**MECANICA DE SOLIDOS**

***V Tarea***

**FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA**

# Estudio de las tensiones en un punto.

# Círculo de Mohr en dos dimensiones


*Docente: Diego Andrés Álvarez Marín*

***Pablo César Teixeira Hoyos.*** ***pcteixeirah@unal.edu.co***

*CC. 1125348583*


---

## 5) 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3, 2.9.4 y 2.9.5

* Estudiar los videos adjuntos.

* Estudiar y subir a esta plataforma los apuntes de los videos y de la lectura de las secciones 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3, 2.9.4 y 2.9.5 del main.pdf

---

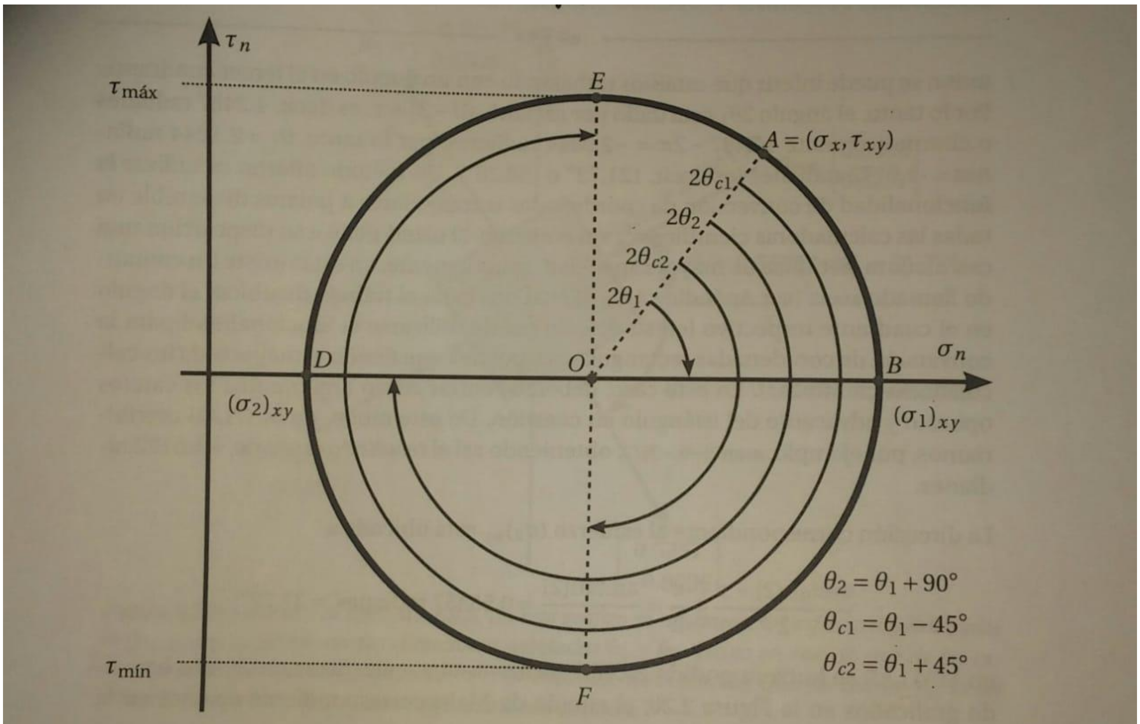
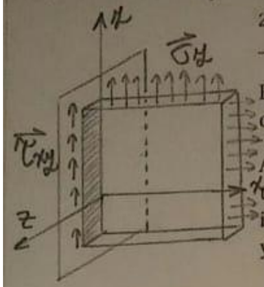



**Figura 2.19:** *Ángulos asociados con los esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos; dichos ángulos deben medirse en el sentido horario. Recuerde que el punto A tiene las coordenadas* $(\sigma_x, \tau_{xy})$.

Ejemplo de tensión Plana
(Placa delgada)






En el código anterior, se utilizó el comando de MATLAB `dot`, el cual calcula el producto punto entre los dos vectores dados como argumentos.

A continuación, estudiaremos otro método para solucionar el problema de encontrar los esfuerzos principales actuantes en un punto, con el cual obtendremos una interpretación diferente de los valores y vectores propios: estos indican la magnitud y dirección de los máximos y mínimos esfuerzos normales presentes en el sólido.

