Version numérique

Chapitre 9: Cinématique du point

I Grandeurs cinématiques

♥ Définition I.1: Référentiel

Un référentiel $\mathfrak{R}$ est un ensemble de points rigides - c'est-à-dire fixes les uns par rapports aux autres - auquel on associe une horloge. Comme le temps est absolu en mécanique classique, l'horloge est la même quelque soit le référentiel.

♥ Définition I.2: Référentiels usuels

- ⋆ **Référentiel géocentrique :** Le référentiel géocentrique est un référentiel lié au centre de la Terre et et à des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.
- ⋆ **Référentiel terrestre :** Le référentiel terrestre est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et à différents point du globe terrestre.
- ⋆ **Référentiel héliocentrique :** Le référentiel héliocentrique est un référentiel lié au centre du Soleil et à des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.

Réflexion

- ⋆ Quel est le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel héliocentrique ?
- ⋆ Quel est le mouvement du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique ?

♥ Définition I.3: Repère associé à un référentiel

En physique, on associe à un référentiel, un(des) repère(s) $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ où O et les vecteurs sont fixes dans le référentiel.

On peut aussi associer à un référentiel des repères cylindriques ou sphériques. Attention, les vecteurs de ces derniers ne sont pas fixes dans le référentiel.

II Position, vitesse, accélération

Position et trajectoire

♥ Définition II.1: Vecteur Position

On définit la position d'un point matériel M dans un référentiel $\mathfrak{R}$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ où O est un **point fixe** du référentiel.

L'évolution du mouvement du point matériel $\overrightarrow{OM}(t)$ est appelée **équation horaire**. Elle est aussi définie par les composantes du vecteur position dans la base de projection. La courbe paramètrée (ou trace) ainsi définie est appelée **trajectoire**.

Réflexion

Rappeler les expressions du vecteur position dans :

Q1. le système de coordonnées cartésien centré en O.

Q2. le système de coordonnées cylindriques centré en O.

Q3. le système de coordonnées sphériques centré en O.

Préciser à chaque fois les coordonnées choisies pour le point M.

II.1 Vitesse

♥ Définition II.2: Vecteur vitesse

Soit O un point fixe du référentiel R et M un point mobile. La vitesse du point M dans le référentiel R est définit comme la dérivée temporelle du vecteur position dans le référentiel R.

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \tag{9.1}$$

♥ Propriété II.1: Expression du vecteur vitesse

- ⋆ En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{9.2}$$

- ⋆ En coordonnées cyindriques :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{9.3}$$

- ⋆ En coordonnées spheriques :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \tag{9.4}$$

♥ Démonstration

Méthode 1 : On utilise les expressions des déplacements élémentaires $\overrightarrow{dOM}$:

$$\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z} \tag{9.5}$$

$$\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z} \tag{9.6}$$

$$\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} \tag{9.7}$$

"Diviser" par dt consiste à dériver [a] les variables des différentielles (dx, dr...) d'où les expressions recherchées.

[a] Principe du taux de variation

Réflexion

Méthode 2 : En utilisant l'expression des dérivées des vecteurs des bases cartésiennes, cylindriques et sphérique ainsi que le principe de dérivation d'un vecteur, démontrer les expressions des vecteurs vitesses.

II.2 Accélération

♥ Définition II.3: Vecteur accélération

On définit l'accélération d'un point M dans un un référentiel R comme la dérivée du vecteur vitesse dans le référentiel R.

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R \tag{9.8}$$

♥ Propriété II.2: Expressions du vecteurs accélération

En coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{9.9}$$

En coordonnées cylindriques, le vecteur accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{9.10}$$

Le cas sphérique n'est pas à connaître dans le cas général.

♥ Démonstration

On va démontrer le cas cylindrique :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_{M/R}} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/R}}}{\mathrm{dt}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}\right) \\
&= \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{dt}}_{\mathfrak{R}}}_{=\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\Theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{dt}}_{\mathfrak{R}}}_{=-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

♥ Théorème II.1: Relation vitesse-accélération

- ⋆ Un mouvement est dit **uniforme** si la **norme** de la vitesse est constante au cours du mouvement.
- ⋆ Si la norme diminue, on dit que le mouvement est décéléré. Si la norme augmente, il est accéléré.
- ⋆ Dans un mouvement uniforme, le vecteur accélération est soit nul, soit perpendiculaire au vecteur vitesse.
- ⋆ Dans un mouvement accéléré, le vecteur accélération forme avec le vecteur vitesse un angle en valeur absolue inféreure à $\pi/2$
- ⋆ Dans un mouvement décéléré, le vecteur accélération forme avec le vecteur vitesse un angle en valeur absolue supérieure à $\pi/2$

♥ Démonstration

Soit $\theta = (\vec{v};\vec{a})$. Remarquons que :

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\|v\|\,\|a\|\cos\theta = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2)$$

La vitesse est donc constante si : $\|v\|\,\|a\|\,cos\theta = 0$ soit si $\|a\| = 0$ ou si $\theta = \pm\pi/2$.
Sinon, $\text{sign}(\frac{dv}{dt}) = \text{sign}(\theta)$ donc la vitesse est décroissante si $|\theta| > \pi/2$ et croissante si $|\theta| < \pi/2$.

♥ Définition II.4: Repère de Frenet

La base de Frenet est une **base locale** définie **pour une trajectoire plane**. Elle est définit par deux vecteurs unitaires :

- ⋆ Un vecteur tangeant à la trajectoire $\overrightarrow{u_T}$ et dirigé dans le sens du mouvement
- ⋆ Un vecteur normale à la trajectoire $\overrightarrow{u_N}$ et dirigé de manière à ce que l'angle $(\overrightarrow{u_T},\overrightarrow{u_N}) = +\frac{\pi}{2}$.

♥ Propriété II.3: Accélération dans la base de Frenet

Geogebra

Pour un mouvement plan, on peut décomposer l'accélération en deux composantes :

- ⋆ l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ suivant $\overrightarrow{u_T}$
  Cette composante de l'accélération est réponsable de la variation de vitesse (en norme : accélération et décélération)
- ⋆ l'accélération normale $\overrightarrow{a_N}$ suivant $\overrightarrow{u_N}$
  Cette composante de l'accélération est responsable de la déviation du mobile (changement de direction et donc courbure de la trajectoire).

Une étude des composantes de l'accélération montre qu'on a les relations suivantes :

$$\|\overrightarrow{a_T}\| = \left|\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\right| \qquad \|\overrightarrow{a_N}\| = \frac{v^2}{|R|}$$

où R est appelé rayon de courbure de la trajectoire en un point. Il peut varier dans le temps.

Réflexion

Q1. La vitesse n'est dirigée que suivant l'un des deux vecteurs de la base de Frenet. Laquelle ?

Q2. En vous aidant de la propriété précédente, démontrer l'expression de l'accélération normale (pensez à l'interprétation du produit scalaire).

Q3. L'accélération normale est-elle orientée vers l'intérieur ou l'extérieur d'une courbe ?

Q4. Une trajectoire fortement courbée nécessite-t-elle une forte ou une faible accélération normale ? Est-ce attendue ?

Q5. A rayon de courbure équivalent, commenter l'évolution de l'accélération normale nécessaire avec la vitesse. Commenter son interprétation en terme de conduite par exemple.

Q6. Qu'est le rayon de courbure d'une trajectoire circulaire et comment sont alors dirigés $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$?

Q7. Que vaut le rayon de courbure d'une trajectoire rectiligne ?

III Grandeurs cinétiques

III.1 Point matériel et inertie

♥ Définition III.1: Masse intertielle

La capacité que possède un objet matériel à résister à toute variation de mouvement est appelé **inertie**.

La propriété d'inertie est représentée par une grandeur scalaire positive appelée **masse inertielle** dans l'unité est le kg. Plus la masse inertielle d'un objet est grande, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

La masse est inertielle est indépendante du temps et du référentiel considéré : il s'agit d'une caractéristique propre au point matériel. Pour un système fermé (n'échangeant pas de matière), elle est conservée.

Le terme inertielle sert à la distinguer, a priori de la masse gravitationnelle (mise en jeu dans l'interaction du même nom). Leur égalité étant postulée et vérifiée avec une très grande précision, on parlera par la suite indifférement de **masse**.

♥ Définition III.2: Point matériel

Un **point matériel** est une modélisation idéalisée d'un objet ponctuel matériel, c'est-à-dire d'une portion infinitésimale de matière.

Un point matériel ne nécessite que la données de 3 coordonnées de repérage dans l'espace et de **masse**.

Réflexion

Un système mécanique n'est pas forcément modélisable par un point matériel : une telle modélisation n'a de sens que si ses mouvements internes (déformation, rotation), n'ont pas d'influence sur son mouvement global.

Q1. On considère un ballon lancé en l'air (dont on néglige l'action). Peut-on le modéliser comme un point matériel ?

Q2. Même question pour un ballon roulant sans glisser sur le sol ?

III.2 Eléments cinétiques

Quantité de mouvement

♥ Définition III.3: Quantité de mouvement

Soit M un point matériel de masse inertielle m. On définit la quantité de mouvement d'un point M dans le référentiel R par la grandeur :

$$\overrightarrow{p_{M/R}} = m\overrightarrow{v_{M/R}} \quad (9.11)$$

Réflexion

Q1. On considère un point matériel M de masse m en mouvement rectiligne sur un axe Δ à une vitesse $v(t)$ dans un référentiel où Δ est fixe.. Proposer un repère adapté et y exprimer la quantité de mouvement de M dans ce référentiel.

Q2. On considère un point matériel M de masse m en mouvement circulaire de rayon R autour d'un point O à une vitesse $v(t)$ dans un référentiel où le cercle est fixe. Proposer un repère adapté et y exprimer la quantité de mouvement de M dans ce référentiel.

Moment cinétique

♥ Définition III.4: Moment cinétique par rapport à un point

Soit un point M de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v_{M/R}}$, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/R}}$ rapport au référentiel R et A un point [a]. Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point A dans le référentiel R est défini par le vecteur :

$$\overrightarrow{L_{A/R}(M)} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p_{M/R}} \tag{9.12}$$

a. arbitraire

♥ Définition III.5: Moment cinétique par rapport à un axe

Soit un axe Δ orienté. On note B un point de cet axe et $\overrightarrow{u_\Delta}$ un vecteur unitaire directeur de l'axe. On définit un moment cinétique rapport à l'axe Δ :

$$L_{\Delta/R} = \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{L_{B/R}}(M) \tag{9.13}$$

Réflexion

Q1. Parmi les deux grandeurs précédentes, lequel est un scalaire, lequel est un vecteur ?

Q2. Montrer que $\overrightarrow{L_{B/R}(M)} = \overrightarrow{L_{A/R}(M)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{M/R}}$.

Q3. En déduire que quelque soit le point B sur l'axe Δ, le moment cinétique sur Δ du point M sera bien le même [a].

a. Sinon, la définition du moment sur l'axe n'aurait aucune sens. . .

Réflexion

Interprétation du moment cinétique sur un axe : on considère un point M de masse m possédant une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$ et un axe Δ fixe dans ce référentiel.
On pose un repère cylindrique d'axe Oz suivant Δ et de centre O sur Δ.

Q1. Rappeler l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Q2. Rappeler l'expression générale du vecteur vitesse de M dans ce repère. Interpréter les trois composantes comme des mouvements différents par rapport à Δ.

Q3. Calculer le moment cinétique $L_{\Delta/R}$ en fonction de $m, r, \dot{\theta}$.

Q4. Le moment cinétique sur Δ ne donne d'information que sur un des mouvements de M par rapport à Δ, lequel [a] ?

Q5. Commenter le sens de ce mouvement en fonction du signe de $L_{\Delta/R}$

Il est important de retenir quele mouvement cinétique suivant un axe donne une information uniquement sur la rotation autour de cet axe et sons caractère algébrique donne aussi une information sur le sens de la rotation.
Comme nous pourrons le remarquer avec les théorèmes ensuite, le facteur mr^2 joue le rôle "d'inertie" pour la rotation : la masse ET la distance à l'axe de rotation rendent plus difficile une modification de la rotation.

Q6. On considère le moment cinétique de M en un point O. Comment interpréter les trois composantes de $\overrightarrow{L_{O/R}(M)}$ dans une base cartésienne en utilisant ce que vous venez de voir ?

Q7. ⇝⇝ A un instant t, on a $\overrightarrow{L_{O/R}(M)}(t) = X_0 \vec{e}_x$. En déduire (au moins qualitativement) le plan de rotation du point M autour de l'instant t.

a. réciproquement, seul un mouvement de M donne un mouvement cinétique nul

Réflexion

Calculs : On considère un point matériel M de masse M en mouvement rectiligne sur un axe Oz à une vitesse $v(t)$ dans un référentiel.

Q1. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport au point O dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Commenter sa valeur.

Q2. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe Ox dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Commenter sa valeur.

Q3. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe Bx dans le référentuel $\mathfrak{R}$. On donne les coordonnées de $B(a, b, 0)$. Commenter.

La notation de rotation évoquée précédemment n'implique que le point tourne mais que depuis l'axe Bx, un observateur doivent tourner la tête pour suivre M.

Energie cinétique

♥ Définition III.6: Energie cinétique d'un point

On appelle énergie cinétique d'un point matériel M de masse m dans le référentiel R, la quantité scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{M/R}^2 \tag{9.14}$$

- ⋆ La variation d'énergie cinétique entre deux points A et B ne dépend que des états du système au point A et B (de la vitesse au point A et B) mais pas du chemin parcouru entre les deux. C'est pourquoi, on note cette variation ΔE_c (l'important, c'est le signe Δ).
- ⋆ Sur un déplacement infinitésimal, cette variation est infinitésimale et se note dE_c (l'important, c'est le "d" appelé "d droit").

☞ Méthodes : Trajectoire circulaire (IV.1, IV.2), Utiliser des expressions à connaître (IV.3, IV.4)

☞ Applications : Chute d'une règle(IV.1), Rotation de la Terre (IV.2)

Corrigés

IV S'entrainer

IV.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Mouvements circulaires

Un mouvement est dit circulaire si le point M se déplace sur un cercle (ou une portion de cercle) fixe dans le référentiel R. On parle alors de trajectoire circulaire. C'est aussi un mouvement à 1 degré de liberté.

♥ Méthode IV.1: Etudier un mouvement circulaire

On suppose qu'on sait que la trajectoire est circulaire de rayon R_0 et de centre O. On note M le point mobile et m sa masse.

Q1. Quel type de coordonnée est-il préférable de choisir. Préciser alors l'expression du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

Q2. Que vaut l'accération normale ? l'accélération tangentielle ? Que devient chaque terme dans le cas d'un mouvement uniforme ?

Q3. Dans un mouvement circulaire dont l'axe de rotation est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_z}$, on définit le **vecteur tournant** $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de $\overrightarrow{\Omega}$ et $\overrightarrow{OM}$ puis le vecteur accélération sous la forme de deux termes faisant intervenir $\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$. Interpréter ces deux termes.

Q4. Exprimer le moment cinétique du point M calculé au point O en fonction de m, R_0 et $\dot{\theta}$.

♥ A retenir: Etudier un mouvement circulaire

- ⋆ Si l'on sait que la trajectoire est circulaire et centre O, alors les coordonnées utiles sont les coordonnées cylindriques d'axe Oz perpendiculaire au plan du cercle.
- ⋆ On a alors les relations :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= R_0\overrightarrow{e_r} \\
\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} &= R_0\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\
\overrightarrow{a_{M/\mathfrak{R}}} &= \underbrace{-R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}}_{normale=radiale} + \underbrace{R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}_{tangentielle=orthoradiale}
\end{aligned}$$

- ⋆ Dans le cas uniforme, l'accélération tangentielle/orthoradiale est nulle.
- ⋆ On peut exprimer la vitesse et l'accélération en fonction du vecteur tournant :

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \tag{9.15}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}_{normale=radiale} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}}_{tangentielle=orthoradiale} \tag{9.16}$$

♥ Méthode IV.2: Cercle en coordonnées cartésiennes

Il peut arriver qu'on ne sache pas à l'avance que la trajectoire est un cercle et qu'on ait choisi de travailler coordonnées cartésiennes. Il est important de savoir reconnaître une trajectoire circulaire par son cartésienne et par son équation paramétrique dans le plan.

Q1. Pour rappel, un cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ et rayon R correspond à l'ensemble des points M(x,y) tels que $M_0M^2 = R^2$. Calculer la distance M_0M. En déduire l'**équation cartésienne** d'un cercle.

Q2. On suppose maintenant que le cercle est de centre $O(0,0)$ et que le mobile se déplace sur le cercle de manière uniforme à une vitesse angulaire ω.

Q2.a. Que valent $r(t)$ et $\theta(t)$ en coordonnées polaires de centre O ? On prendra $\theta(t=0) = 0$.

Q2.b. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de R, ω et du temps.

Q2.c. Que deviennent $x(t)$ et $y(t)$ si le centre du cercle est maintenant $M_0(x_0, y_0)$.

♥ A retenir: Cercle en coordonnées cartésiennes

On retiendra les deuc formes cartésiennes et paramétriques qui peuvent être rencontrées dans des exercices :

- ⋆ Cartésienne :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{9.17}$$

- ⋆ Paramétrique :

$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin\omega t$$

Si vous rencontrez de telles formes, il faut y reconnaître une trajectoire circulaire de rayon R.

Généralités

♥ Méthode IV.3: Calculer une accélération

On considère un point M contraint à se déplacer sur une sphère fixe de rayon R_0. Il part du pôle Nord en direction du pôle Sud à une vitesse v_0 constante. Déterminer le vecteur accélération et l'évolution des coordonnées sphériques du point M dans un repère sphérique associé au référentiel de la boule.

♥ A retenir: Calculer une accélération

L'accélération en coordonnées sphériques n'a pas d'expression générale à connaître mais il faut pouvoir la calculer dans des cas particuliers. On utilisera les dérivées angulaires à connaître.

♥ Méthode IV.4: Utiliser les expressions connues

Un satellite géostationnaire est un satellite en orbite circulaire autour de la terre à une altitude $h = r - R_T$ où R_T est le rayon de la Terre (r est le rayon de l'orbite). L'orbite est équatoriale et il reste fixe par rapport à un point de la Terre. Il est soumis à une accélération dans le référentiel géocentrique :

$$\vec{a} = -g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 \vec{e_\rho}$$

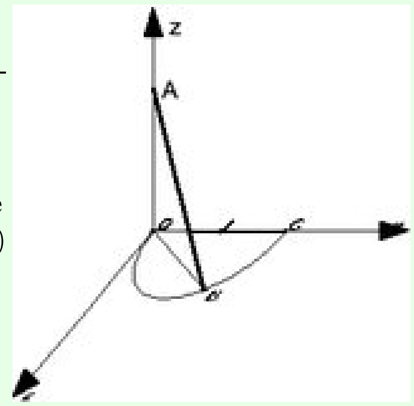
Calculer r avec $g_0 = 9,8\text{m.s}^{-1}$ et $R_T = 6400\text{km}$.

♥ A retenir: Utiliser les expressions connus

On retiendra le principe d'utiliser les expressions **à connaître** dans des équations. Ici l'accélération est directement données, par la suite, elle apparaîtra dans des théorèmes comme le PFD, mais ce sont toujours les expressions générales qui seront introduites.

IV.2 Applications

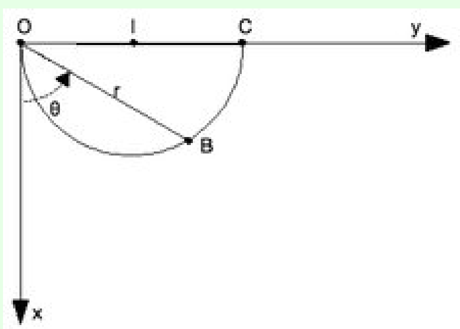
✍ Exercice IV.1: Chute d'une règle



Une barre rectiligne AB de longueur fixe $2b$ se déplace dans le référentiel R repéré par $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ de telle sorte que :

- ⋆ son extrémité A se trouve sur le demi-axe positif Oz.
- ⋆ son extrémité B décrit le demi-cercle de plan (xOy) de centre $I(0, b, 0)$ et de rayon b, à la vitesse angulaire (par rapport à I) ω constante et positive. A l'instant $t = 0$, B se trouve en O.

On note ϕ l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$.



Q1. Déterminer la durée T du mouvement

Q2. Déterminer une relation simple entre ϕ et θ.

Q3. Etablir les expressions en fonction du temps t des coordonnées polaires r et θ de B (cf. Figure).

Q4. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ en fonction de ω et t.

Q5. Calculer les coordonnées cylindriques (R, Θ) puis cartésiennes X, Y et Z du milieu J de la barre.

Q6. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_J}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_J}$ de J, ainsi que leur normes.

Eléments de correction (sans justification) : $\theta(t) = \frac{\omega}{2}t$ et $r(t) = b\sqrt{2(1-\cos\omega t)}$et $z(t) = 2b^2(1+\cos\omega t)$

✍ Exercice IV.2: Rotation de la Terre

On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6400$km et tournant sur son axe en 24h à vitesse angulaire constante ω. On considère un point M situé à une colatitude θ. L'axe (Oz) de référence étant l'axe de révolution de la Terre.

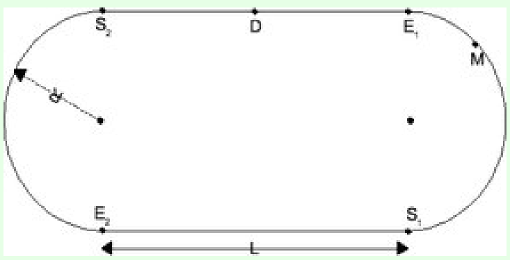
Q1. Déterminer ω.

Q2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M en fonction de ω, R_T et t. On prendra soin de définir correctement le repère de projection.

Eléments de correction (sans justification) : $\omega = 0.72 \times 10^{-4} rad.s^{-1}$

IV.3 Entraînement

✍ Exercice IV.3: Vélodrome



On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point matériel M, qui s'entraîne sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles de rayon $R = 20\text{cm}$ relié par deux lignes droites de longueurs $L = 62\text{cm}$. Le cycliste part de D, milieu d'une ligne droite avec une vitesse nulle. Il exerce un effort constant qui se traduit par une accélération tangentielle au mouvement constante a_1. On note C_1 et C_2 les centres des deux demi-cercles.

Q1. De D, le cycliste se dirige vers le point E_1, entrée du demi-cercle. Justifier que l'accélération normale à la vitesse est nulle puis calculer le temps t_{E1} de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E1} en E_1 en fonction de a_1 et L.

Q2. On étudie le mouvement du cycliste dans le demi-cercle entre E_1 et S_1. On pose un repère cylindrique dont de centre C_1. On prendra l'angle θ par rapport à l'axe C_1E_1.

Q2.a. Déterminer le temps que t_{S1} de passage en S_1 en fonction de a_1, L et R ainsi que la vitesse v_{S1} en S_1 en utilisant le repère cylindrique.

Q2.b. On note $v(t)$ la vitesse du cycliste à chaque instant. Montrer que l'accélération normale au mouvement est non nulle dans le demi-cercle et qu'elle vaut à chaque instant $a_N = \frac{v(t)^2}{R}$.

Q3. Retrouver les résultats en ligne droite et en cercle en utilisant la base de Frenet.

Q4. Calculer de même les temps de passage t_{E2}, t_{S2}, t_D respectivement en S_1, S_2, D (après un tour) ainsi que les vitesses v_{E1}, v_{E2}, v_D.

La course se fait sur quatre tours et est longue de 1km mais on ne s'intéresse ici qu'au premier tour effectué en $T_1 = 18,155\text{s}$ (par le britannique Chris Roy aux Championnats du monde de 2007).

Q5. Déterminer la valeur de l'accélération a1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est d'environ $v_D = 60\text{km.h}^{-1}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Trajectoire circulaire.
- ⋆ Base de Frenet.

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ $t_{E1} = \sqrt{\frac{L}{a_1}}$ et $v_{E1} = \sqrt{a_1 L}$.
- ⋆ $t_{S1} = \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}}$ et $v_{S1} = \sqrt{a_1(L+2\pi R)}$.
- ⋆ $t_{E2} = \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}}$ et $v_{E2} = \sqrt{a_1(3L+2\pi R)}$.
- ⋆ $t_{S2} = \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}}$ et $v_{S2} = \sqrt{a_1(3L+4\pi R)}$.
- ⋆ $t_D = \sqrt{\frac{4L+4\pi R}{a_1}}$ et $v_D = \sqrt{a_1(4L+4\pi R)}$.

✍ Exercice IV.4: Trajectoire d'un bateau

On s'intéresse à une planète semblable à la Terre mais entièrement recouverte d'eau. On assimile la planète à une sphère de rayon R. Un bateau se déplace à la surface de cette planète, avec une vitesse constante V_0 et toujours en direction du Nord-Est.

Q1. Exprimer les différentes composantes de la vitesse en projection dans la base de coordonnées sphériques associé au repère terrestre.

Q2. Déterminer par intégration des équations précédentes, les expressions de la colatitude θ et de la longitude ϕ en fonction du temps.

Q3. Quelle est la date d'arrivée au pôle ? Combien de tour du globe auront été réalisés alors ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Coordonnées sphériques

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ $\theta(t) = \theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{V_0}{R}t$
- ⋆ $\phi(t) = \ln \frac{\tan \theta_0/2}{\tan \frac{\theta_0 - \frac{\sqrt{2}V_0}{2R}t}{2}}$

Chapitre 10: Dynamique du point et théorèmes

I Actions mécaniques

♥ Définition I.1: Action mécanique

Soit deux systèmes mécaniques Σ_1 et Σ_2, on dit que les deux systèmes sont en **interaction** si l'un est susceptible de modifier le mouvement [a] de l'autre et réciproquement.

$\mathfrak{A}_{1\to2}$ (resp. action du système Σ_2 sur le système Σ_1 : $\mathfrak{A}_{1\to2}$).

L'action $\mathfrak{A}_{1\to2}$ est dite :

- ⋆ **ponctuelle** si elle s'applique sur un point unique de Σ_2.
- ⋆ **globale** si elle s'applique sur une zone (surface ou volume) étendue de Σ_2. On considère qu'une action globale peut être modélisée comme le regroupement d'actions ponctuelles sur les différents de la surface/volume.

[a] rompre l'immobilité ou immobiliser est une modification du mouvement

- ⋆ La notion d'action ponctuelle est *théorique :* elle permet de modéliser simplement les actions globales.
- ⋆ Si le système *subissant l'action* est assimilé à un point matériel, cette action est nécessairement ponctuelle. . .
- ⋆ On distinguera les **actions de contact** (qui s'applique sur la surface de contact) des **actions à distance** (qui s'appliquent sur le volume du système).

I.1 Modélisation des actions ponctuelles

♥ Propriété I.1: Modélisation des actions ponctuelles

Soit une action ponctuelle $\mathfrak{A}_{1\to2}$ d'un système Σ_1 sur un système Σ_2. On modélise mathématiquement cette action par deux caractéristiques :

- ⋆ sa **force** $\overrightarrow{F}(\mathfrak{A}_{1\to2})$ (noté souvent simplement $\overrightarrow{F}$) qui donne la direction et le sens vers laquelle l'action tend à entraîner le système et avec quelle intensité elle tend à entraîner le système.
- ⋆ son **point d'application**.

Par principe physique, les caractéristiques d'une action sont indépendantes du référentiel considéré.
La force $\overrightarrow{F}$ donne la direction et le sens vers laquelle l'action tend à entraîner le système mais cela ne veut pas dire que le sytème va aller dans sa direction (son inertie ou d'autres forces peuvent l'en empêcher).

♥ Définition I.2: Moment d'une action ponctuelle

Soit une action ponctuelle $\mathfrak{A}_{1\to2}$ d'un système Σ_1 sur un système Σ_2 modélisée par une force $\overrightarrow{F}_{ext\to A}$ et un point d'application A.

- ⋆ Soit un point B **arbitraire** de l'espace. On définit le moment $\overrightarrow{MB}(\mathfrak{A}1 \to 2)$ de l'action $\mathfrak{A}_{1\to2}$ par rapport au point B par :

$$\overrightarrow{M_B}\left(\mathfrak{A}_{1\to2}\right) = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{ext\to A}} \tag{10.1}$$

- ⋆ Soit un axe **arbitraire** Δ orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$. On définit le moment $M_\Delta(\mathfrak{A}_{1\to2})$ de l'action $\mathfrak{A}_{1\to2}$ par rapport à l'axe Δ par :

$$M_\Delta\left(\mathfrak{A}_{1\to2}\right) = \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{M}_B\left(\mathfrak{A}_{1\to2}\right) = \overrightarrow{u}_\Delta \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}\right) \tag{10.2}$$

  où B est un point de l'axe Δ.

Par abus de langage de moment d'une force.

Réflexion

Q1. Quelle est l'unité du moment d'une action ? Est-ce la même unité que le moment cinétique ? *Il est important de ne pas confondre les deux grandeurs.*

Q2. Montrer que :

$$\overrightarrow{M_B}\left(\mathfrak{A}_{1\to2}\right) = \overrightarrow{M_C}\left(\mathfrak{A}_{1\to2}\right) \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{F_{ext\to A}} \tag{10.3}$$

Q3. En déduire que le moment d'une action sur un axe ne dépend pas du point de l'axe considéré.

Réflexion

Interprétation du moment d'une action. On considère un axe orienté Δ et on paramètre un système de coordonnées cylindrique d'axe Oz confondu avec Δ. L'expression la plus générale d'une force dans ce repère est :

$$\overrightarrow{F} = F_r \overrightarrow{e}_r + F_\theta \overrightarrow{e}_\theta + F_z \overrightarrow{e}_z$$

Q1. Par rapport à Δ, associer chaque composante de $\overrightarrow{F}$ à une incidence sur le mouvement du point M qui la subit : éloignement/rapprochement, glissement dans la direction de Δ, rotation autour de Δ.

Q2. Rappeler l'expression générale du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point M de coordonnées (r, θ, z) dans le système de coordonnées cylindriques. En déduire l'expression du moment de l'action associée à $\overrightarrow{F}$ sur l'axe Δ.

Q3. Le moment de $\overrightarrow{F}$ n'est non nul que si $\overrightarrow{F}$ a tendance à modifier quel mouvement de M autour de Δ ? Commenter le signe du moment par rapport au sens dans lequel s'effectue cette modification.

Q4. Ce moment est aussi proportionnel à une autre grandeur. Laquelle ? Associer cette observation au principe du bras de levier.

On retiendra que le moment d'une action sur un axe donne la tendance qu'à cette action à faire tourner le mobile autour de cet axe, y compris le sens de rotation car le moment sur un axe est une grandeur ***algébrique****.*
Ce moment tient aussi compte de la distance à l'axe car plus on applique l'action loin de l'axe, plus il est facile de faire pivoter l'objet autour de Δ : c'est le principe du ***bras de levier.***

I.2 Actions ponctuelles usuelles

Actions à distance

♥ Propriété I.2: Interaction gravitationnelle

Soit deux points matériels $M1etM2$ de masses respectives $m1etm2$. Les deux masses sont en interaction dites gravitationnelles. L'action de $M1surM2$ est modélisée par une force dirigée de $M2versM1$ dont l'expression est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{grav,1\to2}} &= -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}\\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{1\to2}}\end{aligned}$$

où G est la constante de gravitation universelle dont l'expression est $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$.

Dans la seconde expression, r est la distance M_1M_2 et $\overrightarrow{u_{1\to2}}$ est le vecteur unitaire porté par la droite orientée de M_1 vers M_2.

