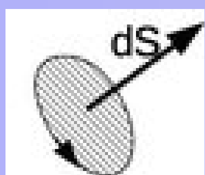
Version numérique

Chapitre 16: Statique des fluides

I Surfaces orientées

♥ Définition I.1: Vecteur surface élémentaire



Soit une surface infinitésimale de surface d^2S, on peut orienté la surface, c'està-dire choisir un sens dans lequel la traversée de la surface est positif. On définit alors le vecteur surface $\overrightarrow{d^2S}$ comme le vecteur de norme d^2S orienté perpencidulairement à la surface et dirigé dans le sens d'orientation choisi de la surface.

Pour une surface S quelconque, on définit le vecteur surface $\overrightarrow{S}$ par sommation des vecteurs surfaces élémentaires :

$$\overrightarrow{S} = \iint_{M \in S} \overrightarrow{d^2S} \tag{16.1}$$

- ⋆ Le ^{2} signifie qu'il s'agit d'un produit de deux infinitésimaux : cela conduit à une fit double intégration.

Réflexion

En coordonnées cartésiennes, on considère une surface d^2S infinitésimale contenue dans un plan perpendiculaire à Oz.

Q1. Les côtés de la surface infinitésimale sont les déplacements élémentaires dans le plan. En déduire d^2S en fonction de dx et/ou dy et/ou dz. *Indice : La surface élémentaire est un rectangle, contrairement au schéma précédent.*

Q2. Suivant quel vecteur est $\overrightarrow{d^2S}$? En déduire que : $\overrightarrow{d^2S} = dxdy\overrightarrow{e}_z$.

Q3. On considère un carré entre les côtes $x = 0$ et $x = a$ et $y = 0$ et $y = a$. Exprimer la double intégrale donnant le vecteur surface de ce carré en explicitant les bornes d'intégration de chaque intégrale. On ne demande pas de le calculer [a].

a. On trouverait $\overrightarrow{S} = a^2\overrightarrow{e}_z$

♥ Définition I.2: Convention d'orientation

Pour une surface donnée, il existe deux orientations possibles du vecteur surface [a].
Le choix de l'orientation suit néanmoins des conventions :

- ⋆ Si la surface est **fermée**, alors le vecteur surface est orienté par convention **vers l'extérieur**.
- ⋆ Si la surface n'est pas fermée, il peut exister des conventions d'orientation mais celles-ci ne seront vues que plus tard. Pour l'instant, on retiendra que l'orientation du vecteur est alors **arbitraire**.

a. Sur le schéma précédent, vous pouvez prendre l'opposé du vecteur $\overrightarrow{d^2S}$ dessiné.

Une surface est fermée si (définition naïve) l'on peut définir un intérieur et un extérieur.

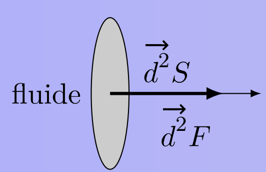
Réflexion

On considère une sphère de rayon R. Préciser quel type de coordonnées choisir ainsi que le sens et l'orientation du vecteur surface infinitésimale en fonction des vecteurs du système de coordonnées choisi.
Si vous vous sentez assez à l'aise sur les déplacements infinitésimaux, vous pouvez chercher à déterminer complètement $\overrightarrow{d^2S}$.

II Actions de pression

On rappelle que l'action d'un fluide se décompose en deux composantes : la composante tangentielle[1] *et la composante normale qu'on appelle* ***action de pression du fluide.***

♥ Définition II.1: Pression



Soit une surface orientée $\overrightarrow{d^2S}$ et un fluide exercée uen force sur cette surface. A l'échelle macroscopique (notre échelle), on définit la **pression** comme une grandeur scalaire positive correspondant à l'intensité de la force normale exercée **par unité de surface** par le fluide.

$$\overrightarrow{d^2F} = \pm P\overrightarrow{d^2S} \tag{16.2}$$

où le signe $\pm$ est tel que $\overrightarrow{d^2F}$ est orienté vers le système qui **subit** la force.
L'unité SI de la pression est le Pascal (Pa).

Le subit qui subit l'action peut être un corps solide OU le reste du fluide.

Réflexion

Q1. Exprimer le Pascal en fonction des unités fondamentales du système international.

