Corriges

III

♥ Méthode .1: Exprimer une unité

Exprimer l'unité Newton (N) en fonction des unités fondamentales.

Corrigé: Exprimer une unité

Le Newton est l'unité utilisé pour l'intensité des forces. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

avec $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement dont l'unité est donc des $kg.m.s^{-1}$.
La dérivée par rapport au temps revient, d'un point de vue dimensionnel à diviser par le temps. Il vient que le Newton s'exprime dans le unités fondamentales par $\boxed{kg.m.s^{-2}}$

III

♥ Méthode .2: Vérifier RAPIDEMENT l'homogénéité d'une expression

Quelles sont parmi les expressions ci-dessous, celles qui sont homogènes ? Vous ne devez pas passer plus de deux minutes (plus tard, ce temps sera plus court) pour chaque expression :

$$UI^2 = RI^2\tau$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz$$

$$U(t) = U_m \cos(2\pi f t + \pi/3) + \frac{kU_m + U_0 I_0}{2}$$

Dans cet exercice, les U sont des tensions, I des intensités, R des résistances, τ et t des temps, f une fréquence, m une ùasse, v une vitesse, z une position, g le champ de pesanteur et k un nombre sans dimension.

Corrigé: Vérifier RAPIDEMENT l'homogénéité d'une expression

1. Nous sommes en électrocinétique. On peut remarquer que UI est une puissance, tout comme RI^2. Il reste une intensité à gauche et un temps à droite : ce n'est pas homogène.
2. On reconnaître des expressions venues de la mécanique. Il s'agit d'une égalisation de deux énergies (cinétique à gauche et potentielle à droite).
3. Le terme de gauche est une tension, tout comme le premier terme de la somme (on pourra vérifier que l'argument du cosinus est bien sans dimension). Mais le seconde terme est la somme d'une tension kU_m et d'une puissance U_0I_0. Cette équation n'est pas pas homogène.

III

♥ Méthode .3: Analyse dimensionnelle

Un électron de charge e qui subit une accélération a perd une puissance (on parle de freinage par rayonnement) P. L'étude de ce phénomène est relativiste et l'on sait que l'expression de P fait intervenir la célérité de la lumière dans le vide c et la perméabilité du vide ϵ_0 dont l'unité est $s^4.A^2.kg^{-1}.m^{-3}$ sous forme de produit. On peut donc écrire P sous la forme :

$$P = ke^{\alpha}c^{\beta}\epsilon_0^{\gamma}a^{\zeta}$$

avec k une constante sans dimension.

Déterminer les exposants α, β, γ et ζ.

Corrigé: Analyse dimensionnelle

Comme on l'a dit, on ne peut exprimer une unité fondamentale en fonction d'une autre. Chaque grandeur d'une égalité doit donc avoir la même unité exprimer au moyen des unités fondamentales. Commençons par exprimer les unités de P et $ke^{\alpha}c^{\beta}\epsilon_0^{\gamma}a^{\zeta}$.

Le premier a pour unité $kg.m^2.s^{-3}$

Le second a pour unité (on rappelle que le Coulomb s'exprime comme des $A.s$) :

$$(A.s)^{\alpha}.(m.s^{-1})^{\beta}.(s^4.A^2.kg^{-1}.m^{-3})^{\gamma}.(m.s^{-2})^{\zeta}$$

soit en réorganisant :

$$A^{\alpha+2\gamma}.s^{\alpha-\beta+4\gamma-2\zeta}.m^{\beta-3\gamma+\zeta}.kg^{-\gamma}$$

En identifiant les puissances, il vient :

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma & = 0 \\ \alpha - \beta + 4\gamma - 2\zeta & = -3 \\ \beta - 3\gamma + \zeta & = 2 \\ -\gamma & = 1 \end{cases}$$

On obtient un système d'équation qu'il faut résoudre. Il vient assez facilement :

$$\begin{cases} \gamma & = -1 \\ \alpha & = 2 \\ \zeta & = 2 \\ \beta & = -3 \end{cases}$$

Il vient la formule :

$$P = k\frac{q^2a^2}{\epsilon_0 c^3}$$