Ondes

C. Lacpatia

Aug 03, 2023

CONTENTS

CHAPTER

ONE

DESCRIPTION DES ONDES

1.1: Compétences

- Prévoir dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
- Etablir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase (=célérité)
- Reconnaître des formes de propagation : plane, circulaire, sphérique.

1.1 Comprendre le contexte

1.1.1 Définition générale

Important 1.1

Onde
Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

- Elle se déplace avec une vitesse déterminée qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation. On appelle cette vitesse la **célérité** de l'onde dans le milieu.

1.1.2 Modélisation mathématique de la propagation d'ondes

1.1.2.1 Onde progressive

Mise en situation : Supposons une onde se propageant avec une célérité v. Elle est caractérisée par une grandeur y dont on note l'expression en un point M à un instant t $y(M,t)$

Important 1.2

Forme mathématique d'une onde (1) L'expression de y au point B et notée $y(B,t)$ est la même que l'expression de y au point A mais **retardée** du temps Δt_{AB} correspondant au retard à la propagation entre A et B:

$$y(B,t) = y(A, t - \Delta t_{AB})$$

1.2: Cas particuliers utiles (à connaître)

Propagation rectiligne dans un milieu homogène.

- Si la propagation est rectiligne, on peut choisir un repère où l'axe Ox est suivant la direction de propagation.
  - On peut choisir un point d'abscisse de référence, souvent le point source, $x = 0$ où l'onde émise à pour expression $y(x = 0, t) = g(t)$.
- Si l'onde de propage suivant les x positifs, le temps mis pour atteindre un point M d'abscisse x est $\frac{x}{v}$ et la forme mathématique devient:
$$y(x, t) = g(t - \frac{x}{v})$$
- Si l'onde de propage suivant les x négatifs (on parle d'onde régressive), le temps mis pour atteindre un point M d'abscisse x est $-\frac{x}{v}$ (on passe en M avant O si $x > 0$) et la forme mathématique devient:
$$y(x, t) = g(t + \frac{x}{v})$$

Important 1.3

Forme mathématique d'une onde (2)
Propagation rectiligne dans un milieu homogène.
Considérons la forme de l'onde $y(x, t_1)$ à un instant t_1 en tout point x de l'axe. La forme spatiale de l'onde à un instant t_2 est noté $y(x, t_2)$.

- Si l'onde se propage suivant les x positifs, alors:
$$y(x, t_2) = y(x - v(t_2 - t_1), t_1)$$
- Si l'onde se propage suivant les x négatifs, alors:
$$y(x, t_2) = y(x + v(t_2 - t_1), t_1)$$

1.1.2.2 Onde progressive harmonique

Important 1.4

Ondes progressive harmonique (OPH) Une onde sinusoïdale est une onde dont la forme est un sinusoïde $g(t) = g_m \cos(\omega t)$. Si elle est émise d'un point S, l'amplitude en un point M sera:

$$y(M, t) = y(S, t - \Delta t) = g_m \cos\left(\omega(t - \Delta t)\right)$$

Important 1.5

Cas rectiligne et homogène

- Une onde progressive sur un axe Ox suivant les x croissants aura pour amplitude:
$$y(x, t) = g_m \cos(\omega t - \omega\frac{x}{v}) = g_m \cos(\omega t - kx)$$
- De même pour une onde progressant suivant les x négatifs:
$$y(x, t) = g_m \cos(\omega t + \omega\frac{x}{v}) = g_m \cos(\omega t + kx)$$
- **Pulsation/Fréquence/Période temporelle:** ω; $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- **La longueur d'onde (ou période spatiale)** λ est la distance minimale qui sépare deux positions où la perturbation est la même à chaque instant.
- **Le nombre d'onde** est définie par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

1.1.3 Exemples d'ondes (en ligne)

1.1.3.1 Corde vibrante. Onde mécanique

1.1.3.2 Ondes acoustiques

1.1.3.3 Ondes à la surface d'un fluide

1.1.3.4 Ondes électriques

1.1.3.5 Ondes électromagnétiques

1.1.4 Front d'onde et diffraction

1.1.4.1 Source lumineuse

Important 1.6

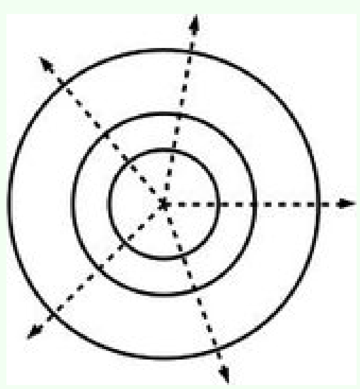
Point source lumineux

- Un point source lumineux est un point émettant une onde lumineuse dans une ou plusieurs direction. On lui associe en général un cône d'émission (qui peut-être toute la sphère) ainsi qu'un spectre d'émission.
- Un point source monochromatique est un point source émettant une lumière monochromatique.

1.1.4.2 Front d'onde

Important 1.7

Surface d'onde Une surface d'onde (où front d'onde) est l'ensemble des points possédant la même phase (le même retard sur la source de l'onde).



Sur le graphique précédent, on a représenté en traits pleins les surfaces d'ondes et en pointillés les "rayons" de l'onde correspond à la direction de propagation.

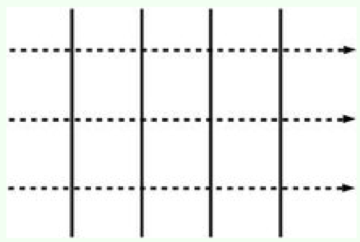
Important 1.8

Théorème de Malus (Admis) Lorsque le phénomène de diffraction peut-être négligé (cf. suite), le trajet d'une onde matérialisée par le trajet de l'énergie suivant des "rayons" est perpendiculaire au surface d'onde (cf. la figure précédente).

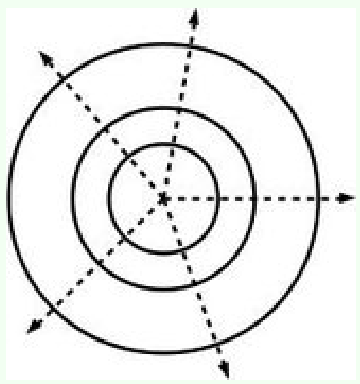
Important 1.9

Types d'ondes

- **Cas d'une onde plane:** l'amplitude ne dépend pas de la position transverse à la propagation. On étudie souvent ce type d'onde car elle est simple mais les ondes créées en général sont plutôt circulaires ou sphériques (et encore…).



