♥ Méthode .1: Etude d'un circuit RC d'ordre 1

Régime libre : L'interrupteur étant en position 1 depuis un temps long, il bascule à t=0 en position 2.

I.3 Q1. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de u_C pour $t > 0$.

Q2. Déterminer $u_C(t)$ et $i(t)$ pour $t > 0$ et tracer leur allure temporelle.

Q3. Réaliser un bilan de puissance du circuit RC.

Q4. Réaliser un bilan d'énergie du circuit RC précédent entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

Réponse indicielle : On considère toujours le circuit RC mais après un temps long en position 2, l'interrupteur bascule à t=0 en position 1.

Q5. Déterminer avec peu de calculs l'état final de $u_C(t)$

Q6. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ puis déterminer $u_C(t)$.

Q7. En déduire i(t).

Q8. Réaliser un bilan de puissance et un bilan énergétique sur l'ensemble du circuit.

Corrigé: Etude d'un circuit RC d'ordre 1

Q1. La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C = 0 = Ri + u_C$. En utilisant l'équation d'évolution du condensateur, il vient :

$$\frac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}}(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = 0 \qquad (1)$$

Par identification, on a donc $\tau = RC$.

Q2. Procédons par ordre :

1. La solution générale est donc $Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
2. Le second membre étant nul, il n'y a pas de solution particulière à ajouter.
3. Détermination de la condition initiale. On étudie le système à $t = 0^-$ en considérant qu'on est en régime forcé [a]. *La seule grandeur continue est la tension aux bornes du condensateur. On va déterminer sa valeur.*

   Le condensateur étant assmilable à un interrupteur ouvert, l'intensite i est nulle donc la tension aux bornes de la résistance aussi. Il vient $u_C(t = 0^-) = E$. Par continuité $\boxed{u_C(t = 0^+) = E}$.
4. On utilise la condition initiale : $u_C(t = 0^+) = A = E$

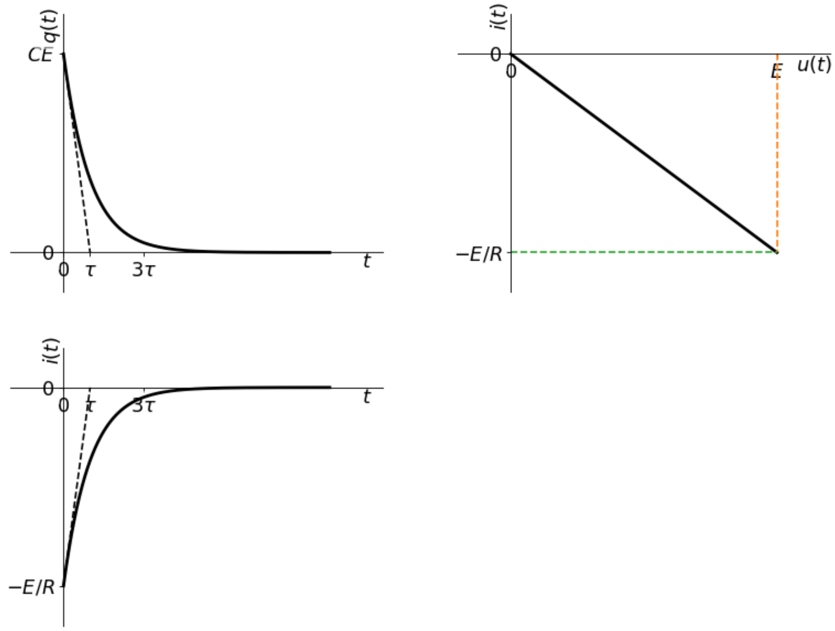
Donc :

$$\boxed{u_C(t) = E\exp^{-t/\tau}} \qquad (2)$$

La relation du condensateur donne :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{dt}} = -\frac{E}{R}\exp^{-t/\tau} \qquad (3)$$

On peut alors tracer les allures temporelles de $i(t)$ et $u_c(t)$ *Il est important de faire figurer le temps caractéristique τ (ici par l'ordonnée à l'origine) et de veiller à ce que la condition initiale et la valeur finale soient bonnes.* .



