Corriges

♥ Méthode .1: Calculer une quantité de mouvement

IV Q1. On considère un cylindre d'axe Oz fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$ et de masse uniformément répartie en rotation autour de l'axe Oz. Déterminer la quantité de mouvement du cylindre.

Q2. On considère un système composé de pièces de masse respectives m_1 et m_2. La première est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$. La seconde est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_{2/1}}$ par rapport à la première pièce. Déterminer la quantité de mouvement du système total.

Q3. On considère un disque d'épaisseur h et de rayon R de masse totale M répartie de manière homogène. Il tourne autour d'un axe Oz où O est distance de $R/2$ par rapport avec à G. La rotation se fait à vitesse angulaire constante ω. Déterminer la quantité de mouvement du disque.

Corrigé: Calculer une quantité de mouvement

Q1. Le cylindre étant de masse uniformément répartie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de rotation et sa vitesse est nulle. Il vient :

$$\overrightarrow{p}_{cylindre} = M\overrightarrow{v}_{G/\mathfrak{R}} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

Q2. On décompose le système total en deux parties correspondant aux deux pièces :

$$\overrightarrow{p}_{total} = \overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 = m_1\overrightarrow{v_0} + m_2\left(\overrightarrow{v_2/1} + \overrightarrow{v_0}\right) \tag{2}$$

Q3. On pose un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz.

$$\overrightarrow{p}_{cylindre} = M\overrightarrow{v}_{G/\mathfrak{R}} = M\frac{R}{2}\omega\overrightarrow{e}_{\theta,G} \tag{3}$$

♥ Méthode .2: Utiliser le moment d'inertie

IV Q1. On considère un solide S constitué de deux tiges de longueurs L pouvant coulisser l'une sur l'autre. La tige placée en dessous est accrochée par une extrémité à un axe fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Préciser sans calcul pour quelles positions de la tige supérieure le moment d'inertie est maximal ou minimal.

Q2. Déterminer le moment d'inertie d'un point matériel de masse m sur un axeΔ situé à une distance d.

Q3. On considère deux cylindriques concentriques de moment d'inertie respectifs J_1 et J_2 sur leur axe de symétrie et tournant chacun à des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 autour de cet axe. Déterminer le moment cinétique et l'énergie cinétique de l'ensemble constitué des deux cylindres.

Corrigé: Utiliser le moment d'inertie

Q1. Il faut

- ⋆ que la répartition de masse soit la plus éloignée de l'axe pour que le moment soit maximale. La tige coulissante doit donc être au bout de la tige, côté extérieur (côté mobile)/
- ⋆ que la répartition de masse soit la plus proche de l'axe pour que le moment soit minimale. La tige coulissante doit donc être centrée sur l'axe de rotation.

Q2. md^2

Q3. Les cylindres ne tournant pas à la même vitesse, il faut *décomposer le système en deux sous-systèmes* composés des deux cylindres. Il vient :

$$L_{total} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2$$

♥ Méthode .3: Force et moment résultant

On considère une tige de longueur L dont le milieu est noté O qu'on prend comme origine d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$. Elle soumise à une action extérieure uniforme sur toute sa longueur. Cette action globale est décomposée en des actions quasi-ponctuelles : on suppose qu'un petit élément de longueur dl de la tige est soumis à une action quasi-ponctuelle $\overrightarrow{dF} = \Lambda dl \overrightarrow{e}_x$ avec $\overrightarrow{e}_x$.

IV Q1. Déterminer par intégration la force résultante $\overrightarrow{F}$ exercée sur la tige.

Q2. Déterminer par intégration le moment résultant $\overrightarrow{M}_A$ calculé au point A de l'action considérée, A étant une extrémité de la tige. On traitera deux cas :

- **Q2.a.** La tige est suivant l'axe Ox (A est en $x = -\frac{L}{2}$).
- **Q2.b.** La tige est suivant l'axe Oy (A est en $y = -\frac{L}{2}$).

Q3. Reprendre les mêmes calculs pour calcul le moment résultant au point O.

Corrigé: Force et moment résultant

Q1. Il suffit d'intégrer la force le long de la tige :

$$\overrightarrow{F} = \int_{l=0}^{l=L} \Lambda dl \overrightarrow{e}_x = \Lambda L \overrightarrow{e}_x$$

Q2. De même :

$$\overrightarrow{M}_A = \int_{M \in tige} \overrightarrow{AM} \wedge \Lambda dl \overrightarrow{e}_x$$

Q2.a. Premier cas : $\overrightarrow{AM} = (x + \frac{L}{2})\overrightarrow{e}_x$ et $dl = dx$ soit :

$$\overrightarrow{M}_A = \int_{x=\frac{-L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} (x + \frac{L}{2})\overrightarrow{e}_x \wedge \Lambda dx \overrightarrow{e}_x = 0$$

C'est logique car en chaque point, la force est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AM}$ d'où un moment nul.

