FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

MECANICA DE SOLIDOS

IV Tarea

Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano.

Esfuerzos y direcciones principales

Docente: Diego Andrés Álvarez Marín

Pablo César Teixeira Hoyos. ***pcteixeirah@unal.edu.co***

CC. 1125348583

---

4) 2.7 y 2.8

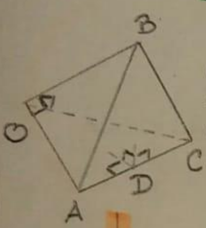
* Estudiar los videos adjuntos.

* Estudiar y subir a esta plataforma los apuntes de los videos y de la lectura de las secciones 2.7 y 2.8 del main.pdf (excepto sección 2.8.3)

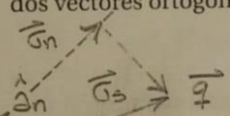
* Descargar MAXIMA y ejecutar los ejercicios que están en el libro

---

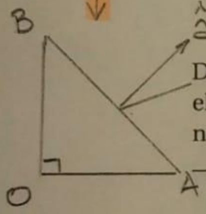
2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano



Consideremos el elemento triangular mostrado en la Figura 2.10. Por facilidad en la representación gráfica se ha dibujado el caso bidimensional, pero las deducciones siguientes se harán para el caso tridimensional (de este modo, el caso mostrado es análogo a la Figura 2.6b); según lo explicado en la Sección 2.1, el esfuerzo $\boldsymbol{q}$ que actúa sobre la cara $\overline{AB}$[14] es básicamente un vector que puede descomponerse en dos vectores ortogonales $\boldsymbol{\sigma}_n$ y $\boldsymbol{\sigma}_s$ que cumplen la ecuación (2.2):



$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_s.$$



De un lado, el vector $\boldsymbol{\sigma}_n$ representa la componente del esfuerzo normal ejercido por el vector $\boldsymbol{q}$; este vector es básicamente la proyección del vector $\boldsymbol{q}$ sobre el vector normal unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$, es decir, $\boldsymbol{\sigma}_n = \operatorname{Proy} \boldsymbol{q} / \hat{\boldsymbol{n}}$ (ver Apéndice A.23.3, para un repaso sobre

[14] Considere $\overline{AB}$ como parte de la región rectangular ΔA mostrada en la Figura 2.1.

* Donde $\hat{a}_n$ es el vector unitario en la dirección normal a la recta AB

* Los tensores de esfuerzos $(\vec{q})$ se calculan a partir de la ecuación matricial de Cauchy

$\sum F_x = 0$

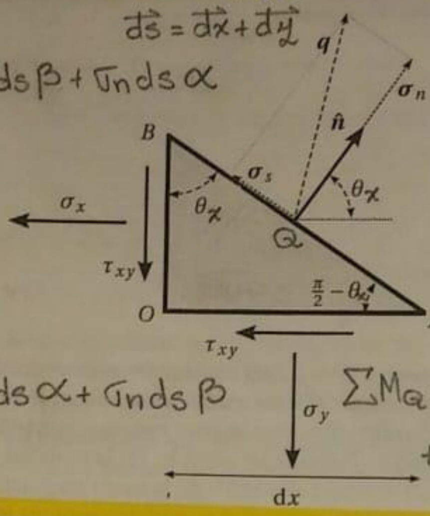
$\sum F_x = -\sigma_x dy - \tau_{xy} dx - \sigma_s ds\,\beta + \sigma_n ds\,\alpha$

→ "Llamamos Q al punto en el que se aplica la fuerza $\vec{q}$"

$\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy}$

$\sum M_Q = 0$

* $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_n, \sigma_s$ no generan momentos con respecto a Q en tanto que sus líneas de fuerza convergen en dicho punto



$\sum F_y = 0$

$\sum F_y = -\sigma_y dx - \tau_{xy} dy + \sigma_s ds\,\alpha + \sigma_n ds\,\beta$

