Version numérique

Chapitre 5: Bases de l'électrocinétique

Explications qualitatives sur la conduction électrique (Youtube - Science étonnante)

I Conduction électrique

I.1 Intensité électrique

Le but de cette partie est, partant de la description microscopique du phénomène de conduction électrique de définir les grandeurs qui permettront de l'étudier à notre échelle.

♥ Définition I.1: Charge électrique et conduction électrique

La **charge électrique** est une propriété fondamentale de la matière qui lui permet d'interagir avec les champs électromagnétiques. L'unité usuelle de mesure de la charge électrique est le Coulomb (C).

- ⋆ La charge est une grandeur qui se conserve, c'est-à-dire qu'elle ne peut ni être détruire, ni être produite.
- ⋆ On observe que la charge Q de tout système est un multiple entier de la charge élementaire $e = 1.609 \times 10^{-19}$C.

Le phénomène de **conduction électrique** correspond au déplacement de charges dans un matériau (solide ou liquide).

♥ Définition I.2: Courant électrique et intensité

Le courant électrique **à travers** une section S **orienté arbitrairement** correspond au passage des charges de conduction à travers cette section par unité de temps.

La grandeur mesurant le courant électrique est l'**intensité du courant**. Elle se définit comme le débit de charge à travers la surface, c'est-à-dire la quantité de charge traversant la surface S par unité de temps.

- ⋆ L'orientation de la surface correspond dans les schémas électriques habituels à l'orientation de l'intensité. Cette orientation est **arbitraire**[a].
- ⋆ Une conséquence est que l'intensité est une grandeur **algébrique :** si le sens physique de déplacement des charges *positives* est opposé au sens choisi pour l'intensité, celle-ci sera négative.
- ⋆ On distingue l'intensite *moyenne* calculée sur un temps Δt fini et l'intensité *instantannée* (ou intensité) calculée avec $\lim \Delta t \to 0$. Il vient :

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{5.1}$$

avec dq la quantité de charge qui traverse la surface orienté pendant dt. On reconnait une dérivée temporelle.

a. Il n'est pas nécessaire qu'elle correspondent au sens physique de conduction.

Réflexion

Q1. Pour un courant typique de $10mA$, estimer la quantité de charge (en C) qui traverse une section S de fil par unité de temps.

Q2. En déduire le nombre d'électron correspondant. Peut-on espérer étudier la conduction électrique à l'échelle microscopique ?

I.2 Potentiel électrique et tension

Sans excitation extérieur, ils n'y a pas de mouvement d'ensemble des charges, c'est-à-dire de conduction électrique. Pour ce faire, il faut mettre les charges en mouvement. Comme toujours en mécanique, la mise en mouvement nécessite une force. Ici c'est le ***champ électrique*** *(créé directement ou indirectement par la source : un générateur ou une pile) qui exerce une force sur les charges de conduction.*

Lorsqu'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ est établi dans un milieu, les charges q du milieu subissent une force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$. Cette force, à l'image de l'action de la pesanteur est force conservative : on peut lui associer une énergie potentielle.

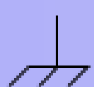
♥ Propriété I.1: Energie potentielle et potentiel électrique

En un point M du circuit, une charge q de conduction possède, sous l'effet du champ électrique local [a] une énergie potentielle $E_p = qV(M)$ où $V(M)$ est appelé **potentiel électrique du circuit au point M.**

a. Dans un circuit électrique, une source (pile ou générateur) créé un champ électrique local et celui-ci s'établit le long du circuit par la "réaction" des fils métalliques.

Le potentiel électrique ne dépend que du circuit et pas de la charge de conduction q. On peut donc parler du potentiel électrique **du circuit** en un point M.

♥ Définition I.3: Masse électrique



Comme l'énergie potentielle, le potentiel est défini à une constante près. On peut donc choisir le point du circuit où le potentiel électrique est nul. On parle de **référence des potentiels** ou **masse**.

La position de la masse est arbitraire mais on ne peut la définir qu'une fois (faire le parallèle avec l'origine des altitudes).

♥ Définition I.4: Tension électrique

On appelle tension U_{AB} (ou différence de potentiel entre deux points A et B) la différence $U_{AB} = V_A - V_B$.

Dans un schéma de circuit électrique, elle est représentée par une flèche pointant vers le premier point (ici A).

Réflexion

On considère un électron passant d'un point A à un point B dans un circuit.

Q1. Quel doit être le signe de la tension U_{AB} pour que l'électron perde de l'énergie potentielle. Exprimer alors l'énergie perdue par l'électron en fonction de e et U_{AB}.

Q2. Entre A et B, le courant électrique est d'intensité I. Si I est orienté de A vers B et qu'il n'a que des électrons qui se déplacent tous de A vers B, préciser le signe de I puis exprimer le nombre d'électron qui passent de A à B pendant un temps Δt en fonction de I et Δt.

Q3. On considère le système {circuit + électron de conduction} [a], en déduire en fonction de U_{AB}, I et Δt l'énergie E perdue par le système pendant Δt. En déduire la puissance $P = E/\Delta t$ perdue par le circuit.

Q4. Si c'était un autre type de charge, obtiendrait-on un autre résultat ?

L'étude précédente montre qu'en connaissant des grandeurs **macroscopiques** comme l'intensité et le potentiel électrique en tout point d'un circuit, on peut étudier un circuit électrique : *il n'est plus nécessaire de se ramener au mouvement microscopique des électrons.*

a. qu'on appelle circuit plus simplement

♥ Propriété I.2: Additivité des tensions

Considérons trois points du circuit A,B et C. On peut utiliser l'additivité des tensions :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} \tag{5.2}$$

Démonstration : $U_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C$

I.3 Ordres de grandeur

Courants électriques :

- ⋆ Circuits étudiés en TP de physique : quelques mA au maximum.
- ⋆ Courant pouvant provoquer une paralysie : 10mA
- ⋆ Limite officielle de fuite de courant : 30mA
- ⋆ Ampoule à incandescence : 1A
- ⋆ Radiateur électrique : 10A
- ⋆ Eclair : 10-100kA

Tensions électriques :

- ⋆ En TP : De quelques mV à plusieurs V
- ⋆ Piles : Entre 1.5 et 9V et Batteries : 6 à 24V (tension indépendante du temps)
- ⋆ Réseau de distribution EDF : Valeur efficace : 220V (tension sinusoïdale)
- ⋆ Ligne haute tension : 150 à 500 kV
- ⋆ Foudre : 100000 à 500000 kV

☞ Applications : Ordres de grandeurs (V.1).

I.4 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

On peut distinguer deux régimes : variables (où tensions et intensités varient) et indépendants du temps.

Que se passe-t-il lorsqu'une perturbation a lieu en un point d'un circuit (allumage, variation d'une grandeur...) ?

La vidéo en lien au début du chapitre montre quelques exemples de modifications. Dans tous les cas, on peut voir que cette perturbation va se ***propager*** *le long du circuit*[1] *: il s'agit* ***d'une onde électrique. La célérité des ondes électriques dans un circuit est de l'ordre de la célérité de la lumière*** $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$.

Réflexion

Q1. Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'un circuit électrique en TP ?

Q2. En déduire le temps que met l'onde électrique pour parcourir le circuit électrique.

Il faut faire la différence entre la vitesse des électrons dans le circuit et la vitesse de l'onde. On peut faire l'analogie avec la vitesse d'une onde à la surface d'une rivière (provoquée par la chute d'un caillou) qui se fera plus rapidement que le déplacement de l'eau de la rivière.

♥ Définition I.5: Approximation des régimes quasi-stationnaires

Un circuit dans lequel le temps de propagation des perturbations est **très faible devant** le temps de variation des grandeurs en un point du circuit est un circuit fonctionnant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (**ARQS**).

On peut alors considérer que les phénomènes de propagation sont instantanés et que les grandeurs du circuits (potentiel et intensités) varient en même temps sous l'effet d'une perturbation.

1. et possiblement revenir...

Réflexion

Q1. On considère un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur C, proposer une expression littérale du temps de variation des grandeurs du circuit (qu'on appelle ...?).

Q2. Les valeurs de C les plus basses en TP sont de l'ordre de $10nF$, quelle contrainte l'ARQS impose-t-elle sur R ? Risque-t-on d'invalider l'ARQS ?

Q3. Dans le cas d'un circuit où toutes les grandeurs varient de manièrent sinusoïdales à une fréquence f. Estimer la contrainte sur f pour se placer en ARQS. *En pratique, cette contrainte sera réalisée car on ne montera pas au dessus du MHz.*

Réflexion

On propose quelques analogies pour comprendre le concept d'ARQS.
Analogie sonore : On considère une épreuve de sprint. 8 coureurs occupent les 8 couloirs d'une pistes d'athlétisme et l'arbitre qui lance la course (par un signal sonore) est à 1m du couloir de droite.

Q1. Que signifie ici "se placer dans l'ARQS" ? Pourquoi est-ce indispensable.

Q2. Estimer le temps que met le son à arriver aux deux couloirs extrêmes.

Q3. (Recherche) Trouver dans la littérature un ordre de gandeur du temps de réaction (on pourra regarder quel temps de réaction est assimilé à un faux départ). Peut-on considérer qu'on est dans l'ARQS ?

Q4. En ARQS, les coureurs vont-ils tous faire la même course ?

On retiendra que se placer dans l'ARQS n'empêche pas le circuit d'évoluer suite à une perturbation. On aura par contre le même temps caractéristique pour l'ensemble des éléments du circuit.
De plus, même avec le même temps caractéristique, les différentes grandeurs peuvent varier différemment (penser aux tensions aux bornes de R et C dans un circuit RC).

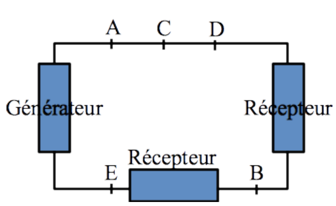
I.5 Définitions utiles

♥ Définition I.6: Définitions utiles

- ⋆ *Fil* (de connexion) : Un fil de connexion est un élément du circuit où tous les points ont le même potentiel [a].
- ⋆ *Bornes* (ou pôles) : Point de potentiel reliant un composant électronique au circuit.
- ⋆ *Dipôles* : Composants électroniques composés de deux bornes. Ce seront les composants que nous étudierons principalement.
- ⋆ *Maille* : Ensemble de dipôles reliées entre eux par des fils de connexion et formant une boucle fermée.
- ⋆ *Noeud* : Un noeud est un point où se rencontrent au moins trois fils : le débit d'électrons se sépare (ou converge) donc en ce point.

a. Définition théorique du fil

Réflexion



Q1. Quels les points de potentiels égaux dans ce circuits ?

Q2. Combien doit-on définir de points de potentiels différents pour pouvoir l'étudier ? Combient sont inconnus ?

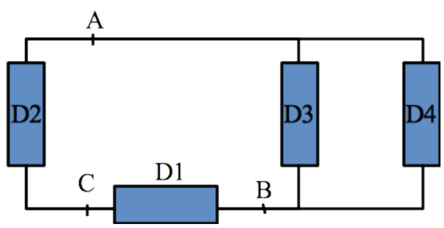
Q3. Combien doit-on définir de tensions différentes dans ce circuit pour pouvoir l'étudier ?

Réponses partielles : 3 points de potentiels différents (A,B, C) mais seulement 2 inconnus car on peut poser une référence des potentiels (par exemple $V_A = 0$).

♥ Définition I.7: Dipôles en série et en parallèle

- ⋆ Deux dipôles sont **en série** lorsqu'ils sont reliées entre eux par un fil de connexion **et qu'il n'y a pas de noeud au niveau de cette liaison.**
- ⋆ Deux dipôles sont **en parallèle** lorsque leurs bornes sont reliées deux à deux.
- ⋆ Un ensemble de dipôles en série forme une **branche**.

Réflexion



Q1. Préciser les dipôles en série. Les dipôles en parallèles.

Q2. Combient de points de potentiels inconnus doit-on définir pour ce circuit ?

Réponse partielle : En série : D1 et D2 ; En parallèle : D3 et D4[a].
Le nombre de potentiels inconnus est le même que dans le circuit précédent.

a. On pourrait aussi dire que le dipôle (D1+D2) et en parallèle avec D3 (ou D4)

I.6 Intensité et ARQS

♥ Propriété I.3: Intensité dans une branche en ARQS

Dans l'ARQS, l'intensité est la même en tout point d'une même **branche** *(c'est-à-dire d'un ensemble de dipôles et fils de connexion sans noeud).*

♥ Démonstration

L'ARQS suppose qu'il n'y a pas de phénomène de propagation. Une conséquence est l'absence de phénomène d'accumulation de charge en un point (car sinon cela produirait un phénomène de rééquilibrage et donc une réponse du circuit différente en chaque point).
Comme la charge est une grandeur qui se conserve, pour une portion de fil, le débit de charge entrant (l'intensité en entrée) égale le débit de charge sortant (l'intensité en sortie). Comme on peut prendre n'importe quelle portion de fil, il vient que l'intensité est la même en tout point du fil et par extension en tout point d'une branche.

Réflexion

Q1. Reprendre le circuit précédent et identifier combien d'intensité différentes faut-il définir ?

Q2. Si l'on raisonne sur les potentiels et les intensités, combien d'équations faudra-t-il pour toutes les déterminer ?

Q3. Même question si l'on raisonne sur les tensions et les intensités.

Les équations nécessaires seront de deux types : les lois de Kirchoff et les relations intensité-potentiel/tension pour des dipôles usuels (comme la loi d'Ohm pour une résistance) ?

II Bases d'étude d'un circuit

II.1 Etude générale

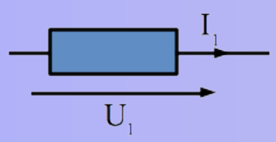
♥ Théorème II.1: Lois de Kirchhoff

- **Loi des mailles** : La somme des tensions d'une maille est nulle en orientant les tensions dans le même sens.
- **Loi des noeuds** : L'ensemble des courants entrant dans un noeud est égale à l'ensemble des courant sortant du même noeud.

♥ Démonstration

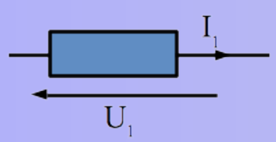
- Loi des mailles : Il s'agit de l'application de l'additivité des tensions sur une boucle.
- Dans l'ARQS, il ne peut pas y avoir d'accumulation de charge au niveau du noeud, donc le débit entrant égale le débit sortant.

♥ Définition II.1: Conventions d'orientation



Convention générateur

- Pour un dipôle D, si l'on oriente l'intensité I_1 qui le traverse et la tension U_1 à ses bornes dans le même sens, on dit qu'il est orienté **en convention générateur.**



Convention récepteur

- Pour un dipôle D, si l'on oriente l'intensité I_1 qui le traverse et la tension U_1 à ses bornes en sens contraire, on dit qu'il est orienté **en convention récepteur.**

- Le choix d'orientation de U et I pour un dipôle est **conventionnel**. U et I sont en effet des grandeurs **algébriques** et peuvent donc être négatives.
- Ce sont des conventions, qui n'indiquent PAS **si le dipôle se comporte physiquement comme un générateur ou un récepteur.**

♥ Propriété II.1: Puissance échangée

La puissance instantanée échangée entre un dipôle et le reste du circuit a pour expression :

$$P = U_1 \times I_1 \tag{5.3}$$

avec U_1 la tension à ses bornes et I_1 l'intensité qui le traverse.

- ⋆ En convention récepteur, elle correspond à la **puissance que reçoit** le dipôle du reste du circuit.
- ⋆ En convention générateur, elle correspond à la **puissance que fournit** le dipôle au reste du circuit.

Vous avez (presque) démontré cette propriété dans les questions de réflexion précédentes.

Réflexion

On peut différencier 4 configurations possibles suivant que U et I soient de même signes ou de signes différents et suivant qu'on soit en convention générateur ou récépteur.

Q1. Pour chacune des 4 configurations, préciser le signe de la puissance échangée.

Q2. En l'interprétant comme une puissance reçue ou fournie, dire si le dipôle fourni ou reçoit **physiquement de l'énergie.** On parlera alors de **comportement générateur ou récepteur.**

Contrairement à une convention, le comportement récepteur ou générateur ne peut être "choisi", il se détermine en étudiant le circuit.

III Dipôles électriques

III.1 Généralités

♥ Définition III.1: Point de fonctionnement

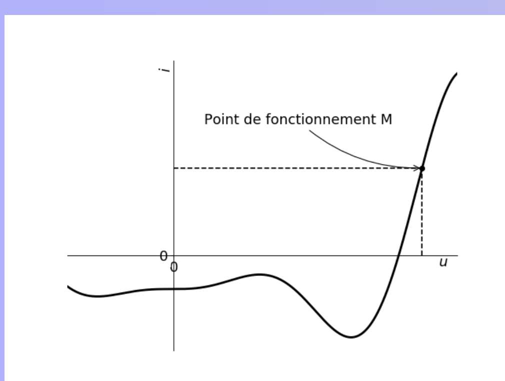


Figure 5.1 – Caractéristique statique

- ⋆ Un **point de fonctionnement** d'un dipôle est un couple $(U; I)$ de tension et intensité pouvant exister pour le dipôle en fonctionnement indépendant du temps.
- ⋆ La **caractéristiques statique** d'un dipôle est l'ensemble des points de fonctionnement du dipôle.

- ⋆ La caractéristique statique ne représente pas une évolution (temporelle) du dipôle mais **l'ensemble des états possibles en régime indépendant du temps.**
- ⋆ Une caractéristique statique peut dépendre d'un paramètre extérieur (température, luminosité. . .)

♥ Définition III.2: Typologie des dipôles

- ⋆ Un dipôle **symétrique** est un dipôle dont la caractéristique statique est symétrique par rapport à l'origine (0 ;0).
- ⋆ Un dipôle qui n'est pas symétrique est un dipôle **polarisé**
- ⋆ Un dipôle **passif** est un dipôle dont la caractéristique passe par l'origine.
- ⋆ Si la caractéristique ne passe pas par l'origine, on dit que le dipôle est **actif.**

Réflexion

Q1. Quelle loi relie la tension et l'intensité aux bornes d'une résistance (en convention récepteur) ? En déduire l'allure de la caractéristique statique d'une résistance. Est-ce un dipôle symétrique ou polarisé ? actif ou passif ?

Q2. On inverse les bornes de branchement de la résistance (ce qui revient à changer le sens de U). L'allure de la caractéristique statique de la résistance en convention récepteur et-elle changée ?

Q3. Lorsqu'elle est définie, quelle propriété mathématique possède la fonction $i(u)$ qui représente la caractéristique statique d'un dipôle symétrique ?

On pourra retenir que la caractéristique statique d'un dipôle symétrique ne dépend pas du sens de branchement. Au contraire, pour un dipôle polarisé, le sens de branchement a son importance (diode...).

♥ Définition III.3: Equation d'évolution

L'intensité qui traverse un dipôle est reliée à la tension entre ses bornes par une équation mathématique appelée **équation d'évolution du dipôle**.

Un dipôle est dit **linéaire** si son équation d'évolution est une équation différentielle linéaire soit une équation de la forme :

$$a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) = b_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + ... + b_1 \frac{di(t)}{dt} + b_0 i(t) + F(t)$$

L'ordre de l'équation différentielle est le rang de la dérivée la plus grande.

Un circuit composé uniquement de dipôle linéaire est appelé **circuit linéaire.**

Réflexion

Q1. On donne deux équation d'évolution ci-après, laquelle correspond à un dipôle linéaire ?

$$i(t) = I_0 \left(\exp^{u(t)/V_S} - 1\right)$$
$$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

Q2. Que vaut une dérivée temporelle dans un régime indépendant du temps ? En déduire que la caractéristique statique d'un dipôle linéaire est :

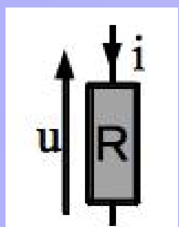
$$a_0 U - b_0 I = F_0 \tag{5.4}$$

Q3. Que vaut F_0 si le dipôle est passif ? *Dans le cas contraire, on parlera de dipôle linéaire* ***actif****.*

III.2 Dipôles linéaires passifs

Dipôles usuels

♥ Définition III.4: Résistance



Un conducteur ohmique ou résistance est un dipôle dont l'équation d'évolution est **en convention récepteur :**

$$u(t) = Ri(t) \tag{5.5}$$

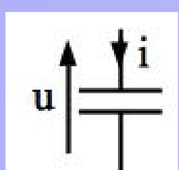
où R est appelée **résistance**. Son inverse $G = 1/R$ est appelée **conductance**.