♥ Définition I.3: Champ de gravitation

Soit un point M_1 de masse m_1. On dit que le point M_1 créé dans tout point P de l'espace un **champ de gravitation** $\vec{\mathfrak{G}}M_1(P)$ dont l'expression est :

$$\overrightarrow{\mathfrak{G}_{M_1}}(P) = -Gm_1\frac{\overrightarrow{M_1P}}{M_1P^3}$$

Si l'on place en un point P un point matériel M_2 de masse m_2, alors le point M_2 subira une action gravitationnelle de la part de M_1 : $\overrightarrow{F_{grav,1\to2}} = m_2\overrightarrow{\mathfrak{G}_{M_1}}(P = M_2)$.

♥ Propriété I.3: Interaction coulombienne

Soit deux points matériels M_1 et M_2 chargés de charges respectives q_1 et q_2. Les deux charges sont en interaction dites coulombiennes. L'action de M_1 sur M_2 est modélisée par une force portée par la droite M_1M_2 dont l'expression est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{elec,1\to2}} &= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}\\ &= -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\overrightarrow{u_{1\to2}}\end{aligned}$$

où ϵ_0 est la **permittivité électrique du vide** dont l'expression est $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{s}^4.\mathrm{A}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^{-3}$ soit $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9910^9 S.I.$.

Dans la seconde expression, r est la distance M_1M_2 et $\overrightarrow{u_{1\to2}}$ est le vecteur unitaire porté par la droite orientée de M_1 vers M_2.

♥ Définition I.4: Champ électrique

Soit un point M_1 de charge q_1. On dit que le point M_1 créé dans tout point P de l'espace un **champ électrique** $\overrightarrow{E_{M_1}}(P)$ dont l'expression est :

$$\overrightarrow{E_{M_1}}(P) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1P}}{M_1P^3}$$

Si l'on place en un point P un point matériel M_2 de charge q_2, alors le point M_2 subira une action coulmbienne de la part de M_1 : $\overrightarrow{F_{grav,1\to 2}} = q_2\overrightarrow{E_{M_1}}(P = M_2)$.

Réflexion

Q1. Que vaut le champ de gravitation au point M créé par deux charge M_1 et $M_1^{'}$ de masses respectives m_1 et $m_1^{'}$? Que vaut la force résultante exercée par ces deux points M_1 et $M_1^{'}$ sur un point matériel M_2 de masse m_2 situé en ce point M ? Que se passerait-il si l'on avait N points M_n pour le champ de gravitation et la force calculée précédemment ?

Q2. Faire le même raisonnement pour l'interaction coulombienne. En déduire le rôle "d'intermédiaire" évoqué pour le champ électrique et de même pour le champ de gravitation.

Ce rôle simplifie grandement les études en séparant les causes (agencement de masse/charges parfois très complexes) des conséquences (leur action, donc celui des champs, sur des masses/-charges en mouvement).

Q3. Observer les similitudes dans les expressions des forces gravitationnelle et coulombienne. En déduire les grandeurs gravitationnelles analogues aux grandeurs électriques q_1, q_2 et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Q4. Le champ électrique en un point M à l'intérieur d'une boule de rayon R uniformément chargée de charge totale Q est : $\overrightarrow{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 R^3} r\overrightarrow{u}_r$ où r et $\overrightarrow{u}_r$ sont la coordonnée de M et le vecteur radiale associée en coordonnées sphériques. Utiliser l'analogie précédemment pour déterminer le champ de gravitation en un point M à l'intérieur de la Terre en connaissant la masse M_{Terre} de la Terre (quelle hypothèse simplificatrice attend-on ici ?).

Les deux forces précédentes peuvent se mettre sous la forme $-K/r^2\overrightarrow{u}_r$. On parle de **forces newtoniennes.**

♥ Propriété I.4: Pesanteur

A la surface de la Terre, tout corps massique est attiré vers "le bas" par une action appelée poids. Pour un point matériel M de masse m, la force qui s'applique s'écrit :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} \tag{10.4}$$

où $\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur au point M. Il est dirigé vers "le bas" (en réalité, il permet de définir la verticale (principe du fil à plomb)).

Vous verrez en deuxième année que la pesanteur ne correspond pas tout à fait à la gravitation. Mais la différence est suffisamment faible pour puisse les confondre en première approximation.

♥ Définition I.5: Force de Lorentz

Soit un point matériel M chargé de charge q et un champ électromagnétique donc les expressions vectorielles au point M sont $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$. Alors le champ électromagnétique exerce une action dont la force, appelée force de Lorentz s'écrit :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\left(\vec{E}(M) + \vec{v}_{M/\mathfrak{R}} \wedge \vec{B}(M)\right) \tag{10.5}$$

où $\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel d'étude.

Initialement, les champs électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$ sont la conséquence de la présence de charges (pour le champ électrique) en mouvement (pour le champ magnétique) et vont agir sur d'autres particules chargées. On peut les voir comme des intermédiaires de calcul dont l'interaction électromagnétique entre deux systèmes chargées.

Réflexion

Q1. Si on ne s'intéresse qu'à la partie magnétique $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}_{M/\mathfrak{R}} \wedge \vec{B}(M)$, commenter son orientation par rapport à la vitesse. En déduire, en utilisant les résutats vus en cinématique une des caractéristiques d'un mouvement soumis uniquement à champ magnétique.

Actions de contact

♥ Propriété I.5: Tension d'un fil ou d'une tige

La tension d'un fil (tendu) ou d'une tige rigide est l'action qu'exerce un fil/une tige sur un système accroché au fil/à la tige (c'est une action de contact). Dans le cas d'un fil/une tige fin(e) dont la torsion n'a pas d'influence (ou qui ne se tord pas), on peut assimiler cette action à une action ponctuelle.

La force exercée par le fil/la tige n'a pas d'expression connue a priori mais on sait que :

- ⋆ dans le cas d'un fil, elle est alors nécessairement vers le fil et non vers le système accroché (un fil ne peut que tirer le système).
- ⋆ pour une tige, la force peut être dans les deux directions.

Cas d'un fil/tige parfaite : Un fil/une tige parfaite est un fil/tige **sans masse**. Dans ce cas

- ⋆ la tension exercée en chaque point du fil/tige sur l'autre partie du fil est la même en tout point du fil/tige est égale à la tension exercée à chaque extrémité du fil/tige sur les systèmes accrochée
- ⋆ la tension du fil/tige est alors tangente au fil/tige.

♥ Démonstration

On démontrer les propriétés dans le cas d'un fil/tige parfait : on utilise le principe fondamentale de la dynamique : $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{ext \to systeme}}$.
Si l'on considère une portion de fil, les deux actions qui s'appliquent sur la portion de fil sont la tension de partie de fil à gauche et la tension de la partie du fil à droite. Comme le fil est sans masse, la quantité de mouvement est nulle, il vient donc que les deux tensions du fil sont opposées de même intensité. Par symétrie, il vient que les tensions seront tangentes au fil.

Réflexion

Soit deux masses ponctuelles m_1 et m_2 accrochées aux deux extrémités d'un fil tendu parfait. Que peut-on dire des actions du fil sur m_1 et m_2 ?

♥ Propriété I.6: Action d'un ressort

Soit un système accroché à un ressort. En général, on considère le point d'accroche comme ponctuel et la force exercée par le ressort à son extrémité sur le système comme tangente au ressort. Si le ressort est de masse négligeable [a], alors la force, appelée **force de rappel élastique**, exercée par le ressort sur un système accroché à son extrémité s'écrit si sa longueur est l :

$$\overrightarrow{F_{ressort \rightarrow extremite}} = -k\left(l - l_0\right)\overrightarrow{u_{ext}} = -k\Delta l \overrightarrow{u_{ext}} \tag{10.6}$$

où l_0 est la *longueur à vide du ressort*, k sa **raideur** et $\overrightarrow{u_{ext}}$ un vecteur unitaire tangent à l'axe de ressort et dirigé vers l'extérieur du ressort.

$\Delta l = l - l_0$ est appelé *allongement du ressort*.

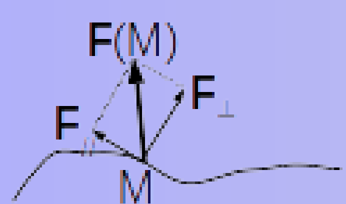
a. cas usuel

Réflexion

Q1. Que vaut la force de rappel lorsque $l = l_0$? En déduire une interprétation du terme *longueur à vide*. Si l'on maintient le ressort à la verticale avec une masse au bout, la longueur au repos sera-t-elle la longueur à vide ? plus grande que l_0 ? ou plus petite que l_0 ?

Q2. Lorsque le ressort est étiré, quelle inégalité a-t-on entre l et l_0 ? En déduire le sens dans lequel est dirigée la force. Même question lorsque le ressort est comprimé. Interpréter le terme "force de rappel".

♥ Définition I.6: Contact solide et contact fluide



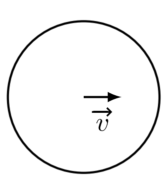
En un point de contact M entre le système et le solide/fluide (qu'on appellera Σ_{ext}), l'action ponctuelle (modélisée par la force $\vec{F}(M)$) peut-être décomposée en deux composantes :

- ⋆ une composante normale à la surface de contact $\overrightarrow{F_\perp}(M)$
- ⋆ une composante tangentielle à la surface de contact $\overrightarrow{F_{//}}(M)$

- ⋆ La composante normale correspond à la force de pression (fluide) [a] ou la réaction de non "inter-pénétration" (solide). Dans les deux cas [b], elle est dirigée vers le corps qui subit l'action.
- ⋆ La composante tangentielle correspond à des action de frottements (ou de non glissement).

a. Dans le cas d'un point matériel subissant l'action, cette composante est nulle.
b. sauf si le contact est collant

Réflexion



La sphère solide ci-contre se déplace dans un fluide au repos. Représenter qualitativement les actions ponctuelles du fluide sur la sphère en quelques points. On fera apparaître la composante tangentielle et la composante normale.

♥ Propriété I.7: Action d'un solide - Lois de Coulomb

En un point de contact solide-solide, la force de contact $\overrightarrow{R}$ se décompose en deux composantes, l'une tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ et l'autre normale $\overrightarrow{R_N}$ ($\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$). On déduit expérimentalement les comportements suivants :

- La **composante normale** est telle qu'elle empêche l'interpénétration des systèmes (*contrainte cinématique*). Elle est dirigée **vers l'intérieur du solide qui subit l'action. Son annulaion signifie la perte de contact.**
- La **composante tangentielle** a un comportement qui dépend de l'état relatif des deux solides :
  — *en cas d'immobilité **relative** des deux solides*, l'action complète est telle qu'elle permet l'immobilité relative. On parle de **non glissement**. La composante tangentielle est de norme nécessairement limitée par l'inégalité

$$\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu_S \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \tag{10.7}$$

  où μ_S est appelé coefficient de frottement statique. Lorsque cette condition est mise en défaut, alors le système se met en mouvement.

  — *en cas de mouvement relatif des deux solides* (on dit qu'il y a **glissement** au point M), la composante tangentielle s'oppose à la vitesse relative au point M. Sa norme est **égale** à

$$\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_D \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \tag{10.8}$$

  où μ_D est appelé coefficient de frottement dynamique.

  — Quelque soit le système, $\mu_D < \mu_S$.

Attention : Le terme de "frottement" statique est trompeur car du point de vue du sens commun, ça ne frotte pas !

Réflexion

Q1. Expliquer concrètement ce que signifie "contrainte cinématique" en vous aidant des exemples de liaisons vus en SI.

Q2. Lorsqu'il y a non glissement, quelle est la norme de la composante tangentielle maximale que peut appliquer un solide 1 sur une solide 2. La comparer a la norme de la réaction tangentielle lorsqu'il y a glissement (à composante normale égale). Est-il plus facile de mettre en mouvement un objet ou de le maintenir en mouvement ?

Q3. Un humain immobile sur un tapis roulant : est-on dans une situation de glissement ou de non glissement ? Même question pour un skieur sur une piste. Même question pour un pneu sur une route en condition normale.

Q4. Représenter, pour le skieur, un schéma avec les différentes forces qui s'appliquent sur lui (on pourra considérer ces actions ponctuelles pour simplifier le schéma).

Q5. Dans le cas de l'humain sur un tapis, que vaut son accélération s'il avance à vitesse constante ? En considérant que la seule autre force qui s'applique sur l'humain est son poids, orienter sur un schéma les deux forces extérieures qui s'appliquent sur l'humain (penser à utiliser la deuxième loi de Newton vu au lycée). Que peut-on dire que la composante tangentielle de l'action de contact ?

Q6. Reprendre la question précente lorsque le tapis accélère puis lorsqu'il ralentit.

Ces interprétations sont importantes pour comprendre la mise en équation utilisant les lois de Coulomb. Il est important d'observer que l'orientation de la composante tangentielle dans le cas de non glissement n'est PAS intuitive.
*On retiendra aussi qu'un contact solide **implique une contrainte cinématique.***

♥ Propriété I.8: Action d'un fluide

L'action d'un fluide sur un point matériel est modéliée par une action de **frottements fluides.** On distingue deux cas :

- ⋆ **Cas laminaire** : Aux faibles vitesses, l'écoulement est dit laminaire et la force de frottement fluide est proportionnelle à la vitesse par rapport au fluide.

$$\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}_{M/fluide} \tag{10.9}$$

- ⋆ **Cas turbulent** : Aux fortes vitesses, l'écoulement est dit turbulent et la force de frottement fluide est proportionnelle au carré de la vitesse par rapport au fluide.

$$\overrightarrow{f} = -k \left\| \overrightarrow{v}_{M/fluide} \right\| \overrightarrow{v}_{M/fluide} \tag{10.10}$$

Réflexion

Quelle caractéristique géométrique des deux forces montre qu'il s'agit bien de forces de "frottements" au sens où on l'imagine vulgairement ?

☞ Méthodes (Actions) : Déterminer certaines actions (III.1, III.2)

☞ Applications : Interaction électromagnétique(III.1), Variation du champ de gravitation (III.2), Mouvement d'une planète (III.3)

II Théorèmes fondamentaux

II.1 Lois de Newton

♥ Définition II.1: Système isolé

- ⋆ Un point matériel qui n'est soumis à aucune force est dit isolé.
- ⋆ Un point matériel soumis à un ensemble de forces dont la résultante (i.e. la somme) est nulle est dit pseudo-isolé.

♥ Définition II.2: Référentiels galiléens

Un **référentiel galiléen** est une référentiel dans lequel un point matériel isolé ou pseudo-isolé possède un mouvement rectiligne uniforme.

Il n'existe pas de référentiel galiléen strict connu. Néanmoins, de nombreux référentiels peuvent être considérés comme galiléen sur des périodes de temps suffisamment courte.

- ⋆ Le référentiel **héliocentrique** dans lequel le Soleil et 3 étoiles lointaines sont supposées fixes (sur plusieurs années voire plusieurs décennies)
- ⋆ Le référentiel **géocentrique** dans lequel la Terre et 3 étoiles lointaines sont supposées fixes (quelques mois). Il est translation quasi-circulaire par rapport au référentiel héliocentrique
- ⋆ Le référentiel **terrestre** dont laquelle la Terre (en tant que solide) est supposée fixe pour des courtes expériences (quelques heures). Il est rotation autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique.
- ⋆ A une échelle plus petite, le référentiel lié au **noyau atomique** pourra être considéré comme galiléen sur des temps très courts.

♥ Propriété II.1: Lois de Newton

- ⋆ Première loi de Newton : Il *existe* des référentiels qui sont des référentiels galiléens.
- ⋆ Deuxième loi de Newton : Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel M au cours du temps est égale à la somme des forces s'exerçant sur les systèmes :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\to M}} \tag{10.11}$$

$$m\left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\to M}} \tag{10.12}$$

  La deuxième expression n'est valable que si le système est fermé, c'est-à-dire qu'il n'échange pas de matière avec l'extérieur.

- ⋆ Troisième loi de Newton : Si un point matériel A exerce sur un point B une force $\overrightarrow{f_{A\to B}}$ alors le point B exerce sur le point A une force $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ telle que :
  - — $\overrightarrow{f_{B\to A}} = -\overrightarrow{f_{A\to B}}$
  - — $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ et $\overrightarrow{f_{A\to B}}$ sont portés par la même droite : la droite (AB)

♥ Théorème II.1: Relativité galiléenne

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme avec un référentiel galiléen est aussi un référentiel galiléen.

♥ Démonstration

Considérons un référentiel galiléen noté $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ et un second référentiel $\mathfrak{R}$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_{R/RG}}$ par rapport à $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.
Première méthode : On considère un point matériel isolé. Il possède un mouvement de translation rectiligne uniforme (à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$) dans $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ car ce référentiel est galiléen. Dans $\mathfrak{R}$, sa vitesse est : $\overrightarrow{v_{/R}} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{R/RG}} = \overrightarrow{cste}$: il possède aussi un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathfrak{R}$ donc $\mathfrak{R}$ est aussi galiléen.
Deuxième méthode : On considère un point matériel soumise un ensemble de force dont la résultante est $\overrightarrow{F}$. Le principe fondamental dans $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ s'écrit : $m\overrightarrow{a_{RG}} = \overrightarrow{F}$. Or :

$$\begin{aligned} &m\overrightarrow{a_{\mathfrak{R}}} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{R}}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}} + \overrightarrow{v_{R/RG}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}}}{dt} = m\overrightarrow{a_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}} \\ &\Longrightarrow m\overrightarrow{a_{\mathfrak{R}}} = \overrightarrow{F} \end{aligned}$$

En particulier si le mobile est isolé ($\overrightarrow{F} = 0$), l'accélération dans $\mathfrak{R}$ est nulle et le système est donc dans un mouvement de translation rectiligne uniforme : c'est un référentiel galiléen.

La deuxième méthode est ce qu'on appelle le **principe de relativité galiléenne** : Les lois de la dynamique sont les mêmes quel que soit le référentiel galiléen considéré.

II.2 Théorème du moment cinétique

Enoncé

♥ Théorème II.2: Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique par rapport à un point : Soit un point matériel M. Dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée du moment cinétique du point M en un point A fixe dans $\mathfrak{R}$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des actions exercées sur M par rapport au même point A.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{A/\mathfrak{R}}}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \sum_i \overrightarrow{M_A}(\mathfrak{A}_i) \tag{10.13}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à axe : Soit un point matériel M. Dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée du moment cinétique du point M sur un axe Δ orienté fixe dans $\mathfrak{R}$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des actions exercées sur M par rapport au même axe Δ.

Le point A ou l'axe Δ doit être fixe mais il est *arbitraire*, son choix doit donc être **réfléchi.**

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{A/\mathfrak{R}}}(\mathrm{M})}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathfrak{R}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}\right)_{\mathfrak{R}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AM}\right)_{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}} + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}\right)_{\mathfrak{R}} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{V_{M/\mathfrak{R}}} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathfrak{R}}}}_{=0} + \overrightarrow{AM} \wedge \left(\sum \overrightarrow{F_{\to M}}\right) \\
&= \sum_i \overrightarrow{M_A}\left(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le TMC en un point de l'axe et de projeter l'équation sur un vecteur directeur de l'axe pour démontrer le TMC sur un axe.

Réflexion

Q1. Rappeler les interprétations qui ont été faites du moment cinétique et du moment d'une action ponctuelle sur une axe donnée.

Q2. Comment le moment d'une action ponctuelle influe sur le moment cinétique. Cette observation est-elle cohérente avec les interprétations précédentes ?

Q3. Etant donnée les interprétations précédentes, pour quel type de mouvement, le théorème du moment cinétique sera le plus adapté ?

Q4. Voyez-vous un avantage au TMC sur un axe par rapport à la deuxième loi de Newton ? Y voyez-vous un inconvénient ?

☞ Méthodes (Théorèmes) : Etudier un mouvement, méthodes d'intégration (III.3), Etude des positions d'équilibre (III.4), Etudier une trajectoire connue (III.5, III.6)

Corrigés

III S'entrainer

III.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Etudes des actions mécaniques

♥ Méthode III.1: Action de contact solide

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige l'action de l'air environnant et on note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

Q1. Proposer un système de coordonnées permettant d'étudier le mouvement de M sur le plan (on suppose que M reste sur le plan incliné). Faire un bilan des actions mécaniques qui s'appliquent sur M et préciser les expressions vectorielles des forces modélisant ces actions. Interpréter chaque composante de l'action du plan. Donner leur signe lorsqu'il est connu.

Q2. Dans l'hypothèse où M ne décolle pas, quelle contrainte cinématique impose le contact ? En déduire la composante normale de l'action du plan incliné sur M.

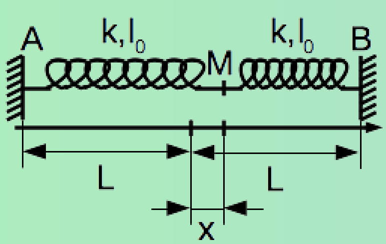
Q3. On suppose que le point M glisse sur le plan incliné. Exprimer la composante tangentielle en fonction de m, g et α.

Q4. On suppose maintenant que le point M est immobile. Justifier l'existence de frottements et montrer que les lois de Coulomb impose une condition sur l'angle d'inclinaison en fonction du coefficient de frottement statique μ_S.

♥ A retenir: Action de contact solide

- ⋆ Une action de contact solide impose en général une **contrainte cinématique** qu'il faut savoir exploiter à l'image des contraintes des liaisons en SI. Elle permet notamment de remonter à la composante normale.
- ⋆ Elle impose aussi une condition de contact sur la composante normale **qui doit être dirigée vers l'extérieur du solide exerçant la force.**
- ⋆ La composante tangentielle ne peut se déduire de la composante normale que lorsqu'il y a **glissement.** Et son sens ne se déduit qu'en connaissant le sens de déplacement relatif du mobile.
- ⋆ Lorsqu'il y a immobilité, c'est la **deuxième loi de Newton à l'équilibre** qui permet d'obtenir la composante tangentielle dont le sens ne peut être prédit à l'avance en général. Les lois de Coulomb permet d'étudier les **conditions d'existence** de l'immobilité.

♥ Méthode III.2: Déterminer une force de rappel



On considère deux ressorts horizontaux de raideur identique k et de longueur à vide l_0. Ils sont attachées comme représentés ci-dessous. Déterminer la force exercée par chaque ressort sur le point matériel M en fonction de la coordonnées x de M.

♥ A retenir: Déterminer une force de rappel

Il est important de savoir correctement exprimer une force de rappel dans une base données. Il vaut mieux ensuite vérifier son expression :

- ⋆ La force a-t-elle la bonne direction ?
- ⋆ La force exerce-t-elle bien un **rappel** : lorsque $\Delta l > 0$, elle tend à ramener les extrémités et inversement.
- ⋆ L'équation différentielle obtenue, si elle est linéaire, permet souvent un test de stabilité car un ressort ne va pas déstabiliser un système.

Applications des théorèmes

♥ A retenir: Applications des théorèmes

Les étude mécaniques suivent en général le même principe :

1. Paramétrage : il s'agit de choisir un référentiel et un/des repère(s) associé(s), le système d'étude et d'expression les caractéristiques (force, moment) des actions qui s'exercent sur le système.
2. Mise en équation : il convient de choisir un/des théorème(s) à appliquer [a] et d'obtenir ainsi la mise en équation du problème.
3. Manipuler les équations : Ces manipulations sont très diverses et variées. Il peut s'agir de résoudre l'équation différentielle obtenues, d'obtenir l'expression de certaines forces. . .

a. En pratique, l'expression des caractéristiques se fait conjointement avec le choix des théorèmes.

♥ Méthode III.3: Mouvement dans un champ de pesanteur

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$. On oriente l'axe Oz tel que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

Cas d'une chute libre. On suppose que le mobile est initialement immobile à une altitude h.

Q1. Cas sans frottements : Exprimer $z(t)$ et en déduire le temps que met le mobile pour atteindre l'altitude $z = 0$. Déterminer la vitesse à cet instant.

Q2. Cas avec frottements linéaires : On suppose que le solide est soumis à une force de frottements du type $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$

- **Q2.a.** Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $v(t)$
- **Q2.b.** En déduire l'existence d'une vitesse limite v_l
- **Q2.c.** Déterminer $v(t)$ puis $z(t)$.
- **Q2.d.** Exprimer un temps caractéristique au bout duquel on peut considérer que le mobile a atteint sa vitesse limite.

Q3. Cas de frottements quadratiques : On suppose que le solide est soumis à une force de frottements du type $\overrightarrow{F} = -k\left\|\overrightarrow{v}\right\|\overrightarrow{v}$. On note $v(t)$ telle que $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{e_z}$.

- **Q3.a.** Sachant que le mobile a toujours du déplacement vers le bas, expliciter $\overrightarrow{F}$.
- **Q3.b.** En déduire l'équation différentielle qui régit l'évolution de $v(t)$
- **Q3.c.** Déterminer la vitesse v_l (en norme) telle que le mouvement soit rectiligne uniforme.
- **Q3.d.** Réécrire l'équation différentielle sous la forme : $m\dot{v} - kv^2 = -kv_l^2$.

Q3.e. En déduire $v(t)$ puis $z(t)$.

Q3.f. Exprimer $z(v)$. Montrer qu'on peut déterminer une distance H caractéristique sur laquelle la vitesse limite v_l est atteinte.

Tir balistique : On suppose que le mobile est tiré du point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha\overrightarrow{e_x} + v_0 \sin\alpha\overrightarrow{e_z}$.

Q4. On néglige à nouveau les frottements.

Q4.a. Déterminer, par une intégration vectorielle, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.

Q4.b. Déterminer l'altitude la plus haute atteinte et la portée $x_{\max}$, c'est-à-dire la distance à laquelle retombe le mobile à l'altitude $z = 0$. En déduire l'angle α pour lequel la portée est la plus grande à v_0 fixée.

Q4.c. Pour atteindre une distance $x_1 < x_{\max}$ à v_0 fixé, montrer qu'on peut choisir deux angles de tir possible. Qualifier ces deux tirs.

Q4.d. On veut déterminer l'ensemble des points qui ne peuvent pas être atteinte par le mobile si l'on fixe v_0 Montrer que ces points sont situé dans une portion du plan délimitée par une parabole dont on déterminera l'équation.

Q5. On considère maintenant des frottements fluides linéaires : $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$

Q5.a. Intégrer vectoriellement l'équation en $\overrightarrow{v}(t)$ obtenue. En déduire $\overrightarrow{OM}(t)$

Q5.b. Exprimer l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.

Q5.c. Montrer que, même si l'on permet au mobile de descendre jusqu'à $z = -\infty$, il ne pourra pas dépasser une portée limite $x_{\lim}$

♥ A retenir: Méthodes de résolution

L'obtention de l'équation différentielle d'un système passe toujours par deux parties :

1. l'expression des grandeurs cinétiques (quantité de mouvement à dériver ou masse fois accélération) à partir des **expressions générales vues dans le chapitre précédent.** *Il peut arriver qu'on les simplifie en fonction des contraintes cinématiques comme pour le mouvement sur le plan incliné.*
2. l'expression des grandeurs dynamiques (force, moment d'une force) après un bilan des actions mécaniques extérieures.

Outre la mise en équation, on observe ici différentes méthodes de résolution de l'équation différentielle :

- ⋆ Equations différentielles linéaires
- ⋆ Recherche de primitive
- ⋆ Séparation des variables

On retiendra aussi la recherche d'état stationnaire/vitesse limite (accélération nulle).
Le reste des questions constitue un exemple détudes diverses qui peuvent être réalisées sur un problème mécanique.

♥ Méthode III.4: Perle sur un cerceau

On considère une perle assimilable à un point matériel M de masse m considère à glisser sans frottements sur un cerceau de rayon R et de centre O dans le plan est vertical.

Q1. Etablir l'équation d'évolution de l'angle entre la verticale descendante et $\overrightarrow{OM}$ au moyen du théorème du moment cinétique.

Q2. Déterminer la position d'équilibre **stable** du système.

Q3. Simplifier l'équation obtenue si l'on suppose le mouvement de la perle de faible amplitude autour de sa position d'équilibre stable.

♥ A retenir: Utilisation du théorème du moment cinétique

On retiendra la méthodle d'application du TMC. Il est conseillé de procéder étape par étape pour le calcul des différents termes et de bien faire la différences en le point qui subit l'action et le point où on calcule les moment.

♥ A retenir: Position d'équilibre et stabilité

On retiendra :

- ⋆ La notion de position d'équilibre (position où l'objet peut rester sans mouvement) et son lien avec les solutions constantes de l'équation différentielle.
- ⋆ La notion de stabilité d'une position d'équiliber : si on l'écarte de la position d'équilibre, elle a tendance à y revenir. On a vu ici deux méthodes basées sur le comportement au voisinage des positions (tendance à revenir ? ou stabilité de l'équation différentielle linéarisée). Nous verrons une troisième méthode grâce à l'énergie.

♥ Méthode III.5: Atome de Bohr

Soit un proton O de charge +e fixe et un électron M de charge -e (et de masse me) en mouvement circulaire uniforme (rayon R) autour du proton (supposé fixe). L'expérience montre que l'énergie totale du système est quantifiée sous la forme : $E_n = -\frac{K}{n^2}$ (on prend l'origine des énergies potentielles nulle à l'infini). Montrer que le moment cinétique de l'électron par rapport à O est quantifié.

On donne l'expression de l'énergie potentielle de l'électron sous l'action seule du proton : $E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ où r est la distance proton-électron.

♥ A retenir: Différentes méthodes

On retiendra que dans un exercice de mécnaique, on peut

- ⋆ être amener à utiliser simultanément les différents théorèmes
- ⋆ qu'on ne chercher pas toujours à déterminer la trajectoire/l'équation horaire. On peut parfois connaître le mouvement (ici ciruclaire uniforme) et déterminer d'autres caractéristiques.

♥ Méthode III.6: Mouvement d'un traineau

On considère un traineau assimilable à un point matériel de masse m glissant sur un sol horizontal avec une vitesse v constante. Le contact avec le sol suit les lois de Coulomb avec un coefficient de frottements dynamique f_d. L'existence des frottements impose, pour maintenir une vitesse constante $\overrightarrow{v}$ une traction $\overrightarrow{T}$par un utilisateur. Celle-ci se fait au moyen d'une corde avec un angle α avec l'horizontale.

Q1. Déterminer la norme T de la traction en fonction de α, f, m et g.

Q2. Déterminer pour quel angle T est minimal.

Q3. Y a-t-il risque de décollage du traineau ?

Q4. Le traineau est maintenant immobile par rapport au sol, quel traction T minimale permet de le mettre en mouvement ?

♥ A retenir: Autour des actions de contact solide

A nouveau, on étudie pas ici le mouvement, déjà connu (mouvement rectiligne uniforme puis immobilité). On cherche ici à déterminer certaines actions inconnues (T).
On retiendra à nouveau les méthodes de mise en équation des actions de contact au moyen des lois de Coulomb :

- ⋆ Utilisation des lois en glissement et sans glissement.
- ⋆ Etude de la condition de décollement portant sur la composante normale : elle ne doit pas s'annuler pour que l'objet ne décolle pas.
- ⋆ Etude la mise en mouvement qui se fait **de manière "inversée"** On étudie la possibilité de rester immobile puis on inverse l'inégalité.

III.2 Applications

✍ Exercice III.1: Interaction électromagnétique

On considère un champ électromagnétique dont les deux parties électriques et magnétiques ont la même origine. Dans ces conditions, on montre qu'en norme $B \sim \frac{E}{c}$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cadre de la mécanique relativiste $v \ll c$, montrer que la partie magnétique de l'interaction de Lorentz est toujours négligeable en norme devant la partie électique.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Interactions usuelles.

✍ Exercice III.2: Variation du champ de gravitation

Q1. Déterminer l'altitude à laquelle le champ de gravitation a diminué de 1% par rapport à son intensité au niveau de la mer.

