

### ♥ Méthode .1: Tracé qualitatif des rayons - Cas 1

On considère le cas où  $n_1 < n_2$ .

IV.4 Q1. Le rayon réfracté s'éloigne-t-il ou se rapproche-t-il de la normale ?

Q2. Justifier que l'angle réfracté ne peut prendre qu'une gamme de valeur limitée dans le plan d'incidence. On notera  $i_0$  l'angle réfracté maximal ou *angle de réfraction limite*.

### Corrigé: Tracé qualitatif des rayons - Cas 1

Q1. Remarquons que  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$ . Or sur  $[-\pi; \pi/2]$ , la fonction sinus est croissante donc  $i_1 > i_2$ . Il vient qu'au passage d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale.

Q2. L'étude précédente montre que quand l'angle d'incidence atteint  $\pi/2$  (on parle **d'incidence rasante**), l'angle réfracté est encore inférieur l'angle droit. Il apparaît que les gammes d'angles en sortie sont limitées. On atteint pas toutes les valeurs entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . Plus précisément, les gammes valeurs atteintes sont :

$$i_2 \in \left[ -\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right); \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \right]$$

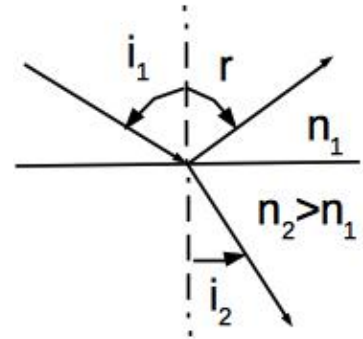


FIGURE 1 – Vers un milieu plus réfringent

### ♥ Méthode .2: Tracé qualitatif des rayons - Cas 2

On considère le cas où  $n_2 < n_1$ .

IV.4 Q1. Le rayon réfracté s'éloigne-t-il ou se rapproche-t-il de la normale ?

Q2. Justifier que l'angle réfracté va atteindre une réfraction rasante (égale à  $\pm\pi/2$  pour un angle d'incidence strictement inférieure à  $\pm\pi/2$ . On notera  $i_0$  la valeur limite de l'angle d'incidence).

Q3. Que se passe-t-il si l'angle d'incidence est supérieure à  $i_0$  ?

Q4. Comparer la valeur de  $i_0$  trouvée ici à celle de l'exercice précédent. Etait-ce attendu ?

### Corrigé: Tracé qualitatif des rayons - Cas 2

Q1. Remarquons que  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1$ . Or sur  $[-\pi; \pi/2]$ , la fonction sinus est croissante donc  $i_1 < i_2$ . Il vient qu'au passage d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent, le rayon réfracté s'éloigne de la normale.

Q2. L'étude précédente montre que quand l'angle de réfraction atteint  $\pm\pi/2$ , l'angle d'incidence est encore inférieur l'angle droit. L'angle limite d'incidence est  $i_0 = \pm \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .

Q3. Si l'angle d'incidence est supérieure à  $i_0$ , on observe expérimentalement qu'il n'y a pas de rayon réfracté. On parle de {réflexion totale} : toute la lumière est réfléchie.

Q4. Supposons que la lumière arrive dans l'autre sens (depuis  $n_2$ ) avec un angle d'incidence  $i_2 = \pi/2$ ,

l'exercice précédent montre que l'angle *réfracté* (dans  $n_1$ ) sera  $i_1 = i_0$ . Or le principe de retour inverse implique qu'en inversant le sens de la lumière, le trajet est le même. Il est donc attendu qu'on retrouve la même valeur  $i_0$  dans le deux cas limites.

### ♥ Méthode .3: Utiliser les lois de Snell-Descartes

On considère une piscine remplie d'eau d'indice de réfraction  $n_{eau} = 1.3$  sur une profondeur de  $h = 2.0m$ . Elle est entièrement éclairée en journée par le soleil, assimilé à un point lumineux situé à l'infini. On note  $\theta$  l'angle entre l'axe Soleil-piscine et la verticale et considère que le problème est plan.

