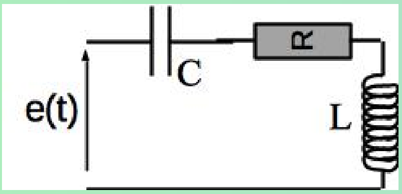
Corriges

♥ Méthode .1: Différentes Méthodes



II.4 **Q1.** On considère un dipôle RLC série relié à une source idéale de tension délivrant une tension $e(t) = e_m \cos \omega t$. Déterminer la représentation complexe de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant le dipôle en régime sinuoïdal forcé.

Q2. En déduire l'amplitude complexe et la phase à l'origine de l'intensité.

Corrigé: Différentes Méthodes

Q1. *On va utiliser plusieurs méthodes. Le but est de montrer que les méthodes vues au premier chapitre peuvent à nouveau s'utiliser en RSF avec les impédances.*

- Lois de Kichhoff (en tension) : La lois des mailles s'écrit : $u_R + u_L + u_C = e$ et reste vraie avec les représentations complexes.
  En régime sinusoïdal forcé, on utilise les impédances : $\underline{u_R} = R\underline{i}; \underline{u_L} = jL\omega\underline{i}; \underline{u_C} = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$. Il vient :

$$\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i} = \underline{e} \Longrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad (1)$$

  On déduite la tension u_C :

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{i}}{jC\omega} = \frac{\underline{e}}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \quad (2)$$

- Pont diviseur : R, L et C forment un pont diviseur de tension, il vient que :

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}}\underline{e} = \frac{\underline{e}}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$
$$\underline{i} = \frac{1}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}}\underline{e} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Q2. *NE SURTOUT PAS PASSER PAR LA PARTIE RELLE.*

$$i_m = |\underline{i}| = \frac{e_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (3)$$

$$\phi_i = \arg \underline{i} = \arg \underline{e} - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = -\arctan \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad (4)$$

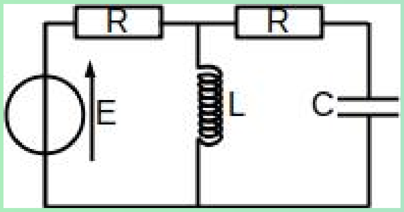
Il est conseillé de s'entraîner à faire de même pour u_C.
Vérification :

- *homogénéité : Il est important de penser à vérifier l'homogènéité. Les impédances usuelles ont montré que $L\omega$ et $1/(C\omega)$ ont la dimension d'une résistance. Le test d'homogénéité se ramène donc, comme au premier chapitre à utiliser la loi d'Ohm. Ici tous les termes sous la racine sont homogène à des résistances au carré donc on a bien une tension sur une résistance.*
  Pour ϕ_i, on pourra remarquer qu'on multiplie $1/R$ par une résistance : l'argument de arctan est bien sans dimension.

⋆ *Comportement asymptotique : nous verrons par la suite qu'on peut étudier rapidement les comportements haute et basse fréquence. (Cf. suite)*

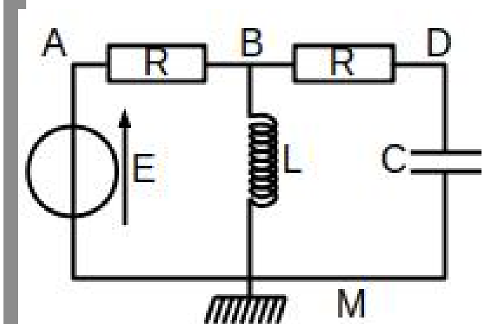
II.4

♥ Méthode .2: Utiliser la loi des noeuds en terme de potentiel



On considère le circuit ci-dessous où E est la tension d'entrée. Déterminer la représentation complexe de la tension $\underline{s}$ aux bornes du condensateur en régime sinusoïdal forcé.

Corrigé: Utiliser la loi des noeuds en terme de potentiel



On va utiliser la loi des noeuds en terme de potentiel donc on va nommer les potentiels et choisir une référence des potentiels. Remarquons qu'on sait que $\underline{V_A} = \underline{E}$ et on cherche $\underline{V_D} = \underline{u_C} + 0$.

