Mathématiques

C. Lacpatia

Aug 03, 2023

CONTENTS

Cette partie expose les compétences mathématiques nécessaires au cours de physique.

CHAPTER

ONE

BASES DE MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE

1.1: Compétences

- Résoudre analytiquement ou graphiquement une équation simple.
- Résoudre un système d'équations
- Connaître l'allure et les propriétés des fonctions usuelles: exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique.
- Tracer une courbe d'équation $y = f(x)$ et déterminer ses caractéristiques.
- Associer une transformation graphique à une modification d'une fonction usuelle (homothétie, symétrie, translation)
- Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions sinus, cosinus, tangente.
- Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.
- Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle et imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.

1.1 Fonctions mathématiques

1.1.1 Etude générale

1.2: Note:

Nombre dérivé et fonction dérivée
Le nombre dérivé de la fonction f en $x = x_0$ est définie comme la limite du taux de variation de la fonction en ce point (on présuppose ici son existence):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La (fonction) dérivée de f est la fonction qui associe à tout x de l'intervalle de dérivabilité le nombre dérivé de f en x.

Important 1.1

Formulaire de dérivation

- Dérivée du produit: $(u \times v)' = u'v + uv'$
- Dérivée d'une composé: $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$
- Il est bon aussi d'une dérivée usuelle: puissance réelle, trigonométrique, exponentielle et sa réciproque…

1.1.2 Fonctions usuelles

1.3: Note:

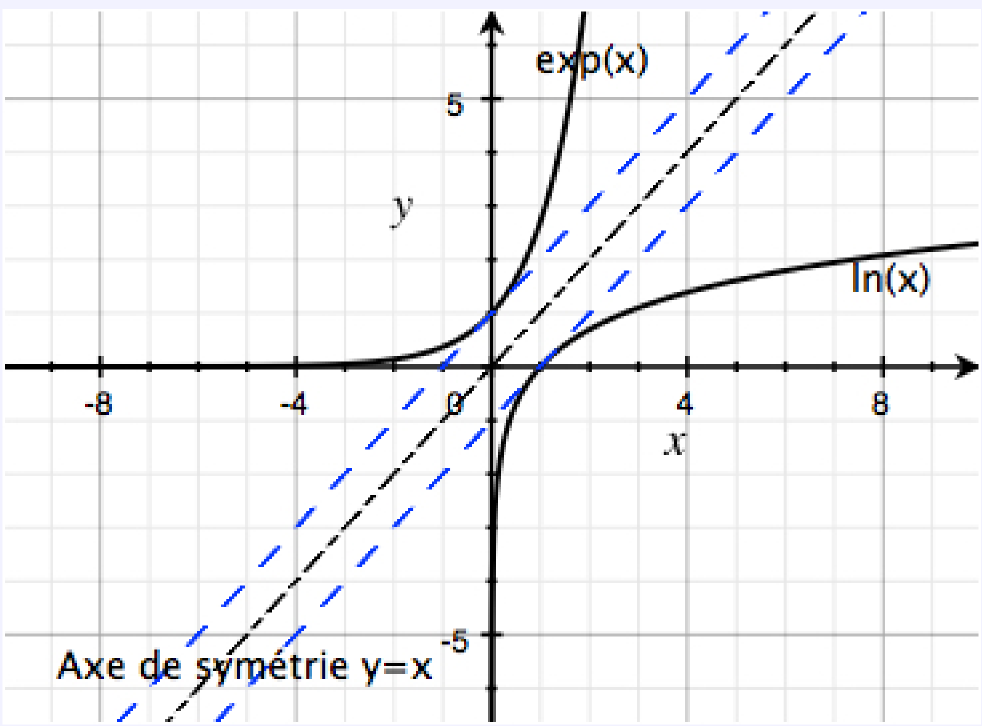
Polynôme
Ils sont sous la forme:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

La puissance maximale donne le degré du polynôme.
Le cas du polynôme de degré 2 doit être parfaitement maîtrisé.

1.4: Note:

Exponentielle et Logarithme
La fonction exponentielle e^x est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante de 0 vers $+\infty$ (plus rapidement qu'un polynôme).
Elle ne s'annule jamais et vaut 1 en 0 (où sa pente est 1). Sa dérivée est e^x. Sa réciproque est le logarithme népérien.
La fonction logarithme népérien ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante et tend vers $-\infty$ en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$ (plus lentement qu'un polynôme). Elle s'annule en $x = 1$ (sa pente est alors de 1). Sa dérivée est $1/x$.
La fonction réciproque est la fonction exponentielle. Le tracé des deux fonctions est donc symétrique par rapport à la première diagonale d'équation $y = x$.



Important 1.2

Propriétés

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln(a^b) = b\ln(a)$$
$$b^a = e^{a \ln b}$$

1.5: Note:

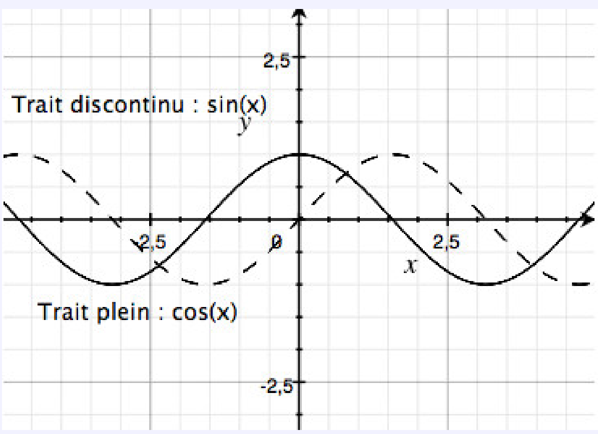
Fonctions trigonométriques

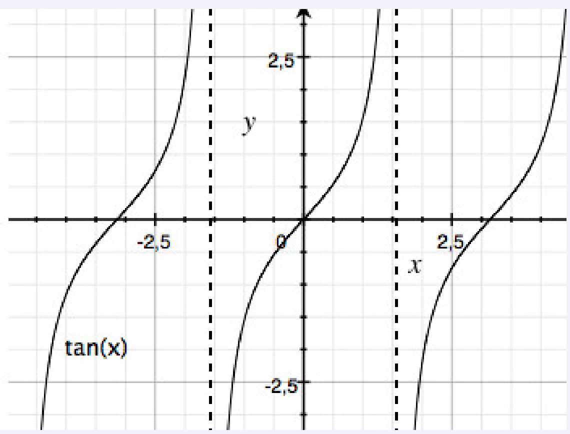
Les trois fonctions trigonométriques sont $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$. Elles sont toutes les trois périodiques de période 2π (en radians).

Les fonctions cos et sin sont à valeurs dans $[-1; 1]$ et on a $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ ce qui signifie comme nous le verrons par la suite que le tracé de la fonction sinus est le même que le tracé de la fonction cosinus mais décalé de $+\pi/2$ horizontalement.

La fonction cosinus s'annule en $\pm\pi/2$ et atteint ses extrema en 0 (1) et π (-1). Pour le sinus, c'est l'inverse. De plus cos est paire et sin impaire. On a $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

La fonction tan est définie par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$: elle a donc les mêmes points d'annulation que la fonction sinus et diverge quand le cosinus s'annule. Elle est strictment croissante et sa dérivée vaut $\tan' = \frac{1}{cos^2} = 1 + tan^2$.





Les fonctions réciproques sont arccos, arcsin et arctan. Arccos et arcsin ont un domaine de définition restreint à [-1;1] alors que arctan a un domaine de définition étendu à $\mathbb{R}$. Arccos est à valeurs dans $[0; \pi]$ et arcsin est à valeur dans $[-\pi/2; \pi/2]$. Arctan est à valeur dans $[-\pi/2; \pi/2]$.

Important 1.3

Relations trigonométriques

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\
\sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\
\sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tan(x)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{aligned}
\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\
\sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\
\cos(\arctan(x)) &= \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \\
\sin(\arctan(x)) &= \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \\
\tan(\arcsin(x)) &= \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} \\
\tan(\arccos(x)) &= \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}
\end{aligned}$$

1.1.3 Transformations usuelles

Des exemples sont en ligne.

1.1.3.1 Transformations suivant l'axe vertical

Important 1.4

Translation verticale
Considérons une fonction f et une fonction $g(x) = x + a$. La composition $h(x) = g \circ f(x)$ correspond graphiquement à la translation verticale de la représentation graphique de f de $+a$.

Important 1.5

Dilatation verticale
Considérons une fonction f et une fonction $g(x) = kx$ avec $k > 0$. La composition $h(x) = g \circ f(x)$ correspond graphiquement à la dilatation de la courbe verticale d'un facteur k.

Important 1.6

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses
Soit une fonction $f(x)$. La représentation graphique de la fonction $-f(x)$ s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1.1.3.2 Transformations suivant l'axe horizontal

Important 1.7

Translation horizontale Considérons une fonction f et une fonction $g(x) = x - a$. La composition $h(x) = f \circ g(x)$ correspond graphiquement à la translation horizontale de la représentation graphique de f de $+a$.

Important 1.8

Dilatation horizontale
Considérons une fonction f et une fonction $g(x) = kx$ avec $k > 0$. La composition $h(x) = f \circ g(x)$ correspond graphiquement à la dilatation de la courbe horizontale d'un facteur $1/k$ (donc contraction de facteur k).