**IV.4 Q1.** Représenter sur un schéma plusieurs rayons lumineux issus du soleil et arrivant au fond de la piscine.

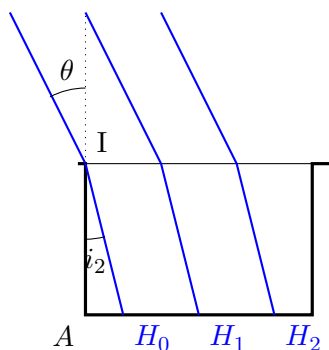
**Q2.** Déterminer la longueur du fond de la piscine qui n'est pas éclairée par le soleil. Faire l'application numérique pour  $\theta = 30^\circ$  et lorsque le Soleil est au plus bas.

### Corrigé: Utiliser les lois de Snell-Descartes

*Remarques en préambule. Dans un exercice de physique, il est important de réfléchir à l'énoncé avant de se lancer :*

- ★ *Modélisation : la source est "un point lumineux situé à l'infini" : on la modélise donc par un faisceau de rayons parallèles dont l'angle avec la verticale est donné par l'énoncé.*
- ★ *Utilisation des connaissances : un dioptre entre l'air (indice 1) et l'eau (d'indice  $n_{eau}$ ) implique un phénomène de réfraction et le rayon réfracté se rapproche de la normale.*
- ★ *Lecture globale : Ici la première question sert d'aide pour comprendre comment traiter la deuxième : le schéma permettra de situer la zone d'ombre et d'utiliser ensuite la géométrie.*
- ★ *Paramétrage : Pour la seconde question, il est important de noter qu'on va devoir introduire une grandeur (angle réfracté) mais elle devra disparaître du résultat final car ce n'est pas une donnée de l'énoncé. Il est important d'identifier ces grandeurs, ici :  $\theta, h, n_{eau}$  et implicitement  $n_{air} = 1$ . Le calcul doit garder les grandeurs littérales jusqu'au bout sans les remplacer par les valeurs numériques.*

**Q1.** Le faisceau arrivant du Soleil est assimilé à un faisceau de rayons parallèles donc :



*Les parties en italiques ne sont pas utiles à la rédaction, elles expliquent les étapes du raisonnement.*

**Q2. Identification de la grandeur cherchée :** On remarque qu'un rayon ne peut arriver dans la zone  $AH_0$  qui reste donc à l'ombre.

*Paramétrage :* On considère le rayon arrivant sur le coin  $I$  de la piscine et terminant en  $H_0$ . On note  $i_2$  l'angle réfracté.

*Mise en équation :* On a :

★ *Géométrie :*  $\tan i_2 = \frac{AH_0}{AH} = \frac{AH_0}{h}$ .

★ *Loi physique :* la loi de Snell-Descartes pour la réfraction en  $I$  :  $n_{air} \sin \theta = n_{eau} \sin i_2$ .

*Résolution : (Il est important de remarquer qu'on a 2 inconnues  $AH_0$  et  $i_2$ . Il faut donc deux équations (qu'on a  $\implies$  on peut résoudre). On ne cherche QUE  $AH_0$ , il est donc inutile d'obtenir complètement  $i_2$  mais on va l'isoler d'abord pour pouvoir l'éliminer.) :*

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n_{eau}}\right) \implies AH_0 = h \tan i_2 = h \tan \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n_{eau}}\right)$$

soit :

$$AH_0 = \frac{h \sin \theta}{\sqrt{n_{eau}^2 + \sin^2 \theta}} \quad (1)$$

Applications numériques : <sup>a</sup>

- ★  $AH_0(\theta = 30^\circ) = 0.7m$
- ★  $AH_0(\theta = 90^\circ) = 1.2m$

a. Bien penser aux chiffres significatifs.