Q2. Sachant que le champ de pesanteur est constitué à plus de 90% par l'action de la gravité, commenter l'hypothèse d'un champ de pesanteur uniforme et ses possibles limites.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Interactions usuelles.

✍ Exercice III.3: Mouvement d'une planète

Le mouvement d'une planète du système solaire, dans les hypothèses des lois de Kepler est une ellipse dont l'un des foyers des le Soleil. Dans ce cadre d'hypothèses, la seule action subit par la planète est l'action gravitationnelle exercée par le Soleil. La planète et le Soleil sont assimilés à des points matériels.

Q1. Représenter qualitativement la trajectoire de la planète dans le référentiel héliocentrique. En quel point de l'ellipse la force gravitationnelle est-elle la plus forte ? la plus faible ?

Q2. Représenter deux points où la planète est accéléré, deux points où la planète est ralentie et deux points où l'accélération est normale à la vitesse. Que se passe-t-il en ces points ?

Q3. Que vaut le moment de la force gravitationnelle calculée au Soleil ? On remarquera que malgré sa valeur, le mouvement de rotation de la planète autour du Soleil évolue.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Interactions usuelles.
- ⋆ Cinématique du point.
- ⋆ Moment d'un force.

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. La force est (en norme) la plus forte au point le plus proche du Soleil (appelé périhélie) et elle est la plus faible au point le plus éloigné du Soleil (appelé aphélie).

Q2. Accéléré quand l'angle entre la vitesse et l'accélération est aigu, ralenti quand il est obtu. L'accélération est normale à la vitesse à l'aphélie et au pérhélie : en ces points, la vitesse atteint un extremum.

Q3. Il est nul (vecteur $\overrightarrow{SP}$ parallèle à la force gravitationnelle).

✍ Exercice III.4: Movuement d'une perle

Reprendre l'exercice méthode sur le mouvement de la perle sur un cerceau (**??**) et retrouver l'équation différentielle en θ en appliquant la deuxième loi de Newton.

III.3 Entrainement

✍ Exercice III.5: Saut à l'élastique

Dans tout le problème, on ne tient pas compte des frottements de l'air. Un fabricant de saut à l'élastique donne les caractéristiques suivant pour un type d'élastique :

- ⋆ Type M : pour un poids de 65 à 95kg
- ⋆ Longueur à vide (notée l_0) : de 6m à 50m pour des sites de saut de 30m à 250m.
- ⋆ Tension appliquée sur un élastique pour un allongement de 100% : 200kg
- ⋆ Tension appliquée sur un élastique pour un allongement de 200% : 325kg

On prendra $g = 9.8\text{m.s}^{-2}$.

Q1. Traduire la fiche technique en langage correct pour la physique.

Q2. La tension de l'élastique obéit-elle à une loi type ressort : $T = k(l - l_0)$ où T est la tension appliquée et l la longueur de l'élastique ?

Q3. On supposera dans la suite que la tension est de la forme $T = k(l - l_0)$. A partir des données, déterminer une valeur moyenne de la constante de raideur de l'élastique k pour un élastique de $l_0 = 6\text{m}$.

On veut savoir à quelle hauteur remonterait une masse test M de masse minimale (ici $m = 65$kg) si elle est lâchée sans vitesse initiale, l'élastique tendu au maximum vers le bas. On prendra l'exemple d'un élastique de $l_0 = 6$m, dont le point d'attache est à la hauteur $h = 18$m au dessus du point de départ.

Q4. Déterminer l'expression de l'altitude $z(t)$ et de la vitesse $\dot{z}(t)$ tant que l'élastique est tendu.

Q5. Calculer l'instant t_1 pour lequel l'élastique n'est plus tendu. En déduire la vitesse de M à cet instant.

Q6. Déterminer la hauteur maximale atteinte par l'objet.

On réalise maintenant un saut normal, à partir du point d'attache, sans vitesse initiales (le sauteur a les mêmes caractéristiques que la masse test et on utilise le même élastique).

Q7. Déterminer le point le plus bas atteint par le sauteur et l'accélération ressentie en ce point.

Q8. En réalité, les frottements de l'air entraîne l'immobilisation du sauteur après plusieurs oscillations. A quelle hauteur s'immobilise-t-il ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ $\Longrightarrow$ Pesanteur.
- ⋆ $\Longrightarrow$ Action d'un ressort.
- ⋆ $\Longrightarrow$ PFD.
- ⋆ $\Longrightarrow$ Méthodes de résolution du PFD (ordre 2).

Eléments de correction (sans justification) : Dans les deux cas l'origine est prise au niveau du point d'attache et l'axe Oz est orienté vers le haut.
Pour la masse test :

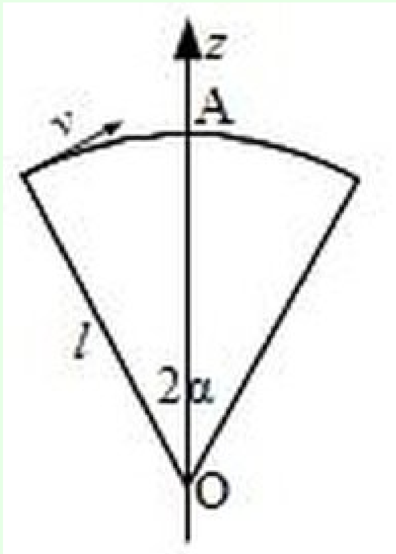
$$z(t) = -(\frac{mg}{k} + l_0) - \left(h - \frac{mg}{k} - l_0\right)\cos\omega_0 t \qquad \text{pour } t < t_1$$
$$z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_1)^2 + v_1\,(t - t_1) - l_0 \qquad \text{pour } t > t_1$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'instant où l'élastique se détend $t_1 = \frac{1}{\omega_0}\arccos\left(-\frac{\frac{mg}{k}}{h - \frac{mg}{k} - l_0}\right)$ et la vitesse à cet instant vaut $\dot{z}(t) = v_1 = \omega_0\sqrt{\left(h - \frac{2mg}{k} - l_0\right)(h - l_0)}$.
L'altitude maximale atteinte est alors : $\frac{v_1^2}{2g} - l_0$
Pour le saut normal :

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 \qquad \text{pour } t < t_2$$
$$z(t) = -(\frac{mg}{k} + l_0) + \frac{mg}{k}\cos\left(\omega_0\,(t - t_2)\right) - \frac{\sqrt{2l_0 g}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0\,(t - t_2)\right) \qquad \text{pour } t > t_2$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'instant où l'élastique se tend $t_2 = \sqrt{\frac{2l_0}{g}}$.
L'altitude minimale atteinte est alors : $z_m = -\left(\frac{mg}{k} + l_0\right)\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{l_0}{\frac{mg}{k} + l_0}\right)^2}\right)$
L'accélération subit vaut alors : $a = \frac{k}{m}(z_m - l_0) - g$
Immobilisation à $z_e = -\frac{mg}{k} - l_0$

✍ Exercice III.6: Cascade en voiture



Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle franchit une bosse (cf. Figure), modélisée par deux portions rectilignes raccordés par un arc de cercle de rayon l, de centre O et d'ouverture angulaire 2α.

Q1. Faire un bilan sommaire des forces extérieures.

Q2. A quelle condition garde-t-elle contact avec le sol ? A.N. : $\alpha = 10^\circ; l = 5$m. (on pourra considérer que le centre d'inertie touche le sol pour simplifier l'étude).

La voiture est maintenant assimilée à un point matériel de masse $m = 1000$kg. On prend $l = 130$m et $\alpha = 15^\circ$. La voiture est au sommet de la bosse (point noté A) avec une vitesse de $v_0 = 125$km.h^{-1} (on ne cherche pas à savoir comment elle est arrivée là). Sa vitesse n'est plus forcément constante.

On suppose que durant la descente, la composante "motrice" de l'action de contact avec le sol est de valeur algébrique F constante (positive pour une accélération, négative pour un freinage).

Q1. Déterminer une équation différentielle du mouvement de $M(r,\theta)$faisant intervenir la dérivé seconde de θ. On prendra l'origine des angles θ suivant la verticale, c'est-à-dire suivant la direction OA.

Q2. Après avoir multiplié l'équation par $\dot{\theta}$, l'intégrer.

Q3. Déterminer l'expression vérifiée par l'angle θ_d pour lequel la voiture quitterait le sol.

Q4. Calculer cet angle dans le cas où le conducteur coupe le moteur en A (on prendra $g = 9.8$m.s^{-2}). Conclure.

Q5. Est-il préférable d'accélérer ou de freiner ? Calculer la valeur de F pour que la voiture arrive à la fin de la bosse (fin de l'arc de cercle) sans encombre. Est-ce une valeur minimale ou maximale ?

Q6. On reprendra cette étude par une application du théorème du moment cinétique.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ ⟹ Pesanteur.
- ⋆ ⟹ PFD.
- ⋆ ⟹ Détermination d'une force.
- ⋆ ⟹ Condition de contact.
- ⋆ ⟹ Méthodes de résolution du PFD (multiplication par la dérivée première).

Eléments de correction (sans justification) : Cas à vitesse constante : $\alpha < \arccos\frac{v^2}{Rg}$ Cas à force constante : $-\frac{mv_0^2}{R} - 2F\theta_d + 3mg\cos\theta_d = 0$

Devoir libre : Application du PFD en mécanique du point

Chapitre 11: Approche énergétique des points matériels

On rappelle que pour un système ponctuelle de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathfrak{R}}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$, l'énergie cinétique dans ce même référentiel est $E_c = \frac{1}{2}mv^2_{M/\mathfrak{R}}$ où $v^2_{M/\mathfrak{R}}$ est la norme du vecteur vitesse.

I Force, travail et puissance.

I.1 Généralités

♥ Propriété I.1: Puissance d'une action ponctuelle

Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. Si à un instant t, le point M possède une vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$, on définit la puissance $P_{\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F})$ **apportée** par cette action au système M dans le référentiel $\mathfrak{R}$ par :

$$P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}} \tag{11.1}$$

Le transfert de puissance dépend *a priori* du référentiel.

♥ Définition I.1: Travail d'une action ponctuelle

Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. On définit le **travail élémentaire** de cette action sur un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ par :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F})dt = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM} \tag{11.2}$$

Ce travail correspond à *l'énergie apportée par le système Σ_1 au système ponctuel M lorsque ce dernier se déplace de manière infinitésimale de $\overrightarrow{dOM}$.*

Réflexion

Q1. En utilisant la relation entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OM}$, justifier que $P_{/\mathfrak{R}}(\overrightarrow{F})dt = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$

Q2. Comment est la direction et le sens de $\overrightarrow{dOM}$ par rapport à la trajectoire ?

Q3. En interprétant géométriquement le signe du produit scalaire (par rapport à l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{dOM}$) expliquer si une force qui freine apporte ou enlève de l'énergie au système. Même question pour une force qui accélére. On parlera de **force résistante et de force motrice.** Que se passe-t-il si $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{dOM}$?

Q4. Retrouver le même raisonnement en raisonnant sur la définition de la puissance. Dans le cas d'une force unique, quelle grandeur cinématique associée à M est colinéaire à $\overrightarrow{F}$. Retrouver alors les caractéristiques géométriques observées entre cette grandeur et $\overrightarrow{v}$ au premier chapitre.

♥ Propriété I.2: Travail sur un déplacement fini

Considérons une action ponctuelle exercée par un système Σ_1 sur un point matériel M de masse m et modélisée par une force $\overrightarrow{F}$. Si le point M se déplace sur un chemin Γ. On définit le travail $W(\overrightarrow{F})$ de cette action sur un déplacement fini le long du chemin Γ par la somme (intégrale) des travaux élémentaires le long de chemin :

$$W_\Gamma(\overrightarrow{F}) = \int_{M\in\Gamma} \delta W(\overrightarrow{F}) = \int_{M\in\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM} \tag{11.3}$$

Ce travail correspond à l'énergie apportée par le système Σ_1 au système ponctuel M lorsque ce dernier se déplace sur le chemin Γ.

- ⋆ Nous verrons en méthode comment calculer une intégrale de chemin.

Réflexion

On considère le cas simple où la force $\overrightarrow{F}$ est constante et toujours colinéaire au déplacement dans le même sens que ce dernier. On note F la norme de la force et dOM la distance parcourue suivant le vecteur $\overrightarrow{dOM}$.

Q1. Exprimer le travail élémentaire δW en fonction de F et de dOM.

Q2. L'intégrale de chemin peut être vue comme une somme de tous les travaux infinitésimaux, exprimer le travail élémentaire entre un point A et un point B si le chemin parcouru de A vers B est :

Q2.a. un segment de droite

Q2.b. un demi-cercle de diamètre AB

On exprimera ces travaux en fonction de F et de la distance AB. Obtient-on la même valeur pour les deux cas ?

On retiendra qu'*a priori,* le travail d'une force dépend du chemin parcouru entre le point de départ et d'arrivée : une conséquence est qu'on ne pourra pas le mettre, *a priori,* sous la forme d'une différence d'une fonction dépendant de la position ($W_{AB} \neq f(B) - f(A)$).

C'est pour cela quon écrit $\delta\ W$ et non dW. **Ecrire dW est une faute grave à éviter.**

On considère le poids $\overrightarrow{P}$ dont l'expression sera ici $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e}_z$.

Q1. Donner l'expression du déplacement élémentaire général $\overrightarrow{dOM}$ en coordonnées cartésiennes. En déduire que le travail élémentaire du poids s'exprime en fonction de m, g et dz.

Q2. On peut intégrer l'expression précédente entre A et B pour obtenir le travail du poids sur le trajet. L'exprimer si si le chemin parcouru de A vers B est :

Q2.a. un segment de droite

Q2.b. un demi-cercle de diamètre AB

On l'exprimera en fonction des altitudes z_A et z_B des points A et B. Obtient-on la même valeur pour les deux cas ?

Si, *a priori,* le travail dépend du chemin parcouru, il peut arriver *pour certaines actions*, que ce ne soit pas le cas. Nous verrons que ce sont des forces particulières : les forces conservatives. [a]

[a] On continue à noter δW car l'objet mathématique travaille élémentaire dépend du chemin dans le cas général.

I.2 Forces conservatives

♥ Définition I.2: Action ponctuelle conservative

Il existe des actions dont le travail sur un trajet entre deux points A et B **ne dépend que des positions des points A et B** mais pas du chemin parcouru entre les deux.

Il existe alors une fonction **de la seule position** notée E_p et appelée **énergie potentielle** telle que :

$$W_{A\to B} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = -\Delta E_{p,A\to B} \tag{11.4}$$

C'est-à-dire que le travail de l'action entre deux points A et B s'exprime simplement en fonction de la variation $E_p(B) - E_p(A)$.

On dit que l'action/la force **dérive d'une énergie potentielle.**

On fera attention au signe "-" qui paraît contre-intuitif. Son origine vient du TEM qui sera énoncé par la suite.

Réflexion

Dans quel autre cadre avez-vous déjà vu des énergies reçues par cetains systèmes se mettre sous la forme d'une variation d'une fonction **ne dépendant que de l'état du système aux instants initiaux et finaux ?**

♥ Propriété I.3: Energie potentielle et force

L'expression précédente démontre immédiatement la relation suivante :

$$dE_p = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM} \tag{11.5}$$

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \tag{11.6}$$

Réflexion

Q1. Rappeler vers quoi est dirigé le gradient $\overrightarrow{grad}f$ géométriquement : vers le maximum de f ou vers le minimum de f ? En déduire vers quoi la force $\overrightarrow{F}$ est dirigée ? *Attention au signe "-" !*

Forces conservatives usuelles

♥ Méthode I.1: Démontrer qu'une force est conservative

Il existe deux méthodes de détermination de l'expression d'une énergie potentielle :

- ⋆ si on ne sait pas si l'action dérive d'une énergie potentielle (ou qu'on doit le prouver), alors il faut calculer le travail infinitésimale et le mettre sous la forme d'une différentielle $\delta W = -d(f(M))$. On idenitifie alors f(M) à l'énergie potentielle (à une constante près). Remarque : on peut aussi calculer la puissance transmise et l'écrire sous la forme : $P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(f(M))$. De la même manière f(M) s'identifie à l'énergie potentielle.
- ⋆ si on sait que l'action dérive d'une énergie potentielle, on peut utiliser l'expression du gradient et intégrer (dans le cadre du programme, uniquement si la force ne dépend que d'une seule coordonnée).

Nous utiliserons ici la première méthode puisqu'on veut prouver le caractére consrvatif des forces.

♥ Propriété I.4: Action de la pesanteur

L'action du poids sur un point matériel M dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est :

$$E_{p,pes} = mgh + K \tag{11.7}$$

où h est l'**altitude** [a] et K une constante - on rappelle que l'énergie potentielle est définie à une constant près.

a. donc axe orienté vers le haut.

♥ Démonstration

On utilise un système de coordonnées cartésiennes où z est la coordonnée verticale vers le haut (donc h)

$$\begin{aligned}\delta W &= -mg\overrightarrow{e_z} \wedge \left(dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}\right)\\ &= -mgdz\\ &= -d\left(mgz\right)\end{aligned}$$

♥ Propriété I.5: Force de Lorentz

- ⋆ Comme vu précédemment, la partie magnétique ne travaille pas.
- ⋆ L'action sur un point matériel du champ électrique *indépendant du temps* $\overrightarrow{E}$ dérive d'une énergie potentielle appelée énergie potentielle électrostatique. Elle s'écrit sous la forme $E_p(M) = qV(M)$ où q est la charge du point matériel et V(M) est le potentiel électrique dépendant du seul champ électrique (et pas du point matériel sur lequel il agit). On a donc la relation

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \tag{11.8}$$

Cette propriété étant issues des lois fondamdentales de l'électromagnétisme qui seront vues en deuxième année, elle est admise.

♥ Propriété I.6: Forces newtoniennes

Soit un point O de masse m_O et/ou de chargeq_O agissant sur un point M de masse m et/ou de charge q. Les forces gravitationnelles et coulombiennes dont les expressions sont de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ dans un système de coordonnées de sphérique centrée au point O dérivent d'une énergie potentielle appelées respectivement énergie potentielle de gravitation et énergie potentielle électrostatique et dont l'expression est :

$$E_p = -\frac{K}{r} + Cste \tag{11.9}$$

En général, on prend l'énergie potentielle nulle à l'infini soit $Cste = 0$.

♥ Démonstration

Comme dit dans la propriété, on va se placer en coordonnées sphériques centrées au point O.

$$\begin{aligned} P &= -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r} \wedge \left(r\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right) \\ &= -\frac{K}{r^2}\dot{r} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(-\frac{K}{r}\right) \end{aligned}$$

Réflexion

Q1. S'entraîner à démontrer le caractère conservatif d'une force newtonienne en utilisant la méthode avec le travail élémentaire.

Q2. On suppose $Cste = 0$, quelle énergie faut-il fournir à une charge q_1 pour l'amener de l'infini à une distance r d'une charge q_2 fixe ? *Il s'agit là d'une interprétation physique de l'énergie potentielle ainsi trouvée.*

Q3. Vers quoi la force $\overrightarrow{F}$ est-elle dirigée lorsque $K > 0$? lorsque $K < 0$? Lui associer les termes "répulsif" et "attractif".Quelle est la monotonie de $E_p(r)$ dans chaque cas. Retrouver la cohérence de vos observations avec celle faites dans la réflexion sur la relation $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$.

Cette dernière propriété est **générale** comme on a pu le voir précédemment : la pente de E_p donne la direction laquelle la force est dirigée.

♥ Propriété I.7: Action de rappel élastique

L'action de rappel d'un ressort dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est :

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 \tag{11.10}$$

♥ Démonstration

On travaille dans un système de coordonées cartésiennes d'axe Ox le long du ressort et le point O est à l'autre extrémité du ressort tel que $l = x$. On trouve alors que $\overrightarrow{u_{ext}} = \overrightarrow{e_x}$ et donc :

$$\begin{aligned} \delta W &= -k\left(x - l_0\right)\overrightarrow{e_x} \wedge \left(dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}\right) \\ &= -k\left(x - l_0\right)dx \\ &= -d\left(\frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right) \end{aligned}$$

Réflexion

Q1. Tracer $E_p(l)$.

Q2. En utilisant les réflexions précédentes sur les liens entre pente de E_p et sens de $\overrightarrow{F}$, retrouver le caractère "rappel" de la force.

Q3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{F}$ en $l = l_0$? et de la pente de E_p ?

A nouveau, les propriétés du gradient généralisent cette observation : en un extrémum d'énergie potentielle, la force est nulle.

II Théorèmes énergétiques

II.1 Théorème de l'énergie cinétique

♥ Théorème II.1: Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m. La variation d'énergie cinétique du point M dans un référentiel galiléen entre deux instants est égale à la somme du travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point M entre les deux instants considérés.

$$\Delta E_{C,A\to B} = W_{A\to B}(\vec{F})$$
$$dE_c = \delta W(\vec{F})$$

où $\vec{F}$ est la résultante totale des forces s'appliquant sur le point matériel M. La première écriture consiste à appliquer le théorème de l'énergie cinétique sur un chemin fini d'un point A à un point B (on a rappelle que le travail des forces dépend a priori du chemin choisi). La seconde traite le cas d'un déplacement infinitésimal.

♥ Théorème II.2: Théorème de la puissance cinétique

En référentiel galiléen (sous les mêmes hypothèses que précédemment) :

$$\frac{\mathrm{dE}_{c/\mathfrak{R}}}{\mathrm{dt}} = P_{/\mathfrak{R}}(\vec{F})$$

♥ Démonstration

$$m\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt} = \vec{F}$$
$$m\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt}\cdot\overrightarrow{v_{M/R}} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{v_{M/R}}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = P_R(\vec{F})$$
$$dE_c = \delta W(\vec{F})$$

L'expression intégrale s'obtient en intégrant la dernière équation sur le chemin choisi.

Réflexion

Q1. Rappeler le lien entre signe de la puissance et les orientations relatives de $\vec{v}$ et $\vec{F}$. En déduire effectivement que la puissance fournie par une force va modifier l'énergie cinétique du mobile.

II.2 Théorème de l'énergie mécanique

♥ Théorème II.3: Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'**énergie mécanique** d'un point matériel M de masse m entre deux points A et B d'un système est égale au travail des **seules forces non-conservatives** sur le trajet entre A et B.

On peut déduire du théorème précédent l'énoncé du théorème de la *puissance mécanique*.

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}
\Delta E_{c,A\to B} &= W_{A\to B}(\overrightarrow{F_c}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{nc}}) \\
\Delta E_{c,A\to B} &= -\Delta E_{p,A\to B} + W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{nc}}) \\
\Delta E_{c,A\to B} + \Delta E_{p,A\to B} &= W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{nc}})
\end{aligned}$$

Réflexion

Q1. On considère une force conservative dérivant d'une énergie potentielle E_p et un mobile soumis à cette force. Quelle énergie gagne-t-il s'il passe d'un point A d'énergie $E_p(A)$ à un point B d'énergie $E_p(B)$? Quelle énergie gagne-t-il s'il passe de B à A ?

On observe ici que pour une force conservative, l'échange d'énergie est *réversible* et cette énergie peut donc être considéré comme un **réservoir d'énergie** avec lequel le système échange.

Q1. On considère une force de frottements fluide de forme $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$. Montrer que la puissance fournie par cette force est nécessairement négative. Peut-elle donc être conservative (aidez-vous de l'observation faite à la question précédente) ? Si un mobile passe d'un point A à un point B puis revient en A, peut-on espérer récupérer l'énergie perdue à l'aller lors du retour, même en passant par le même chemin ?

C'est là la différence avec une force conservative. Pour une force conservative, le transfert (qu'il soit moteur ou résistant) est irréversible. On ne pourra l'inverser en repassant par le chemin. . .inverse.

- ☞ Méthodes : Calculer le travail d'une force (IV.1)
- ☞ Applications : Relation force énergie(IV.1)

III Systèmes conservatifs

III.1 Propriétés générales

♥ Définition III.1: Système conservatif

Un système conservatif est un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives.
Propriété : L'énergie mécanique d'un système conservatif est constante.

♥ Démonstration

Il suffit d'applique le théorème de la puissance mécanique : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F}_{nc}) = 0 \Longrightarrow E_m = cste$

♥ Propriété III.1: Positivité de l'énergie cinétique et conséquences

Dans un système conservatif, les valeurs d'énergies potentielles accessibles au cours du mouvement sont **majorées par une constante** : l'énergie mécanique.

♥ Démonstration

De $E_c = \frac{1}{2}mv^2 > 0$, il vient immédiatement que pour tout point M du mouvement $E_m = E_c(M) + E_p(M) \geq E_p(M)$. Donc l'énergie potentielle *en un point du mouvement* est toujours inférieure à l'énergie mécanique.
Dans un système conservatif, E_m étant constante (et finie...), il vient que $E_p(M)$ est majorée pour tout point M du mouvement.

Réflexion

On considère un système conservatif d'énergie mécanique fixée E_m.

Q1. On considère un point A où $E_p(A) > E_m$. Ce point peut-il être atteint ?

Voici une conséquence importante : l'énergie mécanique étant finie, certains points de haute énergie potentielle peuvent être inaccessible à un système. On parle de **barrière d'énergie potentielle.**

Q2. Dans quelle matière avez-vous déjà utilisé ce concept de barrière d'énergie potentielle ?

Q3. On considère un système relié à ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Tracer $E_p(l)$ et déduire des observations précédentes que le mouvement du système est nécessairement confiné dans une zone de l'espace si l'on considère que la seule action appliquée est celle du ressort (on rappelle que E_m est nécessairement fini).

♥ Définition III.2: Etat lié et état de diffusion

Un système dont les positions sont limités à une portion finie de l'espace est dit dans un **état lié.**
Si le système peut atteindre l'infini, on dit qu'il est dans un **état de diffusion.**

Réflexion

Q1. Dans l'exemple du système masse-ressort évoqué dans la réflexion précédente, le système est-il dans un état lié ou de diffusion ?

Q2. Même question pour un électron orbitant autour d'un atome ? pour un électron libéré d'un atome ionisé ?

Q3. En vous aidant de la réflexion précédente, expliquer qu'est-ce qui va contraindre à rester dans un état lié ?

Q4. On considère une charge $q_1 = q$ fixe et une charge $q_2 = q$ libre de se déplacer sur un axe Ox. Exprimer l'énergie potentielle $E_p(x)$ due à l'interaction électrostatique et justifier succintement pourquoi la charge q_2 est dans un état de diffusion.

♥ Propriété III.2: Position d'équilibre et énergie potentielle

Les positions d'équilibre d'un système conservatif correspondent nécessairement à des extrema d'énergie potentielle, c'est-à-dire un point où toutes les dérivées partielles de l'énergie potentielle sont nulles [a].

a. Il peut s'agir d'un maximum, d'un minimum ou d'un point col.

♥ Démonstration

Remarquons que si toutes les actions $\overrightarrow{F}_i$ dérivent d'énergies potentielles $E_{p,i}$, alors la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ est aussi conservative et d'énergie potentielle $E_p = \sum E_{p,i}$.
En effet :

$$P(\overrightarrow{F}) = \left[\sum_i P(\overrightarrow{F_i})\right] \cdot \overrightarrow{v} = \sum_i \left[P(\overrightarrow{F_i}) \cdot \overrightarrow{v}\right] = \sum_i \left[\frac{\mathrm{d}E_{p,i}}{\mathrm{dt}}\right] = \frac{\mathrm{d}\sum_i E_{p,i}}{\mathrm{dt}}$$

Il vient la relation $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$. Pour une position d'équilibre, il faut que $\overrightarrow{F} = 0$ donc $\overrightarrow{grad}E_p = 0$ soit, par propriété du gradient un extremum de l'énergie potentielle.
A titre d'exemple, en coordonnées cartésiennes, il vient :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{x}}\overrightarrow{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{y}}\overrightarrow{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{z}}\overrightarrow{e}_z = 0 \Longrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{x}} = 0\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{y}} = 0\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{z}} = 0$$

Réflexion
Le caractère extrémal de E_p est une condition nécessaire. Pourquoi ce n'est pas une condition suffisante ?

♥ Définition III.3: Stabilité d'une position d'équilibre

Rappel : Une position d'équilibre est dite stable si, lorsqu'on écarte légèrement le système de cette position d'équilibre, il tend à revenir vers la position d'équilibre.

♥ Propriété III.3: Critère de stabilité

Soit un système conservatif et une position d'équilibre M_{eq}.

- ⋆ si l'énergie potentielle en M_{eq} est un minimum, alors c'est une position d'équilibre stable.
- ⋆ sinon l'équilibre est instable

Cette propriété ne sera à savoir démontrer que dans le cas d'un système à 1 degré de liberté. La démonstration générale est basée sur le fait que la relation $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ impose que la force soit dirigée vers les énergies potentielles décroissantes. Or, pour qu'une position d'équilibre soit stable, il faut et il suffit que dans tout le voisinage de cette position, la force soit dirigée vers elle.

III.2 Cas des systèmes à 1 degré de liberté

Un système à 1 degré de liberté est un système dont les grandeurs peuvent être exprimée en fonction d'une seule variable d'espace(=coordonnée). Pour les exemples ici, nous prendrons la variable x comme si le mouvement était rectiligne sur un axe Ox et donc on notera les grandeurs $E_p(x), \overrightarrow{F} = F(x)\overrightarrow{e}_x, E_c(x) \ldots$.

Réflexion

Q1. Un mouvement circulaire est aussi à 1 degré de liberté. Quelle variable d'espace utilisera-t-on plutôt ?

Q2. Dans le cas d'un profil d'altitude $z(x)$ dans lequel évolue une bille de masse m sans frottements. Exprimer $E_p(x)$ en en fonction de m, g et $z(x)$ puis $F(x)$ en fonction de m, g et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. *Vous pourrez remarquer que $F(x)$ n'est pas constante a priori. Quelles sont les forces qui s'appliquent ? Auriez-vous pu simplement obtenir $F(x)$ par un bilan des actions et un calcul vectoriel des forces.* ***C'est l'un des intérêts de l'étude énergétique.***

♥ Propriété III.4: Position d'équilibre

Rappel : Une position d'équilibre d'un système conservatif correspond nécessairement à un extremum d'énergie potentielle.

Pour un système à un degré de liberté, chercher les positions d'équilibre revient donc à résoudre l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{11.11}$$

- ⋆ On rappelle que la variable peut ne pas être x.
- ⋆ Il est important de voir que l'on **dérive par rapport à la position et PAS par rapport au temps.**

Réflexion

En déduire que le creux d'un trou et le sommet d'une bosse sont des positions d'équilibre pour une bille qui roule sans frottements. Il y a pourtant une différence intuitive entre ces deux positions d'équilibre, laquelle ?

♥ Propriété III.5: Stabilité d'une position d'équilibre

Considérons un système conservatif et une position d'équilibre x_{eq}.

- ⋆ Si la dérivée seconde de l'énergie potentielle $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq})$ est strictement positive, alors cette position d'équilibre est stable.
- ⋆ Si la dérivée seconde de l'énergie potentielle $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq})$ est strictement négative, alors cette position d'équilibre est instable.
- ⋆ Si la dérivée seconde de l'énergie potentielle $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq})$ est nulle, alors on ne peut conclure.

Réflexion

Préciser la réflexion précédente.

♥ Démonstration

On peut utiliser deux méthodes : linéariser différentielle l'équation pour $\epsilon = x - x_{eq} \ll 1$ ou étudier le comportement semi-qualitatif du système lorsque qu'on part d'une position $x = x_{eq} + \epsilon$. On va utiliser la première méthode ici.