Important 1.9

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Soit une fonction $f(x)$. La représentation graphique de la fonction $f(-x)$ s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

1.2 Géométrie et trigonométrie

1.2.1 Généralités

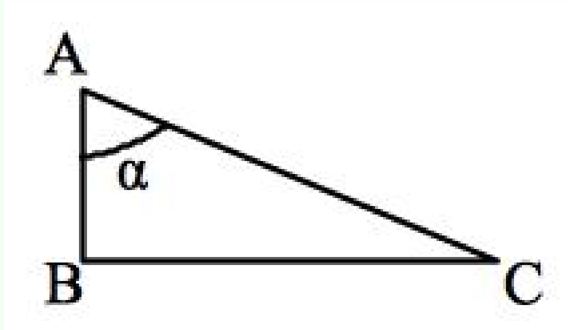
Important 1.10

Fonctions trigonométriques et triangle rectangle On rappelle que dans un triangle **rectangle**:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{BA}{AC} \tag{1.1}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{BC}{AC} \tag{1.2}$$

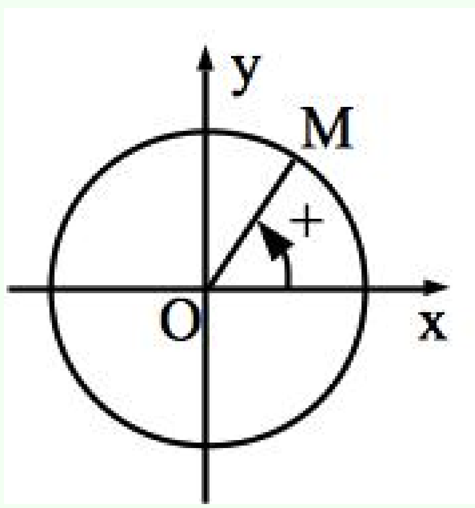
$$\tan\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{BC}{BA} \tag{1.3}$$



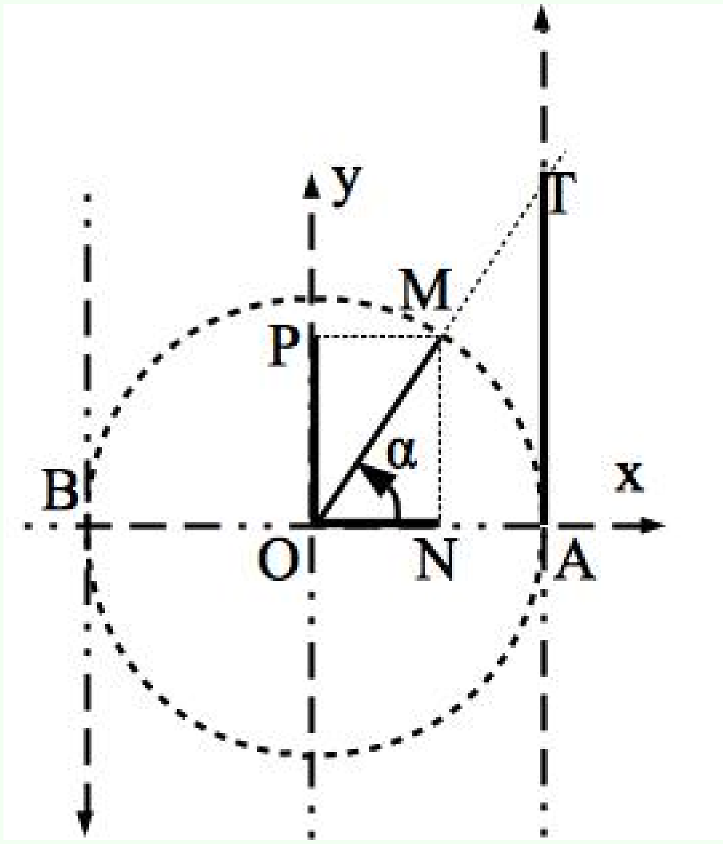
1.2.2 Cercle trigonométrique

Important 1.11

Cercle trigonométrique Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. L'axe Ox représente l'origine des angles parcourus sur le cercle. Ce cercle est orienté, c'est-à-dire que les angles orientés dans le sens dit trigonométrique (sens inverse du sens horaire) sont comptés positifs.
Soit un angle α orienté, la longueur de l'arc associé à l'angle α (arc AM) sur le cercle trigonométrique est égale à l'angle α multiplié par la longueur unité. Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc associé à α est égale à $R\alpha$.



Soit M un point du cercle trigonométrique et α l'angle orienté entre OM et l'axe Ox. On note N le projeté de M sur l'axe Ox et P le projeté de M sur l'axe Oy. Les distances **algébriques** $\overline{ON}$ et $\overline{OP}$ sont respectivement égales à $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.
On peut tracer les deux tangentes au cercle perpendiculaires à l'axe Ox orienté (vers le haut du côté des x positifs et vers le bas du côté des x négatifs). Soit T l'intersection de OM et de la tangente la plus proche. La distance de T à l'axe Ox est égale à$\tan(\alpha)$ (distance **algébrique** AT).



1.3 Nombres complexes

1.3.1 Ecriture des complexes

Important 1.12

Ecriture complexe

- On définit le nombre complexe i tel que $i^2 = -1$. Ce nnombre ne fait pas partie du corps des réels.
- Soit z un nombre complexe. On peut toujours écrire z sous la forme: $z = a + ib$ où a et b sont des réelles.
  - a est appelée partie réelle: $a = \Re(z)$
  - b est appelée partie imaginaire: $b = \Im(z)$
- Un nombre de complexe peutse mettre sous la forme: $z = re^{i\theta}$ où
  - r est le module $|z|$
  - θ l'argument arg(z) du nombre complexe z.

Important 1.13

Relation entre les écritures Ces relations sont fondamentales en physique et doivent être sues par coeur.

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \tag{1.4}$$

$$\cos\theta = \frac{\Re(z)}{|z|} \tag{1.5}$$

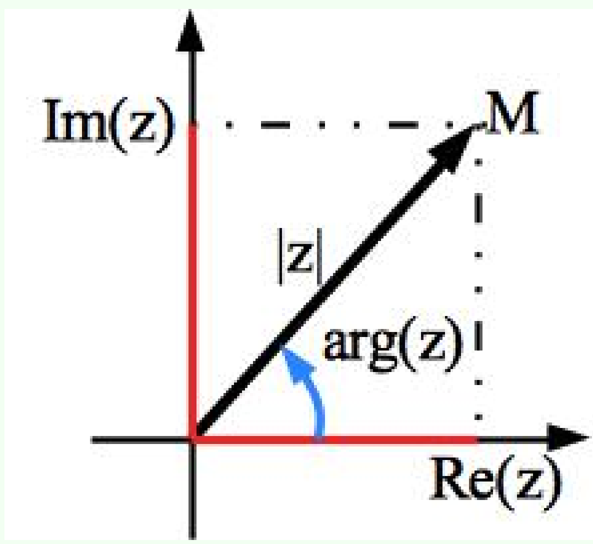
$$\sin\theta = \frac{\Im(z)}{|z|} \tag{1.6}$$

$$\tan\theta = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \tag{1.7}$$

1.3.2 Représentation graphique

Important 1.14

Plan complexe Le plan complexe est un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que l'image d'un nombre complexe z est le point M de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$. L'image vectorielle de z est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et z est appelée affixe du point M.



Le module de z est la longueur du vecteur$\overrightarrow{OM}$ et l'argument de z est l'angle entre ce vecteur et l'axe des abscisses (ou axe des réels).

1.3.3 Opérations sur les complexes

Important 1.15

Conjugaison
Soit un complexe z, on définit le complexe conjugué $\overline{z}$ comme le complexe possédant le même module mais un argument opposé. On peut aussi le définir comme celui ayant la même partie réelle et une partie imaginaire opposée.
\$$z = re^{i\theta} = a + ib \Longrightarrow \overline{z} = re^{-i\theta} = a - ib$\$\end{defi}

Important 1.16

Formulaire **Ces relations sont fondamentales en physique et doivent être sues par coeur.**

$$\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \tag{1.8}$$

$$\Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2) \tag{1.9}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.10}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{1.11}$$

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.12}$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \tag{1.13}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{1.14}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2} \tag{1.15}$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \tag{1.16}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \tag{1.17}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \tag{1.18}$$

1.4 Exercices

Il n'est pas prévu de corriger ces exercices, sauf s'ils ont causés beaucoup de difficultés. Il est donc vivement conseillé de les faire de manière à vérifier que vous maîtrisez les bases de calculs.

1.4.1 Méthodes

Ces méthodes ont des corrections en ligne.

1.4.1.1 Résolution d'équations

1.4.1.1.1 Résoudre graphiquement une équation f(x)=g(x)

On ne peut pas toujours résoudre analytiquement une équation. On peut par contre toujours la résoudre graphiquement et on peut même obtenir des informations importantes sur le rôle de certains paramètres lors de ce genre de résolution.

1.6: Exercice

Déterminer graphiquement les conditions d'existence de solutions non nulles pour l'équation:

$$x = \frac{mg}{k}\sin(x)$$

avec k, m et g strictement positifs.

1.4.1.1.2 Résoudre un système d'équation 2*2

La méthode proposée est à **privilégier** à la méthode de substitution. Elle vous semblera peut-être plus complexe au début mais avec l'entraînement elle permet un énorme gain de temps en physique (à moins que le système soit triangulaire et donc en partie déjà résolu !).

