Corriges

♥ Méthode .1: Etudier un mouvement circulaire

On suppose qu'on sait que la trajectoire est circulaire de rayon R_0 et de centre O. On note M le point mobile et m sa masse.

III.2 **Q1.** Quel type de coordonnée est-il préférable de choisir. Préciser alors l'expression du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

Q2. Que vaut l'accération normale ? l'accélération tangentielle ? Que devient chaque terme dans le cas d'un mouvement uniforme ?

Q3. Dans un mouvement circulaire dont l'axe de rotation est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_z}$, on définit le **vecteur tournant** $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de $\overrightarrow{\Omega}$ et $\overrightarrow{OM}$ puis le vecteur accélération sous la forme de deux termes faisant intervenir $\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{OM}$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}}$. Donner une interprétation à ces deux termes.

Q4. Exprimer le moment cinétique du point M calculé au point O en fonction de m, R_0 et $\dot{\theta}$.

Corrigé: Etudier un mouvement circulaire

Q1. On utilise des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz, l'axe de rotation. Il vient ($z = 0; r = R_0 = cste$) :

$$\overrightarrow{OM} = R_0\overrightarrow{e}_r \tag{1}$$
$$\overrightarrow{v} = R_0\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta \tag{2}$$
$$\overrightarrow{a} = -R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{e}_r + R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Q2. $\overrightarrow{a}_N = R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$ (elle est centripète et assure le maintien sur le cercle) et $\overrightarrow{a}_T = -R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{e}_r$ (elle caractérise les changements du vitesse et <u>est donc nulle si le mouvement est uniforme car alors $\dot{\theta} = cste$.</u>)

Q3. Il vient : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ [a] puis par dérivation :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{dt}} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

Le premier est l'accélération tangentielle (perpendiculaire au rayon), le seconde l'accélération normale (perpendiculaire à la vitesse).

Q4. $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mR_0^2\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z$.

a. L'obtenir en calculant la seconde expression.

♥ Méthode .2: Cercle en coordonnées cartésiennes

Il peut arriver qu'on ne sache pas à l'avance que la trajectoire est un cercle et qu'on ait choisi de travailler coordonnées cartésiennes. Il est important de savoir reconnaître une trajectoire circulaire par son cartésienne et par son équation paramétrique dans le plan.

III.2 **Q1.** Pour rappel, un cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ et rayon R correspond à l'ensemble des points M(x,y) tels que $M_0M^2 = R^2$. Calculer la distance M_0M. En déduire l'**équation cartésienne** d'un cercle.

Q2. On suppose maintenant que le cercle est de centre $O(0,0)$ et que le mobile se déplace sur le cercle de manière uniforme à une vitesse angulaire ω.

Q2.a. Que valent $r(t)$ et $\theta(t)$ en coordonnées polaires de centre O ? On prendra $\theta(t=0) = 0$.

Q2.b. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de R, ω et du temps. On parle **d'équation paramétrique du cercle.**

Corrigé: Cercle en coordonnées cartésiennes

Q1. $M_0M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ d'où l'équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{5}$$

[a]

Q2. $r(t) = R$ et $\theta(t) = \omega t$ donc :

$$x(t) = R \cos \omega t$$
$$y(t) = R \sin \omega t$$

a. L'équation $(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1$ est celle d'une ellipse.

III.2

♥ Méthode .3: Calculer une accélération

On considère un point M contraint à se déplacer sur une sphère fixe de rayon R_0. Il part du pôle Nord de la sphère en direction du pôle Sud à une vitesse v_0 constante. Déterminer le vecteur accélération et l'évolution des coordonnées sphériques du point M dans un repère sphérique associé au référentiel de la boule.

Corrigé: Calculer une accélération

Utilisation des contraintes cinématiques : Ici, $\rho = R_0 = Cste; \varphi = \varphi_0 = Cste$. On choisi l'origine des angles de tels sorte que $\varphi_0 = 0$. Il vient que le vecteur vitesse est suivant $\overrightarrow{u}_\theta$ [a] soit :

$$\overrightarrow{v} = R_0 \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta$$

Comme $v = v_0$, il vient que $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R_0}$.
En dérivant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{M/Boule}} &= \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{dt}} \overrightarrow{e_\theta} + v_0 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{dt}} \\
&= v_0 \left(\dot{\theta} \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \varphi} \right) \\
&= -\frac{v_0^2}{R_0} \overrightarrow{e_\rho}
\end{aligned}$$

a. $\dot{\varphi} = \dot{r} = 0$

III.2

♥ Méthode .4: Utiliser les expressions connus

Un satellite géostationnaire est un satellite en orbite circulaire autour de la terre à une altitude $h = r - R_T$ où R_T est le rayon de la Terre (r est le rayon de l'orbite). L'orbite est équatoriale et il reste fixe par rapport à un point de la Terre. Il est soumis à une accélération dans le référentiel géocentrique :

$$\overrightarrow{a} = -g_0 (\frac{R_T}{r})^2 \overrightarrow{e_\rho}$$

Calculer r avec $g_0 = 9,8 \text{m.s}^{-1}$ et $R_T = 6400\text{km}$.

Corrigé: Utiliser les expressions connus

On nous une expression de l'accélération, on va l'égaler à une expression générale connue (ici cette sur une trajectoire circulaire en coordonnées cylindriques) pour obtenir une équation à résoudre.

On a : $\overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2 \overrightarrow{e}_r$.

Un satellite géostationnaire doit tourner autour de la terre en 24h, soit une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_0}$ avec $T_0 = 24\text{h} = 86400\text{s}$.

L'égalité des deux accélérations conduit à :

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{g_0 R_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{(1/3)} \\ &= 42 \times 10^3 \text{km} \end{aligned}$$