Q2. Pourquoi y a-t-il un indice ^{2} pour $\overrightarrow{d^2F}$?

Q3. Pour le cas représenté sur le schéma, préciser le signe $\pm$ dans l'expression de $\overrightarrow{d^2F}$

Q4. On considère une boule solide entièrement plongée dans un fluide. En vous aidant de l'orientation de $\overrightarrow{d^2S}$ trouvée à la réflexion précédente, préciser le signe $\pm$.

♥ Propriété II.1: Résultante des forces de pression

Dans le cas d'une action globale d'un fluide sur le système mécanique étudié, la force de pression résultante s'écrit comme la somme de la force ponctuelle sur toute la surface de contact :

$$\overrightarrow{F} = \iint_{M\in\Sigma_{contact}} \pm P(M)\overrightarrow{d^2S}(M) \tag{16.3}$$

On observe que pour calculer la force précédente il faut :

- ⋆ *déterminer la fonction $P(M)$*
- ⋆ *expliciter $\overrightarrow{d^2S}(M)$ et calculer ensuite l'intégrale double obtenue.*

C'est l'objet des parties suivantes.

1. évoqué légèrement en mécanique et qui est nulle si le fluide est au repos

III Equation fondamental de la statique des fluides

Dans toute la suite, le fluide est supposé au repos.

♥ Définition III.1: Particule de fluide

Dans un fluide, on peut isoler mentalement un volume infinitésimal $d^3\tau_Q$ autour d'un point Q. On appelle ce petit élément **particule de fluide**.

Réflexion

Le volume étant infinitésimal, on peut faire "comme s'il" tendait vers 0 et que les grandeurs *intensives* comme la masse volumique y sont uniforme.

Q1. Pour un petit volume $d^3\tau(M)$ autour du point M de masse volumique $\rho(M)$, exprimer la masse du volume en fonction de $d^3\tau$ et de $\rho(M)$.

Q2. En déduire l'expression du poids $\overrightarrow{P}$ appliqué sur le petit volume en fonction de $\overrightarrow{g}$, $d^3\tau$ et de $\rho(M)$.

Q3. Quelle seule autre action extérieure s'applique sur le petit volume ?

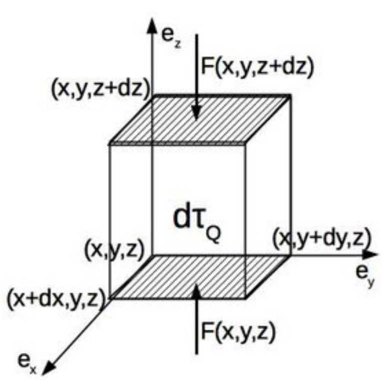
♥ Propriété III.1: Equivalent volumique des forces de pression

Pour une particule de fluide en un point M dans un fluide où le champ de pression est P, la résultante des forces de pression s'appliquant sur la particule de fluide peut se réécrire sous la forme :

$$\overrightarrow{d^3F_{pression}} = -\overrightarrow{grad}P d^3\tau_Q \tag{16.4}$$

On obtient ainsi une expression proportionnelle au volume donc **comme si** l'action de la pression s'exerçait en volume (puisqu'elle est proportionnelle au volume). D'où le nom **d'équivalent volumique des forces de pression**.

♥ Démonstration



On va se placer dans un système de coordonnées cartésiennes où le point M est de coordonnées (x,y,z). La démonstration peut se généraliser aux différents systèmes de coordonnées mais l'introduction du gradient permettra cette généralisation.
On s'intéresse plus particulièrement aux actions de pression sur les deux faces inférieures et supérieures (c'est-à-dire aux côte z et z+dz). La pression sur la surface supérieure est $P(x, y, z + dz)$ (les variations suivant x et y feraient apparaître des termes d'ordre 2 et sont donc négligés) donc la force exercée sur la partie s'écrit : $\overrightarrow{d^2F_{P,z+dz}} = -P(x, y, z + dz)dxdy\overrightarrow{e_z}$.
La pression sur la surface inférieure est $P(x, y, z)$ (les variations suivant x et y feraient apparaître des termes d'ordre 2 et sont donc négligés) donc la force exercée sur la partie s'écrit : $\overrightarrow{d^2F_{P,z}} = P(x, y, z)dxdy\overrightarrow{e_z}$.
La résultante des deux forces considérées ci-dessus est donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d^3F_{P,1}} &= \left(P(x,y,z) - P(x,y,z+dz)\right)dxdy\overrightarrow{e_z}\\ &= -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz\overrightarrow{e_z}\\ &= -\frac{\partial P}{\partial z}d^3\tau_Q\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