Réflexion

Q1. Exprimer la puissance reçue par une résistance en fonction de R et i puis en fonction de R et u.

Q2. Que devient cette puissance ? Citer une utilisation et un problème associé.

♥ Définition III.5: Condensateur



Un condensateur (ou capacitance) est un dipôle linéaire passif constitué de deux armatures métalliques séparées par un isolant dont l'équation d'évolution est :

$$\begin{cases} q(t) & = Cu(t) \\ i(t) & = C\frac{du}{dt}(t) \end{cases} \tag{5.6}$$

où $q(t)$ est la chargée portée par l'armature où pointe la flèche de la tension $u(t)$ et $i(t)$ et $u(t)$ sont en convention récepteur.
C est appelée capacité du condensateur.

Le fonctionnement d'un condensateur est basé sur le champ électrique créé par l'accumulation des charges sur les deux armatures. Ce champ ainsi créé permet le stockage d'énergie sous forme électrostatique.

♥ Propriété III.1: Energie stockée dans un condensateur

Lorsqu'on applique une tension u à ses bornes, un condensateur stocke une énergie :

$$E_{el} = \frac{1}{2}Cu^2 \tag{5.7}$$

♥ Démonstration

Nous allons montrer que la puissance reçue par le condensateur peut se mettre sous la forme $P = \frac{dE}{dt}$. On observe ainsi qu'on peut exprimer la puissance échangée comme une variation d'énergie. Celle-ci correspondra à la variation d'énergie du dipôle.
La puissance reçue par un condensateur s'écrit (on l'oriente en convention récepteur) :

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t)\frac{du}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu^2(t)\right)$$

(on a cherche une primitive à la fonction u(t) u'(t)).

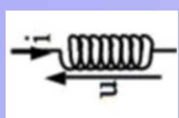
Réflexion

Q1. Que devient l'équation d'évolution du condensateur en régime indépendant du temps. En déduire sa caractéristique statique. Est-elle identique à celle d'un fil ? d'un interrupteur ouvert ?

Q2. Expliquer succintement pourquoi les deux équation d'évolution (en i et en q) sont équivalentes.

Q3. La relation $P_{recue} = \frac{dE_{recue}}{dt}$ permet de calculer l'énergie reçue par un dipôle (cas général) entre $t = t_0$ et $t = t_1$ Par quelle opération ? Dans le cas du condensateur, justifier que $E_{recue} = \frac{1}{2}Cu^2(t_1) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$.

♥ Définition III.6: Bobine ou Inductance



Une bobine (ou inductance) est un enroulement de fil formant ainsi des *spires*. Son équation d'évolution **en convention récepteur** est :

$$u(t) = L\frac{di}{dt}(t) \tag{5.8}$$

où L est appelée inductance (ou auto-inductance) de la bobine.

On doit souvent tenir compte de la résistance interne d'une bobine à cause dela longueur de fils.

♥ Propriété III.2: Energie stockée dans une bobine

Lorsqu'un courant i circule dans une bobine, celle-ci stocke une énergie :

$$E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 \tag{5.9}$$

Réflexion

Q1. En vous aidant du cas du condensateur, démontrer la propriété précédente.

Q2. Que devient l'équation d'évolution d'une bobine en régime indépendant du temps. En déduire sa caractéristique statique. Est-elle identique à celle d'un fil ? d'un interrupteur ouvert ?

Q3. Dans le cas d'une bobine, justifier que $E_{recue,t_0\to t_1} = \frac{1}{2}Li^2(t_1) - \frac{1}{2}Li^2(t_0)$.

Association de dipôles passifs

♥ Définition III.7: Dipôles équivalents

Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même équation d'évolution.

On utilise en général ce concept pour passer d'un dipôle constitué d'un maillage complexe (association de plusieurs d'un dipôle) à un dipôle usuel simple.

♥ Propriété III.3: Résistances en série

Deux résistances R_1 et R_2 en série sont équivalentes à une seule résistance de valeur

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{5.10}$$

♥ Démonstration

Comme expliqué précédemment, il suffit d'exprimer l'équation d'évolution. Ici, les deux résistances étant en série, la tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle : $u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$.
L'équation d'évolution d'une résistance étant $u = R_{eq} i$, on peut identifier les deux expressions avec $R_{eq} = R_1 + R_2$.

♥ Propriété III.4: Résistances en parallèle

Deux résistances R_1 et R_2 en parallèle sont équivalentes à une seule résistance de valeur $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$ (soit de conduction $G_{eq} = G_1 + G_2$)

Réflexion

Q1. En exprimant l'intensité totale i circulant dans l'ensemble des résistances en parallèle, démontrer la propriété précédente(♥).

Q2. Proproser une généralisation aux deux propriétés précédentes lorsque on dispose N résistances en série puis N résistances en parallèle.

Q3. La résistance équivalente à deux résistances en série est-elle plus grande ou plus petite ?

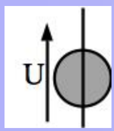
Q4. La résistance équivalente à deux résistances en parallèle est-elle plus grande ou plus petite ?

Il existe aussi des propriétés d'associations de condensateurs et de bobines mais elles ne sont pas à connaître.

III.3 Dipôles linéaires actifs

Sources idéales

♥ Définition III.8: Source idéale de tension



Une source idéale de tension est un dipôle dont la tension est une caractéristique propre du dipôle et ne varie pas, quelque soit l'intensité qui la traverse.
On appelle la tension à ses bornes **force électromotrice (f.e.m.)**

♥ Définition III.9: Source idéale de courant

Une source idéale de courant est un dipôle dont l'intensité est une caractéristique propre du dipôle et ne varie pas, quelque soit la tensionà ses bornes.
On appelle l'intensité qui la traverse **courant électromoteur (c.e.m.)**

Réflexion

Q1. Représenter les caractéristiques statiques d'une source idéal de tension puis d'une source idéale de courant. Sont-elles des dipôles symétriques ou polarisés ?

Q2. Quelle est la puissance maximale que peuvent délivrer ces sources. Commenter le terme "idéale".

Modélisation des sources réelles

♥ Définition III.10: Electromoteur

Une source réelle voit sa tension (resp. son intensité) diminuer lorsqu'on commence à demander une intensité (resp. une tension) trop importante. Sous l'hypothèse linéaire, la relation doit donc s'écrire sous la forme (en convention générateur) :

$$u(i) = E - Ri \tag{5.11}$$

On parle de **source réelle** ou **électromoteur.**

♥ Propriété III.5: Modélisation de Thévenin

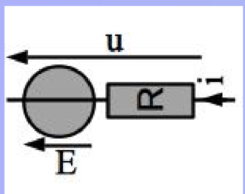


FIGURE 5.2 – Modèle de Thévenin

Un électromoteur peut être modélisé par une source idéale de tension de fem E en série avec une résistance R.

Il s'agit d'une modélisation, en pratique, l'intérieur d'une source réelle (générateur des TPs) est plus complexe.

♥ Démonstration

Comme à chaque fois pour prouver/déterminer l'équivalence de deux dipôles, nous allons exprimer la relation intensité tension. Dans le cas de l'électromoteur, on a déjà $u = E - Ri$
La tension aux bornes du modèle proposé est (la résistance est orientée en convention générateur) : $u = E + u_R = E - Ri$
On a bien identification des équations d'évolution, donc l'électromoteur est modélisable par le modèle de Thévenin.

Réflexion

Q1. Un dipôle est court-circuité lorsqu'on lui branche un fil à ses bornes. Que vaut alors la tension à ses bornes ? Exprimer alors le courant de court-circuit I_{cc} en fonction de E et R pour un électromoteur.

Q2. Exprimer pour une tension u aux bornes du dipôles la puissance $P(u)$ échangée par le dipôle. Est-ce une puissance reçue ou fournie ?

Q3. Déterminer la puissance échangée maximale P_{max} et la tension u_{max} correspondante.

☞ Méthodes : Lois de noeuds en terme de potentiel (V.1), Utiliser les lois de Kirchhoff (V.2) ; Méthodes : Dipôles équivalents (V.5, V.6, V.7) ; Etudes énergétiques (V.8, V.9, V.10, V.11)

☞ Applications : Dipôles équivalents(V.3) ; Etudes énergétiques (V.2, V.4, V.6).

IV Théorèmes utiles

Les lois de Kirchhoff couplées aux relations intensité-tension suffisent à mettre en équation un circuit linéaire pour l'étudier.

Il existe néanmoins des théorèmes qui en découlent et qui permettent de résoudre certains problèmes beaucoup plus rapidement.

♥ Théorème IV.1: Pont diviseur de tension

Considérons N résistances en série dont les résistances sont $\{R_i | i \in [\![1; n]\!]\}$ aux bornes de laquelle la tension est u. L'intensité circulant dans l'ensemble est :

$$i = \frac{u}{\sum_{i=1}^{i=n} R_i} \tag{5.12}$$

Et la tension u se divise dans chaque dipôle. La tension aux bornes de la résistance R_k est :

$$u_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{i=n} R_i} u \tag{5.13}$$

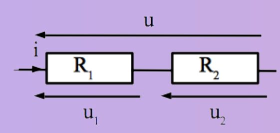


FIGURE 5.3 – Pont diviseur de tension

ATTENTION, les résistances doivent être en série : il ne doit pas y avoir de noeuds entre les résistances.

♥ Démonstration

On peut utiliser l'additivité des tensions : $u = \sum_{i=1}^{i=n} u_k = \sum_{i=1}^{i=n} R_k i =$ d'où l'expression de l'intensité. De $u_k = R_k i$, on obtient l'expression de la tension.

♥ Théorème IV.2: Pont diviseur de courant

Considérons N résistances en parallèle dont les conductances sont $\{G_i | i \in [\![1; n]\!]\}$ dans laquelle entre une intensité totale i.
La tension aux bornes de l'ensemble est :

$$u = \frac{i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i} \tag{5.14}$$

Et le courant i se divise dans chaque branche. L'intensité aux bornes de la résistance R_k est :

$$i_k = \frac{G_k}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i} i \tag{5.15}$$

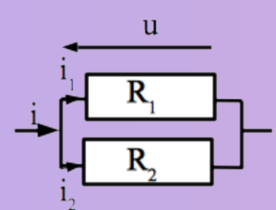


FIGURE 5.4 – Pont diviseur de courant

Réflexion

En utilisant la loi des noeuds, démontrer les relations d'un pont diviseur de courant(♥).

- ☞ Méthodes : Pont diviseur (V.3, V.4)
- ☞ Applications : Pont de Wheatstone(V.5)

V S'entrainer

V.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Etudier un circuit électrique linéaire

♥ Méthode V.1: Loi des noeuds en terme de potentiel

On considère le circuit Figure 5.5. Déterminer la tension U_{BC} en utilisant la lois de noeuds en terme de potentiel.

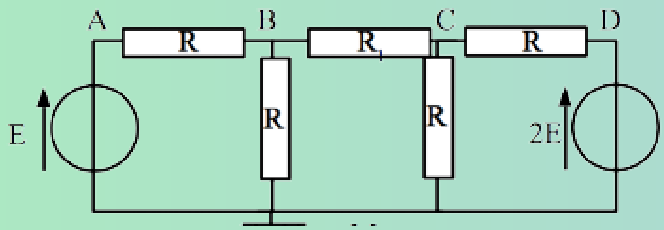


FIGURE 5.5 – Utilisation des lois de Kirchhoff

♥ Méthode V.2: Utiliser les lois de Kirchhoff avec les tensions

Reprendre le circuit précédent mais déterminer U_{BC} en utilisant les lois de Kirchhoff avec des tensions au lieu des potentiels.

♥ A retenir: Utilisation des lois de Kirchhoff

On retiendra les deux utilisations possibles des lois de Kirchhoff :

- ⋆ soit en utilisant les potentiels pour éliminer toutes les intensités dans les lois des noeuds
- ⋆ soit en utilisant les tensions et donc les lois des mailles.

Les deux méthodes sont à maitriser. Si la loi des noeuds en terme de potentiel est plus nouvelle, il est important de remarquer son efficacité : on se retrouve avec un système d'équation $2*2$ et non $5*5$ une fois la mise en équation réalisée.

♥ Méthode V.3: Repérer et utiliser un pont diviseur de tension

♥♥ Déterminer la condition reliant les résistance pour que la tension U_{AB} soit nulle (on dit que le pont est alors équilibré).

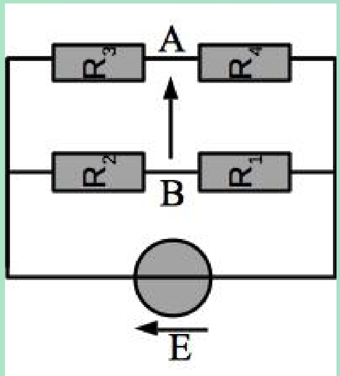


FIGURE 5.6 – Pont de wheatstone

♥ Méthode V.4: Repérer et utiliser un pont diviseur de courant

Reprendre l'exercice précédent en remplaçant la source idéale de tension par une source idéale de courant délivrant un courant électromoteur I_0 (même sens que E.) mais en utilisant un pont diviseur de courant.

♥ A retenir: Repérer et utiliser un pont diviseur de tension

- ⋆ Il faut savoir repérer un pont diviseur de tension (ou de courant) et utiliser correctement les relations donnant tension ou intensité.
- ⋆ Il faut faire attention à l'orientation des tensions et intensités qu'on calcule.
- ⋆ Le cas du pont de Wheatstone est un exercice ultra classique à maitriser.

Dipôles équivalents

♥ Méthode V.5: Par équation d'évolution

Déterminer la résistance équivalente au réseau de résistance de la Figure 5.7.

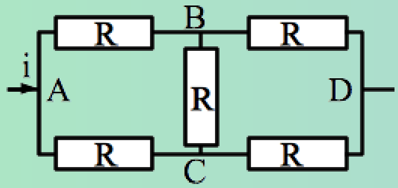
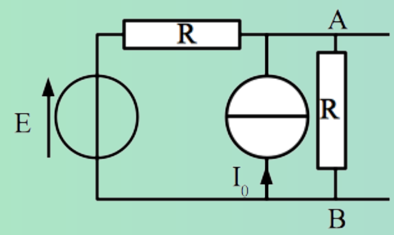


FIGURE 5.7 – Maillage de résistances

♥ Méthode V.6: Modèle de Thévenin équivalent

Montrer que le circuit ci-dessous est équivalent à un modèle de Thévenin entre les bornes A et B dont on déterminera les caractéristiques.

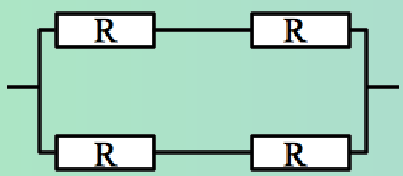


♥ A retenir: Modèle de Thévenin équivalent

On retiendra les deux méthodes de détermination du montage équivalent.

♥ Méthode V.7: Par manipulation d'un circuit

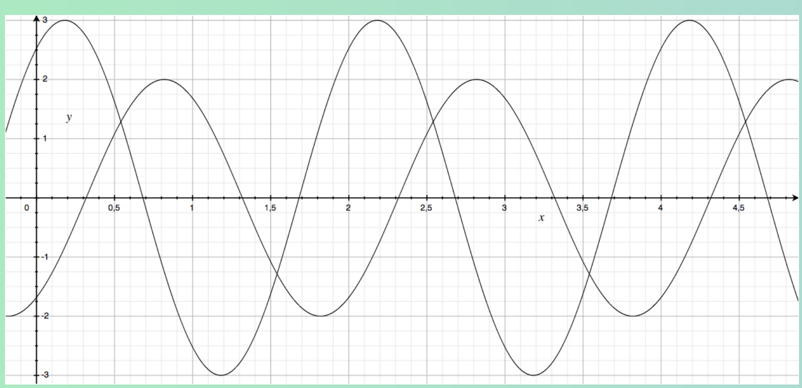
Cette méthode est surtout utile pour simplifier un circuit (comme dans l'exercice sur le pont diviseur de courant (cf. Méthode V.4)). Déterminer la résistance équivalente au réseau de résistance ci-après.



Etudes énergétiques

♥ Méthode V.8: Comportements récepteurs et générateurs. Etude graphique

On considère un dipôle D dans un circuit. Les évolutions de l'intensité qui le traverse et de la tension à ses bornes en convention générateur sont données ci-après. Déterminer les temps récepteurs et les temps générateurs, c'est-à-dire les moments où le dipôle se comporte comme un récepteur et les moments où le dipôle se comporte comme un générateur.



♥ Méthode V.9: Comportements récepteurs et générateurs. Etude par le calcul

On considère un dipôle D orientée en convention générateur. On a trouvé que l'intensité qui circulait dans le dipôle a pour expression : $i(t) = i_m \sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$ et que la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$ avec $u_m > 0$ et $i_m > 0$.

Q1. Exprimer la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$. S'agit-il d'une puissance reçue ou fournie ?

Q2. Montrer que $p(t)$ est un signal sinusoïdal dont on précisera les caractéristiques. On note T la période de $p(t)$

Q3. Déterminer l'énergie fournie par le dipôle durant une période T. Le dipôle a-t-il un comportement globalement générateur ou récepteur ?

♥ A retenir: Etudes énergétiques

On retiendra :

- ⋆ la méthode de calcul d'une puissance échangée et la détermination du caractère reçu ou fourni.
- ⋆ l'interprétation du signe de la puissance pour déterminer le **comportement** récepteur ou générateur.
- ⋆ le calcul de l'énergie par intégration de la puissance [a].

[a] ATTENTION : si l'on travaille avec un condensateur ou une bobine, il faut utiliser l'énergie stockée plutôt car le calcul sera plus simple.

♥ Méthode V.10: Déterminer les comportements de dipôles dans un circuit

On considère le circuit ci-après et on donne les caractéristiques suivantes :

- ⋆ D_2 et D_4 sont des accumulateurs : leur tension est imposées de l'extérieur. La tension U_1 aux bornes de D_2 est connue et positive. La tension U_2 est réglable (mais constante durant la manipulation) et de signe quelconque.
- ⋆ D_1 et D_3 sont deux conducteurs ohmiques de même résistance R.

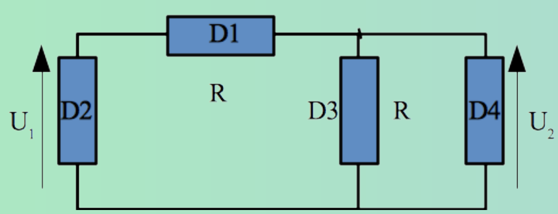


FIGURE 5.8 – Comportements des dipôles

Déterminer, suivant les valeurs de U_2 les comportements récepteurs/générateurs des deux dipôles D_2 et D_4.

♥ Méthode V.11: Puissance et énergie pour les dipôles usuels

Calculer la puissance instantanée reçue puis l'énergie emmagasinée durant une période pour :

Q1. un condensateur C dont la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi)$

Q2. une bobine L dont l'intensité la traversant est $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi)$

Q3. une résistance R dont la tension à ses bornes est $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi)$

♥ A retenir: Puissance et énergie pour les dipôles usuels

- ⋆ Pensez à passer par l'énergie stockée pour calculer l'énergie reçue par un condensateur ou une bobine.
- ⋆ Une résistance ne stocke pas d'énergie, elle en dissipe.
- ⋆ La méthode pour calculer l'énergie dissipée par R : l'intégration temporelle de $p(t)$.

Modélisation des instruments. Résistance d'entrée et de sortie.

♥ Propriété V.1: Résistance d'entrée d'un instrument de mesure

Un instrument de mesure comme un multimètre ou un oscilloscope possède ses propres caractéristiques électriques. Du point de vue du reste du circuit, ce comportement, en régime indépendant du temps, peut-être **modélisé** par une résistance qu'on appelle **résistance d'entrée de l'appareil.**

♥ Propriété V.2: Résistance de sortie d'une source

Lorsqu'on utilise un générateur (GBF comme générateur basse fréquence en TP) en pratique, on règle la tension qu'il doit délivrer. Cela revient à régler la fem de la source étudiée précédemment. Néanmoins, dans une source réelle, l'intensité demandée occasionne une chute de tension qu'on **modélise** par une résistance en série avec la fem (modèle de Thévenin). Cette résistance est appelée **résistance de sortie** du générateur.