On va écrire deux lois des noeuds en termes de potentiel : en B et en D.

$$\begin{cases} \frac{\underline{V_B}-\underline{V_A}}{R} + \frac{\underline{V_B}-\underline{V_M}}{\underline{Z_L}} + \frac{\underline{V_B}-\underline{V_D}}{R} & = 0 \\ \frac{\underline{V_D}-\underline{V_B}}{R} + \frac{\underline{V_D}-\underline{V_M}}{\underline{Z_C}} & = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\underline{V_B}-E}{R} + \frac{\underline{V_B}}{jL\omega} + \frac{\underline{V_B}-\underline{V_D}}{R} & = 0 \\ \frac{\underline{V_D}-\underline{V_B}}{R} + jC\omega\underline{V_D} & = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{V_B} = (1 + jRC\omega)\,\underline{V_D} \\ \left(2 + \frac{R}{jL\omega}\right)\underline{V_B} - \underline{V_D} = E \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(1 + j\left(2RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right) + \frac{R^2C}{L}\right)\underline{V_D} = E$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{s} = \underline{V_D} = \frac{E}{1 + j\left(2RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right) + \frac{R^2C}{L}}}$$

⋆ *L'expression sera homogène si les termes au dénominateur sont tous sans dimensions ce qui est le cas ($RC\omega$ homogène $R * 1/R$, idem pour $R/L\omega$ et idem pour le dernier terme (il suffit de multiplier en haut et en bas pas ω)).*

⋆ *On pourrait aussi vérifier les comportements asymptotiques.*

II.4

♥ Méthode .3: Passer du fréquentiel au temporel

On considère un système dont la relation entrée sortie entre les grandeurs complexes (on parle de fréquentiel) est :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Déterminer l'équation différentielle qui relie les grandeurs $s(t)$ à $e(t)$.

Corrigé: Passer du fréquentiel au temporel

Méthode :

1. *mettre le rapport $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ sous forme d'une fraction de deux polynômes en ω : $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$.*
2. *mettre l'égalité sous la forme$Q(j\omega)\underline{s} = P(j\omega)\underline{e}$.*
3. *Remplacer chaque facteur $(j\omega)^n$ par la dérivée $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$*

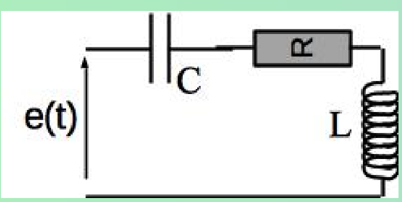
On commence par exprimer l'équation sous forme $P(j\omega)\underline{s} = Q(j\omega)\underline{e}$ où P et Q sous des polynômes en $j\omega$:

$$\underline{s} - LC\omega^2\underline{s} + jRC\omega\underline{s} = \underline{e} - jRC\omega\underline{e} \tag{5}$$

On remplacer chaque terme en $j\omega$ par une dérivée temporelle :

$$s + LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} + RC\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = e - RC\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}} \tag{6}$$

♥ Méthode .4: Analyser rapidement les comportements HF et BF



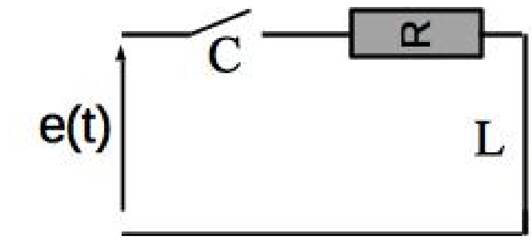
On considère le circuit RLC série ci-après. On veut étudier le comportement fréquentiel de certaines grandeurs. On rappelle qu'il s'agit d'étudier les caractéristiques du régime sinusoïdal forcé pour une entrée sinusoïdale quelconque.

II.4 **Q1.** Etudier la réponse haute et basse fréquence de l'intensité circulant dans le circuit et de la tension aux bornes du condensateur pour le circuit RLC série.

Q2. Vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux trouvés dans l'exercice .1.

