I Mouvement de particules chargées

I.1 Contexte : Force de Lorentz

♡ Définition I.1: Force de Lorentz

Soit un point matériel portant une charge q et possédant une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel d'étude. On suppose que le point matériel est situé en un point M où règne un champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$. Alors le point matériel subit une action de la part du champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ appelée **action** [a] **de Lorentz** et donc la force s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E}(M) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(M)\right) \tag{1}$$

a. ou force

I.2 Aspects énergétiques

I.2.1 Partie magnétique

♡ Propriété I.1: Travail de la partie magnétique

La force de Lorentz magnétique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ **ne travaille pas**.

Démonstration. La preuve est triviale en remarquant que la force est toujours perpendiculaire à la vitesse, produit vectoriel oblige. □

I.2.2 Partie électrique

♡ Propriété I.2: Caractére conservatif de la partie électrostatique (admis)

Si les champs sont stationnaires [a], la partie électrique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ dérive d'une énergie potentielle E_p [b].
On définit alors le potentiel électrostatique V associé au champ électrique tel que $V(M) = E_p(M)/q$.
Il est indépendant de la charge q.
On a alors les relations :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \tag{3}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \tag{4}$$

a. au quasi-stationnaires

b. Cette propriété découle directement des lois fondamentales de l'électromagnétisme que sont les équations de Maxwell. Elles seront traitées en deuxième année.

I.3 Méthodes

Exemples

(a) Exemples d'applications

Corrigé

(b) Corrigé des exercices méthodes

I.3.1 Mouvement dans un champ électrique

♡ Méthode I.1: Calcul d'une tension

Compétence : Savoir calculer une tension entre deux points/ un potentiel en un point/ l'énergie potentielle en un point connaissant le champ électrique.
On considère une distribution de champ électrique où en tout point M :

$$\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho}{3} r \overrightarrow{e}_r & \text{si r < R} \\ \frac{\rho R^3}{3r^2} \overrightarrow{e}_r & \text{si r > R} \end{cases} \tag{5}$$

où r et $\overrightarrow{e}_r$ correspondent à la coordonnées et au vecteur radial en coordonnées sphériques.

Q1. Déterminer la tension U_{PO} entre un point P de coordonnées r, θ, ϕ et le centre O du repère puis le potentiel $V(P)$ au point P en prenant $V(0) = 0$.

Q2. On considère un électron qui se déplace dans le champ électrique précédent. Représenter $E_p(r)$ l'énergie potentielle de l'électron.

♡ Méthode I.2: Accélération dans un champ électrique

Compétence : Etablir la vitesse d'une charge accélérée par un champ $\overrightarrow{E}$ au moyen d'un TEM. On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ dont le potentiel électrostatique associé est noté $V(M)$.
La charge initialement immobile au point A doit être accélérée par le champ jusqu'à un point B.

Q1. Justifier que la seule donnée de la tension $U = U_{AB}$ permet de déterminer la vitesse de la particule en B et que le signe de q impose le signe de U_{AB}. Déterminer au passage la vitesse v (en norme) de la charge en B.

Q2. Exprimer l'énergie cinétique de la charge $q = -e$ une fois en B en eV (électron-volt) pour $|U| = 1000V$.

♡ A retenir: Accélération par une tension

— La donnée seule de la tension accélératrice suffit de déterminer le gain en énergie cinétique de la particule. C'est pourquoi on utilise couramment l'expression : "On accélère une particule de charge ...par une tension ..." sans autre précision.

— La définition de l'électron-volt : 1eV est l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1V soit $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$.

♡ Méthode I.3: Déviation par un champ électrique uniforme.

On travaille par la suite dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et on lui associé un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$.
On considère un jet d'électrons préalablement accélérés par une tension U. Ils possèdent alors une vitesse notée $\overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{e}_x$.
Ils pénêtrent alors dans une zone entre $x = 0$ et $x = d$ où reigne un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{e}_y$ puis uns fois sortie de cette zone continuent entre $x = d$ et $x = d + D$ jusqu'à un écran situé dans le plan O_2yz avec $O_2(d + D, 0, 0)$ dans une zone vide de champ.