♥ Méthode V.12: Influence d'une résistance de sortie

On considère un circuit constitué d'un générateur modélisé par la représentation de Thévenin $(E; R_S)$ et d'une résistance R. L'utilisateur règle sur le générateur la tension E et attend normalement que la tension aux bornes de R soit celle qu'il a réglé.

Q1. Exprimer la tension aux bornes u_R de la résistance R. L'utilisateur obtient ce qu'il attend en toute rigueur.

Q2. A quelle condition peut-on considérer que $u_R \approx E$? En déduire la condition que doit vérifier une impédance de sortie pour ne pas influer sur le circuit.

Q3. Méthode de la tension de moitié : Si l'on suppose que R est variable, pour quelle valeur de R, la tension u_R vaudra E/2 ? En déduire une méthode expérimentale pour mesurer la résistance interne d'un GBF.

♥ A retenir: Rsistance de sortie d'une source

On retiendra :

- ⋆ la modélisation de Thévenin des sources.
- ⋆ que ce n'est qu'une **modélisation** vue de l'extérieur et pas l'intérieur de l'appareil
- ⋆ **Influence de la résistance interne :** Pour qu'un GBF influe peu sur le circuit, il faut que sa résistance de sortie soit très faible devant les résistances du circuit. Si cette condition n'est pas réalisée, la tension à la sortie du GBF ne sera pas la tension réglée (sa fem) mais elle sera plus faible.
- ⋆ **Méthode de la tension de moitié :** Pour déterminer la résistance de sortie d'un générateur, on réalise deux étapes :

1. On lui branche une résistance variable R dont on a réglé la valeur assez haute. On peut ainsi mesurer la valeur de la tension E délivrée lorsque R_S est négligeable en mesurant la tension aux bornes de R.
2. On diminue R jusqu'à mesurer une tension E_2 aux bornes de R. On a alors $R = R_S$.

♥ Méthode V.13: Influence d'une résistance d'entrée

On considère une résistance R dont on veut connaître la tension à ses bornes. On branche un voltmètre de résistance d'entrée R_e en parallèle de R pour mesurer sa tension.

Q1. Quelle la résistance équivalente R_{eq} de l'ensemble des deux résistances ?

Q2. On peut considérer que le circuit n'est pas influencé par le voltmètre si la résistance équivalente est à peu près égale à R. A quelle condition sur R_e, cette approximation est valable. En déduire les bonnes caractéristiques d'une résistance d'entrée pour un voltmètre.

Q3. On ne place pas dans l'approximation précédente et une intensité i arrive sur l'ensemble résistance+voltmètre. Quelle est la chute d'intensité $\Delta i = i - i_R$ avec i_R l'intensité circulant dans la résistance ?

♥ A retenir: Résistance d'entrée d'un instrument

- ⋆ La modélisation des instruments en tant que résistance d'entrée.
- ⋆ Que ce n'est qu'une **modélisation**.
- ⋆ **Influence de la résistance interne :** Pour qu'un voltmètre influe peu sur un circuit, il faut que son impédance d'entrée soit grande devant les impédances du circuit.
- ⋆ Attention : pour un ampèremètre, il faudrait une tension faible à ses bornes donc une résistance d'entrée faible.

V.2 Applications

Quizz sur les bases (Moodle)

Quizz sur les circuits équivalents (Moodle)

✍ Exercice V.1: Ordre de grandeur

Q1. En considérant qu'un atome de cuivre libère en moyenne un électron de conduction, déterminer le nombre d'électron de conduction par unité de volume. On donne

- ⋆ Masse molaire du cuivre : $M_{Cu} = 63.5\text{g.mol}^{-1}$
- ⋆ Masse volumique du cuivre : $\rho_{Cu} = 9 \times 10^3\text{kg.m}^{-3}$

Q2. On considère un fil de cuivre de section $S = 1\text{mm}^2$ parcourue par une intensité $I = 1\text{A}$. La vitesse de dérive des électrons dépend de I, e la charge élementaire et du produit $\lambda = Sn_e$ (qui correspond à la densité linéique d'électrons). Déterminer, par analyse dimensionnelle l'expression de v en fonction de I, e et λ (le coefficient adimensionné est égal à 1) En déduire une estimation numérique de la vitesse des électrons. Commenter.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Analyse dimensionnelle
- ⋆ Notion sur les Unités
- ⋆ Définition de l'intensité électrique

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $n_e = \frac{N_A \rho_{Cu}}{M_{Cu}} \sim 10^{29}$electrons.m^{-3}

Q2. $v = \frac{I}{e n_e S} \sim 6 \times 10^{-5} m.s^{-1}$. C'est une vitesse très faible [a] : tout en étant très agités, les charges dérivent lentement dans le fil.

a. La vitesse d'agitation thermique des électrons est de l'ordre de 1000m/s à température ambiante.

✍ Exercice V.2: Energétique

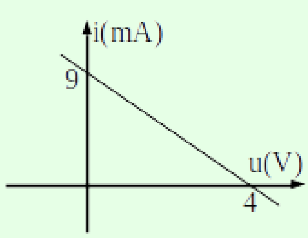
On appelle résistance 1/4W, une résistance pouvant dissiper au maximum une puissance P=0.25W. Déterminer, en fonction de R et P la tension maximale qu'on peut mettre à ses bornes et estimer la gamme de valeur de tension pour des résistances usuelles.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Puissance électrique
- ⋆ Loi d'Ohm

Eléments de correction (sans justification) : $U = \sqrt{RP}$

✍ Exercice V.3: Source réelle



Q1. On considère une source réelle modélisable soit par un modèle de Thévenin de fem E et de résistance interne R_1, soit par une source idéale de courant η en parallèle d'une résistance R_2. Montrer que les deux sources sont équivalentes à condition d'avoir $R_1 = R_2$ et $E = R_1 \eta$.

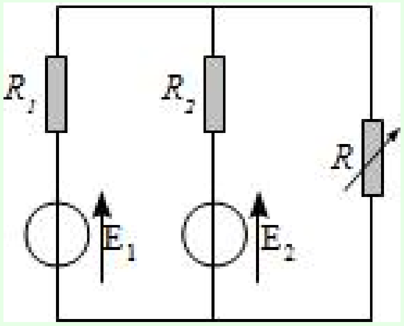
Q2. On considère un dipôle D dont la caractéristique est donnée ci-contre. Déterminer les caractéristiques de sa modélisation de Thévenin.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Modèle de Thévenin
- ⋆ Dipôle équivalent

Eléments de correction (sans justification) : $E_{th} = 4V ; R_{th} = 4/9\Omega$

✍ Exercice V.4: Accumulateurs



On considère le circuit suivant où R est une résistance variable et les fem E_1 et E_2 sont positives et $E_1 > E_2$. Déterminer suivant les valeurs de R le comportement recepteur ou générateur deux fem.
Pensez à vérifier la cohérence de vos résultats (homogénéité et sens physique).

Points utiles pour cet exercice

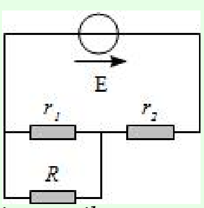
- ⋆ Ponts diviseurs
- ⋆ Lois de Kirchhoff
- ⋆ Puissance électrique

Eléments de correction (sans justification) :
Valeur critique de R : $R_{eq} = \frac{R_1 E_2}{E_1 - E_2}$. Pour $R_{eq} < R$, E_2 a un comportement récepteur et pour $R_{eq} > R$, E_2 a un comportement générateur. E_1 a toujours un comportement générateur.

✍ Exercice V.5: Pont de wheatstone

Reprendre le montage du pont de Wheatstone et retrouver la tension U_{AB} en utilisant la loi des noeuds en terme de potentiel.

✍ Exercice V.6: Rendement en puissance



Exprimer le rendement η du diviseur de tension représenté sur le circuit ci-dessous (le rapport de la puissance dissipée dans la résistance de charge R à la puissance fournie par la tension E) en fonction de r_1, r_2 et R.
Vérifier l'homogénéité de votre résultat.

Points utiles pour cet exercice

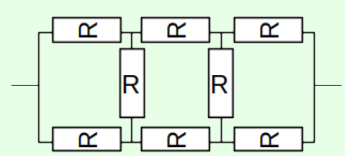
- ⋆ Puissance échangée
- ⋆ Ponts diviseurs ou loi de Kirchhoff
- ⋆ Loi d'Ohm

Eléments de correction (sans justification) : $\eta = \frac{1}{R} \frac{\left(\frac{r_1}{r_1+R}\right)^2}{\frac{r_1 R}{r_1+R} + r_2}$

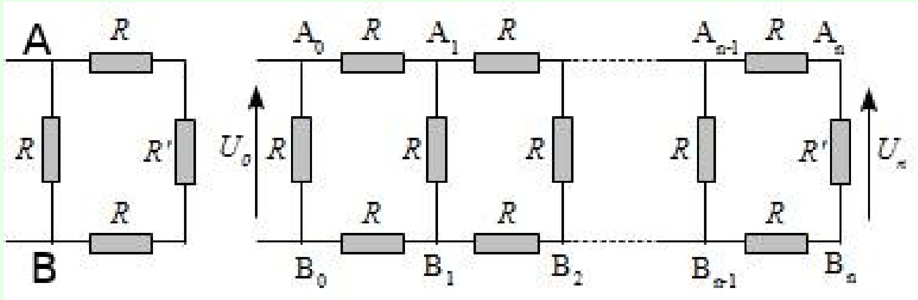
V.3 Entraînement

✍ Exercice V.7: Résistances équivalentes

Q1. On considère le réseau de résistances suivantes. Déterminer la résistance équivalente en déterminant la relation u(i).



On considère maintenant le circuit suivant :



Q2. Déterminer R' pour que la résistance équivalente entre A et B soit égale à R' du premier circuit ci-dessus.

Q3. En déduire la valeur de U_{n+1} dans le second circuit ci-dessus si R' a la valeur déterminée à la question précédente.

Q4. Quelle est la valeur de la résistance équivalente entre A_0 et B_0 dans le second circuit ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Dipôle équivalent
- ⋆ Associations de résistances
- ⋆ Symétries
- ⋆ Pont diviseur

Eléments de correction (sans justification) :

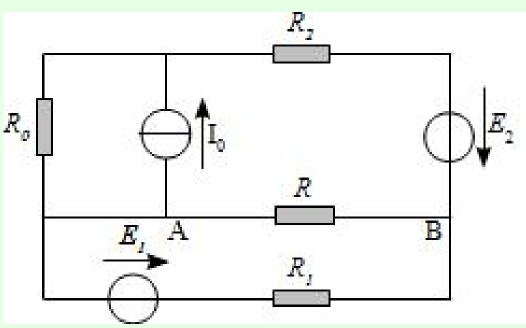
Q1. $R_{eq} = 3R/2$

Q2. $R' == \left(\sqrt{3} - 1\right) R$

Q3. $U_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^{n+1} U_0$

Q4. R'

✍ Exercice V.8: Circuit divers



On considère le circuit ci-dessous. Déterminer l'intensité i qui traverse la résistance R (de la gauche vers la droite) en utilisant :

Q1. les lois des noeuds et des mailles

Q2. la loi des noeuds en termes de potentiels

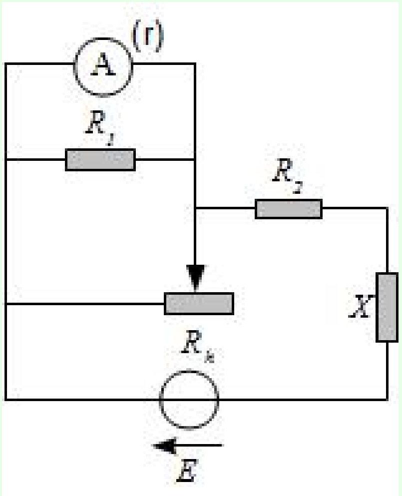
Vérifier l'homogénéité de votre résultat.

Attention à l'abus de notation : I_0 est bien une intensité et non une tension ! *Points utiles pour cet exercice*

- ⋆ Lois des noeuds en terme de potentiel
- ⋆ Lois de Kirchhoff

Eléments de correction (sans justification) :
$i = -\frac{R_1 E_2 + R_1 R_0 I_0 + (R_0 + R_2) E_1}{(R_0 + R_2)(R_1 + R) + R R_1}$

✍ Exercice V.9: Ohmmètre à tarage shunt



On considère le montage suivant qui modélise un ohmmètre à tarage shunt. Il comporte un générateur de f.e.m. E (de résistance interne négligeable), un milliampèremètre de résistance interne r, un rhéostat de résistance variable R_h et des résistors R_1, R_2. La résistance X est la résistance à mesurer.

Q1. Exprimer l'intensité i dans le milliampèremètre en fonction de E, R_1, R_2, R_h, r, X. Quelle est cette intensité i_0 lorsque B et C (bornes de X) sont court-circuités ? Dans les deux cas, vérifier l'homogénéité de votre résultat.

Q2. L'avantage du tarage shunt est qu'on peut choisir R_h très grande devant r. Donner dans ce cas l'expression de i sous la forme $\frac{kE}{X+R}$ en déterminant k et R.

Q3. En déduire l'expression de X en fonction de i, i_0 et R.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Ponts diviseurs
- ⋆ Lois de Kirchhoff

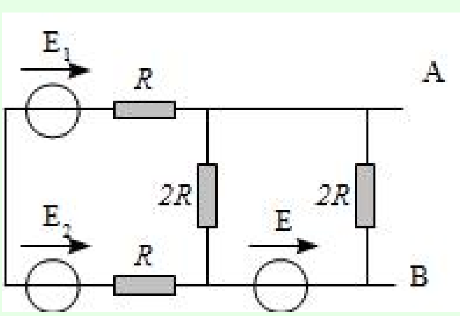
Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $i = \frac{RR_h}{(R_2+X)(rR_1+R_1R_h+rR_h)+rR_1R_h}E$

Q2. $k = \frac{R}{R_1+r}; R = R_2 + \frac{R_1 r}{R_1+r}$

Q3. $X = R\left(\frac{i_0}{i} - 1\right)$

✍ Exercice V.10: Générateur équivalent



On considère le circuit suivant.

Q1. Déterminer le générateur de Thévenin du circuit équivalent entre les bornes A et B. Vérifier l'homogénéité de vos résultats.

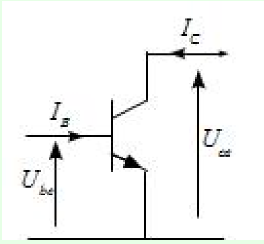
Q2. Donner la valeur de E pour laquelle le circuit est équivalent à une résistance pure (entre A et B) dont on précisera la valeur. A.N. : $R = 5\Omega; \mathrm{E}_1 = 2\mathrm{V}; \mathrm{E}_2 = 8\mathrm{V}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Dipôles équivalents
- ⋆ Modèles de Thévenin

Eléments de correction (sans justification) :
$E_{eq} = \frac{E_1 - E_2 - 2E}{3}; R_{eq} = \frac{3R}{2}$

✍ Exercice V.11: Modélisation d'un transistor bipolaire



Un transistor bipolaire est un tripôle qui est toujours utilisé comme un quadripôle en rendant une de ses électrodes communes à l'entrée et la sortie. En régime linéaire basse fréquence, les équations d'un transistor bipolaire en émetteur commun E sont : $u_{be} = ri_B + \mu u_{ce}$ et $i_C = \beta i_B + \frac{u_{ce}}{\rho}$. On désire déterminer les valeurs des différentes grandeurs données dans l'équation.

Q1. ⇝ Modéliser ce composant à l'aide de composants fondamentaux.

Q2. On branche une résistance R_L entre C et E, déterminer l'amplification en courant $A_i = \frac{i_c}{i_b}$

Q3. Faire l'application numérique pour $\beta = 150; \rho = 20k\Omega; R_L = 1k\Omega$.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Modélisation de dipôles
- ⋆ Lois de Kirchhoff

Eléments de correction (sans justification) :
$A_i = \frac{\beta\rho}{\rho + R_L}$

Devoir libre sur ce chapitre (Moodle)

Chapitre 6: Régime transitoire

Dans ce chapitre, on parlera de grandeurs d'entrée et de sortie à l'image du cours sur les SLCI en SI.

I Régimes de fonctionnement

I.1 Définitions

♥ Définition I.1: Régimes de fonctionnements

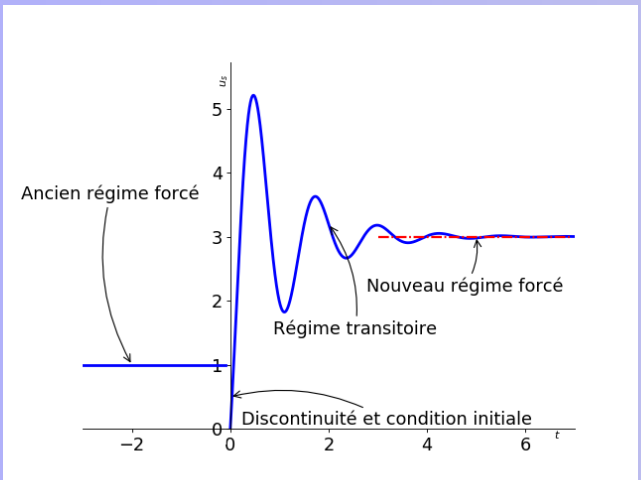


FIGURE 6.1 – Différents régimes

Lorsque la grandeur d'entrée varie brusquement pour passer d'une forme à une autre, le système (ses grandeurs) va évoluer durant un temps fini (non nul) pour tendre (s'il est stable [a]) vers un nouveau régime.

- ⋆ L'évolution entre *l'état initial* et le nouveau régime état final est appelé **régime transitoire.**
- ⋆ Si le système est **stable**, les grandeurs du systèmes vont tendre vers un état dépendant (*en forme mathématique notamment*) **de la grandeur d'entrée.** On parle alors de **régime forcé.**

a. Un système est dit **stable** si les grandeurs du système ne divergent pas lorsqu'il est laissé à lui-même.

Dans un premier temps, les grandeurs d'entrée seront constant, donc *les régimes forcés seront des régimes indépendants du temps* mais un régime forcé peut être d'une autre nature suivant la grandeur d'entrée. Le prochain chapitre s'intéressera au cas d'une entrée sinusoïdale.

Réflexion

La fonction $u(t)$ qui représente la grandeur sur le graphique précédent est-elle continue ? D'après vous, quelle est la cause de cette discontinuité ?

I.2 Propriété utiles pour l'étude d'un circuit

♥ Propriété I.1: Condensateur et bobine en régime indépendant du temps

Pour rappel, vous avez dû observer que :

- ⋆ en régime indépendant du temps, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- ⋆ en régime indépendant du temps, une bobine se comporte comme un fil.

Réflexion

Refaire la démonstration de ces deux propriétés en simplifiant l'équation d'évolution des deux dipôles en régime indépendant du temps.

♥ Propriété I.2: Continuité des grandeurs

- ⋆ La **tension aux bornes d'un condensateur** est une grandeur nécessairement continue.
- ⋆ **L'intensité qui circule dans une bobine** est une grandeur nécessairement continue.

Les autres grandeurs peuvent a priori être discontinue lorsque la grandeur d'entrée imposée est discontinue.

Réflexion

Démontrer les propriétés de continuité en vous basant sur l'équation d'évolution des deux dipôles.

I.3 Caractéristiques d'un régime transitoire

Les caractéristiques d'un régime transitoire sont à l'image de celles étudiées en SI : réponse indicielle(=à un échelon), dépassement, temps de réponse.

En physique la notion de temps caractéristique devient prépondérante.

☞ Méthodes : Mise en équation (II.5), Conditions initiales (II.6), Régime indépendant du temps (II.4)

☞ Applications : Interprétation du temps caractéristique (II.3)

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

♥ Théorème I.1: Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Un système linéaire d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de **l'équation homogène** sont tous de même signe.

♥ Démonstration

- ⋆ Ordre 1 : Considérons un système d'ordre 1 dont l'équation s'écrit : $a\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + bX(t) = F(t)$.
  On rappelle que la solution se décomposer en deux parties : une solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière de l'équation avec second membre. On choisit comme solution particulière le régime forcé (par exemple la solution constante si F(t) est une constante). Notons que ce régime forcé ne sera atteint que si le reste de l'expression tend vers 0, soit si la solution générale de l'équation homogène tend vers 0.