$\sum M_Q = (-\frac{1}{2} dx\,\hat{a}_x) \times (-\tau_{xy} dy\,\hat{a}_y) + (-\frac{1}{2} dy\,\hat{a}_y) \times (-\tau_{xy} dx\,\hat{a}_x)$

Figura 2.10: *El esfuerzo $\boldsymbol{q}$ se puede descomponer en dos vectores ortogonales, un esfuerzo normal $\boldsymbol{\sigma}_n$ que es colineal con el vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ y un esfuerzo cortante $\boldsymbol{\sigma}_s$ que yace en el plano $\overline{AB}$; de este modo, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_s$. Por simplicidad en la representación gráfica, aquí se dibuja el caso bidimensional. Observe que la inclinación del plano está descrita por su vector normal $\hat{\boldsymbol{n}}$, el cual tiene una inclinación θ con respecto al eje x.*

$\alpha = \cos(\theta_x)$

$\beta = \cos(\theta_y)$

$\gamma = \cos(\theta_z)$

la proyección de vectores),

$\vec{q} = (\sigma_x + \tau_{xy})\,\hat{a}_x + (\sigma_y + \tau_{xy})\,\hat{a}_y$ "Vector de esfuerzos en el corte"

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n = \text{Proy}\,\boldsymbol{q}/\hat{\boldsymbol{n}} &= \frac{\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{\|\hat{\boldsymbol{n}}\|^2}\hat{\boldsymbol{n}} \quad \text{(de acuerdo con la ecuación (A.8))}\\ &= (\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\hat{\boldsymbol{n}}\\ &= \underbrace{((\underline{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}_{\sigma_n}\hat{\boldsymbol{n}};\end{aligned} \tag{2.23}$$

$\hat{a}_n = \alpha\,\hat{a}_x + \beta\,\hat{a}_y + \gamma\,\hat{a}_z$ * "Para el caso tridimensional"

de donde se deduce que el vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ se estira (o contrae) $\sigma_n = \boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = (\underline{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ veces, ya que $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector unitario[15]; en consecuencia, tenemos que $|\sigma_n|$ (sin negrilla) es la norma del vector $\boldsymbol{\sigma}_n$ (con negrilla):

$$|\sigma_n| = \|\boldsymbol{\sigma}_n\| = |\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|;$$

particularizando la anterior ecuación al caso tridimensional, tenemos que:

$\sigma_n = \vec{q}\cdot\hat{a}_n$

$$\sigma_n = \sigma_x\alpha^2 + \sigma_y\beta^2 + \sigma_z\gamma^2 + 2\tau_{xz}\alpha\gamma + 2\tau_{yz}\beta\gamma + 2\tau_{xy}\alpha\beta. \tag{2.24}$$

[15] En este punto es importante advertir al lector sobre la convención utilizada en el libro: los vectores se escriben con negrilla y letras minúsculas, las matrices se escriben con negrilla y letras mayúsculas y los escalares con letras (latinas o griegas) sin negrilla. Por esta razón, σ_n (sin negrilla) representa un escalar y $\boldsymbol{\sigma}_n$ (con negrilla) representa un vector; de otro lado, $\boldsymbol{M}$ (con negrilla) representa una matriz.

$\vec{q} = (\sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{xz})\,\hat{a}_x + (\sigma_y + \tau_{xy} + \tau_{yz})\,\hat{a}_y + (\sigma_z + \tau_{xz} + \tau_{yz})\,\hat{a}_z$

* Para el caso tridimensional, con esta expresión se calcula la ecuación (2.24), reemplazando en $\sigma_n = \vec{q}\cdot\hat{a}_n$