Q2.b. Deuxième cas : $\overrightarrow{AM} = (y + \frac{L}{2})\overrightarrow{e}_y$ et $dl = dy$ soit :

$$\overrightarrow{M}_A = \int_{y=\frac{-L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} (y + \frac{L}{2})\overrightarrow{e}_y \wedge \Lambda dy \overrightarrow{e}_x = -\Lambda \frac{L^2}{2} \overrightarrow{e}_z$$

La force tend effectivement à faire tourner la tige autour de A dans le sens des $-\overrightarrow{e}_z$, c'est cohérent.

Q3. Dans le deux cas, le moment est nul.

Q3.a. Premier cas : même raisonnement que précédemment.

Q3.b. Deuxième cas : On a $\overrightarrow{OM} = y$ d'où une intégrale nulle. C'est logique car cette fois les effets de rotation autour de O sont compensés deux à deux par les actions locales.

♥ Méthode .4: Calculer une composante d'une action de contact

On étudie un cube (de masse uniformément répartie) sur un plan incliné. On admet qu'à l'équilibre, la somme des forces résultats est nulle et la somme des moments résultants en un même point est nulle.

IV Q1. Représenter la force résultante de l'action du poids en un point judicieusement choisi.

Q2. Le cube est immobile. Déterminer les caractèristiques de l'action résultante de l'action du plan incliné sur le cube. En déduire une représentation de cette action en un point où son moment est nul.

Q3. On considère un point B à la surface du plan situé au plus bas ou plus haut que le cube (donc pas sur la surface de contact). En raisonnant sur les actions ponctuelles de contact, justifier que le moment résultant en B ne peut jamais être nul.

Q4. Que se passe-t-il si l'on incline trop le plan ?

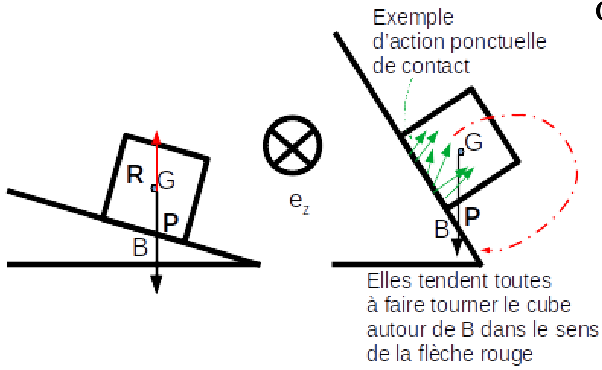
Corrigé: Calculer une composante d'une action de contact

Q1. Le poids estune action globale qui n'a pas de point d'application. MAIS, on a vu qu'une action globale était *mathématiquement* équivalente à une action ponctuelle en un point de moment résultant nul. Un tel point est donc un bon endroit pour "représenter" une action globale.

Dans le cas du poids, on sait que le moment résultant est nul au centre d'inertie (champ de pesanteur uniforme) donc on va représenter le poids en G, le centre du cube.

Q2. Deux forces s'appliquent sur le cube : son poids et l'action du support. La somme des forces est nulle à l'équilibre (TRD), donc la force résultante de l'action du support est un vecteur force opposé : $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}$.

On va de même chercher un point de moment résultant nul. A l'équilibre, la somme des moments résultants en un même point est nul (TMC, quelque soit le point d'application). Donc si le moment du poids en un point B est nul, le moment de l'action du support est aussi nul en B. Il vient que le moment de l'action du support est nul en tout point à la verticale de G (car $\overrightarrow{R}$ est verticale).



Q3. On rappelle que l'action de contact ponctuelle du plan sur le cube est forcément dirigée vers l'extérieur du plan incliné (non interpénétration) donc :

- ⋆ Si B est plus bas que le cube, les moments de TOUTES les actions ponctuelles en B sont non nuls et dirigés dans le même sens : leur somme sera donc non nulle.
- ⋆ Le raisonnement est le même si B est au dessus du cube (signe opposé).

Q4. Si l'on incline trop le cube, on observe que l'intersection (notée B) entre la verticale en G etle plan incliné se retrouve hors du cube (angle supérieur à 45 degré).

Hors, nous avons vu que le moment ne pouvait être nul en un tel point : le cube ne peut être en équilibre aux fortes pentes, il va basculer.

