Annexes

III I Modes propres et résonance

I.1 Position du problème

Tout ce qui est dit ici concerne des systèmes linéaires. La recherche de modes propres est d'ailleurs principalement associée à ce genre de système.

Il faut bien comprendre la différences entre un mode propre et une fréquence de résonance. . .avant de pouvoir les associer.

- ⋆ **Un mode propre** correspond à une fréquence à laquelle le système peut *osciller de lui-même* sans excitation extérieure.
- ⋆ **Une fréquence de résonance** est une fréquence à laquelle, lorsque le système est excité, l'amplitude (ou la vitesse) d'oscillation sera maximale.

Ces deux grandeurs sont *a priori* différentes mais nous avons déjà vu de nombreux exemples où ils se confondent.

I.2 Exemples

I.2.1 Oscillateur harmonique

Dans un oscillateur harmonique d'équation :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

- ⋆ il y a un seul mode propre correspondant à la pulsation ω_0.
- ⋆ soumis à une excitation sinusoïdale $F_m \cos \omega t$, la réponse en amplitude est :

$$\underline{X} = \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2}$$

  On observe donc bien que la résonance a lieu pour $\omega_r = \omega_0$.
  Il s'agit d'une résonance infinie car on n'a pas tenu compte de l'amortissement. Dans les cas où ce dernier est faible, la fréquence de résonance reste proche de ω_0 et la résonance en vitesse reste à ω_0 le mode propre. On garde donc la correspondance lorsqu'on s'intéresse à un système réalisable en TP.

I.3 Système à deux masses

Nous avons étudié un système composé de deux points matériels de masse identique m attachés à 3 ressorts (l'un de raideur K entre les deux et les deux autre de raideur k attachés au bati).

- ⋆ L'exercice étudiait la réponse en fréquence lorsque le système était soumis à une excitation sinusoïdale. On avait observé qu'il existait deux fréquences où l'on observait des résonances infinies [1]
- ⋆ Si l'on reprend les équations et que l'on supprime le terme d'excitation, on obtient des équations où une solution sinusoïdale amène aux mêmes pulsations que les pulsations de résonance (il est conseillé de s'entraîner à le faire).

1. A nouveau on n'a pas tenu compte des frottements mais pour des frottements faibles ou pour la résonance en vitesse, les fréquences de résonance serait les mêmes.

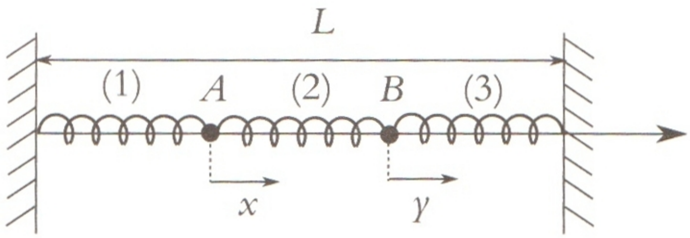

FIGURE 1 – Double masses

I.3.1 Généralisation

Cette partie est un peu plus abstraite. Si le système est linéaire, alors son équation en complexe peut se mettre sous la forme :

$$P(\omega)\underline{X} = \Gamma_m e^{j\omega t} \tag{3}$$

- ⋆ Dans le cas où il n'y a pas d'excitation, $\Gamma_m = 0$. Pour le produit de droite soit nul sans que $\underline{X}$ soit nul (sinon le système de vibre pas), alors $P(\omega) = 0$: les racines de P sont les modes propres.
- ⋆ En RSF, $\underline{X} = \frac{\Gamma_m e^{j\omega t}}{P(\omega)}$ donc quand P s'annule, on observe des résonances infinies, soit aux mêmes fréquences que pour les modes propres.

I.4 Intérêt

L'association des deux approches est très utiles.

I.4.1 Les modes propres

- ⋆ Intérêt : Lorsque le système est linéaire, on peut montrer que pour un jeu de condition initiale quelconque, l'évolution temporelle du système sera une combinaison linéaire des modes propres [2].
- ⋆ Inconvénient : Il n'est pas toujours évident de se placer dans les conditions initiales qui correspondent à un seul mode propre (notamment pour la corde de Melde). De plus, les pertes énergétiques tendent à immobiliser le système est si c'et un système rapide, il sera difficile de l'observer oscillant de lui-même. C'est pourquoi **les modes propres sont difficiles à observer expérimentalement pour des systèmes complexes.**

I.4.2 Les fréquences de résonance

- ⋆ Intérêt : Il est en général assez simple d'exciter un système sinusoïdalement (vibreur pour la corde, rayonnement électromagnématique pour les atomes...). **Les fréquences de résonance sont donc en général simple à observer expérimentalement.**
- ⋆ Inconvénient : Elles ne décrivent pas directement les modes propres ni le comportement du système lorsqu'il est isole. **Il faut s'assurer que l'amortissement est assez faible et qu'il n'y a pas d'effets non linéaires [3] pour qu'on puisse associer les fréquences de résonance aux modes propres.**

Si l'on fait bien attention au dernier point soulevé, on peut alors étudier les modes propres d'un système expérimentalement en étudiant les fréquences de résonance. C'est tout l'intérêt des observations précédentes.

2. On dit que les modes propres forment une base de l'espace vectoriel des solutions du systèmes. Ce principe, transposé à la mécanique quantique est une des bases de son étude.
3. Déformation trop importante et donc non élastique de la corde par exemple.