[b]

Q3. *Faire un bilan de puisance revient à trouver une relations entre les différentes puissance mise en jeu à un instant. Il suffit en général de partir d'une des équations (loi des noeuds ou des mailles).*

Partons de la loi des mailles : $u_R + u_C = 0$ et multiplions là par i. On obtient des puissances reçues :

$$p_J(t) + p_C(t) = 0 \tag{4}$$

avec $p_J(t)$ la *puissance perdue par effet Joule* dans la résistance et $p_C(t)$ la *puissance reçue par le condensateur*. La puissance dissipée par effet Joule dans R est entièrement fournie par C.

Q4. *Il s'agit de calculer les énergies reçues fournies par chaque dipôle puis de les comparer.*

- ⋆ Energie fournie [c] par le condensateur :

$$\begin{aligned} E_{fournie} &= -\Delta E_{stockee} \\ &= -\left(E_L(t=+\infty) - E_L(0)\right) \\ &= \frac{1}{2} C u_C(t=0)^2 - \frac{1}{2} C u_C(t=+\infty)^2 \\ &= \frac{CE^2}{2} \end{aligned}$$

- ⋆ Energie dissipée par effet Joule dans R :

$$\begin{aligned} E_J &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{u_R^2(t)}{R} dt \\ &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{E^2}{R} \exp^{-\frac{2t}{RC}} dt \\ &= \frac{CE^2}{2} \end{aligned}$$

On observe que l'énergie fournie par le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance, ce qui est logique puisque cette correspondance était déjà valable à chaque instant.

Q5. On peut considérer le système comme stable et le régime forcé sera indépendant du temps car E est constant. Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert et i=0. Il vient $\boxed{u_C = E}$

Q6. Cette fois la loi des mailles s'écrit : $E - Ri(t) - u_C(t) = 0$. On utilise à nouveau la relation tension-intensité du condensateur, il vient :

$$\frac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}}(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{E}{RC} \tag{5}$$

On doit déterminer les conditions initiales. Dans le régime forcé indépendant du temps avant t=0, on cherche la grandeur continue, ici la tension aux bornes du condensateur.

Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc l'intensité est nulle et donc $u_C(t = 0^-) = u_R(t = 0^-) = 0$. Par continuité $u_C(t = 0^+) = 0$

La solution générale ESSM est toujours $A\exp^{-t/RC}$

On cherche une solution particulière constante U_0. En l'introduisant dans l'équation différentielle, il vient $0 + \frac{U_0}{RC} = \frac{E}{RC}$ soit $U_0 = E$

La solution est donc : $A\exp^{-t/RC} + E$. On utilise la condition initiale qui donne $A = -E$ donc :

$$u_C(t) = E(1 - \exp^{-t/\tau}) \tag{6}$$

Q7. Pour l'intensité :

$$i(t) = \frac{E}{R}\exp^{-t/\tau} \tag{7}$$

Q8. Bilan de puissance : la loi des mailles $E = u_R + u_C$ multiplié par i donne : $P_E = P_J + P_C$. On pourra remarquer que cette fois $P_C > 0$.

On observe que la puissance fournie par le générateur va en partie est stockée par le condensateur et en partie dissipée par la résistance.

Bilan énergétique :

- ⋆ *énergie fournie par le générateur :*

$$\begin{aligned} E_E &= \int_{t=0}^{t=+\infty} Ei(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{E^2}{R}\exp^{-\frac{t}{RC}} dt \\ &= CE^2 \end{aligned}$$

- ⋆ *énergie dissipée par la résistance :*

$$\begin{aligned} E_J &= \int_{t=0}^{t=+\infty} Ri^2(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{E^2}{R}\exp^{-\frac{2t}{RC}} dt \\ &= \frac{CE^2}{2} \end{aligned}$$