On a utilisé ici la définition du taux de variation (on rappelle qu'en notation différentielle, le passsage à la limite est implicite) : $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$. La différence est qu'ici, la fonction P dépend aussi de x et de y, donc c'est une dérivée partielle.
Remarquons que le raisonnement précédent s'applique aussi aux actions sur les faces perpendiculaires aux axes $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. Donc la résultante totale des forces s'écrit :

$$\overrightarrow{d^3F_{pression}} = -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\right)d^3\tau_Q \qquad \Longrightarrow \overrightarrow{d^3F_{pression}} \qquad = -\overrightarrow{grad}Pd^3\tau_Q$$

Réflexion

Q1. Rappeler dans quel sens est orienté le gradient $\overrightarrow{grad}P(M)$ en fonction de la monotonie de P autour du point M. Justifier alors qualitativement que la résultante des forces est dirigée dans la direction du gradient.

Q2. Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression en coordonnées cylindriques en fonction des dérivées partielles de P par rapport à r, θ et z.

♥ Théorème III.1: Equation fondamentale de la statique des fluides

Dans un fluide **au repos** soumis à la seule action extérieure du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, le champ de pression P est donné par l'équation :

$$\rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{grad}P = 0 \tag{16.5}$$

♥ Démonstration

On va travailler sur une particule de fluide et appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen. Le bilan des forces a déjà été fait. Leurs somme est égale à 0 puisque le fluide est supposé au repos (donc la particule de fluide aussi). Il vient :

$$\overrightarrow{0} = \rho\overrightarrow{g}d^3\tau_Q - \overrightarrow{grad}Pd^3\tau_Q \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{0} = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{grad}P$$

Réflexion

On considère un champ de pesanteur uniforme et on paramètre un système de coordonnées cartésiennes où $\overrightarrow{g}$ est suivant $+\overrightarrow{e}_z$.

Q1. Montrer par des projections que P ne dépend que de z et exprimer $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{dz}}$ en fonction de ρ et g, intensité de la pesanteur.

Q2. Pourquoi ne peut-on pas *a piori* intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue pour obtenir P(z) ?

☞ Applications : Interprétation de la relation pression-poids(VII.1)

IV Applications aux fluides incompressibles

♥ Définition IV.1: Fluide incompressible

Un fluide est **incompressible** si sa masse volumique est la même quelques soient les conditions de pression.

♥ Théorème IV.1: Equation barométrique

Dans un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 dans un champ de pesanteur d'intensité g, le champ de pression ne dépend que de la profondeur. La variation de pression $\Delta P = P(h_2) - P(h_1)$ entre les **profondeurs** h_2 et h_1 s'écrit :

$$\Delta P = P(h_2) - P(h_1) = \rho_0 g (h_2 - h_1) \tag{16.6}$$

♥ Démonstration

On applique l'équation fondamental de la dynamique avec ρ_0 uniforme (on oriente l'axe z vers le bas et les axes x et y sont horizontaux) :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \rho_0 g \end{cases} \tag{16.7}$$

Les deux premières équations permette de dire que le champ de pression ne dépend que de z. On peut donc réécrire P comme une fonction d'une seule variable $P(z)$ et la dérivée partielle suivant z devient une dérivée droite. En intégrant entre $z = h_1$ et $z = h_2$, il vient l'équation demandée (on rappelle que ρ_0 est uniforme).

☞ Méthodes : Validité de l'hypothèse(VII.1, VII.2)

☞ Applications : Verrin hydraulique(VII.2)

V Gaz parfait

Réflexion

Equation d'état d'un gaz parfait.

Q1. Rappeler l'équation d'état es gaz parfaits.

Q2. En déduire que :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

avec M la masse molaire du gaz parfait, T la température, ρ la masse volumique du gaz et R la constante des gaz parfaits.

Q3. Estimer la masse molaire de l'air (ne tenir compte que des deux principales molécules présentes dans l'air.)