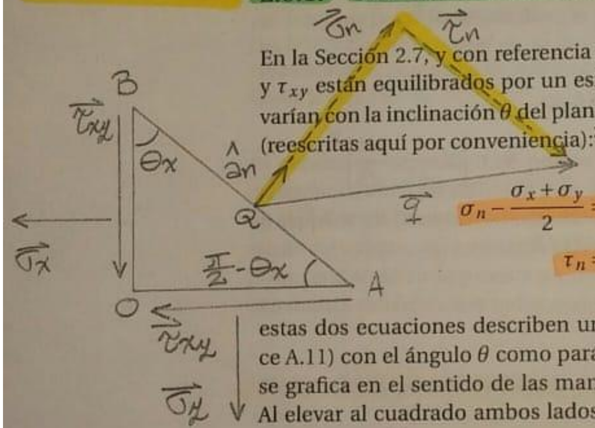
✓ La dimensión z es muy pequeña comparada con las otras

## 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi- y tridimensionales

✓ Tensiones $\sigma_x$, $\sigma_y$ y $\tau_{xy}$, pero ninguna en la dirección $\hat{a}_z$ (La deformación en el eje z no tiene por qué ser nula)

La *circunferencia de Mohr* (llamada incorrectamente el *círculo de Mohr*), fue propuesta por el ingeniero civil alemán Christian Otto Mohr (1835–1918) en 1882 con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto. A continuación, detallaremos dicha representación en el caso bi- y tridimensional.

### 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones




En la Sección 2.7, y con referencia a la Figura 2.10, vimos que los esfuerzos $\sigma_x$, $\sigma_y$, y $\tau_{xy}$ están equilibrados por un esfuerzo normal $\sigma_n$ y un esfuerzo cortante $\tau_n$ que varían con la inclinación $\theta$ del plano $\overline{AB}$, como ilustran las ecuaciones (2.27) y (2.29) (reescritas aquí por conveniencia):[23]

$$\sigma_n - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (2.27)$$

$$\tau_n = \tau_{xy}\cos 2\theta - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta; \qquad (2.29)$$

estas dos ecuaciones describen una curva paramétrica $(\sigma_n(\theta), \tau_n(\theta))$ (ver Apéndice A.11) con el ángulo $\theta$ como parámetro, que comienza en el punto $(\sigma_x, \tau_{xy})$ y que se grafica en el sentido de las manecillas del reloj a medida que $\theta$ varía de 0 a $\pi$[24]. Al elevar al cuadrado ambos lados de cada una de las dos ecuaciones anteriores y sumarlos resulta:

$$\boxed{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2.}$$

[23] Veremos en la Sección 4.7.1 que estas fórmulas son únicamente válidas para sólidos en un estado de tensión plana.

[24] Observe que $\theta$ varía en el intervalo $[0,\pi)$, no en el intervalo $[0,2\pi)$ como inocentemente se puede pensar. ¿Por qué?

Esto se debe a que el círculo de Mohr grafica la variación de $2\theta$, así, si el dominio del círculo es $[0, 2\pi)$, el de $\theta$ ha de ser la mitad

Observe que esta ecuación describe una circunferencia[25] con centro en el punto $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$ y radio

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

como la mostrada en la Figura 2.17b; dicha circunferencia es llamada incorrectamente el *círculo de Mohr* en dos dimensiones. Se puede entender entonces que el círculo de Mohr es el lugar geométrico de las posibles combinaciones de esfuerzos cortantes y normales que están presentes en un mismo punto para todas las inclinaciones $\theta$ del plano de referencia $\overline{AB}$ de la Figura 2.10; de todos estos esfuerzos, es de particular interés conocer para cuál inclinación se producen los esfuerzos normales $\sigma_n$ máximos y mínimos sobre el punto en consideración; obviamente, es también

[25] Recuerde que una circunferencia de radio $r$ y con centro en el punto $(x_0, y_0)$ está descrita por la ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