⋆ *énergie stockée par le condensateur :*

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= E_C(t=+\infty) - E_C(t=0)\\ &= \frac{1}{2}Cu_C(t=\infty)^2 - \frac{1}{2}Cu_C(t=0)^2\\ &= \frac{CE^2}{2}\end{aligned}$$

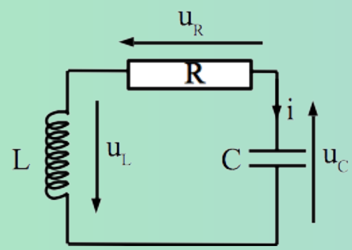
a. interrupteur dans l'état 1 depuis un **temps long**

b. La caractéristique dynamique $i(u)$ est optionnel. On remarquera surtout qu'elle est différente de la caractéristique statique du condensateur.

c. On sait qu'il fournit physiquement de l'énergie, donc on la calcule

♥ Méthode .2: Etude d'un circuit RLC série

Circuit RLC série en régime libre : Nous allons étudier un exemple de système d'ordre 2 basé sur le circuit suivant :



I.3

On suppose les conditions initiales connues à $t = 0$:

$$i(t=0) = i_0 \quad (8)$$

$$u_C(t=0) = 0 \quad (9)$$

Q1. Obtenir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique en utilisant le facteur de qualité.

Q2. **Cas apériodique :** Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime apériodique.

Q3. **Cas critique :** Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime critique.

Q4. **Cas pseudo-périodique :**

Q4.a. Déterminer l'expression complète de $u_C(t)$ avec les constantes d'intégration dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

Q4.b. Estimer une durée caractéristique du régime transitoire pour un régime pseudo-périodique et en déduire le nombre de pseudo-périodes qu'on peut voir. Commenter ce nombre quand Q devient grand.

Corrigé: Etude d'un circuit RLC série

Q1. On peut appliquer une loi des mailles : $u_L + u_R + u_C = 0$ soit $L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + Ri + u_C = 0$. Il reste à utiliser $i = C\frac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}}$, il vient :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \tag{10}$$

Il reste à identifier les facteurs :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q2. On a les expressions :

$$u_C(t) = A\exp^{r_1 t} + B\exp^{r_2 t}$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = CAr_1\exp^{r_1 t} + CBr_2\exp^{r_2 t}$$

soit les conditions initiales :

$$u_C(t=0) = A + B = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$i(t=0) = C(r_1 - r_2)A = i_0 \Longrightarrow A = \frac{i_0}{C(r_1 - r_2)}$$

Il vient les expressions :

$$u_C(t) = \frac{i_0}{C(r_1 - r_2)}\left(\exp^{r_1 t} - \exp^{r_2 t}\right)$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{Ci_0}{C(r_1 - r_2)}\left(r_1\exp^{r_1 t} - r_2\exp^{r_2 t}\right)$$

Q3. On a les expressions :

$$u_C(t) = \exp^{r_0 t}(At + B)$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C\exp^{r_0 t}(r_0 At + r_0 B + A)$$

soit les conditions initiales :

$$u_C(t=0) = B = 0$$

$$i(t=0) = CA = i_0 \Longrightarrow A = \frac{i_0}{C}$$

Il vient les expressions :

$$u_C(t) = \frac{i_0}{C}\exp^{\omega_0 t} t$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = i_0\exp^{\omega_0 t}(\omega_0 t + 1)$$

Q4. Cas pseudo-périodique :

Q4.a. On a les expressions :

$$u_C(t) = \exp^{-\lambda t}\left(A\sin^{\Omega t} + B\cos^{\Omega t}\right)$$
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = C\exp^{-\lambda t}\left((-\lambda A - \Omega B)\sin^{\Omega t} + (-\lambda B + \Omega A)\cos^{\Omega t}\right)$$

soit les conditions initiales :

$$u_C(t=0) = B = 0$$
$$i(t=0) = C\Omega A = i_0 \Longrightarrow A = \frac{i_0}{C\Omega}$$

Il vient les expressions :

$$u_C(t) = \exp^{-\lambda t}\left(\frac{i_0}{C\Omega}\sin^{\Omega t}\right)$$
$$i(t) = \exp^{-\lambda t}\left(-\lambda\frac{i_0}{\Omega}\sin^{\Omega t} + i_0\cos^{\Omega t}\right)$$