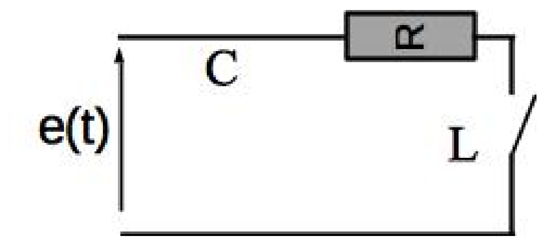
Corrigé: Analyser rapidement les comportements HF et BF

Q1. **Etude basse fréquence :** A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le circuit est donc assimilable au circuit suivant :



Il vient que l'intensité est nulle. La loi des mailles s'écrit alors $u_C = e - Ri = e$.

Etude haute fréquence : A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc assimilable au circuit suivant :



Il vient que l'intensité est nulle et la tension aux bornes du condensateur est nulle aussi (tension aux bornes d'un fil).

Q2. *Un comportement basse fréquence doit se retrouver mathématiquement lorsque $\omega \to 0$ et un comportement haute fréquence lorsque $\omega \to +\infty$.*

Ici (en utilisant les expressions trouvées dans l'exercice .1) [a] :

$$\lim_{\omega \to 0} \underline{i} = 0 \quad \lim_{\omega \to +\infty} \underline{i} = 0 \quad \lim_{\omega \to 0} \underline{u_C} = \underline{e} \quad \lim_{\omega \to +\infty} \underline{u_C} = 0$$

C'est résultats sont cohérents avec les études rapides.

Même quand une étude rapide n'est pas demandée, la faire permet de détecter ses erreurs.

a. Rappel : pour déterminer rapidement la limite du dénominateur/numérateur, on ne garde que le monômes prépondérant (plus faible puisance en 0 et plus forte puissance en $+\infty$)

♥ Méthode .5: Etude d'un RLC série - Passe-bande

II.4 Q1. On considère le circuit RLC série alimentée par une tension d'entrée e. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{i}$ de l'intensité circulant dans le circuit.

Q2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{i}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.

Q3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre i et e en fonction de ω, Q, ω_0, R et e_m.

Q4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum. On parle de **résonance**. Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale ainsi que l'amplitude maximale $i_{\max}$.

Q5. Déterminer la **bande passante**, c'est-à-dire la gamme de fréquence/pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est supérieure à $\frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$. On calculera aussi la largeur de la bande passante.

Q6. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.

Q7. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et à la pulsation de résonance et représentation le déphasage en fonction de la fréquence.

Corrigé: Etude d'un RLC série - Passe-bande

Q1. La loi des mailles s'écrit :

$$R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \underline{e}$$

soit :

$$\boxed{\underline{i} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}\underline{e}} \tag{7}$$

Q2. *On cherche les limites de l'expression précédente pour $\omega \to 0$ (BF) et $\omega \to +\infty$ (HF)*[a]*.*
A basse fréquence, $\frac{1}{jC\omega}$ l'emporte au dénominateur. A haute fréquence, c'est $jL\omega$. Dans les deux cas :

$$\boxed{\underline{i_{HF/BF}} \to 0} \tag{8}$$

On a bien un ordre 2 car en se mettant sous la forme de fraction de polynômes, on aurait du $LC\omega^2$. On choisit donc la forme d'un passe-bande d'ordre 2.
On utilise la première forme du cours. L'important est de faire apparaître le 1 : on va factoriser par R.

$$\boxed{\underline{i} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\frac{L}{R}\omega - \frac{j}{C\omega}}\underline{e}} \tag{9}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} & = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 & = \frac{}{RC} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} Q^2 & = \frac{L}{R^2C} \\ \omega_0^2 & = \frac{1}{LC} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} Q & \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0 & = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

La méthode utilisée consiste à multiplier et diviser les deux équations pour faire apparaître Q^2 et ω_0^2.
On pourra remarque qu'on trouve les mêmes expressions pour Q et ω_0 que dans une équation différentielle pour le même circuit (RLC série). C'est normal car ces notations ont été établies en cohérence. ***S'en convaincre en passant la relation fréquentielle entre $\underline{i}$ et $\underline{e}$ en temporel.***

