- Etablir l'équation du mouvement du pendule simple
- Etablir l'équation du mouvement du pendule pesant.
- Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire (pendule simple ou pesant)
- Etablir l'équation du portrait de phase dans le cadre des faibles oscillations et le tracer.
- Lire et interpréter le portrait de phase: bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif.
- Mettre en évidence le non isochronisme des oscillations
- Etablir l'équation du mouvement d'un pendule de torsion
- Expliquer l'analogie entre le pendule de torsion et l'oscillateur harmonique
- Etablir une intégrale première du mouvement.

4.2.1 Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un fil parfait (ou d'une tige parfaite) de longueur L au bout duquel on attache une masse m assimilable à un point matériel (noté M). Dans cet exercice, on considère le cas d'une tige rigide.

Ici, l'autre extrémité de la tige est attachée à un point O fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le champ de pesanteur est supposé uniforme.

4.23: PFD

1. Proposer un paramétrage adapté au problème.
2. Etablir l'équation qui régit l'évolution du pendule au moyen du principe fondamental de la dynamique.

4.24: TMC

En utilisant le même paramétrage que dans l'exercice précédent, établir à nouveau l'équation d'évolution du pendule mais en utilisant le théorème du moment cinétique.

4.25: TEM

En utilisant le même paramétrage que dans l'exercice précédent, établir à nouveau l'équation d'évolution du pendule mais en utilisant le théorème de la puissance mécanique.
Reconnaître une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une **grandeur ne dépendant que de la position et de sa dérivée première** et qui est **constante au cours du mouvement**.

4.2.2 Petits mouvements

4.26: Exercice

On considère le pendule simple.

1. Linéariser l'équation d'évolution pour des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable. Comment appelle-t-on un tel système ?
2. Préciser la forme temporelle de l'évolution du système ainsi que la période des oscillations.
3. La période des oscillations dépend-t-elle des conditions initiales (dans l'hypothèse des petites mouvements). On parle **d'isochronisme** des oscillations.

4.2.3 Etude générale

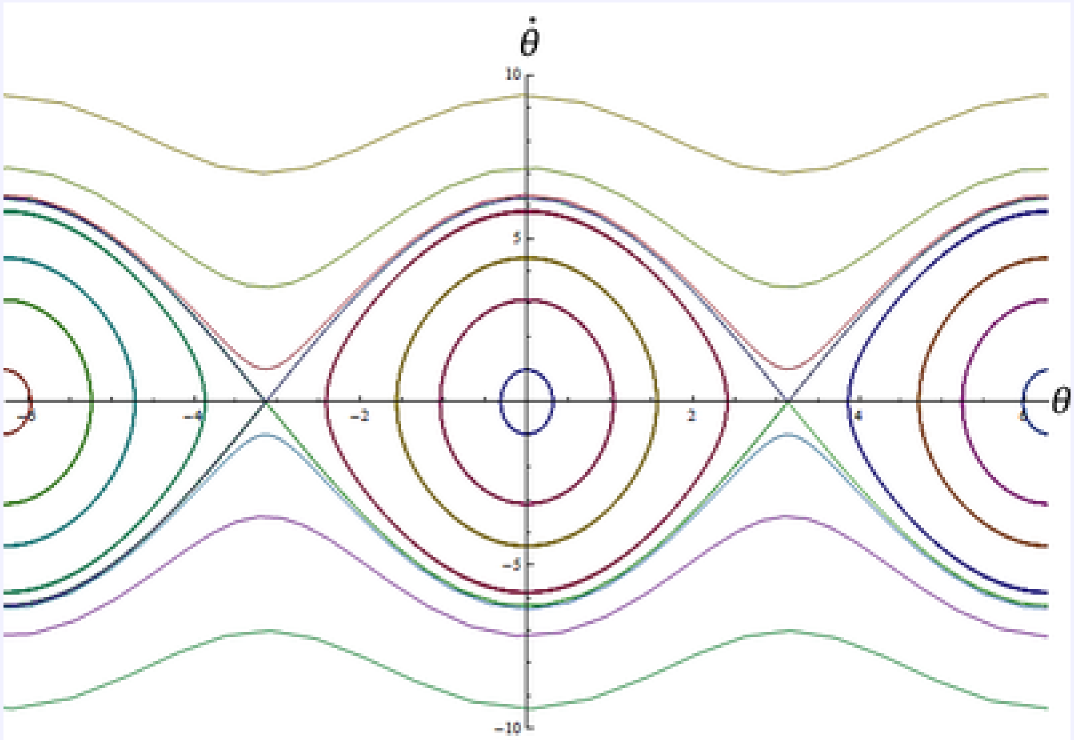
On considère à nouveau le pendule simple mais on ne suppose plus qu'on est aux petits angles.

4.27: Etude énergétique

En étudiant l'énergie potentielle du pendule simple, montrer:

1. l'existence de deux types de mouvements suivant l'énergie mécanique: un mouvement pendulaire et un mouvement circulaire complet.
2. L'existence de deux positions d'équilibre: l'une stable et l'autre instable.
3. Si le mobile part du point le plus bas avec une vitesse linéaire v_0. Déterminer l'angle θ_{max} le plus haut qu'il peut atteindre en fonction de v_0 ainsi que la valeur minimale de v_0 permettant en pendule de faire des tours complet.
4. Reconnaître sur le graphique ci-après les différents cas: petits mouvements, grands mouvements pendulaire,

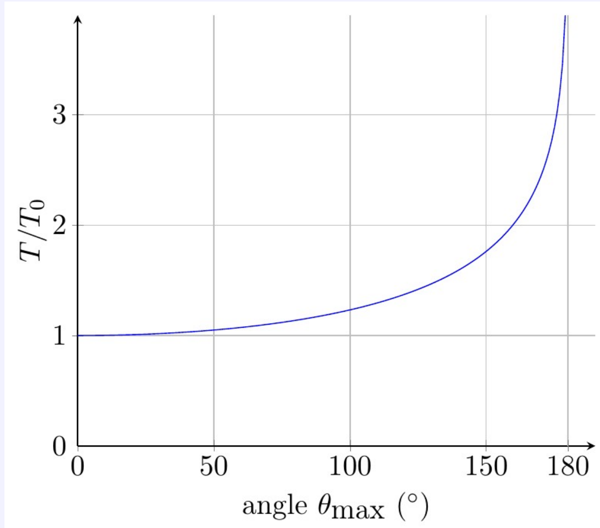
tours complets.



4.28: Anisochronisme

On considère que le pendule est lâché d'un angle $\theta_0 > 0$ avec la verticale descendante sans vitesse initiale.

1. Quelle est la nature du mouvement: pendulaire ou tour complet ?
2. A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse angulaire à un instant t où le pendule fait un angle θ avec la verticale descendante.
3. Déduire de l'équation précédente que la période d'oscillation T est: $T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(cos\theta - cos\theta_0)}}$
4. La période des oscillations est-elle indépendante de l'amplitude des oscillations? On parle d'**anisochronisme** des oscillations.
5. On a représenté ci-après le rapport T/T_0 en fonction de l'angle θ_0 (noté θ_{max}). Commenter cette courbe.


T/T_0
0
1
2
3
0
50
100
150
180
angle $\theta_{\max}$ (°)

CHAPTER

FIVE

MOUVEMENT À FORCE CENTRALES

5.1: Compétences

- Déduire du théorème du moment cinétique la conservation du moment cinétique
- Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique: mouvement plan et loi des aires
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle.
- Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique

Cas des forces newtoniennes

- Evaluer les ordres de grandeurs des forces électriques ou magnétiques et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Connaître les types de trajectoire possibles pour une force newtonienne.
- Relier la trajectoire possible au signe de l'énergie mécanique et à l'excentricité.
- Enoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- Montrer, dans le cas d'un mouvement circulaire, que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période.
- Etablir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
- Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire et pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
- Calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
- Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

5.1 Comprendre le contexte

5.1.1 Généralités

Dans tout le chapitre, le système sera un point matériel noté M.

5.1.1.1 Définition

Important 5.1

Mouvement à force centrale
Un mouvement à force centrale est un mouvement dont la résultante des forces est toujours dirigée vers un même point O fixe dans le référentiel considéré.On appelle le point O le **centre de force** car en effet le point O est responsable de la force.

5.1.1.2 Conservation du moment cinétique

Important 5.2

Conservation du moment cinétique
Dans un mouvement à force centrale dont le centre de force est le point O, alors le moment cinétique au point O est une intégrale première du mouvement.
Cela signifie qu'il est constant au cours du mouvement.

5.2: Démonstration

On va appliquer au système M le théorème du moment cinétique au point O. La résultante des forces étant portée par la droite OM, son moment en O est nul. Il vient que la dérivée du moment cinétique est nulle: le moment cinétique est donc une constante du mouvement.
Par définition, le moment cinétique dépend de la position et de la vitesse. C'est donc une intégrale première du mouvement.

Important 5.3

Conséquence : Planéité du mouvement
Un mouvement à force centrale est un mouvement plan: la trajectoire du mobile est contenu dans le plan passante par le centre de force O et perpendiculaire au moment cinétique.

5.3: Démonstration

Nous avons démontré que le moment cinétique était un vecteur constant. Or par définition du moment cinétique, le vecteur position pris au point O est perpendiculaire au moment cinétique. Il vient que le vecteur position est à tout instant perpendiculaire au même vecteur: il est contenu dans le plan passant par O et perpendiculaire au moment cinétique.

Important 5.4

Paramétrage
La planéité du mouvement et le caractère centrale de la force explique le choix du paramétrage. Par la suite, on va travailler dans un repère cylindrique centré au point O et d'axe Oz suivant le moment cinétique. On notera le moment cinétique au point O: $\overrightarrow{L_O} = L_O\overrightarrow{e_z}$.
On peut alors exprimer le moment cinétique dans le système de coordonnées:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O} &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_M} \\ &= r\overrightarrow{e_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ &= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

On remarquera que le moment cinétique est une donnée constante qui peut être utilisée comme “donnée initiale” comme on le verra par la suite. Son expression montre que l’on relie l’évolution angulaire au rayon. Il vient qu’on par d’un système à 2 degré de liberté (rotation autour de O donné par $\dot{\theta}$ et éloignement/rapprochement de O donné par r) et qu’on lie l’évolution des mouvements. On pourra donc, en introduisant le moment cinétique L_O éliminer la vitesse angulaire dans les équations.

Important 5.5

Conséquence : Loi des aires
Dans un mouvement à force centrale, la vitesse aréolaire, c’est-à-dire l’aire parcourue par le vecteur position par unité de temps est constante.

5.4: Démonstration

Durant un temps dt, le mobile passe du point $M(t)$ au point $M(t+dt)$. L’aire balayée est donc l’aire du triangle $OM(t)M(t+dt)$. L’aire de ce triangle s’écrit:

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{A} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\right| \\
&= \frac{1}{2m}\left|\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_M}dt\right| \\
&= \frac{1}{2m}\left|\overrightarrow{L_O}\right| dt \\
\frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{dt}} &= \frac{1}{2m} L_O
\end{aligned}$$

Le moment cinétique étant constant, il vient que la vitesse aréolaire est constante. La loi des aires est bien vérifiée.

Important 5.6

Constante des aires
On définit la constante des aires comme la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$. Dans un mouvement à force centrale, il s’agit évidemment d’une constante et la vitesse aréolaire s’écrit $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2}C$.

5.1.1.3 Cas conservatifs

5.1.1.3.1 Généralités

Important 5.7

Force centrale conservatives
Une force centrale conservative ne dépend que de la coordonnées radiale. On peut donc écrire $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$ et l’énergie potentielle associée $E_p(r)$ est telle que $F(r) = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dr}}(r)$.

5.1.1.3.2 Energie potentielle effective

Important 5.8

Expression de l'énergie potentielle effective.
Dans le cadre d'un mouvement à force centrale, on peut réécrire l'énergie mécanique sous la forme:

$$\begin{aligned} E_m &= E_{c,r} + E_{p,eff}(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \end{aligned}$$

où l'**énergie potentielle effective** a pour expression:

$$\begin{aligned} E_{p,eff}(r) &= E_{c,\theta} + E_p(r) \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) \\ &= \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r) \\ &= \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \end{aligned}$$

où C est la constante des aires et L_O est la composante du moment cinétique.