Q4.b. C'est le facteur $\exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}$ qui gouverne la décroissance en amplitude, le temps caractéristique est donc $\tau_{carac} = \frac{2Q}{\omega_0}$ et l'exponentielle aura décru de 95% pour $3\tau_{carac}$.
La pseudo période a pour expression $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}}$. Il vient qu'on pourra observer un nombre de périodes :

$$N_P = \frac{3\tau_{carac}}{T} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{4Q^2-1} \tag{11}$$

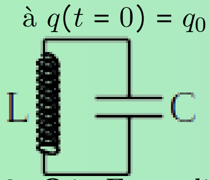
Pour Q grand, il vient $N_P \approx Q$. On observe que plus le facteur de qualité est grand, plus on observe de pseudo-périodes car le régime transitoire dure plus longtemps.

♥ Méthode .3: Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est une système d'ordre 2 **sans amortissement**. L'équation différentielle pour un tel système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2X(t) = \omega_0^2X_0 \tag{12}$$

On considère le circuit suivant (la bobine est idéale). A $t=0$, le condensateur est chargé à $q(t=0) = q_0$ et l'intensité qui le traverse est i_0 (en convention récepteur).



I.3 Q1. En appliquant la loi des mailles, montrer que l'évolution de la tension aux bornes du condensateur est bien celle d'un oscillateur harmonique. Préciser l'expression de ω_0.

Q2. Donner la forme mathématique de la tension $u_C(t)$ et préciser sa pulsation d'oscillation ainsi que sa période d'oscillation. Exprimer ensuite complètement $u_C(t)$ avec les conditions initiales données dans l'énoncé.

Q3. On utilisera pour la suite l'expression : $u_C(t) = u_{Cm}\cos(\omega_0 t + \phi)$. Exprimer l'énergie $E_{el}(t)$ emmagasinée dans le condensateur et l'énergie $E_{mag}(t)$ emmagasinée dans la bobine. En déduire l'énergie totale emmagasinée dans le système LC. Commenter son évolution temporelle.

Q4. Représenter graphiquement les évolutions deE_{el} et E_{mag}. Pourquoi parle-t-on d'échange d'énergie entre deux réservoirs ?

Corrigé: Oscillateur harmonique

Q1. On oriente les tensions dans le même sens et i en convention récepteur : $u_c + u_l = 0$ avec $u_l = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt=LC}\frac{\mathrm{d^2u_c}}{\mathrm{dt^2}}}$ soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2U_c}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{1}{LC}U_c(t) = 0 \tag{13}$$

donc $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Q2. *Les formes de la solution d'un oscillateur harmonique sont à connaître par coeur. Ils y en a deux :*

$$\begin{aligned} u_C(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\ &= D\cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

La première est plus simple pour déterminer les constantes d'intégration, la seconde pour le tracé graphique. Dans les deux cas, il s'agit d'un sinusoïde sans atténuation.

La pulsation est ω_0 et la période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

On utilise ensuite les conditions initiales :

$$\begin{aligned} A &= \frac{q_0}{C} \\ \omega_0 CB &= i_0 \\ D &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{q_0}{C}\cos\omega_0 t + \frac{i_0}{C\omega_0}\sin\omega_0 t \\ &= \sqrt{\left(\frac{q_0}{C}\right)^2 + \left(\frac{i_0}{C\omega_0}\right)^2}\cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Q3. Avec $i(t) = -C\omega_0 u_{Cm}\sin(\omega_0 t + \phi)$:

$$E_{el}(t) = \frac{1}{2}Cu_{Cm}^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) \tag{14}$$

$$E_{mag}(t) = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2 u_{Cm}^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) \tag{15}$$

comme $LC^2\omega_0^2 = C$, il vient :