### ♥ Méthode .4: Se placer dans les conditions de Gauss

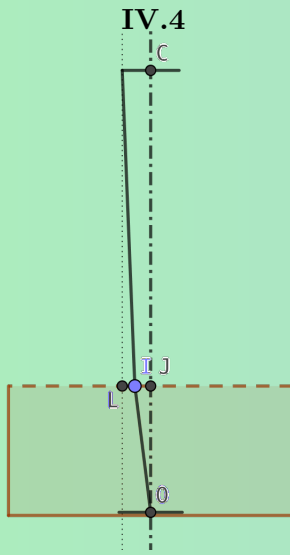


FIGURE 2 – Pièce au fond d'une casserole

On considère une pièce de monnaie de rayon  $R_0$  dont on négligera l'épaisseur posée au fond d'une casserole de hauteur  $H_0$  remplie à ras bord d'eau d'indice  $n_{eau}$ .

L'oeil d'un observateur se trouve à la verticale de centre de la pièce à une hauteur  $H_1$  au dessus de la surface de l'eau.

- Q1.** On appelle  $O$  le centre de la pièce. Déterminer l'équation que vérifie l'ouverture angulaire  $\theta_0$  du faisceau issu du point  $O$  et qui entre dans l'oeil en fonction du rayon de la pupille  $R_1$ .
- Q2.** Estimer l'ordre de grandeurs des angles si  $H_1 = H_0$ . Quelle simplification peut-on faire ?
- Q3.** Justifier dans ces conditions que la pièce de monnaie apparaît plus proche de l'oeil et que le stigmatisme approché est vérifié. Préciser la distance  $d$  à laquelle semble être la pièce pour l'observateur.

### Corrigé: Se placer dans les conditions de Gauss

Contrairement au schéma, le rayon s'écart de la normale au point  $I$ .

- ★ Objectif : On cherche  $\theta_0$ . Les données sont  $H_1, H_0, n_{eau}, R_1$  et  $R_0$ .
- ★ Utilisation des connaissances : On va utiliser les lois de Snell-Descartes pour la réfraction et des propriétés géométriques.
- ★ Paramétrage : On va utiliser la loi de la réfraction en  $I$  et donc paramétrer les angles en  $I$ .

**Q1.** On note  $i_1 = \theta_0$  et  $i_2$  les angles respectivement d'incidence et de réfraction. On a les relations :

$$n_{eau} \sin \theta_0 = n_{air} \sin i_2$$

$$\frac{IL}{\tan i_2} = H_1$$

$$IL + IJ = R_1$$

$$\tan \theta_0 = \frac{IJ}{H_0}$$

Pour rappel, on élimine d'abord les grandeurs inconnues qu'on ne veut pas ( $i_2, IL, IJ$ ) avant de déterminer ce qu'on veut ( $\theta_0$ ). On a ainsi :

$$\begin{aligned} IJ &= H_0 \tan i_1 \implies IL = R_1 - H_0 \tan i_1 \\ IL &= H_1 \tan i_2 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} n_{eau} \sin i_1 &= \sin i_2 \implies \tan i_2 = \tan(\arcsin n_{eau} \sin i_1) \\ R_1 - H_0 \tan i_1 &= H_1 \tan i_2 \end{aligned}$$

soit (après manipulations) :

$$\boxed{(R_1 - H_0 \tan \theta_0) \sqrt{1 - n_{eau}^2 \sin^2 \theta_0} = H_1 n_{eau} \sin \theta_0} \quad (2)$$

**Q2.** La taille de la pupille est de l'ordre du mm (on prendra  $R_1 = 1\text{mm}$ ) et la hauteur de la casserole est de l'ordre de la dizaine de cm. En faisant un schéma respectant les lois de Snell-Descartes, on peut remarquer que  $\theta_0 < \arctan(R_0/(2H_0)) \sim 10^{-2} \text{rad}$ . Il vient que les angles à la normale seront nécessairement petits.