5.1.1.3.3 Analyse semi-qualitatives

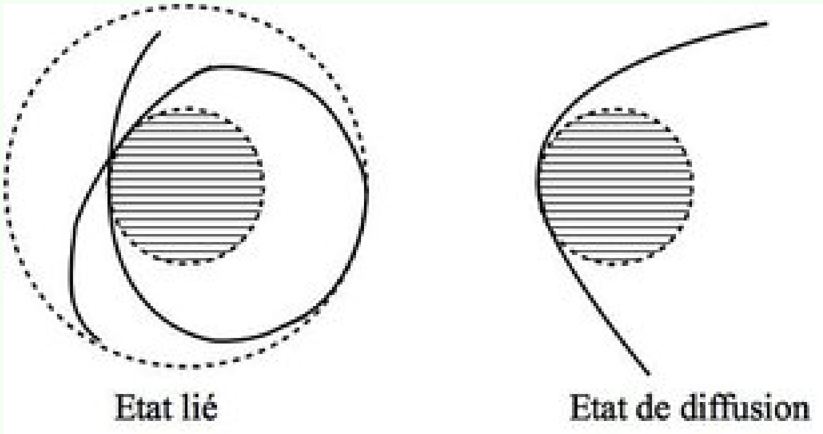
Positivité de l'énergie cinétique

On rappelle que l'énergie cinétique radiale est nécessairement positive ou nulle. Cela permet de déterminer des zones accessibles. Nous allons préciser ici ce principe en remarquant que les zones accessibles sont un peu particulières. Ici le système est à deux degrés de liberté: sa position radiale et sa position angulaire.

Important 5.9

Zones accessibles
Les zones où $E_{p,eff}(r) > E_m$ sont inaccessibles. Cela correspond à des **rayons** inaccessibles soit à des **zones limitées par des cercles.**. Les zones accessibles et inaccessibles sont dont définies comme des zones comprises entre des cercles de centre O où $E_{p,eff}(r) = E_m$.

- Si la trajectoire est limitée par un rayon maximal, l'état sera **lié.**
- Si la trajectoire n'est pas limitée par un rayon maximal, l'état sera de **diffusion.**



Les rayons extrêmes atteints seront données par l'équation $E_{p,eff} = E_m$. De même, le mobile ne peut change la variation de r (passer d'éloignement à rapprochement ou inversement) qu'aux position extrêmes car ce sont les positions où la vitesse **radiale** s'annule. La trajectoire est y est tangente au cercle.

Caractéristiques autres

Important 5.10

Minimum d'énergie potentielle effective

- **Le minimum d'énergie potentielle effective ne correspond pas à une position d'équilibre possible du système.** On rappelle que le moment cinétique est non nul, donc il y a toujours le mouvement de rotation.
- **Au minimum d'énergie potentielle effective, la vitesse n'est pas non plus maximale** (cf. remarque précédente). Seule la vitesse radiale y est maximale.
- Par contre, si l'énergie mécanique égale la valeur minimale de l'énergie potentielle effective, alors un seul rayon est accessible: **la trajectoire sera donc un cercle**.

5.1.2 Potentiels newtoniens

Important 5.11

Interaction newtonienne

Une interaction newtonienne est une force (ou un champ de force) dont l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux particules qui interagissent soit une force de la forme: $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Important 5.12

Interaction électrostatique ou de Coulomb

Soit deux particules chargées de charges q_1 et q_2 située aux points M_1 et M_2. La charge en M_1 exerce sur la charge en M_2 une force appelée force électrostatique de Coulomb dont l'expression est:

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}$$

où ϵ_0 est appelée permittivité du vide: $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\text{m}^{-3}.\text{kg}^{-1}.\text{A}^2.\text{s}^4$

Important 5.13

Interaction gravitationnelle ou de Newton
Soit deux points matériels situées en M_1 et M_2 qui possèdent des masses gravitationnelles m_1 et m_2. Le point en M_1 exerce sur le point en M_2 une force gravitationnelle ou force de Newton dont l'expression est:

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}$$

où G est appelé constante de gravitation universelle: $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Important 5.14

Energie potentielle Une interaction newtonienne dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est $E_p = -\frac{K}{r} + cste$.

Important 5.15

Analogie
On peut remarquer que la forme mathématique des deux forces est très semblables. Il vient que le traitement mathématique du mouvement d'un point matériel dans un champ gravitationnel sera identique au traitement du mouvement d'un point dans un champ électrostatique. Il suffira de transformer correctement les grandeurs comme dans l'analogie oscillateur mécanique-oscillateur électrique. Les correspondances sont les suivantes:

Grandeur/Interaction	Electrostatique	Gravitationnel
Constante K	$-\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$	Gm_1m_1
Causes	q_1, q_2	m_1, m_2

Cf. *l'activite sur les ordre de grandeur* (page 78).

5.1.2.1 Etude du mouvement

5.1.2.1.1 Position du problème

Position du problème On considère deux point matériel M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 formant un système isolé (problème à deux corps) et dont l'interaction est de type newtonienne. Ainsi la force exercée par M_1 sur M_2 est de la forme: $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ où r est la distance entre les deux corps et $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire porté par la droite (M_1M_2) et dirigé de M_1 vers M_2.

On rappelle que dans un mouvement à force centrale, le moment cinétique est conservé. Ici la force est de plus conservative donc l'énergie mécanique est aussi une intégrale première du mouvement.

On va donc choisir un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz colinéaire au moment cinétique. On va alors noter:

- Moment cinétique au point O: $\overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = mC\overrightarrow{u_z}$ où C est la constante des aires du mouvement.
- Force: $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
- Energie potentielle: $E_p = -\frac{K}{r}$
- Energie mécanique: $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{K}{r}$

- Energie potentielle effective: $E_{p,eff} = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{K}{r}$ \end{rappel}

5.1.2.1.2 Trajectoire

Trajectoire conique

Important 5.16

Trajectoire conique
Un point matériel M soumis à une force centrale newtonienne de type $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ dans un référentiel galiléen possède une trajectoire conique dont l'équation, dans un repère cylindrique d'axe Oz colinéaire au moment cinétique et de centre O le centre de force est:

$$r(\theta) = \frac{p}{\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

où $\epsilon = \pm 1$ et e est appelée excentricité et p le paramètre de la conique. On a: $|p| = \frac{mC^2}{|K|}$
On distingue les cas:

- une ellipse: $e < 1$ C'est un trajectoire fermée donc un état lié.
- une hyperbole: $e > 1$ C'est une trajectoire ouverte donc un état de diffusion.
- une parabole: $e = 1$ Cas limite entre les deux, c'est une trajectoire ouverte, donc un état de diffusion.

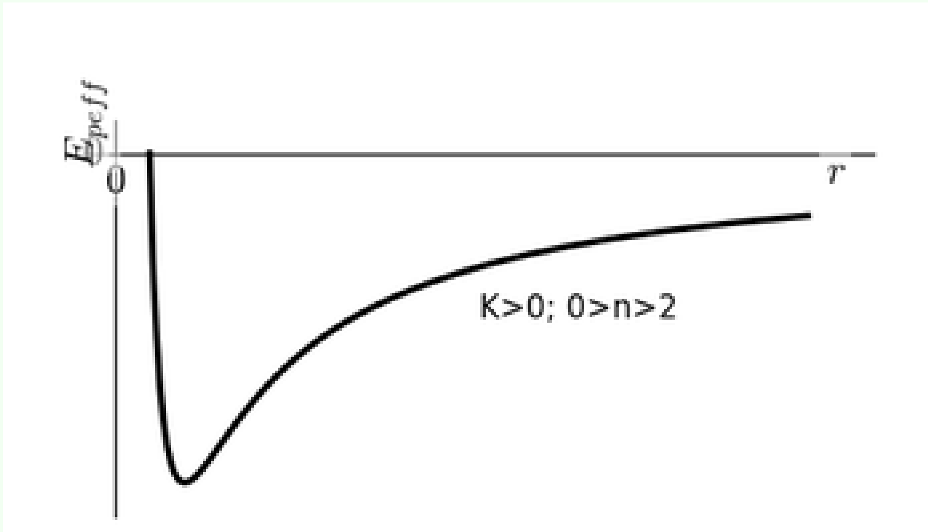
Trajectoire - Démonstration (en ligne)

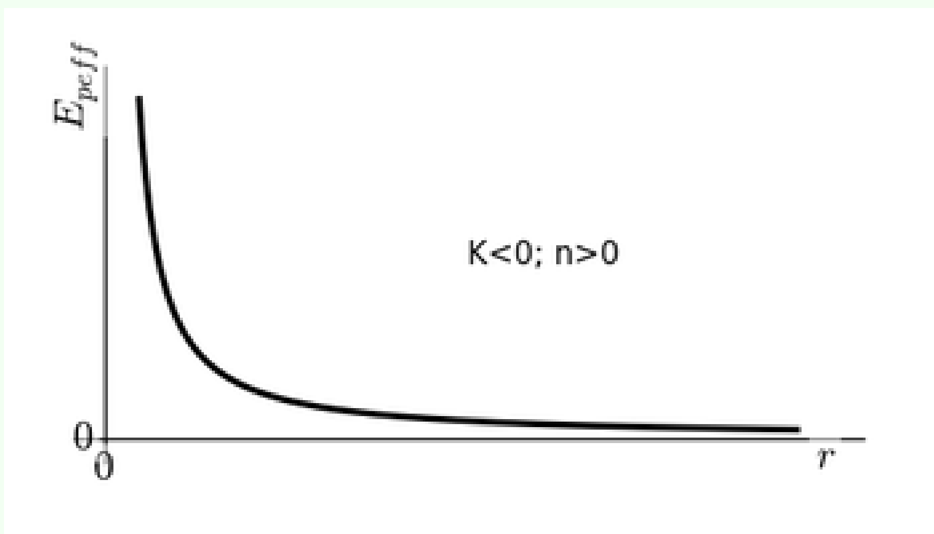
5.1.2.1.3 Trajectoire et énergie mécanique

Etude qualitative du mouvement

Important 5.17

Energie potentielle effective.
On rappelle l'allure de l'énegie potentielle effective dans le cas attractif (premier) et répulsif (second). On rappelle que l'origine des potentiels a été choisi à l'infini.





- Remarquons d'abord que dans le cas répulsif, la trajectoire est toujours de diffusion. Nous montrerons par la suite qu'il s'agit d'une hyperbole.
- Dans le cas attractif, il apparaît qu'un état lié correspond que l'énergie mécanique soit négative. La seule conique correspondant à un état lié est l'ellipse. Il vient qu'**une énergie mécanique négative correspond à une trajectoire elliptique.**

Si l'énergie mécanique est positive ou nulle, le système sera en état de diffusion soit une parabole ou une hyperbole. La distinction justifée par la suite entre les deux sera faite par la suite: **le cas parabolique correspond au cas limite $E_m = 0$ et le cas hyperbolique à $E_m > 0$.**

Important 5.18

Caractéristiques des trajectoires. Cas elliptique.

On prend $\theta_0 = 0$.
- Cas attractif $K > 0$
- $E_m < 0$

- e < 1
- C'est un état lié donc périodique.
- Point le plus éloigné (aphélie pour les planètes autour du soleil): $r_P = \frac{p}{1-e}$ atteinte pour $\theta = \pi$.
- Point le plus proche (périhélie pour les planètes autour du soleil): $r_A = \frac{p}{1+e}$ atteinte pour $\theta = 0$
- Toutes les valeurs de θ sont possibles.