De otro lado, el esfuerzo tangencial está dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_s &= \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\sigma}_n \\ &= \underline{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}} - \sigma_n \hat{\boldsymbol{n}} \\ &= (\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{n}}\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad; la norma de $\boldsymbol{\sigma}_s$, denotada por $|\tau_n| := \|\boldsymbol{\sigma}_s\|$, se calcula teniendo en cuenta que aplicando el teorema de Pitágoras sobre las proyecciones de $\boldsymbol{q}$ en la Figura 2.10, resulta $\|\boldsymbol{q}\|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$ y, por lo tanto,

$$|\tau_n| = \sqrt{(\sigma_x\alpha+\tau_{xy}\beta+\tau_{xz}\gamma)^2+(\tau_{xy}\alpha+\sigma_y\beta+\tau_{yz}\gamma)^2+(\tau_{xz}\alpha+\tau_{yz}\beta+\sigma_z\gamma)^2-\sigma_n^2}. \tag{2.26}$$

$\therefore q^2$

I

Estas operaciones se pueden verificar en MAXIMA con el código:

```
1  load ("eigen"); /* carga la libreria "eigen" */
2
3  sigma: matrix(
4    [sx, txy, txz],
5    [txy, sy, tyz],
6    [txz, tyz, sz]
7  );
8
9  ng: columnvector([alpha, beta, gamma]); /* defino vector columna */
10
11 q: sigma.ng;
12
13 sigman: expand(transpose(q).ng); /* esto es el producto punto entre q y ng */
14
15 taun2: transpose(q).q - sigman^2;
```

$\Rightarrow (\Sigma)$

* Por convención (personal) denotamos la matriz sigma con el caracter en mayúscula y entre paréntesis

(Ecuación matricial de Cauchy)

$(\sigma_n = \vec{q} \cdot \hat{a}_n)$

$(\tau_n^2 = \sigma_s^2 = q^2 - \sigma_n^2)$

Aquí la línea 1 carga la librería de MAXIMA `"eigen"` la cual define a la función `columnvector`; las líneas 3 y 9 definen respectivamente la matriz de tensiones $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ y el vector columna $\hat{\boldsymbol{n}}$; en particular en la línea 9 se llamaron a las letras α, β y γ respectivamente como `alpha`, `beta` y `gamma`. Luego en las líneas 11, 13 y 15 se calculan respectivamente las ecuaciones (2.5), (2.24) y (2.26); tenga en cuenta que el producto punto entre los vectores $\boldsymbol{q}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}$ se está calculando como $\boldsymbol{q}^T\hat{\boldsymbol{n}}$. Note que en MAXIMA, el operador punto (.) se utiliza para indicar la multiplicación de matrices por vectores.

Observe que la ecuación (2.26) no nos informa sobre el signo del esfuerzo cortante; sin embargo, esto no debe preocuparnos, puesto que en las aplicaciones prácticas, si bien es importante conocer la dirección en la cual se ejerce el esfuerzo cortante, es de poco interés conocer su sentido. De todas formas, el sentido del esfuerzo cortante lo podremos determinar fácilmente utilizando la formulación que veremos posteriormente en este capítulo.

En el caso bidimensional, los esfuerzos normales y cortantes están dados respectivamente por las ecuaciones (2.20) y (2.21), ya que con la rotación, el esfuerzo $\sigma_{x'}$

* Nótese que usamos $\vec{q}^T$ para asegurar que el producto matricial pueda aplicarse, ya que $\vec{q}$ es un vector columna. Y como sabemos, el producto de columna por fila no esta definido *

$\therefore \sigma_n = \vec{q}^T \cdot \hat{a}_n = \hat{a}_n^T (\Sigma)\, \hat{a}_n$

(%i2)
```
load ("eigen"); /**Cargamos la librería "eigen" */
sigma: matrix (
    [sx, txy, txz],
    [txy, sy, tyz],
    [txz, tyz, sz]
);
```

(%o1) C:/maxima-5.44.0/share/maxima/5.44.0/share/matrix/eigen.mac

(%o2) $$\begin{pmatrix} sx & txy & txz \\ txy & sy & tyz \\ txz & tyz & sz \end{pmatrix}$$