  Cette solution générale est $A\exp^{-\frac{b}{a}t}$. Elle ne tendra vers 0 (condition de stabilité donc) que si b/a est positif soit si b et a sont **de même signe**.
  La réciproque est triviale puisque l'exponentielle tendra vers 0.
- ⋆ Ordre 2 : Considérons un système d'ordre 2 dont l'équation s'écrit : $a\frac{\mathrm{d^2X}}{\mathrm{dt^2}}(t) + b\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + cX(t) = F(t)$.
  On rappelle que la stabilité du système nécessite que la solution générale ESSM tend vers 0.

  Les solutions de l'équation caractéristiques sont : $r_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Distinguons les cas suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

  — Si $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles et la solution est une somme de deux exponentielles :

$A \exp^{r_1 t} + B \exp r_2 t$. Il faut donc que les deux racines soient négatives. Ce qui nécessite que $-b/2a < 0$ donc a et b sont de même signe et que $\sqrt{\Delta} < b$ donc $4ac > 0$ soit a et c de même signe.

— Si $\Delta \leq 0$, remarquons que $4ac > 0$ donc a et c sont de même signe. De plus, on a une solution de la forme $\exp -bt/2af(t)$ avec f(t) qui est un polynôme ou une fonction sinusoïdale. Dans tous les cas, cette fonction tendra vers 0 si b/a est positif, donc si b et a sont de même signe.

La réciproque est à nouveau triviale.

☞ Applications : Stabilité d'un système (II.2)

Système d'ordre 1

♥ Définition I.2: Forme canonique - Système d'ordre 1

Pour une grandeur dans un système d'ordre 1, l'équation différentielle se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \frac{1}{\tau}X(t) = F(t) \tag{6.1}$$

τ est le temps caractéristique du système.

Réflexion

Q1. Rappeler la forme de la solution générale sans seconde membre de cette équation.

Q2. Si $F(t) = F_0 = cste$, déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (quelle forme lui donner ?). En déduire la forme de la solution générale de l'équation avec second membre.

On donne ci-après des exemples de tracés de grandeurs associées à un système d'ordre 1 (le circuit n'est pas donné ici).

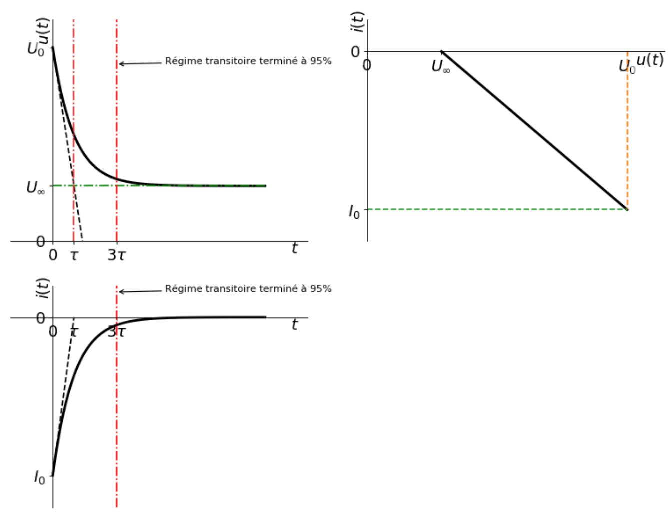


FIGURE 6.2 – Exemples de tracés de solutions. Le tracé $i(u)$ est appelé *caractéristique dynamique*.

☞ Méthodes : Circuit RC (II.1)

☞ Applications : Circuits d'ordre 1 (II.2)

Système d'ordre 2

♥ Définition I.3: Forme canonique d'un système d'ordre 2

L'équation différentielle qui régit l'évolution d'un système d'ordre 2 peut se mettre une des formes suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{X}}{\mathrm{dt}^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t) \tag{6.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{X}}{\mathrm{dt}^2}(t) + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t) \tag{6.3}$$

On appelle :

- ⋆ Q : le facteur de qualité du système
- ⋆ ξ : le coefficient d'amortissement du système
- ⋆ ω_0 : la pulsation propre du système

♥ Propriété I.3: Régimes possibles

La forme mathématique correspondant à la solution dépend de la valeur du facteur de qualité Q (ou du coefficient d'amortissement ξ) car ce dernier influe sur la valeur du discriminant de l'équation caractéristique Δ. A chaque expression différente correspond un type de régime :

Nom du régime	Δ	**Q**	ξ	Forme ESSM
Régime apériodique	> 0	$< 1/2$	> 1	$A\exp r_1 t + B\exp r_2 t$
Régime critique	$= 0$	$= 1/2$	$= 1$	$\exp r_0 t\,(At + B)$
Régime pseudo-périodique	< 0	$> 1/2$	< 1	$\exp\lambda t\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$

On rappelle que :

- ⋆ r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristiques
- ⋆ r_0 est la solution double lorsque le discriminant est nul
- ⋆ λ et Ω sont respectivement la partie réelle de r_1 et r_2 et la partie imaginaire (en valeur absolue) de r_1 et r_2 lorsque le discriminant est négatif. On appelle Ω **la pseudo-pulsation** du système.

Réflexion

Q1. Démontrer les conditions sur Q et ξ pour obtenir les différents régimes.

Q2. Exprimer r_1, r_2, r_0, λ et Ω en fonction de Q et ω_0 (puis de ξ et ω_0)

Cas du régime pseudo-périodique :

Pour rappel, en régime pseudo-périodique :

$$X(t) = \exp^{\lambda t}(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t) \tag{6.4}$$

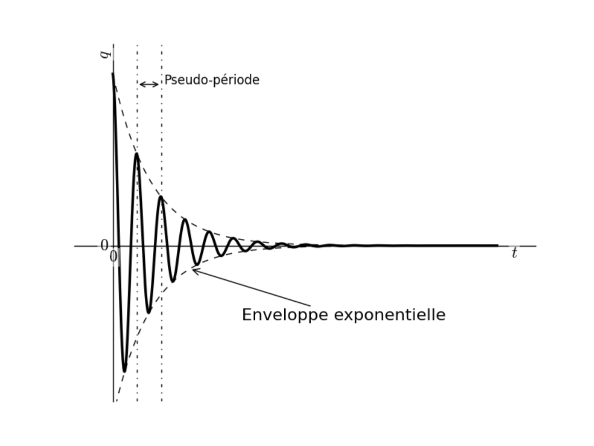
$$= \exp^{\lambda t}(C\sin(\Omega t + \phi)) \tag{6.5}$$

avec :

- ⋆ $\lambda = -\frac{\omega_0}{2Q}$

- ⋆ $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

♥ Propriété I.4: Régime pseudopériodique - Tracé graphique



L'expression $X(t) = \exp^{-\lambda t}\left(D\sin^{\Omega t+\phi}\right)$ permet de dessiner facilement l'évolution de $X(t)$ en régime pseudo-périodique : il s'agit d'un signal sinsoïdal de pulsation Ω ou plutôt **pseudo-sinusoïdal** car l'amplitude décroît de **manière exponentielle**.

Réflexion

En raisonnant par analogie avec un système d'ordre 1, faire apparaître graphiquement une temps caractéristique pour le régime pseudo périodique.
ATTENTION : cette méthode ne fonctionne pas pour un régime apériodique ou un régime critique.

♥ Définition I.4: Décrément logarithmique

Pour un **régime pseudo-périodique** de pseudo-période T, on définit le **décrément logarithmique** δ par :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t) - u(t = +\infty)}{u(t+T) - u(t = +\infty)}\right) \tag{6.6}$$

Réflexion

Q1. Compléter la phrase : "Plus l'amortissement sera important, plus l'écart $u(t) - u(t = +\infty)$ sera ...devant l'écart $u(t + T) - u(t = +\infty)$".

Q2. Compléter la phrase : "Plus l'amortissement sera important, plus δ sera ...."

♥ Propriété I.5: Expression du décrément logarithmique

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \tag{6.7}$$

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}
\delta &= \ln\left(\frac{u(t)-u(t=+\infty)}{u(t+T)-u(t=+\infty)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}\left(C\cos\Omega t+\varphi\right)}{e^{-\lambda(t+T)}\left(C\cos\Omega(t+T)+\varphi\right)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}\left(\cos\Omega t+\varphi\right)}{e^{-\lambda(t+T)}\left(\cos\Omega t+\Omega T+\varphi\right)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}\left(\cos\Omega t+\varphi\right)}{e^{-\lambda(t+T)}\left(\cos\Omega t+2\pi+\varphi\right)}\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\delta &= \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}\left(\cos\Omega t+\varphi\right)}{e^{-\lambda(t+T)}\left(\cos\Omega t+\varphi\right)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T)}}\right)\\
&= \ln\left(e^{\lambda T}\right)\\
&= \lambda T
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\omega_0}{2Q}\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\\
&= \frac{2\pi}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}
\end{aligned}$$

Réflexion

En déduire que dans un régime pseudo-périodique, l'amortissement est d'autant plus important que le facteur de qualité est . . .

- ☞ Méthodes : Circuit RLC série (II.2), Oscillateur harmonique (II.3)
- ☞ Applications : Circuits d'ordre 2 (II.2)

II S'entrainer

II.1 Méthodes

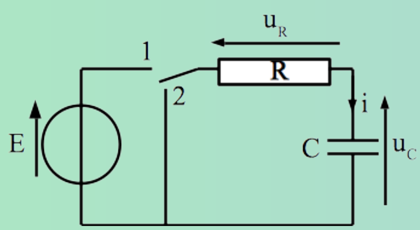
Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Circuit RC d'ordre 1

♥ Méthode II.1: Etude d'un circuit RC d'ordre 1

On va étudier le circuit suivant :



Régime libre : L'interrupteur étant en position 1 depuis un temps long, il bascule à t=0 en position 2.

Q1. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de u_C pour $t > 0$.

Q2. Déterminer $u_C(t)$ et $i(t)$ pour $t > 0$ et tracer leur allure temporelle.

Q3. Réaliser un bilan de puissance du circuit RC.

Q4. Réaliser un bilan d'énergie du circuit RC précédent entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

Réponse indicielle : On considère toujours le circuit RC mais après un temps long en position 2, l'interrupteur bascule à t=0 en position 1.

Q5. Déterminer avec peu de calculs l'état final de $u_C(t)$

Q6. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ puis déterminer $u_C(t)$.

Q7. En déduire i(t).

Q8. Réaliser un bilan de puissance et un bilan énergétique sur l'ensemble du circuit.

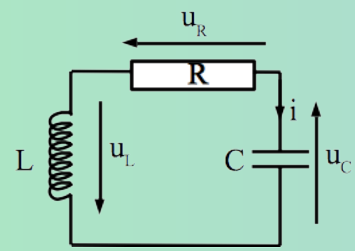
♥ A retenir: Circuit RC d'ordre 1

Ce circuit est un classique à maitrîsé. Il faut bien comprendre les méthode pour les appliquer à d'autres circuits.
On retiendra aussi :

- ⋆ Dans un tel montage, le condensateur reçoit de l'énergie. On parle de **charge** du condensateur.
- ⋆ Lors d'un nouveau basculement de l'interrupteur vers le régime libre, le condensateur va, comme on l'a vu, perdre son énergie : on parlera de **décharge** du condensateur.

♥ Méthode II.2: Etude d'un circuit RLC série

Circuit RLC série en régime libre : Nous allons étudier un exemple de système d'ordre 2 basé sur le circuit suivant :



On suppose les conditions initiales connues à $t = 0$:

$$i(t = 0) = i_0 \quad (6.8)$$
$$u_C(t = 0) = 0 \quad (6.9)$$

Q1. Obtenir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique en utilisant le facteur de qualité.

Q2. **Cas apériodique :** Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime apériodique.

Q3. **Cas critique :** Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime critique.

Q4. **Cas pseudo-périodique :**

Q4.a. Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

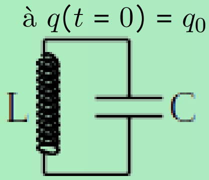
Q4.b. Estimer une durée caractéristique du régime transitoire pour un régime pseudo-périodique et en déduire le nombre de pseudo-périodes qu'on peut voir. Commenter ce nombre quand Q devient grand.

♥ Méthode II.3: Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est une système d'ordre 2 **sans amortissement**. L'équation différentielle pour un tel système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 X_0 \quad (6.10)$$

On considère le circuit suivant (la bobine est idéale). A $t = 0$, le condensateur est chargé à $q(t = 0) = q_0$ et l'intensité qui le traverse est i_0 (en convention récepteur).



Q1. En appliquant la loi des mailles, montrer que l'évolution de la tension aux bornes du condensateur est bien celle d'un oscillateur harmonique. Préciser l'expression de ω_0.

Q2. Donner la forme mathématique de la tension $u_C(t)$ et préciser sa pulsation d'oscillation ainsi que sa période d'oscillation. Exprimer ensuite complètement $u_C(t)$ avec les conditions initiales données dans l'énoncé.

Q3. On utilisera pour la suite l'expression : $u_C(t) = u_{Cm}\cos(\omega_0 t + \phi)$. Exprimer l'énergie $E_{el}(t)$

emmagasinée dans le condensateur et l'énergie $E_{mag}(t)$ emmagasinée dans la bobine. En déduire l'énergie totale emmagasinée dans le système LC. Commenter son évolution temporelle.

Q4. Représenter graphiquement les évolutions de E_{el} et E_{mag}. Pourquoi parle-t-on d'échange d'énergie entre deux réservoirs ?

♥ A retenir: Oscillateur harmonique

- L'oscillateur harmonique a pour équation :

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t) + \omega_0^2 X(t) = F(t) \tag{6.11}$$

[a]

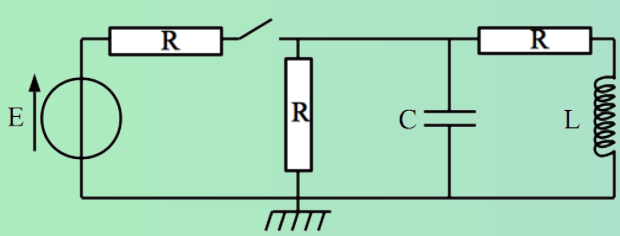
- Un oscillateur harmonique correspond à un système sans amortissement donc idéal. En pratique, on peut s'en approcher si l'amortissement est assez faible pour ne pas être observable. C'est peu probable en électrocinétique mais possible en mécanique où les temps caractéristiques sont plus long.
- Dans un oscillateur harmonique, il y a deux réservoir d'énergie qui s'échangent périodiquement et sans atténuation. L'énergie totale stockée reste constante.
- La solution générale ESSM de l'ED d'un oscillateur harmonique est de la forme :

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = D\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{6.12}$$

a. En général $F(t) = cste = F_0$ et par changement de variable $x = X - F_0$, on peut annuler le second membre.

Différentes études

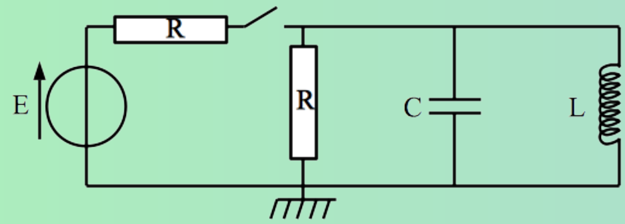
♥ Méthode II.4: Etudier un régime indépendant du temps



Q1. Etudier ce circuit en régime indépendant du temps lorsque l'interupteur est ouvert.

Q2. Etudier ce circuit en régime indépendant du temps lorsque l'interupteur est fermé.

♥ Méthode II.5: Mise en équation d'un circuit



On considère le circuit suivant. A t=0, on ferme l'interrupteur.

Q1. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur (orientée vers le haut) pour $t > 0$. On utilise les lois de Kirchhoff avec tensions et intensités.

Q2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité qui circule dans la bobine (orientée vers le haut) pour $t > 0$. On utilise les lois de Kirchhoff avec tensions et intensités.

♥ A retenir: Mise en équation d'un circuit

On retiendra :

- ⋆ la méthode d'étude d'un circuit en régime indépendant du temps
- ⋆ les deux méthodes de mise en équation basée sur les lois de Kirchhoff en utilisant tensions ou potentiels.
- ⋆ les méthodes de vérification : homogénéité, stabilité, second membre
- ⋆ le fait que dans un même circuit, l'équation homogène est **la même quelques soit la grandeur étudiée.** On parle donc de pulsation propre ou de facteur de qualité **du circuit.** [a]

a. Attention, le second membre diffère : il dépend du régime forcé.

♥ Méthode II.6: Déterminer des conditions initiales

On reprend le même circuit que dans l'exercice précédent. L'interrupteur est ouvert depuis **un temps long**. A t=0, on ferme l'interrupteur. Déterminer les conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle en i_l trouvée précédemment.

♥ A retenir: Déterminer des conditions initiales

Lorsque les conditions initiales ne sont pas directes données, il faut passer par l'étude du circuit :

1. en $t = t_i^-$: en général il s'agit d'un régime indépendant du temps.
2. on passe les grandeurs par continuité : tensions aux bornes des condensateurs et intensités traversant les bobines.
3. on étudie le circuit en $t = 0^+$ pour déteriner les grandeurs voulues.

♥ Méthode II.7: Résolution et exploitation

On travaille avec le même système que précédemment. On rappelle que l'équation qui régit l'évolution de $i_L(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{i_l}}{\mathrm{d}\mathrm{t}^2} + \frac{2}{RC}\frac{\mathrm{d}\mathrm{i_l}}{\mathrm{d}\mathrm{t}} + \frac{1}{LC} i_l = -\frac{E}{RLC} \tag{6.13}$$

Conditions initiales : $i_l(t = 0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}\mathrm{i_l}}{\mathrm{d}\mathrm{t}}(t = 0^+) = 0$

Q1. Déterminer $i_l(t)$ dans l'hypothèse $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Q2. En déduire la puissance reçue par le bobine p(t).

Q3. Déterminer l'énergie reçue par la bobine entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

II.2 Applications

Questions de cours rapides

Questions de cours - Exercices classiques.

✍ Exercice II.1: Homogénéité

Montrer que les grandeurs RC et L/R sont homogènes à des temps et que la grandeur LC est homogène à un temps au carré. *Points utiles pour cet exercice*

- ⋆ Unités
- ⋆ Relations intensités tension

✍ Exercice II.2: Stabilité d'un système

Pour chacune de ces équations différentielles, préciser si le système est stable/instable/impossible à déterminer sa stabilité.

Q1. $-RC\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{RC}X = -E$

Q2. $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \sin(X) = E$

Q3. $RC\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{RC}X = -E$

Q4. $\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + X = E$

Q5. $RC\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}X = E$

Q6. $\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + X = E$

Q7. $RC\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}X = -E$

Q8. $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{LC}X = \frac{E}{1-\alpha}$

Q9. $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}X = \frac{E}{1-\alpha}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Stabilité des systèmes

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Stables : 1 ;7 ;9
- ⋆ Instables : 3 ;5 ;8
- ⋆ Non déterminé : 2 ;4 ;6

Système d'ordre 1

✍ Exercice II.3: Interprétation du temps caractéristique

On considère le signal ci-après.

$$u(t) = e_m\left(1 - \exp(-t/\tau)\right) \tag{6.14}$$

Q1. Déterminer le temps de réponse à N%, c'est-à-dire *ici* le temps au bout duquel $u(t) = N\%e_m$. Montrer qu'il est proportionnel au temps caractéristique et le calculer numériquement pour N=95 et N=99.

Eléments de correction (sans justification) : $t_N = -\tau\ln\left(1 - N\%\right); t_{95} \approx 3\tau; t_{95} \approx 5\tau$

✍ Exercice II.4: Circuit RL

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur est depuis un temps long fermé. A $t = 0$, il s'ouvre.

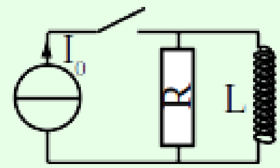
Q1. Déterminer l'intensité circulant dans la bobine à $t = 0$.

Q2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la bobine.

Q3. Déterminer $i(t)$ pour $t > 0$

Q4. Tracer l'évolution temporelle de $i(t)$ et le portrait de de la bobine $(i(t); \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}})$.