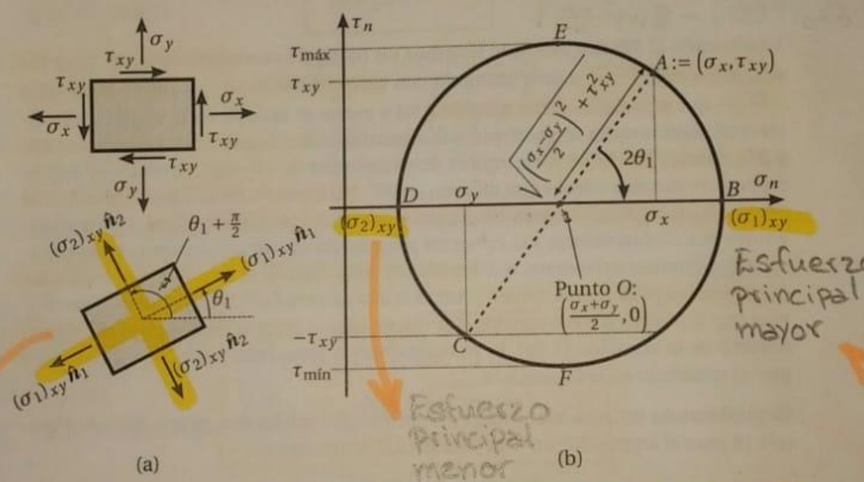



**Figura 2.17:** *Círculo de Mohr en dos dimensiones. El círculo de Mohr es el conjunto de todos los puntos $(\sigma_n,\tau_n)$ que aparecen al variar el parámetro $\theta$ en el intervalo $[0,\pi)$. Aquí $\sigma_n$ y $\tau_n$ están descritos respectivamente por las ecuaciones (2.27) y (2.29). El centro de esta circunferencia es $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$ y su radio es $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$. El ángulo $\measuredangle AOB$ se utiliza para determinar la inclinación del plano principal donde se produce el esfuerzo normal máximo. Note que en la Figura (a) el sentido del ángulo es antihorario, mientras que en la Figura (b) es horario.*

Al rotar el elemento infinitesimal $dx\,dy$ desde su posición original $(x,y)$ un ángulo $\theta_1$ hasta la nueva base ortogonal $(\hat{n}_1,\hat{n}_2)$, obtenemos un estado de esfuerzos en el que $\tau_n=0$

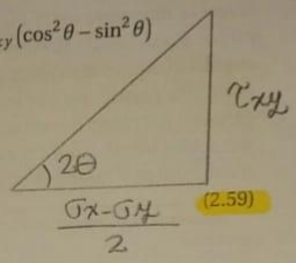
Eq. 2.28: $\sigma_n(\theta) = \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2\tau_{xy} \sin(\theta)\cos(\theta)$



importante conocer la magnitud de dichos esfuerzos.

Para encontrar el valor máximo y mínimo de $\sigma_n$ procedemos a derivar (2.28) con respecto a $\theta$ y luego igualamos dicha derivada a cero:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\sigma_n}{d\theta} &= -2\sigma_x \sin\theta\cos\theta + 2\sigma_y \sin\theta\cos\theta + 2\tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\\ &= \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta\\ &= 0\end{aligned}\right.$$




de aquí se obtiene que:

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}} \qquad (2.59)$$

*Recuérdense las identidades de los ∢s dobles

lo que es equivalente a

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \qquad (2.60)$$

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

La ecuación (2.59) nos dice que tenemos un triángulo con cateto opuesto $\tau_{xy}$ y cateto adyacente $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ y otro triángulo con cateto opuesto $-\tau_{xy}$ y cateto adyacente $-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ que satisfacen dicha igualdad, tal y como se aprecia en la Figura 2.18. Dichos triángulos están respectivamente asociados a dos ángulos que llamaremos $2\theta_1$ y $2\theta_2$, donde $2\theta_2 = 2\theta_1 + \pi$. De aquí se desprende que $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$; es decir, el ángulo $\theta$ puede tomar dos valores que difieren en 90°. Para uno de estos ángulos el esfuerzo normal $\sigma_n$ toma un valor máximo y para el otro toma un valor mínimo. Llamaremos entonces a dichos valores los *esfuerzos principales máximo y mínimo* , respectivamente, y diremos así mismo, que los planos descritos por el ángulo $\theta$ que satisfacen (2.59) son los *planos principales*. Como los dos valores de $\theta$ difieren en 90°, concluimos que los esfuerzos principales ocurren en planos mutuamente perpendiculares. A partir de la ecuación (2.59), se pueden deducir otras relaciones trigonométricas, que se muestran en la Figura 2.18.

