Corriges

♥ Méthode .1: Tester la validité du modèle incompressible

Dans le cas de l'eau, on peut donner le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = 5 \times 10^{-10}\mathrm{Pa}^{-1} \tag{1}$$

où l'indice T signifie que la température est maintenue constante.

VI.2 Q1. Rappeler la valeur numérique de la masse volumique de l'eau

Q2. Déduire du coefficient χ_T une relation entre la variation $d\rho$ et la variation dP.

Q3. En déduire une estimation de la variation relative $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ pour une variation d'altitude Δz en considérant que le champ de pression suit le modèle d'un fluide incompressible.

Q4. Estimer la variation d'altitude nécessaire pour observer une variation de 1% de la masse volumique. Commenter l'hyptohèse de fluide incompressible dans le cas de l'eau.

Corrigé: Tester la validité du modèle incompressible

Q1. La masse volumique de l'eau (à connaître) est $\rho_0 = 10^3\mathrm{kg.m}^3$.

Q2. Sous l'hypothèse isotherme, la dérivée partielle devient une dérivée droite.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P} = \chi_T$$
$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dP$$

Q3. Par intégration :

$$\rho = \rho_0 e^{\chi_T \Delta P}$$
$$\rho = \rho_0 e^{\chi_T \rho_0 g \Delta z}$$
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = e^{\chi_T \rho_0 g \Delta z} - 1$$
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \approx \chi_T \rho_0 g \Delta z$$

Q4.

$$\Delta z \approx \frac{1}{\chi_T \rho_0 g}\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$
$$\Delta z \approx 10^4\mathrm{m}$$

♥ Méthode .2: Utiliser l'équation barométrique

Le baromètre le plus courant est le baromètre de Torricelli. Il s'agit d'un tube en U fermé à une extrémité et l'autre extrémité est ouverte et à l'air libre. Du côté fermé, le mercure est surmonté par du vide en première approximation (P=0).

VI.2 Q1. Exprimer la différence de hauteur h entre les deux surfaces libres du mercure.

Q2. On donne la masse volumique du mercure $\rho_{Hg} = 13,5 \times 10^3$kg.m^{-3}. Justifier l'utilisation du mercure plutôt que de l'eau pour faire un baromètre.

Q3. Expliquer la définition de l'unité de pression mmHg (millimètre de mercure) : 1mmHg = 133, 3Pa.

Corrigé: Utiliser l'équation barométrique

On retiendra de cet exercice l'utilisation du fait que la pression est la même en tout point isoaltitude.

Q1. A la surface libre en contact avec l'atmosphère règne une pression P_0 = 1atm ≈ 10^5Pa. De l'autre côté, on assimile la pression à une pression nulle $P = 0$. Le fluide étant au repos, on peut appliquer l'équation de la statique des fluides et puisqu'on fait l'hypothèse d'un fluide incompressible, on applique l'équation barométrique (on a orienté z vers le bas et pris la profondeur nulle à la hauteur de la surface de pression nulle) :

$$P(z = h) - P(z = 0) = \rho g h$$

Q2. On observe que la hauteur d'un baromètre à eau serait bien trop importante.

$$\Longrightarrow h = \frac{P_0}{\rho g}$$
$$\Longrightarrow h_{mercure} = 760mm$$
$$\Longrightarrow h_{mercure} = 10m$$

Q3. La différence de pression correspondant à une hauteur de mercure de 1mm est 133Pa, ce qui permet de définir l'unité de pression mmHg.

♥ Méthode .3: Etablir des ordres de grandeur pour une atmosphère

On considère une atmosphère isotherme d'un gaz parfait.

VI.2 Q1. Donner une expression d'une altitude caractéristique H qui gouverne l'échelle sur laquelle la pression varie notablement.

Q2. Estimer H pour de l'air à la température $T = 273$K. Quelle hypothèse pourra être fait pour des gaz enfermée dans une enceinte de taille "normale" ?

Q3. Déterminer le champ de masse volumique. En déduire par intégration la masse totale de l'atmosphère (on supposera pour simplifier le calcul que la terre est plate !).