Q5. Déterminer l'énergie perdue par la bobine de $t = 0$ à $t = +\infty$ et l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance. Commenter.



Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système d'ordre 1

Eléments de correction (sans justification) : $\tau = L/R$.

Système d'ordre 2

✍ Exercice II.5: Cas extrêmes

On considère un circuit RLC série. Déterminer les intervalles de valeurs de R permettant d'observer un régime apériodique. un régime critique. un régime pseudo-périodique.

Q1. Quel régime observe-t-on si $RC \gg L/R$?

Q2. Quel régime observe-t-on si $RC \ll L/R$?

✍ Exercice II.6: Bilan de puissance d'un RLC série

Faire un bilan de puissance d'un RLC série en régime libre. Le mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}E_{TOT}}{\mathrm{dt}} = -P \tag{6.15}$$

Interprêter P et son signe.

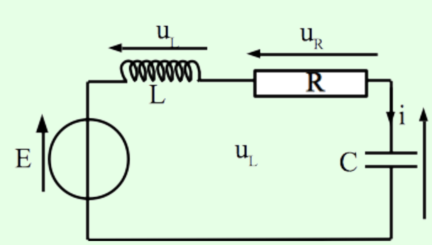
Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Circuit RLC série
- ⋆ Energie dans L et C ; Effet Joule

Eléments de correction (sans justification) : $P = -Ri^2 < 0$: le système ne fait que perdre de l'énergie.

✍ Exercice II.7: Réponse indicielle d'un circuit RLC série

On considère le circuit suivant (E est constant). A t=0, le condensateur est complètement déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit.



Q1. Exprimer la tension aux bornes du condensateur dans le nouveau régime forcé.

Q2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. En déduire les expressions du facteur de qualité et de la pulsation propre. Les comparer au cas du régime libre.

Q3. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour $t > 0$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

Q4. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour $t > 0$ dans le cas d'un régime apériodique.

Q5. Déterminer l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour $t > 0$ dans le cas d'un régime critique.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Circuit d'ordre 2
- ⋆ Mise en équation
- ⋆ Régime indépendant du temps

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $u_C(t = +\infty) = E$

Q2. $\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E$ soit $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Q3. $u_{c,0}(t) = -\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}}E\exp^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[\cos\left(\Omega t - \arctan\frac{\omega_0}{2Q\Omega}\right)\right]$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation du système.

Q4. $u_c(t) = -\frac{r_2}{r_2-r_1}E\exp^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1-r_2}E\exp^{r_2 t} + E$

Q5. $u_c(t) = \exp^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(-\frac{\omega_0}{2Q}Et - E\right) + E$

✍ Exercice II.8: Décrément logarithmique

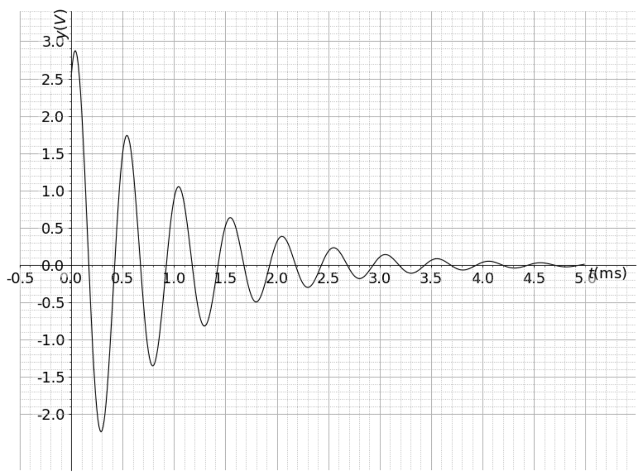
Q1. Montrer que (n est une entier) :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+nT)}\right) \tag{6.16}$$

Q2. Mesurer pour le signal $u(t)$ ci-dessous les valeurs successives des maxima (au moins 6)

Q3. En déduire des valeurs de δ pour n allant de 1 à 6 puis une valeur moyenne de δ.

En séance de travaux pratiques, on réalisera plutôt une régression linéaire car les différentes mesures de delta dépendent l'une de l'autre.



✍ Exercice II.9: RLC parallèle

On considère une résistance R, une inductance L et un condensateur C branchés en parallèle.

Q1. Déterminer le facteur de qualité et la pulsation propre du circuit. Les comparer au cas du RLC série.

Q2. A quelle condition sur R,L et C observe-t-on un régime pseudo-périodique. Donner alors l'expression générale de l'intensité circulant dans la résistance sans calculer les constantes d'intégration.

Q3. Vers quoi doit tendre la valeur de R pour qu'on obtienne un oscillateur harmonique ? Commenter.

Points utiles pour cet exercice

⋆ Système d'ordre 2

Eléments de correction (sans justification) : $Q = R\sqrt{C/L}; \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

✍ Exercice II.10: Forme des solutions d'un oscillateur harmonique

On rappelle les deux formes des solutions d'un OH :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\ &= D\cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Q1. Montrer que $D = \sqrt{A^2 + B^2}$

Q2. Montrer que $\tan\phi = -B/A$

✍ Exercice II.11: Temps caractéristique d'un système d'ordre 2

On considère un système d'ordre 2 de facteur de qualité Q et de pulsation propre ω_0.

Q1. Rappeler la forme générale de l'équation différentielle homogène que suit la grandeur $X(t)$ solution de cette équation.

Q2. Régime apériodique : Rappeler la condition sur Q puis la forme de la solution générale ESSM.

Q2.a. Quelle exponentielle est la plus lente ? En déduire un temps caractéristique τ_{carac} pour un régime apériodque.

Q2.b. Préciser $\lim_{Q\to 0} \tau_{carac}$ et $\lim_{Q\to 1/2} \tau_{carac}$

Q3. **Régime critique :** Rappeler la condition sur Q puis la forme de la solution générale ESSM.

Q3.a. Exprimer le temps caractéristique τ_{carac} pour un régime critique.

Q4. **Régime pseudo-périodique :** Rappeler la condition sur Q puis la forme de la solution générale ESSM.

Q4.a. Exprimer le temps caractéristique τ_{carac} pour un régime critique.

Q4.b. Préciser $\lim_{Q\to +\infty} \tau_{carac}$ et $\lim_{Q\to 1/2} \tau_{carac}$

Q5. Comment ω_0 influe sur les différents temps caractéristiques ?

Q6. Représenter $\tau_{carac} \times \omega_0$ en fonction de Q en plaçant les 3 régimes sur un même graphique. Où se situe le régime le plus rapide ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Circuit d'ordre 2
- ⋆ Temps caractéristique d'une exponentielle

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. cf. cours

Q2. $\tau_{carac} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1/(4Q^2)-1}-1/(2Q)}$

Q3. $\tau_{carac} = \frac{1}{\omega_0}$

Q4. $\tau_{carac} = \frac{2Q}{\omega_0}$

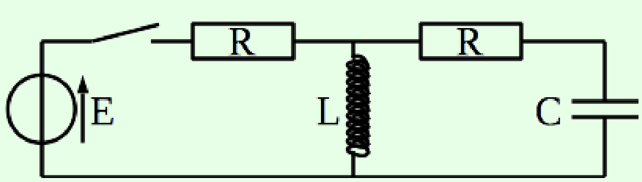
Q5. Dans tous les régimes τ_{carac} est proportionnel à $1/\omega_0$.

Q6. $\omega_0 \tau_{carac}(Q)$ décroit depuis $+\infty$ jusqu'à 1 en $Q = 1/2$ puis remonte linéairement avec une pente de 2.

♥ A retenir: Temps caractéristique d'un ordre 2

On retiendra que le régime le plus rapide se situe autour du régime critique et que $1/\omega_0$ joue le rôle de facteur d'échelle des temps caractéristiques.

✍ Exercice II.12: Conditions initiales



On considère le circuit suivant, l'interrupteur est fermé depuis un temps long. A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.

Q1. Déterminer le régime permanent pour $t < 0$.

Q2. Déterminer le régime permanent atteint pour $t \to \infty$.

Q3. Déterminer les conditions initiales à $t = 0^+$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Circuit en régime indépendant du temps
- ⋆ Etude des conditions initiales

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $i_L = -i_E = \frac{E}{R}$ et $i_C = 0$. Les tensions sont toutes nulles sauf pour la résistance de gauche (elle vaut E).

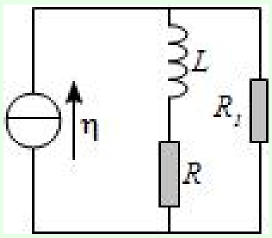
Q2. Tout est nul sauf la tension aux bornes de l'interrupteur qui vaut E.

Q3. $i_L = -i_C = \frac{E}{R}$ et $i_E = 0$. $u_C = 0$ et $u_L = u_R = E$ (à orienter correctement).

II.3 Entrainement

Circuit d'ordre 1

✍ Exercice II.13: Circuit d'ordre 1



Q1. Calculer i, l'intensité qui circule dans la bobine. On donne $i(t=0)=0$.

Q2. En déduire i_1 et u_1 (tension aux bornes de R_1 et courant circulant dans R_1).

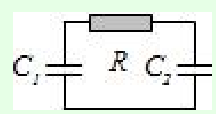
Q3. Tracer i et i_1 en fonction du temps.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Conditions initiales
- ⋆ Circuit d'ordre 1

Eléments de correction (sans justification) : $i(t) = \frac{R_1}{R_1+R}\eta\left(1-e^{-\frac{(R_1+R)t}{L}}\right)$

✍ Exercice II.14: Deux condensateurs



On considère le circuit électrique de la figure ci-après. A t=0, $q_1 = Q_1$ et $q_2 = 0$ (charges portées par les armatures supérieures des deux condensateurs). Donner l'évolution ultérieure (tensions et intensité) et faire un bilan énergétique.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Conditions initiales
- ⋆ Mise en équation

Eléments de correction (sans justification) : $q_1(t) = Q_1\frac{C_1}{C_1+C_2} + Q_1\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-\frac{(C_1+C_2)t}{RC_1C_2}}$
L'énergie stockée dans les deux condensateurs a globalement diminuée : elle correspond à l'énergie dissipée dans la résistance.

Circuits d'ordre 2

✍ Exercice II.15: Oscillateur faiblement amorti

On considère un circuit RLC série en régime libre. A $t=0$, l'intensité circulant dans le circuit est I_0 et la tension aux bornes du condensateur et nulle.

On suppose de plus que $RC \ll \frac{L}{R}$.

Q1. Préciser le type de régime pour le système.

Q2. Dans l'approximation proposée, simplifier l'expression de la pseudo-pulsation.

Q3. Comparer le temps caractéristique du réigme transitoire et la pseudo-période du signal. En déduire l'allure graphique de q(t).

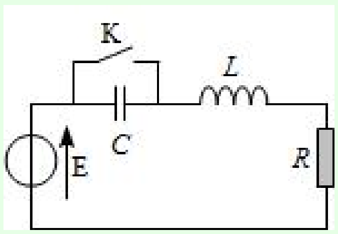
Q4. Déterminer l'expression complète de q(t).

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système d'ordre 2

Eléments de correction (sans justification) : C'est un régime pseudo-périodique et la pseudo-pulsation est à peu près égale à la pulsation propre. Le temps caractéristique $\frac{2Q}{\omega_0}$ est donc grand devant la pseudo-période (Q grand) donc on observe de nombreuses oscillations et une enveloppe exponentielle qui décroit lentement.

✍ Exercice II.16: Protection d'un interrupteur



Dans le circuit ci-contre, l'interrupteur K est fermé et à $t = 0$, on l'ouvre.

Q1. Expliciter la tension $u(t)$ aux bornes de K dans le cas où $L/R >> RC$.

Q2. On donne $L = 10\text{mH}, \text{E} = 5\text{V}, \text{R} = 50\Omega$. Évaluer la valeur maximale de $u(t)$ en l'absence du condensateur (l'interrupteur a alors une propre capacité de 10pF). On attend de l'initiative dans les calculs.

Q3. Justifier l'emploi d'un condensateur. Déterminer la valeur de celui-ci pour limiter la valeur maximale de $u(t)$ à 500V.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Systèmes d'ordre 2
- ⋆ Raisonnement sur les ordres de grandeurs
- ⋆ Conditions initiales

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ $u(t) \approx e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}(-E\cos(\omega_0 t) + QE\sin\omega_0 t) + E$ (à fort facteur de qualité, on doit trouver que la pseudo-pulsation égale la pulsation propre en première approximation).
- ⋆ $u_{\max} \approx QE$ La tension obtenue est très grande : risque d'arc électrique. Le condensateur en parallèle augmente la valeur de C et diminue la surtension.

Devoir libre : Régimes transitoires. Circuits d'ordre 1 et 2 (Moodle)

Approfondissement : L'oscillateur harmonique en pratique (Moodle)

Approfondissement : Ajout de dipôles non linéaire (Moodle)

Chapitre 7: Régime sinusoïdal forcé

I Définition et étude

♥ Définition I.1: Régime sinusoïdal forcé

Lorsqu'un circuit **linéaire stable** est soumis **à une excitation sinusoïdale**, le régime transitoire s'atténue au bout d'un temps et il s'établit un régime forcé appelé régime sinusoïdal forcé. Toutes les grandeurs variables du circuit **ont alors la forme mathématique d'un sinusoïde de même pulsation que l'excitation.**

D'un point de vue mathématique, cela signifie que l'on va chercher une solution particulière sinusoïdale de même pulsation de l'entrée : elle correspondra au régime forcé.

I.1 Représentation complexe des signaux sinusoïdaux

♥ Définition I.2: Représentation complexe

Considérons un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$. On définit la représentation complexe $\underline{s}(t)$ du signal $s(t)$ par la grandeur :

$$\underline{s}(t) = s_m \exp j\left(\omega t + \varphi\right) \tag{7.1}$$

On définit aussi l'amplitude complexe $\underline{s_m}$ du signal $s(t)$ par la grandeur :

$$\underline{s_m} = s_m \exp\left(j\varphi\right) = \frac{\underline{s}(t)}{\exp j\omega t} \tag{7.2}$$

♥ Propriété I.1: Passage des complexes aux réels

$$\text{Grandeurs réelle} : s(t) = \Re\left(\underline{s(t)}\right)$$
$$\text{Amplitude (réelle)} : s_m = \left|\underline{s_m}\right| = \left|\underline{s(t)}\right|$$
$$\text{Phase à l'origine} : \varphi = \arg(\underline{s_m})$$

Réflexion

Q1. Il peut arriver que $s(t) = s_m \sin(\omega t + \varphi)$, quelle est alors la relation entre $s(t)$ et $\underline{s(t)} = s_m \exp j\left(\omega t + \varphi\right)$?

♥ Propriété I.2: Opération sur les grandeurs complexes

- Linéarité :

$$s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \Longrightarrow \underline{s} = \lambda_1 \underline{s_1} + \lambda_2 \underline{s_2} \text{ avec } (\lambda_1 ; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{7.3}$$

- Dérivation :

$$\frac{\underline{ds}}{dt} = j\omega \underline{s} \tag{7.4}$$

- Intégration (on considère alors toujours une valeur moyenne nulle) :

$$\underline{\int_s dt} = \frac{\underline{s}}{j\omega} \tag{7.5}$$

Réflexion

Démontrer les deux dernières relations (on rappelle qu'il y a un déphasage de $-\pi/2$ du sinus sur le cosinus).

Pour la suite, on note pour un signal $x(t) = x_m \cos \omega t + \phi$:

- *sa représentation complexe $\underline{x}(t)$*
- *son amplitude complexe $\underline{x_m}$*

♥ Définition I.3: Impédance complexe

Pour un dipôle linéaire passif en RSF, on définit :

- On définit l'**impédance complexe** d'un dipôle par la grandeur :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u_m}}{\underline{i_m}} \tag{7.6}$$

  Elle ne dépend pas du temps mais peut dépendre de la pulsation du signal d'entrée.
- On définit **l'admittance complexe** comme l'inverse de l'impédance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{i_m}}{\underline{u_m}} \tag{7.7}$$

On peut écrire $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ ($R, G, X, B \in \mathbb{R}$) :

$$\underline{Z} = R + jX \tag{7.8}$$

$$\underline{Y} = G + jB \tag{7.9}$$

$$\tag{7.10}$$

où :

- R est la résistance
- X la réactance
- G la conductance
- B la susceptance

Réflexion

Q1. Que vaut le module de $\underline{Z}$?

Q2. Exprimer l'argument de $\underline{Z}$ et de $\underline{Y}$ en fonction de ϕ_u et ϕ_i les phases à l'origine de $u(t)$ et $i(t)$. En déduire une interprétation de $arg(\underline{Z})$ et $arg(\underline{Y})$.

Q3. Pour un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$, que devient la relation intensité-tension du dipôle en RSF.

Q4. Montrer que les représentations complexes des tensions de deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en série peuvent être obtenus par une relation de pont diviseur de tension. Peut-on faire la même chose pour un pont diviseur de courant ?

On pourra comprendre après le précédent chapitre la simplification dans les calculs que permet la dernière observation...

♥ Propriété I.3: Impédances des dipôles usuels

- ⋆ Cas d'une résistance : $\underline{Z}_R = R$
- ⋆ Cas d'une bobine : $\underline{Z}_L = jL\omega$
- ⋆ Cas d'un condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

Réflexion

Q1. Démontrer les expressions de $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_C$ en vous aidant des propriétés des opérateurs dérivation et intégration pour les représentations complexes.

Q2. Que vaut la partie imaginaire de $\underline{Z}_R$?

Q3. Que vaut la partie réelle de $\underline{Z}_L$? de $\underline{Z}_C$

Q4. Préciser le signe des parties imaginaires de $\underline{Z}_L$, de $\underline{Z}_C$.

☞ Méthodes : Etude de circuits en RSF (III.2, III.1), Passage fréquentiel-temporel (III.3)

☞ Applications : Manipulation des complexes (III.1), Impédances (III.2), Passage fréquentiel-temporel (III.3)

II Etude fréquentielle

♥ Définition II.1: Etude fréquentielle

Une étude fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale en fonction de la fréquence/pulsation de cette dernière.

Les caractéristiques étudiées sont : l'amplitude du signal de sortie et son déphasage par rapport à l'entrée.

Conséquence : cette étude fera apparaître des grandeurs qui sera fonction de ω (ou f) : l'amplitude $X_m(\omega)$ et la phase à l'origine $\phi(\omega)$ [a].

a. Mais le signal de sortie varie toujours dans le temps : $X(t) = X_m(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$

Réflexion

Pourquoi étudier la réponse en fonction de ω ou de f est sensiblement identique ?

II.1 Intérêt de l'étude fréquentielle

Réaliser l'étude fréquentielle d'un système linéaire [1] *permet :*

- ⋆ *de remontrer à la réponse de n'importe quel signal car ce dernier **se décompose en une somme de sinusoïde** (Fourier) et que **la réponse à cette somme est la somme des réponses** (Linéarité).*

1. SLCI

- ⋆ *Dans de nombreux cas, ces fréquences ont un sens physique (ex : couleur en optique, hauteur de son en musique...) et connaître la réponse fréquentielle d'un système permet de connaître le comportement physique du système (ex : spectre en absorbance en chimie, traitement des signaux sonores en acoustique...)*

II.2 Méthode d'étude

Une étude fréquentielle se décompose en général en plusieurs parties :

1. Mise en équation du circuit sous l'hypothèse d'un RSF en utilisant les grandeurs complexes.
2. Obtention de l'amplitude et de la phase à l'origine des signaux étudiées **en fonction de la pulsation/-fréquence**.
3. Etude des fonctions $X_m(\omega)$ et $\phi(\omega)$ en fonction des besoins : recherches d'extrema, de valeurs particulières, monotonie...
4. (Pas toujours) Utilisation de l'étude fréquentielle pour déterminer la réponse à une entrée plus complexe (somme de sinusoïdes, étude qualitative sur un spectre...)

II.3 Etudes asymptotiques

Il est important de pouvoir analyser le comportement asymptotique d'un système, c'est-à-dire les comportements haute et basse fréquence [2].

♥ Propriété II.1: Comportement HF et BF de L et C

- ⋆ A basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et une bobine comme un fil.
- ⋆ A haute fréquence, un condensateur se comporte comme un fil ouvert et une bobine comme un interrupteur.

