Corriges

Corrigé: Loi de Lenz

IV.1 Q1. Auto-induction : Remarquons qu'en convention récepteur $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donc si i augmente, alors $u > 0$. Il aura donc tendance à rediminuer l'intensité i puisqu'il est orienté en inverse. On a donc bien une loi de modération. On observe la même tendance si i diminue.

Q2. Induction mutuelle. On reprend les notations de la démonstration du théorème. Si I_1 augmente, alors $B_{1,z}$ augmente et le flux à travers la bobine 2 va augmenter ($\overrightarrow{dS}$ a été pris dans le même sens que $\overrightarrow{B_1}$). Il va donc naître une fem (orientée en cohérence avec $\overrightarrow{e}_z$) e_2 et un courant I_2. La loi de Lenz étant une loi de modération, le courant I_2 doit créer un champ magnétique $\overrightarrow{B}_2$ qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire diminuer le flux totale à travers la bobine. Il faut donc que $B_{2,z} < 0$ soit $I_2 < 0$.

Q3. Moteurs et génératrices électriques :

- ⋆ si le mobile maintient son mouvement grâce à l'extérieur (génératrice), alors l'intensité i qui est créée tend à produire une force de Laplace résistante : c'est la loi de Lenz.
- ⋆ de même si c'est un circuit extérieur qui crée l'intensité qui met en mouvement le mobile, alors il nait une fem induite qui aura un comportement récepteur, s'opposant à l'intensité : c'est à nouveau la loi de Lenz.

Corrigé: Etude d'un transformateur

IV.1 Q1. La puissance reçue par le primaire est (les grandeurs sont orientées en convention récepteur [a]) : $P_{recue,primaire} = u_1 i_1$.
La puissance fournie par le secondaire est (les grandeurs sont orientées en convention générateur) : $P_{fournie,secondaire} = u_2 i_2$. Il vient :

$$\eta = \frac{u_2 i_2}{u_1 i_1}$$

Le caractère parfait impliquant $\eta = 1$, il vient immédiatement que :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{m} \tag{1}$$

Q2. Les bobines étant en influence totale, le flux sortant de la bobine 1 est égale au flux entrant dans la bobine 2, c'est pourquoi on peut définir le flux commun Φ_c à travers chaque spire comme étant égale pour les deux bobines. On peut donc calculer les flux du champ magnétique à travers chaque bobine :

$$\begin{cases} \phi_1 &= N_1 \Phi_c \\ \phi_2 &= N_2 \Phi_c \end{cases}$$

Cela correspond au seul flux mutuel puisqu'on néglige l'auto-induction. On peut alors calculer les fem induite (dans le même sens que les intensités [b] soit $u_1 = -e_1$ et $u_2 = -e_2$ [c]) :

$$\begin{cases} u_1 &= -\left(-\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}\right) = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= -\left(-\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}\right) = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

donc :

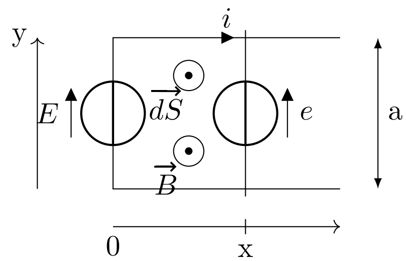
$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{2}$$

a. ATTENTION : Pour les deux calculs de puissance, il peut arriver que les grandeurs soient orientées dans d'autres sens. Il faut donc faire attention au signe.

b. En considérant que l'enroulement des bobines tournent dans le même sens

c. On doit aussi négliger les pertes par effet Joule.

Corrigé: Rails de Laplace



IV.1

FIGURE 1 – Paramétrage du système.

Q1. En présence de la source E, il va se créer un courant i (cf. Figure 1 pour les orientations) et sous l'effet du champ magnétique, la barre va se mettre en mouvement. Si $E > 0$, alors $i > 0$ et $F_{L,x} < 0$.

La surface du circuit diminuant, le flux du champ magnétique à travers le circuit va varier et il va naitre une fem d'induction e [a].

- ⋆ Raisonnement 1 : Pour suivre la loi de Lenz, cette dernière doit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance donc être opposée à E. Il vient, avec les conventions de la Figure 1 que $e > 0$.
- ⋆ Raisonnement 2 : Le flux diminuant, il vient (loi de Faraday) que $e > 0$: la fem va bien s'opposer à la cause initiale ($E > 0$).