On peut donc faire l'approximation des petits angles (*se placer dans les conditions de Gauss*) soit <sup>a</sup> en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $\theta_0$  <sup>b</sup> :

$$(R_1 - H_0 \theta_0) = H_1 n_{eau} \theta_0 \implies \theta_0 = \theta_0 \approx \frac{R_1}{H_0 + n_{eau} H_1} \quad (3)$$

**Q3.** On cherche le point de d'intersection de rayon sortant (définition du point image). S'il y a stigmatisme approché, alors, il y aura unicité du point quelques soient les rayons choisis, tant qu'on reste dans les conditions de Gauss.

On cherche le point d'intersection des rayons sortants. On connaît un autre : l'axe optique. Cherchons l'intersection de ce rayon (sortant) avec un rayon quelconque d'angle d'incidence  $i_1 < \theta_0$ . Ils divergent, il faut donc chercher l'intersection de leur prolongement virtuel qu'on note B.

En reprenant les mêmes notations que sur le schéma, il vient :

$$JB = \frac{IJ}{\tan i_2} \approx \frac{IJ}{i_2} \approx \frac{IJ}{n_{eau} i_1}$$

comme  $IJ = H_0 \tan i_1 \approx H_0 i_1$ , il vient :

$$\boxed{d = H_1 + IJ = H_1 + \frac{H_0}{n_{eau}}} \quad (4)$$

On peut remarquer que le point d'intersection ne dépend pas de  $i_1$ , donc dans les conditions de Gauss, tous les rayons sortants concourent en un point B qui sera le point image.

Il y a donc bien stigmatisme approché et l'oeil voit l'image de la pièce donnée par l'eau à la distance  $d$  donnée précédemment.

a.  $\tan \theta_0 \approx \theta_0$ ;  $\sin \theta_0 \approx \theta_0$

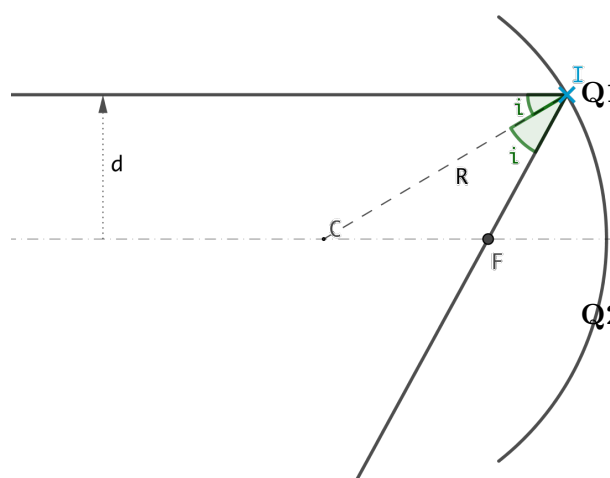
b. on néglige les puissances  $\theta_0^k$  pour  $k > 1$

## ♥ Méthode .5: Rechercher un foyer principal

On considère une portion de sphère de rayon  $R$  dont l'intérieur est entièrement réfléchissant.

- IV.4 Q1.** On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique à une distance  $d$  de ce dernier. Représenter graphiquement le rayon réfléchi et l'intersection entre ce rayon et l'axe optique. Comment appellerait-on ce point ?
- Q2.** Déterminer la distance (algébrique) entre le centre de la sphère miroir et le point d'intersection précédent.
- Q3.** Quelle condition imposer sur  $d$  et  $R$  pour se placer dans les conditions de Gauss ? Simplifier alors le résultat précédent. Commenter le résultat.

## Corrigé: Rechercher un foyer principal



**Q1.** On utilise l'égalité de l'angle incident et de l'angle réfléchi (la normale à une sphère est son rayon). Le point F est le point d'intersection de rayons sortant issus des rayons incidents parallèle à l'axe optique, il correspond donc à un bon candidat pour le foyer principal image.

**Q2.** Le rayon incident est parallèle à l'axe optique, il vient que l'angle entre le rayon CI et l'axe optique est aussi l'angle  $i$  et le triangle CFI est donc isocèle en F.