1.7: Exercice

Déterminer les solutions du système suivant:

$$\begin{aligned}3x + 4y &= 5\\4x - 5y &= 2\end{aligned}$$

1.4.1.2 Fonctions

1.8: Dérivée d'une composée de fonction

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{kx^2}$

1.9: Retrouver les formules trigonométriques des inverses

Montrer que $\sin(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$

1.10: Manipulation de fonction trigonométrique

La relation entre les deux expressions données ci-dessous est **fondamentale** en physique. Vous devez retenir leur égalité et les moyens de passer de l'une à l'autre.

Montrer que:

$$A\cos(x) + B\sin(x) = C\cos(x+\varphi)$$

avec $C = \pm\sqrt{A^2+B^2}$, $\tan\varphi = -\frac{B}{A}$ et $sign(\cos\varphi) = sign(\frac{A}{C})$.

1.4.1.2.1 Transformation d'une fonction cosinus ou sinus

Au delà de l'exemple d'application des propriétés précédentes, les conclusions sur les fonctions trigonométriques sont fondamentales car elles sont très utilisées et les éléments de vocabulaires introduits seront très importants pour la suite. Une simulation donnée ici[1] permet de voir l'effet des différents éléments sur le sinusoïde.

1.11: Exercice

Décrivez graphiquement comment s'effectue la transformation de la fonction cos(t) à la fonction $S_m\cos(\omega t+\varphi_0)$

1.4.1.3 Méthode: Calculer le module et l'argument d'un complexe

Le calcul de l'argument et du module d'un complexe est fondamental en physique car nous verrons que l'utilisation des complexes et la détermination de ces deux caractristiques permet l'étude de tout un pan de la physique: l'analyse fréquentielle.

1.12: Exercice

Déterminer le module est l'argument du complexe suivant (x est réel positif):

$$z = \frac{ix}{2+ix}$$

1.4.2 Applications : Bases

1.4.2.1 Equations

1.13: Equations

Résoudre les équations ou inéquations suivantes (l'inconnue est toujours x):

1. $x^2+3x-1=0$
2. $(x-3)(x-4)=1$
3. $(x-3)(x-4)=0$
4. $x^2+x=-1$
5. $e^{x^2}=k$ avec comme inconnue x
6. Déterminer x tel que $\frac{x+3}{x-2}=x$

[1] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12959

1.14: Systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivants (les inconnues sont x,y,z). **Vous devez utiliser la méthode par combinaison linéaire présentée.**:

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} 5x &= 3 - 4y \\ 3y &= 5x - 2 \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\tag{1.21}$$

1.4.2.2 Etude de fonctions

1.15: Limites de fonctions

Déterminer, en le justifiant, les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 4x^2 - 2$
2. $\lim\limits_{x \to 0} -3\frac{1}{x^3} + 4\frac{1}{x^2} - 2$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4x^2-2x-1}{-3x^3+2x^2-x-5}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x^3-2x-1}{-2x^2-x-5}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4x^3-2x-1}{-2x^3-x-5}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x^2-2x-1}{-2x^2-x-5}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} x - \ln(x)$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - e^{-x}$
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$
12. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$

1.16: Représentation graphique

Etudier complètement les fonctions suivantes puis réaliser un tracé graphique complet (points et caractéristiques importantes à faire apparaître sur le graphique).

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ sur $\mathbb{R}/2$
3. $f(z) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
4. $f(\gamma) = \cos(\gamma)$ sur $[0; 2\pi]$
5. $f(x) = e^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}^+$
6. $f(x) = x^2 \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On montrera que la fonction peut être prolongée en $x = 0$ et on déterminera la tangente en $x = 0$.
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ Déterminer le domaine de définition le plus large de la fonction puis l'étudier sur cet intervale.
8. $f(x) = \ln(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$

1.4.2.3 Nombres complexes

1.17: Caractéristiques

Déterminer les normes et arguments des complexes suivantes.

1. $z = 3 + 4j$
2. $z = 4 - 5j$
3. Les conjugués des deux complexes précédents
4. Leur somme puis leur produit
5. $z = 4e^{j\frac{\pi}{6}}$
6. $z = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$
7. Les conjugués des deux complexes précédents
8. Leur somme puis leur produit

1.4.3 Entrainement : Calcul littéral

1.4.3.1 Equations

1.4.3.1.1 Equation du second degré: Equations littérales

1.18: Equations

Résoudre les équations ou inéquations suivantes (l'inconnue est toujours x). Les grandeurs littérales sont toutes supposées positives.

1. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
2. $x^2 - (2f - d)x + fd = 0$
3. $kx^2 + 2(\sin(\theta) - \cos(\theta))x - \sin(2\theta) = 0$
4. $\frac{mv^2b^2}{2x^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{1}{2}mv^2$
5. $\frac{gy^2}{2v^2}x^2 - yx + (\frac{gy^2}{2v^2} + z) = 0$. Préciser l'inégalité que doivent vérifier g, v, y et z pour que cette équation possèdent des solutions réelles.
6. $ae^{-x/4} = \eta$ avec comme inconnue x

1.19: Systèmes d'équations

Résoudre les deux systèmes d'équations suivants (les inconnues sont x et y). Les grandeurs littérales sont supposées positives. **On utilisera la méthode des combinaisons linéaires.**

$$\begin{cases} E_1 - R_1x - R(x+y) & = 0 \\ E_2 - R_2y - R(x+y) & = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2x + kx - K(y-x) & = F_m \\ -m\omega^2y + ky + K(y-x) & = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

1.4.3.2 Etude de fonctions

1.20: Représentation graphique

Etudier complètement la fonction suivante puis réaliser un tracé graphique complet (points et caractéristiques importantes à faire apparaître sur le graphique). On réaliser différentes tracés en fonction du paramètre f de manière à caractériser les différents cas possibles dans les caractéristiques de la fonction.

1. $g(x) = \frac{fx}{x+f}$ sur $\mathbb{R}/\{-f\}$

1.4.3.3 Nombres complexes

1.21: Caractéristiques

Déterminer les normes et arguments des complexes suivant.

1. $z = 3 + jx$ avec $x < 0$
2. $z = (x-1) - j(x-3)$ avec $x > 0$
3. Les conjugués des deux complexes précédents
4. Leur somme puis leur produit
5. $z = 4e^{j\frac{\pi}{6\lambda}}$ avec λ positif.
6. $z = 2\omega e^{j\frac{\omega\pi}{3}}$ avec ω négatif.
7. Les conjugués des deux complexes précédents
8. Leur somme puis leur produit

1.4.4 Entrainement : Nouveautés

1.4.4.1 Equations

1.22: Résolution graphique

1. Déterminer graphiquement les conditions sur k pour qu'il existe une solution à l'équation $4x = k(e^x - 1)$ telle que $x > 0$.

1.4.4.2 Etude de fonctions

1.23: Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques $\cosh, \ \sinh, \ \tanh$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

1. Etudier chacune des trois fonctions (valeurs limites, monotonie…) et en déduire le tracé des trois fonctions.
2. Montrer que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.
3. Déterminer les domaines de définition des trois fonctions réciproques et l'allure graphique de leur tracé.

On limitera les calculs pour cette questions.

4. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 3$.

1.4.4.2.1 Transformations graphiques

En partant du tracé (connus) des fonctions usuelles, déterminer le tracé le plus complet possibles des fonctions suivantes (points et caractéristiques importantes à faire apparaître sur le graphique). One ne fera AUCUNE étude de fonction, on utilisera uniquement les transformations usuelles des fonctions pour réaliser ces tracés. On pourra réaliser des tracés intermédiaires si nécessaires.

1.24: Exercice

1. $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ connaissant le tracé de la fonction $\ln(x)$
2. $f(x) = 4\ln(1-x)$ sur $]-\infty; 1[$ connaissant le tracé de la fonction $\ln(x)$
3. $f(x) = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ connaissant le tracé de la fonction $\sin(x)$ Préciser la période de la fonction et représenter un tracé graphique sur 3 périodes.
4. $f(x) = 4\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$ connaissant le tracé de la fonction $\cos(x)$ Préciser la période de la fonction et représenter un tracé graphique sur 3 périodes.
5. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ sur $[-\pi; \pi]$ (retrouver une expression similaire aux expressions précédentes).
6. $f(t) = 4e^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$ connaissant le tracé de la fonction e^z. On précisera bien la tangente en $t = 0$ et l'intersection de celle-ci avec l'axe des abscisses.
7. $f(x) = 5(1 - e^{-x/3})$ sur $\mathbb{R}^+$ connaissant le tracé de la fonction e^z. On précisera bien la tangente en $t = 0$ et l'intersection de celle-ci avec l'asymptote de la fonction en $+\infty$.

1.4.4.3 Nombres complexes

1.25: Fractions de nombres complexes

Déterminer le module et l'argument des complexes suivant en fonction de x (réel strictement positif) et j le complexe dont le carré est égal à -1.

1. $z = \frac{1}{1+jx}$
2. $z = \frac{1}{1-x^2+3jx}$
3. $z = \frac{jx}{1-x^2+3jx}$
4. $z = \frac{-Kx^2}{1-LCx^2+jRCx}$ avec K, R, L, C positifs

CHAPTER

TWO

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

2.1: Compétences

- Identifier l'ordre d'une équation différentielle
- Résoudre une équation différentielle du premier ordre sans second membre
- Résoudre une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant
- Utiliser l'équation caractéristique d'une équation du second ordre pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre.
- Résoudre une équation différentielle du second ordre avec un second membre constant.
- Représenter graphiquement les solutions trouvées à pour une équation d'ordre 1 ou 2.

2.1 Equation différentielles linéaire et ordre

2.2: Equation différentielle et ordre.