Important 5.19

Caractéristiques des trajectoires. Cas parabolique.
On prend $\theta_0 = 0$.
- Cas attractif $K > 0$
- $E_m = 0$
- e = 1
- C'est un état de diffusion. A l'infini, la vitesse est nulle.
- Point le plus proche (périhélie pour les planètes autour du soleil): $r_A = \frac{p}{1+e} = \frac{p}{2}$ atteinte pour $\theta = 0$
- Toutes les valeurs de θ sont possibles sauf $\theta = \pi$

Important 5.20

Caractéristiques des trajectoires. Cas hyperbolique
On prend $\theta_0 = 0$.
Cas attractif
- Cas attractif $K > 0$ et $\epsilon = 1$
- $E_m > 0$
- e > 1
- C'est un état de diffusion. A l'infini, la vitesse est **non** nulle.
- Point le plus proche (périhélie pour les planètes autour du soleil): $r_A = \frac{p}{1+e}$ atteinte pour $\theta = 0$
- Les valeurs de θ sont comprises entre $-\arccos\theta$ et $\arccos\theta$.

Cas répulsif
- Cas répulsif $K < 0$ et $\epsilon = -1$
- $E_m > 0$
- e > 1
- C'est un état de diffusion. A l'infini, la vitesse est **non** nulle.
- Point le plus proche (périhélie pour les planètes autour du soleil): $r_A = \frac{p}{e-1}$ atteinte pour $\theta = 0$
- Les valeurs de θ sont comprises entre $-\arccos\theta$ et $\arccos\theta$.

5.1.2.2 Mouvement des planètes et lois de Kepler

5.1.2.2.1 Enoncé des lois de Kepler

Position du problème. Nous sommes dans le cas où le potentiel newtonien est attractive. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au mouvement des planètes du système solaire de sorte que nous noterons M_S la masse de l'astre attracteur fixe (le soleil, S) et M_P la masse de la planète considérée. La force de gravitation s'écrit alors: $\overrightarrow{F} = -\frac{GM_S M_P}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

On peut donc utiliser les résultats précédents en prenant $K = GM_S M_P > 0$.

Important 5.21

Hypothèses des lois de Kepler
- Les planètes et le Soleil présentent une symétrie sphérique.

- Le mouvement d'une planète est uniquement lié à l'interaction entre cette planète et le Soleil. On exclut toute influence des autres planètes et objets célestes.
- La masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil.

Important 5.22

Lois de Kepler

- 1ère loi: Le centre des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.
- 2ème loi: Les rayons vecteurs balaient des aires égales pour des intervalles de temps égaux.
- 3ème loi: Le rapport entre le carré de la période T de révolution de la planète autour su Soleil et le cube du demi-grand axe a de la trajectoire est indépendant de la planète.

5.1.2.2.2 Cas des deux premières lois

Démonstration des deux premières lois. Les deux premières lois se démontrent rapidement. Les hypothèses permettent de considérer le Soleil fixe et la seule force qui s'applique sur la force (attraction du Soleil) est une force centrale.

Il vient, de la conservation du moment cinétique, que le mouvement vérifie la loi des aires.

De plus, la force est newtonienne donc la trajectoire est une conique. Comme le mouvement est confiné, c'est un état lié, donc une ellipse.

5.1.2.2.3 Energie mécanique

Avant de s'intéresser à la troisième loi de Kepler, nous allons déjà exprimer l'énergie mécanique des planètes. On rappelle que la trajectoire est elliptique. Nous allons étudier deux cas: le cas général et le cas particulier du cercle (excentricité nulle).

5.5: Note:

*On rappelle que le point le plus éloigné est appelé **aphélie** et que le point le plus proche est appelé **périhélie**.*
On rappelle aussi que dans le cours générale sur les coniques, une relation entre le demi-grand axe a et l'excentricité a été démontrée. On notera aussi b le demi-petit axe.

Important 5.23

Relation énergie mécanique et demi-grand axe.
L'énergie mécanique dans une trajectoire elliptique a pour expression:

$$E_m = -\frac{K}{2a}$$

Cette démonstration sera faite en exercice. Elle doit être connue.

5.1.2.2.4 Troisième loi de Kepler

Important 5.24

Démonstration - Cas d'un mouvement circulaire On applique le principe fondamental de la dynamique à la planète dans le référentiel héliocentrique:

$$-R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{GM_S}{R^2}\overrightarrow{e_r}$$
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_S}{R^3}$$
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Il vient que le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ ne dépend pas des caractristiques de la planète: il est le même quelque soit la planète considérée.

Important 5.25

Cas elliptique La démonstration du cas elliptique n'est pas à connaître. Vous devez par contre savoir utiliser la loi de Kepler en remplaçant le rayon par *le demi-grand axe*.

5.2 S'entrainer

- exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : Ordre de grandeur,
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement). Un devoir libre est disponible en ligne[6].
- des approfondissement (Aller plus loin) : Deux approfondissements pour ce chapitre : une comparaison des force à l'échelle macroscopique[7] et une étude de la diffusion de Rutherford sous forme de résolution de problème[8].

5.2.1 Méthodes

5.2.1.1 Forces centrales

5.6: Forces centrales particulières

On considère une force centrale dont l'énergie potentielle s'écrit comme $E_p = -\frac{K}{r^n}$ avec K réel et n réel.

1. Préciser suivant que K soit positif ou négatif le caractère attractif ou répulsif de la force associée.
2. Représenter l'énergie potentielle effective suivant le signe de K et suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{Z}$) et préciser s'il est possible:
3. d'atteindre l'infini
4. d'atteindre le centre de force

[6] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=15165
[7] https://stanislas.edunao.com/mod/page/view.php?id=15164
[8] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12858

5. d'observer une trajectoire circulaire (on ne demande pas une expression du rayon)
6. Préciser quelles valeurs de K et n correspondent à des cas physiques usuels.

On ne justifiera pas ici les tracés. Il est ***vivement conseillé*** *d'essayer de les tracer seul (croissances comparées).*

5.7: Cas d'une force de rappel élastique

On s'intéresse au cas d'un point matériel M relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Il est libre de se mouvoir dans toutes les directions de l'espace. On néglige l'action de la pesanteur. On pose un repère cylindrique de sorte que les conditions initiales soient:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t=0) &= r_0\overrightarrow{e_r}\\ \overrightarrow{v_M}(t=0) &= v_1\overrightarrow{e_r} + v_0\overrightarrow{e_\theta}\end{aligned}$$

1. Justifier la conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique.
2. Déterminer l'expression de ces deux grandeurs en fonction des conditions initiales.
3. Montrer que l'énergie mécanique se ramène à la dépendance du rayon r seul en introduisant une énergie potentielle effective. Discuter de la nature du mouvement. Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?
4. Déterminer les rayons extrêmaux ainsi que la vitesse maximale du mobile.
5. Déterminer la relation entre v_0 et r_0 pour observer un mouvement circulaire. Commenter le caractère uniforme/accéléré/décéléré d'un tel mouvement.

5.2.1.2 Potentiels newtoniens

5.8: Relation énergie - excentricité

Montrer que :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{K^2}{mC^2}(e^2 - 1)$$

et retrouver la relation entre le signe de E_m et le type de trajectoire.

5.9: Relation Em et a

Démontrer la relation entre l'énergie mécanique et le demi-grand axe dans le cas d'une trajectoire elliptique. Pour cela:

1. Exprimer une relation entre vitesse et rayon au périhélie et à l'aphélie.
2. Exprimer l'énergie mécanique au périhélie et à l'aphélie
3. En déduire la relation demandée

5.2.2 Activités : Ordres de grandeur

Position du problème : Le but de cet exercice est d'estimer à l'échelle microscopique l'intensité des interactions coulombiennes et gravitationnelles de manière à les comparer.

5.2.2.1 Echelle microscopique

5.10: Echelle atomique

On va considère un atome d'hydrogène et estimer l'intensité des deux interactions dans le cas proton-électron. On note r la distance proton-électron

1. Estimer l'intensité des deux forces gravitationnelle et électrostatique entre le proton et l'électron dans le cas d'une trajectoire circulaire.
2. Faire le rapport et en déduire que l'interaction gravitationnelle est négligeable à l'échelle atomique.

Important 5.26

A retenir

Pour une étude des phénomènes microscopiques, on aura tendance à négliger l'action de la gravitation. L'interaction électrostatique peut être répulsive ou attractive. Elle va donc favoriser l'association de charges de signes différents créant ainsi de la matière globalement neutre: les atomes et molécules. **L'interaction électrostatique assure la cohésion de la matière à l'échelle microscopique.**

5.2.2.2 Cohésion de la matière à l'échelle macroscopique

5.11: Cohésion de la matière

1. Quand on augmente la taille du système, la matière s'organise en atomes et molécules. L'intensité de l'interaction électrostatique va-t-elle augmenter ou diminuer?
2. Quand on augmente la taille du système, l'interaction gravitationnelle va-t-elle augmenter ou diminuer?
3. A l'échelle des planètes, quelle interaction est prépondérante ?
4. A notre échelle, quelle interaction est prépondérante ?

Important 5.27

A retenir

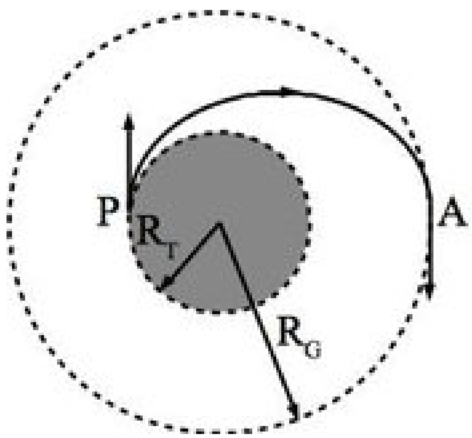
- La neutralité de la matière tend à diminuer l'interaction électrostatique pour des systèmes plus grand.
- A l'inverse, plus la quantité de matière augmente, plus l'interaction gravitationnelle augmente : elle finit par prendre le pas sur l'interaction électrostatique
- A notre échelle, aucune ne prend le pas sur l'autre.
- A l'échelle planétaire, c'est l'interaction gravitationnelle qui est prépodérante.

5.2.3 Activités : Mouvement des satellites

On s'intéresse maintenant au mouvement des satellites. On s'intéressera dans le cours uniquement au mouvement des satellites autour de la Terre. Cette étude peut être généralisée. On notera M_T la masse de la Terre et m la masse du satellite. On veut s'intéresser à quelques données utiles lors de l'étude du mouvement des satellites.

5.2.3.1 Mouvement des satellites: Définitions

Position du problème Le mouvement des satellites se fait sur des distances très grandes (ex: l'altitude d'un satellite géostationnaire est de 36000km), pour économiser le carburant (économie d'énergie ET de poids), les ingénieurs tirent en général partie des interactions gravitationnelles. En effet, on a vu que la vitesse initiale pour une distance donnée définissait l'énergie mécanique du système. Celle-ci permet de prévoir les altitudes maximale et minimale atteintes par le satellite. On peut donc, en allumant de manière très ponctuelle les moteurs du satellite, lui faire parcourir des très grandes distances: on réalise une économie de carburant. D'une manière générale, le mouvement des satellites correspond à la modification ponctuelle de la vitesse.



En général, la mise en orbite "haute" d'un satellite se fait de la manière suivante: un lanceur place le satellite sur une orbite circulaire "basse" proche de la surface de la Terre. Ensuite, un moteur transfert le satellite sur une orbite elliptique dont le périgée (point de l'orbite le plus proche) est sur l'orbite basse (point de départ) et l'apogée (point de l'orbite le plus éloigné) est sur l'orbite haute finale. Quand le satellite arrive à l'apogée, un moteur dit d'apogée modifie à nouveau la vitesse du satellite pour le placer sur l'orbite haute.

On définit alors certaines grandeurs utiles pour la réflexion.

Important 5.28

Vitesses cosmiques
On définit la première vitesse cosmique par la vitesse qu'aurait un satellite en orbite basse, c'est-à-dire telle que $h \ll R_T$.
On définit la seconde vitesse cosmique comme la vitesse minimale à transmettre à une satellite en orbite basse pour qu'il se libère de l'attraction terrestre, c'est-à-dire qu'il puisse atteindre l'infini.

Important 5.29

Orbite géostationnaire
L'orbite géostationnaire correspond à une orbite où le satellite tourne avec la même période que la Terre sur elle-même et est fixe par rapport à un point du globe.

