Corriges

♥ Méthode .1: Etude générale

On considère un mouvement à force centrale conservatif dont l'énergie potentielle est $E_p(r)$. On s'entraînera à redémontrer la conservation du moment cinétique, la planéité du mouvement et l'expression de la constante de aires C.

II.3 **Q1.** Comment évolue $\dot{\theta}$ quand r augmente ? Même question quand r diminue.

Q2. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{1}$$

où $E_{p,eff}(r =$ s'exprime en fonction de m, C, r et $E_p(r))$

Q3. En déduire que les seules positions accessibles sont données par $E_m \geq E_{p,eff}(r)$. Aux positions extrèmes, la vitesse du mobile est-elle nulle ?

Q4. Montrer que :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}}{\mathrm{d}r}$$

Q5. Déduire de l'équation précédente que la rotation autour de C a un effet répulsif sur le mouvement. Cette effet est-il plus important à proximité de O ou loin de O ? Faire le lien avec la première question.

Q6. Si la force est une force de rappel élastique de longueur à vide nulle, donner l'expression de $E_p(r)$. En déduire que le système est dans un état lié. Peut-il atteindre $r = 0$.

Q7. Justifier qu'une trajectoire circulaire correspond nécessairement à un extremum de $E_{p,eff}$. Est-ce une condition suffisante ?

Corrigé: Etude générale

Q1. La conservation du moment cinétique implique que $r\dot{\theta}^2 = Cste$, donc que r augmente $\dot{\theta}$ diminue et réciproquement : quand le mobile s'éloigne de O, sa rotation ralentit et inversement.

Q2. L'observation précédente conduit à $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ donc :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{C^2}{r^4} + E_p(r) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_{p,eff}(r)}$$

Q3. Puisque $\dot{r}^2 > 0$, il vient immédiatement que $E_m \geq E_{p,eff}(r)$. Au position extrêmes, $\dot{r} = 0$, donc $E_m = E_{p,eff}(r)$. Mais $r\dot{\theta} \neq 0$ (sinon C se serait annulé or c'est une constante [a]) donc la vitesse est non nulle aux extrèma.

On pourra quand même noter que la vitesse radiale étant nulle, le mouvement étant tangent au cercle de rayon r et de centre O aux extrema.

Q4. On peut dériver l'expression précédente et simplifier par $\dot{r}$ ou appliquer le PFD en projection sur $\vec{e}_r$:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$$
$$m\ddot{r} - m\frac{C}{r^3} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{dr}}$$
$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\frac{C}{2r^2} + E_p\right)$$

soit l'énergie potentielle effective.

Q5. La rotation correspond au terme $\frac{C}{2r^2}$ dont la dérivée radiale donne $m\frac{C}{r^3} > 0$. Ce terme, seul donnerait $\ddot{r} > 0$. Il a donc un effet centrifuge. *On peut le voir sur le tracé de $\frac{C}{2r^2}$ qui est décroissant.*
Cette effet est d'autant plus importante que la pente de ce terme est grand soit quand r est petit. C'est le mouvement où la vitesse angulaire est la plus forte.

Q6. $E_p(r) = \frac{1}{2}mr^2$. Donc $E_{p,eff}(r)$ tend vers $+\infty$ en $r = 0$ et en $r = +\infty$. Comme l'énergie mécanique n'est pas infinie, l'inégalité $E_m > E_{p,eff}$ confine le mobile dans une zone : c'est un état lié.

Q7. Dans une trajectoire circulaire $\ddot{r} = 0$ donc il faut nécessairement que : $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}}{\mathrm{dr}}(r) = 0$.
Ce n'est pas une condition suffisante car on peut placer un mobile à une distance r_0 où $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}}{\mathrm{dr}}(r_0) = 0$, si on lui communique une vitesse radiale, le mouvement ne pourra pas être circulaire.

a. On pourra noter que c'est possible si $C = 0$ dès le début mais alors le mouvement est rectiligne et tout ce chapitre n'est pas très utile...

♥ Méthode .2: Etudier un mouvement à force centrale

On s'intéresse au cas d'un point matériel M relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Il est libre de se mouvoir dans toutes les directions de l'espace. On néglige l'action de la pesanteur. On pose un repère cylindrique de sorte que les conditions initiales soient :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = r_0\vec{e_r}$$
$$\vec{v_M}(t=0) = v_1\vec{e_r} + v_0\vec{e_\theta}$$

II.3 Q1. Justifier la conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique.

Q2. Déterminer l'expression de ces deux grandeurs en fonction des conditions initiales.

