Corriges

♥ Méthode .1: Valeur efficaces de sinusoïdes

III.1 Q1. On considère un signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence f et d'amplitude S_m. Donner son expression mathématique puis calculer sa valeur efficace.

Q2. On considère deux signaux sinusoïdal $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de fréquences respectives f_1 et f_2 et d'amplitudes respectivement S_1 et S_2. Montrer que si $f_1 \neq f_2$ alors la valeur efficace du signal sera :

$$S_{eff} = \sqrt{S_{1,eff}^2 + S_{2,eff}^2} \tag{1}$$

avec $S_{1,eff}$ et $S_{2,eff}$ les valeurs efficaces de chaque signaux séparés.

Corrigé: Valeur efficaces de sinusoïdes

Q1. $s(t) = S_m \cos(2\pi f t)$. On utilise la définition de la valeur efficace :

$$\begin{aligned}
S_{eff} &= \sqrt{\frac{f}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{f}} S_m^2 \cos^2(2\pi f t)\,dt} \\
&= S_m\sqrt{\frac{f}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{f}} \frac{\cos(4\pi f t)+1}{2} dt} \\
&= \frac{S_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{f}{2\pi}\left[\frac{1}{4\pi f}\sin(4\pi f t) + t\right]_0^{\frac{2\pi}{f}}} \\
&= \boxed{\frac{S_m}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Q2. Commençons par le carré de la somme :

$$s^2(t) = (s_1(t) + s_2(t))^2 = s_1^2(t) + s_2^2(t) + 2s_1(t)s_2(t)$$

On peux remarque que la valeur moyenne des deux premiers termes correspond à $S_{1,eff}^2$ et $S_{2,eff}^2$. Pour le troisième :

$$\begin{aligned}
2s_1(t)s_2(t) &= 2S_1S_2\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t) \\
&= S_1S_2\left(\cos(2\pi(f_1+f_2)t) + \cos(2\pi(f_2-f_1)t)\right)
\end{aligned}$$

Si $f_1 \neq f_2$ alors on doit calculer la valeur moyenne de deux cosinus qu'on sait nulle : il vient que :

$$\boxed{S_{eff} = \sqrt{S_{1,eff}^2 + S_{2,eff}^2}} \tag{2}$$

- ⋆ *On remarquera que l'opérateur valeur efficace n'est pas linéaire puisque $(s_1 + s_2)_{eff} \neq s_{1,eff} + s_{2,eff}$.*
- ⋆ *(HP) Si chaque terme de la somme développée est périodique et permet le calcul d'une valeur moyenne, la somme n'est plus un signal périodique si f_1/f_2 n'est pas un rapport rationnel. On peut toujours définir une valeur moyenne (basée sur l'idée d'une période infinie et d'un passage à la limite) mais ce calcul est hors programme.*

♥ Méthode .2: Sinusoïdes de même fréquence

On considère deux sinusoïdes de même fréquence f et de même amplitude S_m mais dont les phases à l'origine sont différentes ϕ_1 et ϕ_2.

III.1 Q1. Montrer que la somme des deux signaux est aussi un signal sinusoïdal de même fréquence et dont on déterminera l'amplitude.

Q2. En déduire l'expression de la valeur efficace de la somme. A-t-on la même relation que dans l'exercice précédent ?

Corrigé: Sinusoïdes de même fréquence

*Le calcul de l'exercice précédent permet déjà de répondre partiellement à la deuxième question : si $f_1 = f_2$, l'un des deux cosinus devient une grandeur constante de valeur moyenne non nulle : l'égalité de l'exercice précédent n'est plus vraie. Ce principe sera la base mathématique de l'étude des **interférences**.*

Q1. Il vient :

$$\begin{aligned} s(t) &= S_m\left[\cos\left(2\pi f t + \phi_1\right) + \cos\left(2\pi f t + \phi_2\right)\right] \\ &= 2S_m \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\cos\left(2\pi f t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'un sinusoïde de même fréquence mais d'amplitude $2S_m \cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$[a].

Q2. En utilisant l'exercice précédent : $\boxed{S_{eff} = \dfrac{2S_m \cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)}{\sqrt{2}}}$ au lieu de S_m (ce que donnerait l'exercice précédent).

a. Donc pas d'amplitude $2S_m$, c'est la cause des interférences que nous verrons plus tard.