On peut alors utiliser le produit scalaire :

FIGURE 3

$$\begin{aligned}
 CI^2 &= \vec{CI} \cdot \vec{CI} = (\vec{CF} + \vec{FI}) \cdot (\vec{CF} + \vec{FI}) \\
 &= CF^2 + IF^2 + 2\vec{CF} \cdot \vec{FI} = 2CF^2 + 2CF^2 \cos(\pi - (\pi - 2i)) \\
 &= 2CF^2 (1 + \cos 2i)
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$CF = \frac{R}{2 \cos i} \quad (5)$$

On observe que la position du point dépend de l'angle et donc du rayon : on n'a pas de stigmatisme rigoureux.

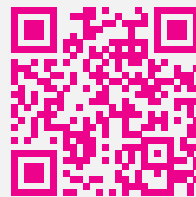
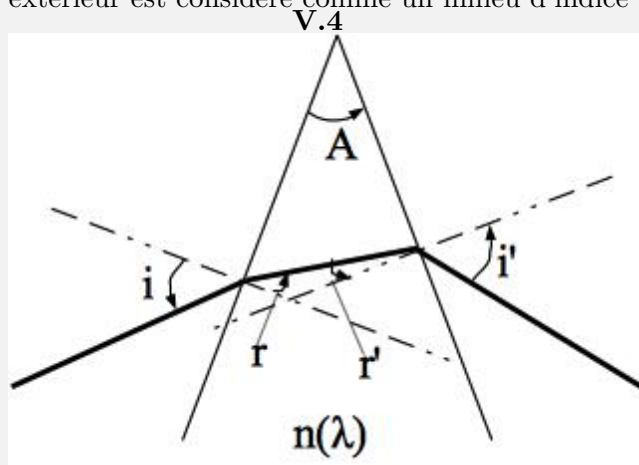
- Q3.** Pour se palcer dans les conditions de Gauss, il faut que le rayon soit proche de l'axe optique en I, soit  $d \ll R$ . Lorsque  $d \ll R$ , il vient que  $i \ll 1$  donc  $CF \approx \frac{R}{2}$ . Cette fois, la position du foyer ne dépend plus des rayons : en sélectionnant les rayons paraxiaux (conditions de Gauss), on réalise un stigmatisme approché.

## 🔧 Problème 1: Déviation par le prisme

**Certains points pourront être utiles plus tard en Travaux Pratiques.**

Principe général : On considère un prisme triangulaire d'angle au sommet  $A$  dont la base est posée horizontalement sur un socle. On envoie un faisceau lumineux constitué de rayons parallèles sur une des faces et on observe les rayons sortant par l'autre face (les deux faces constituant l'angle  $A$ ). Ce seront les deux faces utiles du prisme. Le faisceau étant parallèle l'angle que font les rayons avec la première face du prisme est toujours la même, on note cet angle  $i$ . Il vient par les lois de Descartes que les angles formés par les différents rayons réfractés seront les mêmes quel que soit le rayon considéré. On va donc considérer un seul rayon pour l'étude.

But : On désire étudier la déviation du rayon lumineux  $D$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ . L'air extérieur est considéré comme un milieu d'indice 1.



Simulation Geogebra

FIGURE 4 – Déviation par le prisme

## Corrigé: Déviation par le prisme

*Il ne s'agit pas d'une correction complète mais de différents éléments qui seront utiles pour les séances de travaux pratiques.*

- 1. Relations des angles du prisme :** On distingue les deux lois de Snell-Descartes aux points  $I$  et  $I'$  et trois sommes d'angles dans le triangle  $SII'$  ( $S$  étant le sommet d'angle  $A$ ) et les quadrilatères  $SIGI'$  ( $G$  étant l'intersection des deux normales en  $I$  et  $I'$ ) et  $G'IGI'$  ( $G'$  étant l'intersection entre le rayon entrant et le rayon sortant) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin i \\ \sin i' \\ A + (\pi/2 - r) + (\pi/2 - r') \\ A + \pi/2 + \widehat{IGI'} + \pi/2 \\ \pi - D + i + i' + \widehat{IGI'} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} n \sin r \\ n \sin r' \\ \pi \\ 2\pi \\ 2\pi \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \sin i = n \sin r \\ \sin i' = n \sin r' \\ A = r + r' \\ D = i + i' - A \end{array} \right.$$