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction à ses dérivées.
On appelle ordre d'une équation différentielle, le degré le plus haut de la dérivée intervenant dans l'équation différentielle. En physique, on n'apprendra à résoudre analytiquement des équations linéaires d'ordre 1 ou 2.

Important 2.1

Equation différentielle linéaire
Une équation différentielle est linéaire si elle peut se mettre sous la forme (y(t) est la fonction inconnue) :

$$a_n \frac{\mathrm{d^n y}}{\mathrm{dt^n}}(t) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d^{n-1} y}}{\mathrm{dt^{n-1}}}(t) + ... + a_1 \frac{\mathrm{d^1 y}}{\mathrm{dt^1}}(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

2.2 Equations différentielles: forme canonique et solution

2.2.1 Equation d'ordre 1

Important 2.2

Forme canonique d'une équation d'ordre 1. Une équation d'ordre 1 peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\tau}y(t) = f(t) \text{ équation avec second membre} \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\tau}y(t) = 0 \text{ équation sans second membre} \tag{2.2}$$

Important 2.3

Solution de l'équation sans second membre Toutes les solutions de l'équation **homogène**, c'est-à-dire sans second membre sont de la forme:

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

2.2.2 Equation d'ordre 2

Important 2.4

Forme canonique d'une équation d'ordre 2. Une équation d'ordre 2 peut se mettre sous la forme:

$$a\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt^2}} + b\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + cy(t) = f(t) \text{ équation avec second membre} \tag{2.3}$$

$$a\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt^2}} + b\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + cy(t) = 0 \text{ équation sans second membre} \tag{2.4}$$

On mettra en général l'équation sous la forme canonique:

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt^2}} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \omega_0^2 y(t) = g(t) \tag{2.5}$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt^2}} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \omega_0^2 y(t) = g(t) \tag{2.6}$$

On donnera des interprétations aux grandeurs ω_0, ξ et Q dans le cours d'électrocinétique.

Important 2.5

Equation caractéristique La détermination de la solution générale passe par la résolution de l'équation caractéristique:

$$ar^2 + br + c = 0$$

dont les solutions sont:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

Important 2.6

Solution de l'équation sans second membre Les solutions de l'équation **homogène**, c'est-à-dire sans second membre ont une forme différente suivant la nature des solutions de l'équation caractéristique.

- Cas 1: $\Delta > 0$, les racines $r_{1,2}$ sont réelles. La solution générale de l'équation homogène s'écrit:
$$f_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$
- Cas 2: $\Delta = 0$, il y a une racine double notée $r_0 = \frac{-b}{2a}$ et réelle. La solution générale de l'équation homogène s'écrit:
$$f_1(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}$$
- Cas 3: $\Delta < 0$, les racines $r_{1,2}$ sont complexes et conjuguées, on peut les écrire sous la forme $r_{1,2} = \lambda \pm j\Omega$. La solution générale de l'équation homogène est à valeur réelle et il est important d'en donner une expression qui fait apparaître ce caractère et qui permet de l'analyser physiquement. On l'écrit donc sous les formes:
$$f_1(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)e^{\lambda t} = C\cos(\Omega t + \phi)e^{\lambda t}$$

_Ω est appelée pseudo-pulsation.

2.3 Méthodes de résolution

Les corrections sont en ligne.

Important 2.7

Méthode de résolution Pour résoudre une équation différentielle, il faut suivre **scrupuleusement l'ordre de résolution** suivant:

1. Mettre en équation le problème et mettre l'équation sous forme canonique en reconnaissant l'ordre de l'équation.
2. Déterminer la solution générale (notée ici $f_1(t)$) de l'équation homogène (ESSM) soit directement (ordre 1), soit par analyse du discriminant de l'équation différentielle. **Ne pas chercher à déterminer les constantes d'intégration.**
3. Déterminer une solution particulière (notée ici $f_2(t)$) de l'équation avec second membre si il est non nul. Le seul cas où la méthode est à connaître est le cas d'un second membre constant. On cherche alors une solution particulière constante. **On ne fait pas de méthode de la variation de la constante en physique**. On verra aussi le cas d'un second membre sinusoïdal mais la méthode à connaître sera présentée dans un chapitre entier d'électrocinétique.
4. L'ensemble des solutions est alors de la forme $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$
5. Déterminer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales.

2.3.1 Résolution d'une équation d'ordre 1s

2.3: Exercice

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = E$$

avec f(0) = 0

2.3.2 Equation d'ordre 2

2.4: Exercice

On considère l'équation suivante avec R et C positifs:

$$R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dt}^2}+3RC\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}+u=E$$

avec u(0) = 0 et $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}(0)=0$

2.4 Application: Équations différentielles

Ces exercices d'application directe sont à faire à la suite du cours pour vérifier votre compréhension des méthodes. Vous pourrez confronter votre travail avec celui de vos camarades et poser des questions sur cet exercice en classe mais il ne sera pas donné de correction complète.

2.4.1 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

2.5: Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes. Si aucune condition initiale n'est donnée, ne pas déterminer les constantes d'intégration.

1. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+3y(t)=0$
2. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)-3y(t)=0$ avec $y(0)=2$
3. $5\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+3y(t)=1$ avec $y(1)=1$
4. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+\frac{\lambda}{m}y(t)=-v_0$ avec $y(0)=0$
5. $RC\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+y(t)=E$ avec $y(\alpha RC)=U_0$

2.4.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 2

2.6: Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes. Si aucune condition initiale n'est donnée, ne pas déterminer les constantes d'intégration.

1. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}(t)+5\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+4y(t)=0$ avec $\{y(0)=0;\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(0)=1\}$
2. $LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}(t)+RC\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+y(t)=E$ avec $\{y(0)=0;\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(0)=0\}$ et $RC<L/R$ (R,L et C sont positifs). _Vous pouvez garder la pseudo-pulsation Ω dans l'expression finale après avoir donné son expression.
3. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}(t)+\frac{R_aC_b+R_bC_b+R_aC_a}{R_aR_bC_aC_b}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(t)+\frac{1}{R_aR_bC_aC_b}y(t)=0$ avec $\{y(0)=0;\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(0)=v_0\}$. On montrera que les racines de l'équation caractéristique sont nécessairement réelles.

CHAPTER

THREE

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

3.1 Développements limités: principe général

Important 3.1

Développements limités Soit une fonction f définie et n fois dérivable au voisinage d'un point x_0. Soit un point x situé dans ce voisinage, alors on a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \epsilon(x)(x - x_0)^n$$

où $f^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée de la fonction f et $\epsilon(x)$ est une fonction tendant vers 0 quand x tend vers x_0.

3.2 Fonctions usuelles

Important 3.2

Développements limités usuels Si la fonction est inconnue, on doit utiliser la formule ci-dessus. On utilise néanmoins souvent les mêmes formules en physique, il est donc bon de connaître leur développement (qu'on peut utiliser directement). Ils s'agit de fonctions usuelles prises autour du point $x_0 = 0$.

$$(1+x)^a =_0 1 + ax + \frac{a(a+1)}{2}x^2 + \cdots \qquad =1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\prod_{j=0}^{j=k-1}(a-j))x^k + o(x^n) \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{1+x} =_0 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n) \tag{3.2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^(k-1)}{k}x^k + o(x^n) \tag{3.3}$$

$$e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x)^k}{k!} + o(x^n) \tag{3.4}$$

$$\cos(x) =_0 1 - \frac{x^2}{2} \qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}) \tag{3.5}$$

$$\sin(x) =_0 x - \frac{x^3}{6} \qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

3.3 Manipulation des développements limités

En physique, on utilise souvent les formules courantes données ci-dessus. Associées à la "composition" des fonctions, on peut en général s'en sortir. On peut en effet utiliser les opérations usuelles pour les développements limités. Mais certaines règles sont à respecter.

Important 3.3

Opérations sur les développements limités Règle générale: si l'on fait un développements limités à l'ordre N, alors on ne doit garder **QUE** les termes de degré inférieurs où égal dans les DL et **TOUS** les termes de degré inférieurs où égal dans les DL.
Addition et soustraction: Il faut faire attention à une règle: si aucun ordre n'est précisé, cela signifie qu'on attend un résultat non nul. Donc si on obtient un résultat nul à l'ordre n, il faut reprendre le calcul à l'ordre n+1.
Multiplication: on peut multiplier des DL mais il faut faire très attention car si on fait un DL à l'ordre n, il faut garder TOUT les termes d'ordres inférieur ou égal à n et UNIQUEMENT ces termes: les termes d'ordre supérieur doivent être enlevés.
Composition de fonctions: on peut appliquer un DL usuels à une fonction simple, on peut aussi composer 2 DL en respectant la même règle que pour la multiplication et en vérifiant bien qu'on peut le faire: si on fait le DL de $g(f(x))$ en $x = 0$, on utilise la formule du DL de f en $x = 0$ et la formule du DL de g en $y = f(0)$.
Division: il est possible de diviser des DL mais le principe est moins directe que la multiplication (cours de math). On utilise souvent le DL de $\frac{1}{1+x}$.

3.4 Méthode: Approximation en physique

On aura très rarement une variable x qui tend explicitement vers 0. Les DL sont avant tout utilisés en physique comme des approximations pour des études de comportements asymptotiques ou la simplification d'équations différentielles complexes (linéarisation => ordre 1). Une approximation revient en général à négliger un terme devant un autre, c'est-à-dire qu'on aura souvent comme condition $r \ll a$*, c'est-à-dire r négligeable devant a. C'est alors la grandeur* $\frac{r}{a}$ *qui tend vers 0: on fera donc un DL limité de la fonction quand* r/a *tend vers 0.*

3.1: Exercice

On est arrivé au résultat suivant: $PM = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$ (PM est une longueur). On cherche à simplifier cette expression dans le cas où $r \gg a$.