IV

♥ Méthode .5: Etudier un système en rotation

On considère un volant qui tourne autour d'un axe fixe horizontal. Son moment d'inertie autour de cet axe vaut J. Son centre d'inertie est sur l'axe et le champ de pesanteur est uniforme et constant. Au cours du mouvement, le volant subit des frottements solides qu'on modélise comme un couple constant dont le moment par rapport à l'axe de rotation est $|M_f| = \alpha J$ avec α constant. On lance le volant à une vitesse angulaire ω_0 et celui-ci s'immobilise après N tours.

Exprimer le coefficient α en fonction de ω_0 et N.

Corrigé: Etudier un système en rotation

On va appliquer un TMC sur l'axe de rotation appliqué au système {volant} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note Oz l'axe de rotation. Les forces qui s'appliquent sur le système sont :

- ⋆ son poids dont le torseur complet (en un point O de l'axe de rotation) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{\Gamma_{pesO}} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P} \end{Bmatrix}_O$$

  La composante qui nous intéresse est :

$$\Gamma_{pes/axe} = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = 0$$

  car G est sur l'axe donc $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}_z$.

- ⋆ action de l'axe sur le volant dont le torseur complet (en un point O de l'axe de rotation) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F}_{axe\to volant} \\ \overrightarrow{\Gamma_{axe\to volantO}} \end{Bmatrix}_O$$

  La composante qui nous intéresse est :

$$\Gamma_{axe\to volant/axe} = \overrightarrow{\Gamma_{axe\to volantO}} \cdot \overrightarrow{u}_z = -\alpha J$$

  par donnée de l'énoncé [a].

Il n'est pas nécessaire d'écrire complètement le torseur comme ci-dessus. Si l'on a identifié que l'on va appliquer le TMC sur l'axe de rotation, on peut se contenter de donner le moment résultant sur l'axe de rotation pour chaque action. Le BAME deviendrait :

- ⋆ *son poids dont la moment sur l'axe est nul car G est sur l'axe de rotation.*
- ⋆ *l'action de l'axe sur le volant dont le moment sur l'axe est :*

$$\Gamma_{axe\to volant/axe} = -\alpha J$$

C'est plus court. . . Le TMC s'écrit donc :

$$\begin{aligned} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} &= -J\alpha \\ \omega &= -\alpha t + \omega_0 \\ \theta &= -\frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t \end{aligned}$$

Le volant s'arrête donc pour $t_f = \frac{\omega_0}{\alpha}$, il a alors tourner de :

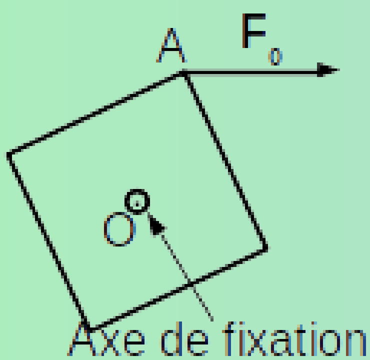
$$\theta_f = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = 2\pi N$$

Il vient :

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_0^2}{4\pi N}}$$

a. Le signe − vient du fait que c'est un couple de frottements (résistant) et $\dot{\theta} > 0$.

♥ Méthode .6: Etudier un système avec un fil de torsion



On considère un cube de côté a et de répartition de masse uniformément répartie en liaison pivot avec un axe passant par le centre du cube et perpendiculaire à deux des faces du cube. Le cube ne peut ainsi que tourner autour de cet axe supposé fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Tous les éléments cinématiques et cinétiques devront être établis dans ce référentiel qu'on supposera galiléen.
On attache un fil tendu à un coin du cube noté A. On considère que la liaison entre le cube et le fil se résume à un seul point de sorte qu'on puisse considérer l'action du ressort sur le cube comme ponctuelle. La force appliqué par le fil sur le cube est toujours horizontale et de norme F_0.

IV **Q1.** Paramétrer le problème (proposer un système de coordonnées et des paramètres utiles au problème) pour pouvoir étudier la rotation du cube autour de son axe. Proposer alors une expression du moment cinétique du cube sur l'axe de rotation,de son énergie cinétique et de sa quantité de mouvement. On notera J le moment d'inertie du cube sur l'axe de rotation et M sa masse totale.