- Cas d'une ondes circulaire: (on pourra généraliser l'idée à une onde sphérique à 3 dimensions) Il s'agit d'une représentation assez usuelle pour une source ponctuelle (point lumineux, source sonore…).

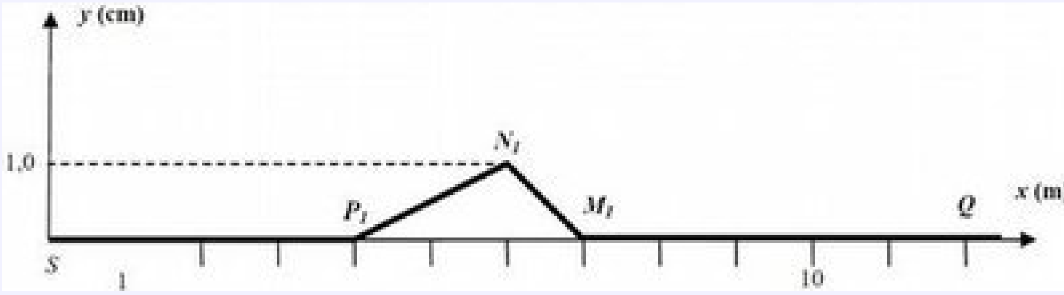


1.2 Maitriser les méthodes

1.2.1 Application

1.3: Onde progressive

On étudie la propagation sans amortissement d'une perturbation le long d'une corde élastique. A la date $t = 0$, le front de l'onde présenté sur le graphique finit d'être émis à l'extrémité S de la corde. A la date $t_1 = 2,3$s, on prend un cliché de la corde; la Figure suivante reproduit le cliché avec deux échelles de longueurs différentes suivant l'horizontale et suivant la verticale. M_1 est la position du front de l'onde à la date t_1, N_1 celle de la crête et P_1 celle de la queue de l'onde.



1. L'onde qui se propage le long de la corde est-elle transversale ou longitudinale? Que représente son amplitude $y(x,t)$?
2. Calculer la célérité de l'onde le long de la corde.
3. Quelle est la durée τ du mouvement d'un point de la corde au passage de l'onde?
4. A la date t_1, quels sont les points de la corde qui s'élèvent? ceux qui descendent?
5. Dessiner sur le graphique donné ci-dessous, l'aspect de la corde à la date $t_2 = 3,6$s.
6. Soit le point Q de la corde situé à 12.0m de S.
   1. A quelle date t_3 commence t-il à bouger?
   2. A quelle date t_4 passe-t-il par un maximum d'altitude?
   3. A quelle date t_5 cesse-t-il de bouger?
   4. A l'aide des résultats précédents, schématiser l'allure de la courbe $y_Q = f(t)$ où y_Q représente l'élongation du point Q à la date t.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Retard à la propagation.*

1.4: Ondes acoustiques

On considère une onde sonore unidirectionnelle se propageant dans la direction des x positifs. Aux abscisses sources $x = 0$, l'amplitude de l'onde est: $p(x = 0, t) = p_0(t)$. Le milieu ambiant est de l'air de masse volumique au repos $\rho_0 = 1,2$kg.m^{-3} et le son s'y propage à la vitesse: $c = 340$m.s^{-1}.

1. Une onde sonore est-elle une onde transversale ou longitudinale?
2. Exprimer en fonction de $p_0(t)$, l'expression de la surpression en un point quelconque d'abscisse x.
3. On suppose que l'excitation est sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude p_{0m}. La phase à l'origine au point x=0 est supposée nulle. Exprimer la surpression $p(x,t)$ en tout point du trajet de l'onde.
4. On peut montrer que l'intensité acoustique moyenne d'une onde harmonique ne dépend que de la valeur efficace p_0 de la surpression, de la masse volumique et de la célérité de l'onde. Par une analyse dimensionnelle, montrer que $I = \frac{p_0^2}{\rho_0 c}$.
5. Exprimer la surpression p_0 correspondant à l'intensité de référence I_0 pour l'air (il correspond à peu près au seuil moyen de perception humaine pour des fréquences autour de 3kHz).
6. Le seuil de douleur pour l'oreille humaine se situe autour de 120dB. Estimer la surpression moyenne correspondante.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Grandeurs associées aux ondes acoustiques.*
- $\Longrightarrow$ *Forme mathématique d'une onde progressive.*

1.5: Onde plane

Comment faire expérimentalement une onde lumineuse plane à partir d'une source ponctuelle?

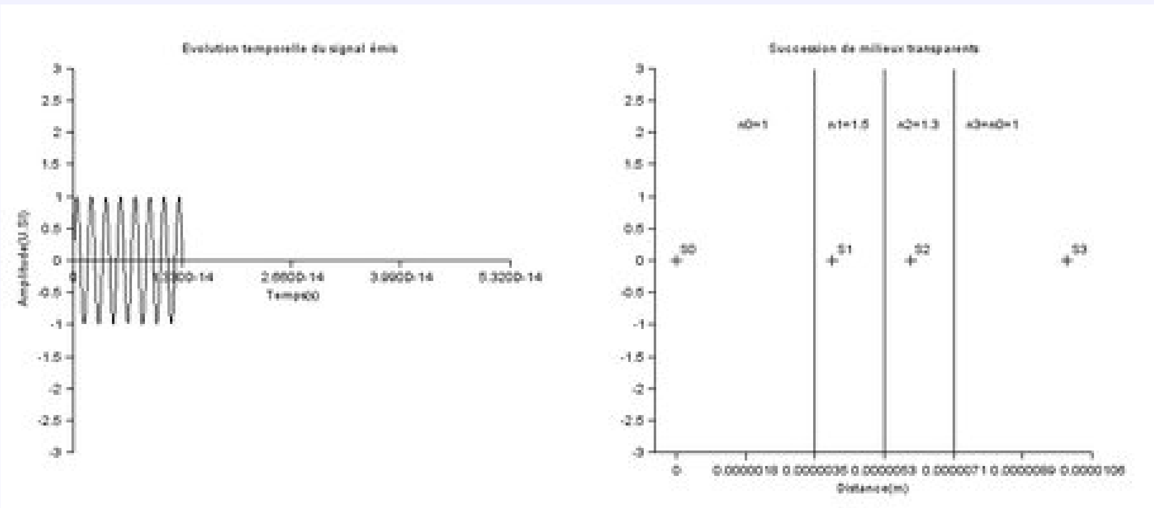
Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Optique.*
- $\Longrightarrow$ *Théorème de Malus.*

1.2.2 Entrainement

1.6: Retard d'une OEM

On considère une source Laser considéré comme une source ponctuelle située au point S qui émet un signal dont le champ électrique est représenté ci-après (on parlera de "trains d'onde"). L'onde se propage à travers différents milieux comme présentés ci-après. On a noté les indices de réfraction de chaque milieu. On admet que le trajet de l'onde n'est pas déviée quand le rayon lumineux passe d'un milieu à l'autre. On admet que, même si le signal n'est pas entièrement sinusoïdal, la fréquence de la portion assimilable à un sinusoïde définit la fréquence du signal émis.