Ces comportements vont permettre d'étudier très simplement les circuits à haute et basse fréquence comme on l'a fait pour un régime indépendant du temps (qui est une basse fréquence...)

Réflexion

En utilisant les impédances complexes et l'interprétation que vous avez fait de leur module, justifier ces propriétés.

II.4 Formes canoniques

Comme pour les équations différentielles, les grandeurs complexes étudiées peuvent se mettre sous des formes canoniques suivant :

- ⋆ *leur ordre (puissance maximale en ω)*
- ⋆ *leurs comportements asymptotiques (HF et BF)*

Une liste plus complète sera donnée au prochain chapitre. On donne déjà deux cas à connaître :

Réflexion

On définit l'ordre d'une équation différentielle par la plus haute dérivée. En partant d'une équation différentielle d'ordre 1 ou d'ordre 2 avec un second membre sinusoïdal que vous passerez aux complexes, montrer que la définition de l'ordre par la puissance maximale en ω d'une grandeur complexe est cohérent.
On admettra que cette cohérence est valable quel que soit le SLCI.

2. Les valeurs correspondant à des hautes et basses fréquences dépendent du système. Ainsi pour un pendule mécanique, 100Hz est une haute fréquence. Alors que c'est sans doute une basse fréquence pour un système électrique !

♥ Définition II.2: Comportement passe-bas d'ordre 2

Conditions :

- ⋆ Ordre 2
- ⋆ Comptement **HF nul et BF non nul**

Forme canonique :

$$\underline{s} = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \tag{7.11}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est appelée pulsation réduite [a].

a. attention, elle est sans dimension !

♥ Définition II.3: Comportement passe-bande d'ordre 2

Conditions :

- ⋆ Ordre 2
- ⋆ Comptement **HF nul et BF nul**

Forme canonique :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{Aj\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\end{aligned}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est appelée pulsation réduite [a].

a. attention, elle est sans dimension !

La première forme est la plus utile pour les études.

☞ Méthodes : Etude fréquentielle (III.4, III.5, III.6), Réponse en RSF (III.7)

☞ Applications : Etude fréquentielle (III.5, III.6), Réponse en RSF (III.4)

III S'entrainer

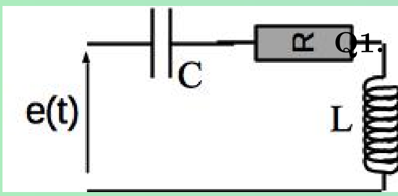
III.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Etudier un circuit en RSF

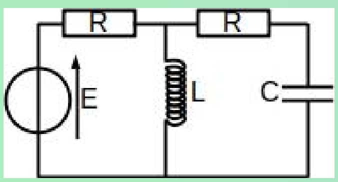
♥ Méthode III.1: Différentes Méthodes



Q1. On considère un dipôle RLC série relié à une source idéale de tension délivrant une tension $e(t) = e_m \cos \omega t$. Déterminer la représentation complexe de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant le dipôle en régime sinuoïdal forcé.

Q2. En déduire l'amplitude complexe et la phase à l'origine de l'intensité.

♥ Méthode III.2: Utiliser la loi des noeuds en terme de potentiel



On considère le circuit ci-dessous où E est la tension d'entrée. Déterminer la représentation complexe de la tension $\underline{s}$ aux bornes du condensateur en régime sinusoïdal forcé.

Passage fréquentiel temporel

♥ Méthode III.3: Passer du fréquentiel au temporel

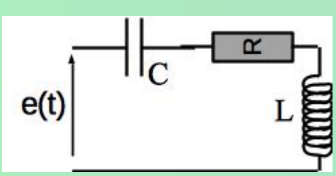
On considère un système dont la relation entrée sortie entre les grandeurs complexes est :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Déterminer l'équation différentielle qui relie les grandeurs $s(t)$ à $e(t)$.

Etude fréquentielle

♥ Méthode III.4: Analyser rapidement les comportements HF et BF



On considère le circuit RLC série ci-après. On veut étudier le comportement fréquentiel de certaines grandeurs. On rappelle qu'il s'agit d'étudier les caractéristiques du régime sinusoïdal forcé pour une entrée sinusoïdale quelconque.

Q1. Etudier la réponse haute et basse fréquence de l'intensité circulant dans le circuit et de la tension aux bornes du condensateur pour ce circuit.

Q2. Vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux de l'exercice III.1.

♥ Méthode III.5: Etude d'un RLC série - Passe-bande

Q1. On considère le circuit RLC série alimentée par une tension d'entrée e. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{i}$ de l'intensité circulant dans le circuit.

Q2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{i}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.

Q3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre i et e en fonction de ω, Q, ω_0, R et e_m.

Q4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum. On parle de **résonance**. Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale ainsi que l'amplitude maximale $i_{\max}$.

Q5. Déterminer la **bande passante**, c'est-à-dire la gamme de fréquence/pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est supérieure à $\frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$. On calculera aussi la largeur de la bande passante.

Q6. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.

Q7. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et à la pulsation de résonance et représentation le déphasage en fonction de la fréquence.

♥ A retenir: Etude d'un passe-bande

On retiendra :

- ⋆ les caractéristiques hautes et basses fréquences nécessaires et la forme canonique associées lorsque le système est d'ordre 2.
- ⋆ la forme générale de la réponse fréquentielle (allure en fonction de la fréquence) en amplitude réelle et en déphasage.
- ⋆ l'existence d'une **résonance**, c'est-à-dire d'un maximum d'amplitude en fonction de la fréquence/pulsation dont la pulsation de résonance est toujours ω_0.
- ⋆ La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

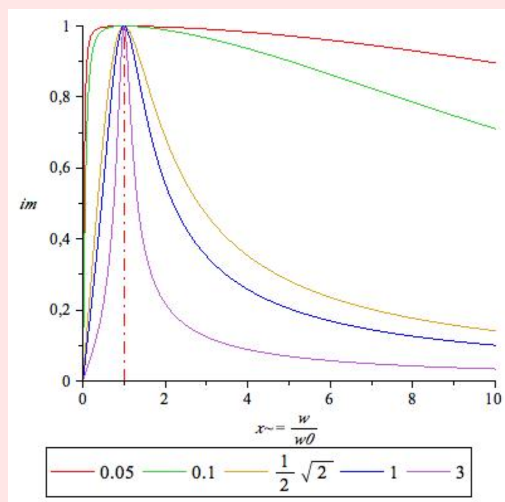


FIGURE 7.1 – Réponse d'un filtre passe-bande

♥ Méthode III.6: Etude d'un RLC série - Passe-bas

Q1. On considère le circuit RLC série alimentée par une tension d'entrée e. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{u_C}$ de la tension aux bornes du condensateur.

Q2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{u_C}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.

Q3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre u_C et e en fonction de Q, ω_0 et e_m.

Q4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On parle de **résonance**.

Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale.

Q5. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.

Q6. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et en ω_0 et représentation le déphasage en fonction de la fréquence.

♥ A retenir: Etude d'un RLC série - Passe-bas

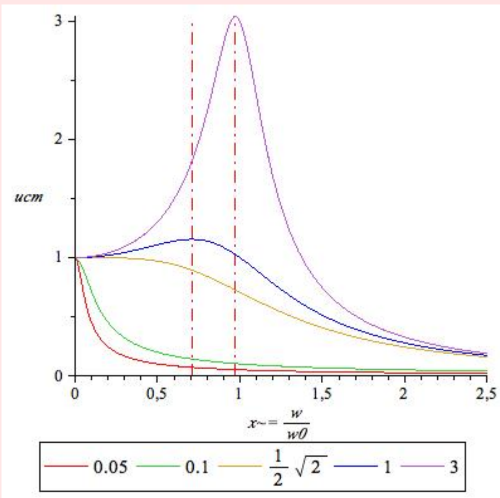


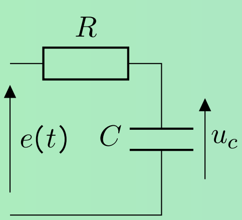
FIGURE 7.2 – Réponse d'un filtre passe-bas

On retiendra :

- ⋆ les caractéristiques hautes et basses fréquences nécessaires et la forme canonique associées lorsque le système est d'ordre 2.
- ⋆ la forme générale de la réponse fréquentielle (allure en fonction de la fréquence) en amplitude réelle et en déphasage.
- ⋆ l'existence d'une **résonance**, c'est-à-dire d'un maximum d'amplitude en fonction de la fréquence/pulsation conditionnée au facteur de qualité : il doit être supérieur à $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ⋆ Lorsque la résonance existe, la pulsation de résonance dépend du facteur de qualité.

Etude d'une réponse

♥ Méthode III.7: Réponse à un circuit RC série



On considère le circuit ci-contre où $e(t)$ est un signal d'entrée.

Q1. Déterminer, en RSF, $\underline{u}_c$ et le mettre sous la forme :

$$\underline{u}_c = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{e} \tag{7.12}$$

en exprimant ω_0 en fonction de R et C.

Q2. En déduire l'amplitude réelle u_{Cm} et la phase à l'origine ϕ_u. On notera e_m l'amplitude réelle de $e(t)$ et ϕ_e sa phase à l'origine. Donner la réponse complète $u_C(t)$ au signal $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$

Q3. On considère maintenant que $e(t) = e_m \cos(\omega_0 t) + 2e_m \cos(2\omega_1 t + \pi/3)$ Donner l'expression du signal de sortie $u_C(t)$.

Q4. Même question pour un signal dont la décomposition en série de Fourier est :

$$e(t) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{E}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 t) \tag{7.13}$$

III.2 Applications

Généralités

✍ Exercice III.1: Manipulation des complexes

Déterminer le module et la phase à l'origine des grandeurs réelles associées aux représentations complexes suivantes puis déterminer leurs comportements HF et BF (directement sur les grandeurs complexes).

$$\underline{s} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = \frac{1}{1 - LC\omega^2} e_m e^{-j\pi/3}$$
$$\underline{s} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = \frac{-K}{1 + jRC\omega} e_m$$
$$\underline{s} = jRC\omega e_m e^{j\varphi}$$
$$\underline{s} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + jRC\omega} e_m$$

✍ Exercice III.2: Modélisation d'une impédance

On considère un dipôle dont l'impédance se met sous la forme $\underline{Z} = R + jX$ avec R et X réels.

Q1. Montrer que si X est positif, le dipôle peut être modélisé par une inductance en série avec une résistance donc on exprimera les valeurs en fonction de R, X et ω.

Q2. Montrer que si X est négatif, le dipôle peut être modélisé par un condensateur en parallèle avec une résistance donc on exprimera les valeurs en fonction de R, X et ω.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Manipulation des complexes
- ⋆ Impédances usuelles

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Si X est positif, $R_{eq} = R$ et $L_{eq} = X/\omega$
- ⋆ Si X est négatif, $R_{eq} = R + \frac{X^2}{R}$ et $C_{eq} = -\frac{1}{\omega}\frac{X}{R^2+X^2}$

✍ Exercice III.3: Passage temporel-fréquentiel

A partir des équations différentielles ci-dessous, exprimer la représentation complexe $\underline{s}$ dans un régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{3R}{L}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + \frac{4}{(RC)^2}s = 2RC\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}$$

$$4LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + 2RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + Ks = K'e$$

$$4LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + 2\frac{L}{R}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + Ks = K'LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}}{\mathrm{dt}^2}$$

Déduire des équations ci-dessous les équations différentielles qui relient s et e. Discuter alors de la stabilité de chaque système

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + 3RC\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-(RC\omega)^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{(RC\omega)^2}{1 - LC\omega^2 - jRC\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{K}{1 - 3jRC\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{KjRC\omega}{1 + 3jRC\omega}$$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Passage temporel-fréquentiel et inverse.

Eléments de correction (sans justification) :

$$\left(-\omega^2 + 3j\frac{R}{L}\omega + \frac{4}{(RC)^2}\right)\underline{s} = 2jRC\omega\underline{e}$$

$$\left(-4LC\omega^2 + 2jRC\omega + K\right)\underline{s} = K'\underline{e}$$

$$\left(-4LC\omega^2 + 2j\frac{L}{R}\omega + K\right)\underline{s} = -\omega^2K'LC\underline{e}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + s = e + RC\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + s = (RC)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}}{\mathrm{dt}^2}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} - RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + s = -(RC)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}}{\mathrm{dt}^2}$$

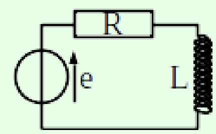
$$-3RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + s = Ke \text{ On notera qu'il s'agit d'un système instable.}$$

$$3RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} + s = KRC\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}$$

Etude d'une réponse

✍ Exercice III.4: Circuit RL

On considère un dipôle constitué d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L en série. Il est branchée aux bornes d'une tension d'entrée e. Exprimer la tension aux bornes de la bobine en régime forcé lorsque la tension d'entrée est :



Q1. Cas 1 : $e(t) = e_1 \cos \omega_1 t + e_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$

Q2. Cas 2 : $e(t) = e_1 \sin \omega_1 t + e_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Réponse d'un filtre linéaire

Eléments de correction (sans justification) :

$$s(t) = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_0} e_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} \cos\left(\omega_1 t - \arctan\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\frac{\omega_2}{\omega_0} e_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2}} \cos\left(\omega_2 t - \arctan\frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$s(t) = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_0} e_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} \sin\left(\omega_1 t - \arctan\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\frac{\omega_2}{\omega_0} e_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2}} \sin\left(\omega_2 t - \arctan\frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

avec $\omega_0 = \frac{R}{L}$

Etude fréquentielle

✍ Exercice III.5: Etude asymptotique

Etudier en haute et basse fréquence le comportement la tension s dans le circuit de l'exercice III.2 et vérifier la cohérence avec l'expression trouvée dans ce même exercice.

✍ Exercice III.6: RLC parallèlle

On considère trois dipôles R, L et C branchés en parallèle. On alimente le dipôle ainsi formé par un source modélisée par un modèle de Thévenin de résistance r et de force électromotrice E sinusoïdale. On étudie le régime sinusoïdal forcée.

Étudier la réponse fréquentielle pour l'intensité circulant dans la bobine et la tension aux bornes du dipôle RLC.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Passe-bas et passe-bande d'ordre 2

Eléments de correction (sans justification) : Vous devez trouver un comportement "passe-bas" pour l'intensité dans la bobine et un comportement passe-bande pour la tension.

III.3 Entrainement

✍ Exercice III.7: Antirésonance

On considère un dipôle RLC série alimenté par une tension sinusoïdale. On s'intéresse à la tension u aux borne de l'ensemble L+C en régime sinusoïdal forcé.

Q1. Déterminer l'amplitude complexe de u puis son amplitude réelle. En déduire la valeur maximale de l'amplitude réelle $u_{\max}$.

Q2. Montrer que l'amplitude s'annule pour une pulsation qu'on déterminera. On parle d'antirésonance.

Q3. On définit la bande coupée comme la bande de fréquence pour laquelle l'amplitude réelle $u_m(\omega)$ soit telle que $u_m(\omega) \leq \frac{u_{\max}}{\sqrt{2}}$. Préciser sa largeur.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Etude fréquentielle

Eléments de correction (sans justification) : $\underline{u} = \frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}E$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
L'amplitude de u est maximale aux fréquences extrêmes et s'annule à la pulsation propre. La largeur de la bande coupée est $\frac{\omega_0}{Q}$.

✍ Exercice III.8: Détection

On considère un circuit constitué d'une résistance R en série avec un condensateur C. L'ensemble est reliée à une source de tension $e(t)$ fournissant une tension : $e(t) = e_m \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t$ avec $\omega_1 = 1.01\omega_2 = \frac{50}{RC}$.

Déterminer la tension aux bornes du condensateur en régime forcé. Simplifier l'expression par approximation en utilisant les ordres de grandeurs des pulsations mises en jeu.

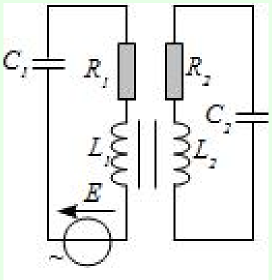
Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Réponse d'un filtre linéaire

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ $u(t) = \frac{e_m}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+100.5^2}}\cos(2.01\omega_2 t - arctan(100.5)) - \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}}\cos(0.01\omega_2 t - arctan(0.5))\right)$
- ⋆ $u(t) \approx \frac{e_m}{2}\cos(0.01\omega_2 t)$

✍ Exercice III.9: Circuits couplées



On considère le circuit ci-contre. Les deux bobines sont sous influence mutuelle, c'est-à-dire qu'à la tension habituelle d'une bobine s'ajoute pour la bobine du circuit $\alpha (\alpha \in \{1,2\})$, une tension $M\frac{\mathrm{d}i_\beta}{\mathrm{d}t}$ avec $\beta \in \{2,1\}$.
On supposera de plus que les composants sont égaux deux à deux. Déterminer en régime sinusoïdal forcé les représentations complexes des courants circulant dans chaque circuit puis les charges aux armatures des condensateurs.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF

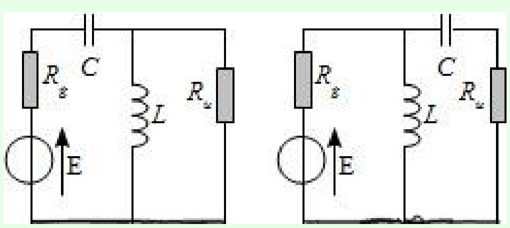
Eléments de correction (sans justification) :

$\underline{i_1} = \frac{\left(\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega\right)E}{\left(\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega\right)^2-(jM\omega)^2}$

$\underline{i_1} = \frac{jM\omega E}{\left(\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega\right)^2-(jM\omega)^2}$

Les charges s'obtiennent en divisant par $j\omega$: s'entrainer à simplifier ces diverses expressions.

✍ Exercice III.10: Adaptation d'impédance



On considère le circuit ci-contre. On veut que le dipôle composé des composants L, C variables et R_u fixée soit équivalent à une résistance pure R_g fixée.

Q1. Déterminer suivant les valeurs relatives de R_u et R_g le circuit permettant cette réalisation et les valeurs de L et C à choisir.

Q2. Déterminer dans les conditions précédentes la puissance instantanée puis la puissance moyenne reçue par le dipôle équivalent.

Points utiles pour cet exercice

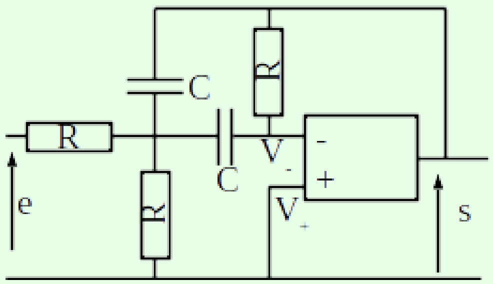
- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Impédances usuelles
- ⋆ Association d'impédances

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Circuit 1 si $R_u > R_g$. Il faut que $L = \frac{R_u}{\omega}\sqrt{\frac{R_g}{R_u-R_g}}$ et $C = \frac{1}{\omega R_g}\sqrt{\frac{R_g}{R_u-R_g}}$
- ⋆ Circuit 2 si $R_u < R_g$. Il faut que $L = \frac{R_g}{\omega}\sqrt{\frac{R_u}{R_g-R_u}}$ et $C = \frac{1}{\omega R_u}\sqrt{\frac{R_u}{R_g-R_u}}$

Dans les deux cas, la puissance moyenne reçue est $\frac{E^2}{8R_g}$

✍ Exercice III.11: Système actif



On considère le circuit ci-contre. L'amplificateur linéaire intégré est supposé idéal fonctionnant en régime linéaire. Dans ces conditions, les courants entrant aux bornes + et - de l'amplificateur linéaire intégré sont nuls et la différence de potentiel $\epsilon = V_+ - V_- = 0$.

Q1. Déterminer par une étude rapide les comportements haute et basse fréquence du système pour la tension s.

Q2. Déterminer la tension s en régime sinusoïdal forcé et faire son étude fréquentielle (amplitude réelle et déphasage avec l'entrée). On pensera à vérifier la cohérence avec l'étude rapide précédente et à mettre la représentation complexe de s sous forme canonique.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Etude d'un circuit en RSF
- ⋆ Amplificateur linéaire intégré

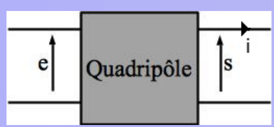
Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ s et nulle à haute et basse fréquence.
- ⋆ $\underline{s} = \frac{-\frac{\underline{e}}{2}}{1jQ(x-\frac{1}{x})}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il faut ensuite passer en réel pour répondre à la question.

