Corriges

♥ Méthode .1: Calcul d'une tension

Compétence : Savoir calculer une tension entre deux points/ un potentiel en un point/ l'énergie potentielle en un point connaissant le champ électrique.

On considère une distribution de champ électrique où en tout point M :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho}{3} r \vec{e}_r & \text{si r} < \text{R} \\ \frac{\rho R^3}{3r^2} \vec{e}_r & \text{si r} > \text{R} \end{cases} \tag{1}$$

où r et $\vec{e}_r$ correspondent à la coordonnées et au vecteur radial en coordonnées sphériques.

I.1 Q1. Déterminer la tension U_{PO} entre un point P de coordonnées r, θ, ϕ et le centre O du repère puis le potentiel $V(P)$ au point P en prenant $V(0) = 0$.

Q2. On considère un électron qui se déplace dans le champ électrique précédent. Représenter $E_p(r)$ l'énergie potentielle de l'électron.

Corrigé: Calcul d'une tension

Q1. Méthode 1 : Rappel : La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ peut se réécrire : $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM}$ donc :

$$\begin{aligned} U_{PO} = V(P) - V(O) &= \int_O^P dV \\ &= -\int_O^P \vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} \\ &= -\int_O^P \vec{E} \cdot \left(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi\right) \\ &= -\int_{r=0}^{r} E(r')dr' \end{aligned}$$

avec $E(r')$ la coordonnées de $\vec{E}$ suivant $\vec{e}_r$.
On doit donc distinguer deux cas suivant les valeurs de r.

- ⋆ Si $r < R$:

$$\begin{aligned} U_{PO} &= -\int_{r=0}^{r} \frac{\rho}{3} r' dr' \\ &= -\frac{\rho}{6} r^2 \end{aligned}$$

- ⋆ Si $r > R$:

$$\begin{aligned} U_{PO} &= -\int_{r=0}^{R} \frac{\rho}{3} r' dr' - \int_{r=0}^{r} \frac{\rho R^3}{3r'^2} dr' \\ &=_{\dots} -\frac{\rho}{2} R^2 + \frac{\rho R^3}{3r'} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\boxed{V(P) = U_{PO} - V(0) = U_{PO} = \begin{cases} -\frac{\rho}{6} r^2 & \text{si r} < \text{R} \\ -\frac{\rho}{2} R^2 + \frac{\rho R^3}{3r'} & \text{si r} > \text{R} \end{cases}} \tag{2}$$

Méthode 2 : On explicite le gradient en coordonnées cylindriques :

$$-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \phi}\vec{e}_\phi = E(r)\vec{e}_r$$

On retrouve que V ne dépend que de r et :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dr}} = -E(r) \Longrightarrow U_{PO} = -\int_{r=0}^{r} E(r')dr$$

La suite du calcul est identique. On peut aussi calcul $V(r)$ d'abord par primitivation en choisissant la constante d'intégration telle que $V(0) = 0$ puis ensuite $U_{PO} = V(r) - V(0)$. **Attention, dans ce cas, il faut veiller aux différentes constantes d'intégration pour V soit une fonction continue.**

Q2. $\boxed{E_p(r) = -eV(r)}$

Si l'on veut étudier le mouvement de l'électron, on peut remarquer que c'est un mouvement à force centrale. Il convient alors de passer à un système de coordonnées cylindriques, connaissant le moment cinétique, et d'utiliser une énergie potentielle effective.

♥ Méthode .2: Accélération dans un champ électrique

Compétence : Etablir la vitesse d'une charge accélérée par un champ $\vec{E}$ au moyen d'un TEM. On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ électrique $\vec{E}(M)$ dont le potentiel électrostatique associé est noté $V(M)$.

La charge initialement immobile au point A doit être accélérée par le champ jusqu'à un point B.

I.1 Q1. Justifier que la seule donnée de la tension $U = U_{AB}$ permet de déterminer la vitesse de la particule en B et que le signe de q impose le signe de U_{AB}. Déterminer au passage la vitesse v (en norme) de la charge en B.

Q2. Exprimer l'énergie cinétique de la charge $q = -e$ une fois en B en eV (électron-volt) pour $|U| = 1000V$.

Corrigé: Accélération dans un champ électrique

Q1. On applique le théorème de l'énergie mécanique à la charge q entre les points A et B.

La seule action est celle du champ électrique qui dérive d'une énergie potentielle donc l'énergie mécanique est conservée :

$$\begin{aligned} 0 &= E_m(B) - E_m(A) \\ 0 &= \frac{1}{2}mv^2 + qV_B - (qV_A) \\ v &= \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}} \end{aligned}$$

La vitesse en B ne dépend donc bien que de la tension U_{AB} et pas du chemin parcouru ni de la structure du champ électrique.

De plus, pour que v soit défini, il faut que $qU_{AB} > 0$ donc la charge et la tension doivent être de même signe. [a] *On retrouve l'idée que la charge est attirée vers les zones d'énergies potentielles les plus faibles, soit $qV_B < qV_A$.*

Q2. $E_c = qU$ soit $E_c = 1000eV = 1keV$.

a. Attention, cette conclusion dépend de l'orientation de la tension.

♥ Méthode .3: Déviation par un champ électrique uniforme.

On travaille par la suite dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et on lui associé un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On considère un jet d'électrons préalablement accélérés par une tension U. Ils possèdent alors une vitesse notée $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$.