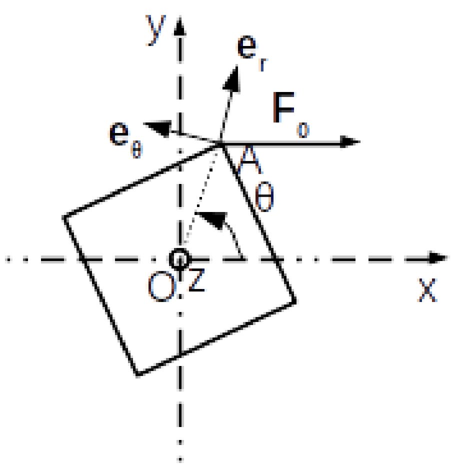
Q2. Exprimer le moment de la force exercé par le fil sur le cube exprimé au centre du cube. Commenter suivant les valeurs des paramètres introduits la tendance qu'aura cette force à agir sur la rotation du cube.

Q3. Montrer que cette action dérive d'une énergie potentielle.

Un fil de torsion est en plus tendu entre le bati et le centre du cube, l'axe du fil étant confondu avec l'axe de la liaison pivot. On note C la constante du fil et on suppose que lorsque le fil n'est pas tordu, l'angle du paramètre précédent est nul.

Q4. On suppose la liaison pivot parfaite. Quelles sont les positions d'équilibre du système ? On réalisera l'étude par le TMC puis par une étude énergétique.

Corrigé: Etudier un système avec un fil de torsion



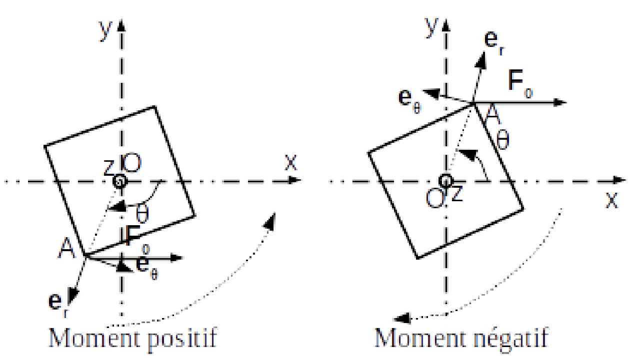
Q1. Pour étudier un système en rotation autour d'un axe fixe, le système de coordonnées le plus judicieux est un système de coordonnées cylindrique d'axe Oz l'axe de rotation. On a représenté ci-contre le système. On repère l'angle θ permettant de repérer l'orientation du cube par l'angle $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OA})$ de manière à pouvoir utiliser cet angle pour les calculs de moments.
On peut alors écrire les éléments cinétiques du cube :

$$L_{Oz}(cube) = J\dot{\theta}$$
$$E_{c,cube} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$
$$\overrightarrow{P_{cube/\mathfrak{R}}} = M\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{0}$$

Le cube étant de masse répartie de manière homogène, le centre d'inertie est situé au point O, centre du cube. Fixé sur l'axe Oz, le centre d'inertie est donc immobile, d'où la quantité de mouvement nulle.

Q2. L'action du fil sur le cube est une action ponctuelle dont la force s'écrit $\overrightarrow{F} = F_0\overrightarrow{e_x}$ et dont le point d'application est A. Le moment de l'action du fil sur le cube calculé sur l'axe Oz s'écrit (O est un point de l'axe... Oz) :

$$\begin{aligned}
M_{fil\to cube,Oz} &= \overrightarrow{e_z}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{F}\right)\\
&= \overrightarrow{e_z}\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_r}+\frac{a}{2}\overrightarrow{e_z}\right)\wedge F_0\overrightarrow{e_x}\right)\\
&= \overrightarrow{e_z}\cdot\left(\frac{aF_0}{2}\overrightarrow{e_y}-\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sin\theta\overrightarrow{e_z}\right)\\
&= -\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sin\theta
\end{aligned}$$



On remarque que si θ est positif, le moment de l'action est négatif : l'action du fil aura tendance à faire tourner le cube dans le sens des θ décroissants. A l'inverse, si θ est négatif, le moment de l'action est positif : l'action du fil aura tendance à faire tourner le cube dans le sens des θ croissants. C'est cohérent avec le schéma représenté ci-contre.

Q3. La puissance transmise s'écrit :

$$P = -\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sin\theta\dot{\theta} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\cos\theta\right)$$

Cette action dérive donc bien d'une énergie potentielle dont l'expression est :

$$\boxed{E_p = -\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\cos\theta} \tag{4}$$

Q4. Etude par le TMC : On applique le théorème du moment cinétique sur l'axe de la liaison pivot au système cube. Les actions mécaniques extérieures [a] au cube sont [b] :

- ⋆ le poids du cube. Sa masse étant uniformément répartie, le centre d'inertie est sur l'axe du pivot et le moment du poids sur l'action **est donc nul.**
- ⋆ la liaison pivot. Son moment *sur l'axe du pivot* est nulle car la liaison est parfaite.
- ⋆ L'action du fil dont on a calculer le moment sur l'axe à la question précédente.
- ⋆ L'action du fil de torsion.