(%i14)
```
/**Definimos el vector de cosenos directores
 * y la ecuación matricial de Cauchy
*/
ng: columnvector(
    [α, β, γ]
);
q: sigma.ng;
```

(%o13) $$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

(%o14) $$\begin{pmatrix} txz\,\gamma + txy\,\beta + sx\,\alpha \\ tyz\,\gamma + sy\,\beta + txy\,\alpha \\ sz\,\gamma + tyz\,\beta + txz\,\alpha \end{pmatrix}$$

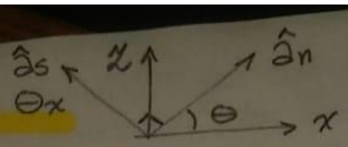
(%i10)
```
/**Obtenemos una expresión para el esfuerzo
 * normal principal
*/
sigman: expand(
    transpose(q).ng
);
```

(%o10) $$sz\,\gamma^2 + 2\,tyz\,\beta\,\gamma + 2\,txz\,\alpha\,\gamma + sy\,\beta^2 + 2\,txy\,\alpha\,\beta + sx\,\alpha^2$$

(%i9)
```
/**Obtenemos una expresión para el cuadrado del
 * esfuerzo cortante principal
*/
taun2: transpose(q).q - sigman^2;
```

(%o9) $$-(sz\,\gamma^2 + 2\,tyz\,\beta\,\gamma + 2\,txz\,\alpha\,\gamma + sy\,\beta^2 + 2\,txy\,\alpha\,\beta + sx\,\alpha^2)^2 +$$
$$(tyz\,\gamma + sy\,\beta + txy\,\alpha)^2 + (txz\,\gamma + txy\,\beta + sx\,\alpha)^2 + (sz\,\gamma + tyz\,\beta + txz\,\alpha)^2$$

* Para 2D, siendo $\Theta = \Theta x$



$$\hat{a}_n = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_s = \begin{bmatrix} -\sin(\Theta) \\ \cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

se convierte en el esfuerzo normal σ_n y el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ se convierte en el esfuerzo cortante τ_n y, en consecuencia[16],

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta & (2.27)\\ &=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta & (2.28)\\ \tau_n(\theta) &= \tau_{xy}\cos 2\theta-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta. & (2.29)\end{aligned}}$$

Las tres ecuaciones anteriores se pueden relacionar respectivamente con las ecuaciones (2.24) y (2.26) al tener en cuenta que el elemento se encuentra en el plano xy, por lo que debemos hacer $\gamma = 0$ (ya que el ángulo entre el vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ y el eje z es $90°$, por lo que $\gamma = \cos 90° = 0$) y haciendo $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Dicha comparación se deja como ejercicio al lector.

Finalmente, es conveniente enfatizar que tanto σ_n como τ_n son cantidades escalares que no tienen sentido alguno a menos que se especifique correctamente el plano al cual están asociados, ya sea mediante los cosenos directores α, β y γ en el caso tridimensional o simplemente mediante el ángulo θ en el caso bidimensional.

2.8. Esfuerzos y direcciones principales

Si cambiamos la orientación del plano inclinado $\overline{AB}$ mostrado en la Figura 2.10, el vector unitario normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ cambiará junto con los vectores de esfuerzo normal $\boldsymbol{\sigma}_n$ y tangencial $\boldsymbol{\sigma}_s$ (recuerde que según lo visto en la Sección 2.1, la definición de esfuerzo siempre está asociada a un plano).

En esta sección nos preguntaremos si es posible encontrar la dirección de la normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ para la cual el esfuerzo cortante $\boldsymbol{\sigma}_s$ es cero; alternativamente, nos podemos preguntar si es posible encontrar una dirección de la normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ de tal modo que el esfuerzo $\boldsymbol{q}$ sea igual a $\boldsymbol{\sigma}_n$. Dicha dirección se conoce como la *dirección principal*, su magnitud se llama el *esfuerzo principal* y la superficie donde actúa, el *plano* o *superficie principal*.