Q1. Déterminer la deflexion δ c'est-à-dire la distance O_2A entre O_2 et le point A d'impact du jet sur l'écran.

I.3.2 Mouvement dans un champ magnétique

♡ Méthode I.4: Cas d'un champ magnétique uniforme

TOUT l'exercice constitue un exercice de cours qui doit être connu et dont les conclusions sont à connaître.
On considère une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme.
A $t = 0$, la particule possède une vitesse $\overrightarrow{v}_0$.

Q1. Montrer que si $\overrightarrow{v}_0 \perp \overrightarrow{B}$ alors la trajectoire de la particule est plane.

Q2. Montrer que, dans les conditions précédentes, la trajectoire est un cercle d'axe parallèle à $\overrightarrow{B}$ parcouru à vitesse uniforme. Préciser le sens de rotation autour du champ magnétique. Déterminer alors le rayon du cercle et la vitesse angulaire de rotation (appelée *pulsation cyclotron*).

♡ A retenir: Trajectoire dans un champ magnétique uniforme

Une particule de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique uniforme possède une trajectoire circulaire <u>si sa vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique $\overrightarrow{B}$</u>. De plus :

— Le mouvement est uniforme.

— La rotation se fait dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$ en cohérence avec le vecteur $-q\overrightarrow{B}$.

— Le rayon du cercle est $R = \left|\frac{mv_0}{qB}\right|$

— La vitesse angulaire est : $\omega = \left|\frac{qB}{m}\right|$

I.4 Exercices

I.4.1 Application

Exercice I.1: Calcul d'une tension

Un condensateur cylindrique est composé de deux cylindres coaxiaux de même longueur L et de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$.
Lorsque le cylindre intérieur est chargé par une charge $-Q$ et le cylindre extérieur chargé par une charge $+Q$ [a], l'ensemble forme ainsi un condensateur, dits "cylindriques". Il règne alors un champ électrique non nuls entre les deux cylindres dont l'expression est (on utilise les coordonnées cylindriques de même axe que les cylindres) :

$$\overrightarrow{E}(M(r,\theta,z)) = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0 r}\overrightarrow{e}_r \tag{6}$$

Q1. Déterminer la différence de potentiel entre les deux armatures $U_{21} = V(R_2) - V(R_1)$.

Q2. En déduire la capacité du condensateur.

a. Les charges sont uniformément réparties

Eléments de réponse sans justification :

Q1. $U_{21} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$

Q2. $C = \frac{2\pi L\epsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

Points utiles pour l'exercice :

- $\Longrightarrow$ *Calcul d'une tension (Méthode I.1)*
- $\Longrightarrow$ *Cours d'électrocinétique*

Exercice I.2: Déviation par une champ magnétique

On considère un électron qui pénètre avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e}_x$ (avec $v_0 = 2\times 10^7 m/s$) dans une zone de champ magnétique situé entre $x = 0$ et $x = D$.

Q1. Déterminer le rayon de la trajectoire de l'électron et faire l'application numérique.

Q2. En déduire une condition sur D pour que l'électron sorte en $x = D$.

Q3. Déterminer la distance D pour dévier la particule d'un angle $\theta = 1.71°$.

Eléments de réponse sans justification :

$$D = R\sin\theta = \frac{mv_0}{eB}\sin\theta$$

Points utiles pour l'exercice :

- $\Longrightarrow$ *Trajectoire dans un champ magnétique uniforme (Méthode I.4)*

I.4.2 Entrainement

Exercice I.3: Spectromètre de masse

Le principe d'un spectrographe de masse est représenté Figure 2.

