Corriges

♥ Méthode .1: Action de contact solide

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige l'action de l'air environnant et on note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

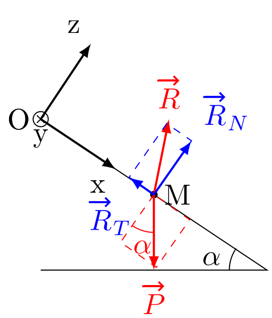
II.2 **Q1.** Proposer un système de coordonnées permettant d'étudier le mouvement de M sur le plan (on suppose que M reste sur le plan incliné). Faire un bilan des actions mécaniques qui s'appliquent sur M et préciser les expressions vectorielles des forces modélisant ces actions. Interpréter chaque composante de l'action du plan. Donner leur signe lorsqu'il est connu.

Q2. Dans l'hypothèse où M ne décolle pas, quelle contrainte cinématique impose le contact ? En déduire la composante normale de l'action du plan incliné sur M.

Q3. On suppose que le point M glisse sur le plan incliné. Exprimer la composante tangentielle en fonction de m, g et α.

Q4. On suppose maintenant que le point M est immobile. Justifier l'existence de frottements et montrer que les lois de Coulomb impose une condition sur l'angle d'inclinaison en fonction du coefficient de frottement statique μ_S.

Corrigé: Action de contact solide



Cas quelconque.

Q1. On va utiliser un système de coordonnées cartésiennes dont un des axes perpendiculaire au plan (ici Oz) et un autre suivant la droite de plus grande pente (ici Ox.)

Deux actions s'appliquent sur M le poids $\overrightarrow{P}$ et l'action du plan incliné $\overrightarrow{R}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} &= -mg\cos\alpha\overrightarrow{e}_z + mg\sin\alpha\overrightarrow{e}_x \\ \overrightarrow{R} &= R_T\overrightarrow{e}_x + R_N\overrightarrow{e}_z \end{cases}$$

R_N est la composante normale et R_T la composante tangentielle de l'action de contact.

La condition de non inter-pénétration impose que $\overrightarrow{R}$ soit orienté vers l'extérieur du plan incliné soit **ici :** $\boxed{R_N > 0}$.

R_T n'a a priori aucun signe donné. Comme on va le voir, cela dépend de beaucoup de facteurs.

Contrainte aux composantes du poids, R_N ***et*** *R_T* ***sont inconnues.***

Q2. Le mouvement de M est plan, donc $\dot{z} = 0 \Longrightarrow \ddot{z} = 0$. On peut appliquer le principe fondamdental de la dynamique à M dans le référentiel du plan incliné :

$$m\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$$
$$m\left(\ddot{x}\overrightarrow{e}_x + \ddot{z}\overrightarrow{z}_z\right) = -mg\cos\alpha\overrightarrow{e}_z + mg\sin\alpha\overrightarrow{e}_x + R_T\overrightarrow{e}_x + R_N\overrightarrow{e}_z$$

soit en projection sur $\overrightarrow{e}_z$:

$$0 = -mg\cos\alpha + R_N \Longrightarrow \boxed{R_N = mg\cos\alpha} \qquad (1)$$

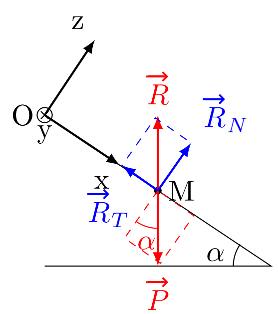
Q3. Dans le cas d'un glissement, on peut utiliser la loi de Coulomb relative aux contact solide pour le *glissement :*

$$|R_T| = \mu_D |R_N|$$

*Ici $R_N > 0$ mais le **signe de** R_T dépend du sens de déplacement de M car R_T doit s'opposer à la vitesse.*

- ⋆ Si $\dot{x} > 0$: $R_T < 0 \Longrightarrow R_T = -\mu_D mg\cos\alpha$
- ⋆ Si $\dot{x} < 0$: $R_T > 0 \Longrightarrow R_T = \mu_D mg\cos\alpha$

Q4. *Il y a non glissement : **on ne peut donc déduire la composante tangentielle de la composante radiale !*** Cette fois, la deuxième loi de Newton conduit à une somme des forces nulles soit $\vec{R} = -\vec{P}$.
Il vient que $\boxed{R_T = -mg\sin\alpha} \neq 0$: il y a nécessairement des frottements.
Le schéma ci-contre le prouve aussi.
Les lois de Coulomb imposent



Immobilité.

$$|R_T| < \mu_S |R_N|$$

soit ici :

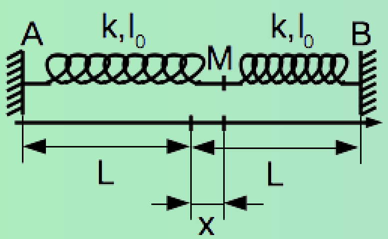
$$mg\sin\alpha < \mu_S mg\cos\alpha$$

Il vient :

$$\boxed{\tan\alpha < \mu_S} \qquad (2)$$

II.2

♥ Méthode .2: Déterminer une force de rappel



On considère deux ressorts horizontaux de raideur identique k et de longueur à vide l_0. Ils sont attachées comme représentés ci-dessous. Déterminer la force exercée par chaque ressort sur le point matériel M en fonction de la coordonnées x de M.

Corrigé: Déterminer une force de rappel

On va exprimer les longueurs (grandeurs positives) de chaque ressort en fonction des coordonnées. On note $l_1 = AM$ et $l_2 = MB$ les longueurs des ressorts.
Il est conseillé d'utiliser des grandeurs algébriques pour déterminer ces longueurs. Ici, il vient :

$$l_1 = \overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = L + x$$
$$l_2 = \overline{MB} = \overline{MO} + \overline{BM} = L - x$$

Les allongements sont donc :

$$\Delta l_1 = l_1 - l_0 = L + x - l_0$$
$$\Delta l_2 = l_2 - l_0 = L - x - l_0$$

On exprime ensuite les vecteurs directeurs unitaires dans la base d'étude choisi. Ici, pour le ressort 1, le vecteur unitaire doit être suivant $+\overrightarrow{e_x}$ pour être orienté vers l'extérieur depuis le point M.
Pour le ressort 2, $\overrightarrow{u_\Delta} = -\overrightarrow{e_x}$.
Il vient l'expression des forces de rappel appliquées sur le point M :

$$\overrightarrow{F_1} = -k\left(L + x - l_0\right)\overrightarrow{e_x}$$
$$\overrightarrow{F_2} = k\left(L - x - l_0\right)\overrightarrow{e_x}$$