On rappelle que la force s'écrit $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}}(x)\overrightarrow{e_x}$. Pour linéairise le PFD (= obtenir une équation linéaire), il faut *que la force soit approchée par une expression linéaire soit un DL d'ordre 1. Il faut donc faire un DL d'ordre 2 pour l'énergie potentielle*[a].

$$E_p(x) \approx_{x \approx x_{eq}} E_p(x_{eq}) + \underbrace{\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}}(x_{eq})}_{=0}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})(x - x_{eq})^2$$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dx}} \approx_{x \approx x_{eq}} -0 - 0 - \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

$$m\ddot{x} = F(x) \approx -\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

$$\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x_{eq} = m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x$$

La dernière équation est stable si la dérivée seconde est positive et instable si la dérivée seconde négative. Si elle est nulle, il faut faire un développement limité à un ordre supérieur. Mais l'équation obtenue n'est alors pas linéaire...

a. La dérivée d'un polynôme de degré 2 donnera un polynôme de degré 1.

♥ Propriété III.6: Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

Au voisinage d'une position d'équilibre stable, le système va rester confiné et se comporte comme un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dt^2}}(x_{eq})}{m}}$.

La preuve est directe à partir de l'équation obtenue précédemment :

$$m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x = \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{dx^2}}(x_{eq})x_{eq}$$

Réflexion

Q1. Considérons un édifice diatomique stable. A l'échelle microscopique, les forces sont conservatives. Pourquoi décrit-on souvent la vibration des molécules comme un système masse ressort ? Quelle équation régit l'évolution de la distance inter-atomique ?

Q2. Pourquoi considère-t-on en général que le pendule simple aux petites oscillations est un oscillateur harmonique ? Est-ce vrai aux grandes oscillations ?

On remarquera dès lors la grande quantité de système dont les évolutions peuvent être décrites par un oscillateur...

☞ Méthodes : Etude graphique d'un système conservatif (IV.2), Etude par le calcul (IV.3, IV.4)

☞ Applications : Système conservatif(IV.2)

Corrigés

IV S'entrainer

IV.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

♥ Méthode IV.1: Calcul du travail d'une force

On considère un point M sur une trajectoire circulaire de rayon R dans un plan vertical. On suppose qu'il glisse sans frottements à une vitesse v_0 constante sur le cercle sous l'effet d'une force motrice $\overrightarrow{F}$ tangente au cercle.

On pose un repère cylindrique d'axe Oz l'axe du cercle et l'origine des angle θ au point le plus bas du cercle.

Q1. Exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction m, g et θ.

Q2. En déduire le travail apporté par $\overrightarrow{F}$ au système lorsqu'il passe de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ par un calcul direct du travail.

Q3. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

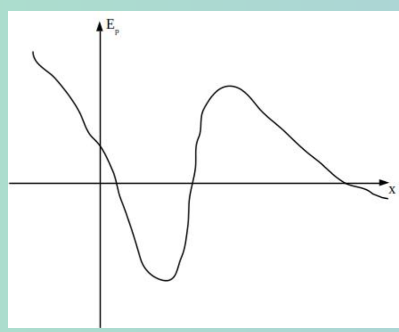
♥ A retenir: Calcul d'un travail

On retiendra le principe de calcul d'un travail sur une intégrale de chemin qui consiste à expliciter le produit scalaire au moyen du déplacement élémentaire **sur la trajectoire** pour ensuite intégrer en fonction de la variable d'integration et des points de départ et d'arrivée [a].

a. Il peut arriver que le résultat du produit scalaire soit définit par morceau et qu'il faille donc découper l'intégrale.

♥ Méthode IV.2: Etude graphique d'un système conservatif

Nous allons travailler à titre d'exemple sur le profil d'énergie potentiel ci-contre. *On pourra, pour comprendre les interprétations physiques les associer à une énergie potentielle de pesanteur et donc à un profil d'altitude. Par exemple pour une bille roulant sans frottements sur ce profil.*



Q1. Rappeler quelle propriété possède l'énergie mécanique.

Q2. Repérer les positions d'équilibre (notée $O_0(x_0)$ et $O_1(x_1)$ (telles que $x_0 < x_1$)) ? Préciser leur stabilité. On notera $E_m(O_0) = E_{m1}$ et $E_m(O_1) = E_{m5}$.

On travaille pour l'instant avec une valeur d'énergie mécanique telle que $E_m > E_{m5}$. On note cette valeur $E_m = E_{m3}$.

Q3. Représenter E_m sur le schéma.

Q4. Justifier qu'il existe, pour l'énergie choisie des zones inaccessibles.

Q5. En un point x accessible, représenter graphiquement, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Comment évolue cette dernière lorsque E_p augmente ? lorsque E_p diminue. En déduire les positions où la vitesse sera maximale.

Q6. En quelle position la vitesse est nulle (notée $C(x_C)$) ?

Q7. Si à $t = 0$, $\dot{x} < 0$, justifier que :

Q7.a. la position du mobile va d'abord continuer à diminuer jusqu'à atteindre C.

Q7.b. le mobile ne peut s'immobiliser en C et va ensuite repartir vers les x croissants.

Q7.c. le mobile va atteindre l'infini.

Q8. Comment appele-t-on un tel état ?

On travaille maintenant avec un état où $0 < E_m < E_{m5}$. On note cette valeur $E_m = E_{m4}$.

Q9. Justifier qu'il existe deux intervales possibles de positions et que si le système est sur l'un des deux intervalles, il ne peut passer à l'autre. On parlera de **barrière de potentiel**.

Q10. Justifier qu'il existe donc un état de diffusion et un état lié possible.

Q11. On considère l'état lié.

Q11.a. Repérer les deux points D et E extrêmes du mouvement.

Q11.b. Justifier qu'on observe un mouvement oscillant entre ces deux points extrêmes. $\rightsquigarrow$ Pourquoi celui-ci est périodique ?

♥ A retenir: Etude graphique d'un système conservatif

- ⋆ Les positions d'équilibre et leur stabilité peut être repérée comme les minima et les maxima sur le profil.
- ⋆ A énergie mécanique fixée, la lecture de l'énergie cinétique et donc de la vitesse peut se faire sur la courbe grâce à la relation $E_c = E_m - E_p$. **De plus, les points où la vitesse s'annule correspondent aux points où $E_m = E_p$.** Ce sont les positions extrémales du mouvement.
- ⋆ On peut repérer les zones accessibles par l'inégalité $E_m > E_p(x)$. Cela peut faire apparaître des **barrière de potentiel** et permet de décider si le système est dans un état lié et ou dans un état de diffusion.

♥ Méthode IV.3: Etudier un système conservatif. Par le calul.

On reprend l'exercice du saut à l'élasique vu dans le chapitre précédent. L'élastique est toujours modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 lorsqu'il est tendu et n'exerce aucune force lorsqu'il est détendu.

Q1. A quelle hauteur remonterait une masse test M de masse minimale (ici $m = 65$kg) si elle est lâchée sans vitesse initiale, l'élastique tendu au maximum : le point d'attache est à la hauteur $h = 18$m au dessus du point de départ.

Q2. Déterminer la position d'équilibre de la masse M et étudier sa stabilité.

♥ A retenir: Etudier un système conservatif

On retiendra les méthodes qui peuvent être utilisées dans un système conservatif :

- ⋆ l'application du TEM pour établir les positions extrêmes où la vitesse est nulle [a]
- ⋆ déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité. Il est important d'observer que dans ce cas : on dérive l'énergie potentielle **par rapport à la position et non par rapport au temps.**

a. On pourrait aussi chercher à exprimer une vitesse en une position donnée comme dans l'exercice suivant.

♥ Méthode IV.4: Déterminer une vitesse en fonction d'une position

On considère une masse m ponctuelle qui se déplace sans frottements sur une demie-sphère de centre O et de rayon R. Elle est soumise à un champ de pesanteur g et est lâchée du sommet avec une vitesse très faible vers la droite.

Q1. Exprimer en un angle θ la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Q2. En déduire si la masse va décoller de la sphère.

♥ A retenir: Déterminer une vitesse en fonction d'une position

On voit la un des intérêts du TEM (pour les systèmes conservatifs surtout) : on peut ainsi déterminer la vitesse en un point, sans avoir à connaître la dépendance temporelle.
Dans l'exemple méthode, cette dernière ne peut être déterminer analytiquement.

IV.2 Applications

Questionnaire sur les 3 premiers chapitres

✍ Exercice IV.1: Relation force énergie

Etablir dans chaque système de coordonnées les relations entre les composantes de la force et les dérivées partielles de l'énergie potentielle.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Gradient
- ⋆ Force conservative

✍ Exercice IV.2: Système conservatif

On considère un point matériel M de masse m attaché au bas d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est attaché à un plafond fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose le champ de pesanteur uniforme et on prend l'origine des *altitudes* ($z = 0$) quand la longueur du ressort est l_0.

Q1. Déterminer l'énergie potentielle du système et montrer qu'il est conservatif en l'absence de frottements. Déduire *de l'énergie potentielle* la position d'équilibre et vérifier sa stabilité.

Q2. On lâche le mobile sans vitesse initiale de $z = 0$. Déterminer les altitudes extrêmes z_{min} et z_{max} ainsi que la vitesse maximale du mobile.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Théorème de l'énergie mécanique.
- ⋆ Barrière de potentiel.
- ⋆ Position d'équilibre et stabilité

IV.3 Entraînement

✍ Exercice IV.3: Pendule simple modifié

On considère un pendule simple modifié. Un mobile ponctuel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement. On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. A la verticale et en dessous de O, un clou planté en O' avec OO'=L/3, qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche. Quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil 2L/3.

A la date $t = 0$, le mobile est lâché sans vitesse initiale avec une inclinaison $\theta(0) = \theta_0 > 0$. On note t_1 la date de première rencontre du fil avec le clou et t_2 la date de la première annulation de la vitesse du mobile pour formule. L'intervalle $[0; t_1[$ est nommé première phase du mouvement, l'intervalle $]t_1; t_2[$ est nommé deuxième phase du mouvement. A la date t_1^-, le fil n'a pas encore rencontré le clou et à la date t_1^+, le fil vient de toucher le clou.

Q1. Par le théorème de la puissance mécanique (dérivée du théorème de l'énergie mécanique), établir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement.

Q2. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_1^- de M à la date t_1^-. En déduire la vitesse angulaire ω_1^- à cette date.

Q3. Dans l'hypothèse des petites oscillations (pour cette question uniquement), déterminer la durée δt_I de la première phase.

Q4. Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. Déterminer la vitesse v_1^+ de M à la date t_1^+. En déduire la vitesse angulaire ω_1^+ à cette date.

Q5. Déterminer l'angle θ_2 atteint à l'instant t_2.

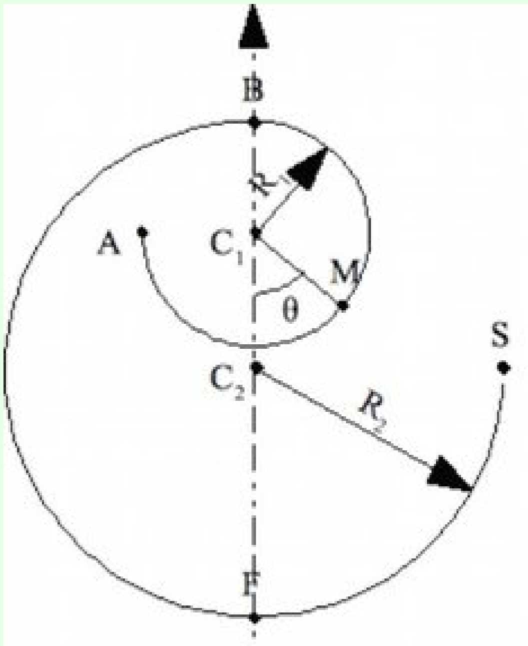
Q6. On se place à nouveau dans le cadre des petites oscillations. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, donner sans calcul la durée δt_{II} de la deuxième phase.

Q7. Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système conservatif
- ⋆ Théorème de l'énergie cinétique
- ⋆ Pendule aux petits angles

✍ Exercice IV.4: Mouvement d'un anneau sur une piste



On considère le dispositif suivant où un objet assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste de deux parties circulaires de rayons R_1 et R_2 et de centres C_1 et C_2 dans un plan vertical. On repère la position de M par l'angle θ dont le centre de référence est soit C_1 (partie (1)), soit C_2 (partie (2)). On prend les angles croissants dans le sens trigonométrique et $\theta_A = -\pi/2$. Il n'y a pas de frottements et on note g l'accélération de la pesanteur.

Q1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(\theta)$ de M en supposant $E_p = 0$ au point $B(\theta = \pi)$. On distinguera les cas (1) et (2).

Q2. Tracer l'allure de $E_p(\theta)$

Q3. Déterminer les positions angulaires d'équilibre et leur stabilité.

Q1. L'anneau est initialement en A. Il est lancé avec une vitesse V_0 (dans le sens trigonométrique).

- **Q1.a.** Montrer graphiquement qu'on doit imposer une condition sur la vitesse V_0 pour que le mobile M atteignent le point F.
- **Q1.b.** Exprimer cette condition en fonction des données du problème.
- **Q1.c.** En déduire la vitesse du mobile en F (notée V_F) quand cette condition est remplie.
- **Q1.d.** La condition précédente remplie, l'anneau sort-il de la piste en S ? A quelle vitesse (notée V_S) ?

Q2. Déterminer à chaque instant la valeur de l'accélération normale en fonction de V la vitesse du mobile et des rayons R_1 et R_2 pour chaque partie (1) et (2).

Q3. Dans la partie (1), déterminer la réaction de la piste sur l'anneau. S'il était remplacé par une bille roulant à l'intérieur de la piste, quelle serait la condition sur formule pour que la bille reste sur la piste.

Q4. Même question pour la partie (2).

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Théorème de l'énergie mécanique.
- ⋆ Barrière de potentiel.
- ⋆ Position d'équilibre et stabilité.

Eléments de correction (sans justification) :

$$\begin{cases} E_p(\theta \leq \pi) &= -mgR_1(\cos\theta + 1) \\ E_p(\theta \geq \pi) &= -mgR_2(\cos\theta + 1) \end{cases}$$

$$V_0 \geq \sqrt{2gR_1}$$

$$V_S = \sqrt{V_0^2 - 2gR_1 + 2gR_2}$$

$$N = \frac{mV_0^2}{R_1} + 3mg\cos\theta > 0$$

✍ Exercice IV.5: Equilibre de charges

Tous les mouvements ont lieu suivant l'axe Ox et on néglige l'effet du poids. La force électrostatique exercée par un point M_1 de charge q_1 sur un point M_2 de charge q_2 est : $\overrightarrow{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2^2}\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2. On travaille dans un référentiel R supposé galiléen.

Q1. Un point matériel de charge q est fixé en O, origine du repère. Un autre point matériel M de charge identique q, initialement à droit de O, à la distance a de O, est abandonné sans vitesse initiale.

Q1.a. Déterminer en fonction de $x = OM > 0$, l'énergie potentielle associée à la force électrostatique subie par M. On la prendra par convention nulle pour M à l'infini.

Q1.b. Le point M est-il dans un état lié ou de diffusion ?

Q1.c. Déterminer la vitesse du point M lorsqu'il est à l'infini.

Q2. Un autre point matériel fixe O' de charge 4q est ajouté à une distante 2a à droite de O. Le point M est placé entre O et O'.

Q2.a. Déterminer vectoriellement la résultante des forces qui s'exerce sur M en fonction de x=OM ($0 < x < 2a$). En déduire la position d'équilibre. On la notera par la suite x_0.

Q2.b. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ du point et étudier la stabilité de la position d'équilibre x_0 pour 0 < x < 2a.

Q2.c. Représenter l'allure de $E_p(x)$ pour la particule de charge q pour $x \in [0; 2a]$. Calculer la valeur de l'extremum $E_p(x_0)$.

Q2.d. Justifier qu'on puisse faire l'approximation $(x - x_0) \ll 1$ pour tout le mouvement.

Q3. On lâche sans vitesse initiale la particule M (de charge q, masse m) au voisinage du point d'équilibre.

Q3.a. Etablir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de cette position

Q3.b. En déduire la pulsation des petites oscillations et la forme de $x(t)$.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Théorème de l'énergie mécanique.
- ⋆ Position d'équilibre et stabilité.

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Cas à une charge : $E_p(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x}$
  $v_\infty^2 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 ma}$
- ⋆ Cas à deux charges : $E_p(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{2a-x}\right)$
- ⋆ Position d'équilibre (stable) : $x_{eq} = \frac{2a}{3}$
- ⋆ Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{81}{8a^3}}{m}}$

✍ Exercice IV.6: Bille accrochée à deux ressorts

On considère le mouvement d'une bille M de masse m pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de plan vertical, de centre O et de rayon R. On note AB le diamètre horizontale du cerceau, Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical et θ l'angle entre Ox et OM. Le sens trigonométrique est pris positif (on suppose que $\theta_B = 0$). On suppose que le cerceau est fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dans tout le problème, on prendra comme origine des potentiels le point le plus bas du cerceau.

Q1. Dans un premier temps, la bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k dont la seconde extrémité est fixée en B.

Q1.a. Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur la bille M. Quelles sont les forces qui travaillent ?

Q1.b. Déterminer l'expression de la longueur du ressort en fonction de R et θ. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique pour le point M.

Q1.c. Déduire du théorème de l'énergie mécanique l'équation différentielle du mouvement.

Q1.d. Déterminer à partir de l'équation différentielle les position d'équilibre et étudier leur stabilité par linéarisation de l'équation. On note θ_d la position d'équilibre pour $\theta \in [-\pi; 0]$.

Q1.e. Retrouver les conclusions précédentes par une étude de l'énergie potentielle.

Q2. Dans la suite, en plus du ressort précédent, on attache la bille à un deuxième ressort identique au premier mais dont la seconde extrémité est fixée en A.

Q2.a. Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur la bille M. Quelles sont les forces qui travaillent ?

Q2.b. Déterminer l'expression de la longueur du second ressort en fonction de R et θ. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique du le point M pour le second ressort.

Q2.c. Exprimer le théorème de l'énergie cinétique (forme locale) pour le point M. En déduire l'équation différentielle du mouvement. Qu'observe-t-on ?

Q2.d. Déterminer la résultante des forces de rappel élastique et justifier l'observation précédente.

Q2.e. Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

Q2.f. Déterminer l'expression de la réaction $\overrightarrow{N}$ du cerceau en fonction de θ sachant qu'on abandonne la bille depuis $\theta = \theta_0$ sans vitesse initiale. (On supposera $|\theta_0| \approx \pi/2$).

Q2.g. En déduire la condition à vérifier pour que la bille quitte le cerceau.

Q2.h. Quelle est la condition nécessaire sur k, R, m, g pour que la bille reste sur le cerceau lorsqu'elle est à l'équilibre.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Ressort.
- ⋆ Théorème de l'énergie mécanique.
- ⋆ Position d'équilibre et stabilité.

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Un ressort : $E_p = -kR^2(\cos\theta) + mgR\sin\theta + mgR$
- ⋆ Positions d'équilibre : $\tan\theta = -\frac{mgR}{kR^2}$, il n'y a qu'une position stable : $\theta_{eq} = -\arctan\frac{mgR}{kR^2}$
- ⋆ Deux ressorts : $E_p = mgR\sin\theta + mgR$, la seule position d'équilibre est en $-\pi/2$

Devoir libre : Gravimètre à ressort

Chapitre 12: Mouvement de particules chargées

I Force de Lorentz

♥ Définition I.1: Force de Lorentz

Soit un point matériel portant une charge q et possédant une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude. On suppose que le point matériel est situé en un point M où règne un champ électrique $\vec{E}(M)$ et un champ magnétique $\vec{B}(M)$. Alors le point matériel subit une action de la part du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ appelée **action** [a] **de Lorentz** et donc la force s'écrit :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M)\right) \tag{12.1}$$

a. ou force

I.1 Aspects énergétiques

Partie magnétique

♥ Propriété I.1: Travail de la partie magnétique

La force de Lorentz magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ **ne travaille pas**.

Démonstration. La preuve est triviale en remarquant que la force est toujours perpendiculaire à la vitesse, produit vectoriel oblige. □

Partie électrique

♥ Propriété I.2: Caractére conservatif de la partie électrostatique

Si les champs sont stationnaires, la partie électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ dérive d'une énergie potentielle E_p [a].

On définit alors le potentiel électrostatique V associé au champ électrique tel que $V(M) = E_p(M)/q$. Il est indépendant de la charge q. On a alors les relations :

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{12.2}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p \tag{12.3}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \tag{12.4}$$

a. Cette propriété découle directement des lois fondamentales de l'électromagnétisme que sont les équations de Maxwell. Elles seront traitées en deuxième année.

II S'entrainer

II.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Mouvement dans un champ électrique

♥ Méthode II.1: Calcul d'une tension

Compétence : Savoir calculer une tension entre deux points/ un potentiel en un point/ l'énergie potentielle en un point connaissant le champ électrique.

On considère une distribution de champ électrique où en tout point M :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho}{3} r \vec{e}_r & \text{si r < R} \\ \frac{\rho R^3}{3r^2} \vec{e}_r & \text{si r > R} \end{cases} \tag{12.5}$$

où r et $\vec{e}_r$ correspondent à la coordonnées et au vecteur radial en coordonnées sphériques.

Q1. Déterminer la tension U_{PO} entre un point P de coordonnées r, θ, ϕ et le centre O du repère puis le potentiel $V(P)$ au point P en prenant $V(0) = 0$.

Q2. On considère un électron qui se déplace dans le champ électrique précédent. Représenter $E_p(r)$ l'énergie potentielle de l'électron.

♥ Méthode II.2: Accélération dans un champ électrique

Compétence : Etablir la vitesse d'une charge accélérée par un champ $\vec{E}$ au moyen d'un TEM. On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ électrique $\vec{E}(M)$ dont le potentiel électrostatique associé est noté $V(M)$.

La charge initialement immobile au point A doit être accélérée par le champ jusqu'à un point B.

Q1. Justifier que la seule donnée de la tension $U = U_{AB}$ permet de déterminer la vitesse de la particule en B et que le signe de q impose le signe de U_{AB}. Déterminer au passage la vitesse v (en norme) de la charge en B.

Q2. Exprimer l'énergie cinétique de la charge $q = -e$ une fois en B en eV (électron-volt) pour $|U| = 1000V$.

♥ A retenir: Accélération par une tension

- ⋆ La donnée seule de la tension accélératrice suffit de déterminer le gain en énergie cinétique de la particule. C'est pourquoi on utilise couramment l'expression : "On accélère une particule de charge ...par une tension ..." sans autre précision.
- ⋆ La définition de l'électron-volt : 1eV est l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1V soit $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$.

♥ Méthode II.3: Déviation par un champ électrique uniforme.

On travaille par la suite dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et on lui associé un repère cartésien $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

On considère un jet d'électrons préalablement accélérés par une tension U. Ils possèdent alors une vitesse notée $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

Ils pénêtrent alors dans une zone entre $x = 0$ et $x = d$ où reigne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$ puis uns fois sortie de cette zone continuent entre $x = d$ et $x = d + D$ jusqu'à un écran situé dans le plan O_2yz avec $O_2(d + D, 0, 0)$ dans une zone vide de champ.

Q1. Déterminer la deflexion δ c'est-à-dire la distance O_2A entre O_2 et le point A d'impact du jet sur l'écran.

Mouvement dans un champ magnétique

♥ Méthode II.4: Cas d'un champ magnétique uniforme

TOUT l'exercice constitue un exercice de cours qui doit être connu et dont les conclusions sont à connaître.

On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

A $t = 0$, la particule possède une vitesse $\vec{v}_0$.

Q1. Montrer que si $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ alors la trajectoire de la particule est plane.

Q2. Montrer que, dans les conditions précédentes, la trajectoire est un cercle d'axe parallèle à $\vec{B}$ parcouru à vitesse uniforme. Préciser le sens de rotation autour du champ magnétique. Déterminer alors le rayon du cercle et la vitesse angulaire de rotation (appelée *pulsation cyclotron*).

♥ A retenir: Trajectoire dans un champ magnétique uniforme

Une particule de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique uniforme possède une trajectoire circulaire <u>si sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$</u>. De plus :

- ⋆ Le mouvement est uniforme.
- ⋆ La rotation se fait dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$ en cohérence avec le vecteur $-q\vec{B}$.
- ⋆ Le rayon du cercle est $R = \left|\frac{mv_0}{qB}\right|$
- ⋆ La vitesse angulaire est : $\omega = \left|\frac{qB}{m}\right|$

II.2 Application

✍ Exercice II.1: Calcul d'une tension

Un condensateur cylindrique est composé de deux cylindres coaxiaux de même longueur L et de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$.

Lorsque le cylindre intérieur est chargé par une charge $-Q$ et le cylindre extérieur chargé par une charge $+Q$ [a], l'ensemble forme ainsi un condensateur, dits "cylindriques". Il règne alors un champ électrique non nuls entre les deux cylindres dont l'expression est (on utilise les coordonnées cylindriques de même axe que les cylindres) :

$$\overrightarrow{E}(M(r,\theta,z)) = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0 r}\overrightarrow{e}_r \tag{12.6}$$

Q1. Déterminer la différence de potentiel entre les deux armatures $U_{21} = V(R_2) - V(R_1)$.

Q2. En déduire la capacité du condensateur.

a. Les charges sont uniformément réparties

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Calcul d'une tension (Méthode II.1)
- ⋆ Cours d'électrocinétique

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $U_{21} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$

Q2. $C = \frac{2\pi L\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

✍ Exercice II.2: Déviation par une champ magnétique

On considère un électron qui pénètre avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e}_x$ (avec $v_0 = 2 \times 10^7 m/s$) dans une zone de champ magnétique situé entre $x = 0$ et $x = D$.

Q1. Déterminer le rayon de la trajectoire de l'électron et faire l'application numérique.

Q2. En déduire une condition sur D pour que l'électron sorte en $x = D$.

Q3. Déterminer la distance D pour dévier la particule d'un angle $\theta = 1.71^\circ$.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Trajectoire dans un champ magnétique uniforme (Méthode II.4)

Eléments de correction (sans justification) :

$$D = R\sin\theta = \frac{mv_0}{eB}\sin\theta$$

II.3 Entrainement

✍ Exercice II.3: Spectromètre de masse

Le principe d'un spectrographe de masse est représenté Figure 12.1.

1. Dans un chambre une chambre d'ionisation (1) on produit des ions de masse m et de charge $q = 2e$. Ces ions pénètrent par le trou T_1 d'une plaque P_1 dans une enceinte (A) ; leur vitesse en T_1 est négligeable. Dans l'enceinte (A), ces ions sont accélérés par une tension $U = V_{P1} - V_{P2}$, puis sortent de (A) par un trou T_2 percé dans la plaque P_2.
2. Ils pénètrent alors dans une enceinte (D) où règne un champ magnétique B uniforme et constant perpendiculaire au plan de la figure. La vitesse des ions en T_2 est notée v_0. On néglige le poids.

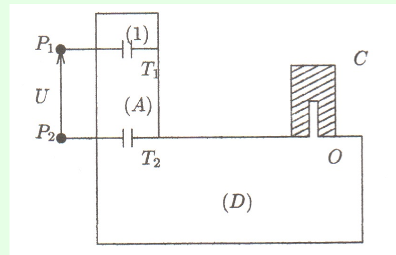


FIGURE 12.1 – Spectromètre de masse

Données : $e = 1.60 \times 10^{-19} C; U = 4000V; B = 0.100T$; unité de masse atomique $m_0 = 1.67 \times 10^{-27} kg$.

Q1. Exprimer la vitesse v_0 en fonction de q, m et U.

Q2. Préciser le sens de B pour que les ions puissent être recueillis dans la fente O du collecteur (C). Calculer littéralement le rayon R de la trajectoire des ions dans l'enceinte (D).

Q3. L'élément zinc contient deux isotopes de nombres de masse $A_1 = 68$ et $A_2 = 70$. On souhaite recueillir en O l'isotope A_1. Calculer numériquement la distance $l = T_2O$ et évaluer la largeur maximale de la fente du collecteur.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Accélération par un champ électrique (Méthode II.2)
- ⋆ Trajectoire dans un champ magnétique uniforme (Méthode II.4)

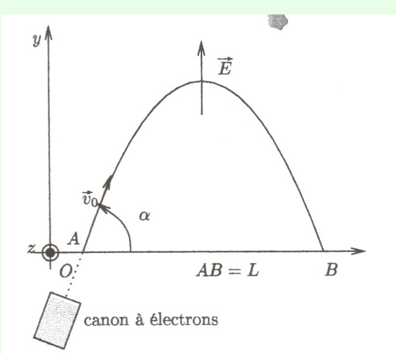
Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

Q2. $R = \sqrt{\frac{2mU}{q}}\frac{1}{B}$; B va vers le fond.

Q3. $l = 2R(A_1 = 68) = 1.07m; \Delta l < 4(R(A_2) - R(A_1)) = 3cm$

✍ Exercice II.4: Focalisation par un champ électrique



Des électrons, préalablement accélérés par une tension V=10kV, pénètrent dans la fente supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

On désire recueillir ces électrons à travers une fente B pratiquée dans le plan opaque (xAy), à la distance AB=L=20cm de A. On peut régler l'angle α que fait le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ des électrons en A avec l'axe (Ax), ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique E. Le vecteur v_0 est supposé parallèle au plan (Axy).

Q1. Quelles sont les valeurs optimales à donner à α et E pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire $\Delta\alpha \ll \alpha$?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Accélération par un champ électrique (Méthode II.2)
- ⋆ Trajectoire dans un champ électrique uniforme (Méthode II.3)

Eléments de correction (sans justification) :

Q1. $\alpha = \pi/4; E = \frac{2V}{L}$

✍ Exercice II.5: Modèle de Drüde

Le modèle de Drüde est un modèle proposé pour décrire la conduction dans les métaux (notamment les fils de cuivre dans les circuits). Soumis à un champ électrique extérieur, les électrons de conduction du métal ne vont pas être accélérés indéfiniment : leur vitesse tend vers une vitesse limite. Paul Drüde a proposé une explication en tenant compte de l'interaction des électrons avec le réseau cristallin. Ce dernier, chargé positivement (à cause de l'arrachement des électrons) exerce une action de freinage sous la forme : $\overrightarrow{F}_D = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ sur les électrons où m et $\overrightarrow{v}$ sont les masses et vecteur vitesse de l'électron et τ un temps caractéristique très court dépendant du matériau.

On considère donc un électron de conduction soumis à la force précédente et à l'action d'un champ électrique supposé uniforme $\overrightarrow{E}$.

Q1. Etablir l'équation du mouvement de l'électron. En déduire qu'il va tendre vers une vitesse limite qu'on déterminera.

Q2. On note n la densité volumique d'électron dans le matériau, exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j} = -ne\overrightarrow{v}$ en fonction de n, τ, m, e et $\overrightarrow{E}$ en régime établi. On appelle cette relation **loi d'Ohm locale** $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ où γ est appelée **conductivité du matériau**.

On considère un fil de longueur L et de section S dans lequel règne le champ électrique précédent supposé uniforme.

Q3. Par un bilan de quantité de charge traversant une section S de fil pendant un temps dt, montrer que l'intensité (orientée dans le même sens que $\overrightarrow{E}$) qui traverse le fil s'écrit $I = neSv$ avec v la composante du vecteur vitesse des électron le long du fil [a].

Q4. Exprimer la différence de potentiel entre les deux extrémités du fil. En déduire la loi d'Ohm globale et l'expression de la résistance R du fil en fonction de γ, L et S.

Q5. La conductivité du cuivre est $\gamma = 59.6 \times 10^6 \mathrm{S.m}^{-1}$. Estimer la résistance d'un mètre de fil simple utilisé en TP et commenter.

