♥ Méthode .1: Calcul du travail d'une force

On considère un point M sur une trajectoire circulaire de rayon R dans un plan vertical. On suppose qu'il glisse sans frottements à une vitesse v_0 constante sur le cercle sous l'effet d'une force "motrice" $\overrightarrow{F}$ tangente au cercle.

On pose un repère cylindrique d'axe Oz l'axe du cercle et l'origine des angle θ au point le plus bas du cercle.

III.2 **Q1.** Exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction m, g et θ.

Q2. En déduire le travail apporté par $\overrightarrow{F}$ au système lorsqu'il passe de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ par un calcul direct du travail.

Q3. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

Corrigé: Calcul du travail d'une force

ATTENTION : on n'est dans un mouvement uniforme mais PAS rectiligne : l'accélération n'est PAS nulle.

On applique le PFD à la masse m dans le référentiel du cercle supposé galiléen. Les actions qui s'appliquent sont :

- son poids : $\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\overrightarrow{e}_r - mg\sin\theta\overrightarrow{e}_\theta$
- l'action de la piste circulaire : $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e}_r$ (normale car pas de frottements).
- l'action motrice $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e}_\theta$

Q1. Le mouvement étant circulaire uniforme, on en déduit l'accélération : $\overrightarrow{a} = -\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e}_r$ donc :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e}_r = mg\cos\theta\overrightarrow{e}_r - mg\sin\theta\overrightarrow{e}_\theta + R\overrightarrow{e}_r + F\overrightarrow{e}_\theta$$

soit en projetant sur $\overrightarrow{e}_\theta$:

$$\boxed{\overrightarrow{F} = mg\sin\theta\overrightarrow{e}_\theta} \tag{1}$$

Q2. *On doit calculer le produit scalaire $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dOM}$ avant de l'intégrer. Le déplacement élémentaire se déterminer pour la trajectoire étudiée. Ici on est sur une trajectoire circulaire donc suivant $\overrightarrow{e}_\theta$, le déplacement élémentaire est donc : $\overrightarrow{dOM} = Rd\overrightarrow{\theta}$.*

$$\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dOM} = FRd\theta = mgR\sin\theta d\theta$$

Le calcul précédent met en évidence la variable d'intégration (ici θ), il faut ensuite réfléchir aux bornes d'intégration. Elle sont ici imposée : 0 et π donc :

$$W(\overrightarrow{F}) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} mgR\sin\theta d\theta = 2mgR \tag{2}$$

Q3. On applique donc le théorème de l'énergie mécanique entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Calculons d'abord pour chaque action le travail ou la variation d'énergie mécanique :

- Le poids dérive d'une énergie potentielle : $\Delta E_{p,pes} = mgh_f - mgh_i = 2mgR$
- L'action de la piste ne travaille pas car elle est toujours perpendiculaire au mouvement [a].
- Le travail de $\overrightarrow{F}$ est ce qu'on cherche, on le note $W(\overrightarrow{F})$.

La vitesse étant constante, l'énegie cinétique ne varie pas : $\Delta E_c = 0$. Le TEM s'écrit donc :

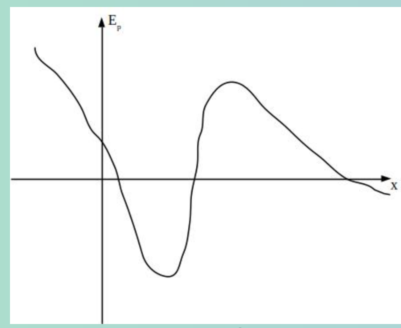
$$\Delta E_p + \Delta E_c = W(\overrightarrow{F})$$
$$2mgR + 0 = W(\overrightarrow{F})$$

On retrouve la même expression.

a. Pensez aux considérations géométriques plutôt que de faire un calcul de travail qui donnera 0...

Il peut arriver qu'une force soit conservative sans qu'on s'en rende compte. On calcule alors son travail par intégration et non pas différence d'énergie potentielle. **Ce n'est pas faux tant qu'on ne compte qu'une seule fois l'échange énergétique**.
Mais si on est censé connaître l'énergie potentielle associée, ce n'est pas très malin...