CHAPTER

FOUR

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

4.1: Compétences

- Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace de dimension inférieure ou égale à 3.
- Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.
- Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
- Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe.
- Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel.
- Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
- Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.
- Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
- Connaître le lien entre le gradient et la différentielle.
- Connaître l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques.
- Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Le but de ce cours est avant tout d'avoir une maîtrise du calcul vectoriel et une comprehension physique de la géométrie dans l'espace.

Il ne s'agit pas ici de faire un cours d'algèbre linéaire générale. Nous allons ici étudier des notions relativement générales uniquement à travers l'exemple de la géométrie dans l'espace. Plusieurs définitions seront ainsi introduites "à la main" et certaines propriétés seront admises.

4.1 Géométrie vectorielle: Généralités

Les définitions données ici ne sont pas à apprendre pour la physique. Elles sont là pour cadrer correctement le cours de physique. On utilisera leur version “opératoire” basée sur la vision des vecteurs introduits au lycée.

4.1.1 Espace vectoriel: Définition

Important 4.1

Combinaison linéaire Une combinaison linéaire est une somme vectorielle qui peut s'écrire $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{u_i}$.

4.1.2 Famille et base (en ligne)

4.1.3 Produit scalaire

Un produit scalaire (noté $\cdot$) de E est une forme bilinéaire définie positive symétrique. C'est-à-dire:

- Un forme bilinéaire est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ (En toute rigueur, elle a ses images dans le corps $\mathbb{K}$ associé à l'espace vectoriel. Pour nous, c'est toujours $\mathbb{R}$.) linéaire à gauche est à droite:
  - linéaire à gauche: $(\lambda\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot \vec{v} = \lambda(\overrightarrow{u_1} \cdot \vec{v}) + \overrightarrow{u_2} \cdot \vec{v}$
  - linéaire à droit: $\vec{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \lambda(\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1}) + \vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2}$
- Elle est symétrique si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Elle est positive si $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ quelque soit $\vec{u}$
- Elle est définie si (Si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$)

Attention

Le produit scalaire est à valeur dans K (pour nous dans $\mathbb{R}$), c'est-à-dire qu'**il renvoie un scalaire et non un vecteur**.

4.1.4 Norme euclidienne (en ligne)

4.1.5 Base orthonormée (en ligne)

4.1.6 Méthode: Calcul d'un produit scalaire

Comme nous allons le voir à travers un exemple, on utilise rarement les angles pour calculer les produits scalaires mais plutôt la décomposition des vecteurs dans une base orthonormée.

4.2: Exercice

Soit E un R-espace vectoriel muni du produit scalaire $\cdot$ et une base base orthonormée de E $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On considère deux vecteurs dont les décompositions dont la base orthonormée sont:

$$\vec{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$$
$$\vec{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} + u_3\overrightarrow{e_3}$$

Déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

4.2 Géométrie dans le plan

4.2.1 Produit scalaire usuel du plan

On rappelle que:

- la valeur de l'angle en radian est égale, en valeur absolue, à la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 et de centre O délimité par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- le signe de θ est défini par convention, **dans le plan**, comme positif dans le sens trigonométrique et négatif dans l'autre sens.

4.2.2 Coordonnées cartésiennes

Important 4.2

Coordonnées cartésiennes Dans le plan, on peut définir une base orthonormée $(\overrightarrow{e_x}; \overrightarrow{e_y})$ et lui associer un point origine O. Le triplet $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ défini un **repère** orthonormée. On lui associe un système de coordonnée cartésien. Les coordonnées (x,y) d'un point M du plan dans le repère correspond aux composantes (scalaires) du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$.
Le repère ainsi défini est dit $global$ car les vectaurs de la base associée ne dépendent pas du point M considéré dont on veut exprimer les coordonnées.

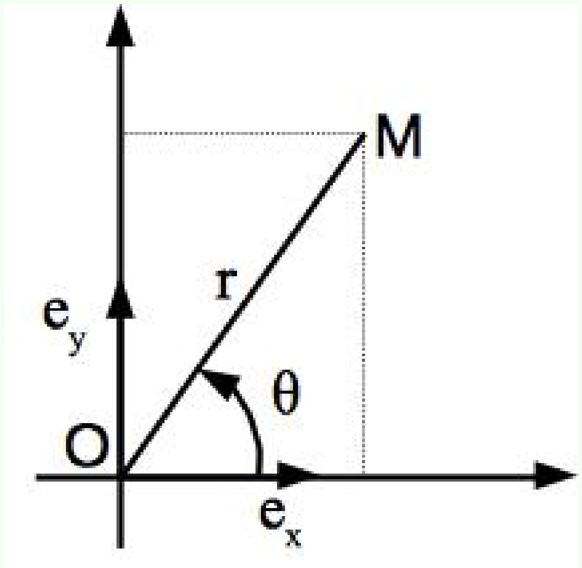
4.2.3 Coordonnées polaires

4.2.3.1 Définition

Important 4.3

Système de coordonnées polaires. Soit un point M du plan et un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. On définit les coordonnées polaires du M dans un système de centre O et d'origine des angles $\overrightarrow{e_x}$ comme les coordonnées (r, θ) où:

- r est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$
- θ est l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{e_x}; \overrightarrow{OM})$ (avec $\theta \in [0; 2\pi[$)

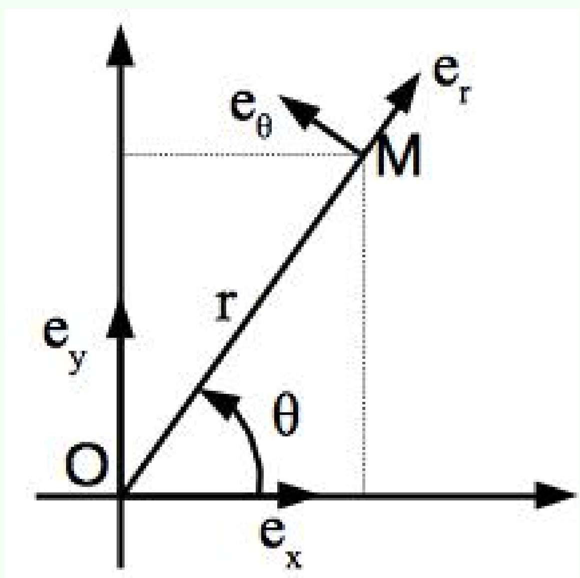


Important 4.4

Base polaire Soit un point M de coordonnées polaires (r, θ) dans un système de coordonnées polaires de centre O et d'axe $\overrightarrow{e_x}$, on lui associe une base locale orthonormée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ telle que:

- $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$
- $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur tel que $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ soit orthonormée et $(\overrightarrow{e_r}; \overrightarrow{e_\theta}) = +\pi/2$. Le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est alors tangent au cercle de centre O et de rayon r dans le sens des θ croissants.

On parle de base **locale** car les vecteurs de la base dépendent du point M.



4.2.3.2 Méthodes

4.3: Correspondance cartésien polaire

Exprimer la coordonnées r en fonction de x et y les coordonnées du même point M dans un repère cartésien puis exprimer x et y en fonction de r et θ.
Exprimer ensuite les vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de θ.

4.4: Produit scalaire

Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y}$ et du vecteur $\vec{v} = v_r\overrightarrow{e_r}$.

4.3 Géométrie dans l'espace

Tout ce qui a été dit en introduction reste vrai et nous allons voir que de nombreuses propriétés du plan restent vraies. On pourra ainsi redéfinir les coordonnées cartésiennes en rajoutant simplement la troisième coordonnée (z suivant un vecteur $\overrightarrow{e_z}$).

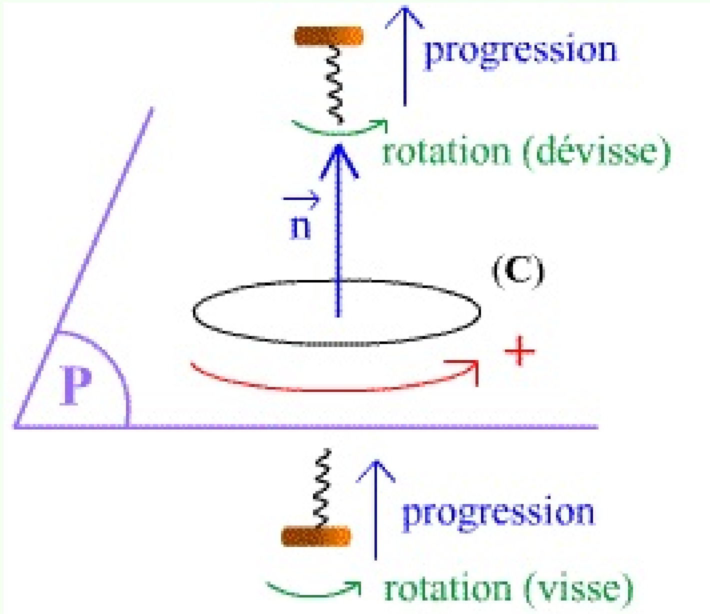
4.3.1 Angle orienté

Lorsqu'on s'intéresse à l'orientation des angles, on ne peut plus définir de "sens trigonométrique" (tout dépend de quel coté on regarde le plan!).