Q3. Montrer que l'énergie mécanique se ramène à la dépendance du rayon r seul en introduisant une énergie potentielle effective. Discuter de la nature du mouvement. Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

Q4. Déterminer les rayons extrêmaux ainsi que la vitesse maximale du mobile en fonction de E_m, L_0 et k.

Q5. Déterminer la relation entre v_0 et r_0 pour observer un mouvement circulaire. Commenter le caractère uniforme/accéléré/décéléré d'un tel mouvement.

Corrigé: Etudier un mouvement à force centrale

Q1. On applique le théorème du moment cinétique au point O sur le système M dans le référentiel galiléen d'étude. La seule force de rappel étant dirigée vers O, son moment en O est nul, donc le moment cinétique sera constant.

De plus la force de rappel est une force conservative, il n'y a pas de force non conservative, le théorème de l'énergie mécanique amène donc à une énergie mécanique constante.

Q2. A $t = 0$: $L_O = mr_0v_0$ et $E_m = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_0^2) + \frac{1}{2}kr_0^2$

Q3. Le moment cinétique à un instant t s'écrit : $L_0 = mr^2\dot{\theta}$ donc :

$$\dot{\theta} = \frac{r_0v_0}{r^2}$$

Il vient dans l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kr^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{r_0^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2}_{E_{p,eff}(r)} \end{aligned}$$

On observe que $\dot{r}^2 > 0$ donc $E_m > E_{p,eff}(r)$ or $\lim_{r\to+\infty} E_{p,eff}(r) = +\infty$. Le mobile ne peut donc atteindre l'infini et on observe un état lié.

Si $v_0 = 0$, alors $E_{p,eff}(r) = E_p(r)$ et $\dot{\theta} = 0$. On a donc un mouvement rectiligne d'oscillations : c'est le mouvement d'un système masse-ressort déjà étudié précémment, on trouve un oscillateur harmonique.

Q4. Aux rayons extrémaux, $\dot{r} = 0$ donc $E_m = E_{p,eff}(r)$ soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\frac{r_0^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 &= E_m \\ \frac{1}{2}mr_0^2v_0^2 - E_mr^2 + \frac{1}{2}kr^4 &= 0 \end{aligned}$$

soit (en résolvant l'équation de degré 2 otgenue en posant $R = r^2$) :

$$r = \sqrt{\frac{E_m}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{km}{L_0^2E_m^2}}\right)} \tag{2}$$

La vitesse est maximale lorsque l'énergie cinétique est maximale donc lorsque l'énergie potentielle est minimale ($E_m = cste$) soit pour r minimale :

$$\begin{aligned} E_{c,max} &= E_m - \frac{1}{2}kr_{min}^2 \\ &= \frac{E_m}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{km}{L_0^2E_m^2}}\right) \\ v_{max} &= \sqrt{\frac{E_m}{m}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{km}{L_0^2E_m^2}}\right)} \end{aligned}$$

Q5. Le moment cinétique étant conservé, si $r = cste = r_0$, alors $\dot{\theta} = cste$ et le mouvement est <u>uniforme</u> à la vitesse v_0 Appliquons le PFD au système (en mouvement circulaire) et en projection sur $\vec{e}_r$:

$$-m\frac{v_0^2}{r_0} = -kr_0$$

Il vient :

$$\boxed{v_0 = \omega_0 r_0} \tag{3}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

II.3

♥ Méthode .3: Relation énergie-excentricité

Montrer que :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{K^2}{mC^2}(e^2 - 1) \tag{4}$$

et retrouver la relation entre le signe de E_m et le type de trajectoire.

ATTENTION : Cette relation NE PEUT PAS ETRE UTILISER DIRECTEMENT (INUTILE DONC DE L'APPRENDRE).

Corrigé: Relation énergie-excentricité

On utilise l'expression trouvée précédemment :
$E_m = \frac{1}{2}mC^2((\frac{du}{d\theta})^2 + u^2 - \frac{2K}{mC^2}u)$
or $u(\theta) = \frac{1+e\cos\theta}{p}$ soit $\frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{p}$. Donc :

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}mC^2((\frac{e\sin\theta}{p})^2 + (\frac{1+e\cos\theta}{p})^2 - \frac{2K}{mC^2}\frac{1+e\cos\theta}{p}) \\
&= \frac{1}{2}mC^2(\frac{e^2}{p^2}\sin^2\theta + \frac{e^2}{p^2}\cos^2\theta + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2}\cos\theta - \frac{2+2e\cos\theta}{p^2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{K^2}{mC^2}(e^2 - 1)
\end{aligned}$$

D'où le lien entre énergie mécanique et type de trajectoire en utilisant les valeurs particulières de l'excentricité.