♥ Méthode .2: Etude graphique d'un système conservatif



Nous allons travailler à titre d'exemple sur le profil d'énergie potentiel ci-contre. *On pourra, pour comprendre les interprétations physiques les associer à une énergie potentielle de pesanteur et donc à un profil d'altitude. Par exemple pour une bille roulant sans frottements sur ce profil.*

III.2 Q1. Rappeler quelle propriété possède l'énergie mécanique.

Q2. Repérer les positions d'équilibre (notée $O_0(x_0)$ et $O_1(x_1)$ (telles que $x_0 < x_1$)) ? Préciser leur stabilité. On notera $E_m(O_0) = E_{m1}$ et $E_m(O_1) = E_{m5}$.

On travaille pour l'instant avec une valeur d'énergie mécanique telle que $E_m > E_{m5}$. On note cette valeur $E_m = E_{m3}$.

Q3. Représenter E_m sur le schéma.

Q4. Justifier qu'il existe, pour l'énergie choisie des zones inaccessibles.

Q5. En un point x accessible, représenter graphiquement, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Comment évolue cette dernière lorsque E_p augmente ? lorsque E_p diminue. En déduire les positions où la vitesse sera maximale.

Q6. En quelle position la vitesse est nulle (notée $C(x_C)$) ?

Q7. Si à $t = 0$, $\dot{x} < 0$, justifier que :

Q7.a. la position du mobile va d'abord continuer à diminuer jusqu'à atteindre C.

Q7.b. le mobile ne peut s'immobiliser en C et va ensuite repartir vers les x croissants.

Q7.c. le mobile va atteindre l'infini.

Q8. Comment appele-t-on un tel état ?

On travaille maintenant avec un état où $0 < E_m < E_{m5}$. On note cette valeur $E_m = E_{m4}$.

Q9. Justifier qu'il existe deux intervales possibles de positions et que si le système est sur l'un des deux intervalles, il ne peut passer à l'autre. On parlera de **barrière de potentiel**.

Q10. Justifier qu'il existe donc un état de diffusion et un état lié possible.

Q11. On considère l'état lié.

Q11.a. Repérer les deux points D et E extrêmes du mouvement.

Q11.b. Justifier qu'on observe un mouvement oscillant entre ces deux points extrêmes. ⇝ Pourquoi celui-ci est périodique ?

Corrigé: Etude graphique d'un système conservatif

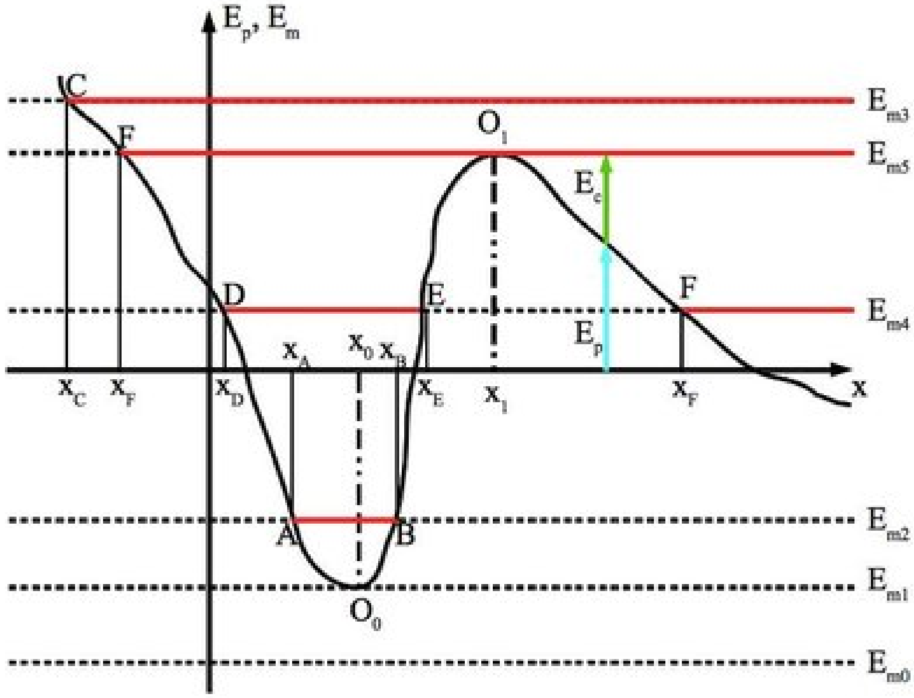


FIGURE 1 – Etude graphique du système

Q1. Le système étant conservatif, le TEM amène à $E_m = Cste$.