♥ Propriété V.1: Atmosphère de gaz parfait isotherme

Une atmosphère de gaz parfait à température uniforme dans un champ de pesanteur uniforme possède pour champ de pression P(z) (où z est l'**altitude**) :

$$P(z) = P(z=0)\exp(-\frac{Mgz}{RT}) = P(z=0)\exp(-\frac{M_P gz}{k_B T})$$

où M_P est la masse d'une particule du gaz, M sa masse molaire, $R = 8.314\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\text{J.K}^{-1}$. On remarquera que $R = N_A k_B$.

♥ Démonstration

On prend un axe Oz vertical vers le haut et deux axe Ox et Oy horizontaux. A nouveau, la projection de l'équation fondamentale sur x et y montre que le champ de pression ne dépend ni de x, ni de y. On écrira donc bien $P(z)$ et on remplace la dérivée partielle par rapport à z par une dérivée droite.
L'équation d'état établie précédemment permet de réécrire l'équation fondamentale de la statique des fluides et de la résoudre :

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} + \frac{PM}{RT}g = 0 \\ P(z) = Ae^{-\frac{Mgz}{RT}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{Mgz}{RT}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{M_P gz}{\frac{R}{N_A}T}} \\ P(z) = P(z=0)e^{-\frac{M_P gz}{k_B T}}\end{aligned}$$

☞ Méthodes : Ordres de grandeur (VII.3), Facteur de Boltzmann (VII.4)

☞ Applications : (VII.3)

VI Résultante des forces de pressions

VI.1 Cas général

Rappel : *Pour un corps subissant l'action d'un fluide dont le champ de pression est P, si on note Σ la surface de contact entre le fluide et le corps étudié, la résulante des forces de pression du fluide sur le corps s'écrit :*

$$\pm \iint_{M\in\Sigma} P d^2\overrightarrow{S}$$

Si la surface de contact est une surface fermée, on note l'intégrale avec un cercle. On a aussi orienté le vecteur surface dans les conventions précisées précédemment :

$$\oiint_{M\in\Sigma} -P d^2\overrightarrow{S_{ext}}$$

Réflexion

Pourquoi dans le cas fermé, il y a forcément un signe "-" ?

☞ Méthode : Calcul direct(VII.5)

VI.2 Théorème d'Archimède

♥ Théorème VI.1: Théorème d'Archimède

Tout corps entièrement immergé au repos subit de la part du fluide une force opposée à celle du poids du volume de fluide déplacé. On appelle cette force la poussée d'Archimède. D'une manière plus générale, elle est définie comme la résultante des forces de pression du fluide (ce devrait être une intégrale double) :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = \oint_\Sigma -P(M)\overrightarrow{d^2S(M)} = -m_{\text{fluide déplacé}}\overrightarrow{g} \tag{16.8}$$

- ⋆ Il peut arriver qu'on utiliser le théorème d'Archimède pour des corps en mouvement suffisament lent pour que l'hypothèse de fluide au repos reste quasiment valable.
- ⋆ Il s'agit d'une force résultante : on ne peut calculer le moment résultant à partir de la force. Il existe en général un *point de moment nul* appelé **centre de poussée.**

Réflexion

Q1. Sous l'hypothèse d'un champ uniforme, justifier que le centre de poussée se trouve au centre d'inertie *du fluide déplacé.*

Q2. On suppose un système soumis à son poids et à la poussée d'Archimède. Si le système est à l'équilibre, que peut-on dire de l'intensité des deux forces ? Justifier aussi que le centre de poussée C est alors à la verticale du centre d'inertie G du système [a].

Q3. Partant de la configuration précédente, une légère perturbation déplace le centre de poussée vers la gauche ou vers la droite (l'intensité des forces restant identique). Justifier (par un schém ou par le calcul) que si C est au dessus de G, le système sera stable et sinon instable. [b]

a. Indice : Quel est le mouvement de G dans le référentiel terreste ? En déduire qu'on peut appliquer un TMC en G.

b. C'est le principe des culbuto.