Ils pénêtrent alors dans une zone entre $x = 0$ et $x = d$ où reigne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{e}_y$ puis uns fois sortie de cette zone continuent entre $x = d$ et $x = d + D$ jusqu'à un écran situé dans le plan O_2yz avec $O_2(d + D, 0, 0)$ dans une zone vide de champ.

I.1 Q1. Déterminer la deflexion δ c'est-à-dire la distance O_2A entre O_2 et le point A d'impact du jet sur l'écran.

Corrigé: Déviation par un champ électrique uniforme

Q1. On applique cette fois un PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire dans la zone de déviation par le champ électrique :

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = 0 \\ m\ddot{y} & = -eE_0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} & = v_0 \\ \dot{y} & = -\frac{e}{m}E_0t \end{cases}$$
$$\begin{cases} x & = v_0t \\ y & = -\frac{e}{2m}E_0t^2 \end{cases}$$

Il vient en $x = d$ (soit $t = d/v_0$) :

$$x = d$$
$$y = -\frac{e}{2mv_0^2}E_0d^2$$
$$\dot{x} = v_0$$
$$\dot{y} = -\frac{e}{mv_0}E_0d$$

Pour $x > d$, il n'y a plus aucune force, donc l'électron possède un mouvement rectiligne uniforme et :

$$x(t) = v_0t$$
$$y(t) = -\frac{e}{2mv_0^2}E_0d^2 - \frac{e}{mv_0}E_0d(t - \frac{d}{v_0})$$

soit en $x = D$ (soit $t = \frac{d+D}{v_0}$) :

$$\delta = -y(D) = \frac{e}{2mv_0^2}E_0d^2\left(1 + \frac{2D}{d}\right) \tag{3}$$

♥ Méthode .4: Cas d'un champ magnétique uniforme

TOUT l'exercice constitue un exercice de cours qui doit être connu et dont les conclusions sont à connaître.

On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme.

A $t = 0$, la particule possède une vitesse $\overrightarrow{v}_0$.

I.1 **Q1.** Montrer que si $\overrightarrow{v}_0 \perp \overrightarrow{B}$ alors la trajectoire de la particule est plane.

Q2. Montrer que, dans les conditions précédentes, la trajectoire est un cercle d'axe parallèle à $\overrightarrow{B}$ parcouru à vitesse uniforme. Préciser le sens de rotation autour du champ magnétique. Déterminer alors le rayon du cercle et la vitesse angulaire de rotation (appelée *pulsation cyclotron*).

Corrigé: Cas d'un champ magnétique uniforme

On étudie le système {charge} dans le référentiel du laboratoire supposé gallliéen. La seule action qui s'applique est celle du champ magnétique dont la force est : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

Q1. Il vient que la force est nécessairement perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, il n'y a donc pas d'accélération colinéaire au champ magnétique et si initialement, la vitesse est nulle dans cette direction, elle va le rester : le mouvement sera alors contenu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.

Q2. La trajectoire étant plane, on peut utiliser la base de Frenet.

Caractère uniforme : On peut remarquer que $\overrightarrow{F}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse donc uniquement normale au mouvement. Il vient :

$$a_T = \left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| = 0$$

donc la norme de la vitesse est constante : le mouvement est uniforme à la vitesse $v = v_0$.

Rayon et trajectoire circulaire : De plus :

$$\begin{aligned} ma_N &= m\frac{v_0^2}{R} = |qv_0B| \\ R &= \left|\frac{mv_0}{qB}\right| \end{aligned}$$

On remarque que le rayon de courbure est constant, la trajectoire est circulaire.

On obtient aussi la vitesse de rotation :

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \left|\frac{qB}{m}\right| \tag{4}$$

Sens de rotation : Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération et donc la résultante des forces est centripète. Ici $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$ donc $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{qB})$ forme un trièdre directe. Il vient (Figure 1) que la rotation se fait en cohérence avec $\overrightarrow{-qB}$.

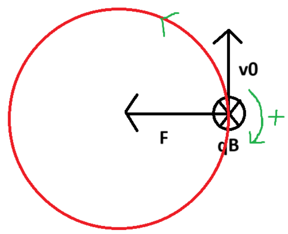

FIGURE 1 – Sens de rotation de la particule. (Le sens des angles cohérents avec $\overrightarrow{qB}$ est représenté par la flèche "+".)

Méthode 2 : (A n'utiliser QUE SI l'on sait déjà que la trajectoire est circulaire.) Si le caractère circulaire a déjà été démontré ou est admis, on peut alors directement choisir un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz parallèle à $\overrightarrow{B}$ et de centre O le centre du cercle. On utilise alors l'accélération en coordonnées circulaire ($\overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{e}_\theta$) :

$$-mR\dot{\theta}^2 = qv_0 B$$
$$mR\ddot{\theta} = 0$$

La seconde équation montre que $\dot{\theta} = cste$: le mouvement est uniforme.
Si $q > 0$, alors $v_0 < 0$: on tourne dans le sens des θ décroissant sans en cohérence avec $-\overrightarrow{e}_z = -q\overrightarrow{B}$.
Si $q < 0$, alors $v_0 > 0$: on tourne dans le sens des θ croissant sans en cohérence avec $\overrightarrow{e}_z = -q\overrightarrow{B}$.
La première équation, avec $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$ donne $\dot{\theta} = -\frac{qB}{m}$. On en déduit R.