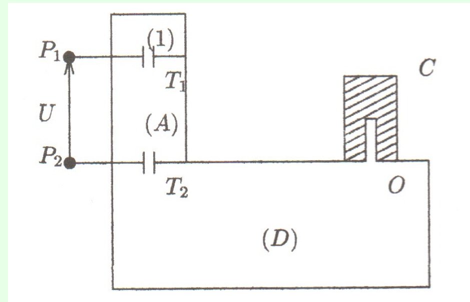

FIGURE 2 – Spectromètre de masse

1. Dans un chambre une chambre d'ionisation (1) on produit des ions de masse m et de charge $q = 2e$. Ces ions pénètrent par le trou T_1 d'une plaque P_1 dans une enceinte (A) ; leur vitesse en T_1 est négligeable. Dans l'enceinte (A), ces ions sont accélérés par une tension $U = V_{P1} - V_{P2}$, puis sortent de (A) par un trou T_2 percé dans la plaque P_2.
2. Ils pénètrent alors dans une enceinte (D) où règne un champ magnétique B uniforme et constant perpendiculaire au plan de la figure. La vitesse des ions en T_2 est notée v_0. On néglige le poids.

Données : $e = 1.60 \times 10^{-19} C; U = 4000V; B = 0.100T$; unité de masse atomique $m_0 = 1.67 \times 10^{-27} kg$.

Q1. Exprimer la vitesse v_0 en fonction de q, m et U.

Q2. Préciser le sens de B pour que les ions puissent être recueillis dans la fente O du collecteur (C). Calculer littéralement le rayon R de la trajectoire des ions dans l'enceinte (D).

Q3. L'élément zinc contient deux isotopes de nombres de masse $A_1 = 68$ et $A_2 = 70$. On souhaite recueillir en O l'isotope A_1. Calculer numériquement la distance $l = T_2O$ et évaluer la largeur maximale de la fente du collecteur.

Eléments de réponse sans justification :

Q1. $v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

Q2. $R = \sqrt{\frac{2mU}{q}}\frac{1}{B}$; B va vers le fond.

Q3. $l = 2R(A_1 = 68) = 1.07m; \Delta l < 4(R(A_2) - R(A_1)) = 3cm$

Points utiles pour l'exercice :

— $\Longrightarrow$ *Accélération par un champ électrique (Méthode I.2)*

— $\Longrightarrow$ *Trajectoire dans un champ magnétique uniforme (Méthode I.4)*

Exercice I.4: Focalisation par un champ électrique

Des électrons, préalablement accélérés par une tension V=10kV, pénètrent dans la fente supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

On désire recueillir ces électrons à travers une fente B pratiquée dans le plan opaque (xAy), à la distance AB=L=20cm de A. On peut régler l'angle α que fait le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ des électrons en A avec l'axe (Ax), ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique E. Le vecteur v_0 est supposé parallèle au plan (Axy).

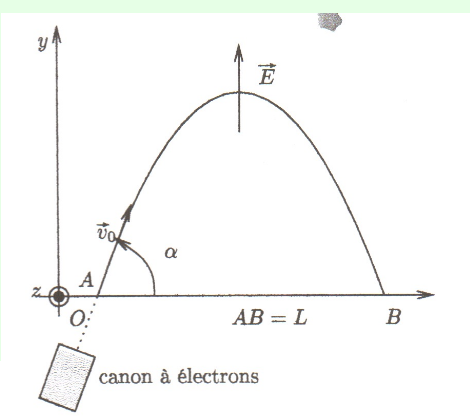

FIGURE 3 – Trajectoire des électrons

Q1. Quelles sont les valeurs optimales à donner à α et E pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire $\Delta\alpha \ll \alpha$?

Eléments de réponse sans justification :

Q1. $\alpha = \pi/4; E = \frac{m^2 L}{2e^2 V}$

Points utiles pour l'exercice :

— $\Longrightarrow$ *Accélération par un champ électrique (Méthode I.2)*

— $\Longrightarrow$ *Trajectoire dans un champ électrique uniforme (Méthode I.3)*

Exercice I.5: Modèle de Drüde

Le modèle de Drüde est un modèle proposé pour décrire la conduction dans les métaux (notamment les fils de cuivre dans les circuits). Soumis à un champ électrique extérieur, les électrons de conduction du métal ne vont pas être accélérés indéfiniment : leur vitesse tend vers une vitesse limite. Paul Drüde a proposé une explication en tenant compte de l'interaction des électrons avec le réseau cristallin. Ce dernier, chargé positivement (à cause de l'arrachement des électrons) exerce une action de freinage sous la forme : $\overrightarrow{F}_D = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ sur les électrons où m et $\overrightarrow{v}$ sont les masses et vecteur vitesse de l'électron et τ un temps caractéristique très court dépendant du matériau.
On considère donc un électron de conduction soumis à la force précédente et à l'action d'un champ électrique supposé uniforme $\overrightarrow{E}$.