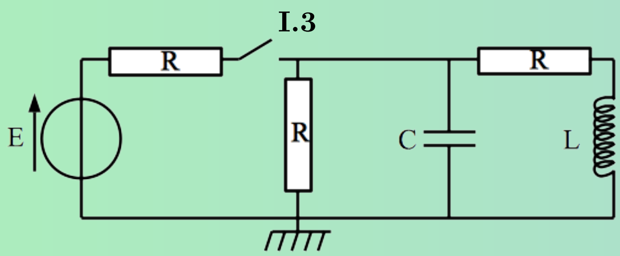
$$E_{TOT} = \frac{1}{2}Cu_{Cm}^2 = cste \tag{16}$$

Q4. En linéarisant les deux expressions :

$$E_{el}(t) = \frac{1}{4}Cu_{Cm}^2\left[1+\cos\left(2\omega_0 t+2\phi\right)\right] \tag{17}$$
$$E_{mag}(t) = \frac{1}{4}Cu_{Cm}^2\left[1-\cos\left(2\omega_0 t+2\phi\right)\right] \tag{18}$$

le tracé donnent deux sinusoïdes de même période $T/2$, de même valeur moyenne $\frac{1}{4}Cu_{Cm}^2$ mais en opposition de phase : quand l'énergie électrostatique est au maximum, l'énergie magnétique est nulle et réciproquement. On a donc bien un échange entre ces deux réservoirs d'énergie.

♥ Méthode .4: Etudier un régime indépendant du temps



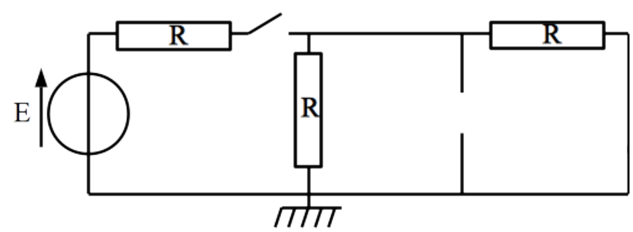
Q1. Etudier ce circuit en régime indépendant du temps lorsque l'interupteur est ouvert.

Q2. Etudier ce circuit en régime indépendant du temps lorsque l'interupteur est fermé.

Corrigé: Etudier un régime indépendant du temps

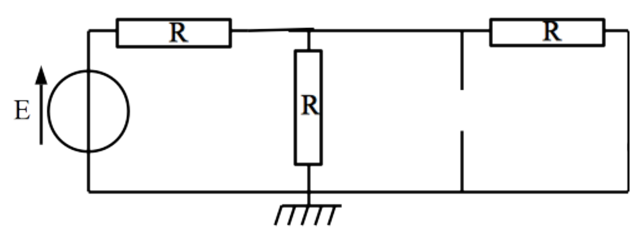
Paramétrage : On oriente toutes les intensités vers le haut dans chaque branche et on note respectivement i_e, i_r, i_c, i_l les intensités qui circulent dans la source, la résistance seule dans sa branche, le condensateur, la bobine.

Q1. *Circuit équivalent en régime indépendant du temps : On commence par redessiner le circuit : le condensateur est assimible à un interrupteur ouvert et la bobineà fil.*



Les interrupteurs ouverts imposent immédiatement : $\boxed{i_e = i_c = 0}$.
On a donc $i_r + i_l = 0$ et $Ri_r - Ri_l = 0$ soit $\boxed{i_r = i_l = 0}$

Q2. Même principe. Il vient $\boxed{i_c = 0}$. Ecrivons ensuite les lois de Kirchhoff :



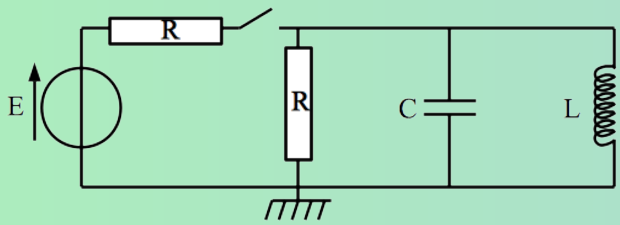
$$i_e + i_r + i_l = 0 \tag{19}$$
$$E - Ri_e + Ri_r = 0 \tag{20}$$
$$Ri_r - Ri_l = 0 \tag{21}$$

soit $i_r = i_l$ et donc $i_e = -2i_r$. De $E + 3Ri_r = 0$ on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} i_l = i_r & = -\frac{E}{3R} \\ i_e & = \frac{2E}{3R} \end{cases}} \tag{22}$$

L'homogènéité se vérifie simplement ici en remarquant que les intensités sont bien la dimension Tension/Résistance.