Q3. Il vient :

$$i_m = \frac{\frac{e_m}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{10}$$

$$\phi_i = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \tag{11}$$

Q4. On remarque que *le numérateur étant constant*, $i_m(\omega)$ passe par un maximum quand son dénominateur est minimum soit quand $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimum soit pour $\boxed{\omega_r = \omega_0}$ [b]

$$i_{max} = \frac{e_m}{R} \tag{12}$$

Q5. On doit résoudre :

$$i_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{e_m}{\sqrt{2}R}$$

$$1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

soit :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{Q}$$

ou :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{Q}$$

Résolvons les deux cas possibles :

$$\omega^2 - \frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

soit :

$$\omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$$

La seule solution positive est :

$$\boxed{\omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)} \tag{13}$$

a. S'entraîner aussi à déterminer ces comportements par une étude du circuit.
b. Car il s'annule alors.

$$\omega^2 + \frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

soit :

$$\omega_{c,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$$

La seule solution positive est :

$$\boxed{\omega_{c,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)} \tag{14}$$

On observe que $i(\omega) > i_{max}/\sqrt{2}$ entre $\omega_{c,2}$ et $\omega_{c,1}$ donc la largeur de la bande passante est :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \tag{15}$$

Q6. cf. Bilan

Q7. *On peut utiliser l'expression du déphasage précédent (s'y entraîner) ou utiliser les équivalents de $\underline{i}$ à haute et basse fréquence :*

$$\underline{i_{BF}} \approx \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{\frac{1}{jRC\omega}} = jC\omega\underline{e}$$
$$\underline{i_{HF}} \approx \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{j\frac{L}{R}\omega} = -j\frac{1}{L\omega}\underline{e}$$
$$\underline{i_{\omega_0}} \approx \frac{\underline{e}}{R}$$

donc :

$$\phi_{i,BF} = \pi/2$$
$$\phi_{i,BF} = -\pi/2$$
$$\phi_{i,\omega_0} = 0$$

♥ Méthode .6: Etude d'un RLC série - Passe-bas

II.4 **Q1.** On considère le circuit RLC série alimentée par une tension d'entrée e. Déterminer l'expression de la représentation complexe $\underline{u_C}$ de la tension aux bornes du condensateur.

Q2. Déterminer par une étude haute et basse fréquence la forme canonique compatible puis mettre $\underline{u_C}$ sous cette forme. On déterminera la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q.

Q3. En déduire l'expression de l'amplitude réelle et du déphasage entre u_C et e en fonction de Q, ω_0 et e_m.

Q4. Montrer que l'amplitude réelle passe par un extremum seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On parle de **résonance**. Déterminer alors la pulsation de résonance, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude réelle est maximale.

Q5. Représenter l'amplitude réelle en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de Q.

Q6. Déterminer les valeurs du déphasage à haute et basse fréquence et en ω_0 et représentation le déphasage en fonction de la fréquence.

Corrigé: Etude d'un RLC série - Passe-bas

Q1. La loi des mailles s'écrit :

$$R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \underline{u_C} = \underline{e}$$

soit (avec $\underline{i} = jC\omega\underline{u_C}$) :

$$\boxed{\underline{u_C} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}\underline{e}} \tag{16}$$

Q2. A basse fréquence, 1 l'emporte au dénominateur. A haute fréquence, c'est $-LC\omega^2$. Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{u_{C,BF}} & \to \underline{e} \neq 0 \\ \underline{u_{C,HF}} & \to 0 \end{cases}} \tag{17}$$

On a bien un ordre 2. On choisit donc la forme d'un passe-bas d'ordre 2.

$$\boxed{\underline{u}_C = \frac{1}{1 - jRC\omega - LC\omega^2}\underline{e}} \tag{18}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \omega_0 & = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q & = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

Q3. Il vient :

$$u_{Cm} = \frac{e_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \tag{19}$$

$$\phi_u = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \tag{20}$$

L'expression de ϕ_u s'obtient en factorisant par $\frac{1}{jC\omega}$ ce qui fait apparaître le $-\pi/2$ et ramène le calcul du reste de la phase au cas précédent.