II.3

♥ Méthode .4: Troisième loi de Kepler

Démontrer la troisième loi de Lepler sur une trajectoire circulaire.

Note : Le cas elliptique est admis.

Corrigé: Troisième loi de Kepler

On applique le PFD sur la planète dans le référentiel héliocentrique :

$$-M_P\frac{v^2}{R} = -\frac{GM_PM_S}{R^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

La période de rotation est donc : $T = \frac{2\pi R}{v}$ soit :

$$T^2 = \frac{4\pi R^3}{GM_S}$$
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi}{GM_S}$$

Le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ ne dépend donc bien PAS de la planète considérée.

Outre l'indépendance vis-à-vis de la planète, on retiendra aussi ce que vaut le rapport $\frac{T^2}{R^3}$.
Note : Le cas elliptique est admis.

♥ Méthode .5: Energie mécanique et ellipse

II.3 Q1. On considère le cas d'une force newtonienne et d'une trajectoire circulaire de rayon R. montrer que $E_m = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{K}{2R}$

Q2. On considère une trajectoire elliptique d'une planète autour du Soleil, montrer que $E_m = -\frac{K}{2a}$ avec a le demi-grand axe de l'ellipse. Pour cela :

- **Q2.a.** Exprimer une relation entre vitesse et rayon au périhélie et à l'aphélie.
- **Q2.b.** Exprimer l'énergie mécanique au périhélie et à l'aphélie.
- **Q2.c.** En déduire la relation demandée.

Corrigé: Energie mécanique et ellipse

Q1. En appliquant le PFD dans le cas de la trajectoire circulaire, on a obtenu : $v^2 = \frac{K}{mR}$ donc :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{R} = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}\frac{K}{R}$$

soit les égalités demandées.

Q2. Dans l'ordre :

- **Q2.a.** A l'aphélie et au périhélie, la vitesse est purement orthoradial de sorte que le moment cinétique s'écrit (indice A pour l'aphélie et P pour le périhélie) : $L_A = mv_Ar_A$ et $L_P = mv_Pr_P$. Le TMC conduit à la conservation du moment cinétique soit :

$$r_Av_A = r_Pv_P \tag{5}$$

- **Q2.b.** Il vient :

$$\begin{cases} E_{m,A} & = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} \\ E_{m,P} & = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GmM}{r_P} \end{cases} \tag{6}$$

- **Q2.c.** Le TEM montre que l'énergie mécanique est conservée. En multipliant les deux équations précédentes par r_A^2 et r_P^2 et en utilisant $r_AV_A = r_Pv_P$, il vient :

$$(r_A^2 - r_P^2)E_m = -GmM(r_A - r_P) \tag{7}$$

d'où la relation demandée avec $a = r_P + r_A$

♥ Méthode .6: Vitesses corsmiques et orbite géostationnaire

II.3 **Q1.** Exprimer la première vitesse cosmique v_1 en fonction de G, M_T et R_T

Q2. Exprimer la seconde vitesse cosmique v_2 en fonction de G, M_T et R_T

Q3. Montrer que l'orbite d'un satellite géostationnaire est nécessairement contenue dans le plan équatorial.

Q4. Déterminer le rayon de l'orbite géostationnaire.

Corrigé: Vitesses corsmiques et orbite géostationnaire

Q1. On applique un PFD au satellite dans le référentiel de la Terre, supposé galiléen et on le projette sur $\overrightarrow{e}_r$:

$$-m\frac{v_1^2}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{R_T^2} \Longrightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7.9\text{km.s}^{-1}} \tag{8}$$

Q2. A la vitesse minimale, le satellite atteint l'infini avec une vitesse nulle et $E_p(r) < E_p(\infty) = 0$ pour tout $r > R_T$, il n'y a pas de barrière de potentiel à franchir : si $E_m = E_p(\infty) = 0$, alors le satellite atteindre l'infini. On applique le TEM entre R_T et l'infini (où $E_m = 0$) :

$$0 - \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{GM_Tm}{R_T} = 0 \Longrightarrow \boxed{v_E = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11.2\text{km.s}^{-1}} \tag{9}$$

Q3. Dans un mouvement à force centrale, le plan du mouvement doit passer par le centre de force, ici le centre de la Terre. De plus, le satellite étant fixe par rapport à un point de la Terre, son mouvement doit être inclus dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre (axe des pôles). <u>Le seul plan ayant les deux propriétés est le plan équatorial</u>.