Q2. Il s'agit des extrema de E_p (cf. Figure 1). O_0 est un minimum, c'est une position d'équilibre stable. A l'inverse, O_1 est un maximum, c'est une position d'équilibre instable.

Q3. cf. Figure 1. L'énergie mécanique étant constante, elle a la même valeur, quelque soit x.

Q4. $E_c > 0$ [a] donc $E_m > E_p(x)$, les positions x où $E_p(x) > E_m$ sont donc inaccessibles (ici pour $x < x_C$).

Q5. cf. Figure 1. $E_p(x)$ se lit directement sur la courbe et on a $E_c = E_m - Ep$ d'où la lecturte graphique. L'expression précédente montre que E_c diminue lorsque E_p augmente et vice-versa. La vitesse sera donc maximale aux minima d'énergie potentielle (ici en O_0)

Q6. La vitesse est nulle lorsque $E_c = 0$ donc lorsque $E_m = E_p$ soit au point C représenté sur le schéma pour $E_m = E_{m3}$.

Q7. Cas $E_m = E_{m3}$.

Q7.a. $\dot{x}(t)$ est continue et ne peut s'annuler avant le point C (cf. questions précédentes), donc la vitesse continue à être négative et x diminue jusqu'au point C.

Q7.b. On a vu que la vitesse s'annulait en C mais pour autant la force est nulle car $F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{dx}} > 0$ (car l'énergie potentielle est décroissante en C). Le mobile ne peut donc s'y arrêter et le signe de $F(x)$ montre qu'il va repartir vers le x croissants.

Q7.c. Ensuite, on peut remarquer que la vitesse ne va jamais s'annuler, elle reste donc positive et x ne fait que croître : **l'absence de barrière d'énergie potentielle garantit au mobile de pouvoir atteindre l'infini.**

Q8. Il s'agit d'un état de diffusion.

Q9. Une position accessible nécessite $E_m > E_p(x)$, pour $E_m = E_{m4}$, il vient donc les intervalles $[x_D, x_E]$ et $[x_F + \infty[$.

Mais la fonction $x(t)$ étant nécessairement continue (!!) le mobile ne peut passer d'un intervale à l'autre.

Q10. Dans un cas, mobile est limité entre les positions x_D et x_E : c'est un état lié. Dans l'autre, il pourra atteindre l'infini, c'est un état de diffusion.

Q11. Etat lié.

Q11.a. Le même raisonnement que pour le point C implique que le mobile ne peut rebrousser chemin qu'en des points où $\dot{x} = 0$, soit uniquement en x_D et en x_E.

Q11.b. De même, $F(x_D) > 0$ et $F(x_E) < 0$: le mobile va donc se dériger vers D, puis vers E, puis D...on a bien un mouvement oscillant.

$\rightsquigarrow$ On peut rermarquer que pour chaque déplacement de D vers E, le profil de vitesse $v(x)$ est le même puisque la forme de E_p et la valeur de E_m ne change pas (on rappelle que $E_c = E_m - E_p$), il vient que chaque passage dans ce sens se fera de la même manière. Le raisonnement s'appliquant aussi pour les passages de E vers D, il vient que le mouvement sera périodique.

En prolongeant le raisonnement précédent, on peut remarquer que les mouvements de D vers E et de E vers D seront symétriques.

a. Cette justification doit systèmatiquement être donnée pour utiliser $E_m > E_p$.

♥ Méthode .3: Etudier un système conservatif

On reprend l'exercice du saut à l'élasique vu dans le chapitre précédent. L'élastique est toujours modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 lorsqu'il est tendu et n'exerce aucune force lorsqu'il est détendu.

III.2 Q1. A quelle hauteur remonterait une masse test M de masse minimale (ici $m = 65\text{kg}$) si elle est lâchée sans vitesse initiale, l'élastique tendu au maximum : le point d'attache est à la hauteur $h = 18\text{m}$ au dessus du point de départ.

Q2. Déterminer la position d'équilibre de la masse M et étudier sa stabilité.

Corrigé: Etudier un système conservatif

Q1. On paramètre un axe vertical descendant où $z = 0$ lorsque la loongueur de l'élastique est l_0. Les seules actions qui s'appliquent sur le système {masse-test} sont :

- ⋆ le poids
- ⋆ l'action de l'élastique lorsqu'il est tendu.