Q4. On donne ci-dessous le profil de température et le profil de la masse d'atmosphère contenue sous l'altitude z. Commenter la validité du modèle isotherme.

images/statique/thermo_statique_complement_fluide.jpg

FIGURE 1 – Profil de température dans l'atmosphère

Corrigé: Etablir des ordres de grandeur pour une atmosphère

Q1. On observe que la pression décroit suivant une exponentielle décroissante. On va considérer que la pression a varier sur quelques H où H est la hauteur caractéristique associées à l'exponentielle, soit $H = \frac{RT}{Mg}$.

Q2. Pour $M = 29g/mol$, il vient $H \sim 7800$m. Pour des enceintes de tailles normales (au maximum quelques mètres), on peut considérer que que la **pression au sein d'un gaz est uniforme**.

Q3. La relation des gaz parfaits donne une expression de la masse volumique. On intégrera entre 0 et l'infini pour obtenir une estimation de la masse de l'atmosphère.

Q4. On observe que le profil de masse volumique semble être cohérent mais les valeurs numériques ne le sont pas.

Quant au profil de température, le caractère constant est largement criticable. On utilise souvent un profil de température linéaire.

♥ Méthode .4: Reconnaître un facteur de Boltzmann

VI.2 Q1. Montrer que les particules d'airt dans l'atmosphère isotherme suivent une loi de Boltzmann. On précisera ce que vaut E ici.

Q2. Quels sont les états énergétiques les plus peuplés ? Est-ce attendus ?

Q3. Si $k_B T$ augmente, comment évolue le peuplement des états énergétiques ? Comment appelle-t-on le terme $k_B T$?

Q4. Citer un autre domaine où le facteur de Boltzmann apparaît.

Corrigé: Reconnaître un facteur de Boltzmann

Q1. ICi, la grandeur énergétique est l'énergie potentielle $E_p = M_p g z$ pour une particule de masse $M_P = M/N_A$. Les particules possédant une énergie entre E_p et $E_p + dE_p$ sont donc les particules situées entre les altitudes $z = \frac{E_p}{M_p g}$ et $z' = z + dz$ avec

$$dz = \frac{dE_p}{M_p g}$$

Comme pour le calcul de la masse, on peut calculer la quantité de matière présente dans une tranche d'épaisseur dz et de section S :

$$\begin{aligned} dN(z) = dn(z)N_A &= \frac{dm(z)}{M}N_A \\ &= \frac{\rho(z)Sdz}{M}N_A \\ &= \frac{P(z)Sdz}{RT}N_A \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{cases} dN(z) & = A\exp(-\frac{M_p g z}{k_B T})dz \\ dN(E_p) & = A_1\exp(-\frac{E_p}{k_B T})dE_p \end{cases} \tag{2}$$

Q2. L'exponentielle est décroissante : ce sont les états les moins énergétiques qui sont les plus peuplés. C'est cohérent avec la mécanique classique où un système tend à se diriger vers son état de plus faible énergei.

Q3. Mais ici les états plus énergétiques peuvent être peuplées et ils le seront d'autant plus que la température augmente. $k_B T$ représente **l'agitation thermique.**

Q4. En chimie, la loi d'Arhéninus possède un terme similaire et découle d'un facteur de Boltzmann.

♥ Méthode .5: Calculer par intégration

On considère un barrage assimilable à un demi-cylindre de hauteur H et de rayon R. L'eau est retenue à "l'intérieur" du demi-cylindre.

VI.2 **Q1.** Calculer la résultante des forces de pression exercée sur le barrage.

Q2. Calculer le moment résultant de l'action de pression de l'eau sur le barrage au point A situé à $z = 0$ au milieu de demi-cercle.

On prendra l'origine des **profondeur** z à la surface de l'eau où l'atmosphère supérieur y impose une pression P_0. Faire l'application numérique pour un barrage de 10m de haut de rayon 30m.