5.2.3.2 Etude du mouvement des satellites

5.12: Exercice

1. Exprimer la première vitesse cosmique v_1 en fonction de G, M_T et R_T
2. Exprimer la seconde vitesse cosmique v_2 en fonction de G, M_T et R_T
3. Préciser l'intérêt de connaître les deux vitesses cosmiques.
4. Montrer que l'orbite d'un satellite géostationnaire est nécessairement contenue dans le plan équatorial.
5. Déterminer le rayon de l'orbite géostationnaire.

On distingue différents types de satellites en fonction des **altitudes** de leur orbite:

- Orbite polaire: en orbite basse entre 300 et 1000km avec une inclinaison proche de 90 degrés. Ce sont des orbites qui permettent de passee toujours à la même heure solaire au dessu d'un lieu donné ce qui en fait une orbite idéale pour l'observation de la Terre.
- Orbite basse: entre 250km et 2000km. Ce sont principalement des satellites scientifiques (comme Hubble)
- Orbite moyenne: jusqu'à 20000km On y trouve notamment les satellites GPS (à 20000km) et pour Internet (à 8063km).
- Orbite haute: jusqu'à l'orbite géostationnaire. On y trouve principalement des satellites de communication russes. Note: ces trajetoires ne sont pas toujours circulaire et c'est l'apogée qui se trouve à ces altitudes

1. Déterminer les vitesses limites des satellites en orbite basse circulaire et les durées limites de ces orbites.
2. Déterminer la vitesses des satellites GPS et Internet ainsi que la durée de leur orbite (ce sont des trajectoires circulaires).

5.2.3.3 Satellite géostationnaire

5.13: Exercice

On souhaite transférer un satellite depuis une orbite circulaire rasante de rayon R_T autour de la Terre sur son orbite géostationnaire de rayon R_G. On fera l'étude dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire Ω. On suppose que le satellite a une masse de $m = 1,5$t donc petite devant la masse de la Terre. On note O le centre de la Terre.

Le transfert s'effectue de son orbite basse géostationnaire s'effectue de la manière suivante: on communique au satellite une brusque variation de vitesse en un point P de sa trajectoire en éjectant des gaz pendant un intervalle de temps très court dans le sens opposé à la vitesse du satellite. Il suit alors une orbite elliptique et lorsque sa trajectoire croise la droite OP au point A, on lui communique un supplément de vitesse pour le stabiliser sur l'orbite géostationnaire.

1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique, établir l'expression de l'énergie mécanique en fonction de G, M_T, m et a le demi grand axe de l'ellipse.
2. Donner la valeur de l'énergie mécanique sur l'ellipse de transfert.
3. Etablir l'expression de la vitesse du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de R_G, R_T, r, G et M_T.
4. Donner la valeur de vitesse qu'il faut imposer en P. Déterminer la variation de l'énergie mécanique en P.
5. Donner la valeur de vitesse qu'il faut imposer en A. Déterminer la variation de l'énergie mécanique en A.
6. Déterminer la durée du mouvement.

5.2.4 Applications

5.2.4.1 Forces centrales

5.14: Effet centrifuge

1. Montrer que dans un mouvement à force centrale conservative.

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{\mathrm{dE}_{\mathrm{p,eff}}}{\mathrm{dr}}$$

Grâce à cette relation et en analysant les différents termes de $E_{p,eff}$, retrouver l'effet centrifuge de la rotation et les effets possibles (centrifuge/centripète) de la force centrale.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Energie potentielle effective.*

5.15: Mouvement circulaire uniforme

Justifier que le mouvement circulaire correspondant à $E_m = E_{p,eff,min}$ est un mouvement uniforme.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Energie potentielle effective.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire circulaire.*

5.2.4.2 Forces newtoniennes

5.16: Mouvement circulaire

On considère le mouvement d'une planète autour du Soleil et on suppose sa trajectoire circulaire de rayon R.

1. Etablir sa vitesse en fonction de R. En déduire la troisième loi de Kepler
2. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique, cinétique et potentielle et montrer que $E_m = -E_c = \frac{E_p}{2}$.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Mouvement des planètes.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire circulaire.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Lois de Kepler.*

5.17: Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30cm de diamètre. Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118000 étoiles avec une précision jamais atteinte. Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude H=36000km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert son altitude variant entre h et H. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été porté à h=500km.
Une programmation du satellite a permis de s'affranchir des problèmes liés à cette orbite. Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Allen. On supposera que cette ceinture comprise entre 2 sphères de rayon $r_1 = 8400$km et $r_2 = 28000$km et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Allen est constituée de particule piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos inter-

rompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65%. On assimile la terre à une sphère de centre O, de rayon R=6400km et de masse M et le satellite à un point matériel (S,m). On suppose le référentiel géocentrique R galiléen. La période de rotation de la terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut T=86164s.

1. Quelle la nature de la trajectoire d'Hipparcos?
2. Déterminer les expressions de l'excentricité e et du paramètre de l'ellipse p en fonction de h,H et R. A.N.
3. Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.
4. Rappeler la troisième loi de Kepler.
5. Déduire de la question précédente, la relation entre la période de rotation de la Terre T et l'altitude de l'orbite géostationnaire H.
6. Exprimer la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T,R,H et h. Calculer T_h en heure.
7. Déterminer les valeurs numériques de angles θ_1 et θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Allen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre $0°$ et $180°$.
8. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Allen. Pour la question suivante, on prendre une valeur approché de $S_b = 200 \times 10^6$km.
9. Déterminer le rapport $\rho = t_0/T_h$ en fonction de S_b et S_e (surface de l'ellipse) où t_0 est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Mouvement des planètes.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire elliptique.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Lois de Kepler.*

5.18: Satellite artificiel

On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1. Établir l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique R_T assimilé à un référentiel galiléen en fonction de la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ.
2. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement d'un satellite. Parmi les champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence?
   - Baïkonour au Kazakhstan: $\lambda = 46°$
   - Cap Canaveral aux USA: $\lambda = 28,5°$
   - Kourou en Guyane française: $\lambda = 5,23°$
3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation du système Terre-satellite en fonction de l'altitude z du satellite par rapport au sol. On prend pour référence une énergie potentielle nulle à l'infini. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique.
4. On appelle ici vitesse de libération v_l, la vitesse verticale minimale qu'il faut communiquer initialement au satellite par rapport au sol, pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Donner l'expression de v_l. Calculer sa valeur numérique dans le cas où le satellite est lancé de la base de Kourou. On supposera que la vitesse du point O attaché au sol est horizontale et la vitesse communiquée au satellite verticale.

On considère un satellite artificiel m en mouvement circulaire autour de la Terre.

1. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Etablir l'expression de la vitesse du satellite en fonction de son altitude ainsi que la troisième loi de Kepler liant la période de rotation T du satellite au rayon r de sa trajectoire.
2. Calculer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire et définir son plan de révolution.
3. Quelle énergie cinétique minimale faut-il communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction terrestre s'il est initialement en orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude z? A.N. z = 36000 km; m=6 tonnes.
4. Soit un satellite d'énergie initiale E_{m0}. Son orbite est relativement basse et il subit donc les frottements des couches hautes de l'atmosphère. Il s'ensuit que l'énergie mécanique du satellite varie suivant la loi $E_m = E_{m0}(1+bt)$, b étant un coefficient constant positif. On suppose que la trajectoire reste approximativement

circulaire. Préciser le signe de E_{m0}. Etablir l'expression du rayon r et de la vitesse v du satellite en fonction du temps. Comparer les évolutions de r et de v ainsi que celles des énergies potentielle et cinétique. Que devient l'énergie perdue?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Trajectoire circulaire.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*

5.2.5 Entrainement

5.2.5.1 Forces centrales quelconques

5.19: Point matériel lié à un fil

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil de masse négligeable. Le plan est percé au point O choisi pour origine, le fil traverse le plan en O; un opérateur exerce sur l'autre extrémité du fil une force de traction de module F constant.
A t=0, le point M se trouve sur l'axe Ox à une distance D de O, sa vitesse est alors V_0, colinéaire à Oy.

1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en O de M se conserve pendant toute la durée de la traction. Calculer son module et sa direction. Définir la vitesse aréolaire et montrer que le mouvement de M se fait suivant la loi des aires, à savoir que la vitesse aréolaire est constante.
2. Déterminer l'énergie mécanique E_m de M; on montrera que la force de traction dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en utilisant les coordonnées cylindriques. On prendra $E_p = 0$ pour $OM = 0$.
3. Montrer que l'on peut écrire E_m comme une fonction de r seule et de ses dérivées et définir une fonction énergie potentielle effective.
4. Etudier ses variations en fonction de r=OM. Montrer qu'elle passe par un minimum pour $r_1 = \left(\frac{mV_0^2D^2}{F}\right)^{1/3}$.
5. Tracer le graphe correspondant et faire apparaître l'énergie mécanique. Déterminer graphiquement les deux distances extrêmes de M à O; à quelle condition sur F la position initiale est-elle le point de la trajectoire le plus éloigné de O? Le point matériel peut-il arriver jusqu'à O?
6. Quelle valeur donner à F pour observer un mouvement circulaire? Montrer qu'il est alors nécessaire uniforme.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Mouvement à force centrale.*
- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Energie potentielle effective.*

5.20: Mouvement d'une bille dans un cône

On considère un matériel M glissant sans frottements à l'intérieur d'un cône dont la génératrice fait un angle α avec l'axe Oz vertical dirigé vers le haut, O étant le sommet du cône. On suppose le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz et de centre O. On travaille dans le référentiel terrestre qu'on supposera galiléen.

1. Déterminer la relation entre les coordonnées r et z. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ en fonction de r et θ.
2. En déduire, en utilisant le principe fondamental de la dynamique que:
$$M\ddot{r} = -\frac{mg}{tan\alpha} + mr\dot{\theta}^2$$

avec $M = m(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha})$

1. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{J_O}$ par rapport au point O en fonction de m, r, z et θ. Montrer que la composante suivant Oz, notée J_z est conservée au cours du mouvement.
2. En exprimant $\dot{\theta}$ en fonction de J_z, montrer que l'équation différentielle sur r peut s'écrire sous la forme: $M\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}(r)}{dr}$ où $V_{eff}(r)$ est un potentiel effectif que l'on exprimera en fonction de α, m,g, et J_z. Tracer les allures de $V_{eff}(r)$ pour $J_z = 0$ et pour $J_z \neq 0$.

ATTENTION: Nous allons à partir de ce point réaliser une étude à partir du potentiel effectif comme elle a été faite en cours pour le cas des mouvements à force centrale. On remarquera néanmoins que le mouvement n'est PAS ici un mouvement à force centrale. On pourra s'en convaincre en remarquant par exemple que la composante du moment cinétique projeté sur $\overrightarrow{e_\theta}$ n'est pas conservée (TMC) ou simplement parce que le mouvement n'est pas plan. La méthode d'analyse mathématique ne reste pas moins utilisable A CONDITION DE PROUVER QU'ON PEUT L'UTILISER.

1. Calculer l'énergie mécanique et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme: $E_m = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$. Justifier le fait que l'énergie mécanique est conservée. On vérifiera que cette conservation permet bien de retrouver l'équation différentielle établie à la question précédente.
2. On s'intéresse uniquement aux trajectoires dont les conditions initiales sont de la forme $r(0) = r_0, \vec{v}(0) = v_0\overrightarrow{e_\theta}$.
   1. Exprimer J_z en fonction de ces conditions initiales.
   2. A quelle condition sur v_0 la bille atteint-elle le fond du cône? Quelle est alors la trajectoire.
   3. Déterminer v_0 pour que la trajectoire soit un cercle de rayon r_0 et d'altitude constante.
   4. Montrer graphiquement que dans le cas général et si $J_z \neq 0$ le mouvement est dans un état lié dont les rayons extrêmes sont r_{min} et r_{max} qu'on repérera graphiquement.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Mouvement à force centrale.* (ou pas)
- $\Longrightarrow$ *Système conservatif.*
- $\Longrightarrow$ *Energie potentielle effective.*

5.2.5.2 Potentiels newtoniens

5.21: Vecteur excentricité

On veut étudier le mouvement d'une planète P, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e, de centre O considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_P est située à une distance $r = OP$ de O. On considère le référentiel lié à l'étoile comme galiléen.