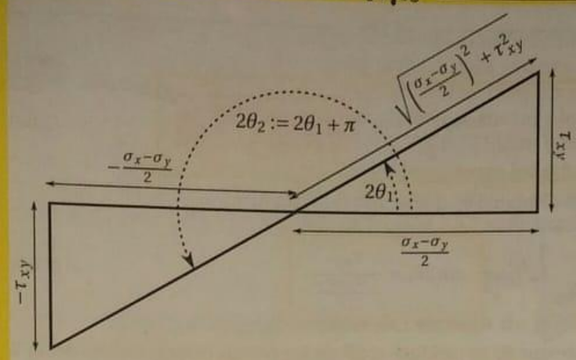
Reemplazando las relaciones trigonométricas deducidas con la ayuda de la Figura 2.18 para el ángulo $2\theta_1$ en la ecuación (2.27), obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} + \tau_{xy}\frac{\tau_{xy}}{R}\\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2}{4R} + \frac{\tau_{xy}^2}{R}\\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.\end{aligned}$$

Eq. 2.27:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

* Es la misma 2.28, pero expresada en función de los ∢s dobles




$\sin 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{R}$

$\cos 2\theta_1 = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2R}$

$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$

$\sin 2\theta_2 = -\frac{\tau_{xy}}{R}$

$\cos 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2R}$

**Figura 2.18:** *Cálculo de* $\sin 2\theta_1$, $\cos 2\theta_1$, $\sin 2\theta_2$ *y* $\cos 2\theta_2$. *Estas relaciones trigonométricas se obtuvieron teniendo en cuenta que* $\tan 2\theta_1$ *y* $\tan 2\theta_2$ *están dadas por la ecuación (2.59).*

Procediendo análogamente con las relaciones trigonométricas deducidas para el ángulo $2\theta_2$ resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4R} - \frac{\tau_{xy}^2}{R}\\ &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}.\end{aligned}$$

Hemos demostrado entonces que el $\sigma_n$ máximo y mínimo *sobre el plano xy* se alcanzan respectivamente para

Centro

Radio

Esfuerzo Principal máximo

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \quad (2.61a)$$

Esfuerzo Principal mínimo

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \quad (2.61b)$$

Observe que estas son las mismas ecuaciones (2.39); por lo tanto, deducimos que los esfuerzos cortantes son nulos sobre los planos principales. Esto se puede verificar alternativamente haciendo $\tau_n = 0$ en (2.29) y resolviendo para el ángulo $2\theta$, obteniendo de nuevo (2.59) (se deja este ejercicio al lector).

Si se procede de igual modo con (2.29) para obtener los esfuerzos cortantes máximos y mínimos, podemos demostrar que el esfuerzo cortante $\tau_n$ máximo *sobre el plano*

Eq. 2.29:

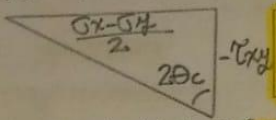
$$\tau(\theta) = \tau_{xy}\cos(2\theta) - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta)$$

Radio

$xy$ es

$$\boxed{(\tau_{\text{máx}})_{xy} = \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{2.62}$$

y que se produce para el ángulo $\theta_c$ que satisface la igualdad,




$$\boxed{\cot 2\theta_c = \frac{\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}.} \tag{2.63}$$

Veremos más adelante que $\theta_c$ se produce a 45° de los planos principales, es decir, a $\theta_1 \pm 45°$, $\theta_2 \pm 45°$.

Si las direcciones principales son tomadas como los nuevos ejes $x$ y $y$, es decir, si tomamos como referencia el sistema de coordenadas formado por los vectores $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_2$, entonces $\sigma_x$ y $\sigma_y$ se convierten respectivamente en $(\sigma_1)_{xy}$ y $(\sigma_2)_{xy}$, $\tau_{xy}$ se vuelve cero y las ecuaciones (2.28) y (2.29) se simplifican, quedando

Condiciones en el plano principal:

$\sigma_x = (\sigma_1)_{xy}$

$\sigma_y = (\sigma_2)_{xy}$

$\tau_{xy} = 0$

$$\boxed{\sigma_n(\theta') = (\sigma_1)_{xy}\cos^2\theta' + (\sigma_2)_{xy}\sin^2\theta' \qquad \tau_n(\theta') = \frac{1}{2}\left((\sigma_2)_{xy} - (\sigma_1)_{xy}\right)\sin 2\theta';}$$

tenga en cuenta que en este caso el ángulo $\theta'$ se mide con respecto al eje $x'$ del nuevo sistema de coordenadas; estas son ecuaciones paramétricas de $\theta'$, que varían para $\theta' \in [0, \pi)$ y que describen el círculo mostrado en la Figura 2.17.

