Corriges

Corrigé: Ordres de grandeur

V.1 Q1. $I = \frac{DB}{\mu_0} \sim 10^4 A$!

Q2. $N = \frac{DB}{\mu_0 I} = 10^4 fils$ en moins d'un centimètre !

Corrigé: Calcul d'intensité

V.1 Q1. On peut directement utiliser la relation de flux dans le cas d'une distribution volumique :

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2 S} \\ &= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} j_0 r dr d\theta \\ &= \pi R^2 j_0 \end{aligned}$$

Q2. Cette fois la relation de flux ne fonctionne pas [a]. Si l'on considère une ligne de longueur L, les charges qui qui la traversent pendant un temps dt doivent se situer ($\vec{j}_S$ est ici perpendiculaire à la ligne L) dans un rectangle de largeur L et de longueur vdt avec v la vitesse des charges. Soit n_S la densité surfacique des porteurs de charge, le débit de charge est donc : $dq = qn_S vLdt = j_s Ldt$. Il vient :

$$I = j_s L \tag{1}$$

a. On pourra d'ailleurs remarquer que $\vec{j}_S$ est homogène à une intensité divisée par une **longueur**.

Corrigé: Symétries des champs magnétiques

On utilise pour les 4 premières distribution un système de coordonnée cylindrique d'axe Oz soit suivant I (fil infini, cylindre infini) soit suivant l'axe de la spire/bobine en cohérence avec l'intensité I.

Soit un M de l'espace :

V.1 Q1. Fil infini : Le plan Π_1 passant par M et contenant le fil (soit le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ [a]) est un plan de symétrie des courants. *Le champ magnétique est donc perpendiculaire à ce plan : il est donc suivant $\vec{e}_\theta$:*

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$$

On remarque qu'on déjà la meilleure orientation possible de $\vec{B}(M)$ (un seul vecteur) donc trouver d'autres plan de symétrie ou d'antisymétrie n'est pas utile. On pourra néanmoins remarquer que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie des courants donc le champ magnétique y est inclus.

La distribution de courant est de plus invariance par rotation autour de Oz (variation de θ) et par translation suivant l'axe Oz (variation de z), donc $B_\theta(r,\theta,z)$ ne dépend ni de θ, ni de z. On a donc au final comme structure :

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta \tag{2}$$

Q2. Spire : Le plan Π_1 passant par M et contenu Oz (soit le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$) est un plan d'antisymétrie des courants. *Le champ magnétique est donc inclus dans ce plan :* il n'a donc pas de composante suivante $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + B_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

La distribution de courant est de plus invariance par rotation autour de Oz (variation de θ), donc les composantes du champ ne dépendent pas de θ. On a donc au final comme structure :

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_z(r,z)\vec{e}_z \tag{3}$$

Cas d'un point sur l'axe : Si M est sur l'axe ($r = 0$), alors $\vec{B}$ est inclus dans tous les plans contenant l'axe car ce sont tous des plans d'antisymétrie des courant. Il vient que le champ est suivant Oz :

$$\vec{B}(M(r = 0,\theta,z)) = B_z(r = 0,z)\vec{e}_z \tag{4}$$

Cas d'un point dans le plan de la spire : Si M est dans le plan de la spire ($z = 0$), comme c'est un plan de symétrie des courants, alors $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan. Il vient que le champ est suivant Oz :

$$\vec{B}(M(r,\theta,z = 0)) = B_z(r,z = 0)\vec{e}_z \tag{5}$$

Supplément : Le fait que le plan contenant la spire soit un plan de symétrie des courants implique aussi que $B_r(r,z)$ est une fonction *impaire* en z et $B_z(r,z)$ est une fonction *paire* en z.

Q3. Solénoide infini : Le plan Π_1 passant par M et perpendiculaire à Oz (soit le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$) est un plan de symétrie des courants. *Le champ magnétique est donc perpendiculaire à ce plan :* il est donc suivant $\vec{e}_z$:

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

On remarque qu'on déjà la meilleure orientation possible de $\vec{B}(M)$ (un seul vecteur) donc trouver d'autres plan de symétrie ou d'antisymétrie n'est pas utile. On pourra néanmoins remarquer que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants donc le champ magnétique y est inclus.

La distribution de courant est de plus invariance par rotation autour de Oz (variation de θ) et par translation suivant l'axe Oz (variation de z), donc $B_\theta(r,\theta,z)$ ne dépend ni de θ, ni de z. On a donc au final comme structure :

$$\vec{B}(M(r,\theta,z)) = B_z(r)\vec{e}_z \tag{6}$$

Q4. Cylindre infini : Les symétries et invariances sont

---

a. On remarquera que ce plan DOIT **passer par le point M où l'on veut déterminer l'orientation du champ magnétique**. Il est conseillé de s'entraîner à décrire le plan à l'aide des vecteurs de la base pour trouver rapidement les composantes du champ magnétique qui s'annulent.

V.1

Corrigé: Champ magnétique tournant

On note $\overrightarrow{e}_x$ l'axe de la première bobine et $\overrightarrow{e}_y$ l'axe de la seconde de sorte que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}_1 &= \mu_0 n I_0 \cos\omega t \overrightarrow{e}_x \\ \overrightarrow{B}_2 &= \mu_0 n I_0 \cos\left(\omega t + \pi/2\right) \overrightarrow{e}_y \\ &= -\mu_0 n I_0 \sin\left(\omega t\right) \overrightarrow{e}_y\end{aligned}$$

Le champ magnétique total résulte de leur superposition :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 n I_0 \cos\omega t \overrightarrow{e}_x - \mu_0 n I_0 \sin\left(\omega t\right) \overrightarrow{e}_y \tag{7}$$

On remarque qu'on plaçant l'origine du vecteur au point O [a], l'autre extrémité du vecteur décrit un cercle de rayon $\mu_0 n I_0$ avec une vitesse angulaire $-\omega$: **on a donc bien créé un champ magnétique tournant.** On peut d'ailleurs définir un repère cylindrique d'axe Oz et le vecteur champ magnétique pour s'écrire alors :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 n I_0 \overrightarrow{e}_r$$

a. Cette description est purement visuelle mais non nécessaire.