1. Quelques grandeurs caractérisent la propagation d'un signal lumineux?
2. Déterminer la fréquence du signal émis par le Laser, est-ce une fréquence temporelle ou spatiale? Préciser son unité. Le Laser émet-il dans le visible?
3. Exprimer le retard de l'onde passant par chaque point représenté sur le graphique. On donne leurs abscisses respectives (m): $0; 4\times10^{-6}; 6\times10^{-6}; 10^{-5}$. En déduire l'expression temporelle du champ électrique en chaque point.
4. Représenter graphiquement le chronogramme du champ électrique aux différents points considérés.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Grandeurs associées aux ondes électromagnétique.*
- $\Longrightarrow$ *Retard à la propagation.*
- $\Longrightarrow$ *Forme mathématique d'une onde progressive.*

CHAPTER

TWO

SUPERPOSITION DE DEUX ONDES: INTERFÉRENCES ET BATTEMENTS

2.1: Compétences

- Déterminer une différence de fréquences à partir d'enregistrements de battements.
- Exrpimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
- Relier le déphasage entrer les deux ondes à la différence de chemin optique.
- Etablir l'expression de la différence de chemin optique entre deux ondes.

2.1 Généralités

2.1.1 Position du problème

On considère deux sources S_1 et S_2 émettant chacune un signal physique se propageant dans le milieu environnant et représentée par la grandeur Y dont l'expression en un point M à un instant t sera notée $Y(M,t)$. On suppose que ces deux ondes sont sinusoïdales de fréquence f_1 et f_2. On note:

- $Y_1(M,t) = Y_{1m}\cos(\omega_1 t + \phi_{M,1})$ pour l'onde issue de la source S_1 (appelée onde 1).
- $Y_1(M,t) = Y_{2m}\cos(\omega_2 t + \phi_{M,2})$ pour l'onde issue de la source S_2 (appelée onde 2).

Pour fixer les idées au moyen d'expériences, les ondes considérées seront par la suite soit des ondes acoustiques, soit des ondes lumineuses. Néanmoins, et sauf précisions contraire, les études réalisées pourront être appliquées à tout type d'onde. On considérera aussi des trajets rectilignes de la lumière. On observera d'ailleurs les phénomènes d'interférences étudiés ensuite sur des ondes de surface.

Important 2.1

Ondes synchrones et cohérentes

- Deux ondes sont dites **synchrones** si elles ont la même fréquence.
- Deux ondes sont dites **cohérentes si elles ont la même fréquence ET que leur déphasage initiaux (aux sources) sont constants.**

2.1.2 Représentation de Fresnel (en ligne)

2.1.3 Battements cf. Activités

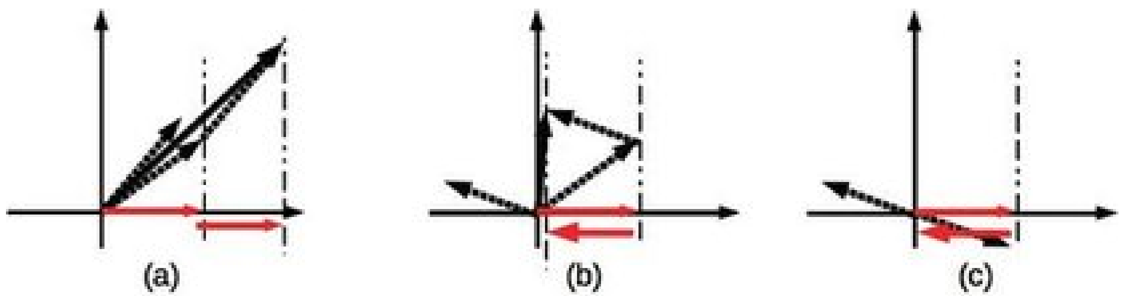
2.1.4 Interférences

2.1.4.1 Position du problème

On considère deux sources lumineuses qui émettent chacune des ondes lumineuses **cohérentes** , c'est-à-dire de même fréquence $f_1 = f_2 = f$ et dont le déphasage en un point donné est constant. On traitera pour simplifier le champ électrique comme une grandeur scalaire E. Les champs électriques des deux ondes s'écrivent:

$$E_1(M) = E_{1m} \cos(2\pi f t + \phi_{M,1}) \tag{2.1}$$
$$E_2(M) = E_{2m} \cos(2\pi f t + \phi_{M,2}) \tag{2.2}$$

Comme on va le montrer, on attend alors un déphasage constant et la représentation de Fresnel permet de montrer que l'amplitude résultante va dépendre du déphasage entre les deux ondes. On parlera d'interférences



Important 2.2

Onde résultante sinusoïdale
L'onde résultant de la superposition de deux ondes sinusoïdales cohérentes **de même amplitude** E_0 est aussi une onde sinusoïdales de même fréquence f et dont l'amplitude E_{totalm} dépend des amplitudes des ondes qui interfèrent ET du déphasage $\Phi_M = \phi_{M,2} - \phi_{M,1}$ entre les deux ondes.
Le champ électrique peut se mettre sous la forme:

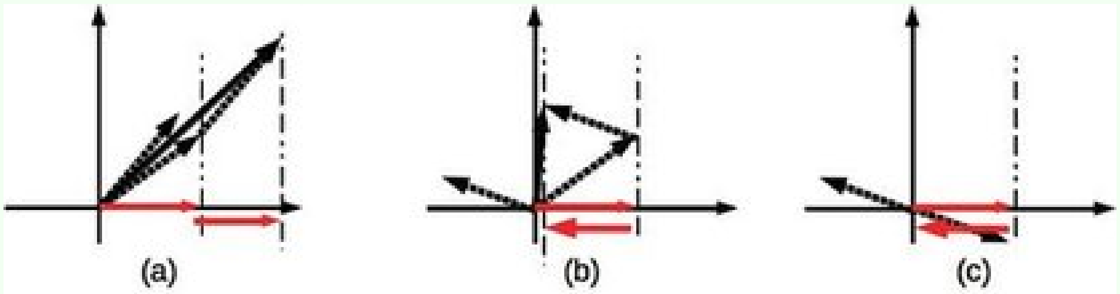
$$E_{total}(M, t) = A \cos(\Phi_M/2) \cos(2\pi f t + \varphi)$$