Corrigé: Calculer par intégration

Choix du système de coordonnées : La surface de contact étant un cylindre, on va utiliser un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz l'axe du cylindre.

Le calcul de la résultante des forces de pression se fait par calcul de l'intégrale :

$$\iint_{M\in\Sigma} P\overrightarrow{d^2S}$$

Les étapes sont :

1. *Expliciter le vecteur surface $\overrightarrow{d^2S}$*
2. *Expliciter le champ de pression $P(M)$ grâce aux études des paragraphes précédents.*
3. *Expliciter les bornes des deux intégrales*

4. Calculer explicitement les deux intégrales (en les "séparant" dans le cadre du programme.)

Q1. Vecteur surface : *Sur un petit élément de surface du barrage, les coordonnées qui varient sont l'angle θ (dont le déplacement élémentaire correspondant est $Rd\theta$) et la hauteur z (dont le déplacement élémentaire correspondant est dz).*

La surface vaut donc $d^2S = Rdzd\theta$ et le vecteur normale est $\overrightarrow{e_r}$ donc :

$$\overrightarrow{d^2S} = Rdzd\theta\overrightarrow{e_r}$$

L'orientation de $\overrightarrow{d^2S}$ est telle que :

$$\overrightarrow{d^2F} = P(z)Rdzd\theta\overrightarrow{e_r}$$

Détermination du champ de pression : On utilise l'équation barométrique.

$$P(z) - P(z=0) = P(z) - P_0 = \rho gz \Longrightarrow P(z) = P_0 + \rho gz$$

Expression de l'intégrale et des bornes : L'intégrale s'écrit donc [a] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \iint_{M\in surface} PRdzd\theta\overrightarrow{e_r} \\
&= \int_{z=0}^{z=H}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} PRdzd\theta\overrightarrow{e_r} \\
&= \int_{z=0}^{z=H}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} PR\left(\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\right)dzd\theta
\end{aligned}$$

On remarque que ***le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ va varier durant l'intégration (il dépend de θ)****, on l'a donc projeté sur une base cartésienne.*

Calcul de l'intégrale : Avant de se lancer dans le calcul, on va utiliser les symétries. Ici la surface de contact est **symétrique par rapport à au plan xOy** de sorte qu'on attend que **la composante suivant $\overrightarrow{e_x}$ sera nulle** (on pourra s'en convaincre en la calculant). On va donc projeter la résultante suivant $\overrightarrow{e_y}$ et ne calculer que cette composante :

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e_y} = \int_{z=0}^{z=H}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(P_0 + \rho gz)R\sin\theta dzd\theta$$

L'intégrale est **à variable séparable, c'est-à-dire que la fonction peut être écrite comme un produit de deux fonctions d'une variable z et θ** de sorte que l'intégrale double se réécrit comme le produit de deux intégrales simples :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e_y} &= R\left(\int_{z=0}^{z=H}(P_0 + \rho gz)dz\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta d\theta\right) \\
&= R\left(P_0H + \frac{\rho gH^2}{2}\right)(2) \\
&= R\left(2P_0H + \rho gH^2\right)
\end{aligned}$$

Q2. ***On ne peut calculer le moment résultant à partir de la force résultante***. *Il faut revenir au calcul des moments des actions ponctuelles puis sommer. Ici*[b] *:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM_{/A}}(M) &= \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{d^2F}(M)\\ &= \left(-R\vec{e}_y + r_M\vec{e}_r + z_M\vec{e}_z\right) \wedge P(z)Rdzd\theta\vec{e_r}\\ &= \left(R^2P(z)\cos\theta\vec{e}_z + z_MRP(z)\vec{e}_\theta\right)dzd\theta\\ &= \left(R^2P(z)\cos\theta\vec{e}_z + z_MRP(z)\cos\theta\vec{e}_y - z_MRP(z)\sin\theta\vec{e}_x\right)dzd\theta\end{aligned}$$