♥ Méthode .3: Caractéristiques d'un sinusoïde

III.1 Q1. Donner l'expression mathématique s(t) :

Q1.a. d'un sinusoïde de pulsation 4ω, d'amplitude 2a et de phase à l'origine $-\pi/5$.

Q1.b. d'un sinusoïde de période $2T/3$, d'amplitude 4a (si rien n'est précisé, on considère que la phase à l'origine est nulle).

Q1.c. d'un sinusoïde de fréquence 3f, d'amplitude 2a, de valeur moyenne - S_1 et de phase à l'origine $\pi/3$.

Q2. Réaliser la représentation graphique de s(t) pour les expressions précédentes. On prendra a=1, T=1, $\omega = \pi$, f=1, $S_1 = 2$

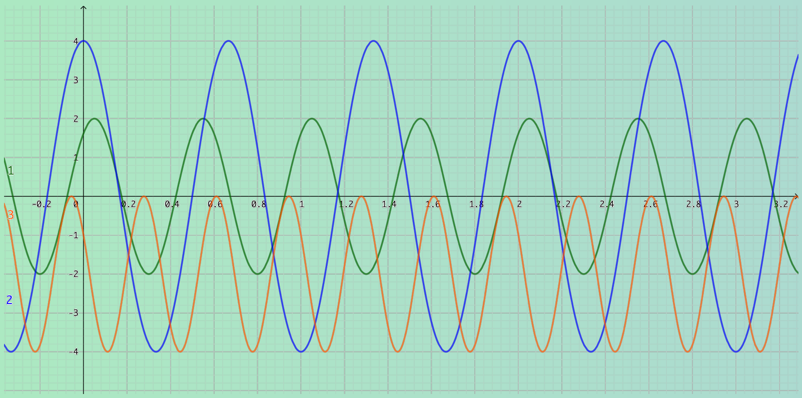
Q3. Donner les caractéristiques (période, fréquence, pulsation, amplitude, valeur moyenne, phase à l'origine) des signaux suivants :

Q3.a. $s(t) = \frac{1}{2k+1}\sin\left(2k+1\right)\omega t$

Q3.b. $s(t) = 7\omega\cos(2ft + 3)$

Q3.c. $s(t) = 3a\cos(\frac{2\pi n}{T}t) + 4c$

Tracés temporels attendus :



Corrigé: Caractéristiques d'un sinusoïde

Pour rappel : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *avec* ω *la pulsation et* T *la période.*

Q1. $s_a(t) = 2a\cos(4\omega t - \pi/5)$; $s_b(t) = 4a\cos\left(\frac{3\pi}{T}t\right)$; $s_c(t) = 2a\cos(6\pi f t + \pi/3) - S_1$;

Q2. Cf. sujet. *Conseils : commencer par tracer l'allure du sinusoïde puis placer les axes. Dans les cas que nous verrons ensuite, la phase sera quelconque, il suffit alors de décaler l'axe des ordonnées sans lui donner une valeur particulière.*

Q3. *La lecture des caractéristiques ne se fait pas par rapport au nom des grandeurs mais à leur position dans la structure mathématique. Ainsi*

- *L'amplitude est le facteur multiplicatif du sinusoïde* $\boxed{A}\sin\omega t + \phi$.
- *La pulsation est le facteur multiplicatif devant le temps* $A\sin\boxed{\omega}t + \phi$.

Q3.a. $s(t) = \boxed{\frac{1}{2k+1}}\sin\boxed{(2k+1)\omega}t$ donc :

- Amplitude : $\frac{1}{2k+1}$
- Pulsation$(2k+1)\omega$
- Période : $\frac{2\pi}{(2k+1)\omega}$
- Fréquence : $\frac{(2k+1)\omega}{2\pi}$
- Valeur moyenne nulle
- Phase à l'origine nulle

Q3.b. $s(t) = \boxed{7\omega}\cos(\boxed{2f}t + 3)$

- Amplitude : 7ω
- Pulsation$2f$
- Période : $\frac{2\pi}{2f}$
- Fréquence : $\frac{f}{\pi}$
- Valeur moyenne nulle
- Phase à l'origine : 3

Q3.c. $s(t) = \boxed{3a}\cos(\boxed{\frac{2\pi n}{T}}t) + 4c$

- ⋆ Amplitude : $3a$
- ⋆ Pulsation$\frac{2\pi n}{T}$
- ⋆ Période : T/n
- ⋆ Fréquence : $\frac{n}{T}$
- ⋆ Valeur moyenne 4c
- ⋆ Phase à l'origine : nulle

♥ Méthode .4: Déphasage

On considère deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω et d'amplitudes quelconques.