2.1.4.2 Cas extrêmes: Interférences constructives et destructives.

Important 2.3

Cas extrêmes

- Pour $\Phi_M = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$ la fonction cos est maximale et les amplitudes des deux ondes sont en phase. L'intensité lumineuse est alors maximale. On parle d'**interférences constructives** . Si l'on place un écran au point considéré, on observera un point très lumineux.
- Pour $\Phi_M = (2m + 1)\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$ la fonction cos est minimale et les amplitudes des deux ondes sont en opposition de phase. L'intensité lumineuse est alors minimale. On parle d'**interférences destructives** . Si l'on place un écran au point considéré, on observera un point sombre (ou plutôt on observe presque pas de lumière, voire aucune lumière).



2.1.4.2.1 Autres grandeurs caractéristiques

Plutôt que de calculer le déphasage, on calculer souvent d'autres termes associées pour savoir les positions d'interférences constructives et destructives.

Important 2.4

Chemin optique
On définit le chemin optique comme l'intégrale sur le chemin parcouru par la lumière: $S = \int n(M) ds(M)$ où $n(M)$ est l'indice de réfraction au point M et $ds(M)$ la longueur du trajet parcouru par la lumière autour du point M.

Important 2.5

Différence de chemin optique
On définit la différence de chemin optique entre deux rayons par… la différence $\delta = S_2 - S_1$. Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, cette différence devient:

$$\begin{aligned} \delta &= n(S_1M - S_2M) \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi}\Phi_M \end{aligned}$$

avec Φ_M le déphasage de l'onde 2 sur l'onde 1 au point M.

Important 2.6

Intérêt La différence de chemin optique présente deux intérêts:
- son expression en fonction des distance parcourues par les rayons permet de le calculer simplement par des considérations géométriques.
- sa relation avec le déphasage montre qu'il va prendre des valeurs particulières pour les cas d'interférences constructives et destructives. En effet:
  - Lors d'interférences constructives, la différence de chemin optique est un nombre entier de fois la longueur d'onde: $\delta = m\lambda_0$
  - Lors d'interférences destructives, la différence de chemin opqitue est un nombre demi-entier de fois la longueur d'onde $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$

On pourra donc se servir des considérations géométriques pour calculer la différence de chemin optique et de la relation avec le déphasage pour déterminer les conditions d'interférences constructives et destructives.

Important 2.7

Ordre d'interférences
On définit l'ordre d'interférence en un point M par la grandeur: $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\Phi_M}{2\pi}$

Important 2.8

Intérêt

- Lors d'interférences constructives, l'ordre d'interférence est un entier m avec $m \in \mathbb{N}$ (à relier avec l'entier définit pour la différence de chemin optique)
- Lors d'interférences destructives, l'ordre d'interférence est un demi-entier $m + \frac{1}{2}$ avec $m \in \mathbb{N}$

L'intérêt du nombre d'interférence est de pouvoir "compter" combien de fois se produisent des interférences constructives entre 2 points M_1 et M_2. En effet, la propriété précédent montre qu'entre deux de l'espace où se produisent des interférences, si l'ordre d'interférences est monotone sur le déplacement de M_1 à M_2 alors la différence $p_2 - p_1$ correspond, en valeur entière, au nombre de fois où l'on observera des interférences constructives.

Important 2.9

Interfrange
L'**interfrange** est la distance entre deux franges d'égales intensités.

2.1.4.3 Notion de cohérence (en ligne)

2.1.4.4 Interférences: Réalisation (en ligne)

2.2 Activités

2.2.1 Battements

Position du problème On considère deux diapasons identiques dont l'un est monté avec une petite masselotte qui modifie légèrement sa fréquence d'émission. On excite les deux diapasons et on écoute le son obtenus puis on l'enregistre au moyen d'un dispositif {micro+système d'acquisition}. On observe que les variations d'amplitude sont lentes de sorte qu'on peut les sentir à l'oreille (cf. Simulation Audacity).

2.2: Exercice

ModélisationOn considère les deux ondes précédentes issues de deux sources u_1 et u_2 asynchrones de fréquences respectives f_1 et f_2. On considère qu'il s'agit d'ondes sonores de fréquences très proches l'une de l'autre. On considère de plus pour simplifier que les deux ondes ont la même amplitude de pression: u_0 et que le déphasage initial entre les deux sources est constant et nul.
On considère le problème proposé précédemment.

1. Exprimer la surpression ressentie en un point M.
2. Montrer que celle-ci s'apparente à un signal sonore de fréquence f_f à préciser modulé en amplitude par un sinusoïde à la fréquence f_m à préciser. Représenter graphiquement l'amplitude correspondante.
3. Exprimer l'intensité sonore perçue et montrer qu'elle varie aussi dans le temps.
4. Donner la représentation de Fresnel des deux ondes et de l'onde résultante à différents instants. Retrouver le principe d'une modulation d'amplitude.
5. (Simulation): On pourra chercher, au moyen de logiciels simulant des sons (Ex: Audacity) à partir de quelle fréquence l'on arrive plus à déceler la variation temporelle de l'intensité sonore (c'est un ordre de grandeur car il sera probablement différent pour chacun)

Important 2.10

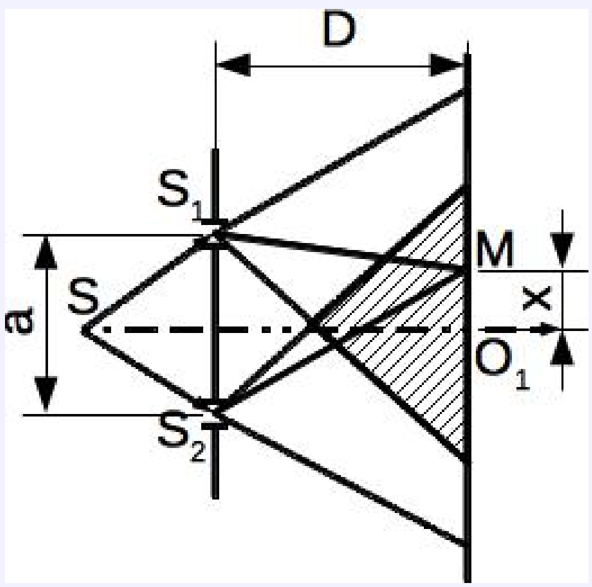
A retenir
La superposition de deux ondes de fréquences très proches cause un phénomène de battement : l'onde résultante est une onde modulée en amplitude.