- 2. Si  $r'$  est trop grand ( $r' > \arcsin \frac{1}{n}$ ) alors il y a réflexion totale. Comme  $r' = A - r$ , il vient que la réflexion totale a lieu pour des angles d'incidence  $i$  petits. Plus précisément si :**

$$i < \arcsin \left( n \sin \left( A - \arcsin \frac{1}{n} \right) \right) = i_0 \quad (6)$$

il y a réflexion totale.

On pourra remarquer que si  $A$  devient trop grand,  $\sin\left(A - \arcsin \frac{1}{n}\right)$  devient supérieur à  $1/n$  et  $i_0$  n'est pas défini : il y a alors toujours réflexion totale. On parle de *prisme à réflexion totale*. De tels prismes sont utilisés dans des appareils optiques comme les jumelles ou les appareils photographiques.

3. On remarque que pour un couple  $i = i_1; i' = i_2$ , le principe de retour inverse assure que si  $i = i_2$  alors  $i' = i_1$ . Les relations trouvées précédemment montre donc que  $D(i = i_1) = D(i_2)$ <sup>a</sup>. Il vient ( $D(i)$  est continue) qu'il y a forcément au moins un extremum de la déviation.

Comme :

$$\begin{aligned}\frac{dD}{di} &= 1 + \frac{di'}{di} \\ &= 1 + \frac{di'}{dr'} \frac{dr'}{dr} \frac{dr}{di} \\ &= 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos i' \cos r}\end{aligned}$$

Aux bornes de l'intervale  $i \in [i_0; \pi/2]$  (avec  $i'(i_0) = \pi/2$ ), il vient :

$$\begin{aligned}\frac{dD}{di}(i = i_0) &= -\infty \\ \frac{dD}{di}(i = \pi/2) &= 1\end{aligned}$$

La dérivée passant de valeurs négatives à des valeurs positives, il y a forcément un minimum par les extrema.

La démonstration de l'unicité est plus calculatoire et n'est pas présentée ici.

Si l'on admet cette unicité, on remarque que nécessairement au minimum de déviation  $D_m$ ,  $i = i'$  (sinon en inversant les valeurs de  $i$  et  $i'$  par retour inverse, on obtiendrait la même valeur  $D_m$ , ce qui est contraire à l'unicité). Notons  $i_m = i = i'$  pour  $D = D_m$ , il vient  $r = r' \stackrel{\text{def.}}{=} r_m$  et les relations

précédentes :

$$A = 2r_m \quad (7)$$

$$A + D_m = 2i_m \quad (8)$$

$$\sin \frac{A + D_m}{2} = n \sin \frac{A}{2} \quad (9)$$

4. Principe de la spectroscopie par le prisme.

- (a) On utilise en général une lampe à spectre discret dont les longueurs d'onde sont connus (ex : Mercure) pour soit déterminer  $D(i, \lambda)$  pour un  $i$  fixé, soit déterminer  $D_m(\lambda)$ <sup>b</sup>
- (b) On obtient une courbe d'étalonnage qui permet ensuite de remonter à une longueur d'onde pour une source inconnue. Dans le cas de l'étude par  $D_m$ , on remonte en général à  $n(\lambda)$ <sup>c</sup> car cela permet d'ajuster la courbe d'étalonnage au molède de Cauchy de l'indice de réfraction d'un verre :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda} \quad (10)$$

par régression linéaire.

a. Par exemple  $D(i = i_0) = D(\pi/2) = \pi/2 + i_0 - A$

b. La seconde méthode est préférable pour minimiser les incertitudes de mesure.

c. après mesure de  $A$