III.1 Q1. Montrer que le déphasage du signal 2 sur le signal 1 est $\Delta\Phi_{2/1} = -\omega\Delta t_{2/1}$ où $\Delta t_{2/1}$ est le retard temporel du signal 2 sur le signal 1.

Q2. Déterminer numériquement le déphasage du signal vert sur le signal rouge.

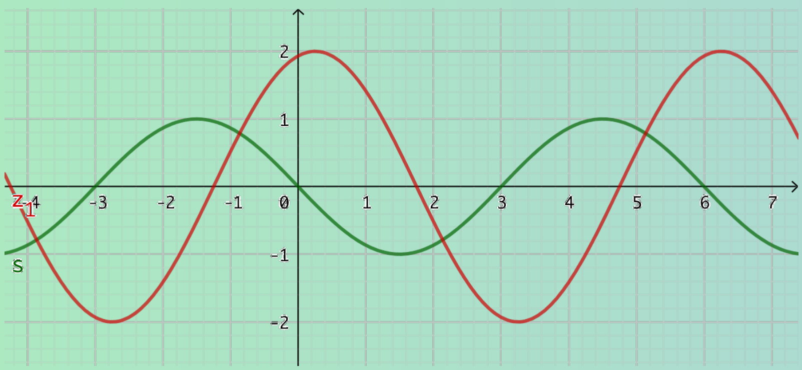


FIGURE 1 – Mesure d'un déphasage

Corrigé: Déphasage

Q1. On cherche Δt tel que : $S_1\cos(\omega t+\phi_1) = S_2\cos(\omega(t+\Delta t)+\phi_2)$ soit $\omega t+\phi_1 = \omega(t+\Delta t)+\phi_2$ donc : $\omega\Delta t = \phi_1 - \phi_2 = -\Delta\phi_{2/1}$

Q2. Commençons par mesurer le **retard temporel** du signal vert sur le signal rouge. C'est une grandeur algébrique, il faut donc tenir compte de l'ordre des deux signaux. Ici, **le signal vert est en avance, donc le retard est négatif.**

Ce retard se mesure entre deux points ayant la même valeur en ordonnée. Il est conseillé de mesurer le retard entre deux points où la fonction s'annule (ou atteint sa valeur moyenne) pour des questions de précision. On mesure ici $\Delta t = -1.8s$.

On doit ensuite utiliser la relation prouvée précédemment $\Delta\phi = -\omega\Delta t$. La pulsation s'obtient en mesurant la période. Ici T = 6s donc $\omega = \pi/3 = 1\text{rad.s}^{-1}$.

Il vient $\boxed{\Delta\phi = 1.8\text{rad}}$

♥ Méthode .5: Tracer le spectre d'un signal périodique

On considère le signal triangle :

$$s(t) = \begin{cases} a(t-\frac{T}{4}) \text{ si } x \in [0;T/2] \\ -a(t-\frac{3T}{4}) \text{ si } x \in [T/2;T] \end{cases}$$

dont la décomposition en série de Fourier est :

$$s(t) = \frac{8aT}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\left[(2n+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

III.1 Q1. Justifier que ce signal est périodique de période T.

Q2. Représenter le spectre du signal.

Corrigé: Tracer le spectre d'un signal périodique

Q1. Dans une décomposition en série de Fourier, la période du signal correspond à la période du fondamental, donc de la composante de plus basse fréquence. Ici, c'est pour n=0, soit une pulsation (on ne peut lire directement qu'une pulsation) $\frac{2\pi}{T}$ donc une période T.

Q2. *La méthode pour tracé un spectre connaissant la décomposition spectrale est :*

1. *Déterminer les pulsations puis les fréquences qui composent le spectre. On a ici une série. La pulsation de chaque terme se lit dans le sinus* $\sin[\boxed{(2n+1)\frac{2\pi}{T}}t]$.