Hemos deducido entonces que, ya sea calculando los valores y vectores propios de la matriz de tensiones bidimensional (2.34) o simplemente aplicando las ecuaciones (2.39) y (2.60) podemos calcular las direcciones y magnitudes de los esfuerzos principales. Estos esfuerzos no solo son los máximos y mínimos posibles, sino que se presentan para una inclinación en la cual los esfuerzos cortantes son nulos. Finalmente, tenga en cuenta que la relación entre el ángulo $\theta_1$ encontrado a partir de la fórmula (2.60) y los vectores propios que se encuentran al resolver el sistema de ecuaciones (2.40) está dada por

Direcciones principales:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}_1 &= [\cos(\theta_1),\ \sin(\theta_1)]^T \qquad & \hat{\boldsymbol{n}}_2 &= [\cos(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2}),\ \sin(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2})]^T \\ & & &= [-\sin(\theta_1),\ \cos(\theta_1)]^T. \end{aligned} \right. \tag{2.64}$$

Dichas fórmulas *determinan las direcciones, mas no los sentidos de los vectores* $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ *y* $\hat{\boldsymbol{n}}_2$[26].

[26]Recuerde que todo vector tiene tres características: su longitud, dirección y sentido. La *longitud de un vector* indica la distancia entre la cola y la cabeza del mismo; la *dirección de un vector* determina la orientación de la recta en el espacio sobre la que se ubica este; el *sentido del vector* indica hacia donde se dirige o apunta.

(%i1)
```
/**Cargamos la librería para calcular los
 * valores y vectores propios
*/
load ("eigen");
```

(%o1)
C:/maxima-5.44.0/share/maxima/5.44.0/share/matrix/eigen.mac

(%i5)
```
/**Los esfuerzos son: */
sx: -1$ sy: 2$ txy: -3$
/**Armamos la matriz de tensiones */
sigma: matrix(
     [sx, txy],
     [txy, sy]
);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(%i6)
```
/**El polinomio característico se
 * calcula con:
*/
polinomcar: expand(
     charpoly(sigma, sn)
);
```

(%o6) $sn^2 - sn - 11$

(%i7)
```
/**Las raíces del polinomio característico
 * son la magnitud de los esfuerzos principales
*/
Solve(
     [polinomcar=0], [sn]
);
```

(%o7) $Solve([sn^2 - sn - 11 = 0], [sn])$

(%i9)
```
/**Los valores y vectores propios se
 * calculan con:
*/
uniteigenvectors(sigma);
/**Y obtenemos el valor numérico */
%, numer;
```

(%o8) $[[[-\frac{3\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{2}], [1,1]], [[[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}]], [[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+5}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5}}]]]]$

(%o9) [[[-2.854101966249685,3.854101966249685],[1,1]],[[[0.8506508083520401,0.5257311121191337]],[[0.5257311121191336,-0.8506508083520398]]]]

```
(%i10) /**El ángulo asociado al esfuerzo
        * principal 1 es:
       */
       ang: atan2(2·txy, sx-sy)/2, numer;
(%o10) -1.017221967897851
```

```
(%i12) /**El vector unitario asociado al esfuerzo
        * principal 1 es:
       */
       [
           cos(ang), sin(ang)
       ], numer;
       /**El vector unitario asociado al esfuerzo
        * principal 2 es:
       */
       [
           cos(ang + %pi/2), sin(ang + %pi/2)
       ], numer;
(%o11) [0.5257311121191336,-0.8506508083520399]
(%o12) [0.85065080835204,0.5257311121191336]
```