1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction de M_p, M_e, r, G la constante de gravitation universelle et $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$.
2. Justifier que le mouvement est plan. Préciser ce plan.

On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. On définit le vecteur excentricité: $\vec{e} = -\frac{L}{GM_eM_P}\vec{v} + \overrightarrow{u_\theta}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la planète.

1. Montrer que le vecteur excentricité est un vecteur constant. En fait, ce vecteur est orthogonal au grand axe de l'ellipse.
2. En calculant le produit scalaire $\vec{e} \cdot \overrightarrow{u_\theta}$, montrer que l'on retrouve bien l'équation d'une ellipse.
3. Que vaut le module de $\vec{e}$? Préciser p en fonction de G, M_p, M_e et L.
4. Préciser la valeur de l'excentricité dans le cas d'un mouvement circulaire.
5. Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de R (rayon du cercle), v_c (vitesse circulaire) et M_p. Déterminer l'expression de la vitesse V_c en fonction de R, G et M_e à l'aide du vecteur excentricité.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Mouvement des planètes.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire elliptique.*
- $\Longrightarrow$ *Excentricité.*

5.22: Explosion d'une comète

Une comète de période T=770 ans s'est approchée du soleil à $d = 7,75 \times 10^{-3}$u.a.

1. On suppose que la trajectoire est elliptique. Déterminer le demi-grand axe a, l'excentricité e, le paramètre p de l'ellipse et les vitesses à l'aphélie (v_A) et au périhélie (v_P). A-t-on eu raison de faire l'hypothèse d'une trajectoire elliptique?
2. A son périhélie, elle a explosé en deux morceaux de masse m_1 et m_2, partis respectivement avec la vitesse v_1 et v_2 dans deux directions faisant des angles respectifs $\alpha_1 = -20^\circ$ et $\alpha_2 = 50^\circ$ avec la direction initiale de v_P. La quantité de mouvement totale se conserve durant l'explosion et l'on observe que: $\|v_1\| \sim \|v_2\|$.
   1. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, déterminer le rapport des masses m_1/m_2 puis la norme des vitesses des fragments.
   2. Calculer l'énergie mécanique par unité de masse pour chaque fragment. En déduire le type de la nouvelle trajectoire.

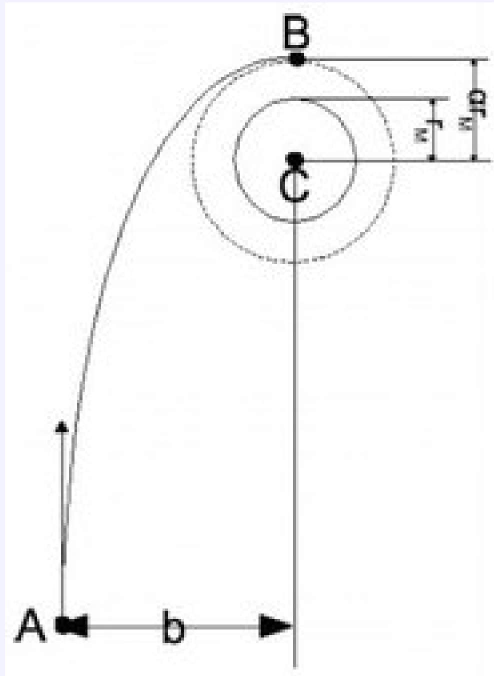
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Lois de Kepler.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire elliptique.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*

5.23: Mise en orbite d'une sonde spatiale

On souhaite mettre en orbite une sonde spatiale(s) autour de Mars. Ce véhicule possède au point A la vitesse v_A et présente un "paramètre d'impact" b (cf. Figure). On donne:

- $v_A = 2,5\text{km/s}$
- rayon de Mars: $r_M = 3397\text{km}$
- masse de Mars: $M_M = 6,39 \times 10^{23}\text{kg}$



Remarque: Le point B n'est pas placé correctement sur le schéma. Cela n'a pas d'influence sur les raisonnements.

1. Au point A, on suppose que le véhicule est assez éloigné de Mars pour pouvoir négliger l'énergie gravitationnelle. En déduire l'expression de l'énergie mécanique et la nature de la trajectoire de(s). Le justifier sur un graphique.
2. Montrer que le moment cinétique se conserve et définir la constante des aires C. Calculer C en fonction de v_A et b.
3. Sachant que ma trajectoire d'approche est tangente au cercle de rayon αr_M en B, calculer v_B (vitesse en B) en fonction de v_A, r_M, α et b.
4. Exprimer le paramètre d'impact b, en fonction de r_M, v_A, M_M et α. A.N.: $\alpha = 3$.
5. Déterminer la distance minimale b_m pour que le véhicule évite la surface de Mars.
6. Déterminer la vitesse v_c d'un objet sur l'orbite circulaire de rayon $3r_m$ ainsi que sa période de révolution en fonction des données.
7. Au point B (avec $\alpha = 3$), on veut que le véhicule passe sur l'orbite circulaire de rayon $3r_M$. Déterminer la variation de vitesse Δv_c à communiquer au véhicule en fonction des données.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Lois de Kepler.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire hyperbolique.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Mobile à l'infini.*
- $\Longrightarrow$ *Moment cinétique.*

5.24: Comète à trajectoire parabolique

La comète Arend-Roland est une comète à trajectoire d'excentricité e estimée à 1,0002. On assimilera la trajectoire à une parabole d'excentricité e=1. La comète est passée à son périhélie, le 8 avril 1857, à $r_P = 0,316$u.a. du soleil.

1. Calculer le paramètre de la trajectoire.
2. Exprimer le paramètre p de la conique en fonction de la constante des aires C, de G et la masse du soleil M_S. En déduire la vitesse de la comète au périhélie.
3. Montrer que l'on peut exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de la constante des aires C et du paramètres p de la parabole par: $\dot{\theta} = C\frac{(1+\cos\theta)^2}{p^2}$. En quel point est prise l'origine $\theta = 0$?
4. On note t_0 l'instant de passage au périhélie P. Montrer alors que l'on obtient le temps de passage pour le point d'angle α avec:

$$t(\alpha) = t_0 + \int_0^\alpha \frac{p^2}{C}\frac{d\theta}{(1+cos\theta)^2}$$

1. Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $x = \tan\frac{\theta}{2}$. En déduire l'expression: $t = t_0 + \frac{p^2}{C}(X + \frac{X^3}{3})$ où $X = \tan\frac{\alpha}{2}$.
2. (Analyse numérique) La comète a été découverte par les astronomes belges Sylvain Arend et Georges Roland le 8 novembre 1856. A quelle distance se trouvait-elle du Soleil?

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Lois de Kepler.*
- $\Longrightarrow$ *Trajectoire parabolique.*
- $\Longrightarrow$ *Energie mécanique.*

CHAPTER

SIX

SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

6.1: Compétences

- Différencier un solide indéformable d'un système indéformable
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Définir et situer qualitativement la position d'un centre d'inertie en fonction de la répartition de masse.
- Etablir l'expression de la quantité de mouvement d'un système en rapport avec la vitesse du centre d'inertie et la masse totale du système.
- Exploiter la relation entre le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, sa vitesse angulaire et son moment d'inertie autour de l'axe.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition de masse.
- Utilisation la relation entre l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, sa vitesse angulaire et son moment d'inertie autour de l'axe.
- Modéliser une action globale pour une force et un moment résultant.
- Prévoir qualitativement ou quantitativement les positions de moment nul pour des forces usuelles (pesanteur).
- Exploiter les lois de Coulomb dans les trois situations: équilibre, mise en mouvement, freinage.
- Formuler une hypothèse sur un système en présence de frottements solide (modélisés par les lois de Coulomb) et la vérifier.
- Quantifier l'influence de l'air par des actions linéaires ou quadratiques.
- Définir un couple
- Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.

6.1 Connaître le contexte

6.1.1 Cinématique et cinétique des systèmes de points

Important 6.1

Système de points matériel

Un système de points matériels S (ou solide déformable) est un ensemble de points matériels dont on décrit le mouvement.

On distingue deux types de descriptions:

- Les systèmes discrets, composés d'un ensemble de point matériels séparables les uns des autres. Ils sont décrits par une ensemble de points $\{M_i\}$ et leurs caractéristiques cinématiques (vitesse $\{\overrightarrow{v_i(M_i)}\}$et cinétiques (masse $\{m_i\}$ et les caractéristiques qui en découlent).

- Les systèmes continus, pour lesquels la matière forme un ensemble dont les caractéristiques peuvent être décrites par des fonctions continues (ou au moins continues par morceaux):champ de vitesse ($\overrightarrow{v_{/\mathfrak{R}}}(M)$ avec $M \in S$) et masse d'un petit volume de matière $d\tau(M)$ autour de chaque point M ($\rho(M)d\tau(M)$ avec $\rho(M)$ la **masse volumique** autour du point M).

Important 6.2

Solide indéformable
Un solide indéformable est un système de points tel que, quelque soit les deux points P_i et P_j du solides, à tout instants, la *distance* P_iP_j est constante.

6.1.1.1 Description d'un système de points

6.1.1.1.1 Masse et centre d'inertie

Important 6.3

Masse totale
On définit la masse totale M du système S comme la somme de toutes les masses des points matériels composant le solide.

Important 6.4

Centre d'inertie
On définit le centre d'inertie G du système S comme le barycentre des points du solide affectés de leur masse.

- Cas d'un système discret:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OP_i}$$

- Cas continu:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iiint_{P \int S} \rho(P)\overrightarrow{OP}d\tau(P)$$

6.1.1.1.2 Description d'un mouvement

Description d'un mouvement: généralités (en ligne)

En physique nous n'utiliserons que deux cas particuliers: la translation seule et la rotation autour d'un axe fixe.

6.1.1.1.3 Mouvement de translation

Important 6.5

Translation Un solide est en translation si pour tout point P du solide, la vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$ est identique.

6.1.1.1.4 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Important 6.6

Rotation autour d'un axe fixe
On peut définir le concept de rotation en rapport avec les composantes du torseur cinématique (cf SI). Pour nous, la description d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est visuelle: il tourne sur lui-même.

Important 6.7

Champ de vitesse d'un solide en rotation
Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe, à un instant t, tous les points du solide ont la même vitesse angulaire $\omega(t)$. On peut alors définir un vecteur $\overrightarrow{\Omega}(t)$ appelé vecteur rotation du solide tel que pour tout point P du solide, la vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$ s'écrit:

$$\overrightarrow{v_{P/R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

où A est un point de l'axe de rotation.

6.2: Démonstration

La vitesse angulaire est la même pour tout point du solide (sinon il se déformerait). On se place dans un système de coordonnées cylindriques d'axe Az l'axe de rotation et de centre A. Pour un point P à un distance r de l'axe:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} &= \omega\overrightarrow{e_z} \wedge (r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}) \\ &= r\omega\overrightarrow{e_\theta} \\ &= \overrightarrow{v_{P/R}} \end{aligned}$$

6.1.1.2 Cinétique du solide

6.1.1.2.1 Quantité de mouvement

Important 6.8

Quantité de mouvement d'un système de points
La quantité de mouvement dans un référentiel R d'un système de points matériels S est la somme des quantités de mouvements dans le même référentiel des points qui le composent.
Il peut s'agir d'une somme discrète ou continue suivant la description du système.

Important 6.9

Quantité de mouvement et centre d'inertie
La quantité du mouvement dans un référentiel R d'un système S est égale à la quantité de mouvement qu'aurait un point matériel fictif situé au centre d'inertie G et dont la masse serait la masse totale du système.

$$\overrightarrow{p_{S/\mathfrak{R}}} = M\overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}}$$

6.3: Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_{S/R}} &= \iiint_{P\in S} \rho(P)\vec{v}(P)d\tau(P) \\
&= \iiint_{P\in S} \rho(P)\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}d\tau(P) \\
&= \frac{d}{dt}(\iiint_{P\in S} \rho(P)\overrightarrow{OP}d\tau(P)) \\
&= \frac{d}{dt}(M\overrightarrow{OG}) = M\overrightarrow{v_{G/R}}
\end{aligned}$$

6.1.1.2.2 Moment cinétique d'un solide

Important 6.10

Moment cinétique par rapport à un point
Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{S/A}}$ d'un système S dans un référentiel R par rapport à un point A est la somme des moments cinétiques des différents points du système par rapport au même point A.