Q4. On applique un PFD au satellite dans le référentiel de la Terre, supposé galiléen et on le projette sur $\overrightarrow{e}_r$:

$$-mR_G\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_Tm}{R_G^2}$$

Le satellite étant géostationnaire, sa vitesse angulaire est donnée par $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = 24h$ la période de rotation. Il vient :

$$\boxed{R_G = \left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 36 \times 10^3\text{km}} \tag{10}$$

On aurait pu utiliser la troisième loi de Kepler.

♥ Méthode .7: Exemple d'étude du mouvement d'un satellite.

On souhaite transférer un satellite depuis une orbite circulaire rasante de rayon R_T autour de la Terre sur son orbite géostationnaire de rayon R_G. On fera l'étude dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire Ω. On suppose que le satellite a une masse de $m = 1,5$t donc petite devant la masse de la Terre. On note O le centre de la Terre.

Le transfert s'effectue de son orbite basse géostationnaire s'effectue de la manière suivante : on communique au satellite une brusque variation de vitesse en un point P de sa trajectoire en éjectant des gaz pendant un intervalle de temps très court dans le sens opposé à la vitesse du satellite. Il suit alors une orbite elliptique et lorsque sa trajectoire croise la droite OP au point A, on lui communique un supplément de vitesse pour le stabiliser sur l'orbite géostationnaire.

II.3 **Q1.** En utilisant la conservation de l'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique, établir l'expression de l'énergie mécanique en fonction de G, M_T, m et a le demi grand axe de l'ellipse.

Q2. Donner la valeur de l'énergie mécanique sur l'ellipse de transfert.

Q3. Etablir l'expression de la vitesse du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de R_G, R_T, r, G et M_T.

Q4. Donner la valeur de vitesse qu'il faut imposer en P puis en A. Déterminer la variation de l'énergie mécanique en P puis en A.

Q5. Déterminer la durée du mouvement.

Corrigé: Exemple d'étude du mouvement d'un satellite.

Q1. Cf. la méthode .5. *Il est vivement conseillé de se réentrainer à cette démonstration.* On trouve :

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_Tm}{2a}} \tag{11}$$

Q2. Ici : $\boxed{E_m = -\frac{GM_Tm}{R_T + R_G}}$

Q3. Le système est conservatif puisque la seule force qui s'applique à l'action gravitationnelle qui est conservative. Il vient que $E_m = cste$. Le TEM peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{R_T + R_G}$$

soit :

$$\boxed{v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + R_G}\right)}} \tag{12}$$

Q4. $v_P = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+R_G}\right)}$

De plus, sur la trajectoire circulaire initiale, $E_{mi} = -\frac{GM_Tm}{2R_T}$ donc la variation d'énergie mécanique est :

$$\boxed{\Delta E_m = -\frac{GM_Tm}{R_T + R_G} + \frac{GM_Tm}{2R_T} = GM_Tm\frac{R_G - R_T}{2R_T\left(R_T + R_G\right)}} \tag{13}$$

$v_A = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_G} - \frac{1}{R_T+R_G}\right)}$

De plus, sur la trajectoire circulaire finale, $E_{mf} = -\frac{GM_Tm}{2R_G}$ donc la variation d'énergie mécanique est :

$$\boxed{\Delta E_m = \frac{GM_Tm}{R_T + R_G} - \frac{GM_Tm}{2R_G} = GM_Tm\frac{R_G - R_T}{2R_G\left(R_T + R_G\right)}} \tag{14}$$

Q5. La fusée parcourt la moitié de l'ellipse complète [a]. La loi des aires, qui s'applique ici car le mouvement est central implique que $\Delta t = \frac{T}{2}$ avec T la période de révolution totale sur l'orbite elliptique.

La troisième loi de Kepler donne :

$$\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2\left(R_T + R_G\right)^3}{GM_T 2^3}} = \sqrt{\frac{\pi^2\left(R_T + R_G\right)^3}{8GM_T}}} \quad (15)$$

Si l'on ne connait pas le produit GM_T, on peut utiliser la troisième loi de Kepler sur la trajectoire géocentrique :

$$\frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{T_{24h}^2}{R_G^2}$$

avec $T_{24h} = 24h$ la période de rotation terrestre et donc du satellite géostationnaire.
Il vient :

$$\boxed{\Delta t = \frac{T_{24h}}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{R_T}{R_G}\right)^{3/2} = 5.4h} \quad (16)$$

a. L'aire balayée est la moitié de celle de l'ellipse