```
(%i14) /**Finalmente obtenemos el esfuerzo
        * cortante máximo:
       */
       taumax: sqrt(
           ((sx-sy)/2)^2 + txy^2
       );
       %, numer;
```

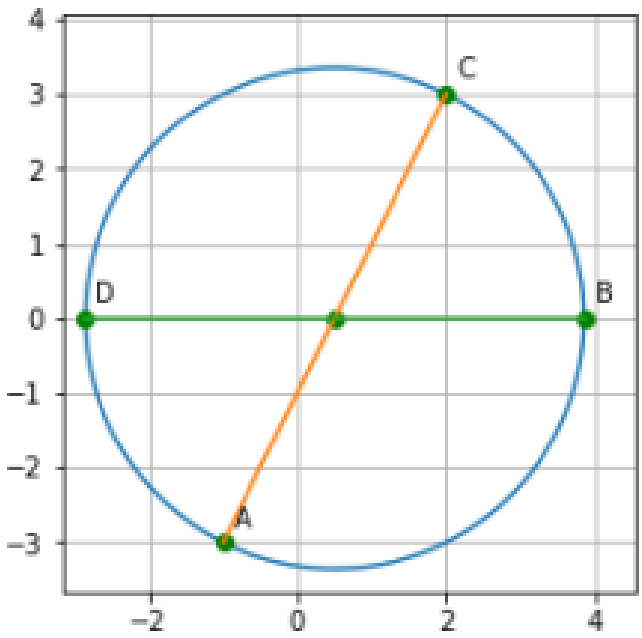
(%o13) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

```
(%o14) 3.354101966249685
```

```
(%i16) /**El cual actúa sobre los planos cuyos
        * vectores unitarios son:
       */
       [
           cos(ang + %pi/4), sin(ang + %pi/4)
       ], numer;
       [
           cos(ang - %pi/4), sin(ang - %pi/4)
       ], numer;
(%o15) [0.9732489894677302,-0.2297529205473612]
(%o16) [-0.2297529205473611,-0.9732489894677302]
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import principal_directions as pr
# ==============================================================================
'''
Considere un punto sujeto a los esfuerzos:
sigma_x, sigma_y, tao_xy [Pa]
Encuentre los esfuerzos principales (y su dirección)
para el punto en consideración
'''
# ==============================================================================
sigma_x = -1
sigma_y = 2
tao_xy = -3
# ==============================================================================
delta = 0.005 #Accuracy
r = np.sqrt(((sigma_x-sigma_y)/2)**2+tao_xy**2)   #Radio de la semicircunferencia MOHR
h = (sigma_x+sigma_y)/2 #Centro de la semicircunferencia MOHR
sigma_min = h-r
sigma_max = h+r
sigma_mohr = np.arange(sigma_min, sigma_max+delta, delta) #Esfuerzos normales MOHR
n_parameter = np.size(sigma_mohr)
ang_parameter = np.linspace(0, 2*np.pi, n_parameter+1);

sigma_axis = r*np.cos(ang_parameter)+h;
tao_axis = r*np.sin(ang_parameter);

mohr_circle = list(zip(sigma_axis, tao_axis))

point_hk = [h, 0]
point_A = [sigma_x, tao_xy]
point_C = [sigma_y, -tao_xy]
point_max = [sigma_max, 0]
point_min = [sigma_min, 0]

# ==============================================================================
oplane_sigma = [point_A[0],point_C[0]]
oplane_tao = [point_A[1],point_C[1]]

op_vector = np.subtract(point_A,point_C)
norm_op = np.linalg.norm(op_vector)
unitvec_op = np.divide(op_vector,norm_op)
# ==============================================================================
flatplane_sigma = [point_max[0],point_min[0]]
flatplane_tao = [point_max[1],point_min[1]]

flat_vector = np.subtract(point_max,point_min)
norm_flat = np.linalg.norm(flat_vector)
unitvec_flat = np.divide(flat_vector,norm_flat)
# ==============================================================================
theta1_double = np.arctan2(tao_xy,sigma_x-h)
theta1_double = np.rad2deg(theta1_double)
theta1 = theta1_double/2
theta2 = theta1+90
thetac1 = theta1-45
thetac2 = theta1+45
# ==============================================================================
#Definimos la matriz de tensiones sigma_matrix
sigma_matrix = np.zeros((2,2))
sigma_matrix[0,0] = sigma_x
sigma_matrix[0,1] = tao_xy
sigma_matrix[1,0] = tao_xy
sigma_matrix[1,1] = sigma_y
```