La solución está dada al encontrar un plano cuya normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ sea colineal con el vector de esfuerzos $\boldsymbol{q}$, esto es:

- Vectores propios de (Σ)
- Direcciones principales

$$\boxed{\underbrace{\underline{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\sigma_n\hat{\boldsymbol{n}}}_{\boldsymbol{\sigma}_n};} \qquad (2.30)$$

- Valores propios de (Σ)
- Esfuerzos principales

[16]Tenga en cuenta las identidades trigonométricas que aparecen en el Apéndice A.1.

alternativamente, se puede hacer $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{0}$ en (2.25), obteniendo el sistema homogéneo[17] de ecuaciones lineales

$$(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \boldsymbol{I})\,\hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}, \tag{2.31}$$

el cual se puede escribir en notación tensorial como

$$(\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij})\hat{n}_j = 0$$

donde δ_{ij} denota la función *Kronecker delta.* $\Longrightarrow$ $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \right)$

En este caso σ_n, junto con las componentes del vector $\hat{\boldsymbol{n}} = [\alpha,\ \beta,\ \gamma]^T$ son nuestras incógnitas. Tenemos pues el sistema de tres ecuaciones (2.31), el cual está escrito en términos de cuatro incógnitas $(\sigma_n,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Una cuarta ecuación tiene en cuenta el hecho de que $\|\hat{\boldsymbol{n}}\| = 1$, es decir,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{2.32}$$

Observe que la solución trivial a (2.31), $\hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$ no satisface la cuarta condición y, por lo tanto, no es aceptable. La solución a este problema requiere entonces el cálculo de los *valores y vectores propios* de la matriz de tensiones $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ (ver Apéndice A.23.1). A continuación, demostraremos que los valores propios corresponderán a los esfuerzos o tensiones principales y los respectivos vectores propios se asociarán a las direcciones principales.

Sabemos que la solución a un sistema homogéneo de ecuaciones lineales existe si y solo si el determinante de la matriz formada a partir de los coeficientes de las incógnitas es cero. Por lo tanto, se requiere que

$$\boxed{\det(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \boldsymbol{I}) = 0.} \tag{2.33}$$

A continuación, resolveremos el problema de valores y vectores propios para el caso bi- y tridimensional.

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

En dos dimensiones[18], suponiendo que el elemento se encuentra en el plano xy, la matriz de tensiones está dada por (ver ecuación (2.3)),

$$\Sigma = \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

[17] Se dice que un sistema lineal de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es homogéneo si $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Por álgebra lineal se sabe que el sistema tiene una solución de $\boldsymbol{x}$ diferente de cero si y solo si $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

[18] Siendo estrictos, el análisis aquí presentado solo es completo para un sólido en estado de tensión plana (veremos este concepto en la Sección 4.7.1). En el caso de un sólido en deformación plana (veremos este concepto en la Sección 4.7.2), debemos hacer algunos pasos adicionales que detallaremos en la Sección 4.7.3.

Reemplazando esta matriz en (2.33) tenemos:

$$\det(\underline{\sigma} - \sigma_n I) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \end{vmatrix}$$
$$= (\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n) - \tau_{xy}^2$$
$$= \underbrace{\sigma_n^2}_{a\sigma_n^2} \underbrace{- (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n}_{+b\sigma_n} \underbrace{+ \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2}_{+c} = 0 \tag{2.35}$$