Q2. On peut appliquer deux théorèmes : la loi des mailles sur le système {circuit} et le TRD sur le système barre :

$$\begin{cases} E - Ri - e & = 0 \\ m\dot{v}\vec{e}_x & = \vec{F}_L \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e & = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Bax}{\mathrm{d}t} = -Bav \\ \vec{F}_L & = \int_{y=0}^{y=a} \left(-idy\vec{e}_y \wedge B_0\vec{e}_z\right) = -iaB_0\vec{e}_x \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} E - Ri + Bav & = 0 \\ m\dot{v} & = -iaB_0 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{a^2B_0^2}{mR}v & = -\frac{EaB_0}{mR} \\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{a^2B_0^2}{mR}i & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Q3. $v_{lim} = -\frac{E}{aB_0}$ [b]

Alors, $i_{lim} = 0$. C'est logique car à la vitesse limite, la somme des forces doit s'annuler, soit ici $\overrightarrow{F}_L = \overrightarrow{0}$ soit $i = 0$.

Q4. Ici :

$$\begin{cases} P_{recue,fem} & = ei = -B_0 avi \\ P_{fournie,Laplace} & = F_L v = -B_0 aiv \end{cases}$$

On retrouve bien l'égalité des puissances. Comme $v < 0$ et $i > 0$, il vient que $P_{fournie,Lapalce} > 0$: c'est un moteur électrique.

Q5. On observe par le calcule que $v_{lim} = 0$, ce qui est logique car, sans excitation extérieure, l'effet de modération entraîne un ralentissement de la barre.

On utilise ce phénomène dans le freinage magnétique. Il présente trois intérêts : il est très important aux hautes vitesses, nécessite moins de contact solides donc moins d'usure et le système fonctionnant alors en génératrice, on peut récupérer de l'énergie. Par contre, la vitesse ne s'arrête pas en un temps fini : les frottements solides permette de "terminer" le freinage.

[a] ATTENTION à son orientation qui doit être faite après avoir choisir l'orientation de la surface $\overrightarrow{dS}$.

[b] On pourra vérifier l'homogénéité de l'expression car E/a est homogène à un champ électrique et un champ électrique sur un champ magnétique est homogène à une vitesse (cf. Force de Lorentz).

Corrigé: Spire en rotation

IV.1 Q1. Lorsqu'elle tourne, le flux du champ magnétique varie (l'angle entre le vecteur surface et $\overrightarrow{B}$ varie), il va donc naître une fem induite et un courant dans la spire. Le champ magnétique va donc exercer une force de Laplace. La loi de Lenz implique que cette force, s'opposant à la cause qui lui a donné naissance (le mouvement de la spire), va ralentir la spire. Il faut donc une force motrice supplémentaire pour maintenir la spire en rotation.

Q2. Commençons par appliquer un théorème de la puissance cinétique à la spire en rotation constante dans le référentiel du bati supposé galiléen [a] :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{dt}}}_{=0} = \underbrace{P_{bati}}_{=0} + P_{moteur} + P_{Laplace}$$

La puissance transmise par le bati est nulle car la liaison est parfaite, donc (la spire est un solide en rotation [b]) :

$$\langle P_{moteur} \rangle = -\langle P_{Laplace} \rangle = -\langle M_{Oz,Laplace}\omega \rangle \tag{4}$$

<u>Point méthode :</u> on va devoir calculer à la fois un flux magnétique *impliquant l'orientation de la surface de la spire en cohérence avec la fem induite* ET le moment d'une action de Laplace *impliquant l'orientation de la surface de la spire en cohérence avec l'intensité*. Il est donc important d'orientation l'intensité i et la fem induite e dans le circuit dans le même sens en définissant pour les deux le même vecteur surface.

On pose donc des coordonnées cylindriques d'axe Oz et on repère le vecteur $\overrightarrow{e}_r$ perpendiculaire à la spire. On oriente la surface de sorte que $\overrightarrow{dS}$ soit suivant $+\overrightarrow{e}_r$ (cf. Figure 2).