Q6. Si l'on considère maintenant une charge de conduction q de signe quelconque. Exprimer la nouvelle conductivité γ et commenter son signe. Quel est l'intérêt en chimie de cette observation ?

---

a. On retrouve au passage une relation très utilisée en deuxième année : $I = \iint \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Trajectoire dans un champ électrique uniforme (Méthode II.3)

Eléments de correction (sans justification) :

$$\begin{cases} \gamma & = \frac{ne^2\tau}{m} \\ R & = \frac{L}{\gamma S} \end{cases} \tag{12.7}$$

La conductivité ne dépend pas du signe de la charge : utile en conductimétrie.

✍ Exercice II.6: Effet Hall

L'espace est repéré par les axes cartésiens Ox, Oy, Oz et les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. On s'intéresse ici à la conduction dans un métal assurée par des électrons de charge $q = -e$, de masse m, de densité n. Le métal est placé dans un champ électrique $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Ces champs sont uniformes et permanents. L'interaction entre les électrons et les ions fixes du réseau est modélisé par une force de frottement : $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$, $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse des électrons.

Q1. Déterminer l'unité de τ.

Q2. Etablir l'équation différentielle du mouvement d'un électron. Que devient cette équation en régime permanent ?

Q3. On note $\vec{j} = nq\vec{v}$ le vecteur densité de courant. Montrer qu'en régime permanent, les composantes de ce vecteur vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} j_x - \frac{q\tau B}{m} j_y & = \gamma E_x \\ \frac{q\tau B}{m} j_x + j_y & = \gamma E_y \\ j_z & = \gamma E_z \end{cases} \tag{12.8}$$

où γ est une constante que l'on déterminera.

Q4. En déduire que l'on peut écrire j_x etj_y sous la forme suivante : $j_x = \gamma\left(\alpha E_x + \beta E_y\right)$ et $j_y = \gamma\left(-\beta E_x + \alpha E_y\right)$ où α et β sont deux constantes à déterminer en fonction des données.

Q5. Si la conduction ne peut avoir lieu que suivant Ox, montrer que la présence du champ B impose la présence d'un champ électrique (appelé champ de Hall) et déterminer sa direction. Calculer la constante de Hall : $\frac{E_y}{j_x B}$

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Force de Lorentz

Chapitre 13: Oscillateurs

On s'appuiera sur les méthodes vues dans les premiers chapitres et les études des oscillateurs en électrocinétique pour faire cette partie.

I Oscillateur harmonique

♥ Définition I.1: Oscillateur harmonique - Forme canonique

Un oscillateur harmonique est un système dont l'équation d'évolution s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq} \tag{13.1}$$

✍ Exercice I.1: Mise en équation et étude d'un OH

Généralités :

Q1. En considérant que l'accélération est $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$, montrer que la résultante des forces s'exerçant sur un oscillateur harmonique se met sous la forme : $\vec{F} = -k(x - x_{eq})\vec{e_x}$. En déduire l'énergie potentielle associée à cette force.

Q2. Donner les deux formes générales de $X(t) = x - x_{eq}$.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration sous les deux formes pour des conditions initialles à $t = 0$: $X(t = 0) = X_0; v(t = 0) = v_0$.

Q4. ♥ Vérifier qu'il y a **isochronisme** des oscillations, c'est-à-dire que la pulsation des oscillations **ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.**

Q5. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $X(t)$.

Evolution énergétique : On suppose que les oscillations sont d'amplitude x_0, on travaillera directement avec X.

Q6. Exprimer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique au cours du temps.

Q7. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

Q8. Représenter graphiquement l'évolution temporelle des grandeurs énergétiques puis commenter les échanges d'énergie.

Exemple de mise en équation : On considère un ressort de raideur k et de longueur l_0 accroché d'un côté à un point A de côte x_A fixe et de l'autre à une masse m assimilable à un point matériel noté M. Le point M glisse sans frottements sur un axe Ox de sorte que le ressort reste horizontal. On note x la position du point M par rapport à un point O de référence. Pour cet exercice, le point O est confondu avec le point A.

Q9. Exprimer l'équation d'évolution de x(t).

Q10. En comparant l'équation d'un oscillateur LC en électrocinétique à celle obtenue ici (comparer notamment les grandeurs énergétiques). Proposer des grandeurs analogues entre k,m,L et C.

II Oscillateur amorti

♥ Définition II.1: Oscillateur amorti

Un oscillateur amorti est un oscillateur donc l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}(t) + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq} \tag{13.2}$$

On rappelle qu'on réalise souvent un changement de variable pour annuler le second membre constant.
On n'a pas donné ici l'expression avec le facteur de qualité mais on peut réaliser l'étude au moyen de ce dernier aussi.

✍ Exercice II.1: Etude d'un oscillateur amorti

Dans tout l'exercice, on pose $X(t) = x(t) - x_{eq}$.

Généralités :

Q1. On considère un oscillateur amorti en régime apériodique. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = X_0$ et $V(t = 0) = V_0$.

Q2. On considère un oscillateur amorti en régime critique. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = X_0$ et $V(t = 0) = V_0$. Estimer le temps caractéristique du régime.

Q3. On considère un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique.

Q3.a. Donner l'expression temporelle de X(t) et préciser l'expression des constantes d'intégration pour $X(t = 0) = X_0$ et $V(t = 0) = V_0$.

Q3.b. Estimer le temps caractéristique d'un tel régime en fonction du coefficient d'amortissement.

Q3.c. Représenter l'allure du signal ?

Q3.d. éfinir le décrément logarithmique et l'exprimer en fonction du coefficient d'amortissement.

Etude énergétique :

Q4. Montrer que l'équation générale conduit à considérer que deux forces s'appliquent : une force de rappel $\overrightarrow{F} = -k(x - x_{eq})$ et une force de la forme $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$. Comment appelle-t-on une telle force ?

Q5. Montrer alors que l'énergie mécanique ne fait que diminuer au cours du temps.

Mise en équation : On considère un ressort de raideur k et de longueur l_0 accroché d'un côté à un point A de côte x_A fixe et de l'autre à une masse m assimilable à un point matériel noté M. Le point M glisse sans frottements sur un axe Ox de sorte que le ressort reste horizontal. On note x la position du point M par rapport à un point O de référence. Pour cet exercice, le point O est confondu avec le point A.

On suppose que le système est soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\lambda\overrightarrow{v}$.

Q6. Déterminer la nouvelle équation qui régit l'évolution de x. Introduire les expressions de la pulsation propre et le coefficient d'amortissement.

Q7. En étudiant les puissances dissipées, exprimer une grandeur analogue à la résistance électrique R d'un circuit RLC série dans le domaine d'un oscillateur mécanique.

III Oscillateur forcé

♥ Définition III.1: Oscillateur forcé

Un oscillateur forcé est un oscillateur (dont l'équation homogène est celle d'un oscillateur amorti) soumis à une excitation sinusoïdale. L'équation obtenue sera par exemple de la forme :

$$frac\mathrm{d}^2\mathrm{X}\mathrm{dt}^2 + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}} + \omega_0^2 X = \frac{F_m}{m}\cos\omega t = a_m\cos\omega t$$

✍ Exercice III.1: Etude du régime sinusoïdal forcé

On considère un ressort de raideur k et de longueur l_0 accroché d'un côté à un point A de côte x_A fixe et de l'autre à une masse m assimilable à un point matériel noté M. Le point M glisse sans frottements sur un axe Ox de sorte que le ressort reste horizontal. On note x la position du point M par rapport à un point O de référence.

On suppose que le système est soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\lambda\vec{v}$.

Cas d'une force extérieure : On considère que le point A est confondu avec O et qu'on exercice une force supplémentaire $\vec{F}(t) = F_m\cos\omega t\vec{e}_x$.

On pose X(t) l'écart à la position d'équilibre.

Q1. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de X(t).

Q2. En déduire la représentation complexe $\underline{X}$ de X(t). Etudier son comportement fréquentielle : type de filtrage, amplitude réelle et phase, existence d'une résonance en fonction de ξ.

Q3. Pour $\xi = 1$, déterminer la fréquence de coupure.

Q4. Etudier la réponse en vitesse en régime forcé : amplitude complexe, type de filtrage, amplitude réelle et phase, résonance et bande passante.

Q5. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que la puissance moyenne fournie par la force excitatrice est proportionnelle à l'amplitude de la vitesse au carré du système.

Q6. En déduire l'expression de la puissance moyenne abosrbée par l'oscillateur en fonction de ω. Pour quelle pulsation la puissance absorbée par l'oscillateur est-elle maximale ? Dans quel domaine de la chimie cette observation est-elle utile ?

Cas d'un mouvement de A : Il n'y a maintenant de force excitatrice sinusoïdale et la force de frottements fluide est de la forme : $-\lambda\left(\vec{v} - \vec{v}_A\right)$.

Le point A est maintenant animé d'un mouvement de sorte que $\overrightarrow{OA} = x_m\cos\omega t\vec{e_x}$.

Q7. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $l(t) = x(t) - x_A(t) - l_0$ correspondant à l'allongement du ressort.

Q8. Etudier la réponse fréquentielle de l'allongement.

IV Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un fil parfait (ou d'une tige parfaite) de longueur L au bout duquel on attache une masse m assimilable à un point matériel (noté M). Dans cette partie, on considère le cas d'une tige rigide. Ici, l'autre extrémité de la tige est attachée à un point O fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est supposé uniforme.

✍ Exercice IV.1: Etude d'un pendule simple

Mise en équation :

Q1. Proposer un paramétrage adapté au problème.

Q2. Etablir l'équation qui régit l'évolution du pendule au moyen du principe fondamental de la dynamique.

Q3. Etablir à nouveau l'équation d'évolution du pendule mais en utilisant le théorème du moment cinétique.

Q4. Etablir à nouveau l'équation d'évolution du pendule mais en utilisant le théorème de la puissance mécanique. On montrera que l'énergie mécanique est une **intégrale première du mouvement**, c'est-à-dire une **grandeur ne dépendant que de la position et de sa dérivée première** et qui est **constante au cours du mouvement**.

Etude aux petits mouvements :

Q5. Linéariser l'équation d'évolution pour des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable. Comment appelle-t-on un tel système ?

Q6. Préciser la forme temporelle de l'évolution du système ainsi que la période des oscillations. Montrer que celle-ci ne dépend pas des conditions initiales (dans l'hypothèse des petites mouvements). On parle **d'isochronisme** des oscillations.

Etude générale :

Q7. On considère à nouveau le pendule simple mais on ne suppose plus qu'on est aux petits angles. En étudiant l'énergie potentielle du pendule simple, montrer :

Q7.a. l'existence de deux types de mouvements suivant l'énergie mécanique : un mouvement pendulaire et un mouvement circulaire complet.

Q7.b. L'existence de deux positions d'équilibre : l'une stable et l'autre instable.

Q7.c. Si le mobile part du point le plus bas avec une vitesse linéaire v_0. Déterminer l'angle $\theta_{\max}$ le plus haut qu'il peut atteindre en fonction de v_0 ainsi que la valeur minimale de v_0 permettant en pendule de faire des tours complet.

Q7.d. Reconnaître sur le graphique ci-après les différents cas : petits mouvements, grands mouvements pendulaire, tours complets.

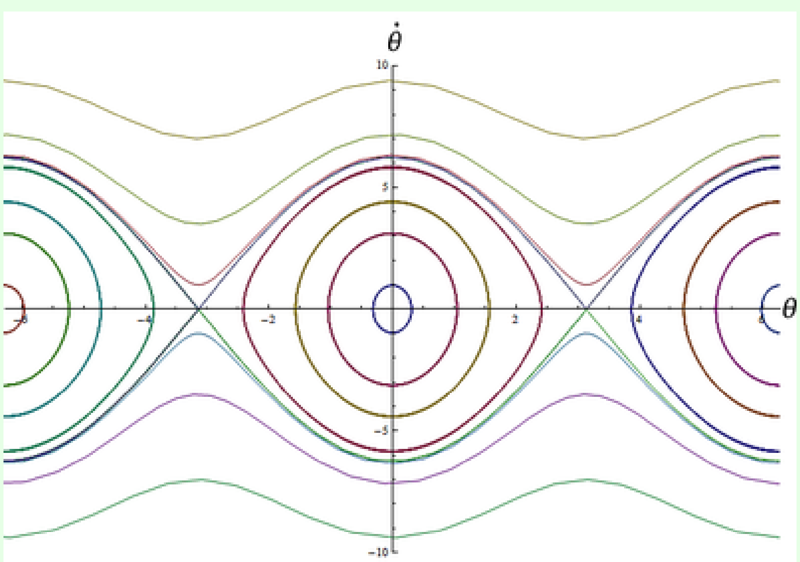


Figure 13.1 – Portraits de phases d'un pendule

Anisochronisme : On considère que le pendule est lâché d'un angle $\theta_0 > 0$ avec la verticale descendante sans vitesse initiale. On ne travaille plus aux petits angles.

Q8. Quelle est la nature du mouvement : pendulaire ou tour complet ?

Q9. A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse angulaire à un instant t où le pendule fait un angle θ avec la verticale descendante.

Q10. Déduire de l'équation précédente que la période d'oscillation T est :

$$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(cos\theta - cos\theta_0)}}$$

Q11. La période des oscillations est-elle indépendante de l'amplitude des oscillations ? On parle d'**anisochronisme** des oscillations.

Q12. On a représenté ci-après le rapport T/T_0 en fonction de l'angle θ_0 (noté θ_{max}). Commenter cette courbe.

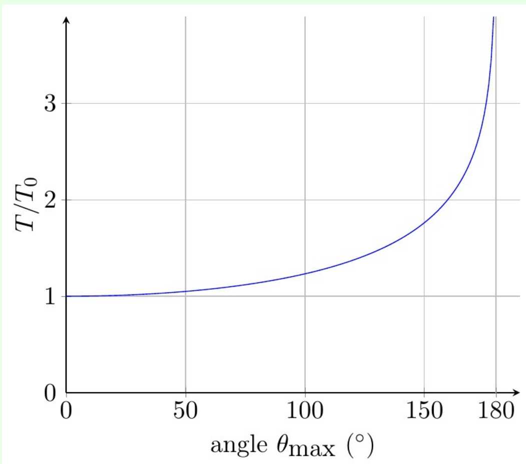


Figure 13.2 – Période d'un pendule

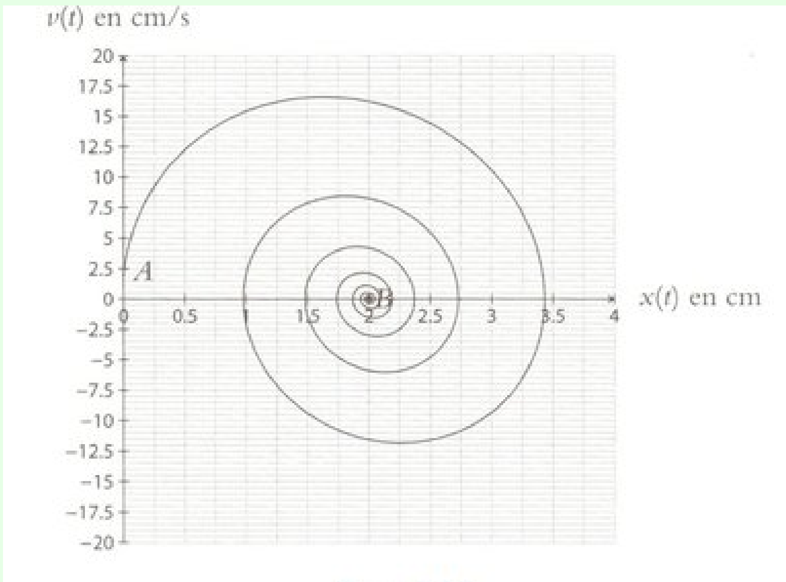
V S'entrainer

✍ Exercice V.1: Etude d'un portrait de phase

On fait l'étude d'un oscillateur M de masse $m = 0.2$kg astreint à se déplacer suivant l'axe Ox de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$. Il est soumis aux forces suivantes :

- ⋆ la force de rappel d'un ressort de caractéristiques (k, l_0).
- ⋆ une force de frottements visqueux linéaire de coefficients de frottement λ
- ⋆ une force constante $\overrightarrow{F_C} = F_C\overrightarrow{u_x}$.

Le portrait de phase $(X(t); V(t) = \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}}(t))$de l'oscillateur étudié est donné sur la figure Figure E.6. On souhaite pouvoir en tirer les valeurs des différents paramètres de l'oscillateur.



On donne les abscisses correspondant aux croisements de la trajectoire de phase avec l'axe des abscisses :

Croisement	1	2	3	4	5
t(s)	0.31	0.65	0.97	1.3	1.62

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M et la mettre sous la forme : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0$ où x est l'allongement du ressort (par rapport à l_0).

Q2. Dans le cas d'une solution pseudo-périodique, exprimer $x(t)$: on définira le temps de relaxation énergétique τ et la pseudo-période Ω que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q.

Q3. Déterminer la vitesse de l'élongation au début et à la fin du mouvement.

Q4. Déterminer la vitesse maximale atteinte ainsi que l'élongation maximale.

Q5. En déduire la pseudo-période T et la pseudo-pulsation Ω.

Q6. On définit le décrément logarithmique par : $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)-x_B}{x(t+nT)-x_B}\right)$ où $x(t)$ et $x(t+nT)$ correspondent aux élongations aux temps t et $t+nT$ et x_B correspond à l'élongation finale de M. Exprimer δ en fonction de T et τ. En choisissant une valeur de n la plus grande possible déterminer δ puis τ.

Q7. Déduire des résultats précédents le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

Q8. Déterminer la raideur du ressort k, le coefficient de frottement λ et la force F_C.

✍ Exercice V.2: Amortisseur

On considère l'amortisseur d'un véhicule. Chaque roue supporte un quart de la masse de la voiture assimilé (la quart de voiture) à un point M de masse $m = 500$kg et relié à la voiture par un amortisseur dont le ressort a une constante de raideur $k = 2,5 \times 10^4 N.m^{-1}$.

Le point M subit aussi un frottement visqueux $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse verticale de M par rapport au sol. On donne $\lambda = 5 \times 10^3$kg.s^{-1}. Le véhicule franchit à vitesse constante un défaut de chaussée de hauteur h=5cm. Son inertie est suffisante pour qu'il ne se soulève pas immédiatement mais acquiert une vitesse verticale $v_0 = 0,5$m.s^{-1}. On pose $\alpha = \lambda/m$. On note Z_i la cote du point M avant le passage du défaut (on suppose qu'il n'y a pas de mouvement vertical avant le défaut).

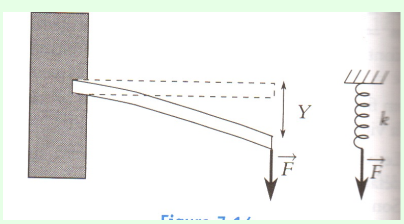
Q1. On note $Z(t)$ la cote du point M. Établir l'équation différentielle pour Z après le passage de l'obstacle. On introduira la grandeur α.

Q2. Déterminer $Z(t)$ en fonction des données. Calculer numériquement α et Ω et en déduire qu'on peut simplifier légèrement l'expression de $Z(t)$. On gardera cette simplification par la suite.

Q3. Les passagers sont sensibles à l'accélération verticale de la voiture. Calculer sa valeur maximale.

Q4. Il faut éviter des oscillations susceptibles de provoquer chez les passagers le mal des transports, en se plaçant dans les conditions critiques. Pour quelle masse par roue est-ce réalisé, k et λ restant inchangés ?

✍ Exercice V.3: Elasticité d'une fibre de verre



Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500$kg.m−1.

La fibre de verre de longueur l et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige le poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche. La flèche Y est donnée par la relation suivante : $Y = \frac{7l^3F}{Ed^4}$ où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques, on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10} S.I.$

Q1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young ?

Q2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et l.

Q3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $l = 7$mm et de diamètre $d = 10\mu$m.

Q4. Donner (à la justifiant) l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur k lorsque sa longueur est l. En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y ?

✍ Exercice V.4: Piscine à vagues

Pour créer des vagues dans une piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à une masse immergée sur un côté du bassin. Soit une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V plongée dans l'eau de masse volumique ρ_{eau}. Cette masse est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 accroché à son extrémité en un point A. On note Oz l'axe vertical vertical passant par A et orienté vers le bas et on prend O comme origine. A l'équilibre, la masse M est située en z = h. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose dans un premier temps que A est immobile et A=O.

Q1. On suppose d'abord que la masse M est dans l'air. On ne tient pas compte des frottements.

Q1.a. Etablir la condition d'équilibre de la masse M dans l'air.

Q1.b. En déduire l'équation différentielle du mouvement en z de la masse M si le mouvement s'effectue dans l'air.

Q1.c. Quelle est la nature du mouvement ? On donnera les expressions de ses principales caractéristiques.

Q2. Du fait que le mouvement a lieu dans l'eau, comment doit-on modifier les équations précédentes (on ne tiendra toujours pas compte des frottements).

Q3. On tient compte désormais des frottements visqueux : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

Q3.a. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par z.

Q3.b. Dans le cas d'un amortissement faible et en supposant que $z(0) = h_1 > h$ et $\dot{z}(0) = 0$, déterminer $z(t)$?

Q4. A l'aide d'un piston, on impose un mouvement sinusoïdal au point de suspension A du ressort. Cela revient à appliquer une force $\vec{f} = aM\omega_2^2\cos(\omega_2 t)\vec{u_z}$ à la masse M. On pose $Z = z - h$ l'écart à la position d'équilibre.

Q4.a. Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.

Q4.b. Dans le cas d'un amortissement faible, justifier que la solution complète pour $Z(t)$ serait somme de 2 termes dont on précisera le sens mais qu'on ne calculera pas.

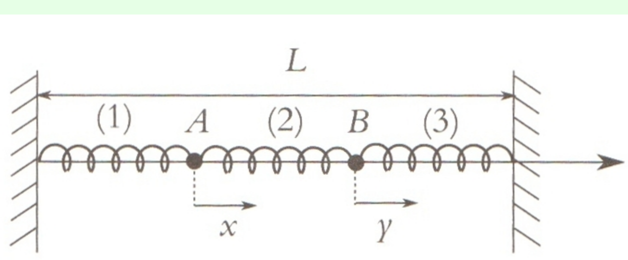
Q4.c. A partir de l'équation différentielle, déterminer l'expression de l'amplitude complexe Z des oscillations en régime sinusoïdal forcé. On utilisera les grandeurs : $a, x = \frac{\omega_2}{\omega_0}, \tau = \frac{M}{\alpha}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Q4.d. On se place en régime permanent établi. Déterminer les deux conditions nécessaires pour qu'on puisse avoir des oscillations d'amplitude supérieure à a, l'une portant sur la valeur minimale de la masse M et l'autre sur l'intervalle de pulsations à utiliser.

Q4.e. Quelle est alors la pulsation pour laquelle l'amplitude est la plus grande ?

Q4.f. Donner l'expression de l'amplitude correspondante en fonction de a, M, k et α.

✍ Exercice V.5: Système de deux points matériels



Deux points matériels A et B de même masse m sont reliés entre eux par un ressort de raideur K et à deux points fixes par deux ressorts de raideur k. L'ensemble coulisse sans frottements sur une tige horizontale fixe. On note $\vec{u}$ un vecteur unitaire de cet axe. On note x et y les élongations de A et B comptées à partir de leur position d'équilibre.

Q1. Ecrire les relations à l'équilibre reliant les longueurs à vide des ressorts (l_0 pour (1) et (3), L_0 pour

(2)) et les longueurs à l'équilibre (l_{eq} pour (1) et (3), L_{eq} pour (2)).

Q2. On s'intéresse au régime libre.

Q2.a. Etablir les équations différentielles qui régissent les évolutions de $x(t)$ et $y(t)$ en régime libre.

Q2.b. Montrer que si l'on cherche x et y sous la forme de sinusoïdes de même pulsation (on parlera de **modes propres**), alors, il faut imposer une condition sur la pulsation qui conduit à 2 valeurs possibles.

Q3. Le point A subit maintenant une force supplémentaire $\overrightarrow{f} = m\Gamma_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u}$.

Q3.a. Déterminer les équations du mouvement. En déduire deux équations différentielles liées.

Q3.b. On cherche pour x et y, des solutions au régime sinusoïdal forcé de la forme $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \psi)$. On définit les grandeurs complexes associés $\underline{X} = X_0 e^{j\omega t+\phi}$ et $\underline{Y} = Y_0 e^{j\omega t+\psi}$. Montrer que les solutions des équations différentielles précédentes sont :

$$\underline{X} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)}\Gamma_0 e^{j\omega t}$$
$$\underline{Y} = \frac{\omega_3^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)}\Gamma_0 e^{j\omega t}$$

où $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des grandeurs à exprimer en fonction de k,K et m.

Q3.c. Déduire des expressions précédents $X_0(\omega), Y_0(\omega), \phi(\omega)$ et $\psi(\omega)$.

Q3.d. Représenter $X_0(\omega), Y_0(\omega)$ en fonction de ω. Pourquoi y a-t-il des résonances infinies ? Comparer les valeurs des pulsations correspondantes aux modes propres.

✍ Exercice V.6: Vibration d'une molécule diatomique

La molécule HCl est modélisée, selon un axe fixe, par deux masses ponctuelles distantes de r. Puisque l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène, il peut être considéré comme fixe. Seul le noyau d'hydrogène de masse m est alors susceptible de se déplacer, il subit l'énergie potentielle d'interaction :

$$E_p(r) = \frac{C}{r^n} - \alpha\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où C, α et n sont des constantes positives. En l'absence de toute champ extérieur, la distance à l'équilibre est r_0. L'énergie minimale à fournir pour dissocier cette molécule sera notée E_d.

Q1. Interpréter physiquement les deux termes de l'énergie potentielle et représenter l'allure de $E_p(r)$.

Q2. Interpréter graphiquement l'énergie E_d et déterminer son expression.

Q3. Repérer r_0 sur le graphique et déterminer son expression. Vérifier que la position est stable.

Q4. En réalité, la molécule peut vibrer légèrement autour de sa position d'équilibre r_0. Déterminer l'équation du mouvement et en déduire la pulsation ω_0 des petites oscillations. On introduira la constante de raideur équivalente k.

Q5. Des mesures spectroscopiques permettent d'accéder expérimentalement à r_0, ω_0 et E_d. Calculer les valeurs des constantes C, α et n. On donne :

$$m = 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}; \mathrm{e} = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}; \mathrm{r_0} = 1.27 \times 10^{-10}\mathrm{m}; \tag{13.3}$$
$$\omega_0 = 5.45 \times 10^{14}\mathrm{rad.s^{-1}}; \mathrm{E_d} = 400\mathrm{kJ.mol^{-1}} \tag{13.4}$$

Q6. Le temps de réponse caractéristique de la molécule est $\tau = 10^{-9} s$. Donner le facteur de qualité de cet oscillateur. Commenter cette valeur.

Q7. La molécule est maintenant excitée à sa fréquence propre par un champ électrique $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$; nous supposons que la force subie alors par le noyau d'hydrogène est $F(t) = \beta E(t)$ où $\beta(t)$ est de l'ordre de l'unité. Déterminer l'amplitude des oscillations forcées.

Q8. Dans quel domaine de longueur d'onde faudrait-il travailler pour briser cette liaison en l'éclairant ? Quelle marge possède-t-on sur le choix de la longueur d'onde ?

Q9. Discuter la validité du modèle linéaire, et le choix de la longueur d'onde excitatrice.

✍ Exercice V.7: Frottements solides

On considère un mobile M de masse m se déplaçant selon un axe horizontal (Ox) et assimilé à un point matériel. Ce mobile est soumis à une force de rappel $\overrightarrow{f_R} = -kx\overrightarrow{e_x}$ (longueur à vide nulle) et à une force de frottement solide de coefficient de frottement dynamique f_D et statique f_S. *Pour simplifier le problème*, on prendra ici $f_D = f_S$ et on parlera de coefficient de frottement solide. On pose le mobile M en un point d'abscisse x_0 sans vitesse initiale.

Q1. Montrer que pour que le mobile se mette en mouvement, il faut que $|x_0| > x_{m0}$ où x_{m1} est à exprimer en fonction de f,m,g et k.

Q2. On suppose que $x_0 > x_{m0}$. Montrer que le mouvement du solide se décompose en plusieurs phase. Déterminer $x_1(t)$, abscisse du mobile au cours de la première phase.

Q3. Déterminer l'instant t_1 pour lequel cette première phase s'arrête. A quelle condition le mobile s'arrête-il complètement à la fin de la première phase ? On exprimera cette condition sous la forme $x_{m0} < |x_0| < x_{m1}$.

Q4. Dans le cas où on est à la limite d'immobilisation complète du mobile à la fin de la première phase, déterminer le travail de la force de frottement pendant cette phase et faire un bilan énergétique.

Q5. On suppose maintenant que le mobile ne s'immobilise pas définitivement à t_1. Déterminer $x_2(t)$ abscisse du mobile pendant la seconde phase et en déduire la pseudo-période des oscillations du mobile.

On suppose que le mobile réalise N oscillations complètes avant de s'arrêter à $x_{fin} = a$. On note m=2N et $x_i(t)$ l'abscisse du mobile au cours de la i-ème demie-période (soit la i-ème phase du mouvement). i varie donc de 1 à m. On note aussi t_i l'instant pour lequel se termine la i-ème phase du mouvement. Le temps t_m est donc le temps pour lequel le mouvement s'achève complètement. On note enfin X_i l'abscisse atteinte à la fin de la i-ème oscillation. On a donc $X_m = a$.

Q1. Quelles conditions vérifient les X_i pour $1 \leq i \leq m-1$?

Q2. Établir une relation de récurrence entre X_i et X_{i+2}. En déduire une relation entre X_m et x_0 puis x_0 en fonction de a.

Q3. Comparer le comportement de cet oscillateur avec l'oscillateur amorti par frottement fluide et tracer $x(t)$.

Chapitre 14: Mouvement à force centrale

I Généralités

♥ Définition I.1: Mouvement à force centrale

Un mouvement à force centrale est un mouvement dont la résultante des forces est toujours dirigée vers un même point O fixe dans le référentiel considéré.

On appelle le point O le **centre de force** car en effet le point O est responsable de la force.

I.1 Conservation du moment cinétique et conséquences

♥ Théorème I.1: Conservation du moment cinétique

Dans un mouvement à force centrale dont le centre de force est le point O, alors le moment cinétique au point O est une intégrale première du mouvement.

Cela signifie qu'il est **constant au cours du mouvement**.

♥ Démonstration

On va appliquer au système M le théorème du moment cinétique au point O. La résultante des forces étant portée par la droite OM, son moment en O est nul. Il vient que la dérivée du moment cinétique est nulle : le moment cinétique est donc une constante du mouvement.
Par définition, le moment cinétique dépend de la position et de la vitesse. C'est donc ici une intégrale première du mouvement.

Réflexion

Justifier qu'un mouvement à force centrale circulaire est uniforme.

♥ Propriété I.1: Conséquences de la conservation du moment cinétique

La conservation du moment cinétique *dans un mouvement à force centrale* conduit à deux conséquences :

- ⋆ le mouvement est plan et le plan de la trajectoire passe par le centre de force O et est perpendiculaire au moment cinétique.
- ⋆ le mouvement suit la loi des aires : la vitesse aréolaire, c'est-à-dire l'aire parcourue par le vecteur position par unité de temps est constante.