Observe que (2.35) es un polinomio de segundo grado llamado el *polinomio característico* (*characteristic polynomial* en inglés) de la matriz $\underline{\sigma}$ bidimensional. Las raíces de esta ecuación son los valores propios de $\underline{\sigma}$, es decir, los *esfuerzos principales*. El polinomio (2.35), se asemeja al polinomio de segundo grado:

$$a\sigma_n^2 + b\sigma_n + c = 0 \tag{2.36}$$

siendo en este caso,

$$a = 1 \qquad b = -(\sigma_x + \sigma_y) \qquad c = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2. \tag{2.37}$$

Las raíces de la ecuación polinómica de segundo grado (2.36), están dadas por

Esfuerzos principales asociados a la condición de esfuerzo (Σ)

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (\sigma_2)_{xy} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.38}$$

y reemplazando los términos (2.37) en (2.38) tenemos:

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.39a}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \tag{2.39b}$$

observe que el discriminante $b^2 - 4ac$ es siempre positivo, por lo que las raíces $(\sigma_1)_{xy}$ y $(\sigma_2)_{xy}$ son números reales, cumpliéndose la desigualdad $(\sigma_1)_{xy} \geq (\sigma_2)_{xy}$.

Se mencionó anteriormente que los vectores propios relacionados a los valores propios (2.39) se asocian a las *direcciones principales*, estos definen las direcciones en las que los esfuerzos principales actúan, de la manera como se muestra en la Figura 2.11. Las direcciones principales correspondientes al esfuerzo principal $(\sigma_1)_{xy}$ se obtienen resolviendo la igualdad (2.30) y reemplazando σ_n con $(\sigma_1)_{xy}$. Se puede demostrar (se ruega al lector hacerlo como ejercicio) que las dos ecuaciones obtenidas aquí son linealmente dependientes y, en consecuencia, se debe escoger una de ellas y se debe utilizar adicionalmente la igualdad $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$; este sistema de tres ecuaciones ayudaría a encontrar el vector unitario del esfuerzo principal mayor. Se

→ Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales procede análogamente para encontrar el vector unitario asociado al esfuerzo principal menor $(\sigma_2)_{xy}$; este se obtiene reemplazando en la igualdad (2.30) el valor σ_n por $(\sigma_2)_{xy}$.

En conclusión, los vectores asociados a las direcciones principales se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\sigma_x-(\sigma_1)_{xy})\,\alpha_1+\tau_{xy}\beta_1=0 \\ \tau_{xy}\alpha_1+(\sigma_y-(\sigma_1)_{xy})\,\beta_1=0 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} (\sigma_x-(\sigma_2)_{xy})\,\alpha_2+\tau_{xy}\beta_2=0 \\ \tau_{xy}\alpha_2+(\sigma_y-(\sigma_2)_{xy})\,\beta_2=0 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2=1 \end{cases} \tag{2.40}$$

de este modo, la dirección principal correspondiente a $(\sigma_1)_{xy}$ estará dada por $\hat{n}_1:=[\alpha_1,\beta_1]^T$ y análogamente la dirección principal correspondiente a $(\sigma_2)_{xy}$ es $\hat{n}_2:=[\alpha_2,\beta_2]^T$. Observe que tenemos dos sistemas de ecuaciones cada uno con tres ecuaciones, pero únicamente dos incógnitas; como se dijo anteriormente, es posible verificar que dichas ecuaciones son linealmente dependientes, por lo que en cada sistema de ecuaciones solo se necesita utilizar dos de ellas.

Las direcciones principales $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ indican básicamente la inclinación del plano $\overline{AB}$ de la Figura 2.10, que elimina la componente de cortante σ_s de dicha cara. Para tal fin debemos reemplazar los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} por $(\sigma_1)_{xy}$ y $(\sigma_2)_{xy}$ aplicados en las direcciones $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ (ver Figura 2.11).

Finalmente, cabe anotar que en la Sección 2.8.4 demostraremos que los vectores propios $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son ortogonales.