   Les pulsations du signal sont donc les pulsations $\omega_n = (2n+1)\frac{2\pi}{T}$ donc les fréquences $f_n = \frac{2n+1}{T}$. On peut alors placer les fréquences sur un graphique.

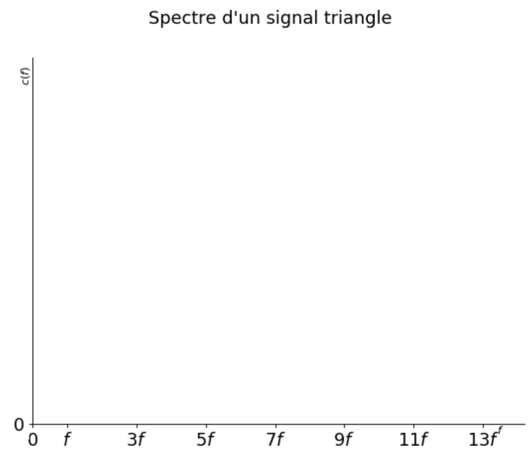


Figure 2 – Placement des fréquences

2. *Déterminer les amplitudes associées à des fréquences.* *Si les fréquences sont isolées, on lit l'amplitude comme le facteur devant le sinus/cosinus. Dans le cas d'une somme, on va déterminer la fonction qui associe le n-ième rang (puis la fréquence) à l'amplitude.* Ici l'amplitude de chaque sinusoïde a pour expression $c(n) = \frac{8aT}{\pi^2(2n+1)^2}$. L'étude précédente $(2n+1 = f_n T)$ permet d'exprimer c_n en fonction de f_n :

$$c(f_n) = \frac{8aT}{\pi^2 T^2 f_n^2} \tag{3}$$

On trace alors (en pointillés) la fonction $c(f)$ [a] *et on trace des traits représentant les amplitudes pour les composantes spectrales réellement présentes (Figure 3)* [b].

a. Si vous êtes assez à l'aise avec les formes mathématiques, vous pouvez vous limiter à $c(n)$ pour tracer la fonction de $c(f)$ en remarquant que la forme sera la même (la forme suffit puisque les coefficients sont littéraux).

b. Attention, la courbe $c(f)$ n'est PAS le spectre, c'est juste une aide graphique pour pouvoir placer rapidement les composantes aux abscisses f_n. Seules les "barres" correspondent au spectre.

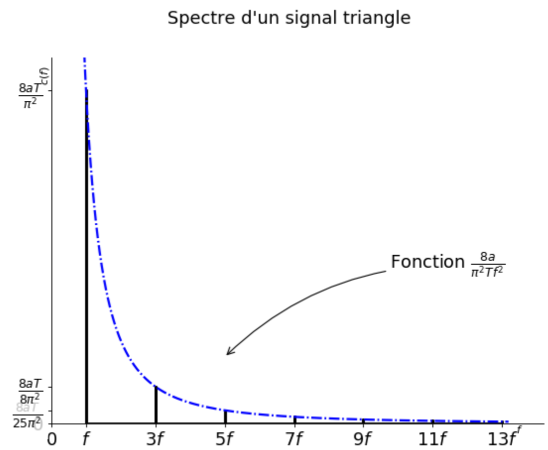


FIGURE 3 – Spectre du signal triangle

♥ Méthode .6: Modulation en amplitude

On considère deux signaux sinusoïdaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de fréquence f_1 et f_2 d'amplitude u_{1m} et u_{2m} de phase à l'origine nulle tous les deux. On multiplie les deux signaux $u_S(t) = k u_1(t) \times u_2(t)$ avec k une constante connue.

III.1 Q1. Donner les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ puis de $u_S(t)$

Q2. On prend $f_1 = 10 f_2$ et $u_{2m} = 2u_{1m}$, représenter graphiquement u_S. Justifier le terme de modulation en amplitude. Où ce principe est utilisé ?

Q3. Montrer que le signal se décompose comme la somme de deux composantes spectrales dont on déterminera la fréquence et l'amplitude.

Q4. Représenter le spectre du signal u_S.

Corrigé: Modulation en amplitude

La modulation d'amplitude est un outil de traitement du signal très utile et important en physique. Nous verrons par la suite des applications possibles.