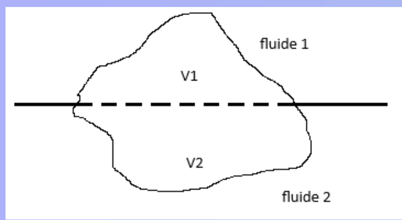
♥ Démonstration

Si le fluide est au repos, alors la relation fondamentale de la statique des fluides implique que le champ de pression ne dépend que de l'altitude. Ainsi, les forces de pression s'exerçant à la frontière du corps immergée sont les mêmes que le corps soit présent ou non. On peut donc mentalement remplacé le corps immergé par un fluide identique au fluide environnant. La force exercée sera la même.
Or le fluide étant au repos, cette masse de fluide est équilibrée par la force de pression $\overrightarrow{\Pi_A}$ et son propre poids. Il vient que $\overrightarrow{\Pi_A} = -\overrightarrow{P_{fluidedeplace}}$

Réflexion

Négliger la poussée d'Archimède revient donc à négliger le poids du fluide déplacé. Est-ce que la pression du fluide est alors nulle ? uniforme ?

♥ Propriété VI.1: Corps immergé dans plusieurs fluides



Considérons un corps immergé complètement dans deux fluides [a], le théorème d'Archimède peut alors s'appliquer pour l'action conjointe des deux fluides en considérant comme volume déplacé pour chaque fluide, la portion présente dans chaque fluide (V_1 et V_2 séparée par la ligne discontinue sur la figure.)

a. Cas d'un corps flottant à la surface de l'eau : il est immergé dans l'eau ET l'air.

Lorsque le théorème d'ARchimède ne peut être appliqué (cas où le système n'est pas complètement immergé), alors la seule méthode est le calcul direct.

- ☞ Méthode : Applications(VII.5,VII.7)
- ☞ Applications : Fonte d'un glaçon(VII.5)

VII S'entrainer

VII.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Fluides incompressibles

♥ Méthode VII.1: Tester la validité du modèle incompressible

Dans le cas de l'eau, on peut donner le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = 5 \times 10^{-10}\mathrm{Pa}^{-1} \tag{16.9}$$

où l'indice T signifie que la température est maintenue constante.

Q1. Rappeler la valeur numérique de la masse volumique de l'eau

Q2. Déduire du coefficient χ_T une relation entre la variation $d\rho$ et la variation dP.

Q3. En déduire une estimation de la variation relative $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ pour une variation d'altitude Δz en considérant que le champ de pression suit le modèle d'un fluide incompressible.

Q4. Estimer la variation d'altitude nécessaire pour observer une variation de 1% de la masse volumique. Commenter l'hyptohèse de fluide incompressible dans le cas de l'eau.

♥ A retenir: Tester la validité du modèle incompressible

On retiendra le caractère incompressible lié à une faible variation de volume/masse volumique sous l'effet de la pression ce qui se traduit par un faible coefficient de compression isotherme.

♥ Méthode VII.2: Utiliser l'équation barométrique

Le baromètre le plus courant est le baromètre de Torricelli. Il s'agit d'un tube en U fermé à une extrémité et l'autre extrémité est ouverte et à l'air libre. Du côté fermé, le mercure est surmonté par du vide en première approximation (P=0).

Q1. Exprimer la différence de hauteur h entre les deux surfaces libres du mercure.

Q2. On donne la masse volumique du mercure $\rho_{Hg} = 13,5 \times 10^3\mathrm{kg.m}^{-3}$. Justifier l'utilisation du mercure plutôt que de l'eau pour faire un baromètre.

Q3. Expliquer la définition de l'unité de pression mmHg (millimètre de mercure) : 1mmHg = 133, 3Pa.

♥ A retenir: Utiliser l'équation barométrique.

On retiendra la méthode d'utilisation de l'équation barométrique ainsi que les hypothèses (incompressibles, fluide au repos) pour lesquelles on peut l'utiliser.

Gaz parfait

♥ Méthode VII.3: Etablir des ordres de grandeur pour une atmosphère

On considère une atmosphère isotherme d'un gaz parfait.

Q1. Donner une expression d'une altitude caractéristique H qui gouverne l'échelle sur laquelle la pression varie notablement.

Q2. Estimer H pour de l'air à la température $T = 273\text{K}$. Quelle hypothèse pourra être fait pour des gaz enfermée dans une enceinte de taille "normale" ?

Q3. Déterminer le champ de masse volumique. En déduire par intégration la masse totale de l'atmosphère (on supposera pour simplifier le calcul que la terre est plate !).