♥ Démonstration

- ⋆ **Planéité :** Nous avons démontré que le moment cinétique était un vecteur constant. Or par définition du moment cinétique, le vecteur position pris au point O est perpendiculaire au moment cinétique. Il vient que le vecteur position est à tout instant perpendiculaire au même vecteur : il est contenu dans le plan passant par O et perpendiculaire au moment cinétique.
- ⋆ **Loi des aires :** Le mouvement étant plan, on peut choisir un repère cylindrique d'axe Oz tel que le

moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = L_O \vec{e}_z$ [a].
On peut alors exprimer le moment cinétique dans le système de coordonnées :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O} &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_M} \\ &= r\overrightarrow{e_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ &= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

Durant un temps dt, le mobile passe du point $M(t)$ au point $M(t+dt)$. L'aire balayée est donc l'aire du triangle $OM(t)M(t+dt)$. L'aire de ce triangle s'écrit :

$$\begin{aligned}d\mathfrak{A} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\right| \\ &= \frac{1}{2m}\left|\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_M}dt\right| \\ &= \frac{1}{2m}\left|\overrightarrow{L_O}\right| dt \\ \frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{dt}} &= \frac{1}{2m}L_O\end{aligned}$$

Le moment cinétique étant constant, il vient que la vitesse aréolaire est constante. La loi des aires est bien vérifiée.

a. Il est important que le moment cinétique soit constant sinon comme $\vec{e}_z$ est fixe, on ne pourrait le mettre colinéaire à $\vec{L}_O$.

♥ Définition I.2: Constante des aires

On définit la constante des aires comme la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$. Dans un mouvement à force centrale, il s'agit évidemment d'une constante et la vitesse aréolaire s'écrit $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2}C$.

I.2 Force centrale conservative

♥ Propriété I.2: Forme mathématique

Une force centrale conservative ne dépend que de la coordonnées radiale. On peut donc écrire

$$\vec{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$$

L'énergie potentielle associée $E_p(r)$ est telle que $F(r) = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dr}}(r)$.

♥ Démonstration

La force est uniquement suivant $\overrightarrow{e_r}$ par définition d'une force centrale. Il vient (gradient) que les dérivées partielles de l'énergie potentielle par rapport à θ et z sont nulles : l'énergie potentielle ne dépend que de r. En dérivant, il vient que la force ne dépend aussi que de r.

Réflexion

Q1. Exprimer v^2 en coordonnées cylindriques (le mouvement est plan). Montrer que l'énergie cinétique se décompose en deux termes qu'on associera à deux mouvement : l'un correspondant au rapprochement/éloignement (*d'énergie cinétique radiale*) par rapport à O, l'autre à la rotation autour du point O (*d'énergie cinétique orthoradiale*).

Q2. Montrer que l'énergie cinétique peut être ramenée à une fonction $E_c(\dot{r}, r)$ sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} \tag{14.1}$$

avec C la constante des aires.

Q3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre aussi sous la forme :

$$E_m(\dot{r}, r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{14.2}$$

où $E_{p,eff}(r)$, fonction de m, C, r et $E_p(r)$ est appelée **énergie potentielle effective.**

Q4. Le terme d'énergie cinétique radiale étant toujours positive, quelle inégalité obtient-on entre E_m et $E_{p,eff}(r)$? Cela ne vous rappelle-t-il pas quelque chose ?

♥ Définition I.3: Energie potentielle effective

Comme montré dans la réflexion précédente, la conservation du moment cinétique permet de réécrire l'énergie mécanique sous la forme d'une somme :

$$E_m(\dot{r}, r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{14.3}$$

où :

$$E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \tag{14.4}$$

Réflexion

Voyons un intérêt à $E_{p,eff}(r)$ en regardant les distances au point O accessibles.

Q1. Rappeler quelle condition sur E_m et $E_p(r)$, la positivité de l'énergie cinétique impose-t-elle. Sous cette condition, une distance $r = r_0$ telle que $E_m = E_p(r_0)$ est-elle accessible ?

Q2. Montrer que $E_{p,eff}(r_0) > E_m$. En utilisant la réflexion précédente, en déduire qu'en réalité, la distance $r = r_0$ n'est pas accessible.

On retiendra que l'étude de l'énergie potentielle ne suffit plus à déterminer les positions accessibles[a]*.*
En effet, il ne s'agit pas d'un système à 1 degré de liberté et, à cause de la conservation du moment cinétique, l'énergie cinétique orhtoradiale associée à la rotation va avoir une influence sur les positions radiales accessibles.

Q3. Considérons un point M où $\dot{r} > 0$, le mobile s'éloigne de O et $E_m > E_{p,eff}(r)$. En utilisant la continuité de $\dot{r}$ et en vous inspirant des réflexions faites en énergétiques, justifier que le mobile va s'éloigner de O jusqu'à ce que $E_m = E_{p,eff}(r)$.

Q4. Etablir la même conclusion lorsque $\dot{r} < 0$ et que le mobile se rapproche.

Le raisonnement précédent montre que ***l'énergie potentielle effective*** *permet d'obtenir les valeurs extrèmes de rayons accessibles*[b]*.*
On va pouvoir adapter les études sur l'énegie faite pour les systèmes conservatifs au cas des mouvements à force centraux, mais ***en travaillant avec l'énergie potentielle effective.***

a. On obtient une condition nécessaire mais non suffisante.
b. On a donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un rayon soit atteint $E_m \geq E_{p,eff}(r)$ (à barrière d'énergie potentielle près bien sûr).

☞ Méthodes : Etudier un mouvement à force centrale (III.1, III.2)

☞ Applications : Forces centrales particulières (III.1)

II Forces centrales newtoniennes

♥ Définition II.1: Forces newtoniennes

Une force newtoniennes est une force dont la forme est :

$$\vec{F}_{M_1 \to M_2} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r \tag{14.5}$$

avec $\vec{e}_r$ vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$ (de M_1 vers M_2).

On distingue :

- ⋆ les forces coulombiennes : $K = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$
- ⋆ les forces gravitationnelles : $K = Gm_1m_2$.

Réflexion

♥♥♥ On considère l'atome d'hydrogène.

Q1. Exprimer le rapport de la force gravitationnelle F_g sur la force électrostatique F_e exercées par le proton sur l'électron en fonction de $e, m_{proton}, m_{electron}, G, \epsilon_0$. En faisant l'application numérique, montrer qu'à **l'échelle microscopique, les actions de gravitation sont largement négligeable.**

Q2. Sous l'influence de la force coulombienne, comment s'organise la matière ? En déduire que l'interaction électrostatique entre édifices plus grands va diminuer.

Q3. Dans le même temps, quand la taille des systèmes augmente, l'attraction gravitationnelle augmente-t-elle ou diminue-t-elle ? En déduire **qu' à une échelle donnée, ce sera l'interaction gravitationnelle qui deviendra prépondérante.**

Q4. Donner une échelle de taille où c'est le cas ?

Q5. (Facultatif) A notre échelle, quelle interaction est prépondérante ?

II.1 Etude du mouvement

Position du problème : *On considère deux point matériel M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 formant un système isolé (problème à deux corps) et dont l'interaction est de type newtonienne. Ainsi la force exercée par M_1 sur M_2 est de la forme : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ où r est la distance entre les deux corps et $\vec{e_r}$ le vecteur unitaire porté par la droite (M_1M_2) et dirigé de M_1 vers M_2.*

On peut considérer deux types d'approches :

- ⋆ *L'un des deux points matériels est nettement plus lourd (on suppose ici $m_1 >> m_2$). On admet qu'on peut alors se ramener à l'étude d'un seul corps, le point matériel M_2 dans le référentiel R_1 lié à M_1. Le système étant isolé, on peut considérer que le référentiel R_1 est galiléen. La résultante des forces qui s'exerce sur M_2 est alors toujours dirigée vers le point M_1 : c'est un mouvement à force centrale. (Exemple : Interaction Terre-Soleil ou Proton-électron)*
- ⋆ *Dans le cas général, il s'agit d'un système de deux points matériel. On admet qu'une étude complète des systèmes de deux points (HP) permettrait de se ramener au mouvement d'un point (fictif[1]) soumis à une force centrale newtonienne.*

On se ramène donc à étudier le mouvement d'un point matériel M soumis à une force centrale de la forme $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ dans un référentiel galiléen.

1. La masse réduite potentiellement vue en chimie découle de ce genre de système.

Réflexion

Q1. Rappeler les caractéristiques d'un mouvement à force centrale et donner l'expression de l'énergie potentielle effective dans le cas d'une force newtonienne.

Q2. Représenter $E_{p,eff}(r)$ si $L_0 \neq 0$ en distinguant le cas répulsif du cas attractif. En déduire que le point M ne peut atteindre le centre de force.

Q3. ♥ Cas attractif : A quelle condition sur l'énergie mécanique aura-t-on un état lié ? un état de diffusion ?

Q4. ♥ Cas répulsif : Peut-on avoir un état lié ? Justifier que l'énergie mécanique est forcément positive.

Q5. Peut-on avoir une trajectoire circulaire (ne pas chercher le rayon correspondant) ?

♥ Propriété II.1: Trajectoire conique

Un point matériel M soumis à une force centrale newtonienne de type $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ dans un référentiel galiléen possède une trajectoire conique dont l'équation, dans un repère cylindrique d'axe Oz colinéaire au moment cinétique et de centre O le centre de force est :

$$r(\theta) = \frac{p}{\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)} \tag{14.6}$$

où $\epsilon = \pm 1$ et e est appelée **excentricité** et p le **paramètre** de la conique. On a : $|p| = \frac{mC^2}{|K|}$.

On distingue les cas :

- ⋆ une ellipse : $e < 1$ C'est un trajectoire fermée donc un état lié.
- ⋆ une hyperbole : $e > 1$ C'est une trajectoire ouverte donc un état de diffusion.
- ⋆ une parabole : $e = 1$ Cas limite entre les deux, c'est une trajectoire ouverte, donc un état de diffusion.

Réflexion

♥ Déduire de la réflexion précédente une condition sur l'énergie mécanique pour que la trajectoire soit elliptique.

♥ Démonstration

Il existe plusieurs méthodes pour montrer que l'équation de la trajectoire est une conique. Le principe général est d'éliminer la variable temps dans les équations.

Le système est conservatif, donc l'énergie mécanique se conserve, soit : $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Nous allons introduire la coordonnées $u = \frac{1}{r}$ et éliminer le temps en utilisant la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&= \frac{d(1/u)}{d\theta}\frac{C}{r^2} \\
&= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}Cu^2 \\
&= -C\frac{du}{d\theta}
\end{aligned}$$

On peut donc réexprimer l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mC^2(2Cu^2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2uCu^2\frac{du}{d\theta} - \frac{2K}{mC^2}Cu^2\frac{du}{d\theta}) = 0$$
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2}$$

On a écarté le cas $u = 0$ (physiquement impossible) et $\frac{du}{d\theta} = 0$ qui correspond à un mouvement circulaire. Comme on le verra par la suite, est inclus dans l'équation ci-dessus aussi.
On reconnaît une équation harmonique, donc :

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{K}{mC^2}$$
$$r(\theta) = \frac{\frac{mC^2}{K}}{1 + \frac{mC^2A}{K}\cos(\theta - \theta_0)}$$

♥ Propriété II.2: Propriété de la trajectoire elliptique

- ⋆ $K > 0$: Cas attractif forcément
- ⋆ $E_m < 0$: (cf. preuve ci-après). C'est un état lié et périodique.
- ⋆ $e < 1$

Réflexion

Q1. Quelles sont les valeurs d'angles θ possibles ?

Q2. Montrer que le point le plus éloigné (appelé aphélie pour une planète autour du Soleil) est tel que : $r_P = \frac{p}{1-e}$

Q3. Montrer que le point le plus proche (appelé périphélie pour une planète autour du Soleil) est tel que : $r_P = \frac{p}{1+e}$

Q4. En déduire que le demi-grand axe a de l'ellipse est : $a = \frac{p}{1-e^2}$.

Q5. Représenter la trajectoire pour $\theta_0 = 0$.

♥ Propriété II.3: Propriété de la trajectoire parabolique

- ⋆ $K > 0$: Cas attractif forcément
- ⋆ $E_m = 0$: (cf. preuve ci-après). C'est un état de diffusion.
- ⋆ $e = 1$

Réflexion

Q1. Que vaut E_p à l'infini ? En déduire la vitesse de M à l'infini.

Q2. Quelles sont les valeurs d'angles θ possibles ?

Q3. Montrer que le point le plus proche (appelé périphélie pour une planète autour du Soleil) est tel que : $r_P = \frac{p}{2}$.

Q4. Représenter la trajectoire pour $\theta_0 = 0$.

♥ Propriété II.4: Propriété de la trajectoire hyperbolique

- ⋆ $K > 0$ Cas attractif (et $\epsilon = 1$) et $K < 0$ Cas réuplsif (et $\epsilon = -1$) possibles.
- ⋆ $E_m > 0$: (cf. preuve ci-après). C'est un état de diffusion.
- ⋆ $e > 1$

Réflexion

On rappelle que r est nécessairement positif ou nul.

Q1. Justifier que la vitesse de M est non nulle à l'infini.

Q2. Quelles sont les valeurs d'angles θ possibles ?

Q3. Montrer que le point le plus proche (appelé périphélie pour une planète autour du Soleil) est tel que : $r_P = \frac{p}{1+e}$.

Q4. Cas attractif $K > 0$ et $\epsilon = 1$. On pose $\theta_0 = 0$. Quelles sont les valeurs d'angles θ possibles ? En déduire que la trajectoire possèdent des asymptotes obliques dont on donnera les angles par rapport à l'axe des abscisses et que la trajectoire "s'enroule" autour du centre de force.

Q5. Cas répulsif $K < 0$ et $\epsilon = -1$. On pose $\theta_0 = 0$. Quelles sont les valeurs d'angles θ possibles ? En déduire que la trajectoire possèdent des asymptotes obliques dont on donnera les angles par rapport à l'axe des abscisses et que la trajectoire "évite" le centre de force.

II.2 Mouvement des planètes et lois de Kepler

ous sommes dans le cas où le potentiel newtonien est attractive. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au mouvement des planètes du système solaire de sorte que nous noterons M_S la masse de l'astre attracteur fixe (le soleil, S) et M_P la masse de la planète considérée. La force de gravitation s'écrit alors : $\overrightarrow{F} = -\frac{GM_SM_P}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

On peut donc utiliser les résultats précédents en prenant $K = GM_SM_P > 0$.

♥ Définition II.2: Hypothèses des lois de Kepler

- ⋆ Les planètes et le Soleil présentent une symétrie sphérique.
- ⋆ Le mouvement d'une planète est uniquement lié à l'interaction entre cette planète et le Soleil. On exclut toute influence des autres planètes et objets célestes.
- ⋆ La masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil.

Réflexion

En cherchant les masses des différentes planètes, vérifier la troisième hypothèse des lois de Kepler.

♥ Théorème II.1: Lois de Kepler

- ⋆ 1ère loi : Le centre des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.
- ⋆ 2ème loi : Les rayons vecteurs balaient des aires égales pour des intervalles de temps égaux.
- ⋆ 3ème loi : Le rapport entre le carré de la période T de révolution de la planète autour su Soleil et le cube du demi-grand axe a de la trajectoire est indépendant de la planète.

♥ Démonstration

On ne démontre pour l'instant que les deux premières lois. La troisième sera démontré en méthode.
Les hypothèses permettent de considérer le Soleil fixe et la seule force qui s'applique sur la force (attraction du Soleil) est une force centrale.

- ⋆ Il vient, de la conservation du moment cinétique, que le mouvement vérifie la loi des aires.
- ⋆ De plus, la force est newtonienne donc la trajectoire est une conique. Comme le mouvement est confiné, c'est un état lié, donc une ellipse.

II.3 Mouvements des satellites

On travaillera dans un cadre analogues aux hypothèses des lois de Kepler mais pour un satellite (artificiel ou naturel orbitant autour d'une planètes).

Réflexion

D'après vous, pourquoi essaie-t-on de ne pas utiliser les moteurs des satellites sur toute leur trajectoire ?

♥ Définition II.3: Vitesses cosmiques

- ⋆ On définit **la première vitesse cosmique** par la vitesse qu'aurait un satellite en orbite basse, c'est-à-dire telle que $h \ll R_T$.
- ⋆ On définit **la seconde vitesse cosmique** comme la vitesse minimale à transmettre à une satellite en orbite basse pour qu'il se libère de l'attraction terrestre, c'est-à-dire qu'il puisse atteindre l'infini.

♥ Définition II.4: Orbite géostationnaire

L'**orbite géostationnaire** correspond à une orbite où le satellite tourne avec la même période que la Terre sur elle-même et est fixe par rapport à un point du globe.

Réflexion

Q1. Si l'on communique à un satellite en orbite basse une vitesse inférieure à la première vitesse cosmique, quel problème se produira-t-il ?

Q2. Si l'on communique à un satellite en orbite basse une vitesse supérieure à la seconde vitesse cosmique, quel problème se produira-t-il ?

Q3. Quel est donc l'intérêt des deux vitesses cosmiques ?

On distingue différents types de satellites en fonction des altitudes de leur orbite :

- ⋆ *Orbite polaire : en orbite basse entre 300 et 1000km avec une inclinaison proche de 90 degrés. Ce sont des orbites qui permettent de passee toujours à la même heure solaire au dessu d'un lieu donné ce qui en fait une orbite idéale pour l'observation de la Terre.*
- ⋆ *Orbite basse : entre 250km et 2000km. Ce sont principalement des satellites scientifiques (comme Hubble)*
- ⋆ *Orbite moyenne : jusqu'à 20000km On y trouve notamment les satellites GPS (à 20000km) et pour Internet (à 8063km).*
- ⋆ *Orbite haute : jusqu'à l'orbite géostationnaire. On y trouve principalement des satellites de communication russes. Note : ces trajetoires ne sont pas toujours circulaire et c'est l'apogée qui se trouve à ces altitudes*

☞ Méthodes : Relations à savoir démontrer (III.3, III.4, III.5, III.6), Méthodes d'étude (**??**)

☞ Applications : Satellite Hipparcos (III.2)

III S'entrainer

III.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Généralités

♥ Méthode III.1: Etude générale

On considère un mouvement à force centrale conservatif dont l'énergie potentielle est $E_p(r)$. On s'entraînera à redémontrer la conservation du moment cinétique, la planéité du mouvement et l'expression de la constante de aires C.

Q1. Comment évolue $\dot{\theta}$ quand r augmente ? Même question quand r diminue.

Q2. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{14.7}$$

où $E_{p,eff}(r =$ s'exprime en fonction de m, C, r et $E_p(r))$

Q3. En déduire que les seules positions accessibles sont données par $E_m > E_{p,eff}(r)$. Aux positions extrêmes, la vitesse du mobile est-elle nulle ?

Q4. Montrer que :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}}{\mathrm{d}r}$$

Q5. Déduire de l'équation précédente que la rotation autour de C a un effet répulsif sur le mouvement. Cette effet est-il plus important à proximité de O ou loin de O ? Faire le lien avec la première question.

Q6. Si la force est une force de rappel élastique de longueur à vide nulle, donner l'expression de $E_p(r)$. En déduire que le système est dans un état lié. Peut-il atteindre $r = 0$.

Q7. Justifier qu'une trajectoire circulaire correspond nécessairement à un extremum de $E_{p,eff}$. Est-ce une condition suffisante ?

♥ A retenir: Etude générale

Les caractéristiques précédentes DOIVENT être reprouvées dans les cas particuliers qui seront étudiés.

On retiendra néanmoins les conclusions à obtenir et les méthodes associées :

- ⋆ les valeurs extrèmes de r correspondent à $E_m = E_{p,eff}(r)$. En ces points, la vitesse n'est pas nulle (elle ne s'annule jamais) mais la trajectoire y est tangente aux cercles de centre O.
- ⋆ Les minima d'énergie potentielle effective correspondante à de *possibles* trajectoires circulaires. Il y en a une infinité (s'il y en a une) car les rayons trouvées dépendent de C donc des conditions initiales. Nous verrons par la suite comment déterminer la vitesse nécessaire à une trajectoire de rayon R donné.
- ⋆ La rotation possède un effet centrifuge sur le mouvement qui est d'autant plus important que r est petit ($\dot{\theta}$ est alors d'autant plus grand).

♥ Méthode III.2: Etudier un mouvement à force centrale

On s'intéresse au cas d'un point matériel M relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Il est libre de se mouvoir dans toutes les directions de l'espace. On néglige l'action de la pesanteur. On pose un repère cylindrique de sorte que les conditions initiales soient :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = r_0\overrightarrow{e_r}$$
$$\overrightarrow{v_M}(t=0) = v_1\overrightarrow{e_r} + v_0\overrightarrow{e_\theta}$$

Q1. Justifier la conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique.

Q2. Déterminer l'expression de ces deux grandeurs en fonction des conditions initiales.

Q3. Montrer que l'énergie mécanique se ramène à la dépendance du rayon r seul en introduisant une énergie potentielle effective. Discuter de la nature du mouvement. Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

Q4. Déterminer les rayons extrêmaux et la vitesse maximale du mobile en fonction de E_m, L_0 et k.

Q5. Déterminer la relation entre v_0 et r_0 pour observer un mouvement circulaire. Commenter le caractère uniforme/accéléré/décéléré d'un tel mouvement.

♥ A retenir: Etude d'un mouvement à force centrale

On retiendra :

- ⋆ Les conservations (Moment cinétique, Em) qui doivent être reprouvées (comme, si nécessaire, les conséquences : planéité, loi des aires, état lié...)
- ⋆ La recherche des rayons extrémaux
- ⋆ La méthode d'étude des trajectoires circulaires : on utilise le PFD (c'est comme ça qu'on va démontrer la troisième loi de Kepler).

Forces newtoniennes

♥ Méthode III.3: Relation énergie-excentricité

Montrer que :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{K^2}{mC^2}(e^2 - 1) \tag{14.8}$$

et retrouver la relation entre le signe de E_m et le type de trajectoire.

ATTENTION : Cette relation NE PEUT PAS ETRE UTILISER DIRECTEMENT (INUTILE DE L'APPRENDRE).

♥ A retenir: Relation énergie-excentricité

On retiendra (en conséquence de cette relation) le lien entre le signe de E_m et la nature de la trajectoire :

$E_m > 0$: hyperbole | $E_m = 0$: parabole | $E_m < 0$: ellipse

♥ Méthode III.4: Troisième loi de Kepler

Démontrer la troisième loi de Lepler sur une trajectoire circulaire.

♥ Méthode III.5: Energie mécanique et ellipse

Q1. On considère le cas d'une force newtonienne et d'une trajectoire circulaire de rayon R. montrer que $E_m = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{K}{2R}$

Q2. On considère une trajectoire elliptique, montrer que $E_m = -\frac{K}{2a}$ avec a le demi-grand axe de l'ellipse

♥ A retenir: Energie et ellipse

Il faut pouvoir redémontrer l'expression de E_m sans guide.

♥ Méthode III.6: Vitesses corsmiques et orbite géostationnaire

Q1. Exprimer la première vitesse cosmique v_1 en fonction de G, M_T et R_T

Q2. Exprimer la seconde vitesse cosmique v_2 en fonction de G, M_T et R_T

Q3. Montrer que l'orbite d'un satellite géostationnaire est nécessairement contenue dans le plan équatorial.

Q4. Déterminer le rayon de l'orbite géostationnaire.

♥ Méthode III.7: Exemple d'étude du mouvement d'un satellite.

On souhaite transférer un satellite depuis une orbite circulaire rasante de rayon R_T autour de la Terre sur son orbite géostationnaire de rayon R_G. On fera l'étude dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire Ω. On suppose que le satellite a une masse de $m = 1,5$t donc petite devant la masse de la Terre. On note O le centre de la Terre.

Le transfert s'effectue de son orbite basse géostationnaire s'effectue de la manière suivante : on communique au satellite une brusque variation de vitesse en un point P de sa trajectoire en éjectant des gaz pendant un intervalle de temps très court dans le sens opposé à la vitesse du satellite. Il suit alors une orbite elliptique et lorsque sa trajectoire croise la droite OP au point A, on lui communique un supplément de vitesse pour le stabiliser sur l'orbite géostationnaire.

Q1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique, établir l'expression de l'énergie mécanique en fonction de G, M_T, m et a le demi grand axe de l'ellipse.

Q2. Donner la valeur de l'énergie mécanique sur l'ellipse de transfert.

Q3. Déterminer la vitesse du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de R_G, R_T, r, G, M_T.

Q4. Donner la valeur de vitesse qu'il faut imposer en P puis en A. Déterminer la variation de l'énergie mécanique en P puis en A.

Q5. Déterminer la durée du mouvement.

♥ A retenir: Exemple d'étude du mouvement d'un satellite.

- ⋆ On retiendra l'utilisation importante du TEM dans les raisonnements. Le PFD n'intervient en général que pour relier vitesse et rayon dans une trajectoire circulaire.
- ⋆ La troisième loi de Kepler est la seule façon d'obtenir une information temporelle. Elle peut être utilisée dans le cas d'une trajectoire elliptique

III.2 Applications

✍ Exercice III.1: Forces centrales particulières

On considère une force centrale dont l'énergie potentielle s'écrit comme $E_p = -\frac{K}{r^n}$ avec K réel et n réel.

Q1. Préciser suivant que K soit positif ou négatif le caractère attractif ou répulsif de la force associée.

Q2. Représenter l'énergie potentielle effective suivant le signe de K et suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{Z}$) et préciser s'il est possible :

1. d'atteindre l'infini
2. d'atteindre le centre de force
3. d'observer une trajectoire circulaire (on ne demande pas une expression du rayon)

Q3. Préciser quelles valeurs de K et n correspondent à des cas physiques usuels.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Utilisation de l'énergie potentielle effective

Eléments de correction (sans justification) :

- ⋆ Si K est positif et n négatif ou K est négatif et n est positif, la force est répulsive. Sinon la force est répulsive. (S'intéresser à la monotonie de l'énergie potentielle **seule**).
- ⋆ Atteindre l'infini : ce n'est possible que s'il n'y a pas de barrière de potentiel infini en $r = +\infty$. C'est toujours réalisé pour n positif ou pour n négatif et K négatif.
  - — On distinguera le cas répulsif où quelque soit l'énergie mécanique, le système sera dans un état de diffusion des cas attractif où suivant la valeur de l'énergie mécanique, le système sera dans un état lié ou de diffusion.
  - — Si K est positif et n négatif, alors l'énergie potentielle tendant vers l'infini aux grands rayons, le mobile est nécessairement dans un état lié.
- ⋆ Atteindre le centre de force : ce n'est possible que s'il n'y a pas de barrière de potentiel infini en $r = 0$. Le seul cas permettant de compenser l'effet centrifuge du terme d'énergie cinétique orthoradiale est le cas où K et positif et $n > 2$. Le tracé montre qu'il faut alors une énergie mécanique suffisante car il existe une barrière d'énergie potentielle. (Le cas $n = 2$ est un cas limite permettant les deux possibilités suivantes les valeurs de K etL_O.)
- ⋆ L'existence d'une trajectoire circulaire nécessite un extremum d'énergie potentielle. Ce n'est possible que pour une force attractive. Si n est supérieur à 2, cet état a peu de chance d'être observé car un léger écart va l'éloigner de la trajectoire circulaire.
- ⋆ Cas usuels :
  - — Cas newtonien (coulombien ou gravitationnelle) : $n = 1$ (force en $1/r^2$)
  - — Cas de Van der Waals : $n = 6$ (force en $1/r^7$) en tenant compte des aspects statistiques.

✍ Exercice III.2: Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30cm de diamètre. Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118000 étoiles avec une précision jamais atteinte. Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude H=36000km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert son altitude variant entre h et H. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été porté à h=500km.

Une programmation du satellite a permis de s'affranchir des problèmes liés à cette orbite. Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Allen. On supposera que cette ceinture comprise entre 2 sphères de rayon $r_1 = 8400$km et $r_2 = 28000$km et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Allen est constituée de particule piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos interrompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65%. On assimile la terre à une sphère de centre O, de rayon R=6400km et de masse M et le satellite à un point matériel (S,m). On suppose le référentiel géocentrique R galiléen. La période de rotation de la terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut T=86164s.

Q1. Quelle la nature de la trajectoire d'Hipparcos ?

Q2. Déterminer les expressions de l'excentricité e et du paramètre de l'ellipse p en fonction de h,H et R. A.N.

Q3. Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Q4. Rappeler la troisième loi de Kepler.

Q5. Déduire de la question précédente, la relation entre la période de rotation de la Terre T et l'altitude de l'orbite géostationnaire H.

Q6. Exprimer la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T, R, H et h. Calculer T_h en heure.

Q7. Déterminer les valeurs numériques de angles θ_1 et θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Allen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre 0° et 180°.

Q8. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Allen. Pour la question suivante, on prendre une valeur approché de $S_b = 200 \times 10^6$km.

Q9. Déterminer le rapport $\rho = t_0/T_h$ en fonction de S_b et S_e (surface de l'ellipse) où t_0 est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période.

III.3 Entrainement

Forces centrales quelconques

✍ Exercice III.3: Point matériel lié à un fil

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil de masse négligeable. Le plan est percé au point O choisi pour origine, le fil traverse le plan en O ; un opérateur exerce sur l'autre extrémité du fil une force de traction de module F constant.

A t=0, le point M se trouve sur l'axe Ox à une distance D de O, sa vitesse est alors V_0, colinéaire à Oy.

Q1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en O de M se conserve pendant toute la durée de la traction. Calculer son module et sa direction. Définir la vitesse aréolaire et montrer que le mouvement de M se fait suivant la loi des aires, à savoir que la vitesse aréolaire est constante.

Q2. Déterminer l'énergie mécanique E_m de M ; on montrera que la force de traction dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en utilisant les coordonnées cylindriques. On prendra $E_p = 0$ pour $OM = 0$.

Q3. Montrer que l'on peut écrire E_m comme une fonction de r seule et de ses dérivées et définir une fonction énergie potentielle effective.

Q4. Etudier ses variations en fonction de r=OM. Montrer qu'elle passe par un minimum pour $r_1 = \left(\frac{mV_0^2D^2}{F}\right)^{1/3}$.

Q5. Tracer le graphe correspondant et faire apparaître l'énergie mécanique. Déterminer graphiquement les deux distances extrêmes de M à O ; à quelle condition sur F la position initiale est-elle le point de la trajectoire le plus éloigné de O ? Le point matériel peut-il arriver jusqu'à O ?

Q6. Quelle valeur donner à F pour observer un mouvement circulaire ? Montrer qu'il est alors nécessaire uniforme.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Mouvement à force centrale.
- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Energie potentielle effective.

✍ Exercice III.4: Mouvement d'une bille dans un cône

On considère un matériel M glissant sans frottements à l'intérieur d'un cône dont la génératrice fait un angle α avec l'axe Oz vertical dirigé vers le haut, O étant le sommet du cône. On suppose le champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz et de centre O. On travaille dans le référentiel terrestre qu'on supposera galiléen.

Q1. Déterminer la relation entre les coordonnées r et z. En déduire l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v}$ et de l'accélération $\overrightarrow{a}$ en fonction de r et θ.

Q2. En déduire, en utilisant le principe fondamental de la dynamique que :

$$M\ddot{r} = -\frac{mg}{tan\alpha} + mr\dot{\theta}^2 \tag{14.9}$$

avec $M = m(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha})$

Q3. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{J_O}$ par rapport au point O en fonction de m, r, z et θ. Montrer que la composante suivant Oz, notée J_z est conservée au cours du mouvement.

Q4. En exprimant $\dot{\theta}$ en fonction de J_z, montrer que l'équation différentielle sur r peut s'écrire sous la forme :

$$M\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}(r)}{dr} \tag{14.10}$$

où $V_{eff}(r)$ est un potentiel effectif que l'on exprimera en fonction de α, m,g, et J_z. Tracer les allures de $V_{eff}(r)$ pour $J_z = 0$ et pour $J_z \neq 0$.