Important 6.11

Moment cinétique par rapport à un axe
Le moment cinétique $\sigma_{S/\Delta}$ d'un système S dans un référentiel R par rapport à un point Δ est la somme des moments cinétiques des différents points du système par rapport au même point Δ.

6.1.1.2.3 Energie cinétique d'un système de points matériels

Important 6.12

Energie cinétique d'un système de point matériel
L'énergie cinétique $E_{C/R}$ du système S dans le référentiel R est la somme des énergie cinétique de l'ensemble des points qui composent le système S.

6.1.1.3 Mouvements particuliers

6.1.1.3.1 Translation

On rappelle que dans une translation, tous les points du système ont la même vitesse dans un référentiel donné. Cette vitesse correspond donc aussi à la vitesse du centre d'inertie.

Important 6.13

Eléments cinétiques
L'énergie cinétique du système S dans un référentiel peut alors s'écrire:

$$E_{c/R} = \frac{1}{2} M v_{G/R}^2$$

Le moment cinétique du système S par rapport à un point A dans un référentiel donné s'écrit donc:

$$\overrightarrow{L_{A/\mathfrak{R}}} == \overrightarrow{AG} \wedge M\overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}}$$

6.1.1.3.2 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Moment d'inertie

Nous allons d'abord introduire une grandeur très important pour décrire la rotation d'un solide. Nous verrons par la suite qu'elle intervient dans l'expression de l'énergie cinétique et du moment cinétique.

Important 6.14

Moment d'inertie
Lorsqu'un solide S est en rotation autour d'un axe fixe, on définit son moment d'inertie $J_{S/\Delta}$ par rapport à l'axe par la grandeur:

- Cas discret: $J_{S/\Delta} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$ où d_i est la distance entre le point P_i et l'axe.
- Cas continu: $J_{S/\Delta} = \iiint_{P \in S} \rho(P) d(P)^2 d\tau(P)$ où $d(P)$ est la distance entre le point P et l'axe.

Grandeurs cinétiques

L'expression de la quantité de mouvement peut toujours s'obtenir par sommation et/ou en utilisant la position du centre d'inertie. Attention, la quantité de mouvement n'est pas nécessairement nulle (cas d'un centre d'inertie qui n'est pas sur l'axe de rotation).

Important 6.15

Moment cinétique sur l'axe de rotation
Pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe dans R, le moment cinétique $\sigma_{S/\Delta}$ du solide S dans le référentiel R s'exprime comme le produit du moment d'inertie $J_{S/\Delta}$ du même système multiplié par la vitesse de rotation ω **comptée algébriquement en cohérence avec l'orientation de l'axe** (règle du tire-bouchon par exemple):

$$\sigma_{S/\Delta} = J_{S/\Delta}\omega$$

6.4: Démonstration

Démonstration

$$\begin{aligned}\sigma_{S/\Delta} &= \iiint_{P\in S} \rho(P)(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{v(P)}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} d\tau(P)\\ &= \iiint_{P\in S} \rho(P)(\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP})) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} d\tau(P)\end{aligned}$$

En utilisant des coordonnées cylindriques d'axe Δ:

$$\begin{aligned}&= \iiint_{P\in S} \rho(P)((r(P)\overrightarrow{e_r} + z(P)\overrightarrow{e_z}) \wedge (r(P)\omega\overrightarrow{e_\theta})) \cdot \overrightarrow{e_z} d\tau(P)\\ &= \iiint_{P\in S} \rho(P)r^2(P)\omega d\tau(P)\\ &= J_{S/\Delta}\omega\end{aligned}$$

Important 6.16

Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe Δ, l'énergie cinétique du solide peut s'écrire sous la forme:

$$E_c = \frac{1}{2}J_{S/\Delta}\omega^2$$

où $J_{S/\Delta}$ est le moment cinétique de S par rapport à l'axe Δ et ω la vitesse angulaire de rotation du solide sur le même axe.

6.5: Démonstration

Démonstration

$$\begin{aligned} E_{c/R} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} J_{S/\Delta} \omega^2 \end{aligned}$$

6.1.2 Modélisation des actions globales

6.1.2.1 Généralités

Important 6.17

Action résultante (ou globale).
Rappel : Une action résultante sur un système Σ_2 est une action du milieu extérieur modélisable par le regroupement **arbitraire** d'un ensemble d'actions ponctuelles sur le système Σ_2.

Important 6.18

Description mathématique
Une action globale ou action résultante peut être décrite par **deux** éléments:

- la **force résultante** : somme de toutes les forces ponctuelles associées aux actions ponctuelles qu'on a regroupées
- le **moment résultant** en un point arbitraire A : somme de tous les moments des actions ponctuelles regroupées calculés tous au même point A.

*La donnée des deux éléments de l'action est appelé **torseur** de l'action.*

Attention

Le moment résultant **ne peut être déduire de la force résultante**.

6.1.2.2 Eléments utiles (en ligne)

6.1.2.3 Cas particuliers

Important 6.19

Couple
Un couple est une action résultante dont la **force résultante** est nulle.
Le moment résultant d'un couple est indépendant du point considéré.

6.1.2.4 Types d'actions

On distinguera deux types d'actions:

- les actions à distance : en général associées à des actions ponctuelles usuelles comme la gravitation, la pesanteur ou l'interaction électromagnétique. Elles agissent en volume (intégration volumique)
- les actions de contact : résultante d'actions ponctuelles microscopiques de courte distance (Van der Waals principalement), elles n'ont en général pas d'expression connues (sauf cas de non frottements) mais peuvent contraindre de le mouvement. On parle de **liaison**.

6.1.2.4.1 Actions à distances

Important 6.20

Actions de la pesanteur
Cas d'un champ de psanteur **uniforme.** L'action de la pesanteur sur un corps a alors :
- pour force résultante $\overrightarrow{P} = M\vec{g}$
- un moment résultant nul en un point appelé **centre de gravité**. Il est confondu avec le *centre d'inertie* pour un champ uniforme.

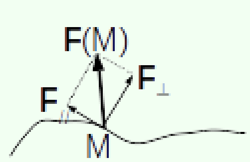
6.1.2.4.2 Actions de contact

Les actions de contact sont en général surfacique: on va sommer les actions ponctuelles en surface (double intégale) en se restreignant évidemment à la surface de contact ! On ne cherchera pas à calculer ces intégrales. L'expression des caractéristiques de ces actions de contacts se fait de deux manières:

- Cas d'action d'un fluide (liquide ou gaz). Comme on va le voir, on dispose souvent d'expression de la résultante des forces. En première année, on utilise principalement ces actions dans le cadre d'une modélisation ponctuelle du système mécanique de sorte que le moment résultant n'est pas donné (l'action devenant par modélisation... ponctuelle).
- Cas d'action d'un solide (on parle de liaison). Dans le cadre du programme, les caractéristiques:
  - sont inconnues et ne peuvent être déterminées que par l'utilisation de théorème (comme le PFD (ou plutôt TRD...) qui permet de déterminer certaines composantes des forces et moments résultants.
  - possèdent des composantes nulles par hypothèse (cas d'absence de frottements)
  - sont établies ou encadrées (inégalité) grâce aux lois de Coulomb (cf. suite)

Important 6.21

Rappel : Composante tangentielle et composante normale
En un point de contact M entre le système et le solide/fluide (qu'on appellera Σ_{ext}), l'action ponctuelle (modélisée par la force $\overrightarrow{F}(M)$ peut-être décomposée en deux composantes:
- une composante normale à la surface de contact $\overrightarrow{F_{\perp}}(M)$
- une composante tangentielle à la surface de contact $\overrightarrow{F_{//}}(M)$



Il n'y a pas d'expression simple a priori de cette action ponctuelle qui dépend de la géométrie au point de contact mais aussi du reste du contact, des autres actions qui s'appliquent sur les deux systèmes, de la nature des matériaux qui forment le système…

On peut néanmoins obtenir plusieurs informations sur la force et moment résultant de l'action globale suivant les cas (solides ou fluide, géométrie du contact…). C'est ce que nous ferons par la suite.

Action d'un fluide

L'action d'un fluide se décompose

Modélisation de l'action d'un fluide (en ligne)

Expression de la force de frottements fluides

Important 6.22

Force de frottements fluide

- **Cas laminaire** : Aux faibles vitesses, la force ou le moment de frottements fluides est proportionnelle à la vitesse du fluide.
  - Pour un système en translation : $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v_{systeme/fluide}}$.
  - Dans le cas d'un système en rotation au tour d'un axe fixe : $M_{axe}(fluide) = -K\dot{\theta}$ où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du solide autour de l'axe (fluide supposé au repos)
- **Cas turbulent** : Aux fortes vitesses, la force de frottements fluides est proportionnelle au carré de la vitesse du fluide: $\overrightarrow{F} = -k\,\|v\|\,\vec{v}$. Cette expression est valable pour un système en translation. Le cas d'un système en rotation ne sera pas traité.

Action de contact solide

Lois phénoménologiques de Coulomb

Il n'y a pas de modèle théorique complet permettant de déterminer les actions de contact solide. Il existe par contre une loi phénoménologique (déduite de l'expérience) qui permet de les modéliser. Plus précisément, on va, au niveau **des actions ponctuelles**, relier la composante normale et la composante tangentielle.

Important 6.23

Rappel : Lois phénoménologiques de Coulomb

En un point de contact solide-solide, la force de contact $\overrightarrow{R}$ se décompose en deux composantes, l'une tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ et l'autre normale $\overrightarrow{R_N}$ ($\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$). On déduit expérimentalement les comportements suivants:

- La **composante normale** est telle qu'elle empêche l'interpénétration des systèmes (contrainte cinématique). Elle est dirigée vers l'intérieur du solide qui subit l'action. Son annulaion signifie la perte de contact.
- La **composante tangentielle** a un comportement qui dépend de l'état relatif des deux solides:
  - *en cas d'immobilité relative des deux solides*, l'action complète est telle qu'elle permet l'immobilité relative (somme des forces nulle ET somme des moments nuls si l'on est dans un référentiel galiléen). La composante tangentielle est de norme nécessairement **inférieure** à $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu_S \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où μ_S est appelé coefficient de frottement statique. Lorsque cette condition est mise en défaut, alors le système se met en mouvement.
  - *en cas de mouvement relatif des deux solides* (on dit qu'il y a glissement au point M), la composante

tangentielle s'oppose à la vitesse relative au point M. Sa norme est **égale** à $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_D \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où μ_D est appelé coefficient de frottement dynamique.

- Quelque soit le système, $\mu_D < \mu_S$, c'est-à-dire qu'il est plus facile de maintenir un solide en mouvement par rapport à un autre solide malgré les frottements que de mettre en mouvement le même solide.

Liaisons normalisée et géométrie

Liaisons normalisée En général, on travaille avec des géométries simples et usuelles pour les surfaces de contact. On parle de liaison normalisée (celle présentée précédemment est la liaison rotule ou sphérique). Ces liaisons seront vues en SI. En physique la seule à connaître est la liaison pivot.

Liaison pivot

Important 6.24

Liaison pivot
La liaison pivot est une liaison où le seul degré de liberté est la rotation entre les deux solides. Elles est réalisée par une surface de contact cylindrique (qui permet une rotation suivant UN axe) fermé latéralement (pour empêcher la translation suivant l'axe de rotation).
En physique, on travaille en générale avec un solide mobile (le rotor) en liaison pivot avec le bati (stator - en général le référentiel associé au bati est un référentiel galiléen **en physique**).

Important 6.25

Liaison pivot parfaite
Une liaison pivot parfaite est une liaison pivot sans frottements, le moment résultant de la liaison **sur l'axe de rotation** est nulle.