2.3 Méthodes : Etude des interférences

2.3.1 Fentes d'Young

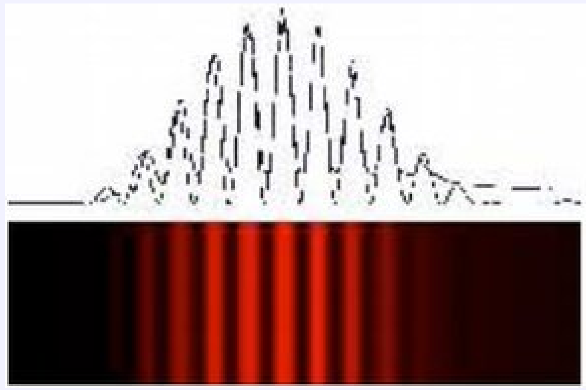
2.3: Exercice

Un éclairage LASER cohérent et monochromatique de longueur d'onde λ_0 éclaire un ensemble de deux fentes parallèles de longueur L et de largeur ϵ distantes l'une de l'autre de a. On suppose que $L \gg a$ et $a \gg \epsilon$ de sorte qu'on peut assimiler les fentes à des fentes de longueur infinies et d'épaisseur nulle.
On place un écran parallèle aux fentes à une distance D des fentes telle que $D >> a$ et on visualise la figure lumineuse en une zone proche du centre de l'écran (défini en regard du centre de la double fente). La figure, appelée figure d'interférences obtenues, est données figure suivante (la courbe correspond au profil d'intensité mesuré grâce à un capteur CCD).



La diffraction permet de considérer les deux fentes S_1 et S_2 comme de nouvelles sources (des sources secondaires) qui émettent dans (presque) toutes les directions. Les interférences ont lieu dans tout une zone d'espace: on parle d'interférences délocalisées.

1. Déterminer la différence de chemin optique en un point M de coordonnées $(x; 0)$ sur l'écran sans approximation puis simplifier l'expressoin obtenue pour $x \ll D$.
2. En déduire l'ordre d'interférence et le déphasage entre les deux ondes dans le cadre de l'approximation $x \ll D$.
3. Déterminer les positions où l'interférences est contructives, destructives. Commenter la forme des zones claires et sombres.
4. Déterminer l'interfrange, distance entre deux franges d'égales intensité.
5. Comparer les données aux observations expérimentales faites ci-dessous.



Intérêt de l'ordre d'interéférences

1. Exprimer l'ordre d'interférence au centre de la figure (appelé O_1). Correspond-il à une frange brillante ou sombre?
2. Exprimer l'ordre d'interférence en un point M de l'écran situé à une abscisse x.
3. Exprimer au moyen de l'interfrange le nombre de franges située entre O_1 et M. Retrouver l'interprétation de l'interfrange.

2.3.2 Interférences à l'infini

Il est très fréquent qu'on s'intéresse à une figure d'interférence à l'infini. Nous allons voir comme la traiter puis comment traiter sa projection.

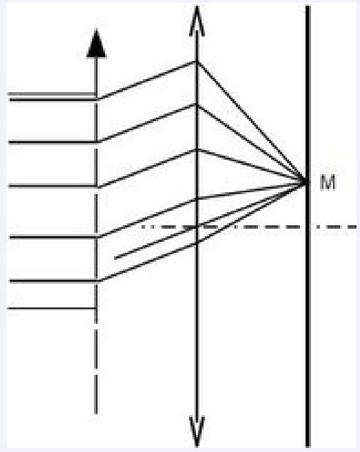
2.4: Interférences à l'infini

On considère toujours le dispositif des fentes d'Young mais on supprime l'écran et on s'intéresse à la figure d'interférences observées à l'infini (celle qu'observerait un oeil emmétrope au repos se plaçant à la place de l'écran - attention en pratique, il ne faut pas le faire si c'est un LASER !).

1. Quelle grandeur va alors caractériser un point de l'image à l'infini ?
2. En utilisant le théorème de Malus et le principe de retour inverse, montrer que la différence de chemin optique se limite à la distance entre S_2 et le projeté de S_1 sur le rayon 2. En déduire la différence de chemin optique.
3. Exprimer alors les conditions d'intérférence constructives et destructives.
4. Comment faire pour observer la figure d'interférences à l'infini… sur un écran. Déduire alors les conditions d'interférences constructives et l'interfrange sur l'écran.

2.5: Utilisation d'une lentille

On reprend le dispositif précédent et on place une lentille après les fentes puis un écran dans le plan focal image de la lentille.



Déterminer l'interfrance de la figure d'interférence sur l'écran.

Important 2.11

- Comme on peut le voir sur l'exemple ci-dessous, les rayons sont déviés par la lentille mais **on ne peut pas utiliser une somme par morceau des trajets car la schématisation de Gauss ne modélise pas l'épaisseur de la lentille**.
- La différence de chemin optique **est identique en deux points conjugués (objet et image) par un système optique**.

2.4 Application et entrainement

2.4.1 Applications

2.6: Battements lumineux

En comparant des ordres de grandeurs adaptés, montrer qu'on ne peut observer un phénomène de "battements lumineux".

2.7: Bilan sur les interférences

Reproduire dans un tableau le bilan des grandeurs caractéristiques qu'on peut calculer pour étudier une figure d'interférences et donner les valeurs possibles qu'elles peuvent prendre pour des cas d'interférences constructives et des cas d'interférences destructives.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Conditions d'interférences destructives et constructives.*

2.4.2 Entrainement

2.8: Trous d'Young. Représentation de Fresnel

On considère une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ, ponctuelle située au point S et émettant dans le vide. A une distance D_1 de S, on place une plaque opaque percé de 2 trous S_1 et S_2 distants de a. On suppose que ces deux trous sont de taille ϵ très faibles. On note O le milieu des deux trous et Ox l'axe normale au plan. Dans un premier temps, la source S est située sur l'axe Ox. On note Oy l'axe passant par les deux trous et Oz l'axe perpendiculaire dans le plan de la plaque.