La présence du produit vectoriel (ce qui fait du moment un "pseudo-vecteur") rend plus difficile l'utilisation des symétries ici. C'est pourquoi, il faut calculer chaque composante. S'entraîner à montrer que les composantes suivant z et y sont nulles (intégrale d'un cosinus sur $[0;\pi]$), celle suivant x donne(...) :

$$\overrightarrow{dM_{/A}}(M) = -\left(RP_0H^2 + \frac{2R\rho gH^3}{3}\right)\vec{e}_x$$

a. les bornes sont imposées par la forme du barage

b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -R\vec{e}_y + r_M\vec{e}_r + z_M\vec{e}_z$

VI.2

♥ Méthode .6: Utiliser le théorème d'Archimède en statique

On veut calculer le volume émergé de l'iceberg qu'on suppose de masse m répartie uniformément et de volume V. On suppose de plus que l'air et l'eau sont pour les dimensions considérées des fluides homogènes.

On donne : $\rho_{glace} = 0,9\rho_{eau}$ et $\rho_{air} \ll \rho_{glace}$.

Corrigé: Utiliser le théorème d'Archimède en statique

Notons V_i le volume immergé dans l'eau et V_e le voume émergé (donc immergé dans l'air). Les forces qui s'appliquent sur l'iceberg sont (on a pris un axe Oz vertical vers le haut) :

- ⋆ son poids : $\vec{P} = -\rho_{glace}(V_i + V_e)g\vec{e_z}$
- ⋆ la poussée d'Archimède associée à l'eau : $\overrightarrow{\Pi_{A,eau}} = \rho_{eau}V_ig\vec{e_z}$
- ⋆ la poussée d'Archimède associée à l'air : $\overrightarrow{\Pi_{A,air}} = \rho_{air}V_eg\vec{e_z}$

Le bilan statique s'écrit : $\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_{A,eau}} + \overrightarrow{\Pi_{A,air}} = \vec{0}$ soit :

$$\begin{aligned}&(\rho_{eau}V_i + \rho_{air}V_e - \rho_{glace}(V_i + V_e))g = 0\\ \Longrightarrow\ &\frac{V_i}{V_e} = \frac{\rho_{glace} - \rho_{air}}{\rho_{eau} - \rho_{glace}} \approx 9\end{aligned}$$

♥ Méthode .7: Théorème d'Archimède sur un système en mouvement

On s'intéresse à un ballon de volume V constant gonflé avec un gaz plus léger que l'air atmosphérique. Dans ce modèle, nous supposerons que le volume V est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer que la masse volumique de l'air qui entoure le ballon est constante. On la note : ρ_{air} On note m la masse totale du ballon et (ρ sa masse volumique moyenne, c'est-à-dire que $\rho = \frac{m}{V}$, il faut compter dans m la masse du gaz ET de l'enceinte).

VI.2 **Q1.** Etablir l'équation différentielle du mouvement du ballon en supposant le théorème d'Archimède applicable.

Q2. On suppose qu'à une altitude z_0, le ballon est à l'équilibre. Faut-il augmenter ou diminuer la masse volumique du ballon pour monter ? Justifier qu'on chauffe alors le gaz à l'intérieur pour s'élever.

Q3. Pour descendre, on ouvre en général une soupape qui libère du gaz. Justifier la manoeuvre.

Corrigé: Théorème d'Archimède sur un système en mouvement

Q1. On est dans le cas où l'on assimile le champ de l'air à celui qu'il aurait au repos ce qui permet d'appliquer le théorème d'Archimède.

$$m\ddot{z} = (\rho_{air} - \rho)\, gV$$

Q2. Il faut évidemment diminuer la masse volumique du ballon pour qu'il monte. En considérant le volume du ballon comme fixe (le ballon est tendu) et sa pression comme fixe (elle es imposée par la pression extérieure), la loi des gaz parfait montre qu'une diminution de la masse est associée à une augmentation de température.

Q3. Cette fois-ci, la diminution de matière entraîne une diminution du volume (T et P constants) donc une augmentation de la masse volumique (à cause de la masse de la nacelle), ce qui permet de faire redescendre le ballon.