Corriges

Corrigé: Position des noeuds et des ventres

IV.1 ⋆ Position des noeuds : on cherche $y(x_N, t) = 0$ pour tout t soit :

$$\begin{aligned}\sin kx_N &= 0\\ kx_N &= m\pi\\ x_N &\boxed{= \frac{m\pi}{k} = m\frac{\lambda}{2}}\end{aligned}$$

⋆ Position des ventres : on cherche $y(x_N, t)$ maximal pour tout t soit :

$$\begin{aligned}\sin kx_N &= 1\\ kx_N &= m\pi + \frac{\pi}{2}\\ x_N &\boxed{= \frac{(2m+1)\,\pi}{2k} = m\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}}\end{aligned}$$

IV.1

Corrigé: Superposition d'ondes

Paramétrons les deux ondes :

$$\begin{aligned}y_+(x,t) &= y_0\cos(\omega t - kx)\\ y_-(x,t) &= y_0\cos(\omega t + kx + \psi)\end{aligned}$$

L'onde résultante devient :

$$\begin{aligned}y(x,t) &= y_0\left(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \psi)\right)\\ &= 2y_0\cos(\omega t + \psi/2)\cos(kx + \psi/2)\end{aligned}$$

Corrigé: Utiliser une condition aux limites

IV.1 **Q1.** Une onde transporte de l'énergie sans perte. Or en $x = 0$, la corde ne bouge pas, donc il ne peut y avoir d'énergie fournit vers $x = 0^+$. Par conservation de l'énergie, il faut nécessairement qu'une onde réfléchie naisse.

Q2. On pose $y_+(x,t) = y_{0+}\cos(\omega_1 t + k_1 x + \psi)$. La condition aux limites impose [a] :

$$\begin{aligned}y(x=0,t) &= 0\\ y_0\cos(\omega t) + y_{0+}\cos(\omega_1 t + \psi) &= 0\end{aligned}$$

Cette relation devant être vraie pour tout t, il est nécessaire que $\omega_1 = \omega$ (il vient aussi que $k_1 = k$). Soit :

$$\begin{aligned}y_0\cos(\omega t) + y_{0+}\cos(\omega t + \psi) &= 0\\ (y_0 + y_{0+}\cos\psi)\cos\omega t - y_{0+}\sin\psi\sin\omega t &= 0\end{aligned}$$

A tout nouveau, pour que la relation soit vraie pour tout t, il faut que les coefficients devant les sinus et cosinus soient nuls donc [b] :

$$\begin{cases} y_0 + y_{0+} \cos \psi & = 0 \\ y_{0+} \sin \psi & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{0+} & = -y_0 \\ \psi & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

donc :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 \cos(\omega t - kx) - y_0 \cos(\omega t + kx) \\ &= 2y_0 \sin \omega t \sin kx \end{aligned}$$

a. On choisit l'origine des phases pour l'onde incidente.
b. On pourra vérifier que le cas $\psi = \pi$ conduit à la même expression pour l'onde réfléchie.

Pensez à vérifier dans l'expression finale que la condition aux limites est bien vérifiée. Ici le sinus s'annule en $x = 0$ donc $y(x = 0, t) = 0$.

Corrigé: Corde de Melde

IV.1 Q1. La méthode est la même que précédemment. En utilisant le fait que la condition est valable pour tout t, il vient :

$$\begin{cases} y_{0-} + y_{0+} \cos \psi & = 0 \\ y_{0+} \sin \psi & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{0+} & = -y_{0-} \\ \psi & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

soit :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_{0-} \cos(\omega t - kx) - y_{0-} \cos(\omega t + kx) \\ &= 2y_{0-} \sin \omega t \sin kx \end{aligned}$$

Q2. On impose un noeud aux chaque extrémités de la corde. Il vient que les modes propres possibles doivent avoir une longueur d'onde compatibles (Figure 1).

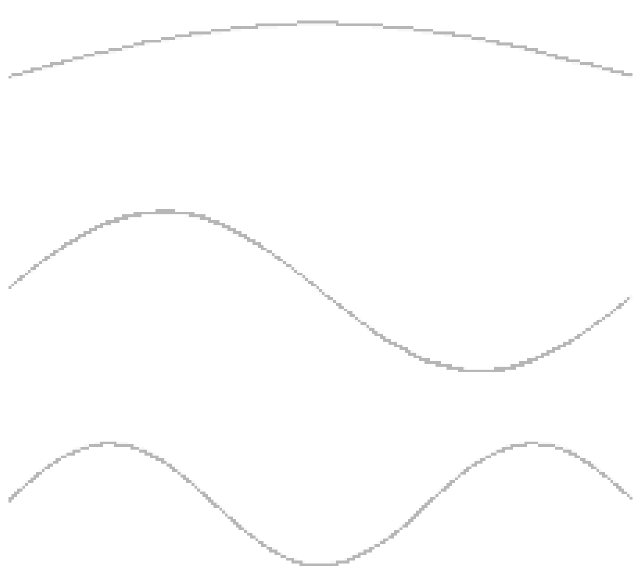

FIGURE 1 – Modes propres possibles

On a vu que les noeuds sont séparés de $\lambda/2$. Il vient que la longueur d'onde la plus grande possible est donc telle que : $\lambda/2 = L \Longrightarrow \lambda = 2L$ (courbe du haut sur la Figure 1). Ce sera le **fondamental**.

De manière général, il faut que $L = n\frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Les longueurs d'onde sont bien quantifiées :

$$\begin{cases} \lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ f_n &= \frac{nc}{2L} \end{cases} \tag{3}$$

avec c la célérité des ondes sur la corde.

Q3. On a : $y(x,t) = 2y_{0-} \sin \omega t \sin kx$ et $y(L,t) = 0$ pour tout t soit : $\sin kL = 0 \Longrightarrow kL = n\pi$. Il vient donc :

$$\begin{cases} k_n &= \frac{n\pi}{L} \\ \lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ f_n &= \frac{nc}{2L} \end{cases} \tag{4}$$