  L'angle de torsion est ici θ (car le fil est non tordu lorsque $\theta = 0$) donc :

  Le moment de l'action du fil de torsion sur l'axe est : $\Gamma_{torsion} = -C\theta$.

  On met un moins pour que l'action soit bien de rappel (quand θ est positif, il faut un moment négatif pour ramener θ vers la valeur "au repos" du fil.)

Le TMC s'écrit donc :

$$J\ddot{\theta} = -C\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sin\theta$$

La condition d'équilibre est donc : $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}C}{aF_0}\theta$. Si C est suffisament grand, il n'y qu'une seule solution $\theta = 0$, sinon, il y aura d'autres solutions qui n'ont pas d'expression analytique en supposant qu'on fait faire plus d'un tour au cube.

Etude énergétique : Les deux actions dont les moments sont non nuls dérivent d'une énergie potentielle, le système est donc conservatif et :

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 - \frac{a}{\sqrt{2}}F_0\cos\theta$$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = C\theta + \frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sin\theta = 0$$

On retrouve la même condition que précédemment.

A noter que l'étude de la stabilité conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} &= C + \frac{a}{\sqrt{2}}F_0\cos\theta_{eq} \\ &= C \pm -\frac{a}{\sqrt{2}}F_0\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}C}{aF_0}\right)^2\theta_{eq}^2}\end{aligned}$$

Les solutions où $\cos\theta_{eq} > 0$ sont toutes stables. Les autres (plus délicat à montrer=) sont instables.

a. Pour rappel, le TMC sur un système permet de ne tenir compte que des actions extérieures.

b. Comme expliqué dans l'exercice méthode précédent, on va directement ne donner que la composante du torseur qui nous intéresse, ici le moment des actions sur l'axe.

IV

♥ Méthode .7: Utiliser la conservation du moment cinétique pour un solide déformable

Observer l'expérience du tabouret d'inertie (lien ci-contre) et proposer une modélisation simple permettant de l'expliquer.

Corrigé: Utiliser la conservation du moment cinétique pour un solide déformable

Observation 1 : On remarque que le tabouret et la personne dessus continue à tourner sans ralentir lorsque la personne ne bouge pas. On peut donc considérer en première approximation qu'il n'y a pas de frottements : la liaison pivot peut être considérée comme parfaite.
On pourra de même négliger les frottements de l'air.
Observation 2 : La vitesse de rotation varie par contre lorsque la personne étire ses bras ou les replie c'est-à-dire lorsque *le système se déforme.* On doit tenir compte de cette déformation dans la modélisation pour justifier les variations de vitesse angulaire. Les conséquences d'une déformation sont :

- ⋆ des forces intérieures qui travaillent (difficile de les évaluer)
- ⋆ un moment d'inertie qui varie : *il augmente quand on éloigne les haltères et diminue quand on les rapproche de l'axe de rotation.*

Analyse : Pour s'affranchir des actions intérieures inconnues mais qui travaillent a priori, nous allons plutôt appliquer un TMC au système complet {humain+haltères+tabouret[a]*}.* Les actions qui s'appliquent sont donc :

- ⋆ le poids dont le moment sur l'axe de rotation est nul en considérant ce dernier vertical car toutes les actions ponctuelles de la pesanteur sont aussi verticales donc de moment nul[b].
- ⋆ la liaison pivot dont le moment est nul car on l'a supposée parfaite.

Le TMC s'écrit donc[c] :

$$\frac{\mathrm{d}J\dot{\theta}}{\mathrm{dt}} = 0 \tag{5}$$

Le moment cinétique est donc conservé :

$$\boxed{J\dot{\theta} = Cste} \tag{6}$$

Il vient que lorsque écarte les bras, J augmente donc $\dot{\theta}$ va diminuer. Inversement, si on replie les bras, J diminue et $\dot{\theta}$ augmente. Ce qui est bien ce qu'on observe expérimentalement.

a. partie tournante du tabouret
b. et quand on somme plein de 0, on obtient ...
c. On ne sort pas J de la dérivée car on a remarqué qu'il pouvait varier

Si $J\dot{\theta} = cste$ alors l'énergie cinétique $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ n'est a priori pas constante : il y a un travail des forces internes (puisque les actions extérieures ne travaillent pas ici), c'est le travail des muscles.