Q4. On donne ci-dessous le profil de température et le profil de la masse d'atmosphère contenue sous l'altitude z. Commenter la validité du modèle isotherme.

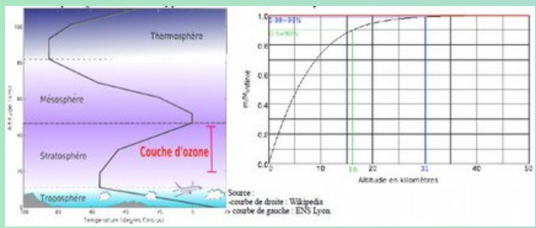


FIGURE 16.1 – Profil de température dans l'atmosphère

♥ Définition VII.1: Facteur de Boltzmann

On dit qu'une distribution de particule suit une distribution de Boltmzann [a] si la répartition des particules dans les différents niveaux d'énergie E suit la loi :

$$dn(E) = A\exp(-\frac{E}{k_BT})dE \tag{16.10}$$

où $dn(E)$ est le nombre (ou la proportion) de particules possédant une énergie entre E et $E + dE$.

Le facteur exponentielle est appelé **facteur de Boltzmann.**

Un étude hors programme montre que ce sont les systèmes classiques maintenus à une température T qui possèdent une telle distribution.

a. ou de Maxwell-Boltzman

♥ Méthode VII.4: Reconnaître un facteur de Boltzmann

Q1. Montrer que les particules d'airt dans l'atmosphère isotherme suivent une loi de Boltzmann. On précisera ce que vaut E ici.

Q2. Quels sont les états énergétiques les plus peuplés ? Est-ce attendus ?

Q3. Si k_BT augmente, comment évolue le peuplement des états énergétiques ? Comment appelle-t-on le terme k_BT ?

Q4. Citer un autre domaine où le facteur de Boltzmann apparaît.

♥ A retenir: Facteur de Boltzmann

Il faut pouvoir réécrire la densité particulaire d'un atmosphère isotherme sous la forme d'un facteur de Boltzmann.
Il faut aussi reconnaître dans une distribution proposée la forme d'un facteur de Boltzmann.

Calcul de résultante des forces de pression

♥ Méthode VII.5: Calculer par intégration

On considère un barrage assimilable à un demi-cylindre de hauteur H et de rayon R. L'eau est retenue à "l'intérieur" du demi-cylindre.

Q1. Calculer la résultante des forces de pression exercée sur le barrage.

Q2. Calculer le moment résultant de l'action de pression de l'eau sur le barrage au point A situé à $z = 0$ au milieu de demi-cercle.

On prendra l'origine des **profondeur** z à la surface de l'eau où l'atmosphère supérieur y impose une pression P_0. Faire l'application numérique pour un barrage de 10m de haut de rayon 30m.

♥ A retenir: Calculer une force de pression

Il est important de retenir les étapes de la méthodes pour le calcul de l'intérgale double associée aux forces de pression. Plusieurs pièges :

- ⋆ le vecteur portant la force peut varier dans l'intégration.
- ⋆ attention à bien réfléchir au paramétrage (caractère directe de la base, bornes d'intégration...).

♥ Méthode VII.6: Utiliser le théorème d'Archimède en statique

On veut calculer le volume émergé de l'iceberg qu'on suppose de masse m répartie uniformément et de volume V. On suppose de plus que l'air et l'eau sont pour les dimensions considérées des fluides homogènes.
On donne : $\rho_{glace} = 0,9\rho_{eau}$ et $\rho_{air} \ll \rho_{glace}$.

♥ Méthode VII.7: Théorème d'Archimède sur un système en mouvement

On s'intéresse à un ballon de volume V constant gonflé avec un gaz plus léger que l'air atmosphérique. Dans ce modèle, nous supposerons que le volume V est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer que la masse volumique de l'air qui entoure le ballon est constante. On la note : ρ_{air} On note m la masse totale du ballon et (ρ sa masse volumique moyenne, c'est-à-dire que $\rho = \frac{m}{V}$, il faut compter dans m la masse du gaz ET de l'enceinte).

Q1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du ballon en supposant le théorème d'Archimède applicable.