Ces deux forces étant conservatives, le système est conservatif et l'énergie mécanique est conservée.

- ⋆ L'énergie potentielle de rappel élastique est $E_{p,el} = \frac{1}{2}kz^2$ si $z > 0$ et nulle sinon.
- ⋆ L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{p,pes} = -mgz$

L'énergie potentielle totale est donc :

$$\begin{cases} E_p &= \frac{1}{2}kz^2 - mgz \text{ si } z > 0 \\ E_p &= -mgz \text{ si } z < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Positions extrèmes : Le système étant conservatif, le TEM appliqué entre la position de départ et la hauteur maximale (z_m où $\dot{z} = 0$) s'écrit $E_m(z_m) - E_m(z_0) = 0$ avec $z_0 = h$. Soit (on fait l'hypothèse que $z_m < 0$) :

$$0 = -mgz_m - \left(\frac{1}{2}kh^2 - mgh\right)$$
$$z_m = h - \frac{k}{2mg}h^2$$

Q2. Les positions d'équilibre correspondent aux extremum d'énergie potentielle, on étudie donc $E_p(z)$ [a].

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{dz}} = kz - mg \Longrightarrow z_{eq} = \frac{mg}{k}$$

On calcule la dérivée seconde **en** z_{eq} : $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{dz}}(z_{eq}) = k > 0$ la position d'équilibre est donc **stable.**

Il est important de comprendre que pour la recherche de position d'équilibre et la stabilité, on dérive ***par rapport à la position et non par rapport au temps.***

a. sur la partie $z > 0$ car il est évident que pour $z < 0$ il n'y a pas d'extremum puisque c'est l'équation d'une droite

♥ Méthode .4: Déterminer une vitesse en fonction d'une position

On considère une masse m ponctuelle qui se déplace sans frottements sur une demie-sphère de centre O et de rayon R. Elle est soumise à un champ de pesanteur g et est lâchée du sommet avec une vitesse très faible vers la droite.

III.2 Q1. Exprimer en un angle θ le carré de la vitesse angulaire $\dot{\theta}^2$.

Q2. En déduire si la masse va décoller de la sphère.

Corrigé: Déterminer une vitesse en fonction d'une position

On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz perpendiculaire au plan du mouvement (le mouvement est plan puisque les deux forces sont dans un même plan et la vitesse initiale dans le même plan) où O est le centre de la sphère. La vitesse et l'accélération s'écrivent alors

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$
$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Les deux forces qui s'appliquent sont

- ⋆ le poids $\vec{P} = -mg\cos\theta\vec{e_r} + mg\sin\theta\vec{e_\theta}$
- ⋆ l'action du toboggan supposée normale par l'absence des frottements $\vec{N} = N\vec{e_r}$. **La condition de contact s'écrit** $N > 0$**.**

Il est inutile d'essayer d'intégration l'équation différentiel obtenue par le PFD, on verra qu'elle est non linéaire et ne peut s'intégrer analytiquement.

Q1. On applique le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et $t = t$. Remarquons que

- ⋆ la réaction du toboggan ne travaille pas
- ⋆ le poids dérive d'une énergie potentielle :

$$\Delta E_{p,pes} = mgx(t) - mgx(0) = mg(\cos\theta - 1)$$

Il n'y a donc pas de force non-conservative : l'énergie mécanique est une constante. Il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta E_c + \Delta E_p &= 0\\
\left(\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - 0\right) + mgR\left(\cos\theta - 1\right) &= 0\\
mR\dot{\theta}^2 &= 2mg\left(1 - \cos\theta\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}\left(1 - \cos\theta\right)} \tag{4}$$

Q2. La condition de contact est $N > 0$. On va donc vérifier si elle reste vraie. Si elle s'annule, il y aura décollement. On applique le PFD à la masse [a]

$$\begin{aligned}
-mR\dot{\theta}^2 &= -mg\cos\theta + N\\
mR\ddot{\theta} &= mg\sin\theta
\end{aligned}$$

Il vient en utilisant l'expression de $\dot{\theta}^2$ trouvée précédemment :

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg$$

Le décollement aura donc lieu pour $\boxed{\theta = \arccos 2/3}$.

a. C'est la seule équation qui fera apparaître N.