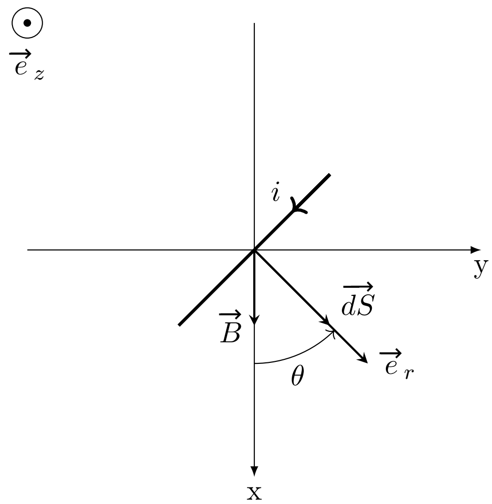


FIGURE 2

On calcule le moment de l'action du champ magnétique sur un spire de moment magnétique $\vec{M} = iab\vec{e}_r$:

$$\begin{aligned} M_{Oz,Laplace} &= \left(\vec{M} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{e}_z \\ &= -iabB\sin\theta \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle P_{moteur} \rangle &= -\left\langle M_{Oz,Laplace}\omega \right\rangle \\ &= \left\langle iabB\sin\theta\dot{\theta} \right\rangle \end{aligned}$$

Mais **ATTENTION**, i varie quand la spire se déplace. Il faut donc relier i à θ en étudiant le circuit électrique.

Pour rappel, on a orienté e en cohérence avec $\vec{dS}$ donc dans le même sens que i et :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(Bab\cos\theta =\right) Bab\dot{\theta}\sin\theta \tag{5}$$

La loi de mailles s'écrit alors : $e - ri = 0$ donc :

$$i = \frac{Bab}{r}\dot{\theta}\sin\theta$$

On en déduit :

$$\langle P_{moteur} \rangle = \left\langle \frac{(abB\omega)^2}{r}\sin^2\theta \right\rangle = \frac{(abB\omega)^2}{2r} > 0 \tag{6}$$

Il s'agit d'une génératrice électrique.

Q3. On peut rependre les calculs précédents en remplaçant r par $R + r \approx R$. En utilisant la loi des mailles (multipliée par i), il vient :

$$\left\langle P_{recue,R} \right\rangle = \left\langle Ri^2 \right\rangle = \left\langle \frac{(Bab\omega)^2}{r}\sin^2\theta \right\rangle = \frac{(abB\omega)^2}{2R} > 0$$

Q4. Il faut ajouter un terme d'auto-induction soit :

$$e - ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}} = 0 \tag{7}$$

On pourra remarquer que dans ce cas, l'auto-induction implique un déphasage entre e et i. Cela va diminuer la puissance fournie par le moteur, mais aussi la puissance fournie aux circuits à ω fixé : on ne change pas le rendement mais le système est moins puissant.

a. On ne peut calculer directement la puissance fournie par le moteur puisqu'on n'a pas les caractéristiques de son action.

b. ATTENTION : ici i varie, l'action de Laplace ne dérive pas d'une énergie potentielle.

Corrigé: Machine à courant continu

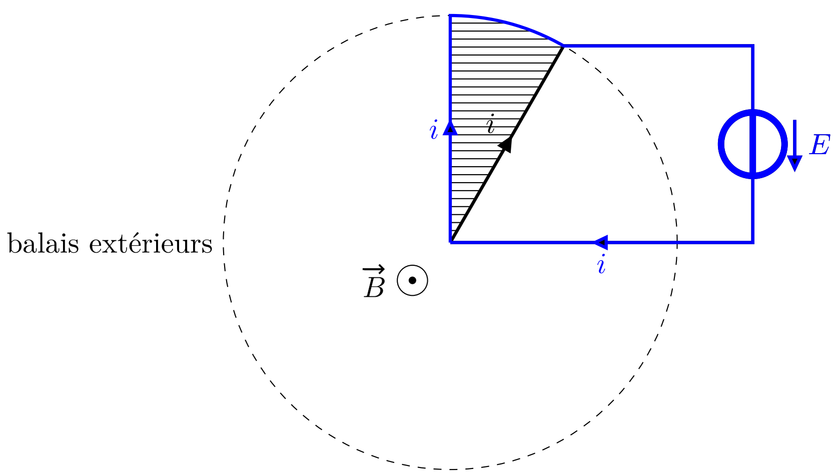
Etude qualitative

IV.1 Q1. La source idéal fait naître un courant dans le circuit fermé par les balais et le rotor. Il va donc circuler des courants sur le disque entre le centre et la périphérie.

Les courants étant globalement radiaux, une force de Laplace s'applique du champ magnétique axial : elle sera orthoradial et son moment sur l'axe sera donc non nul. Le rotor se met à tourner.