Q2. On suppose qu'à une altitude z_0, le ballon est à l'équilibre. Faut-il augmenter ou diminuer la masse volumique du ballon pour monter ? Justifier qu'on chauffe alors le gaz à l'intérieur pour s'élever.

Q3. Pour descendre, on ouvre en général une soupape qui libère du gaz. Justifier la manoeuvre.

VII.2 Applications

✍ Exercice VII.1: Interprétation de l'équation fondamentale

On considère un fluide quelconque au repos. Montrer, à partir de l'équation fondamentale de la statique des fluides que la différence de pression entre deux profondeurs h_1 et h_2 égale le poids de la colonne de fluide contenue entre h_1 et h_2 ramenée à une surface de $1m^2$.

Par quelle autre méthode plus globale pourrait-on retrouver le même résultat ?

✍ Exercice VII.2: Verrin hydraulique

On considère un verrin constitué d'un réservoir de section S_1 relié par le fond à un second réservoir de section $S_2 < S_1$. Deux plateaux de masses négligeables et de sections S_1 et S_2 ferment le réservoir de chaque côté et il est rempli d'eau.

Q1. Au dessus de chaque plateau on trouve la même atmosphère. Quelle est la différence de hauteur entre les deux plateaux à l'équilibre ?

Q2. Les plateaux sont à l'équilibre et on pose sur le plateau S_1 une masse M. Quelle force F faut-il appliquer sur le plateau S_2 pour maintenir l'ensemble à l'équilibre. Commenter.

On sera rigoureux dans le bilan des actions mécaniques et la définition des systèmes.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Liquide peu compressible
- ⋆ Théorème de la résultante dynamique

Eléments de correction (sans justification) : $F = \frac{S_2}{S_1} Mg$

✍ Exercice VII.3: Atmosphère non isotherme

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait et on suppose que le profil de température est $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$ avec z l'altitude ($z = 0$ au sol). Déterminer le champ de pression en supposant l'atmosphère au repos et le champ de pesanteur uniforme.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Equation fondamentale de la statique des fluides.
- ⋆ Gaz parfait.

Eléments de correction (sans justification) : $P = P_0 \left(1 - \alpha z\right)^{\frac{Mg}{RT_0 \alpha}}$

✍ Exercice VII.4: Horizontalité des interfaces entre deux fluides

On considère deux fluides différents (deux liquides de masses volumiques différentes ou un liquide et un gaz).

Q1. Quel argument simple permet de dire que la pression du fluide 1 sur le fluide 2 à l'interface égale la pression du fluide 2 sur le fluide 1 ?

Q2. En vous basant sur les variations de pression avec l'altitude pour chaque fluide, justifier qu'au repos, l'interface sera horizontale ?

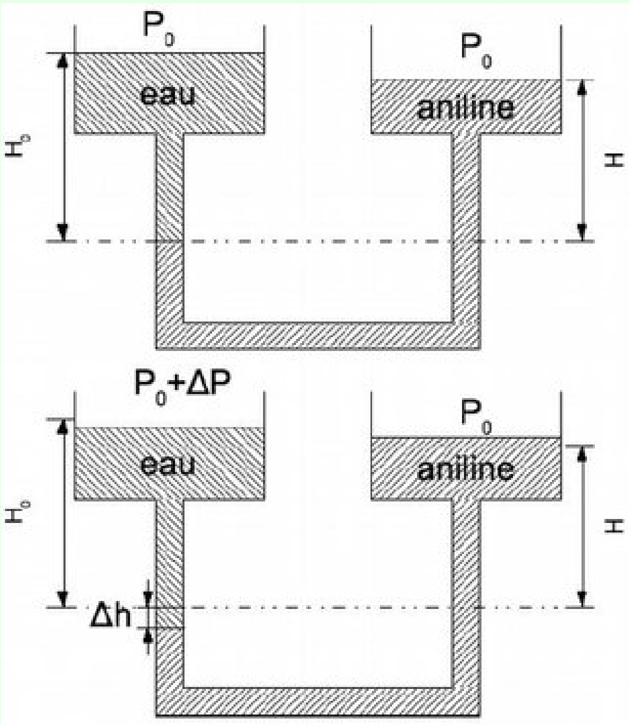
Q3. (Culture) Dans un tube à essai, l'interface n'est pas horizontale et il se forme un "ménisque". Savez-vous pourquoi ?