ATTENTION : Nous allons à partir de ce point réaliser une étude à partir du potentiel effectif comme elle a été faite en cours pour le cas des mouvements à force centrale. On remarquera néanmoins que le mouvement n'est PAS ici un mouvement à force centrale. On pourra s'en convaincre en remarquant par exemple que la composante du moment cinétique projeté sur $\overrightarrow{e_\theta}$ n'est pas conservée (TMC) ou simplement parce que le mouvement n'est pas plan. La méthode d'analyse mathématique ne reste pas moins utilisable A CONDITION DE PROUVER QU'ON PEUT L'UTILISER.

Q5. Calculer l'énergie mécanique et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$. Justifier le fait que l'énergie mécanique est conservée. On vérifiera que cette conservation permet bien de retrouver l'équation différentielle établie à la question précédente.

Q6. On s'intéresse uniquement aux trajectoires dont les conditions initiales sont de la forme $r(0) = r_0, \overrightarrow{v}(0) = v_0\overrightarrow{e_\theta}$.

Q6.a. Exprimer J_z en fonction de ces conditions initiales.

Q6.b. A quelle condition sur v_0 la bille atteint-elle le fond du cône ? Quelle est alors la trajectoire.

Q6.c. Déterminer v_0 pour que la trajectoire soit un cercle de rayon r_0 et d'altitude constante.

Q6.d. Montrer graphiquement que dans le cas général et si $J_z \neq 0$ le mouvement est dans un état lié dont les rayons extrêmes sont r_{min} et r_{max} qu'on repérera graphiquement.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Mouvement à force centrale (méthodes).
- ⋆ Système conservatif.
- ⋆ Energie potentielle effective.

Potentiels newtoniens

✍ Exercice III.5: Vecteur excentricité

On veut étudier le mouvement d'une planète P, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e, de centre O considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_P est située à une distance $r = OP$ de O. On considère le référentiel lié à l'étoile comme galiléen.

Q1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction de M_p, M_e, r, G la constante de gravitation universelle et $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$.

Q2. Justifier que le mouvement est plan. Préciser ce plan.

On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. On définit le vecteur excentricité : $\overrightarrow{e} = -\frac{L}{GM_eM_P}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u_\theta}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la planète.

Q3. Montrer que le vecteur excentricité est un vecteur constant. En fait, ce vecteur est orthogonal au grand axe de l'ellipse.

Q4. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{u_\theta}$, montrer que l'on retrouve bien l'équation d'une ellipse.

Q5. Que vaut le module de $\overrightarrow{e}$? Préciser p en fonction de G, M_p, M_e et L.

Q6. Préciser la valeur de l'excentricité dans le cas d'un mouvement circulaire.

Q7. Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de R (rayon du cercle), v_c (vitesse circulaire) et M_p. Déterminer l'expression de la vitesse V_c en fonction de R, G et M_e à l'aide du vecteur excentricité.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Mouvement des planètes.
- ⋆ Trajectoire elliptique.
- ⋆ Excentricité.

✍ Exercice III.6: Explosion d'une comète

Une comète de période T=770 ans s'est approchée du soleil à $d = 7,75 \times 10^{-3}$u.a.

Q1. On suppose que la trajectoire est elliptique. Déterminer le demi-grand axe a, l'excentricité e, le paramètre p de l'ellipse et les vitesses à l'aphélie (v_A) et au périhélie (v_P). A-t-on eu raison de faire l'hypothèse d'une trajectoire elliptique ?

Q2. A son périhélie, elle a explosé en deux morceaux de masse m_1 et m_2, partis respectivement avec la vitesse v_1 et v_2 dans deux directions faisant des angles respectifs $\alpha_1 = -20^\circ$ et $\alpha_2 = 50^\circ$ avec la direction initiale de v_P. La quantité de mouvement totale se conserve durant l'explosion et l'on observe que : $\|v_1\| \sim \|v_2\|$.

Q2.a. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, déterminer le rapport des masses m_1/m_2 puis la norme des vitesses des fragments.

Q2.b. Calculer l'énergie mécanique par unité de masse pour chaque fragment. En déduire le type de la nouvelle trajectoire.

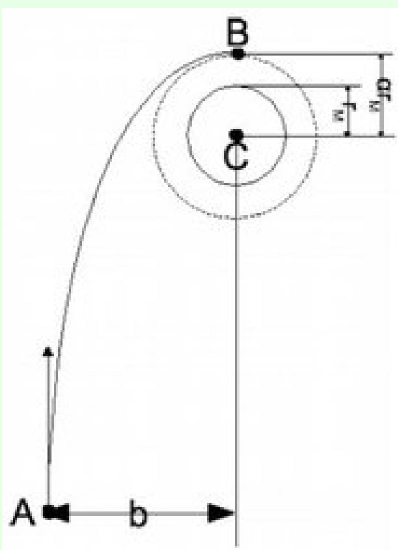
Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Lois de Kepler.
- ⋆ Trajectoire elliptique.
- ⋆ Energie mécanique.

✍ Exercice III.7: Mise en orbite d'une sonde spatiale

On souhaite mettre en orbite une sonde spatiale(s) autour de Mars. Ce véhicule possède au point A la vitesse v_A et présente un "paramètre d'impact" b (cf. Figure). On donne :

- ⋆ $v_A = 2,5\text{km/s}$
- ⋆ rayon de Mars : $r_M = 3397\text{km}$
- ⋆ masse de Mars : $M_M = 6,39 \times 10^{23}\text{kg}$



Le point B n'est pas placé correctement sur le schéma. Cela n'a pas d'influence sur les raisonnements.

Q1. Au point A, on suppose que le véhicule est assez éloigné de Mars pour pouvoir négliger l'énergie gravitationnelle. En déduire l'expression de l'énergie mécanique et la nature de la trajectoire de(s). Le justifier sur un graphique.

Q2. Montrer que le moment cinétique se conserve et définir la constante des aires C. Calculer C en fonction de v_A et b.

Q3. Sachant que ma trajectoire d'approche est tangente au cercle de rayon αr_M en B, calculer v_B (vitesse en B) en fonction de v_A, r_M, α et b.

Q4. Exprimer le paramètre d'impact b, en fonction de r_M, v_A, M_M et α. A.N. : $\alpha = 3$.

Q5. Déterminer la distance minimale b_m pour que le véhicule évite la surface de Mars.

Q6. Déterminer la vitesse v_c d'un objet sur l'orbite circulaire de rayon $3r_m$ ainsi que sa période de révolution en fonction des données.

Q7. Au point B (avec $\alpha = 3$), on veut que le véhicule passe sur l'orbite circulaire de rayon $3r_M$. Déterminer la variation de vitesse Δv_c à communiquer au véhicule en fonction des données.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Lois de Kepler.
- ⋆ Trajectoire hyperbolique.
- ⋆ Energie mécanique.
- ⋆ Mobile à l'infini.
- ⋆ Moment cinétique.

✍ Exercice III.8: Comète à trajectoire parabolique

La comète Arend-Roland est une comète à trajectoire d'excentricité e estimée à 1,0002. On assimilera la trajectoire à une parabole d'excentricité e=1. La comète est passée à son périhélie, le 8 avril 1857, à $r_P = 0,316$u.a. du soleil.

Q1. Calculer le paramètre de la trajectoire.

Q2. Exprimer le paramètre p de la conique en fonction de la constante des aires C, de G et la masse du soleil M_S. En déduire la vitesse de la comète au périhélie.

Q3. Montrer que l'on peut exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de la constante des aires C et du paramètres p de la parabole par : $\dot{\theta} = C\frac{(1+\cos\theta)^2}{p^2}$. En quel point est prise l'origine $\theta = 0$?

Q4. On note t_0 l'instant de passage au périhélie P. Montrer alors que l'on obtient le temps de passage pour le point d'angle α avec :

$$t(\alpha) = t_0 + \int_0^\alpha \frac{p^2}{C}\frac{d\theta}{(1+cos\theta)^2}$$

Q5. Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $x = \tan\frac{\theta}{2}$. En déduire l'expression : $t = t_0 + \frac{p^2}{2C}(X + \frac{X^3}{3})$ où $X = \tan\frac{\alpha}{2}$.

Q6. (Analyse numérique) La comète a été découverte par les astronomes belges Sylvain Arend et Georges Roland le 8 novembre 1856. A quelle distance se trouvait-elle du Soleil ?

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Lois de Kepler.
- ⋆ Trajectoire parabolique.
- ⋆ Energie mécanique.

Devoir libre : Forces centrales	Questions ouvertes : Diffusion de Rutherford	Approfondissement : Comparaison des forces	Approfondissement : Interactions dans les gaz

Chapitre 15: Mécanique du solide

I Cinématique et cinétique du points

I.1 Définitions générales

♥ Définition I.1: Système de points matériels

Un système de points matériels S (ou solide déformable) est un ensemble de points matériels dont on décrit le mouvement.

On distingue deux types de descriptions :

- ⋆ Les systèmes *discrets*, composés d'un ensemble de point matériels séparables les uns des autres.
  Description : un ensemble de points $\{M_i\}$ et leurs caractéristiques cinématiques (vitesse $\{\overrightarrow{v_i(M_i)}\}$) et cinétiques (masse $\{m_i\}$ et les caractéristiques qui en découlent).
- ⋆ Les systèmes *continus*, pour lesquels la matière forme une portion de l'espace continu.
  Description : ses caractéristiques peuvent être décrites par des fonctions continues (ou au moins continues par morceaux) : champ de vitesse ($\overrightarrow{v_{/\mathfrak{R}}}(M)$ avec $M \in S$) et la **masse volumique** $\rho(M)$ autour du point M.

La définition d'un système (donc le regroupement des point) est *arbitraire* donc **réfléchi** : c'est toute l'importance de la **définition du système.**

Réflexion

Considérons une description continue où la masse volumique est notée $\rho(M)$ et le champ de vitesse $\vec{v}(M)$ dans unr référentiel $\mathfrak{R}$. On s'intéresse à un petit volume $d\tau(M)$ autour d'un point M.

Q1. Exprimer la masse $dm(M)$ du petit volume en fonction de $d\tau(M)$ et de $\rho(M)$.

Q2. Exprimer de même la quantité de mouvement $d\vec{p}(M)$ et l'énergie cinétique $dE_c(M)$ du petit volume en fonction de $\vec{v}(M), d\tau(M), \rho(M)$ et $v(M)$ la norme de $\vec{v}(M)$ dans le référentiel $\mathfrak{R}$.

Q3. On considère un point A aribitraire. Exprimer le moment cinétique du petit volume au point A dans le référentiel $\mathfrak{R}$ sous la forme d'un produit vectoriel faisant intervenir les mêmes grandeurs que précédemment et le vecteur $\overrightarrow{AM}$.

♥ Définition I.2: Solide indéformable

Un solide **indéformable** est un système de points tel que, quelque soit les deux points P_i et P_j du solides, à tout instants, la **distance** P_iP_j est constante.

Réflexion

Quels sont les deux seuls mouvements possibles simples d'un solide indéformable (qu'on pourra composer entre eux pour décrire des mouvements complexes).

♥ Définition I.3: Grandeurs cinétiques globales

Pour un système de points matériels S :

- ⋆ la **masse totale** M du système S est la somme de toutes les masses des points matériels composant le solide.
- ⋆ la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}_{S/\mathfrak{R}}$ dans un référentiel R d'un système de points matériels S est la somme des quantités de mouvements dans le même référentiel des points qui le composent.
- ⋆ Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{S/A}}$ d'un système S dans un référentiel R par rapport à un point A est la somme des moments cinétiques des différents points du système par rapport au même point A.
- ⋆ Le moment cinétique $\sigma_{S/\Delta}$ d'un système S dans un référentiel R par rapport à un axe Δ est la somme des moments cinétiques des différents points du système par rapport au même axe Δ.
- ⋆ L'énergie cinétique $E_{C/R}$ du système S dans le référentiel R est la somme des énergies cinétiques de l'ensemble des points qui composent le système S.

La définition amène aux relations mathématiques suivantes suivant que la descripion soit discrète ou continue :

- ⋆ Les systèmes *discrets* :
  - — $M = \sum_i m_i$.
  - — $\overrightarrow{P}_{S/\mathfrak{R}} = \sum_i m_i \overrightarrow{v}_i$
  - — $\overrightarrow{\sigma_{S/A}} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}_i$
  - — $E_{C/R} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- ⋆ Les systèmes *continus* :
  - — $M = \iiint_{M \in S} dm(M)$.
  - — $\overrightarrow{P}_{S/\mathfrak{R}} = \iiint_{M \in S} dm(M) \overrightarrow{v}(M)$
  - — $\overrightarrow{\sigma_{S/A}} = \iiint_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge dm(M) \overrightarrow{v}(M)$
  - — $E_{C/R} = \iiint_{M \in S} \frac{1}{2} dm(M) v(M)^2$

  avec $dm(M) = \rho(M) d\tau(M)$.

Les définitions dans le cas continus font intervenir des intégrales triples car on doit sommer sur un volume donc sur les trois directions de l'espace.
Nous ne verrons pas pour l'instant comment les calculer. Il suffit de comprendre qu'elles représentent une somme sur un volume et qu'on garde la propriété de linéarité des intégrales.

Réflexion

Vérifier les expressions que vous avez proposées à la première réflexion.

I.2 Centre d'inertie

♥ Définition I.4: Centre d'inertie

On définit le **centre d'inertie G du système S** comme le *barycentre* des points du solide affectés de leur masse.

- ⋆ Les systèmes *discrets* :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} \qquad (15.1)$$

- ⋆ Les systèmes *continus* :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{P \int S} \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau(P) \qquad (15.2)$$

Le centre d'inertie est un point défini mathématiquement *qui n'a aucune matérialité physique*. Il peut même n'y avoir aucune masse en G.

Réflexion

Q1. Préciser sans calcul où se situe le barycentre d'une tige de masse uniformément répartie. Même question pour une boule de masse uniformément répartie.

Q2. Partant de la configuration précédente, on ajoute des masses au sommet de la sphère. Comment est déplacé le centre d'inertie ?

Q3. Ecrire une somme vectorielle faisant intervenir G et qui est nulle (dans le cas discret).

♥ Théorème I.1: Théorème du centre d'inertie

La quantité du mouvement dans un référentiel R d'un système S est égale à la quantité de mouvement qu'aurait un point matériel fictif situé au centre d'inertie G et dont la masse serait la masse totale du système.

$$\overrightarrow{p_{S/\mathfrak{R}}} = M\overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}} \tag{15.3}$$

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{S/R}} &= \iiint_{P\in S} \rho(P)\vec{v}(P)d\tau(P)\\ &= \iiint_{P\in S} \rho(P)\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}d\tau(P)\\ &= \frac{d}{dt}(\iiint_{P\in S} \rho(P)\overrightarrow{OP}d\tau(P))\\ &= \frac{d}{dt}(M\overrightarrow{OG}) = M\overrightarrow{v_{G/R}}\end{aligned}$$

Réflexion

Démontrer cette propriété dans le cas d'un système discret.

I.3 Mouvements usuels

On ne s'intéresse ici qu'à des solides indéformables.

Description du mouvement d'un solide indéformable : On peut visualiser le mouvement d'un solide indéformable comme la composition de deux mouvement :

- ⋆ *une rotation "sur lui-même". On peut associer à cette rotation un axe instantanée de rotation, un sens de rotation, et une vitesse angulaire. Tous ces éléments sont regroupées dans le* ***vecteur taux de rotation*** *vu en SI :* $\overrightarrow{\Omega_{S/bati}}$ [1]
- ⋆ *un mouvement de translation globale qu'on peut décrire en donnant la vitesse d'un des points du solide* $\vec{v}_A$ *dans le référentiel considéré* [2].

On peut regrouper ces informations comme vous l'avez vu en SI sous la forme d'un torseur cinématique :

$$\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_S}\\ \vec{v}_A\end{Bmatrix}_A$$

Cet objet mathématique possède de nombreuses propriétés mais non ne les utiliseront pas en physique. La notation torsorielle sera surtout utilisée pour "regrouper" les informations d'un mouvement en un seul endroit. On rappelle au passage qu'on peut déduire la vitesse d'un autre point du solide :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_S}$$

Pour tenir compte de l'inertie et de la matérialité du solide, on peut définir, à la place du torseur cinématique, un torseur ***torseur cinétique*** *qui va regrouper la quantité de mouvement et le moment cinétique en un point A :*

1. Dans le cadre du programme de physique, la description du mouvement se fera toujours par rapport à un référentiel galiléen qu'on peut considérer comme étant le bati. C'est pourquoi on le note souvent juste Ω_S
2. Même remarque, on travaille par rapport à un "bati"

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P}_S \\ \overrightarrow{\sigma}_{S/A} \end{Bmatrix}_A$$

Dans le cadre du programme, on va se limiter aux deux mouvements simples séparément : la seule rotation autour d'un axe fixe et la seule translation. ***Le but va être de préciser l'expression des éléments précédents pour ces mouvements simples.***

Réflexion

Q1. En utilisant les interprétations faites en mécanique du point, associer chaque éléments du torseur cinématique à une sorte de mouvement (translation ou rotation).

Q2. Montrer que $\overrightarrow{\sigma}_{S/B} = \overrightarrow{\sigma}_{S/A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{P}_S$ dans le cas d'une description discrète [a].

On notera l'analogie entre la relation entre les vitesse pour le torseur cinématique et la relation entre les moments pour le torseur cinétique. C'est une propriété générale des torseurs. Un moyen mémotechnique a été vu en SI…

a. Cela reste vraie dans le cas continu.

Mouvement de translation

♥ Définition I.5: Mouvement de translation

Un solide est en translation si pour tout point P du solide, la vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$ est identique.

Attention, un mouvement de translation n'est PAS forcément rectiligne.
Dans un mouvement de translation, le vecteur taux de rotation est nul.

Réflexion

Q1. Quelle est alors la vitesse du centre d'inertie ?

Q2. Donner un exemple de système en translation *circulaire*.

♥ Propriété I.1: Eléments cinétiques en translation

Lorsqu'un solide indéformable est en translation alors :

- ⋆ son énergie cinétique : $E_{c/R} = \frac{1}{2} M v_{G/R}^2$
- ⋆ son moment cinétique au point A : $\overrightarrow{L_{A/\mathfrak{R}}} = \overrightarrow{AG} \wedge M\overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}}$

On rappelle qu'on a aussi la quantité de mouvement : $\overrightarrow{p_{S/\mathfrak{R}}} = M\overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}}$ mais cette propriété est vraie pour tout mouvement.

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}E_{c/R} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{G/R}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{G/R}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{A/\mathfrak{R}}} &= \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_{i/\mathfrak{R}}} \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}\right) \wedge \overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge M \overrightarrow{v_{G/\mathfrak{R}}}\end{aligned}$$

Réflexion

Démontrer l'une des deux expressions dans le cas d'une description continue (pensez à utiliser la linéarité des intégrales).
D'un point de vue cinématique et cinétique, à quoi peut-on assimiler un solide en animé d'une seule translation ?

Solide en rotation autour d'un axe fixe

♥ Définition I.6: Solide en rotation

Un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tout le points du solide ont une trajectoire circulaire d'axe Δ à la même *vitesse angulaire*.

Pour la suite, on oriente l'axe Δ par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ et on définit la vitesse angulaire ω du solide en cohérence avec l'orientation de Δ.

♥ Propriété I.2: Champ de vitesse dans un solide en rotation

Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe, à un instant t, tous les points du solide ont la même vitesse angulaire $\omega(t)$. On peut alors définir un vecteur $\overrightarrow{\Omega}(t)$ appelé vecteur rotation du solide tel que pour tout point P du solide, la vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{P/R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} \tag{15.4}$$

où A est un point de l'axe de rotation.

♥ Démonstration

La vitesse angulaire est la même pour tout point du solide. On se place dans un système de coordonnées cylindriques d'axe Az l'axe de rotation et de centre A. Pour un point P à un distance r de l'axe :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} &= \omega \vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) \\ &= r\omega\vec{e_\theta} \\ &= \overrightarrow{v_{P/R}}\end{aligned}$$

Il s'agit d'un cas particulier de la relation vue en SI. Dans le cas d'un solide en rotation, on peut regrouper ces informations dans un torseur cinématique au point A appartenant à Δ :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{v}_A = \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Réflexion

Justifier simplement que la quantité de mouvement du solide S est nulle *si et seulement si* le centre d'inertie est sur l'axe de rotation Δ.

♥ Définition I.7: Moment d'inertie

Lorsqu'un solide S est en rotation autour d'un axe fixe, on définit son moment d'inertie $J_{S/\Delta}$ par rapport à l'axe par la grandeur :

- ⋆ Cas *discrets* :

$$J_{S/\Delta} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \qquad (15.5)$$

où d_i est la distance entre le point P_i et l'axe.

- ⋆ Cas *continus* :

$$J_{S/\Delta} = \iiint_{P\in S} \rho(P) d(P)^2 d\tau(P) \qquad (15.6)$$

où $d(P)$ est la distance entre le point P et l'axe.

Réflexion

Son intérêt sera précisé juste après. Compléter les phrases suivantes :

Q1. A forme identique, le moment d'inertie d'un système plus léger est …important.

Q2. A masse totale égale, le moment d'inertie d'un système est plus grand si la matière est …éloignée de l'axe de rotation.

Q3. On considère une tige de longueur L en liaison pivot avec un bati. L'axe de la liaison pivot passe par le centre de la tige. On ajoute des masses simplémentaires à la tige.

Q3.a. Si on ajoute toutes les masses à l'extrémité gauche de la tige, le moment d'inertie augmente/diminue ?

Q3.b. Si on ajoute toutes les masses à l'extrémité droite de la tige, le moment d'inertie augmente/diminue ?

Q3.c. Si on ajoute la moitié des masses à l'extrémité gauche de la tige et l'autre moitié à l'extrémité droite, le moment d'inertie augmente/diminue ?

Réfléchir pour bien vous convaincre que dans les 3 cas, la réponse est "augmente".

♥ Propriété I.3: Moment cinétique sur l'axe de rotation

Pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe dans R, le moment cinétique $\sigma_{S/\Delta}$ du solide S dans le référentiel R s'exprime comme le produit du moment d'inertie $J_{S/\Delta}$ du même système multiplié par la vitesse de rotation ω **comptée algébriquement en cohérence avec l'orientation de l'axe** :

$$\sigma_{S/\Delta} = J_{S/\Delta}\omega \tag{15.7}$$

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}\sigma_{S/\Delta} &= \iiint_{P\in S} \rho(P)(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{v(P)}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} d\tau(P)\\ &= \iiint_{P\in S} \rho(P)(\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP})) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} d\tau(P)\end{aligned}$$

En utilisant des coordonnées cylindriques d'axe Δ : >

$$\begin{aligned}&= \iiint_{P\in S} \rho(P)((r(P)\overrightarrow{e_r} + z(P)\overrightarrow{e_z}) \wedge (r(P)\omega\overrightarrow{e_\theta})) \cdot \overrightarrow{e_z} d\tau(P)\\ &= \iiint_{P\in S} \rho(P) r^2(P)\omega d\tau(P)\\ &= J_{S/\Delta}\omega\end{aligned}$$

Réflexion

Le démontrer dans un cas discret.
Ecrire les composantes du torseur *cinétique* en un point O de l'axe de rotation (quantité de mouvement et moment cinétique en O) pour un solide en rotation en fonction de $J_{S/\Delta}, \omega, r_G$ (distance du centre d'inertie à l'axe) et de deux vecteurs judicieusement choisi dans repère judicieusement choisi.

♥ Propriété I.4: Energie cinétique pour un solide en rotation

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe Δ, l'énergie cinétique du solide peut s'écrire sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{S/\Delta}\omega^2 \tag{15.8}$$

où $J_{S/\Delta}$ est le moment cinétique de S par rapport à l'axe Δ et ω la vitesse angulaire de rotation du solide sur le même axe.

♥ Démonstration

$$\begin{aligned}
E_{c/R} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\
&= \frac{1}{2} J_{S/\Delta} \omega^2
\end{aligned}$$

☞ Méthodes : Calculer les éléments cinétiques (V.1), Utiliser le moment d'inertie (V.2)

II Actions mécaniques globales

II.1 Généralités

*Rappel : Une action globale ou **action résultante** est le regroupement (arbitraire donc. . .) d'un ensemble d'actions ponctuelles qui s'appliquent sur un solide. On distingue en général les actions de contact (ensemble d'actions ponctuelles s'appliquant sur une surface de contact) des actions à distance (s'appliquant sur un volume).*

♥ Définition II.1: Torseur dynamique d'une action résultante

Soit une action résultante $\mathcal{A}_{\Sigma_1 \to \Sigma_2}$ exercée par un système Σ_1 sur un système Σ_2. On définit :

- ⋆ la **force résultante** $\overrightarrow{F}_{\Sigma_1 \to \Sigma_2}$: somme de toutes les forces ponctuelles associées aux actions ponctuelles qu'on a regroupées
- ⋆ le **moment résultant** $\overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1 \to \Sigma_2}$ en un point *arbitraire* A : somme de tous les moments des actions ponctuelles regroupées calculés tous au même point A.

On pourra regrouper ces deux éléments dans un *torseur dynamique* exprimé au point A :

$$\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\overrightarrow{F}_{\Sigma_1 \to \Sigma}} \\ \overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1 \to \Sigma_2} \end{matrix} \right\}_A$$

Le torseur dynamique définit **entièrement l'action résultante** à l'échelle globale et son définition complète est nécessaire pour caractérisée entièrement l'action : la seule définition de la force résultante ne suffit pas **car ON NE PEUT DEDUIRE LE MOMENT RESULTANT DE LA FORCE RESULTANTE SEULE.**

Réflexion

On peut par contre, déduire le moment résultant en B de la connaissance **simultanée** du moment résultant en A et de la force résultante :

Q1. Montrer que $\overrightarrow{M}_{B,\Sigma_1 \to \Sigma_2} = \overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1 \to \Sigma_2} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$ (le prouver au moins dans le cas discret).

On pourra faire l'analogie avec la relation pour le champ de vitesse.

Q2. On considère une action et un point C tel que $\overrightarrow{M}_{C,\Sigma_1 \to \Sigma_2}$. Exprimer le moment résultant en tout point B. Vous devriez retrouver une forme connue.

Un point de moment résultant nul (C) est très utile car une fois connu, le calcul mathématique du moment résultant en tout point se fait comme si l'action était ponctuelle en C.
C'est pourquoi, sur un schéma, si l'on connaît un point de moment nul pour un action, on représentera sa force résultante en ce point pour mieux visualiser le problème.

♥ Définition II.2: Couple

Un couple est une action résultante dont la **force résultante** est nulle.

Réflexion

Q1. Montrer qu'alors, le moment résultant ne dépend pas du point considéré.

Q2. On considère un système soumis à deux actions ponctuelles modélisées par deux forces $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ telle que $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2$. Montrer que l'action résultante regroupant les deux actions ponctuelles précédentes est un couple.

Ce n'est pas le seul couple possible mais cet exemple explique l'appellation "couple".

II.2 Actions usuelles

*Caractériser une action usuelles revient à caractériser les **deux** éléments de son torseur dynamique : résultante des forces et moment résultant en un point choisi*[3]*.*

On distinguera plusieurs cas (cf. suite pour plus de précisions) :

- ⋆ *les actions où vous DEVEZ TOUT connaître : actions ponctuelles usuelles vues précédemment, action de la pesanteur.*
- ⋆ *les actions où vous DEVEZ connaître une partie seulement : action d'un fil de torsion, frottement fluide*
- ⋆ *vous n'avez AUCUNE information a priori mais l'existence de l'action peut conduire à des contraintes cinématiques : actions de contact solide*[4]*.*

En général, les partie inconnues du torseur peuvent être déterminée grâce aux théorèmes fondamentaux[5] *mais il arrive aussi très souvent que ces composantes inconnues...soit complètement inutiles pour la résolution du problème*[6]*.*

Actions à connaître complètement

♥ Propriété II.1: Action de la pesanteur

Soit un système S dans un champ de pesanteur. L'action de la pesanteur sur un corps a alors :

- ⋆ une force résultante $\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{g}$
- ⋆ un moment résultant nul en un point appelé **centre de gravité**. Il est confondu avec le *centre d'inertie* pour un champ uniforme.

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P} & = M\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{M}_{G,poids} = \overrightarrow{0} & \end{Bmatrix}_G$$

♥ Démonstration

$$\overrightarrow{P} = \sum_i (m_i\overrightarrow{g}) = \sum_i (m_i)\overrightarrow{g} = M\overrightarrow{g} \tag{15.9}$$

et :

$$\overrightarrow{M_G}(Poids) = \sum_i (\overrightarrow{GM_i} \wedge m_i\overrightarrow{g}) = \sum_i (m_i\overrightarrow{GM_i}) \wedge \overrightarrow{g} = M\overrightarrow{GG} \wedge \overrightarrow{g} = \overrightarrow{0} \tag{15.10}$$

3. On pourra aussi la caractériser par toutes ses actions ponctuelles. Pour l'instant, on ne le fera pas car cela nécessite ensuite un calcul d'intégrale double/triple qui n'a pas encore été traité. Des exemples seront abordés dans les prochains chapitres.
4. On n'a aucune information a priori mais on peut avoir des relations entre les composantes d'une action solide : les lois de Coulomb
5. Comme on l'a fait pour déterminer des composantes d'une action solide dans le cas ponctuel.
6. **Ce qui ne veut pas dire qu'on a le droit de les égaler à 0. . . . .**

Réflexion

Q1. Démontrer ces relations dans le cas continu.

Q2. Exprimer simplement le moment résultant du poids en un point A différent de G.

Actions partiellement connus

♥ Propriété II.2: Actions résultante d'un fluide

Soit un système S au contact d'un fluide. L'action résultante du fluide sur le système S se décompose en deux parties :

- la résultante des actions normales du fluide, appelée **résultante des actions de pression** du fluide. *Cette composante sera entièrement traitée au prochain chapitre. Jusque là, on pourra considérer cette résultante comme nulle*[a].
- la résultante des actions tangentielles du fluide, appelée **force de frottements fluides**. On distingue plusieurs cas :
  - **Cas laminaire :**Aux faibles vitesses, la force ou le moment résultant de frottements fluides est proportionnelle à la vitesse du fluide.
    - Pour un système en translation : $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v_{systeme/fluide}}$.
      Le moment résultant n'est alors pas à connaître.
    - Dans le cas d'un système en rotation au tour d'un axe fixe : on connait le moment sur l'axe de rotation $M_{axe}(fluide) = -K\dot{\theta}$ où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du solide autour de l'axe (fluide supposé au repos)
      La force résultante n'est alors pas à connaître.
  - **Cas turbulent :** Aux fortes vitesses, la force de frottements fluides est proportionnelle au carré de la vitesse du fluide :
    - Pour un système en translation : $\overrightarrow{F} = -k\,||v||\,\overrightarrow{v}$.
      Le moment résultant n'est alors pas à connaître.
    - Le cas en rotation n'est pas à connaître.

a. Les conditions de cette nullité seront précisées au prochain chapitre

On peut donc regrouper ces informations dans les torseurs :

Cas d'un solide en translation dans le fluide :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma}} = -k\overrightarrow{v} \quad \text{ou} \quad -k\,||v||\,\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1\to\Sigma_2} = \overrightarrow{?} \end{Bmatrix}_A$$

En général, les "?" sont inutiles au problème.