Si l'on branche la source $E > 0$ dans le sens du schéma de l'énoncé, alors les courants vont de la périphérie vers l'intérieur. Le moment faire alors tourner le rotor en cohérence avec $\overrightarrow{B}$. Si l'on branche la source en sens inverse, le rotor tournera...en sens inverse.

Q2. Considérons une ligne de courant allant du centre à la périphérie. On peut l'imaginer comme une barre (à l'image de la barre dans les rails de Laplace) entre le centre et la périphérie et comme le rotor tourne, cette "barre" glisse sur la périphérie. On observe alors durant un temps dt une variation de surface correspondant à une portion de cercle d'angle $d\theta$. [a]



La loi de Lenz prévoit que cette fem prélève de l'énergie au circuit (pour s'opposer au passager de i). A l'inverse l'action de Laplace sera motrice puisqu'elle met en mouvement la spire : on a donc un moteur avec un transfert de puissance de l'électrique vers le mécanique.

Q3. Si un système extérieur exerce une moment moteur sur l'axe de rotation entraînant le rotor, alors un raisonnement (HP) similaire au précédent va justifier l'existence d'un courant dans le rotor. Le système va donc pouvoir fonctionner en génératrice : c'est tout l'intérêt des machines à courant continu, elles sont facilement réversible dans leur fonctionnement.

Etude quantitative

Q4. Pour que le moment soit positif, il faut que les forces ponctuelles $\overrightarrow{dF_L} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$ soit orientée suivant $+\overrightarrow{e}_\theta$.

$\overrightarrow{B}$ étant suivant $+\overrightarrow{e}_z$, il faut que $i > 0$ soit suivant $-\overrightarrow{e}_r$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{dF_L} &= -idr\overrightarrow{e}_r \wedge B\overrightarrow{e}_z \\
&= iBdr\overrightarrow{e}_\theta \\
d\Gamma_L &= \overrightarrow{e}_z \cdot \left(r\overrightarrow{e}_r \wedge iBdr\overrightarrow{e}_\theta\right) \\
&= riBdr\Gamma_L & = \int_{r=0}^{r=R} riBdr \\
&= \frac{BR^2}{2} i
\end{aligned}$$

soit ici :

$$K = \frac{BR^2}{2} \tag{8}$$

Q5. La puissance fournie par l'action de Laplace : $P_{fournie,L} = \Gamma_L\omega = Ki\omega$ égale la puissance reçue par la fem d'induction : $P_{recue} = \pm ei$ suivant l'orientation de e. Il vient :

$$e = \pm K\omega \tag{9}$$

Si l'on veut $e = K\omega$, il faut donc que $P_{recue} = ei$ soit e et i de sens opposé.

Q6. On applique un TMC sur l'axe au rotor et une loi des mailles au circuit (sur la **??**, la fem de la source E est orientée de l'extérieur vers l'intérieur du disque, comme i) :

$$\begin{cases} J\dot{\omega} & = Ki - \Gamma_u \\ E - R_0 i - L_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & = K\omega \end{cases} \tag{10}$$

Q7. En régime établi, les dérivées temporelles sont nulles :

$$\begin{cases} 0 & = Ki - \Gamma_u \\ E - R_0 i & = K\omega \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} i & = \frac{\Gamma_u}{K} \\ \omega & = \frac{E}{K} - \frac{R_0\Gamma_u}{K^2} \end{cases} \tag{11}$$

Les énergies entrante et sortante sont :

$$\begin{cases} P_E & = Ei = \frac{\Gamma_u E}{K} \\ P_u & = \Gamma_u\omega = \frac{\Gamma_u E}{K} - \frac{R_0\Gamma_u^2}{K^2} \end{cases} \tag{12}$$

soit un rendement :

$$\eta = 1 - \frac{R_0\Gamma_u}{KE} \tag{13}$$

On remarque que le rendement se rapproche de 1 lorsque $R_0 \to 0$ (plus de pertes par effet Joule qui sont les seules pertes prises en compte ici) our que $\Gamma_u \to 0$ (il n'y a plus de charge sur le rotor et donc plus de couple nécessaire pour faire tourner le rotor : $P_{utile} = 0$!).

a. Attention, il s'agit d'une explication très simplifiée car en réalité, les balais étant tout autour du cercle et transversaux, le circuit ne ferme par vraiment comme figuré sur le schéma. Cela donne une idée mais ne permettra pas par exemple de calculer la fem induite avec la loi de Faraday. Une justification plus rigoureuse nécessite des éléments hors-programme.