Devoir libre - Pont de Wheatstone en RSF (Moodle)

Chapitre 8: Filtrage linéaire

♥ Définition .1: Fonction de transfert



On définit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ comme le rapport des amplitudes complexes des tensions d'entrée e et de sortie s en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω *quand la sortie est ouverte.*
Un filtre est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend explicitement de la pulsation ω.

- ⋆ Un quadripôle est un composant qui présente 2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie.
- ⋆ La condition de linéarité est nécessaire.

Réflexion

Un filtre modifie donc le spectre d'un signal en supprimant certaines composantes. Proposer des exemples de filtres vus en physique-**chimie** (pas forcément en électronique).

I Description d'un filtre

♥ Définition I.1: Caractéristiques générales d'un filtre

- ⋆ son module $G = \frac{s_m}{e_m}$, appelé **gain réel** : il correspond au rapport des amplitudes réelles
- ⋆ sa argument ϕ ou **phase** : il va correspondre au déphasage que va avoir la sortie sur l'entrée.
- ⋆ son **gain en décibel** défini par $G_{db} = 20 \log \frac{s_m}{e_m}$ (attention : c'est une grandeur réelle) : on verra que c'est une manière plus pratique de se représenter le rôle et l'efficacité d'un filtre.

Réflexion

Q1. A quel gain correspond un $G_{dB} = 0dB$?

Q2. On considère deux gain en décibel $G_{dB,1}$ et $G_{dB,2}$ tel que $\Delta G_{dB} = G_{dB,2} - G_{dB,1} = 20dB$. Que vaut alors le rapport G_2/G_1 ?

Q3. Quel écart en décibel correspond à un rapport $G_2/G_1 = 100$?

*Il est important de comprendre que les écarts en gain en décibel donne des informations sur le **rapport** de gains réels et non sur les écarts en gains réels.*

Q4. Préciser les gammes de gains réels correspondant à $0 - 20dB$, $20 - 40dB$, $40 - 60dB$, $60 - 80dB$.

♥ Définition I.2: Types de filtres

*Les filtres sont de différents types suivant leur finalité. Nous ne présentons ici que les types de filtres les plus utilisés (et ceux que vous devez connaître). **Dans le cadre du programme**, on peut associer à chaque type de filtre des comportements haute et basse fréquence précis. C'est en étudiant ces comportements qu'on déterminera le type de filtre.*

- ⋆ les filtres dit passe-bas : leur but est de laisser passer les basses fréquences et de couper les hautes fréquences. Normalement, on utilise ces filtres pour laisser passer une gamme de fréquence jusqu'à une fréquence voulue (qu'on appellera fréquence de coupure) et couper les fréquence plus rapides.
  - — **On reconnaît les filtres passe-bas par un comportement basse fréquence non-nul et un comportement haute-fréquence nul.**
- ⋆ les filtres dit passe-haut : leur but est de laisser passer les hautes fréquences et de couper les basses fréquences. Normalement, on utilise ces filtres pour laisser passer une gamme de fréquence à partir une fréquence voulue (qu'on appellera fréquence de coupure) et couper les fréquence plus lentes.
  - — **On reconnaît les filtres passe-haut par un comportement basse fréquence nul et un comportement haute-fréquence non-nul.**
- ⋆ les filtres dit passe-bande : leur but est de laisser passer une bande de fréquence entre deux fréquences choisies (qui sont appelées fréquences de coupure).
  - — **On reconnaît les filtres passe-bande par un comportement basse fréquence et un comportement haute-fréquence nul.**
- ⋆ les filtres dit coupe-bande (ou réjecteur de bande) : leur but est de couper une bande de fréquence entre deux fréquences choisies (qui sont appelées fréquences de coupure).
  - — **On reconnaît les filtres coupe-bande par un comportement basse fréquence et un comportement haute-fréquence non-nul et égaux. Il existe (et surtout) aussi une fréquence pour laquelle le gain s'annule.**

Réflexion

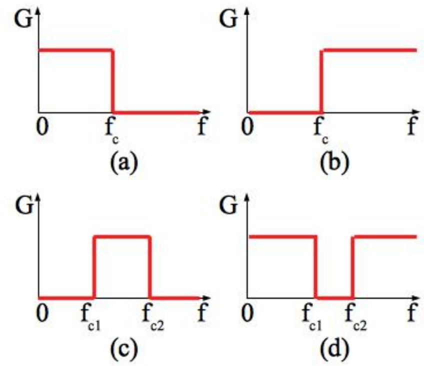
Q1. Les systèmes electro-mécaniques commandés par des signaux électriques peuvent être endommagés par des signaux de trop hautes fréquences. Quel type de filtre faut-il intercaler entre la commande électronique et l'actionneur ?

Q2. Les appareils electro-acoustiques alimentés par le secteur peuvent souffrir un signal rémanent de 50Hz. Quel type de filtre utiliser pour supprimer une bande autour de cette fréquence ?

Q3. Le mode AC de l'oscilloscope supprime la valeur moyenne et les fréquences proches de celle-ci. Quel type de filtre est utilisé ?

Q4. Naturellement, les atomes et molécules absorbent certaines bande de fréquences. En ne considérant qu'une seule bande d'absorbande, préciser le type de filtrage réalisé.

Q5. On donne le tracé de $G(f)$ pour différents filtres. Comment obtenir facilement le tracé de $G(\omega)$ à partir de ces graphiques ? Préciser pour chaque tracé le type de filtre.



*En réalité, ces tracés correspondent à des **filtres idéaux**, car il est impossible de passer brutalement d'une fréquence où G est nul à une fréquence où G est non nul. Le gain est sur des systèmes réels, une fonction continu en ω.*

♥ Définition I.3: Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est la représentation graphique utilisée pour les filtres linéaires. Il consiste à représenter **le gain en décibel** et **la phase du filtre** en fonction de $\log(\omega)$ [a]

[a] ou de $\log(f)$ ou $\log(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ lorsque ω_0 est défini.

Réflexion

Q1. Exprimer $\log(f)$ en fonction de $\log(\omega)$, en déduire comment obtenir le tracé de $G_{dB}(\log(f))$ à partir de celui en $G_{dB}(\log(\omega))$.

Q2. Même question entre $\log(x)$ et $\log(\omega)$.

♥ Définition I.4: Decade

Une décade est un intervalle de pulsation $[\omega_1; \omega_2]$ (ou de pulsation réduite $[x_1; x_2]$, ou encore de fréquence $[f_2; f_2]$) tel que $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_2}{f_1} = 10$. Autrement dit, quand on avance d'une décade, on multiplie par dix la pulsation.

Réflexion

Q1. Sur un diagramme de Bode, l'abscisse est en $log(\omega)$, à quel écart en abscisse correspond une décade ?

Q2. Pour $\log(x) = 0$, que vaut ω ?

Q3. Sur un diagramme de Bode, préciser les gamme de fréquences qu'on va observer pour $\log(f) \in [0,1]$, $\log(f) \in [-1,0]$, $\log(f) \in [1,2]$. Quel intérêt peut avoir l'échelle logarithmique ?

II Propriétés d'un filtre

♥ Définition II.1: Bande passante et fréquences de coupure

- La **bande passante** d'un filtre est l'intervalle de fréquence pour lesquelles le gain réel est supérieur au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$.
- Les **fréquences de coupure** sont les fréquences telles que le gain réel soit égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$.

Réflexion

Sur un diagramme de Bode, quel est l'écart entre le gain en décibel maximal $G_{dB,max}$ et le gain en décibel pour une fréquence de coupure ?

*On parle d'ailleurs de **gain à -3dB** pour désigner le gain aux fréquences de coupure.*

♥ Propriété II.1: Comportement pseudo dérivateur et pseudo intégration

- Un système dérivateur est un système dont la relation temporelle s'écrit $s(t) = \frac{K}{\omega_0}\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}(t)$. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit : $\underline{H} = jK\frac{\omega}{\omega_0}$.
  - En pratique, on ne peut de manière stable réaliser une système dérivateur pour *toutes* les fréquences ($\in \mathbb{R}^+$), on peut par contre réaliser un comportement dérivateur [a] pour une partie du spectre : on parle de **comportement pseudo dérivateur**
  - Un comportement pseudo dérivateur se traduit sur un diagramme de Bode par une asymptote oblique de pente +20dB/decade
- Un système intégrateur est un système dont la relation temporelle s'écrit $s(t) = K\omega_0 \int e(t)$. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit : $\underline{H} = \frac{K}{j\omega/\omega_0}$.
  - En pratique, on ne peut de manière stable réaliser une système intégrateur pour *toutes* les fréquences ($\in \mathbb{R}^+$), on peut par contre réaliser un comportement intégrateur [b] pour une partie du spectre : on parle de **comportement pseudo intégrateur**
  - Un comportement pseudo intégrateur se traduit sur un diagramme de Bode par une asymptote oblique de pente −20dB/decade

a. En pratique, $\underline{H} \approx jK\frac{\omega}{\omega_0}$

b. En pratique, $\underline{H} \approx \frac{K}{j\omega/\omega_0}$.

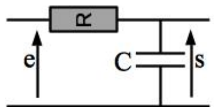
♥ Démonstration

On démontre le diagramme de Bode associées aux comportements pseudo dérivateur et intégrateur :

- Comportement dérivateur : Il suffit de prendre le gain réel puis le gain en décibel de la fonction de transfert $\underline{H} = jK\frac{\omega}{\omega_0}$ soit $G_{dB} = 20\log\frac{K}{\omega_0} + 20\log\omega$.
- Comportement intégrateur : Il suffit de prendre le gain réel puis le gain en décibel de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{K}{j\omega/\omega_0}$ soit $G_{dB} = 20\log K\omega_0 - 20\log\omega$.

III Mise en cascade des filtres

Réflexion



Si l'on met en cascade (l'un après l'autre) deux filtres RC passe-bas de fonction de transfert $\underline{H}$, pourquoi la fonction de transfert ne sera pas $\underline{H}^2$. (On pourra la calculer pour s'en rendre compte.)

♥ Propriété III.1: Modélisation d'un quadripôle

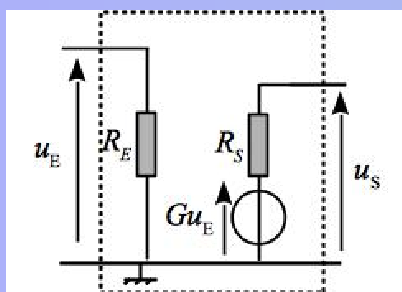


FIGURE 8.1 – Modélisation d'un quadripôle.

Un quadripôle fait le lien entre un premier et une second circuit. Du point du vue du premier circuit, il est assimilable à une résistance (résistance d'entrée). Du point de vue du circuit de sortie, il est assmilable à un modèle de Thévenin de fem $\underline{He}$ et de résistance R_S appelée résistance de sortie.
En toute rigueur, les résistances sont parfois remplacées **par des impédances** pour affiner le modèle.

♥ Propriété III.2: Mise en cascade de filtres

- ⋆ Lorsqu'on met en cascade deux filtres [a], la fonction de transfert $\underline{H}$ de l'ensemble n'est **PAS** le produit des deux fonctions de transfert $\underline{H} \neq \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$.
  Cela est dû au fait que le calcul des fonctions de transfert suppose une intensité de sortie nulle. Lors de la mise en cascade, cette hypothèse n'est plus assurée pour le premier filtre.
- ⋆ Deux filtres mis en cascade auront des comportement indépendants si **l'impédance de sortie du premier est très faible devant l'impédance d'entrée du second.** Dans ces conditions, on peut étudier les deux filtres séparément et obtenir la fonction de transfert complète par multiplication.

a. On branche la sortie du premier sur l'entrée du second

Réflexion

On va démontrer la propriété précédente.

Q1. Faire un schéma de deux quadripoles branchés en cascade. On note $\underline{Z}_{e1}$ (resp. $\underline{Z}_{s1}$) et $\underline{Z}_{e2}$ (resp. $\underline{Z}_{s2}$) les impédances d'entrée (resp. de sortie) des quadripôle 1 et 2 et $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ leur fonction de transfert.

Q2. En déduire que l'intensité i_{s1} à la sortie du premier quadripole n'est pas nulle. L'exprimer (en complexe) en fonction de $\underline{Z}_{s1}, \underline{Z}_{e2}, \underline{H}_1$ et $\underline{e}$ la tension d'entrée.

Q3. Exprimer la tension $\underline{s}_1$ à la sortie du premier quadripole en fonction de $\underline{Z}_{s1}, \underline{Z}_{e2}, \underline{H}_1$ et $\underline{e}$. Que devrait-elle valoir si le filtre 1 n'est pas perturbé par le second filtre ?

Q4. Montrer que la condition donnée dans la propriété(exprimée sur les normes) permet d'obtenir le résultat voulu.

♥ Propriété III.3: Utilisation d'un suiveur

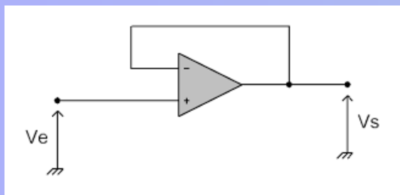


FIGURE 8.2 – Montage suiveur

Lorsqu'on veut mettre en cascade deux filtres qui ne vérifient la condition précédente, on va intercaler un **suiveur**. Un suiveur est un montage de gain unitaire (s = e) mais qui possède une impédance d'entrée très grande et une impédance de sortie très faible. Celà permet de réaliser la condition de mise en cascade.

Corrigés

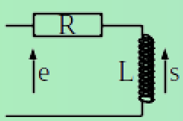
IV S'entrainer

IV.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Etude d'un filtre

♥ Méthode IV.1: Etudier un filtre et tracer son diagramme



Q1. Déterminer le type de filtre par une étude haute et basse fréquence.

Q2. Déterminer la fonction de transfert du filtre et en déduire son gain réel, son gain en décibel, sa phase. On introduira la pulsation propre ω_0 telle que :

$$\underline{H} = \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{Ajx}{1 + jx}$$

On veut tracer le diagramme de Bode. Montrer que :

Q1. Le gain réel est strictement croissant

Q2. Il est maximal à haute fréquence. Préciser sa valeur.

Q3. La fonction $G_{dB}(\log(x))$ possède une asymptote oblique en $\log(x) \to -\infty$ de pente +20dB/decade.

Q4. La phase est strictement décroissante. On déterminera ses valeurs asymptotiques.

Q5. Tracer le diagramme de Bode.

♥ A retenir: Etudier un filtre et tracer son diagramme

On retiendra :

- ⋆ Les méthodes de mise en équation sont les mêmes que pour un circuit en RSF.
- ⋆ les méthodes de détermination des asymptotes.
- ⋆ L'interprétation des asymptotes obliques en terme de comportement intégrateur/dérivateur.
- ⋆ la méthode de recherche des pulsations de coupure.

♥ Méthode IV.2: Analyser d'un diagramme de Bode

On considère un filtre dont le diagramme de Bode (tracé en fonction de $\log(\omega)$)est donné ci-après.

Q1. Préciser le type de filtre.

Q2. On peut déterminer graphiquement la pulsation propre de deux manières : elle se trouve à l'intersection des asymptotes haute et basse fréquence du filtre et pour **ce filtre**, la phase à la pulsation propre vaut $-\pi/2$. Déterminer la pulsation propre par les deux méthodes et vérifier la cohérence des deux résultats.

Q3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la représentation $G_{dB}(log(\omega))$ sur le diagramme de Bode en gain. En déduire, dans cette zone la relation temporelle approchée entre la sortie et l'entrée.

Q4. On définit une fréquence de coupure comme une fréquence pour laquelle le gain est égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. Déterminer numériquement la valeur de la pulsation de coupure.

♥ A retenir: Analyser d'un diagramme de Bode

On retiendra :

- ⋆ les lectures possibles : asymptotes, pulsation propre, pulsation de coupure
- ⋆ ATTENTION : En général, les valeurs des abscisses sont directement x, f ou ω et PAS $\log(x), \log(f)$ ou $\log(\omega)$.
- ⋆ La pulsation propre n'est pas forcément la pulsation de coupure.

Etudier la réponse d'un filtre

♥ Méthode IV.3: Réponse d'un filtre à des sinusoïdes

On reprend le filtre précédent dont la fonction de transfert est $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

Q1. Nous allons commencer par établir la réponse exacte du filtre.

Q1.a. Exprimer le signal de sortie $s(t)$ pour un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude e_m.

Q1.b. On considère un signal d'entrée $e(t) = e_1 \cos\omega_1 t + e_2 \cos\omega_2 t$ avec $\omega_1 = 0.1\omega_0$ et $\omega_2 = 10\omega_0$. Exprimer la réponse exacte du filtre.

Q2. Nous allons maintenant assimiler la réponse du filtre à sa version idéale.

- ⋆ A basse fréquence, simplifier l'expression du gain et de la phase à l'ordre 0. Est-on dans ou hors de la bande passante ?

- ⋆ A haute fréquence, simplifier l'expression du gain et de la phase à l'ordre 0. Est-on dans ou hors de la bande passante ?
- ⋆ On considère un signal d'entrée $e(t) = e_1 \cos \omega_1 t + e_2 \cos \omega_2 t$ avec $\omega_1 = 0.1\omega_0$ et $\omega_2 = 10\omega_0$. Dans le cadre d'approximation par un filtre idéal, exprimer la tension de sortie.
- ⋆ Comparer graphiquement les représentations graphiques de la réponse exacte et de la réponse "tout-ou-rien" qui vient d'être établie.

Q3. Nous allons maintenant assimiler la réponse du filtre à ses comportements asymptotiques établies lors du tracé du diagramme de Bode. A basse fréquence, on rappelle qu'on a montré que la fonction de transfert peut se réécrire $\underline{H} = jx$. En déduire la relation temporelle entrée-sortie à basse-fréquence. Comment se comporte le filtre pour un signal dont le spectre est entièrement inférieur à la bande fréquence ω_0 ?

♥ A retenir: Réponse d'un filtre à des sinusoïdes

On retiendra les différentes types d'études possibles :

- ⋆ la réponse exacte, purement mathématique
- ⋆ la réponse approchée au filtre idéale : elle nécessite de placer les fréquences du spectre du signal en comparaison avec le gain réel du filtre :
  - — si les fréquences sont dans la bande passante, on approche la réponse à la réponse maximale
  - — sinon, la réponse est nulle

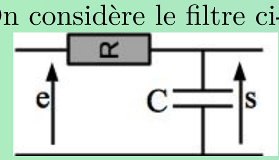
  La comparaison se fait donc avec les pulsations de coupure.
- ⋆ la réponse asymptotique : elle est utilisée lorsque toutes les fréquences sont dans une zone de comportement intégrateur/dérivateur [a]. La réponse s'obtient alors **en repassant en temporelle.** Ces comportements ont généralement lieu à haute ou basse fréquence : on compare donc les fréquences du spectre **à la pulsation propre.**

a. ou double intégrateur/dérivateur

Pour les deux dernières approches, il *est nécesssaire de comparer les fréquences aux pulsations caractéristiques du circuit.*

♥ Méthode IV.4: Cas d'un signal d'entrée périodique

On considère le filtre ci-dessous.



Q1. Déterminer rapidement le type de filtre puis la fonction de transfert. En déduire le gain réel et la phase. On mettra la fonction de transfert sous la forme $\underline{H} = \frac{A}{1+jx}$ avec x la pulsation réduite.

Q2. Justifier que le gain réel est strictement décroissant. Montrer que la représentation du gain en décibel sur un diagramme de Bode $G_{dB}(\log(x))$ admet une asymptote oblique à haute fréquence de pente -20dB/decade

Q3. On définit la bande passante du filtre comme la gamme de fréquence où le gain réel est supérieur au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. Déterminer la bande passante.

On considère le filtre précédent et on envoie en entrée un signal créneau d'amplitude E. On admet que la décomposition spectrale du signal créneau est :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)2\pi f t\right)}{2k+1} \tag{8.1}$$

Q4. Donner la réponse exacte du filtre pour une fréquence du créneau $f = f_0$ avec f_0 la fréquence propre associée à la pulsation propre.