✍ Exercice VII.5: Fonte d'un glaçon

Un glaçon flotte dans un verre d'eau. De quelle hauteur l'eau a monté quand le glaçon a complètement fondu ?

VII.3 Entrainement

✍ Exercice VII.6: Baromètre différentiel



Un manomètre différentiel et constitué de 2 récipients cylindriques de sections S_1 et S_2 reliés par un tube de section intérieure s constante. L'ensemble contient deux liquide incompressibles non miscibles : l'eau, de masse volumique ρ_0 et l'aniline, de masse volumique ρ. Initialement la pression au dessus des deux récipients est P_0.

Q1. Déterminer une relation entre H et H_0.

Q2. On provoque au-dessus de l'eau une surpression ΔP. Déterminer le déplacement Δh de la surface de séparation entre l'eau et l'aniline dans le tube.

Q3. Evaluer la sensibilité du manomètre : $\frac{\Delta h}{\Delta P}$. Commenter.

On donne : $\rho_0 = 0.998 \mathrm{g.cm}^{-3}$; $\rho = 1.024 \mathrm{g.cm}^{-3}$; $\mathrm{g} = 9.81 \mathrm{m.s}^{-2}$; $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2 = 100\mathrm{s}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Liquide peu compressible.

✍ Exercice VII.7: Ouverture d'un clapet

Un clapet est constitué d'une plaque verticale de longueur L (selon l'horizontale) et de hauteur H maintenu en liaison pivot avec un bati à son extrémité supérieure (l'axe de la liaison est horizontal suivant la longueur L de la plaque). Sa masse m est uniformément répartie et elle touche le sol situé à une distance L en dessous du pivot. Le contact avec le sol est parfait, par contre le pivot ne l'est pas et le moment de la liaison sur son axe de rotation est supposé constant Γ.

A gauche de la plaque il y a de l'air à une pression P_0 et à droite un bassin rempli d'eau sur une hauteur $H_0 \leq H$. L'eau est au repos et supposé peu compressible de masse volumique ρ.

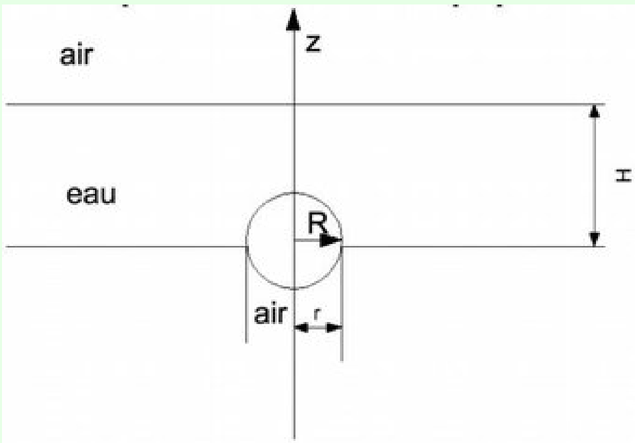
A quelle condition sur Γ, le clapet maintient le bassin rempli avant de s'ouvir à une hauteur d'eau $H_0 = H/2$?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Résultante des actions de pression.
- ⋆ Théorème du moment cinétique.
- ⋆ Moment d'une action globale.

✍ Exercice VII.8: Bille au fond d'un évier

ATTENTION : Cet exercice est plus difficile.



Une sphère de bois de masse volumique ρ et de rayon R, de masse uniformément répartie est complètement immergée dans un bassin d'eau (de masse volumique ρ_e) de profondeur H de telle manière qu'elle bouche un trou circulaire de rayon r.

Q1. Calculer la force qu'exerce la bille sur le fond du bassin.

Q2. Si on baisse le niveau de l'eau dans le bassin, pour quelle hauteur d'eau la sphère va remonter à la surface en supposant qu'elle n'émerge pas encore au décollage ?

Q3. Cette configuration est-elle possible avec les données numériques ci-dessous ?

Données : $\rho = 850\text{km.m}^{-3}; \rho_\text{e} = 1000\text{kg.m}^{-3}; \text{H} = 0.7\text{m}; \text{R} = 0.2\text{m}; \text{r} = 0.1\text{m}; \text{g} = 9.8\text{m.s}^{-2}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Résultante des actions de pression.
- ⋆ Liquide peu compressible.