1. Quelle phénomène justifie qu'à la sortie des trous, on puisse considérer l'existence d'un faisceau élargi. Rappeler alors la relation (approximative) entre l'ouverture angulaire du faisceau et la taille du trou.
2. Faire un schéma du dispositif en représentant les faisceaux sortant des deux trous. Justifier qu'on puisse observer des interférences entre deux ondes lumineuses dans un zone qu'on précisera.
3. Dans l'hypothèse d'un trou infiniment petit, que devient cette hypothèse? Quel problème pratique pose l'utilisation d'un trou top petit? On supposera ce problème non limitant dans l'étude faite ici et on supposera $\epsilon = 0$ dans toute la suite du problème de sorte que l'on puisse les assimiler à deux sources nouvelles sources ponctuelles secondaires.
4. On place un écran parallèle à la plaque à une distance D_2 de la plaque et on suppose $D_2 \gg a$. Sur l'écran, on repère la position d'un point à ses coordonnées (y, z) par rapport au centre A, intersection de l'écran et de l'axe Ox. On s'intéresse à l'éclairement en un point M de coordonnées $(y_M, 0)$. On suppose $D_2 \gg y_M$ et on donne $\sqrt{1+e} \approx 1 + \frac{e}{2}$ si $e \ll 1$.
5. On considère l'onde passant par le trou S_1.
   1. Exprimer la distance SS_1M parcouru par l'onde.
   2. En déduire l'amplitude du champ électrique (au sens $E(x,t)$ - abus de langage - associé à cette onde au point M (on prendre S comme origine des phases et on traitera le champ électrique comme une grandeur scalaire).
   3. Montrer que l'on peut introduire une grandeur e exprimée en fonction de D_2, a et y_M très petite devant 1 et permettant d'utiliser l'approximation donnée dans l'énoncé. Simplifier alors l'expression de l'amplitude (au sens $E(x,t)$).
6. Répondre aux questions précédentes pour l'onde passant par le trou S_2.
7. Déterminer par le calcul l'amplitude complexe de l'onde résultante en un point de coordonnées $(y_M; 0)$ puis son amplitude réelle. Déterminer alors les positions des franges brillantes et des franges sombres ainsi que l'interfrange.
8. On déplace la source S d'une distance d dans la direction Oy. On suppose les résultats précédents toujours vrais, déterminer le nombre de franges brillantes que l'on voit défiler au point $A(0;0)$ sur l'écran pendant l'opération.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Retard d'une onde*
- $\Longrightarrow$ *Conditions d'interférences destructives et constructives.*
- $\Longrightarrow$ *Interfrange.*
- $\Longrightarrow$ *Développements limités.*

2.9: Doublet du sodium.

On considère l'expérience des trous d'Young présentées dans l'exercice précédent. On se place dans le même cadre d'approximation de sorte que pour une lumière monochromatique de longueur d'onde λ, on obtiendra les mêmes résultats. Pour un point M de l'écran, le champ électrique s'écrit:

$$E(M,t) = 2E_{1m}\cos(\frac{\pi a y_M}{\lambda D_2})\cos(\omega t - \Phi_M)$$

avec Φ_M un terme de phase inutile ici.
Un capteur de lumière (capteur CCD) parcourt à une vitesse v l'axe Ay de l'écran et fournit une tension $U(t)$ proportionnelle à l'éclairement I où il se trouve.

1. Déterminer l'expression de $U(t)$. En déduire le spectre de Fourier de $U(t)$. Justifier que la détermination expérimentale du spectre permet de remonter à la longueur d'onde de la lumière incidente.
2. On remplace la source monochromatique par une lampe spectrale au sodium émettant deux longueurs d'onde $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$ (on pose $\lambda_2 < \lambda_1$). On note $k_m = \frac{k_1+k_2}{2}$ et $\Delta k = \frac{k_2-k_1}{2}$. 1.Pourquoi peut-on calculer l'éclairement causé par chaque longueur d'onde indépendamment? En déduire l'éclairement total $I_T(x)$ puis la tension mesurée $U_T(t)$.
    1. Montrer que $U_T(t)$ se décompose en une somme de deux sinusoïdes dont on déterminera les fréquences. Représenter graphiquement $U_T(t)$ et son spectre.
    2. Justifier que la détermination du spectre de $U_T(t)$ permet de remonter aux deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2.
    3. Montrer aussi que l'étude graphique de l'évolution temporelle de $U_T(t)$ permettrait de déterminer k_m et Δk et donc les deux longueurs d'onde, préciser clairement la méthode.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Spectre d'un signal*
- $\Longrightarrow$ *Battements.*
- $\Longrightarrow$ *Modulation.*

2.10: Filtre interférentiel.

On considère une lame à face parallèle d'épaisseur e et d'indice n entouré à gauche et à droite par de l'air. Un faisceau monochromatique de longueur d'onde λ arrive sur la face de gauche avec un angle d'incidence i.

1. Réaliser le tracé des deux premiers rayons transmis à droite de la lame et justifier que les interférences ont lieu à l'infini.
2. On ne considère que les deux premiers rayons transmis. Déterminer pour $i \ll 1$ et en travaillant à l'ordre 1, la condition sur l'épaisseur λ pour qu'on observe des interférences constructives.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Retard d'une onde*
- $\Longrightarrow$ *Conditions d'interférences destructives et constructives.*
- $\Longrightarrow$ *Lois de Snell Descartes.*
- $\Longrightarrow$ *Développements limités (petits angles).*

Un devoir libre est disponible en ligne[2]

[2] https://stanislas.edunao.com/mod/resource/view.php?id=12870

CHAPTER

THREE

ONDES STATIONNAIRES

3.1: Compétences

- Caractériser une ondes stationnaire par l'existence de noeuds et de ventre.
- Démontrer le caractère stationnaire d'une onde pour une condition aux limites nulle.
- Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde.
- Utiliser la propreté énonçant qu'une vibration entre deux extrémités quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres.

3.1 Comprendre le contexte

3.1.1 Présentation

Important 3.1

Onde stationnaire
Une onde stationnaire est le phénomène résultant de la propagation simultanée dans des sens opposés de plusieurs ondes de même fréquence et de même amplitude, dans le même milieu physique, qui forme une figure dont certains éléments sont fixes dans le temps.