Q5. Donner une réponse approchée du filtre en assimilant sa réponse à celle d'un filtre idéal lorsque $f = f_0/2$.

Q6. Déduire de la fonction de transfert la relation temporelle entrée-sortie à haute fréquence. Quel comportement possède le filtre dans ce domaine spectral ? En déduire une réponse approchée du filtre en utilisant ses comportements asympotiques lorsque $f = 10 f_0$

♥ A retenir: Cas d'un signal d'entrée périodique

On retiendra l'utilisation des différentes formes de réponses et que pour les réponses approchées, il est **nécessaire de réfléchir à la position des composantes spectrales par rapport aux fréquences de coupure/propre.**

De manière plus qualitative, on peut appliquer le même genre de raisonnement à des spectres continues (c'est fait en chimie avec les spectre d'absorption ou en optique avec les filtres de couleur).

Questions de cours rapides

IV.2 Applications

Ces applications sont un peu particulières. **Pour chaque filtre, il faudra démontrer les caractéristiques - qui sont aussi à connaitre par coeur - à partir de la forme canonique (à connaître aussi).**

Les démonstrations seront faites et présentées par des groupes d'élèves.

Passe-bas d'ordre 1

♥ Définition IV.1: Filtre passe-bas d'ordre 1

Un filtre passe bas d'ordre 1 peut se mettre sous la forme :

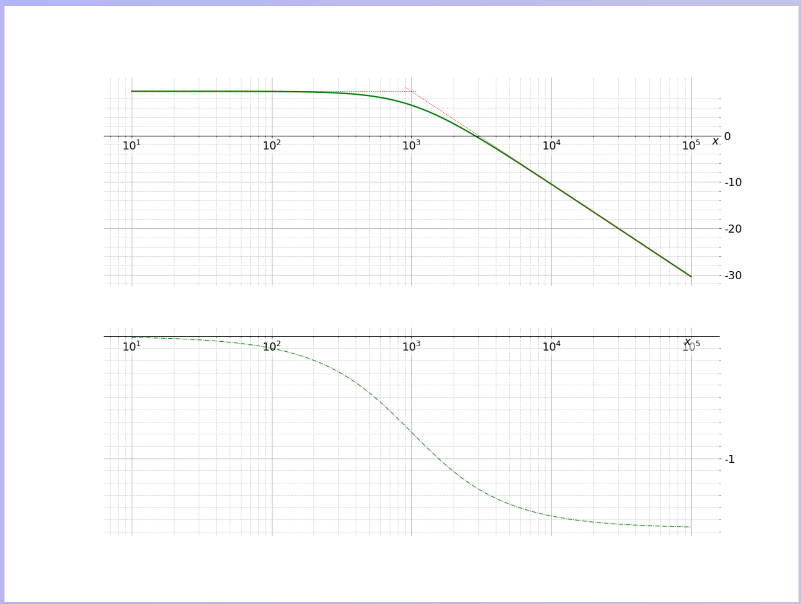
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et la pulsation propre ω_0.

♥ Définition IV.2: Caractéristiques d'un filtre passe-bas d'ordre 1

Les caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont :

- ⋆ ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre : la limite HF est nulle et la limite BF est non nulle.
- ⋆ l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- ⋆ le gain réel est strictement décroissant.
- ⋆ SI $H_0 > 0$: La phase passe de 0 à $-\pi/2$ et elle vaut $-\pi/4$ à la pulsation propre.
- ⋆ La pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.
- ⋆ Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à basse fréquence et une asymptote oblique de pente $-20dB/decade$ à haute fréquence.



Passe-haut d'ordre 1

♥ Définition IV.3: Filtre passe-haut d'ordre 1

Un filtre passe haut d'ordre 1 peut se mettre sous la forme :

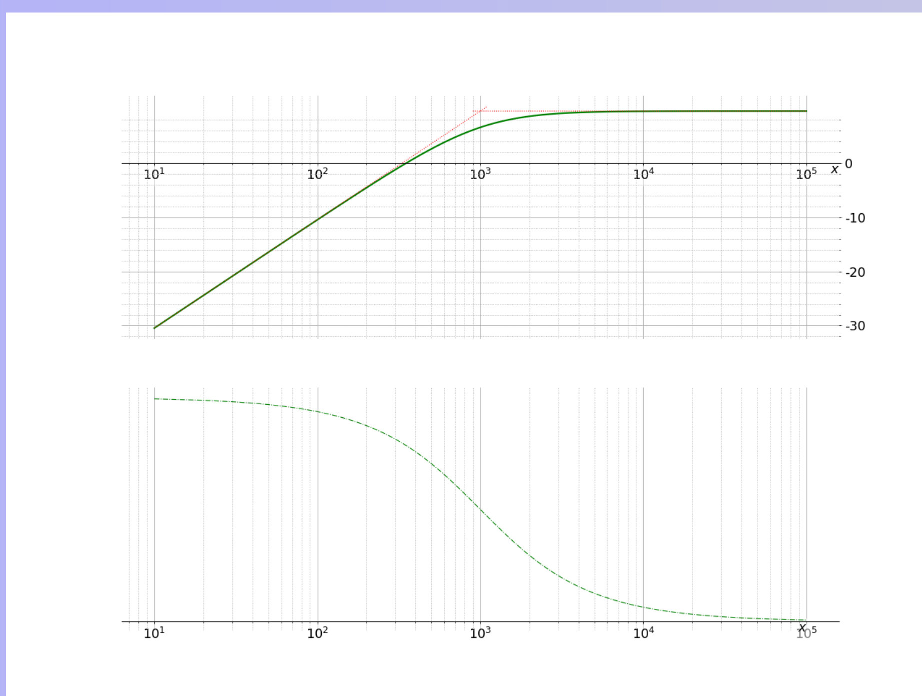
$$\underline{H} = \frac{jH_0x}{1 + jx}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et la pulsation propre ω_0.

♥ Définition IV.4: Caractéristiques d'un filtre passe-haut d'ordre 1

Les caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont :

- ⋆ ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre : la limite HF est non nulle et la limite BF est nulle.
- ⋆ l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- ⋆ le gain réel est strictement croissant.
- ⋆ la pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.
- ⋆ Si $H_1 > 0$: La phase passe de $\pi/2$ à 0 et elle vaut $\pi/4$ à la pulsation propre.
- ⋆ Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à haute fréquence et une asymptote oblique de pente $20dB/decade$ à basse fréquence.



Passe-bas d'ordre 2

♥ Définition IV.5: Filtre passe-bas d'ordre 2

Un filtre passe bas d'ordre 2 peut se mettre sous la forme :

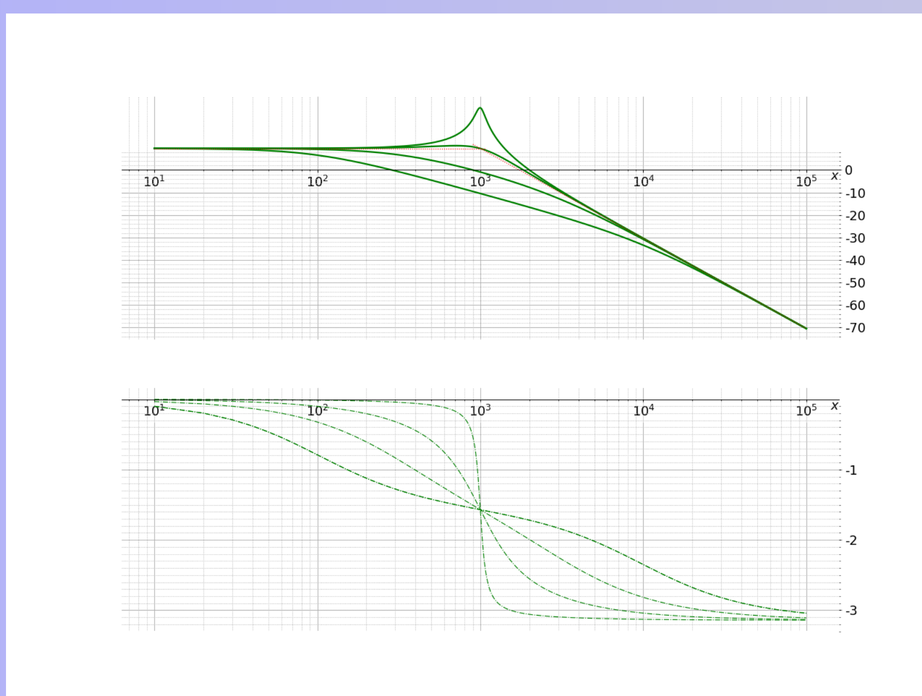
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

♥ Définition IV.6: Caractéristiques d'un filtre passe-bas d'ordre 2

Les caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont :

- ⋆ ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre : la limite HF est nulle et la limite BF est non nulle.
- ⋆ l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- ⋆ l'existence d'une résonance conditionnée à un facteur de qualité tel que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fréquence de résonance dépend du facteur de qualité. Elle tend vers 0 quand Q décroit et vers la pulsation propre quand Q augmente.
- ⋆ La phase passe de 0 à $-\pi$ (ou de π à 0 si $H_0 < 0$). Elle vaut $-\pi/2$ (ou $\pi/2$) à la pulsation propre.
- ⋆ Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à basse fréquence et une asymptote oblique de pente $-40dB/decade$ à haute fréquence.



Passe-haut d'ordre 2

♥ Définition IV.7: Filtre passe-haut d'ordre 2

Un filtre passe haut d'ordre 2 peut se mettre sous la forme :

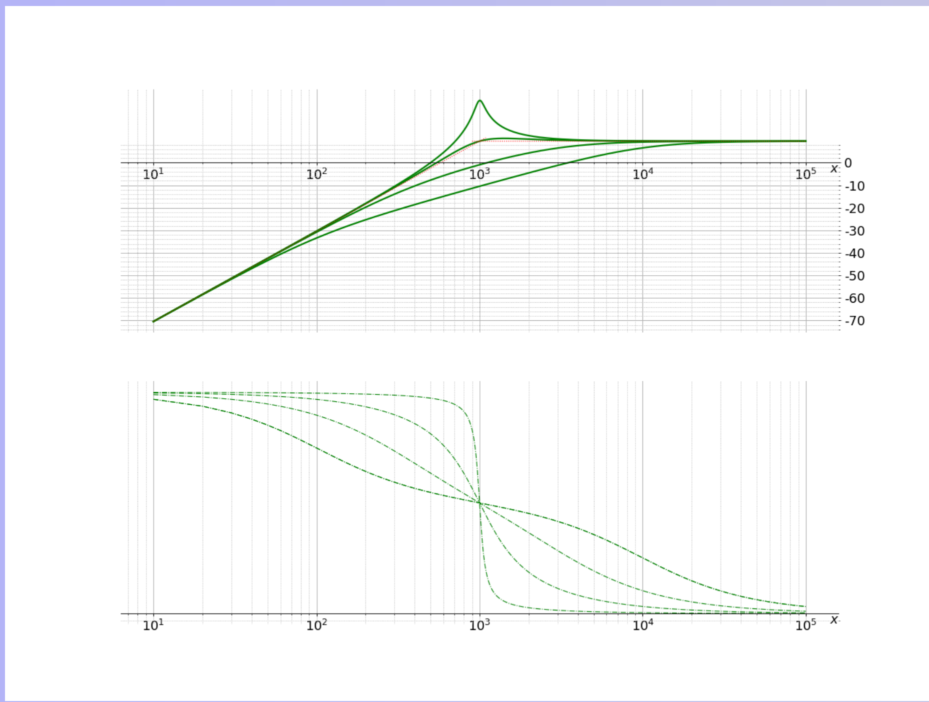
$$\underline{H} = \frac{-H_1 x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

♥ Définition IV.8: Caractéristiques d'un filtre passe-haut d'ordre 2

Les caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont :

- ⋆ ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre : la limite HF est non nulle et la limite BF est nulle.
- ⋆ l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- ⋆ l'existence d'une résonance conditionnée à un facteur de qualité tel que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fréquence de résonance dépend du facteur de qualité. Elle tend vers l'infini quand Q décroit et vers la pulsation propre quand Q augmente.
- ⋆ La phase passe de π à 0 (ou de 0 à $-\pi$ si $H_1 < 0$). Elle vaut $\pi/2$ (ou $-\pi/2$) à la pulsation propre.
- ⋆ Le diagramme de Bode admet une asymptote horizontale à haute fréquence et une asymptote oblique de pente $40dB/decade$ à basse fréquence.



Passe-bande d'ordre 2

♥ Définition IV.9: Filtre passe-bande d'ordre 2

Un filtre passe bande d'ordre 2 peut se mettre sous la forme :

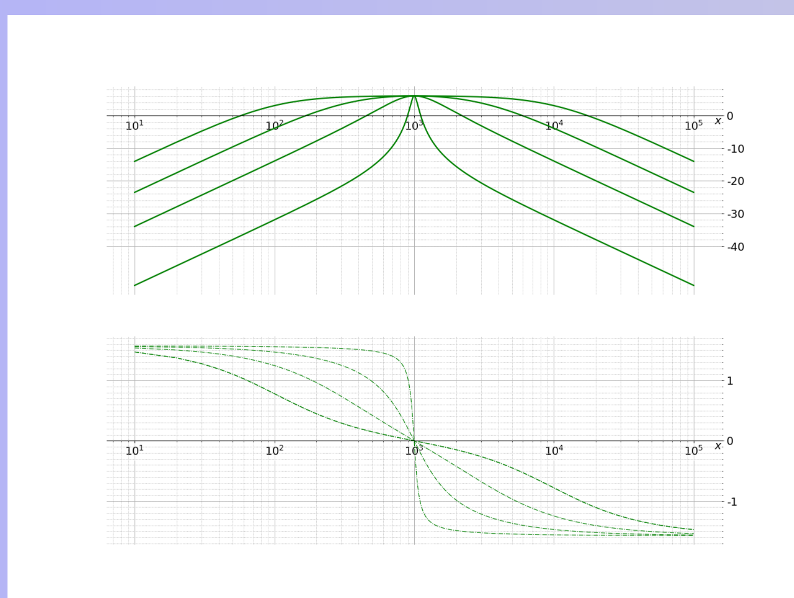
$$\underline{H} = \frac{H_2}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{jH_2\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

♥ Définition IV.10: Caractéristiques d'un filtre passe-bande d'ordre 2

Les caractéristiques que vous devez savoir calculer/prouver sont :

- ses limites haute et basse fréquence qui permettent de reconnaître un tel filtre : la limite HF est nulle et la limite BF est nulle.
- l'expression de son gain réel, de son gain en décibel et de sa phase
- l'existence d'une résonance quelque soit la valeur du facteur de qualité. La fréquence de résonance est toujours la pulsation propre.
- La bande passante possède une largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Les pulsations de coupure sont symétriques **sur un diagramme de Bode** : $\omega_{c1} \times \omega_{c2} = \omega_0^2$.
- Si $H_2 > 0$: La phase passe de $\pi/2$ à $-\pi/2$ et elle vaut 0 à la pulsation propre, on dit que les signaux entrée et sortie sont **en phase**.
- Le diagramme de Bode admet une asymptote oblique à basse fréquence de pente 20dB/decade et une asymptote oblique de pente $-20dB/decade$ à haute fréquence.



Il existe aussi un filtre coupe-bande d'ordre 2 :

$$\underline{H} = \frac{H_3(1-x^2)}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

qui possède la particularité de s'annuler pour une fréquence f_0. Ses caractéristiques ne sont pas à connaître.

IV.3 Entraînement

✍ Exercice IV.1: Pulsation de coupure d'un filtre d'ordre 2

On considère un filtre passe-bas d'ordre 2 dont le facteur de qualité est $Q = 1/2$.

Q1. Montrer que le gain réel est strictement décroissant. Que vaut le gain réel maximal ?

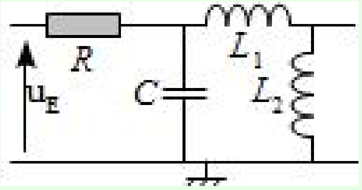
Q2. Déterminer la pulsation de coupure du filtre et montrer que $\omega_c = \omega_0\sqrt{-1+\sqrt{2}}$.

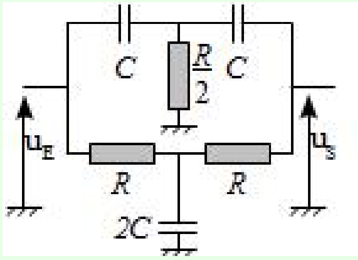
Q3. Reprendre le même exercice avec $Q = 1/\sqrt{2}$.

On pourra retenir que ω_c dépend de Q et n'est pas toujours égal à ω_0

✍ Exercice IV.2: Filtres divers

Pour chaque filtre ci-dessous, déterminer rapidement son type (le second est un coupe-bande mais déterminer quand même ses comportements haute et basse fréquence) puis par le calcul sa fonction de transfert. On introduira la pulsation propre et si nécessaire le facteur de qualité et l'on précisera les asymptotes haute et basse fréquence sur le diagramme de Bode.





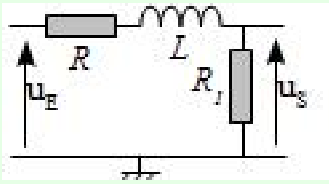
Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Circuit en RSF
- ⋆ Filtres usuels

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Passe-bande d'ordre 2. $H_0 = \frac{L_2}{L_1+L_2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$.
- ⋆ Coupe-bande d'ordre 2. $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{4}$.

✍ Exercice IV.3: Réponse d'un filtre d'ordre 1



On considère le filtre ci-après. On prend $R = R_1 = 50\Omega$ et $L = 10\text{mH}$

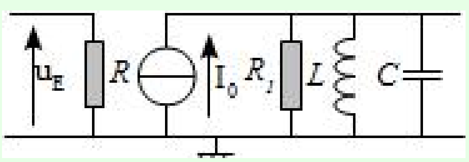
Q1. Déterminer le type de filtre puis la fonction de transfert.

Q2. Donner une expression approchée (réfléchir au type de réponse approché le plus approprié) de $u_S(t)$ pour :

- **Q2.a.** un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 10kHz et d'amplitude 1V.
- **Q2.b.** un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 100Hz et d'amplitude 1V.
- **Q2.c.** un signal d'entrée créneau de période T=0,1ms.

Q3. Représenter graphiquement $u_E(t)$ et $u_S(t)$ pour les trois signaux précédents et le comparer aux réponses exactes (on pourra utiliser une calculatrice graphique ou un simulateur). Commenter.

✍ Exercice IV.4: Réponse d'un filtre d'ordre 2



On place une bobine L_1 et un condensateur C_1 dans le circuit collecteur d'un transistor à effet de champ de façon à réaliser un amplificateur sélectif. Le montage ainsi obtenu est équivalent à celui ci-après. On a : $\underline{I_0} = k\underline{u_e}$. k étant supposé constant et réel pour le domaine de fréquence étudié.

Q1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ sous la forme : $\underline{H} = \frac{A_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ en notant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Quelle est la nature de ce filtre ? Quelle est sa bande passante ?

On envoie en entrée un signal périodique de pulsation $\omega = \omega_0$. On définit le taux d'harmonique de rang n d'un signal périodique par le rapport $\tau_n = \frac{V_n}{V_1}$ de l'amplitude V_n de l'harmonique de rang n à l'amplitude V_1 du fondamental. On note $\tau_{n,s}$ et $\tau_{n,e}$ les taux d'harmoniques respectifs des signaux d'entrée et de sortie.

Q2. Calculer le taux d'atténuation $\delta_n = \frac{\tau_{n,s}}{\tau_{n,e}}$ de l'harmonique de rang n en fonction de Q et de n.

Q3. On choisit alors la valeur de Q pour laquelle le taux d'atténuation est de -40dB pour l'harmonique de rang 2. Quelle valeur de Q réalise cette condition ?

On envoie un signal créneau d'amplitude variant entre E_1 et E_2 de pulsation ω_0 en entrée. Celui-ci peut se décomposer en séries de Fourier ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la période du créneau) :

$$e(t) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(E_1 - E_2)}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\frac{2\pi}{T_0}t)$$

Q4. Représenter sur un graphique [fréquence ;amplitude], le diagramme du signal puis donner l'allure du signal temporelle de sortie en le justifiant.

Devoir libre - Filtre de Butterworth (Moodle)