♥ Méthode .5: Mise en équation d'un circuit



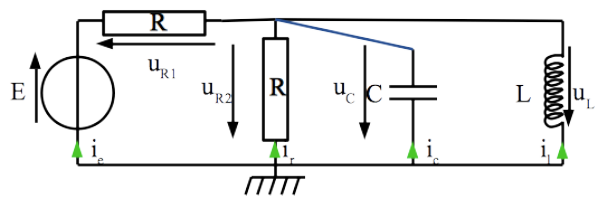
On considère le circuit suivant. A t=0, on ferme l'interrupteur.

I.3 **Q1.** Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur (orientée vers le haut) pour $t > 0$. On utilise les lois de Kirchhoff avec tensions et intensités.

Q2. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité qui circule dans la bobine (orientée vers le haut) pour $t > 0$. On utilise les lois de Kirchhoff avec tensions et intensités.

Q3. Déterminer ω_0 et Q pour ce circuit.

Corrigé: Mise en équation d'un circuit



Q1. Paramétrage : On oriente les intensités vers le haut et on garde la masse imposée par le schéma en bas du circuit (appelée M). Il y a deux autres points de potentiels : coin haut gauche $V_A = E + V_M = E$ et coin haut droite V_B [a]
En regroupant les noeuds en B, la loi des noeuds s'écrit $i_e + i_r + i_l + i_c = 0$ avec :

a. qu'on cherche car $u_c = V_B - V_M = V_B$.

$$i_e = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{E - V_B}{R}$$
$$i_r = \frac{V_M - V_B}{R} = -\frac{V_B}{R}$$
$$i_c = C\frac{\mathrm{d}(V_M - V_B)}{\mathrm{dt}} = -C\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{dt}}$$
$$\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} = \frac{V_M - V_B}{L} = -\frac{V_B}{L}$$

Comme on ne connait pas i_l mais sa dérivée, on va dériver la loi des noeuds :

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{dt}} - \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{dt}} - C\frac{\mathrm{d}^2V_B}{\mathrm{dt}^2} - \frac{V_B}{L} = 0$$

soit sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2V_B}{\mathrm{dt}^2} + \frac{2}{RC}\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{LC}V_B = 0} \tag{23}$$

(pour rappel,on peut remplacer V_B par u_c)

Q2. On commence par paramétrer le système (en ajoutant les tensions) puis on applique les lois de Kirchhoff. *Comme on cherche une intensité, on va garder au maximum des intensités et éliminer des tensions. Mais il faut être souple : dans le cas du condensateur, c'est plus simple d'éliminer i_c que u_c.*

$$i_e + i_r + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{dt}} + i_l = 0 \quad (24)$$

$$E - Ri_e + L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} = 0 \quad (25)$$

$$Ri_r - L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} = 0 \quad (26)$$

$$u_C - L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} = 0 \quad (27)$$

Stratégie : On cherche ici à éliminer d'abord u_c, i_r, i_e pour ne garder que i_l. On va donc isoler ces 3 grandeurs dans les trois lois de mailles pour les remplacer dans la loi de noeuds. Il apparaît qu'on a u_c et non $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{dt}}$, il faudra donc dériver la dernière loi des mailles pour éliminer $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{dt}}$.

$$i_e + i_r + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{dt}} + i_l = 0 \quad (28)$$

$$i_e = \frac{E + L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}}}{R} \quad (29)$$

$$i_r = \frac{L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}}}{R} \quad (30)$$

$$u_C = L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} \quad (31)$$

donc :

$$\frac{E}{R} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{dt}} + LC\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{i_l}}{\mathrm{dt}^2} + i_l = 0$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{i_L}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{2}{RC}\frac{\mathrm{di_L}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{LC}i_L = -\frac{E}{RLC} \quad (32)$$