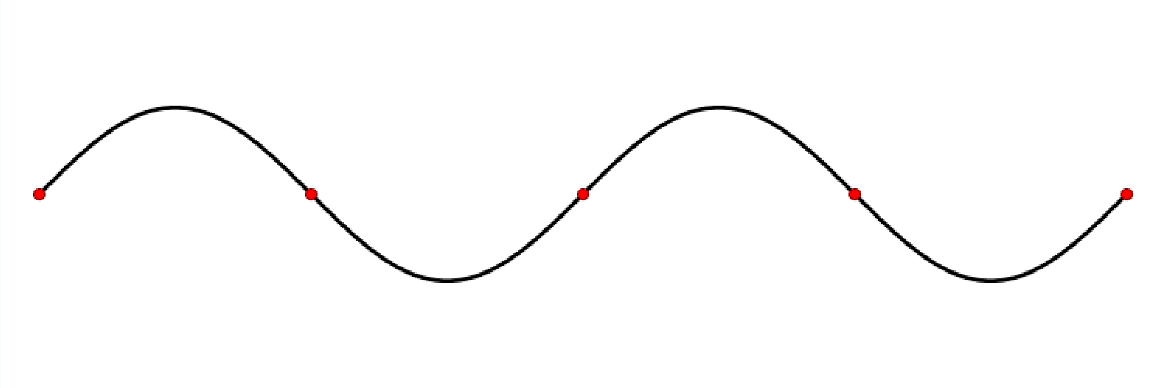
Important 3.2

Expression mathématique
Une onde stationnaire peut s'écrire sous la forme:

$$y(x,t) = f(x)g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)$$

Important 3.3

Analyse. Noeuds et ventre.
Le terme **stationnaire** est associé au fait que le temps et l'espace sont maintenant séparé dans deux fonctions. Il n'y a ainsi plus de propagation (cf. Animation ci-après).

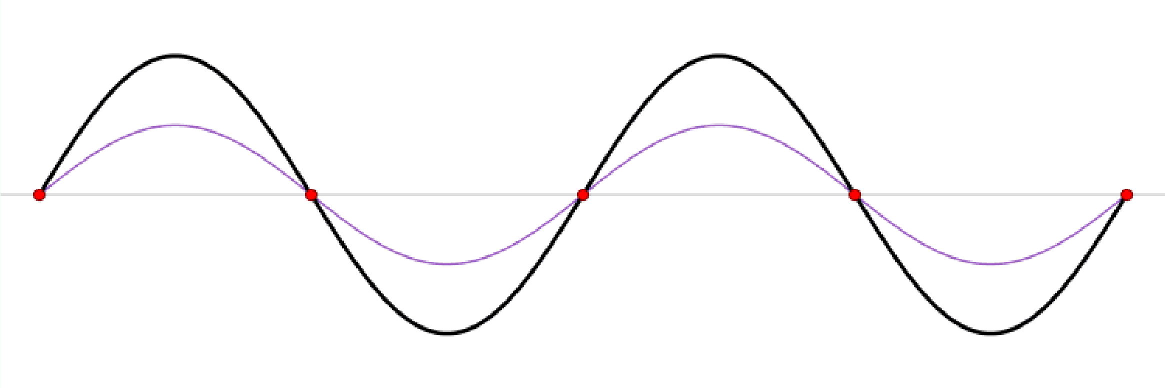


On observe qu'en certains points, la grandeur $y(x,t)$ **est toujours nulle** : on appelle ces points les **noeuds.**
On observe qu'en certains points, la grandeur $y(x,t)$ **est toujours maximale** (relativement au reste de la corde): on appelle ces points les **ventres.**
Le caractère stationnaire implique que les noeuds et les ventres sont **fixes.**

Important 3.4

Superposition
On rappelle qu'une onde stationnaire est la superposition de deux ondes l'une progressive et l'autre régressive **de même amplitude et de même fréquence** (cf. ANIMATION ci-après).

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos(\omega t - kx) - A\cos(\omega t + kx) \\ &= 2A\sin\omega t \sin kx \end{aligned}$$



3.1.2 Modes propres

Cf. *l'exercice corrigé* (page 19). Il est important de savoir retrouver les modes propres quantifiés d'une onde stationnaire quand on a imposée 2 conditions aux limites.

3.2 Méthodes

3.2.1 Réflexion parfaite sur une corde

On va démontrer le caractére stationnaire de l'onde en présence d'un noeud.

3.2: Exercice

On considère une corde tendue par une tension T horizontale de masse linéique μ. La célérité des ondes mécaniques qui se propagent sur la corde est alors $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. On notera $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde d'une onde progressive. La corde est attaché en un point A. Une onde progressive harmonique se propose dans le sens des x positifs de $-\infty$ vers le point A.

1. Justifier l'existence d'une onde réfléchie. En déduire l'expression générale de la côte verticale $y(x, t)$ de la corde.
2. Que vaut y au point A? En déduire que l'onde résultante est une onde stationnaire.
3. Déterminer la position des noeuds et des ventres de l'onde.

3.2.2 Modes propres

3.3: Corde de Melde

On considère une corde de longueur L fixée aux deux points extrêmes A et B sous une tension $\vec{T}$. La corde peut vibrer et une onde mécanique se propage le long de la corde. On rappelle que pour une onde mécanique, on peut décrire la vibration de la corde se propageant par l'écart de la position d'un point de la corde à sa position d'équilibre (la corde tendue au repos est supposée être horizontale): $y(x, t)$.

1. Montrer que l'onde résultante est stationnaire.
2. Montrer que la corde ne peut vibrer d'elle même qu'à des fréquences particulières qu'on déterminera : les **modes propres**.

Important 3.5

A retenir Pour qu'une onde sinusoïdale de fréquence f puisse exister dans une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités où la vitesse de propagation des ondes mécanique est v_{onde}, il faut que $f = n\frac{v_{onde}}{2L}$ soit une longueur d'onde: $\lambda = \frac{2L}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
La forme de l'onde résultante peut s'écrire:

$$y(x, t) = Y_n \cos(\omega_n t) \sin(k_n x) = Y_n \cos(\omega_n t) \sin(\frac{2\pi}{\lambda_n} x)$$

3.3 Application et entrainement

3.3.1 Applications

3.4: Cavité LASER résonante

Un LASER est une source lumineuse monochromatique. Si l'émission de la lumière est due à des phénomènes de transitions entre les niveaux d'énergie d'atomes. On place généralement ce milieu dans un cavité résonante dont l'intérêt est d'affiner la sélection des longueurs de la source et ainsi obtenir une lumière la plus monochromatique possible.