```python
#Definimos los coeficientes del polinomio característico
char_poly = np.poly(sigma_matrix)
#Definimos las raíces del polinomio en sigma_n
poly_roots = np.roots(char_poly)
poly_roots = np.sort(poly_roots)[::-1] #Ordenamos de mayor a menor

eugenvect = pr.dir2D(sigma_x,sigma_y,tao_xy)

identity = np.identity(2)
sigma_index = poly_roots[0]
sigma_identity = sigma_index*identity
sigma_term = np.subtract(sigma_matrix, sigma_identity)
ng_vect = np.zeros((2,1))
ng_vect[0,0] = eugenvect[0,0]
ng_vect[1,0] = eugenvect[1,0]
tao_max = np.matmul(sigma_term, ng_vect)
tao_max = np.linalg.norm(tao_max)/2

theta_num = np.arccos(eugenvect[0,0])
theta_num = np.rad2deg(theta_num)
if tao_xy<0:
    theta2_num = theta_num
    theta1_num = theta2_num-90
    thetac1_num = theta1_num-45
    thetac2_num = theta1_num+45
else:
    theta1_num = theta_num
    theta2_num = theta1_num+90
    thetac1_num = theta1_num-45
    thetac2_num = theta1_num+45
# ==============================================================================
print("Esfuerzos principales (numérico): \n", poly_roots," [Pa]")
print("Esfuerzos principales (gráfico): \n [",
      point_max[0], point_min[0], "] [Pa]")
print("Esfuerzo cortante (numérico): \n", tao_max," [Pa]")
print("Esfuerzo cortante (gráfico): \n", r," [Pa]")
print("Direcciones principales: \n", eugenvect)
print("Theta_1 [deg] (numérico): \n", theta1_num)
print("Theta_1 [deg] (gráfico): \n", theta1)
print("Theta_2 [deg] (numérico): \n", theta2_num)
print("Theta_2 [deg] (gráfico): \n", theta2)
print("Theta_c1 [deg] (numérico): \n", thetac1_num)
print("Theta_c1 [deg] (gráfico): \n", thetac1)
print("Theta_c2 [deg] (numérico): \n", thetac2_num)
print("Theta_c2 [deg] (gráfico): \n", thetac2)
# ==============================================================================
plt.axis('scaled')
plt.ylim(-r-0.3, r+0.7)
plt.xlim(sigma_min-0.3, sigma_max+0.7)
plt.grid()

plt.plot(sigma_axis, tao_axis)

plt.plot(point_A[0],point_A[1],'go')
plt.annotate('A', point_A, xytext=(4,6),textcoords='offset pixels')
plt.plot(point_C[0],point_C[1],'go')
plt.annotate('C', point_C, xytext=(4,6),textcoords='offset pixels')
plt.plot(point_hk[0],point_hk[1],'go')
plt.plot(point_max[0],point_max[1],'go')
plt.annotate('B', point_max, xytext=(4,6),textcoords='offset pixels')
plt.plot(point_min[0],point_min[1],'go')
plt.annotate('D', point_min, xytext=(4,6),textcoords='offset pixels')

plt.plot(oplane_sigma,oplane_tao)
plt.plot(flatplane_sigma,flatplane_tao)

plt.show()
# ==============================================================================
```




```
In [1]: runfile('C:/Users/Pablo Teixeira/Documents/Civil Pro/
SOLID_MECHANICS/Homework/TALLER_5/Circulo_Mohr_2D.py', wdir='C:/Users/
Pablo Teixeira/Documents/Civil Pro/SOLID_MECHANICS/Homework/TALLER_5')
Esfuerzos principales (numérico):
 [ 3.85410197 -2.85410197]  [Pa]
Esfuerzos principales (gráfico):
 [ 3.8541019662496847 -2.8541019662496847 ] [Pa]
Esfuerzo cortante (numérico):
 3.3541019662496843  [Pa]
Esfuerzo cortante (gráfico):
 3.3541019662496847  [Pa]
Direcciones principales:
 [[ 0.85065081 -0.52573111]
 [ 0.52573111  0.85065081]]
Theta_1 [deg] (numérico):
 -58.28252558853899
Theta_1 [deg] (gráfico):
 -58.282525588538995
Theta_2 [deg] (numérico):
 31.71747441146101
Theta_2 [deg] (gráfico):
 31.717474411461005
Theta_c1 [deg] (numérico):
 -103.28252558853899
Theta_c1 [deg] (gráfico):
 -103.28252558853899
Theta_c2 [deg] (numérico):
 -13.282525588538988
Theta_c2 [deg] (gráfico):
 -13.282525588538995
```