II

Ejemplo

Considere un punto de un sólido bidimensional en el cual los esfuerzos en un punto dado son: $\sigma_x=3$ Pa, $\sigma_y=2$ Pa, y $\tau_{xy}=-4$ Pa. Se pide:

- Plantear la matriz de tensiones $\underline{\sigma}$ correspondiente.
- Calcular el polinomio característico asociado a $\underline{\sigma}$.
- Calcular la dirección y magnitud de los esfuerzos principales.

Reemplazando los valores especificados en (2.34) obtenemos la matriz de tensiones pedida:

$$\underline{\sigma}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

El polinomio característico de esta matriz se obtiene fácilmente reemplazando σ_x,

El problema de hallar los valores y vectores propios de una matriz es muy sencillo de abordar con funciones preestablecidas en las librerías de cualquier programa. Pero por fines pedagógicos lo resolveremos procedimentalmente en PYTHON.

```python
import numpy as np
'''
Considere un punto de un sólido bidimensional en el cual los esfuerzos
en un punto dado son: sigma_x, sigma_y, tao_xy
   1--Plantear la matriz de tensiones sigma_matrix correspondiente
   2--Calcular el polinomio característico asociado a sigma_matrix
   3--Calcular la dirección y magnitud de los esfuerzos principales
'''
sigma_x = 3
sigma_y = 2
tao_xy = -4

#Definimos la matriz de tensiones sigma_matrix
sigma_matrix = np.zeros((2,2))
sigma_matrix[0,0] = sigma_x
sigma_matrix[0,1] = tao_xy
sigma_matrix[1,0] = tao_xy
sigma_matrix[1,1] = sigma_y

#Definimos los coeficientes del polinomio característico
# asociado a sigma_matrix
# a*sigma_n**2+b*sigma_n+c = 0
a = 1
b = -(sigma_x+sigma_y)
c = sigma_x*sigma_y-tao_xy**2

#Definimos las raíces del polinomio en sigma_n
sigma_1 = (-b+np.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
sigma_2 = (-b-np.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
sigma_max = np.max([sigma_1, sigma_2])
sigma_min = np.min([sigma_1, sigma_2])
#Resolvemos el sistema de ecuaciones 2.40 a fin de obtener los
# vectores asociados a las direcciones principales
# ===========================================================================
# #Esfuerzo principal mayor
# ===========================================================================
alpha1_coef = (sigma_x-sigma_max)
beta1_coef = tao_xy
#Resolvemos para beta1 = 1
beta1 = 1
alpha1 = -beta1_coef/alpha1_coef
n1 = np.transpose([alpha1, beta1])
#Normalizamos para obtener el vector propio
n1_eugenvect = np.divide(n1, np.linalg.norm(n1))
# ===========================================================================
# #Esfuerzo principal menor
# ===========================================================================
alpha2_coef = (sigma_x-sigma_min)
beta2_coef = tao_xy
#Resolvemos para beta2 = 1
beta2 = 1
alpha2 = -beta2_coef/alpha2_coef
n2 = np.transpose([alpha2, beta2])
#Normalizamos para obtener el vector propio
n2_eugenvect = np.divide(n2, np.linalg.norm(n2))

# ===========================================================================
# RESULTADOS
# ===========================================================================
eugenval = np.zeros((2,2))
eugenval[0,0] = sigma_min
eugenval[1,1] = sigma_max

eugenvect = np.transpose(np.mat([n2_eugenvect, n1_eugenvect]))

print("Esfuerzos principales: \n", eugenval," [Pa]")
print("Direcciones principales: \n", eugenvect)
```