Q3. *On peut remarquer que l'équation différentielle homogène a la même expression pour les deux grandeurs i_l et u_c : ω_0 et Q seront donc les mêmes.* Par identification, il vient :

$$\begin{cases} \omega_0 & = \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{RC} \Longrightarrow Q & = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases} \quad (33)$$

Vérification à faire avec vos résultats.
Homogénéité : Puisqu'une dérivée temporelle revient à diviser par un temps, on attend devant la dérivée première un facteur homogène à des s^{-1} (pour être homogène avec la dérivée seconde) et devant la fonction u_C un facteur homogène à des s^{-2}.
On montrera que le produit RC est homogène à un temps (utiliser les équations d'évolutions de R et C). et que le produit LC est homogène à un temps au carré (idem). L'expression est bien homogène.
Stabilité : Dans le système (sans la tension d'entrée), il n'y a que des dipôles passifs. On attend donc que le système soit stable. C'est effectivement ce qui est prédit par l'équation (signe des coefficients)[b]
*Régime indépendant du temps : Une autre vérification possible qui peut même faire l'objet d'une étude à part entière est le régime forcé. On rappelle qu'on peut en effet déterminer le régime forcé à partir du schéma. On trouve $i_{L,force} = -\frac{E}{R}$ **(s'entraîner à le prouver)**.*
***On peut retrouver un régime forcé indépendant du temps en cherchant une solution constante à l'équation différentielle précédente**. Soit en cherchant $i_L(t) = I_0$ l'équation $0 + 0 + \frac{1}{LC}I_0 = -\frac{E}{RLC}$. On trouve*

bien la bonne expression : l'équation est cohérente. On pourra s'entraîenr à vérifier le second membre nul pour l'équation en u_c.

b. Le signe $-$ dans l'équation en i_l n'a pas d'importance car il n'est pas dans l'équation *homogène*.

I.3

♥ Méthode .6: Déterminer des conditions initiales

On reprend le même circuit que dans l'exercice précédent. L'interrupteur est ouvert depuis **un temps long**. A t=0, on ferme l'interrupteur. Déterminer les conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle en i_l trouvée précédemment.

Corrigé: Déterminer des conditions initiales

*Le terme **temps long** signifie qu'on a atteint le régime forcé (ici indépendant du temps) en $t = 0^-$.*
Par contre, une perturbatino brutale se produit en $t = 0$, donc les grandeurs n'y sont plus continues, sauf par propriété générale. Pour rappel : la tension aux bornes de C et l'intensité circulant dans L.
On veut résoudre une équation différentielle d'ordre 2 en i_L pour $t > 0$, il nous faut donc $i_l(t = 0^+)$ et $\frac{di_l}{dt}(t = 0^+)$.

Etude en $t = 0^-$: L'étude de l'ancien régime forcé donne $u_C(t = 0^-) = 0$ (la bobine assimilable à un fil impose une tension nulle aux bornes du condensateur) et $i_l(t = 0^-) = 0$ (loi des noeuds avec $i_e(t = 0^-) = 0$ (interrupteur ouvert) et $i_R(t = 0^-) = \frac{u_C(t=0^-)}{R} = 0$ et $i_C(t = 0^-) = 0$ (C assimilable à un interrupteur ouvert.)).