Cas d'un solide en rotation dans le fluide :

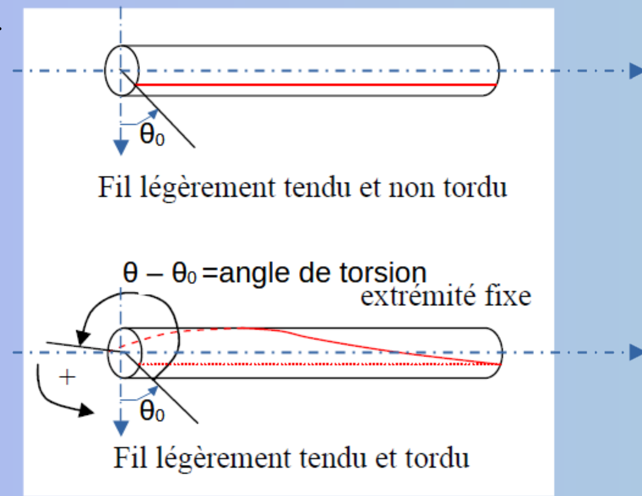
$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma}} = \overrightarrow{?} \\ \overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1\to\Sigma_2} = -K\dot{\theta}\overrightarrow{u}_{axe} + \overrightarrow{?_{direction\perp axe}} \end{Bmatrix}_A$$

♥ Propriété II.3: Action d'un fil de torsion

Un fil de torsion est un fil dont la section n'est pas négligeable et qui peut se tordre suivan son axe. Son élasticité implique qu'il va tendre à se détendre exerçant pour cela un moment à ses extrémités proportionnel à l'angle de torsion.
Soit un fil pouvant se tordre suivant son axe orienté et on repère la position d'un point du fil par un angle θ (orienté en cohérence). Si on note θ_0, l'angle pour lequel le fil n'est pas tordu (on dit qu'il est au repos), alors on définit l'angle de torsion $\theta - \theta_0$ du fil. Ce dernier exerce à ses extrémités une action dont le moment *suivant l'axe de torsion* est :

$$\Gamma_{axe} = \pm C\left(\theta - \theta_0\right) \qquad (15.11)$$

où C est appelée constante de torsion du fil.



Si l'on regroupe les informations dans un torseur, on remarquera qu'il en manque beaucoup :

$$\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F_{\Sigma_1\rightarrow\Sigma}} = \overrightarrow{?} \\ \overrightarrow{M}_{A,\Sigma_1\rightarrow\Sigma_2} = \pm C\left(\theta - \theta_0\right)\overrightarrow{u}_{axe} + \overrightarrow{?_{direction\perp axe}} \end{matrix}\right\}_A$$

Réflexion

On rappelle le caractère algébrique du moment, pour lever l'indétermination sur le signe, il faut raisonnement raisonner physiquement : le fil exerce une action de **rappel** qui tend à le ramener dans sa position au repos.

Q1. Sur le schéma précédent, en considérant l'axe de rotation orienté comme sur la figure, préciser le signe de Γ_{axe} si le mobile est accroché à l'extrémité gauche du fil. (Pour rappel, une action tendant à faire tourner un mobile dans le sens des θ croissants pour un axe donné possède un moment sur cet axe dont le signe est ...)

Q2. Même question sur le mobile est accroché à droite.

Actions de contact solide

Liaisons normalisée : *Une action de contact entre deux solides est aussi appelée liaison. Comme vous l'avez vu en SI, on liste en général un certains nombres de liaisons normalisés.*

Ces liaisons, par la géométrie du contact imposent des ***contraintes cinématiques.*** *En physique, on retiendra surtout : la liaison pivot, la liaison glissière et la liaision plan/plan. On renvoie au cours de SI pour ces contraintes.*

Dans l'action résultante d'une liaison, on distingue deux parties pour les forces ponctuelles :

- ⋆ *les composantes normales responsables de la "réaction de non interpénétration" : elles sont a priori inconnue (et déterminable par des théorèmes)*
- ⋆ *les composantes tangentielles responsables des frottements : elles sont soit nulles (pas de frottements), soit à déterminer par les lois de Coulomb.*

C'est la géométrie du contact et le sens physique qui permet de déterminer les composantes normales et tangentielles.

Les composantes du moment résultantes agissent en bloquant (contrainte cinématique) ou en freinant (frottement) les rotations des solides.

Réflexion

Rappeler les lois de Coulomb relatives aux frottements solides.

♥ Définition II.3: Liaison glissière

Une liaison glissière est une liaison où le seul mouvement possible est une translation suivant un axe.

Réflexion

Le torseur dynamique s'écrit de manière général en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\vec{F}_{\Sigma_1\to\Sigma}} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{M}_{O,\Sigma_1\to\Sigma_2} = \Gamma_{O,x}\overrightarrow{e}_x + \Gamma_{O,y}\overrightarrow{e}_y + \Gamma_{O,z}\overrightarrow{e}_z \end{Bmatrix}_O$$

Q1. *Si l'on choisit l'axe Ox* comme l'axe de la glissière, quelle composante de la résultante des forces correspond à la composante tangentielle ? quelles composantes de la résultantes des forces correspondent aux composantes normales ?

Q2. Dans une liaison glissière **parfaite**, quelle composante est nulle ?

Q3. Quel rôle ont les trois composantes du moment résultant (a priori non nulles) ?

Q4. En considérant une liaison plan-plan d'axe normal suivant Oz, la forme la plus générale du torseur dynamique est-elle différente de la glissière ? Identifier les trois composantes de la force et du moment résultant qui servent à bloquer des mouvements (lesquels ?) et les trois composantes sont des frottements. En déduire l'expression la plus générale du torseur d'une liaison plan-plan puis d'une liaison plan-plan parfaite.

Indice : Vous devriez trouver 2 composantes de frottements pour la force et 1 composante de frottements pour le moment.

♥ Définition II.4: Liaison pivot

La liaison pivot est une liaison où le seul degré de liberté est la rotation entre les deux solides. Elles est réalisée par une surface de contact cylindrique (qui permet une rotation suivant UN axe) fermé latéralement (pour empêcher la translation suivant l'axe de rotation).

Une liaison pivot parfaite est une liaison pivot sans frottements.

En physique, on travaille en générale avec un solide mobile (le **rotor**) en liaison pivot avec le bati (**stator** - en général le référentiel associé au bati est un référentiel galiléen **en physique**).

Réflexion

Le torseur dynamique s'écrit de manière général en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\vec{F}_{\Sigma_1\to\Sigma}} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{M}_{O,\Sigma_1\to\Sigma_2} = \Gamma_{O,x}\overrightarrow{e}_x + \Gamma_{O,y}\overrightarrow{e}_y + \Gamma_{O,z}\overrightarrow{e}_z \end{Bmatrix}_O$$

Q1. *Si l'on choisit l'axe Ox* d'un repère cartésien comme l'axe de la pivot, quelles composantes du moment résultant servent à bloquer les autres rotations ? Quelle composante du moment résultant agit sur la rotation ?

La composante du moment influant sur la rotation peut avoir un effet de freinage (frottements) ou un effet moteur (dont l'origine pourra être précisée dans les futurs chapitres).

Q2. Quel rôle ont les composantes de la résultante des forces ?

Q3. ♥♥ Pour une liaison pivot parfait, quel terme est nul ?

II.3 Aspects énergétiques

Généralités

♥ Définition II.5: Travail et puissance d'une action globale

Le travail (élémentaire ou fini) d'une action globale est la somme des travaux (élémentaires ou fini) de chaque action ponctuelle.

La puissance transmise par une action globale dans un référentiel donné est la somme des puissances transmises par chaque action ponctuelle dans le même référentiel.

♥ Propriété II.4: Travail et puissance pour une translation

Dans le cas d'un solide indéformable en translation, la puissance transmise par une action globale peut se réécrire comme $P_{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}$ avec M un point quelconque du solide (on prend en général le centre d'inertie mais de toute façon, tous les points ont la même vitesse puisque le solide est en translation) et $\overrightarrow{F}$ la force résultante de l'action globale.

Le travail élémentaire s'écrit $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$ avec M un point quelconque du solide.

♥ Démonstration

Cette démonstration n'est pas à connaître. Considérons une action globale d'un système Σ_{ext} sur le système étudié Σ décomposée en une somme d'action ponctuelle sur les points M de Σ. On modélise chaque action ponctuelle par une force $\overrightarrow{F_{\Sigma_1 \to M}}$, le puissance transmise par l'action ponctuelle s'écrit $\overrightarrow{F_{\sigma \to M}} \cdot \overrightarrow{v_M}$. On remarquera que la vitesse de tous les points M est identique (on la notera $\overrightarrow{v_{trans/\mathfrak{R}}}$).

$$\begin{aligned} P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) &= \sum_M \left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1 \to M}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathfrak{R}}}\right) \\ &= \sum_M \left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1 \to M}}\right) \cdot \overrightarrow{v_{trans/\mathfrak{R}}} \\ &= \overrightarrow{F_{\Sigma_1 \to \Sigma}} \cdot \overrightarrow{v_{trans/\mathfrak{R}}} \end{aligned}$$

La démonstration pour le travail est identique.

♥ Propriété II.5: Travail et puissance pour un solide en rotation

Dans le cas d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$, la puissance transmise par une action globale peut se réécrire comme $P_{\mathfrak{R}} = M_\Delta \omega_\Delta$ avec ω_Δ la vitesse angulaire de rotation du solide autour de l'axe Δ (**c'est une grandeur algébrique**) et M_Δ le moment résultant de l'action globale sur l'axe Δ.

Le travail élémentaire s'écrit $\delta W = M_\Delta d\theta_\Delta$ avec $d\theta_\Delta$ une variation infinitésimale de l'angle θ_Δ orienté suivant Δ et représentant la rotation du solide autour de l'axe.

♥ Démonstration

Considérons une action globale d'un système Σ_{ext} sur le système étudié Σ décomposée en une somme d'action ponctuelle sur les points M de Σ. On modélise chaque action ponctuelle par une force $\overrightarrow{F_{\Sigma_1 \to M}}$, le puissance transmise par l'action ponctuelle s'écrit $\overrightarrow{F_{\sigma\to M}} \cdot \overrightarrow{v_M}$. On remarquera que la vitesse de tous les points M peut s'écrire (solide en rotation) $\overrightarrow{v_M} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ (O est un point de l'axe et $\vec{\Omega}$ le vecteur taux de rotation).

$$P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) = \sum_M \left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to M}} \cdot \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right)$$
$$P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) = \sum_M \left(\vec{\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_1\to M}}\right)\right)$$
$$P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) = \vec{\Omega} \cdot \sum_M \left(\overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to M}}\right)\right)$$
$$P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) = \omega_\Delta \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma}}\right)$$
$$P_{/\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{globale}}) = \omega_\Delta M_\Delta\left(\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma}}\right)$$

Réflexion

Que vaut alors la puissance transmise au rotor par une liaison pivot parfaite dans le référentiel du stator ?

Actions globales conservatives

Les actions ponctuelles conservatives le reste au global (comme l'action de la pesanteur).

♥ Propriété II.6: Action d'un fil de torsion

L'action d'un fil de torsion de constante de torsion C dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est :

$$E_p = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2 \tag{15.12}$$

où $\theta - \theta_0$ est l'angle de torsion du fil.

Réflexion

♥ On utilise l'action d'un fil de torsion pour un solide en rotation autour de l'axe du fil. En calculant la puissance transmise, montrer le caractère conservatif et l'expression de E_p.

- ☞ Méthodes (Théorèmes) : Calculer les éléments résultants d'une action par intégration (V.3), Expliciter une action de contact(V.4)
- ☞ Applications : Cylindre sur un plan incliné (V.1)

III Théorèmes fondamentaux en mécanique du solide

III.1 Théorèmes généraux

♥ Théorème III.1: Théorème de la résultante dynamique (TRD)

La dérivée temporelle de la quantité de mouvement total d'un système de points matériel dans un référentiel galiléen est égale à la somme des forces **extérieures** qui s'appliquent sur le solide.

♥ Démonstration

Considérons chaque point M_i de masse $m_i$du système. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chaque point. Le bilan des forces sur un point M_i se divise en deux parties : les actions extérieures, modélisées par des forces $\overrightarrow{F}_{ext\to M_i}$ et les actions intérieures au système. Si l'on somme tous ces PFD, il vient :

- ⋆ le terme de gauche est la somme des dérivées des quantités de mouvement soit la dérivée de la quantité de mouvement totale.
- ⋆ le terme de droite contient la somme de toutes les actions extérieures au système (qui seront regroupées en actions résultantes) et la somme des actions intérieures. Or pour chaque action du point M_j sur le point M_i à l'intérieur du système, il y aura aussi l'action du point M_i sur le point M_j et le principe des actions réciproques implique que les forces associées à ces deux actions sont opposées : elles vont s'annuler. De cette somme, il ne restera donc bien que la résultante des forces extérieures.

Réflexion

Q1. Rappeler le théorème du centre d'inertie. Que devient alors le TRD ?

Q2. En quoi cette observation permet la modélisation ponctuelle de nombreux systèmes ?

Q3. En quoi cette observation montre que le TRD seul ne peut décrire complètement le mouvement d'un solide (quel mouvement ne peut être décrit par le TRD) ?

♥ Théorème III.2: Théorème du moment cinétique en mécanique du solide

La dérivée temporelle du moment cinétique d'un système de points matériel par rapport à un point/un axe fixe dans un référentel $\mathfrak{R}$ est égal à la somme du moment des actions **extérieures** calculé au point point/axe.

♥ Démonstration

On va démontrer le cas du TMC par rapport à un point A. Le cas sur une axe étant similaire. Comme pour le cas du TRC, on peut appliquer le théorème du moment cinétique à chaque point M_i du système. On distingue encore les actions extérieures et les actions intérieures. On rappelle que pour deux points M_i et M_j du système. Les forces de M_i sur M_j et de M_i sur M_j sont opposées et portées par la droite M_iM_j. On somme l'ensemble des théorèmes du moment cinétique ponctuels et on s'intéresse aux actions intérieures. On va particulariser les moments des actions de M_i sur M_j et de M_j sur M_i. La somme donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{A/\mathfrak{R}}\left(\overrightarrow{F_{M_j\to M_i}}\right)} + \overrightarrow{M_{A/\mathfrak{R}}\left(\overrightarrow{F_{M_i\to M_j}}\right)} &= \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_{M_j\to M_i}} + \overrightarrow{AM_j} \wedge \overrightarrow{F_{M_i\to M_j}} \\
&= \left(\overrightarrow{AM_i} - \overrightarrow{AM_j}\right) \wedge \overrightarrow{F_{M_j\to M_i}} \\
&= \overrightarrow{M_jM_i} \wedge \overrightarrow{F_{M_j\to M_i}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le dernier produit vectoriel est nul car la troisième loi de Newton donne que la force de M_j sur M_i est portée par la droite M_jM_i. Il vient que le moment résultant des actions intérieures est nul.

Réflexion

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ.

Q1. Rappeler l'expression du moment cinétique à utiliser dans ce cas.

Q2. En déduire que le moment d'inertie joue pour un solide en rotation le même rôle que la masse pour un solide en translation. Justifier notamment le terme "d'inertie".

Si la première question vous semble déconnectée de la deuxième, c'est que vous n'avez pas utilisé la bonne formule !

III.2 Approches énergétiques

♥ Théorème III.3: Théorème de l'énergie cinétique/mécanique. Cas général.

La variation d'énergie cinétique d'un système de points d'un état A à un état B est égale au travail des forces qui s'appliquent sur le système sur le même chemin, qu'elles **soient extérieures ou intérieures**.

La variation d'énergie mécanique d'un système de points d'un état A à un état B est égale au travail des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système sur le même chemin, qu'elles **soient extérieures ou intérieures**.

♥ Théorème III.4: Théorème de l'énergie cinétique/mécanique. Cas d'un solide indéformable.

Dans le cas d'un solide **indéformable, le travail des forces intérieures est nul.**

♥ Démonstration

La relation $\Delta E_c = W(\overrightarrow{F_{ext}}) + W(\overrightarrow{F_{int}})$ s'obtient par simple sommation de tous les TEC sur chaque point du système.
Nous allons démontrer que dans le cas général le travail des forces intérieures est a priori non nul et qu'il s'annule dans le cas d'un solide indéformable.
Considérons deux points M_1 et M_2 du solide en interaction. On note $\overrightarrow{f_{1\to 2}}$ la force exercée par M_1 sur M_2 et $\overrightarrow{f_{2\to 1}}$ la force exercée par M_2 sur M_1. On a (troisième loi de Newton) : $\overrightarrow{f_{1\to 2}} = -\overrightarrow{f_{2\to 1}}$. La puissance totale associée à ces deux forces s'écrit :

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{f_{1\to 2}} \cdot v_{M_2/R} + \overrightarrow{f_{2\to 1}} \cdot v_{M_1/R} \\ &= \overrightarrow{f_{1\to 2}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_{1\to 2}} &= f_{1\to 2}\overrightarrow{u_{1\to 2}} \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= M_1M_2\overrightarrow{u_{1\to 2}} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{u_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire allant de M_1 vers M_2. Et avec :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R = \frac{dM_1M_2}{dt}\overrightarrow{u_{1\to 2}} + M_1M_2\left(\frac{d\overrightarrow{u_{1\to 2}}}{dt}\right)_R$$

Il vient :

$$P = f_{1\to 2}\frac{dM_1M_2}{dt}$$

- ⋆ Si le mobile se déforme, cette expression est a priori non nulle.
- ⋆ Si le solide est indéformable, cette expression est toujours nulle.

Réflexion

En déduire que pour un solide **déformable isolé**, l'énergie mécanique peut ne pas être constante. Choqué ?

☞ Méthodes (Théorèmes) : Etudier un système en rotation (V.5, V.6)

☞ Applications : Rotation d'un moteur (V.2), ♥ Pendule pesant (V.3), ♥ Pendule de torsion (V.4)

IV Solides déformables et indéformables en rotation

♥ Propriété IV.1: Cas indéformable : équivalence TEC-TMC

Pour un solide **indéformable** en **rotation autour d'un axe fixe** dans un référentiel galiléen, le théorème de l'énergie cinétique et le théorème du moment cinétique sont équivalents.

Si le solide est déformable, cette propriété n'est en général plus vraie est le TEC/TEM va apporter des informations supplémentaires sur le travail des forces intérieures.

Réflexion

Démontrer cette propriété.

☞ Méthodes (Théorèmes) : Utiliser la conservation du moment cinétique pour un solide déformable (V.7)

V S'entrainer

V.1 Méthodes

Ces exercices doivent être parfaitement maitrisés et leur conclusions sues par coeur.

Corrigés

Eléments cinétiques

♥ Méthode V.1: Calculer une quantité de mouvement

Q1. On considère un cylindre d'axe Oz fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$ et de masse uniformément répartie en rotation autour de l'axe Oz. Déterminer la quantité de mouvement du cylindre.

Q2. On considère un système composé de pièces de masse respectives m_1 et m_2. La première est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$. La seconde est en translation à une vitesse $\overrightarrow{v_{2/1}}$ par rapport à la première pièce. Déterminer la quantité de mouvement du système total.

Q3. On considère un disque d'épaisseur h et de rayon R de masse totale M répartie de manière homogène. Il tourne autour d'un axe Oz où O est distance de $R/2$ par rapport avec à G. La rotation se fait à vitesse angulaire constante ω. Déterminer la quantité de mouvement du disque.

♥ A retenir: Calculer une quantité de mouvement

On retiendra les deux méthodes à utiliser conjointement :

- ⋆ la sommation des quantités de mouvement de sous-ensemble.
- ⋆ l'utilisation du théorème du centre d'inertie.

♥ Méthode V.2: Utiliser le moment d'inertie

Q1. On considère un solide S constitué de deux tiges de longueurs L pouvant coulisser l'une sur l'autre. La tige placée en dessous est accrochée par une extrémité à un axe fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Préciser sans calcul pour quelles positions de la tige supérieure le moment d'inertie est maximal ou minimal.

Q2. Déterminer le moment d'inertie d'un point matériel de masse m sur un axeΔ situé à une distance d.

Q3. On considère deux cylindriques concentriques de moment d'inertie respectifs J_1 et J_2 sur leur axe de symétrie et tournant chacun à des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 autour de cet axe. Déterminer le moment cinétique et l'énergie cinétique de l'ensemble constitué des deux cylindres.

♥ A retenir: Utiliser le moment d'inertie

Il faut bien déterminer le type de système et penser à utiliser le moment d'inertie pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Actions globales

♥ Méthode V.3: Force et moment résultant

On considère une tige de longueur L dont le milieu est noté O qu'on prend comme origine d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Elle soumise à une action extérieure uniforme sur toute sa longueur. Cette action globale est décomposée en des actions quasi-ponctuelles : on suppose qu'un petit élément de longueur dl de la tige est soumis à une action quasi-ponctuelle $\overrightarrow{dF} = \Lambda dl \vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$.

Q1. Déterminer par intégration la force résultante $\vec{F}$ exercée sur la tige.

Q2. Déterminer par intégration le moment résultant $\overrightarrow{M}_A$ calculé au point A de l'action considérée, A étant une extrémité de la tige. On traitera deux cas :

Q2.a. La tige est suivant l'axe Ox (A est en $x = -\frac{L}{2}$).

Q2.b. La tige est suivant l'axe Oy (A est en $y = -\frac{L}{2}$).

Q3. Reprendre les mêmes calculs pour calcul le moment résultant au point O.

♥ A retenir: Force et moment résultant

On retiendra la méthode par intégration et SURTOUT le fait qu'on ne calcule pas le moment résultant par la force résultante mais par intégration des moments "ponctuels".
Nous verrons dans les prochains chapitres comme traiter le cas de forces surfaciques ou volumiques.

♥ Méthode V.4: Calculer une composante d'une action de contact

On étudie un cube (de masse uniformément répartie) sur un plan incliné. On admet qu'à l'équilibre, la somme des forces résultats est nulle et la somme des moments résultants en un même point est nulle.

Q1. Représenter la force résultante de l'action du poids en un point judicieusement choisi.

Q2. Le cube est immobile. Déterminer les caractèristiques de l'action résultante de l'action du plan incliné sur le cube. En déduire une représentation de cette action en un point où son moment est nul.

Q3. On considère un point B à la surface du plan situé au plus bas ou plus haut que le cube (donc pas sur la surface de contact). En raisonnant sur les actions ponctuelles de contact, justifier que le moment résultant en B ne peut jamais être nul.

Q4. Que se passe-t-il si l'on incline trop le plan ?

Etudes dynamiques

♥ Méthode V.5: Etudier un système en rotation

On considère un volant qui tourne autour d'un axe fixe horizontal. Son moment d'inertie autour de cet axe vaut J. Son centre d'inertie est sur l'axe et le champ de pesanteur est uniforme et constant. Au cours du mouvement, le volant subit des frottements solides qu'on modélise comme un couple constant dont le moment par rapport à l'axe de rotation est $|M_f| = \alpha J$ avec α constant. On lance le volant à une vitesse angulaire ω_0 et celui-ci s'immobilise après N tours.

Exprimer le coefficient α en fonction de ω_0 et N.

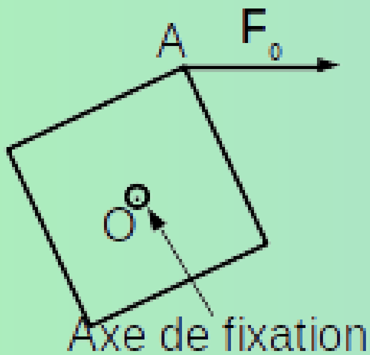
♥ A retenir: Etudier un système en rotation

On retiendra :

- ⋆ l'importance du bilan des actions.
- ⋆ Dans ce bilan, on peut se limiter à la déterminatino de la(les) composante(s) qui nous intéresse. Inutile d'écrire tout le torseur si seul un moment nous intéresse. [a]
- ⋆ On pensera à nouveau à utiliser le moment d'inertie pour exprimer le moment cinétique dans le cas d'un solide en rotation.

a. Il faut par contre garder en mémoire que les autres composantes sont a priori **non nulles**.

♥ Méthode V.6: Etudier un système avec un fil de torsion



On considère un cube de côté a et de répartition de masse uniformément répartie en liaison pivot avec un axe passant par le centre du cube et perpendiculaire à deux des faces du cube. Le cube ne peut ainsi que tourner autour de cet axe supposé fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}$. Tous les éléments cinématiques et cinétiques devront être établis dans ce référentiel qu'on supposera galiléen.
On attache un fil tendu à un coin du cube noté A. La liaison entre le cube et le fil se résume à un seul point de sorte qu'on puisse considérer l'action du ressort sur le cube comme ponctuelle. La force appliqué par le fil sur le cube est toujours horizontale et de norme F_0.

Q1. Paramétrer le problème (proposer un système de coordonnées et des paramètres utiles au problème) pour pouvoir étudier la rotation du cube autour de son axe. Proposer alors une expression du moment cinétique du cube sur l'axe de rotation,de son énergie cinétique et de sa quantité de mouvement. On notera J le moment d'inertie du cube sur l'axe de rotation et M sa masse totale.

Q2. Exprimer le moment au centre du cube de la force exercé par le fil sur le cube. Commenter suivant les valeurs des paramètres introduits la tendance qu'aura cette force à agir sur la rotation du cube.

Q3. Montrer que cette action dérive d'une énergie potentielle.

Un fil de torsion est en plus tendu entre le bati et le centre du cube, l'axe du fil étant confondu avec l'axe de la liaison pivot. On note C la constante du fil et on suppose que lorsque le fil n'est pas tordu, l'angle du paramètre précédent est nul.

Q4. On suppose la liaison pivot parfaite. Quelles sont les positions d'équilibre du système ? On réalisera l'étude par le TMC puis par une étude énergétique.

Cas des solides déformables en rotation

♥ Méthode V.7: Utiliser la conservation du moment cinétique pour un solide déformable

Observer l'expérience du tabouret d'inertie (lien ci-contre) et proposer une modélisation simple permettant de l'expliquer.

♥ A retenir: Utiliser la conservation du moment cinétique pour un solide déformable

Il est important de savoir reconnaître ces problèmes où l'on a un solide ou un ensemble de solides qui se déforme(nt) mais dont le moment cinétique sur l'axe de rotation est conservé. Le but est alors :

1. de prouver cette conservation en étudier **le système total** par un TMC.
2. d'utiliser cette conservation (penser à diviser le système pour calculer le moment cinétique.)
3. parfois d'étudier l'évolution de l'énergie cinétique.

V.2 Applications

Cours : Forces centrales et solides

✍ Exercice V.1: Cylindre sur un plan incliné

On considère un cylindre de rayon R, de hauteur h et de masse M uniformément répartie placé sur un plan incliné d'angle α. Montrer que le cylindre ne peut rester en équilibre.

✍ Exercice V.2: Rotation d'un moteur

On considère un solide (rotor) de forme cylindrique de rayon R et de masse M uniformément répartie. Il est en liaison pivot avec un axe fixe (stator) et on suppose cette liaison parfaite. On suppose que l'axe Oz de la liaison pivot est horizontal. On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz et l'angle θ associé à un point du cylindre permet de repérer la rotation de ce dernier.

Les propriétés magnétiques du rotor (non étudié en détail ici) fait qu'un champ magnétique extérieur au système impose une action modélisable par un **couple** de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma_m \overrightarrow{e_z}$ et que le cylindre est plongé dans un fluide dont l'action est aussi modélisable par un **couple** de moment $\overrightarrow{\Gamma_f} = -K\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z$

Q1. Faire un bilan des actions mécaniques sur le cylindre.

Q2. Etablir l'équation d'évolution de la vitesse angulaire ω du cylindre. En déduire que le système tend vers une vitesse de rotation limite qu'on déterminera.

Q3. Etablir $\omega(t)$ en supposant que le rotor est initialement immobile.

Q4. $\rightsquigarrow$ On se place dans le régime stationnaire où $\omega = cste$, déduire du mouvement du centre d'inertie la force résultant exercée par la liaison pivot.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Bilan des actions mécanique.
- ⋆ Théorème du moment cinétique.
- ⋆ Moment d'inertie.

✍ Exercice V.3: Pendule pesant

Cet exercice est un classique à maitriser.

On considère une tige de longueur L et de masse M attaché à une extrémité à un bati par une liaison pivot parfaite d'axe Oz horizontal (on donne le moment de la tige par rapport à Oz : $J_{Oz} = \frac{ML^2}{3}$), l'autre extrémité étant laissé libre. Une masse ponctuelle m est accrochée à la tige à une distance l de l'axe Oz. Déterminer la période des petites oscillations en fonction de la longueur l.

✍ Exercice V.4: Pendule de torsion

Cet exercice est un classique à maitriser.

On considère une tige de longueur L et de masse M uniformément répartie. Elle est attaché en son milieu à un fil de torsion de constante C dont l'autre extrémité est attachée à un bati. On suppose que la tige reste toujours horizontale et qu'elle ne fait que tourner autour de l'axe du fil de torsion noté Oz (vers le haut).

On repère l'angle que fait la tige avec un axe horizontal de référence et $\theta = 0$ lorsque le fil de torsion est au repos.

Montrer qu'on a un oscillateur harmonique et déterminer sa pulsation propre en notant J le moment d'inertie de la tige suivant l'axe Oz.

V.3 Entrainement

✍ Exercice V.5: Disques couplés

On considère deux disques horizontaux tournant autour d'un axe vertical Δ en leur centre. Les disques sont homogènes, de moment d'inertie par rapport à Δ, J_1 et $J_2 = J_1$ et la liaison avec l'axe est parfaite. On repère leur rotation autour de l'axe par deux angles θ_1 et θ_2.

On relie un fil de torsion de constante C d'un côté au bâti et de l'autre eu premier disque puis un deuxième fil de torsion de même constante C d'un côté au premier disque et de l'autre au second disque et enfin un dernier fil de torsion de même constante C d'un côté au deuxième disque et de l'autre au bâti.

Q1. Déterminer les deux équations différentielles couplées qui régissent les évolutions de θ_1 et θ_2.

Q2. On cherche des configurations pour lesquelles les deux disques oscilles de manièrent sinusoïdales à la même pulsation ω. Montrer qu'il n'existe que deux pulsations possibles et dont on déterminera les expressions. Décrire le mouvement global pour chaque pulsation.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Bilan des actions mécanique.
- ⋆ Théorème du moment cinétique.
- ⋆ Moment de torsion.
- ⋆ Oscillateur forcée.

Eléments de correction (sans justification) :

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 + C\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = -C\theta_2 + C\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

$$\omega_{antisymetrique} = \sqrt{\frac{3C}{J_1}}; \qquad \omega_{symetrique} = \sqrt{\frac{C}{J_1}}$$

✍ Exercice V.6: Entraînement par frottements

On considère un système constitué de deux disques en rotation autour d'un axe Δ (les moments d'inertie des deux disques par rapport à l'axe sont notés J_1 et J_2) au moyen d'une liaison pivot parfaite. A l'instant initial, les deux disques sont éloignés et sans contact et le premier tourne avec une vitesse angulaire ω_0 et le second est immobile. On approche doucement les deux disques jusqu'à ce qu'ils soient en contact.

Q1. Déterminer la vitesse angulaire de l'ensemble des deux disques à la fin de la manipulation. Ce résultat dépend-t-il de la nature des frottements entre les deux disques ?

Q2. Faire un bilan d'énergie mécanique pour chaque disque séparément puis pour l'ensemble des deux disques. Commenter les résultats.

Points utiles pour cet exercice

- ⋆ Solide déformable.
- ⋆ Conservation du moment cinétique.

Eléments de correction (sans justification) :

$$\omega_f = \frac{J_1 \omega_0}{J_1 + J_2}$$

L'énergie totale a diminué.

Devoir libre : Mécanique du solide