Action d'un fil de torsion

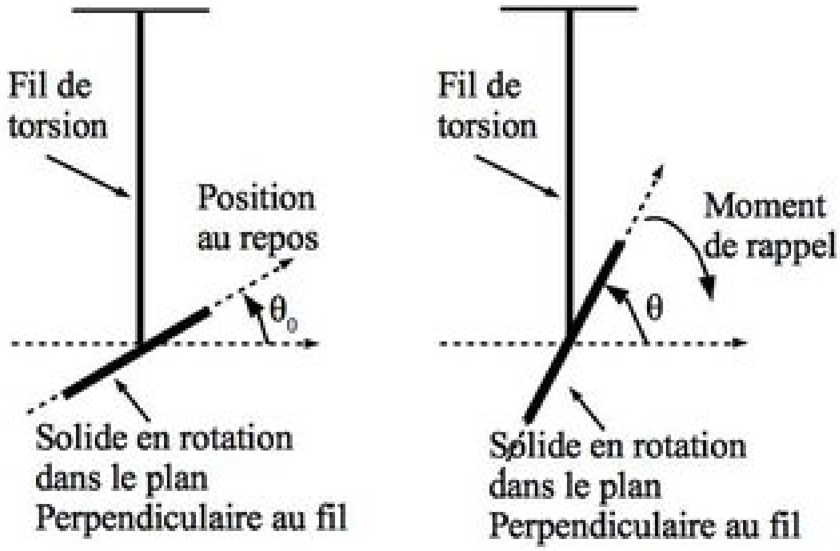
Fil de torsion Un fil de torsion est un fil dont la section n'est pas négligeable et qui peut se tordre suivan son axe. Son élasticité implique qu'il va tendre à se détendre exerçant pour cela un moment à ses extrémités proportionnel à l'angle de torsion.

Important 6.26

Action d'un fil de torsion
Soit un fil pouvant se tordre suivant son axe. On suppose qu'il ne flambe pas. Pour un angle de torsion $\theta - \theta_0$ du fil, ce dernier exerce à ses extrémités une action dont le moment suivant l'axe de torsion est:

$$\Gamma_{axe} = -C\left(\theta - \theta_0\right)$$

où C est appelée constante de torsion du fil.
On remarquera qu'une telle action est sembable à une action de rappel élastique. Pour le ressort, le rappel se fait suivant ue translation. Ici le rappel concerne une rotation.
L'angle θ repère la torsion du fil. La présence de l'angle θ_0 permet de placer l'origine des angles en un point où le fil est déjà tordu. Cela peut-être utile lorsque l'on étudie plusieurs fil de torsion.
On parle de moment de rappel ou par abus de langage de couple de rappel.



6.1.2.5 Théorèmes en mécanique du solide

6.1.2.5.1 Théorème de la résultante cinétique

Le but est de voir comment on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à un système de points matériel. On peut l'énoncer de manière identique mais comme on va le voir, on peut "simplifier" légèrement son énoncé.

Forces extérieures et intérieures On rappelle que pour un système de points matériels (solide déformable ou indéformable), on distingue les forces **intérieures** exercées par une partie du système sur une autre partie du système et les forces **extérieures** exercées par le milieu extérieur sur le système.

Important 6.27

Théorème de la résultante dynamique
La dérivée temporelle de la quantité de mouvement total d'un système de points matériel dans un référentiel galiléen est égale à la somme des forces **extérieures** qui s'appliquent sur le solide.

6.1.2.5.2 Théorème du moment cinétique: Application au solide.

Important 6.28

TMC appliqué à un solide.
La dérivée temporelle du moment cinétique d'un système de points matériel par rapport à un point/un axe fixe dans un référentel $\mathfrak{R}$ est égal à la somme du moment des actions extérieures calculé au point point/axe.

6.1.2.5.3 Energétique

Travail d'une action globale

Important 6.29

Travail et puissance d'une action globale
Le travail (élémentaire ou fini) d'une action globale est la somme des travaux (élémentaires ou fini) de chaque action ponctuelle.
La puissance transmise par une action globale dans un référentiel donné est la somme des puissances transmises par chaque action ponctuelle dans le même référentiel.

Cas particuliers.

Important 6.30

Cas d'un solide en translation (à connaître)
Dans le cas d'un solide indéformable en translation, la puissance transmise par une action globale peut se réécrire comme $P_{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ avec M un point quelconque du solide (on prend en général le centre d'inertie mais de toute façon, tous les points ont la même vitesse puisque le solide est en translation) et $\overrightarrow{F}$ la force résultante de l'action globale.
Le travail élémentaire s'écrit $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$ avec M un point quelconque du solide.

Important 6.31

Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (à connaître)
Dans le cas d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$, la puissance transmise par une action globale peut se réécrire comme $P_{\mathfrak{R}} = M_{\Delta}\omega_{\Delta}$ avec ω_{Δ} la vitesse angulaire de rotation du solide autour de l'axe Δ (**c'est une grandeur algébrique**) et M_{Δ} le moment résultant de l'action globale sur l'axe Δ.
Le travail élémentaire s'écrit $\delta W = M_{\Delta} d\theta_{\Delta}$ avec $d\theta_{\Delta}$ une variation infinitésimale de l'angle θ_{Δ} orienté suivant Δ et représentant la rotation du solide autour de l'axe.

Forces conservatives

Il existe des forces globales conservatives. Le travail global peut alors être écrit comme l'opposé d'une fonction (énergie potentielle) ne dépendant que de la position du solide.

Cas usuels

Important 6.32

Cas d'une liaison parfaite.
Si la liaison pivot est parfaite, alors la puissance (et le travail) transmis par la liaison pivot dans le référentiel du stator est nulle. La preuve est triviale.

Important 6.33

Action de la pesanteur
L'action de la pesanteur dérive d'une énergie potentielle. Si le champ de pesanteur est uniforme : $E_p = mgz_G$ où z_G est **l'altitude** du centre d'inertie G.

Important 6.34

Action d'un fil de torsion L'action d'un fil de torsion de constante de torsion C dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est:

$$E_p = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$$

où $\theta - \theta_0$ est l'angle de torsion du fil.

Théorèmes énergétiques

Important 6.35

Théorème de l'énergie cinétique/mécanique. Cas général.
La variation d'énergie cinétique d'un système de points d'un état A à un état B est égale au travail des forces qui s'appliquent sur le système sur le même chemin, qu'elles **soient extérieures ou intérieures**.
La variation d'énergie mécanique d'un système de points d'un état A à un état B est égale au travail des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système sur le même chemin, qu'elles **soient extérieures ou intérieures**.

Important 6.36

Théorème de l'énergie cinétique/mécanique. Cas d'un solide indéformable.
Dans le cas d'un solide **indéformable, le travail des forces intérieures est nul.**

6.6: Démonstration

Nous allons démontrer que dans le cas général le travail des forces intérieures est a priori non nul et qu'il s'annule dans le cas d'un solide indéformable.
Considérons deux points M_1 et M_2 du solide en interaction. On note $\overrightarrow{f_{1\to 2}}$ la force exercée par M_1 sur M_2 et $\overrightarrow{f_{2\to 1}}$ la force exercée par M_2 sur M_1. On a (troisième loi de Newton): $\overrightarrow{f_{1\to 2}} = -\overrightarrow{f_{2\to 1}}$.
La puissance totale associée à ces deux forces s'écrit:

$$\begin{aligned}
P &= \overrightarrow{f_{1\to 2}} \cdot v_{M_2/R} + \overrightarrow{f_{2\to 1}} \cdot v_{M_1/R} \\
&= \overrightarrow{f_{1\to 2}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R \\
\overrightarrow{f_{1\to 2}} &= f_{1\to 2}\overrightarrow{u_{1\to 2}} \\
\overrightarrow{M_1M_2} &= M_1M_2\overrightarrow{u_{1\to 2}} \\
\left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R &= \frac{dM_1M_2}{dt}\overrightarrow{u_{1\to 2}} + M_1M_2\left(\frac{d\overrightarrow{u_{1\to 2}}}{dt}\right)_R
\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{u_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire allant de M_1 vers M_2.
Le première terme correspond à la variation de la distance entre les deux points, le second à la rotation d'un point par rapport à l'autre. La puissance des forces intérieurs pour ces deux points s'écrit donc:

$P = f_{1\to 2}\frac{dM_1M_2}{dt}$
Si le mobile se déforme, cette expression est a priori non nulle.
Si le solide est indéformable, cette expression est toujours nulle.

6.2 S'entrainer

- exercices-types (Méthodes)
- des activités (Activités) : Solide en rotation
- des exercices d'application (Application)
- des exercices d'entrainement (Entrainement) : Un devoir libre est proposés ici[9].
- des approfondissement (Aller plus loin) : Une étude des interactions entre particule[10] pour aller vers la thermodynamique.

6.2.1 Méthodes

6.2.1.1 Cinétique

6.7: Calcul de la quantité de mouvement

1. On considère un cylindre d'axe Oz fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$ et de masse uniformément répartie en rotation autour de l'axe Oz. Déterminer la quantité de mouvement du cylindre.
2. On considère un système composé de pièces de masse respectives m_1 et m_2. La première est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$. La seconde est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_{2/1}}$ par rapport à la première pièce. Déterminer la quantité de mouvement du système total.
3. On considère un disque d'épaisseur h et de rayon R de masse totale M répartie de manière homogène. Il tourne autour d'un axe Oz où O est distance de $R/2$ par rapport avec à G. La rotation se fait à vitesse angulaire constante ω. Déterminer la quantité de mouvement du disque.

6.8: Moment d'inertie et moment cinétique

1. On considère un solide S constitué de deux tiges de longueurs L pouvant coulisser l'une sur l'autre. La tige placée en dessous est accrochée par une extrémité à un axe fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Préciser sans calcul pour quelles positions de la tige supérieure le moment d'inertie est maximal ou minimal.
2. Déterminer le moment d'inertie d'un point matériel de masse m sur un axeΔ situé à une distance d.
3. On considère deux cylindriques concentriques de moment d'inertie respectifs J_1 et J_2 sur leur axe de symétrie et tournant chacun à des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 autour de cet axe. Déterminer le moment cinétique et l'énergie cinétique de l'ensemble constitué des deux cylindres.

[9] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12850
[10] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12859

6.2.1.2 Force et statique

6.9: Force et moment résultant

On considère une tige de longueur L dont le milieu est noté O qu'on prend comme origine d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Elle soumise à une action extérieure uniforme sur toute sa longueur. Cette action globale est décomposée en des actions quasi-ponctuelles : on suppose qu'un petit élément de longueur dl de la tige est soumis à une action quasi-ponctuelle $\overrightarrow{dF} = \Lambda dl \vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$.

1. Déterminer par intégration la force résultante $\overrightarrow{F}$ exercée sur la tige.
2. Déterminer par intégration le moment résultant $\overrightarrow{M_A}$ calculé au point A de l'action considérée, A étant une extrémité de la tige. On traitera deux cas :
   - La tige est suivant l'axe Ox (A est en $x = -\frac{L}{2}$).
   - La tige est suivant l'axe Oy (A est en $y = -\frac{L}{2}$).
3. Reprendre les mêmes calculs pour calcul le moment résultant au point O.

Cet exercice montre comment calculé les composantes d'une actions de contact quand elles ne sont pas connues : en utilisant les théorèmes TMC et TRD.

6.10: Equilibre d'un cube

On étudie un cube (de masse uniformément répartie) sur un plan incliné. On admet qu'à l'équilibre, la somme des forces résultats est nulle et la somme des moments résultants en un même point est nulle.

1. Représenter la force résultante de l'action du poids en un point judicieusement choisi.
2. On considère un point B à la surface du plan situé au plus bas ou plus haut que le cube (donc pas sur la surface de contact). En raisonnant sur les actions ponctuelles de contact, justifier que le moment résultant en B ne peut jamais être nul.
3. Le cube est immobile. Par une analyse du bilan des actions, représenter la force résultante de l'action du plan incliné sur le cube en un point où son moment est nul.
4. Que se passe-t-il si l'on incline trop le plan ?