Q1. Etablir l'équation du mouvement de l'électron. En déduire qu'il va tendre vers une vitesse limite qu'on déterminera.

Q2. On note n la densité volumique d'électron dans le matériau, exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j} = -ne\overrightarrow{v}$ en fonction de n, τ, m, e et $\overrightarrow{E}$ en régime établi. On appelle cette relation **loi d'Ohm locale** $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ où γ est appelée **conductivité du matériau**.

On considère un fil de longueur L et de section S dans lequel règne le champ électrique précédent supposé uniforme.

Q3. Par un bilan de quantité de charge traversant une section S de fil pendant un temps dt, montrer que l'intensité (orientée dans le même sens que $\overrightarrow{E}$) qui traverse le fil s'écrit $I = neSv$ avec v la composante du vecteur vitesse des électron le long du fil [a].

Q4. Exprimer la différence de potentiel entre les deux extrémités du fil. En déduire la loi d'Ohm globale et l'expression de la résistance R du fil en fonction de γ, L et S.

Q5. La conductivité du cuivre est $\gamma = 59.6 \times 10^6 \mathrm{S.m^{-1}}$. Estimer la résistance d'un mètre de fil simple utilisé en TP et commenter.

Q6. Si l'on considère maintenant une charge de conduction q de signe quelconque. Exprimer la nouvelle conductivité γ et commenter son signe. Quel est l'intérêt en chimie de cette observation ?

a. On retrouve au passage une relation très utilisée en deuxième année : $I = \iint \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}$

Eléments de réponse sans justification :

$$\begin{cases} \gamma &= \frac{ne^2\tau}{m} \\ R &= \frac{L}{\gamma S} \end{cases} \tag{7}$$

La conductivité ne dépend pas du signe de la charge : utile en conductimétrie.

Points utiles pour l'exercice :

— $\Longrightarrow$ *Trajectoire dans un champ électrique uniforme (Méthode I.3)*

Exercice I.6: Effet Hall

L'espace est repéré par les axes cartésiens Ox, Oy, Oz et les vecteurs $\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z$. On s'intéresse ici à la conduction dans un métal assurée par des électrons de charge $q = -e$, de masse m, de densité n. Le métal est placé dans un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{u}_x + E_y\overrightarrow{u}_y + E_z\overrightarrow{u}_z$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$. Ces champs sont uniformes et permanents. L'interaction entre les électrons et les ions fixes du réseau est modélisé par une force de frottement : $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ étant le vecteur vitesse des électrons.

Q1. Déterminer l'unité de τ.

Q2. Etablir l'équation différentielle du mouvement d'un électron. Que devient cette équation en régime permanent ?

Q3. On note $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$ le vecteur densité de courant. Montrer qu'en régime permanent, les composantes de ce vecteur vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} j_x - \frac{q\tau B}{m} j_y & = \gamma E_x \\ \frac{q\tau B}{m} j_x + j_y & = \gamma E_y \\ j_z & = \gamma E_z \end{cases} \tag{8}$$

où γ est une constante que l'on déterminera.

Q4. En déduire que l'on peut écrire j_x etj_y sous la forme suivante : $j_x = \gamma\left(\alpha E_x + \beta E_y\right)$ et $j_y = \gamma\left(-\beta E_x + \alpha E_y\right)$ où α et β sont deux constantes à déterminer en fonction des données.

Q5. Si la conduction ne peut avoir lieu que suivant Ox, montrer que la présence du champ B impose la présence d'un champ électrique (appelé champ de Hall) et déterminer sa direction. Calculer la constante de Hall : $\frac{E_y}{j_x B}$

Points utiles pour l'exercice :

— $\Longrightarrow$ *Trajectoire dans un champ électrique uniforme (Méthode I.3)*