Important 4.5

Orientation d'un plan Soit un plan (Π) de l'espace, on oriente le plan par un vecteur normal au plan $\vec{n}$. Les angles sont alors orientés en cohérence avec le vecteur normal $\vec{n}$, c'est-à-dire:

- Règle du tire-bouchon: Un tire-bouchon se vissant dans le sens de $\vec{n}$ tourne dans le sens des angles de (Π) comptés positivement.
- Règle de la main droite: Si l'on place le majeur **de la main droite** dans le sens de $\vec{n}$, les angles allant du pouce vers l'index sont comptés positivement.



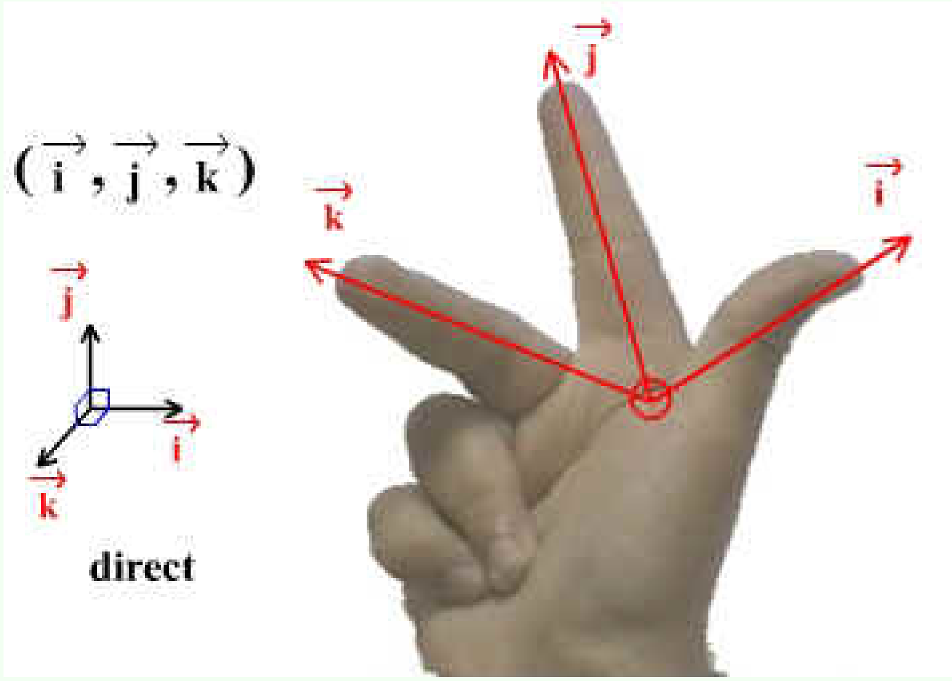
4.3.2 Base directe et produit vectoriel

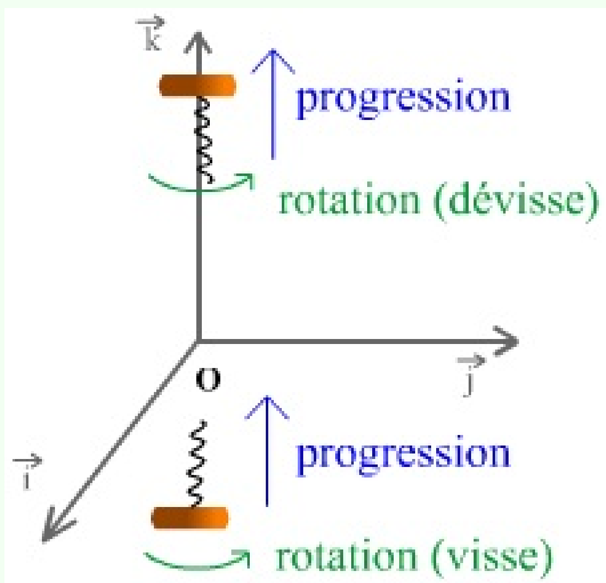
4.3.2.1 Base directe

Important 4.6

Trièdre directe Soit trois vecteurs de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte qu'aucun ne soit colinéaire à un autre vecteur du triplet, on dit qu'ils forme un trièdre directe si:

- règle de la main droite: l'on peut superposer simultanément $\vec{i}$ au pouce de la main droite, $\vec{j}$ à l'index de la main droite et $\vec{k}$ au majeur de la main droite.
- règle du tire-bouchon: un tire-bouchon vissant dans le sens de $\vec{i}$ amène $\vec{j}$ sur $\vec{k}$ en un quart de tour (et pas trois quart de tour)





En physique, on travaillera toujours avec des **bases orthonormées directes.**

4.3.2.2 Produit vectoriel

Produit vectoriel Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, on définit le produit vectoriel $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ comme le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que:

- $\|\overrightarrow{w}\| = \|u_1\| \, \|u_2\| \, |\sin(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})|$
- Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est perpendiculaire au plan (Π) formé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
- Le sens de $\overrightarrow{w}$ est tel que le trièdre $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{w})$ est direct.

Important 4.7

Propriété d'un produit vectoriel

- Bilinéarité du produit vectoriel
- Antisymétrie: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, leur produit vectoriel est nul. En particulier, le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul.

Ces propriétés sont fondamentales pour le calcul d'un produit vectoriel.

Important 4.8

Vecteur d'une base orthonormée direct Considérons $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ une base orthonormée directe. On a:

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} \tag{4.1}$$
$$\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y} \tag{4.2}$$
$$\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \tag{4.3}$$
$$\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{e_z} \tag{4.4}$$
$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{e_y} \tag{4.5}$$
$$\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_y} = -\overrightarrow{e_x} \tag{4.6}$$

4.3.2.3 Méthode: Calculer un produit vectoriel

Nous allons voir ici comment calculer un produit vectoriel.

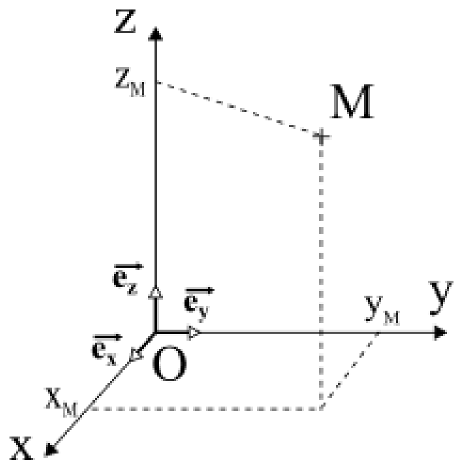
4.5: Exercice

Soit une base orthonormée direct $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. On considère deux vecteurs $\vec{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y}$ et $\vec{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_z\overrightarrow{e_z}$. Calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

4.3.3 Coordonnées cartésiennes

On définit notament un repère cartésien comme un repère orthonormé direct: $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ où $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ forme un trièdre direct.

Il s'agit à nouveau d'un repère global.



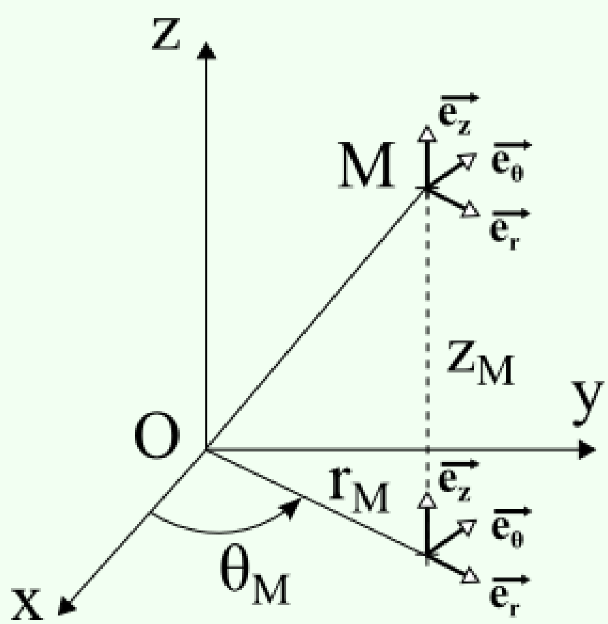
4.3.4 Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques revient à repérer le point M sur les bords d'un cylindre. Il faut alors le rayon et la hauteur du cylindre et l'angle de rotation par rapport à une référence.

Important 4.9

Coordonnées cylindriques. Soit un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, soit un point M quelconque de l'espace et H son projeté orthogonal dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. On définit les coordonnées cylindriques (d'axe Oz) de M notées (r, θ, z) par:

- $r = OH$
- $\theta = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH})$, le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ étant orienté par $\overrightarrow{e_z}$
- z: coordonnées cartésiennes suivant$\overrightarrow{e_z}$ \end{itemize}



4.6: Base cylindrique

On définit la base **locale** cylindrique (cf. figure précédente) associée au point M par la famille $(\overrightarrow{e_r}; \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ tel que:

- $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur de la base cartésienne.
- vecteur radiale: $\overrightarrow{e_r}$ est défini tel que $\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{e_r}$.
- vecteur orthoradiale: $\overrightarrow{e_\theta}$ tel que la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ soit une base orthonormée directe soit: $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}$

Attention

- $\overrightarrow{e_\theta}$ pointe toujours dans le sens des θ croissants.
- C'est une base locale, cela veut dire que les vecteurs dépendant du points M. Autrement dit, si l'on suit un point M mobile, les vecteurs de la base varieront au cours du temps.