On se propose de préciser le mode de fonctionnement de la cavité résonnante au moyen d'un modèle simple (donc imparfait mais déjà intéressant). On suppose que celle-ci est composée de deux miroirs plans parfaits face à face distants d'une distance d et séparés par du vide. On note Ox l'axe perpendiculaire aux miroirs. Entre les deux miroirs se propage une onde électromagnétique monochromatique plane pouvant se propager dans les deux sens. Les miroirs sont supposés parfaits c'est-à-dire qu'il réfléchissent entièrement le rayonnement. Cela implique (admis) que le champ électrique doit être nul sur les miroirs. On décrit la vibration électromagnétique par le champ électrique de l'onde en tout point de l'espace: $\overrightarrow{E(x,t)} = E_y(x,t)\overrightarrow{e_y}$

1. Quelle autre grandeur physique décrit la propagation d'une telle onde?
2. Préciser dans le cas d'une onde progressive monochromatique de pulsation ω se déplaçant dans le sens des x positifs l'expression générale du champ électrique.
3. Justifier simplement la présence d'une onde régressive monochromatique, c'est-à-dire se déplaçant dans le sens des x négatifs. Donner son expression générale puis l'expression de l'onde électromagnétique résultante dans la cavité.
4. Exprimer les deux conditions aux limites qui en découlent. En déduire que l'onde résultante est une onde stationnaire et que les pulsations permises pour l'onde sont quantifiées.
5. En réalité, le rayonnement est émis par le milieu amplificateur du LASER composé de différents atomes. Pour de nombreuses raisons, cette émission ne produit pas un rayonnement monochromatique mais une gamme de fréquence. Pourquoi une telle cavité permet de sélectionner une fréquence et donc d'obtenir une lumière monochromatique?
6. (Recherche) En réalité, la lumière d'un LASER n'est pas rigoureusement monochromatique. Rechercher les ordres de grandeurs de largeurs de raie de LASER (courant ou non) ainsi que les origines possibles d'un tel élargissement.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Forme mathématique d'une onde progressive.*
- $\Longrightarrow$ *Grandeurs associées aux ondes électromagnétique.*
- $\Longrightarrow$ *Etude mathématique des propres.*

3.5: Tuyau ouvert

On considère le cas d'un tuyau ouvert et on cherche les fréquences correspondant aux modes propres d'une onde acoustique stationnaire. On admet que pour un tel tuyau, on attend un ventre de vitesse aux deux extrémités. On réalisera une étude graphique pour déterminer les modes propres.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude graphique des modes propres.*

3.3.2 Entrainement

3.6: Corde vibrante

On considère une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Sa masse linéique est μ et elle est tendue par une tension T_0. La vitesse de propagation des ondes mécaniques sur la corde est alors: $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

1. Quelle grandeur permet de décrire la vibration de la corde?
2. Montrer que v est bien homogène à une vitesse.
3. Rappeler brièvement pourquoi on doit décrire la vibration de la corde comme la superposition de deux ondes. Préciser leurs expressions générales.
4. On cherche les pulsations ω auxquelles cette corde peut vibrer. Quelle est alors la forme générale de l'onde résultante?
5. Exprimer les conditions que doit satisfaire l'onde? En déduire les pulsations quantifiées auxquelles la corde peut vibrer. On précisera le fondamental ω_0.
6. (HP) *On peut montrer que la puissance moyenne transportée par une onde mécanique progressive monochromatique le long de la corde est de la forme: $\langle P(x)\rangle = a\langle Y^2(x,t)\rangle$ où a est une constante qu'on ne déterminera pas. Montrer que pour une onde stationnaire, il n'y a pas d'énergie transportée. Donner un autre sens au terme “d'onde stationnaire”.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude mathématique des propres.*
- $\Longrightarrow$ *Forme mathématique d'une onde progressive.*

3.7: Le pipeau

Comme les instruments à corde, la production du son dans les instruments à vent est basé sur le principe d'ondes stationnaires. Nous allons illustrer ce principe en modélisant le fonctionnement du pipeau quand tous les trous sont bouchés (Fa). Dans une telle flûte, le son est produit par un résonateur (l'ouverture du pipeau) à une extrémité de l'instrument et se propage le long du tube se section droite S de longueur $L = 10\text{cm}$. On note Ox l'axe du tube, O étant la côte du résonateur. On suppose que la célérité du son dans le tube (rempli d'air) est $c = 344\text{m.s}^{-1}$. On rappelle que les deux grandeurs décrivant la propagation de l'onde sont la vitesse d'agitation d'une tranche d'air: $v(x,t)$ et la surpression engendrée par le passage de l'onde sonore: $p(x,t)$. On précise aussi qu'on a la relation: $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$ où ρ_0 est la masse volumique de l'air au repos.

1. On suppose que le résonateur crée une onde plane progressive de fréquence f se propageant dans la direction des x croissants. On note v_{0+} l'amplitude de l'oscillation de la vitesse et p_{0+} l'amplitude de l'oscillation de la pression. Donner les expressions de $v_+(x,t)$ et $p_+(x,t)$ associées à cette onde en tout point du tube (utiliser les grandeurs définies dans l'énoncé).
2. Justifier la relation: $\lambda f = c$ où λ est la longueur d'onde de l'onde sonore dans le milieu.
3. (HP)Montrer que $\rho_0 c v_{0+} = p_{O+}$.
4. Au bout du tube, l'ouverture brutale provoque une réflexion d'onde dans le sens inverse de propagation. On note v_{0-} l'amplitude de l'oscillation de la vitesse et p_{0-} l'amplitude de l'oscillation de la pression. Donner les expressions de $v_-(x,t)$ et $p_-(x,t)$ associées à cette onde réfléchie en tout point du tube (utiliser les grandeurs définies dans l'énoncé).
5. (HP)Montrer que $\rho_0 c v_{0+-} = -p_{O-}$.
6. Donner l'expression de la surpression $p(x,t)$ et de la vitesse d'une tranche d'air $v(x,t)$ de l'onde résultante dans le tube.
7. Le résonateur et l'ouverture du tube impose un effondrement de la pression aux extrémités soit $p(0,t) = p(L,t) = 0$.
8. Montrer, en déterminant $p(x,t)$ que l'onde résultante est alors une onde stationnaire dans les fréquence possible sont quantifiées.
9. Déterminer $v(x,t)$. Comparer la position des noeuds de pression et de vitesse.

Point utile pour cet exercice

- $\Longrightarrow$ *Etude mathématique des propres.*
- $\Longrightarrow$ *Forme mathématique d'une onde progressive.*