Passage par continuité : u_C et i_l sont continues donc : $i_l(t = 0^+) = 0$ et $u_C(t = 0^+) = 0$

Conditions initiales en $t = 0^+$: On a déjà $\boxed{i_l(t = 0^+) = 0}$. De plus :

$$\begin{aligned}\frac{di_l}{dt}(t = 0^+) &= \frac{u_L(t = 0^+)}{L}\\ &= \frac{u_C(t = 0^+)}{L} = 0\end{aligned}$$

Les conditions initiales sont donc :

$$\boxed{\begin{cases} i_l(t = 0^+) & = 0 \\ \frac{di_l}{dt}(t = 0^+) & = 0 \end{cases}} \tag{34}$$

♥ Méthode .7: Résolution et exploitation

On travaille avec le même système que précédemment. On rappelle que l'équation qui régit l'évolution de $i_L(t)$ est :

$$\frac{d^2 i_l}{dt^2} + \frac{2}{RC}\frac{di_l}{dt} + \frac{1}{LC}i_l = -\frac{E}{RLC} \tag{35}$$

Conditions initiales : $i_l(t = 0^+) = 0$ et $\frac{di_l}{dt}(t = 0^+) = 0$

I.3 Q1. Déterminer $i_l(t)$ dans l'hypothèse $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Q2. En déduire la puissance reçue par le bobine p(t).

Q3. Déterminer l'énergie reçue par la bobine entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

Corrigé: Résolution et exploitation

Q1. >La solution générale de l'équation homogène est :

$$i_{l,0}(t) = \exp^{-\frac{t}{RC}}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)\right) \tag{36}$$

On cherche une solution particulière constante à l'équation avec second membre $i_{L,1}(t) = I_0$. L'équation à résoudre (les dérivées temporelles s'annulent) :

$$\frac{1}{LC}I_0 = -\frac{E}{RLC} \Longrightarrow I_0 = -\frac{E}{R} \tag{37}$$

La solution générale de l'équation avec second membre (identique à l'exercice précédent) est donc :

$$i_l(t) = \exp^{-\frac{t}{RC}}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)\right)-\frac{E}{R} \tag{38}$$

Les conditions initiales donnent le système d'équations :

$$i_l(t=0^+) = A-\frac{E}{R} = 0 \Longrightarrow A = \frac{E}{R} \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{di_l}}{\mathrm{dt}}(t=0^+) = -\frac{E}{R^2C}+\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}B = 0 \Longrightarrow B = \frac{E}{R^2C\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}} \tag{40}$$

On en déduit l'expression de l'intensité $i_l(t)$ et de la tension $u_L(t)$:

$$i_l(t) = \exp^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{E}{R}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)+\frac{E}{R^2C\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right)\right)-\frac{E}{R} \tag{41}$$

$$u_L(t) = -\frac{EL}{R}\exp^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{1}{(RC)^2\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}}+\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}t\right) \tag{42}$$

S'entraîner à vérifier l'homogénéité des expressions précédentes :

1. *l'argument des sin/cos/exp doit être sans dimension.*
2. *le facteur devant les sin/cos/exp doit être de la dimension d'une intensité/d'une tension.*

Pensez à utiliser les dimensions des produits LC, RC, E/R, LI (homogène à $[Tension]\times[Temps]$).

Q2. Nous sommes en convention récepteur donc la puissance reçue est :

$$\begin{aligned}
p(t) &= i_l(t)\times u_L(t) && (43)\\
&= -LI_A^2\left(\exp^{-\frac{2t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t)+\frac{1}{\tau\Omega}\sin(\Omega t)\right)\left(\frac{1}{\tau^2\Omega}+\Omega\right)\sin(\Omega t)-\right) && (44)\\
&\times\exp^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{\tau^2\Omega}+\Omega\right)\sin(\Omega t) && (45)
\end{aligned}$$

On a introduit les grandeurs suivantes : $\tau = RC$ et $\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}$. Ce dernier terme est d'ailleurs très utilisé, on l'appelle la pseudo-période. Nous en reparlerons par la suite.

Q3. *Il faut se rappeler que l'énergie reçue par la bobine est stockée et qu'on connaît l'expression de cette énergie stockée. Ainsi, l'énergie reçue sera la différence entre l'énergie stockée au final et l'énergie stockée initialement.*

$$\Delta E_L = E_L(t = +\infty) - E_L(t = 0) = \frac{1}{2}LI(t = \infty)^2 - \frac{1}{2}LI(t = 0)^2 = \frac{LE^2}{2R^2} \qquad (46)$$