Q1. Les deux signaux entrant s'écrivent : $u_1(t) = u_{1m}\cos(2\pi f_1 t)$ et $u_2(t) = u_{2m}\cos(2\pi f_2 t)$.

Il vient pour le signal de sortie : $\boxed{u_S(t) = k u_{1m} u_{2m} \cos(2\pi f_2 t)\cos(2\pi f_1 t)}$

Q2. *Le tracé d'une telle fonction ne doit pas nécessiter une calculatrice et doit faire apparaître des caractéristiques précises. Il faut ainsi remarquer que comme $f_2 \ll f_1$, le facteur $k u_{1m} u_{2m}\cos(2\pi f_2 t)$ varie peu sur une période $1/T_1$ et peut donc s'apparenter localement à l'amplitude du sinusoïde de fréquence f_1. Mais comme cette "amplitude" varie au cours du temps, on parlera d'amplitude modulée (ou plutôt de **modulation d'amplitude**)*

- ⋆ *On commence par tracer l'**enveloppe** (trait discontinu) qui correspond à l'amplitude variable $k u_{1m} u_{2m}\cos(2\pi f_2 t)$ et son opposé (la fonction $u_S(t)$ atteindra ces enveloppes quand $\cos(2\pi f_1 t)$ sera* *égale à 1 et -1). Cela dessine <u>les valeurs maximales accessibles</u>, d'où le nom d'enveloppe. L'enveloppe étant ici un sinusoïde, on se ramène à la méthode vue précédemment pour tracer une sinusoïde.*

⋆ *On trace alors la fonction comme un sinusoïde de fréquence f_1 contenu dans l'enveloppe. Il faut faire attention au nombre de sinusoïde dans une période (il doit ici y en avoir 10 car $f_1 = 10f_2$).*

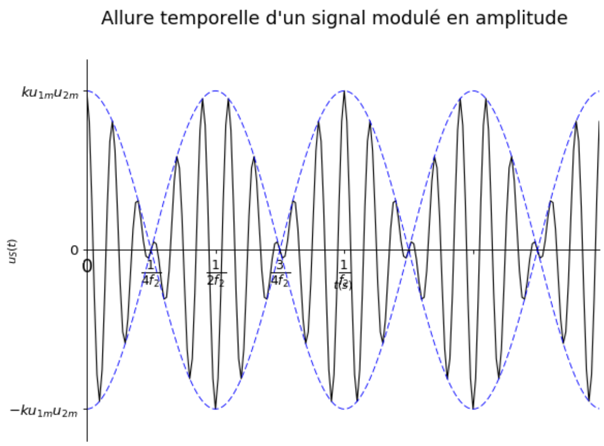


Figure 4 – Signal modulé en amplitude

Q3. Pour obtenir le spectre lorsque le signal est un produit de sinusoïde, il faut procéder par **linéarisation**.

$$u_S(t) = \frac{ku_{1m}u_{2m}}{2}\left(\cos(2\pi(f_1 + f_2)t) + \cos(2\pi(f_1 -\right.$$

Le spectre est donc composée de deux composantes de fréquences $f_1 + f_2 = 11f_2$ et $f_1 - f_2 = 9f_2$. Elles ont toutes les deux une amplitude $\frac{ku_{1m}u_{2m}}{2}$.

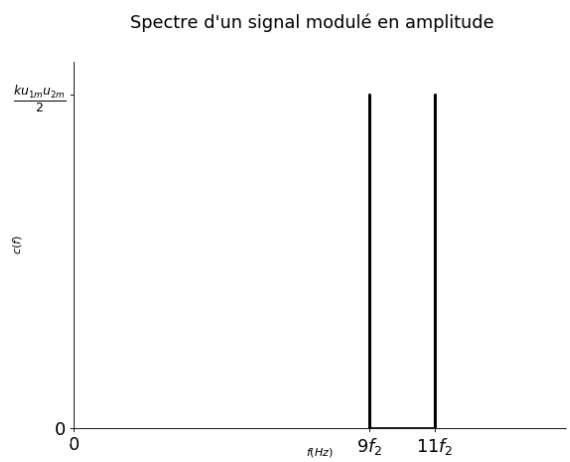


Figure 5 – Spectre du signal modulé