4.3.5 Coordonnées sphériques

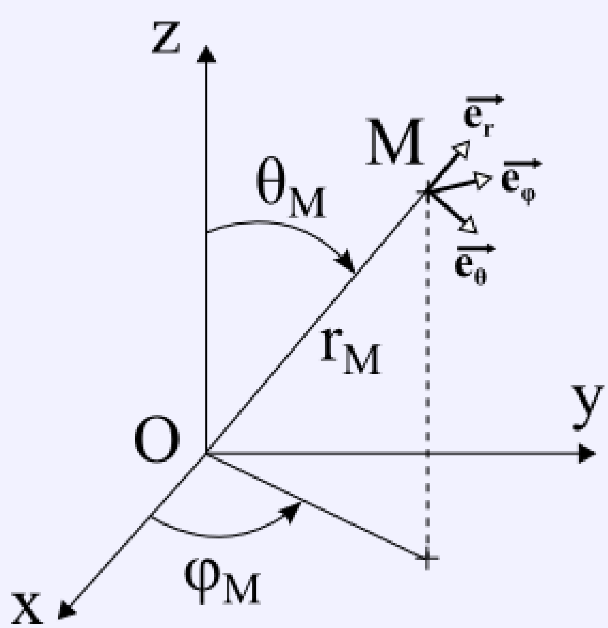
Les coordonnées sphériques reviennent à placer le point M sur une sphère et repérer ses coordonnées. Il faut ainsi le rayon de la sphère et deux coordonnées angulaires pour le placer sur la sphère. A l'image du repérage sur le globe terrestre, on utilisera un axe de référence (l'âxe des pôles) pour définir la **colatitude** (on ne travaille pas avec la latitude pour des raisons mathématiques non développées ici) et un méridien de référence pour définir la longitude (ou azimuth).

4.3.5.1 Définition

4.7: Coordonnéees sphériques

Soit un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, soit un point M quelconque de l'espace et H son projeté orthogonal dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. On définit les coordonnées sphériques (d'axe Oz) de M notées (r, θ, ϕ) par:

- $r = OM$
- Colatitude: $\theta = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM})$ avec $\theta \in [0; \pi]$
- Azimuth: $\phi = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH})$ avec $\phi \in [0; 2\pi]$. Le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ étant orienté par $\overrightarrow{e_z}$



Attention

Définition des angles Il faut noter la différence de domaine de définition de θ et ϕ. Elle est cruciale pour que chaque point possède un jeu de coordonnées uniques.

Important 4.10

Base sphérique On définit la base **locale** sphérique (cf. figure précédente) associée au point M par la famille $(\overrightarrow{e_r}; \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi})$ tel que:

- vecteur radiale: $\overrightarrow{e_r}$ est défini tel que $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e_r}$.
- vecteur azimutal: $\overrightarrow{e_\phi} = \overrightarrow{e_z} \wedge \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$: il est dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ perpendiculaire à (OH) dans le sens des ϕ croissants.
- $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\phi} \wedge \overrightarrow{e_r}$: il est dans le plan du méridien, orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ et dans le sens des θ croissants.

4.3.5.2 Relation sphérique-cartésien

Il est extrêmement important de savoir passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes et réciproquement.

4.8: Exercice

Exprimer la coordonnées radiale r en fonction de x, y et z et les coordonées x,y et z en fonction des coordonnées sphériques.
Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésiennes en faisant intervenir les coordonnées angulaires du point M.

4.4 Dérivation d'un vecteur

On va considérer ici un vecteur $\vec{u}$ qui dépend d'un paramètre ξ (en général il dépendra du temps mais on va ici traiter un cas général). Le but est de pouvoir exprimer la dérivée du vecteur $\vec{u}$ en fonction des dérivées de ses composantes.

4.4.1 Dérivée d'un vecteur

Il ne s'agit pas de donner ici une définition complète de la dérivée vectorielle mais de proposer des méthodes de calculs de telles dérivées.

On considère un vecteur $\vec{u}$ dépendant d'une variable ξ. On peut associer à ce vecteur un point M dont les coordonnées dépendent de ξ (ça peut être un vecteur position, un vecteur vitesse…).

On pourra donc écrire le vecteur dans les différents systèmes de coordonnées:

$$\vec{u}(\xi) = u_x(\xi)\overrightarrow{e_x}(\xi) + u_y(\xi)\overrightarrow{e_y}(\xi) + u_z(\xi)\overrightarrow{e_z}(\xi)$$
$$\vec{u}(\xi) = u_r(\xi)\overrightarrow{e_r}(\xi) + u_\theta(\xi)\overrightarrow{e_\theta}(\xi) + u_z(\xi)\overrightarrow{e_z}(\xi)$$
$$\vec{u}(\xi) = u_r(\xi)\overrightarrow{e_r}(\xi) + u_\theta(\xi)\overrightarrow{e_\theta}(\xi) + u_\varphi(\xi)\overrightarrow{e_\varphi}(\xi)$$

Attention

Dans la plupart des cas, la dépendance des vecteurs en ξ est **implicite**. En effet, celà vient du fait que ces vecteurs dépendant implicitement des coordonnées du point M qui dépendent de ξ. Il est donc rare de voir le (ξ) derrière ces vecteurs. Il ne faut pourtant pas oublier qu'ils varient.

4.4.2 Dérivées angulaires: Cas cylindriques

On a vu qu'il fallait connaître la dérivée angulaire (par rapport à la coordonnées angulaires) des vecteurs de la base cylindriques. On rappelle que le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ ne dépend pas des coordonnées. Pour les deux autres vecteurs on va:

- exprimer ces vecteurs dans une base globale: la base cartésiennes associées
- dériver les expressions par rapport aux angles (ici il n'y a que θ)
- chercher à réexprimer la grandeurs trouvées dans la base cylindriques.

Dérivée du vecteur radiale.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{e_\theta}}
\end{aligned}$$

Dérivée du vecteur orthoradiale

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\overrightarrow{e_x} - \sin\theta\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{e_r}}
\end{aligned}$$

4.4.3 Dérivées angulaires: Coordonnées sphériques

On a vu qu'il fallait connaître la dérivée angulaire (par rapport aux coordonnées angulaires) des vecteurs de la base sphériques. On va:

- exprimer ces vecteurs dans une base globale: la base cartésiennes associées
- dériver les expressions par rapport aux angles.
- chercher à réexprimer la grandeurs trouvées dans la base sphérique.

Dérivée du vecteur azimuthal.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\cos\varphi\overrightarrow{e_x} - \sin\varphi\overrightarrow{e_y}\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\cos\varphi\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \cos\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\theta} + \cos\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_r}\right)\\
&-\sin\varphi\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\theta} + \sin\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_r}\right)\\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\cos\theta\overrightarrow{e_\theta} - \sin\theta\overrightarrow{e_r}}
\end{aligned}$$

Dérivée du vecteur radiale. On rappelle que dériver partiellement par rapport à θ à φ constant signifie que l'on va considérer dans les expressions φ comme un paramètre de la fonction et non plus comme une variables (et inversement quand on dérivée par rapport à φ).

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_r} = \cos\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_y} + \cos\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta} = \cos\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_y} - \sin\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \boxed{\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta} = \overrightarrow{e_\theta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_r} = \cos\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_y} + \cos\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_y} \\
&\implies \boxed{\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta \overrightarrow{e_\phi}}
\end{aligned}$$

Dérivée du vecteur orthoradiale

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_\theta} = \cos\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_y} - \sin\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} = -\cos\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_x} - \sin\varphi \sin\theta \overrightarrow{e_y} - \cos\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \boxed{\frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} = -\overrightarrow{e_r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_\theta} = \cos\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_y} - \sin\theta \overrightarrow{e_z} \\
&\implies \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \cos\theta \overrightarrow{e_y} \\
&\implies \boxed{\frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta \overrightarrow{e_\phi}}
\end{aligned}$$

4.4.4 Dérivée d'un vecteur

4.9: Exercice

On considère un point M dont les coordonnées sont dans un repère cylindrique (la base cylindrique est notée $((\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}))$:

$$\begin{aligned}
r(t) &= e^{3t} \\
\theta(t) &= 3t \\
z(t) &= 3t
\end{aligned}$$

On considère le vecteur $\vec{u}(t) = r^2 \overrightarrow{e_r} + \sin\theta \overrightarrow{e_\theta}$. Déterminer la dérivée du $\vec{u}$ par rapport au temps.

4.5 Champs scalaires et champs vectoriels

Nous allons être très souvent confrontés à des grandeurs définies en tout l'espace (ou portion). On parlera de ***champ****. On peut citer l'énergie potentielle qui peut se définir en tout point de l'espace.*

4.5.1 Champ vectoriel et champ scalaire

Important 4.11

Champ vectoriel et champ scalaire Soit une fonction f qui associe à tout point de l'espace un réel (un scalaire). On dit que f est un champ scalaire.
Soit une fonction f qui associe à tout point de l'espace un vecteur. On dit que f est un champ vectoriel. Par convention, on note les champs vectoriels avec une flèche comme des vecteurs.

4.5.2 Dérivation et différentielle

4.5.2.1 Dérivées partielles

Important 4.12

Dérivées partielles Soit un champ scalaire $f(x, y, z)$, on définit la dérivée partielle $(\frac{\partial f}{\partial x})_{y,z}(x_0, y_0, z_0)$ comme la dérivée en $x = x_0$ de la fonction g qui à x associe $g(x) = f(x, y_0, z_0)$.
Cela revient à traiter f comme une fonction d'une variable où y et z sont des constantes. On parle de dérivée partielle de f par rapport à x à y et z constants.