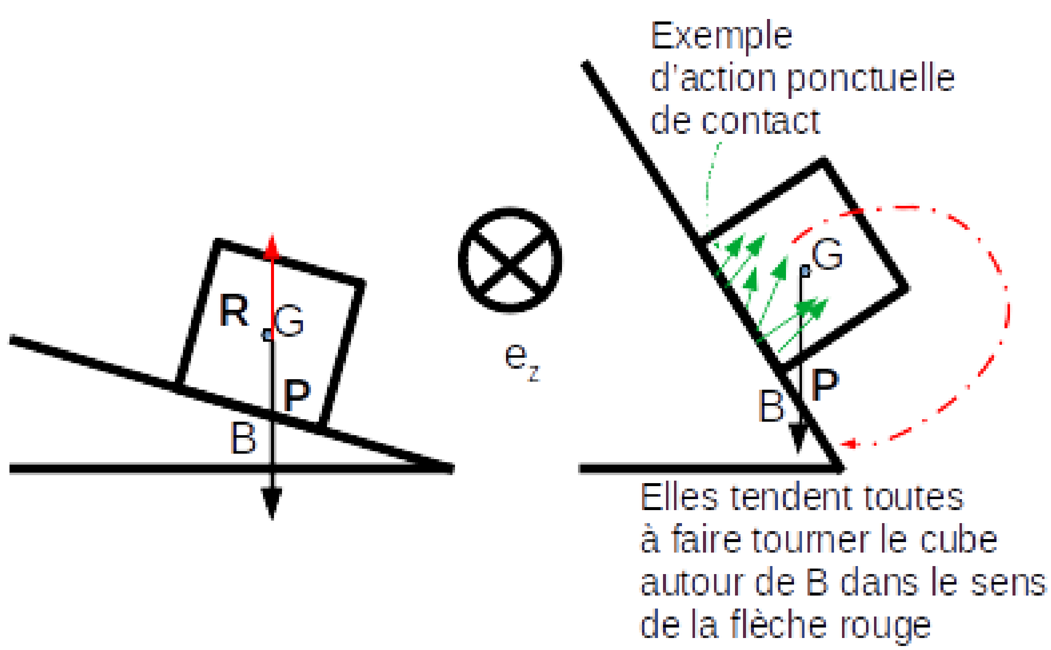


Fig. 6.1: Actions sur le cube

6.11: Cylindre sur plan incliné

On considère un cylindre de rayon R, de hauteur h et de masse M uniformément répartie placé sur un plan incliné d'angle α.

1. Sur un plan de coupe, représenter les forces résultantes associées à chaque action extérieure sur le cylindre. On distinguera deux cas suivant le comportement de l'action de contact.
2. Le cylindre peut-il rester immobile ? Peut-il glisser sans rouler ? Peut-il rouler sans glisser ? On expliquera ceci au moyen d'un bilan des actions.

6.2.1.3 Dynamique

6.12: Volant freiné

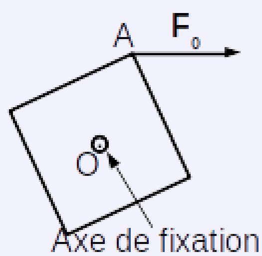
On considère un volant qui tourne autour d'un axe fixe horizontal. Son moment d'inertie autour de cet axe vaut J. Son centre d'inertie est sur l'axe et le champ de pesanteur est uniforme et constant. Au cours du mouvement, le volant subit des frottements solides qu'on modélise comme un couple constant dont le moment par rapport à l'axe de rotation est $|M_f| = \alpha J$ avec α constant. On lance le volant à une vitesse angulaire ω_0 et celui-ci s'immobilise après N tours.

1. Exprimer le coefficient α en fonction de ω_0 et N.

Cet exercice présente trois points importants: la capacité à paramétrer correctement un problème, le calcul d'un moment d'une force et l'analyse physique d'un système en rotation par étude des moments. Nous en profiterons pour aborder qualitativement deux notions importantes: la notion d'équilibre et la notion de stabilité.

6.13: Cas d'un système de points.

On considère un cube de côté a et de répartition de masse uniformément répartie en liaison pivot avec un axe passant par le centre du cube et perpendiculaire à deux des faces du cube. Le cube ne peut ainsi que tourner autour de cet axe supposé fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Tous les éléments cinématiques et cinétiques devront être établis dans ce référentiel qu'on supposera galiléen.



On attache un fil tendu à un coin du cube noté A. On considère que la liaison entre le cube et le fil se résume à un seul point de sorte qu'on puisse considérer l'action du ressort sur le cube comme ponctuelle. La force appliqué par le fil sur le cube est toujours horizontale et de norme F_0.

1. Paramétrer le problème (proposer un système de coordonnées et des paramètres utiles au problème) pour pouvoir étudier la rotation du cube autour de son axe. Proposer alors une expression du moment cinétique du cube sur l'axe de rotation,de son énergie cinétique et de sa quantité de mouvement. On notera J le moment d'inertie du cube sur l'axe de rotation et M sa masse totale.
2. Exprimer le moment de la force exercé par le fil sur le cube exprimé au centre du cube. Commenter suivant les valeurs des paramètres introduits la tendance qu'aura cette force à agir sur la rotation du cube.
3. On suppose la liaison pivot parfaite. Quelles sont les positions d'équilibre du système ? Si l'on écarte légèrement le cube de chacune de ces positions, aura-t-il tendance a revenir à la position d'équilibre ? (On parle de stabilité des positions d'équilibre).

6.2.2 Activité : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Il s'agit ici de reprendre certaines idées générales et de préciser le cas d'étude des systèmes **déformables** en rotation.

6.2.2.1 Solide indéformable

6.2.2.1.1 Rappel

On rappelle quelques éléments utiles:

- le moment cinétique du solide sur l'axe s'écrit comme le produit de la vitesse angulaire autour de l'axe par le moment d'inertie du système sur l'axe.
- Le TMC permet de relier la vitesse de rotation aux différents moments s'appliquant sur le solide.
- Le TRD sert en général à déterminer certaines force résultante comme celle de la liaison pivot.
- La liaison pivot possède a priori un moment non nul sur son axe. Il n'est nul que si la liaison pivot est parfaite.
- On a déjà étudié le cas des pendules pesant et de torsion.

6.2.2.1.2 Equivalience TMC-TEC

Important 6.37

A retenir : Equivalence
Pour un solide **indéformable** en **rotation autour d'un axe fixe** dans un référentiel galiléen, le théorème de l'énergie cinétique et le théorème du moment cinétique sont équivalents.

Le démontrer

6.2.2.2 Solide déformable

Nous allons nous intéresser au cas d'un assemblement de solide pouvant bouger les uns par rapport aux autres. L'ensemble sera en rotation autour d'un axe fixe mais les différentes partie ne tourneront pas forcément à la même vitesse.

6.2.2.2.1 Solide déformable: Théorèmes généraux

Important 6.38

Fondamental : TEC et TMC
Si le solide est déformable, **le TEC et le TMC ne sont plus équivalents**.
En général, le TEC/TEM n'apporte pas d'information à cause de puissances des forces intérieures qui ne sont pas quantifiables. On utilisera plutôt le TMC.
Dans le cadre du programme, on sera en général amené à montrer que le moment cinétique est conservé.

6.2.2.2.2 Utilisation de la conservation du moment cinétique

6.14: Exercice

Observer l'expérience du tabouret d'inertie et proposer une modélisation permettant de l'expliquer.

6.2.3 Application

6.2.3.1 Solides en rotation indéformables

6.15: Rotation d'un moteur

On considère un solide (rotor) de forme cylindrique de rayon R et de masse M uniformément répartie. Il est en liaison pivot avec un axe fixe (stator) et on suppose cette liaison parfaite. On suppose que l'axe Oz de la liaison pivot est horizontal. On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz et l'angle θ associé à un point du cylindre permet de repérer la rotation de ce dernier.
Les propriétés magnétiques du rotor (non étudié en détail ici) fait qu'un champ magnétique extérieur au système impose une action modélisable par un **couple** de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma_m \overrightarrow{e_z}$ et que le cylindre est plongé dans un fluide dont l'action est aussi modélisable par un **couple** de moment $\overrightarrow{\Gamma_f} = -K\dot{\theta}\vec{e}_z$

1. Faire un bilan des actions mécaniques sur le cylindre.
2. Etablir l'équation d'évolution de la vitesse angulaire ω du cylindre. En déduire que le système tend vers une vitesse de rotation limite qu'on déterminera.
3. Etablir $\omega(t)$ en supposant que le rotor est initialement immobile.
4. *On se place dans le régime stationnaire où $\omega = cste$, déduire du mouvement du centre d'inertie la force résultant exercée par la liaison pivot.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Bilan des actions mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème du moment cinétique.*
- $\Longrightarrow$ *Moment d'inertie.*
- $\Longrightarrow$ *Détermination d'une action.*

Les deux exercices suivants sont des classiques à maitriser.

6.16: Pendule pesant

On considère une tige de longueur L et de masse M attaché à une extrémité à un bati par une liaison pivot parfaite d'axe Oz horizontal (on donne le moment de la tige par rapport à Oz: $J_{Oz} = \frac{ML^2}{3}$), l'autre extrémité étant laissé libre. Une masse ponctuelle m est accrochée à la tige à une distance l de l'axe Oz. Déterminer la période des petites oscillations en fonction de la longueur l.

6.17: Pendule de torsion

On considère une tige de longueur L et de masse M uniformément répartie. Elle est attaché en son milieu à un fil de torsion de constante C dont l'autre extrémité est attachée à un bati. On suppose que la tige reste toujours horizontale et qu'elle ne fait que tourner autour de l'axe du fil de torsion noté Oz (vers le haut).
On repère l'angle que fait la tige avec un axe horizontal de référence et $\theta = 0$ lorsque le fil de torsion est au repos. Montrer qu'on a un oscillateur harmonique et déterminer sa pulsation propre en notant J le moment d'inertie de la tige suivant l'axe Oz.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Bilan des actions mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème du moment cinétique.*
- $\Longrightarrow$ *Moment de torsion.*

6.2.4 Entrainement

6.18: Disques couplés

On considère deux disques horizontaux tournant autour d'un axe vertical Δ en leur centre. Les disques sont homogènes, de moment d'inertie par rapport à Δ, J_1 et J_2 et la liaison avec l'axe est parfaite. On repère leur rotation autour de l'axe par deux angles θ_1 et θ_2.
On relie un fil de torsion de constante C d'un côté au bâti et de l'autre eu premier disque puis un deuxième fil de torsion de même constante C d'un côté au premier disque et de l'autre au second disque et enfin un dernier fil de torsion de même constante C d'un côté au deuxième disque et de l'autre au bâti.

1. Déterminer les deux équations différentielles couplées qui régissent les évolutions de θ_1 et θ_2.
2. On cherche des configurations pour lesquelles les deux disques oscilles de manièrent sinusoïdales à la même pulsation ω. Montrer qu'il n'existe que deux pulsations possibles et dont on déterminera les expressions. Décrire le mouvement global pour chaque pulsation.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Bilan des actions mécanique.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème du moment cinétique.*
- $\Longrightarrow$ *Moment de torsion.*
- $\Longrightarrow$ *Oscillateur forcée.*

6.19: Entraînement par frottements

On considère un système constitué de deux disques en rotation autour d'un axe Δ (les moments d'inertie des deux disques par rapport à l'axe sont notés J_1 et J_2) au moyen d'une liaison pivot parfaite. A l'instant initial, les deux disques sont éloignés et sans contact et le premier tourne avec une vitesse angulaire ω_0 et le second est immobile. On approche doucement les deux disques jusqu'à ce qu'ils soient en contact.

1. Déterminer la vitesse angulaire de l'ensemble des deux disques à la fin de la manipulation. Ce résultat dépend-t-il de la nature des frottements entre les deux disques?
2. Faire un bilan d'énergie mécanique pour chaque disque séparément puis pour l'ensemble des deux disques. Commenter les résultats.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Solide déformable.*
- $\Longrightarrow$ *Conservation du moment cinétique.*