Q4. On remarque que *le numérateur étant constant*, $u_{Cm}(\omega)$ passe par un maximum quand son dénominateur est minimum soit quand $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$ est minimum.

En utilisant la dérivée :

$$f'(X_r) = -2(1 - X_r) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Longrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

soit pour :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \tag{21}$$

On remarque que cette pulsation de résonance n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

f passant pient de valeur négative à des valeurs positives, il s'agit bien d'un minimum de f et donc d'une résonance.

On pourra remarquer que lorsque la condition n'est pas vérifiée, f' est toujours positive, donc l'amplitude est toujours décroissante en ω.

Q5. cf. Bilan

Q6. *On peut utiliser l'expression du déphasage précédent (s'y entraîner) ou utiliser les équivalents de $\underline{u}_C$ à haute et basse fréquence :*

$$\underline{u_{C,BF}} \approx \underline{e}$$

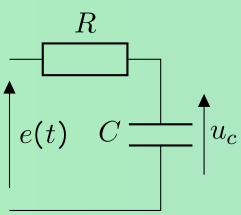
$$\underline{u_{C,HF}} \approx -\frac{1}{LC\omega^2}\underline{e}$$

$$\underline{u_{C,\omega_0}} \approx -j\frac{\underline{e}}{RC\omega}$$

donc :

$$\begin{aligned}\phi_{u,BF} &= 0\\ \phi_{u,BF} &= -\pi\\ \phi_{u,\omega_0} &= -\pi/2\end{aligned}$$

♥ Méthode .7: Réponse à un circuit RC série



On considère le circuit ci-contre où $e(t)$ est un signal d'entrée.

II.4 Q1. Déterminer, en RSF, $\underline{u}_c$ et le mettre sous la forme :

$$\underline{u}_c = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{e} \tag{22}$$

en exprimant ω_0 en fonction de R et C.

En déduire l'amplitude réelle u_{Cm} et la phase à l'origine ϕ_u. On notera e_m l'amplitude réelle de $e(t)$ et ϕ_e sa phase à l'origine. Donner la réponse complète $u_C(t)$ au signal $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$

Q3. On considère maintenant que $e(t) = e_m \cos(\omega_0 t) + 2e_m \cos(2\omega_1 t + \pi/3)$ Donner l'expression du signal de sortie $u_C(t)$.

Q4. Même question pour un signal dont la décomposition en série de Fourier est :

$$e(t) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{E}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 t) \tag{23}$$

Corrigé: Réponse à un circuit RC série

Q1. R et C formant un pont diviseur de tension, il vient :

$$\begin{aligned}\underline{u}_C &= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}\underline{e}\\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}\end{aligned}$$

soit l'expression demandée avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Q2. Il vient :

$$u_{Cm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e_m \tag{24}$$

$$\phi_u = \phi_e - \arctan\frac{\omega}{\omega_0} \tag{25}$$

soit :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e_m \cos\left[\omega t + \phi_e - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right]} \tag{26}$$

Q3. *Le système étant linéaire, la réponse à une somme de deux signaux sera la somme des réponses pour chaque terme. On connaît déjà la réponse pour chaque terme, c'est la même que précédemment avec :*

- ⋆ *Pour* $e_m \cos(\omega_0 t)$ *:* $\omega \to \omega_0; e_m \to e_m$ *et* $\phi_e \to 0$
- ⋆ *Pour* $2e_m \cos(2\omega_1 t + \pi/3)$ *:* $\omega \to 2\omega_1; e_m \to 2e_m$ *et* $\phi_e \to \pi/3$

donc :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_m \cos\left[\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} e_m \cos\left[2\omega_1 t + \pi/3 - \arctan\frac{2\omega_1}{\omega_0}\right]} \tag{27}$$

Q4. *Même raisonnement que précédemment, pour chaque terme de la série :*

- ⋆ $\frac{E}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 t)$ *:* $\omega \to (2k+1)\omega_0; e_m \to \frac{E}{2k+1}$ *et* $\phi_e \to 0$

donc :

$$u_C(t) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (2k+1)^2}} \frac{E}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 t - \arctan(2k+1)) \tag{28}$$