4.5.2.2 Calcul de dérivées partielles

4.10: Exercice

On considère les fonctions:

$$f(x, y) = xy^2$$
$$g(r, \theta) = r \sin \theta$$

Calculer toutes les dérivées partielles.

4.5.2.3 Déplacement infinitésimal

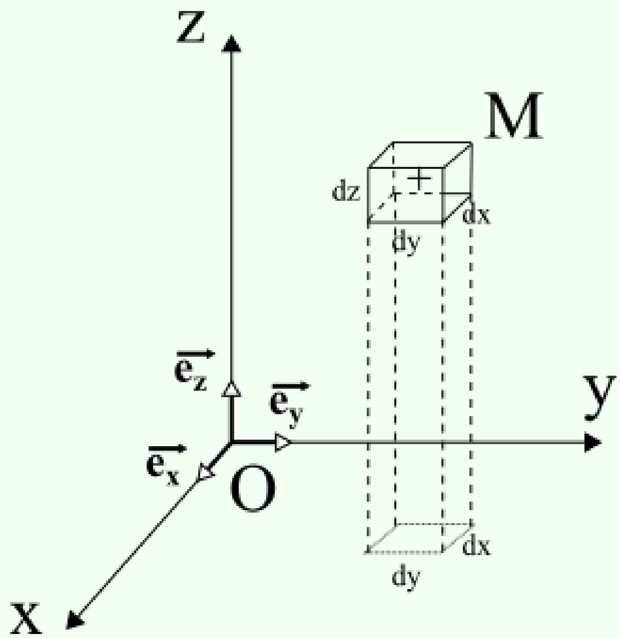
Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ correspond à un déplacement infinitésimal (c'est-à-dire tendant vers O) à partir du point M vers un point M': $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'}_{M' \to M}$.

Important 4.13

Déplacement infinitésimal en coordonnées cartésiennes. On rappelle qu'on passe d'un point $M(x, y, z)$ à un point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$. Il vient que le déplacement élémentaire est:

$$\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$$

En effet, on observe sur le schéma suivant que l'on peut décomposer le vecteur en une somme de trois vecteurs dans chaque direction Ox, Oy et Oz de distance respectives dx, dy et dz.



Important 4.14

Déplacement infinitésimal en coordonnées cartésiennes. Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$$

La démonstration est en ligne.

Important 4.15

Déplacement infinitésimal en coordonnées sphériques. Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

La démonstration est en ligne.

4.5.2.4 Différentielle

Attention, il ne s'agit pas d'une définition mathématique mais d'une description physique permettant de raisonner.

DifférentielleConsidérons un point M de l'espace et un déplacement infinitésimal quelconque $\overrightarrow{dOM}$.

La différentielle df du champ scalaire f autour du point M est la variation infinitésimale de f du point M vers un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dOM}$.

Expression générale de la différentielle. (Admis) La différentielle du champ f en un point M de coordonnées (ξ, ζ, η) est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta$$

où (ξ, ζ, η) représentent les 3 coordonnées du point M dans un système de coordonnées.

4.5.3 Gradient

4.5.3.1 Gradient

Important 4.16

Gradient On définit le gradient de la fonction f en en un point M comme le vecteur noté $\overrightarrow{grad} f$ tel que:

$$df = \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où df est la variation infinitésimale de f à partir du point M en suivant le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$.

4.5.3.2 Propriétés du gradient

Avant d'établir les expressions du gradient dans chaque système de coordonnées, on va déjà établir certaines propriétés intéressantes du gradient.

Important 4.17

Intégration du gradient A l'image de la dérivée, on peut "intégrer" le gradient pour trouver une variation de la fonction f:

$$\Delta f = f(B) - f(A) = \int_{\Gamma(A \to B)} \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dl}$$

L'intégrale proposée ici est appelée "intégrale de chemin" car on va intégrer le produit scalaire $\overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dl}$ sur un chemin allant de A vers B. Dans ce cas, le déplacement élémentaire doit être tangent au chemin, ce qui conditionne a priori son expression (les déplacements élémentaires sont dépendants les uns des autres). Le calcul d'une intégrale de chemin sera explicitée en cours de physique (pour des calculs de travail d'une force).

Ici le chemin pour l'intégrale n'a pas d'importance: l'intégrale d'un gradient **ne dépend pas du chemin parcouru**. Elle se résume toujours à la différence des valeurs de la fonction f aux points A et B. C'est une caractéristique fondamentale qu'on réutilisera lorsqu'on parlera des forces dérivant d'une énergie potentielle.

4.5.3.3 Expressions du gradient

On rappelle que la différentielle s'écrit suivant le système de coordonnées choisi (précisons qu'a priori, l'expression de f dépend des coordonneés choisies):

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$df(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$df(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$

On veut pouvoir déterminer l'expression du gradient qui sera le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ tel que $df = \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dOM}$. On va donc utiliser les expressions du déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonneés: $\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$.

Important 4.18

Expression du gradient dans les systèmes de coordonnées En identifiant chaque terme du produit scalaire, il vient directement que:

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{grad}f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{grad}f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

4.6 Applcations : Géométrie vectorielle

4.6.1 Théorème d'Al Kashi

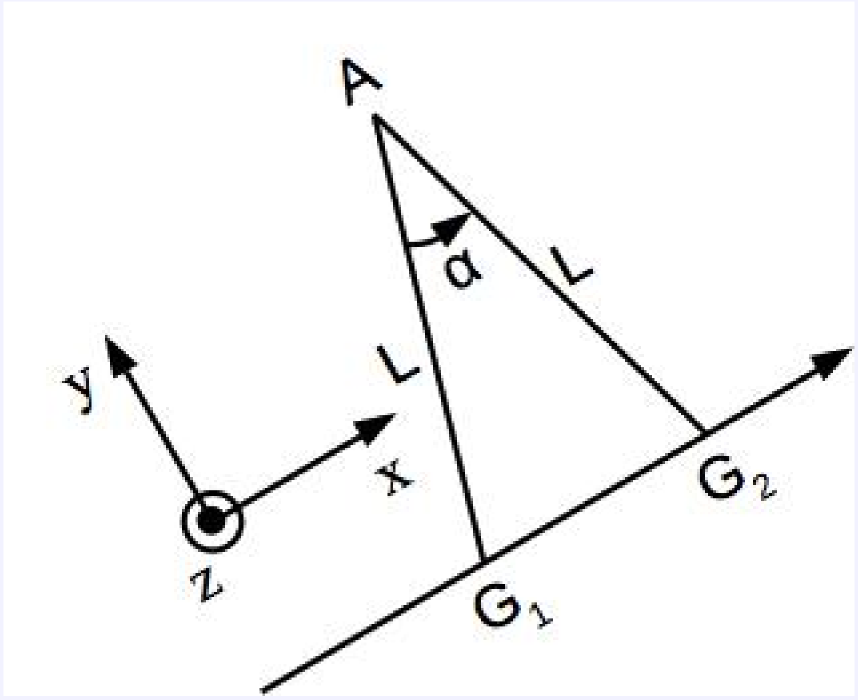
4.11: Exercice

Démontrer le théorème d'Al Kashi à l'aide de la géométrie vectorielle.

4.6.2 Géométrie vectorielle

4.12: Exercice

On considère la figure suivante. On note $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\vec{z}$ et α est un angle fixe.



1. Déterminer les expressions des vecteurs $\overrightarrow{G_1A}$ et $\overrightarrow{G_2A}$
2. Déterminer les expressions des vecteurs $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{G_1A}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{G_1G_2}$.
3. Représenter graphiquement $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ (on fera surtout attention à la direction et au sens du vecteur).

4.6.3 Angles d'Euler

4.13: Exercice

On considère un repère cartésien $\mathfrak{R}_1$ $(O, \overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y_1}}, \overrightarrow{e_{z_1}})$. On définit trois autres repères cartésiens:

- le repère $\mathfrak{R}_2$ $(O, \overrightarrow{e_{x2}}, \overrightarrow{e_{y_2}}, \overrightarrow{e_{z_1}})$ obtenu par rotation de $\mathfrak{R}_1$ d'un angle θ autour de $\overrightarrow{z_1}$
- le repère $\mathfrak{R}_3$ $(O, \overrightarrow{e_{x3}}, \overrightarrow{e_{y_2}}, \overrightarrow{e_{z_3}})$ obtenu par rotation de $\mathfrak{R}_2$ d'un angle ϕ autour de $\overrightarrow{y_2}$
- le repère $\mathfrak{R}_4$ $(O, \overrightarrow{e_{x3}}, \overrightarrow{e_{y_4}}, \overrightarrow{e_{z_4}})$ obtenu par rotation de $\mathfrak{R}_3$ d'un angle ψ autour de $\overrightarrow{x_3}$

1. Représenter sur un schéma les quatres repères. Commenter la difficulté de raisonner sur un tel schéma.
2. Représenter des plans de coupe d'axe perpendiculaire $\overrightarrow{z_1}$, puis $\overrightarrow{y_2}$ puis $\overrightarrow{x_3}$. Représenter pour chaque coupe les vecteurs des repères contenus dans ces plans et les angles ϕ, θ, ψ lorsqu'ils apparaissent.
3. Soit un point A de coordonnées (x_4, y_4, z_4) dans $\mathfrak{R}_4$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans le repère $\mathfrak{R}_1$ en fonction de $x_4, y_4, z_4, \phi, \theta$ et ψ.