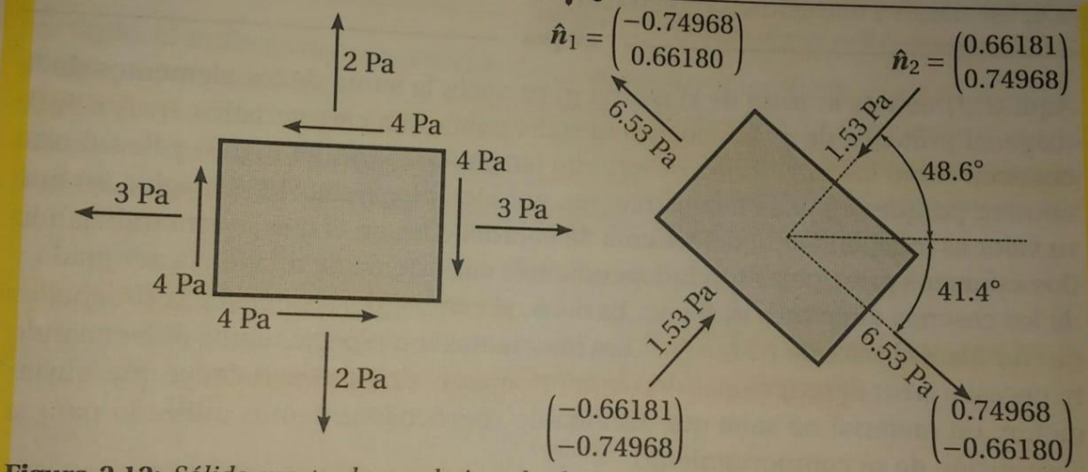


Figura 2.12: *Sólido mostrado en el ejemplo de la página 38; los esfuerzos principales correspondientes a $\sigma_x = 3$ Pa, $\sigma_y = 2$ Pa, y $\tau_{xy} = -4$ Pa son $(\sigma_1)_{xy} = 6.53$ Pa y $(\sigma_2)_{xy} = -1.53$ Pa, los cuales están aplicados en las direcciones $\hat{n}_1 = [-0.74968, 0.66180]^T$ y $\hat{n}_2 = [0.66181, 0.74968]^T$. Los ángulos 41.4° y 48.6° se calculan respectivamente como los arcocosenos de 0.74968 y 0.66181.*

```
In [2]: runfile('C:/Users/Pablo Teixeira/Documents/Civil Pro/SOLID_MECHANICS/Homework/TALLER_4/Tensiones_direcciones_principales_2D.py', wdir='C:/Users/Pablo Teixeira/Documents/Civil Pro/SOLID_MECHANICS/Homework/TALLER_4')
Esfuerzos principales:
 [[-1.53112887  0.        ]
 [ 0.          6.53112887]]  [Pa]
Direcciones principales:
 [[ 0.66180256 -0.74967818]
 [ 0.74967818  0.66180256]]
```

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

Eq. 2.33

En el caso tridimensional, la matriz de tensiones $\underline{\sigma}$ está dada por (ver ecuación (2.5))

$$\Sigma = \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}; \qquad (2.42)$$

$\det(\Sigma - \sigma_n I) = 0$

si la reemplazamos en (2.33) tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{pmatrix} = 0$$

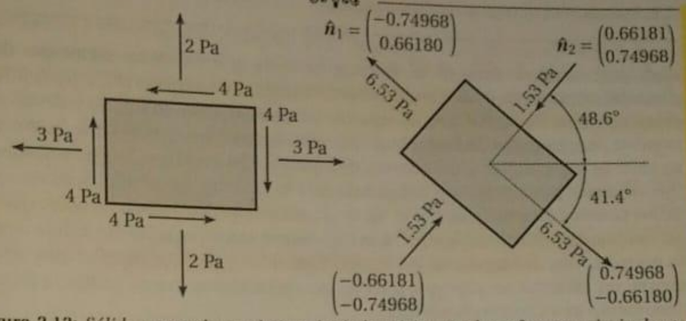


Figura 2.12: *Sólido mostrado en el ejemplo de la página 38; los esfuerzos principales correspondientes a $\sigma_x = 3$ Pa, $\sigma_y = 2$ Pa, y $\tau_{xy} = -4$ Pa son $(\sigma_1)_{xy} = 6.53$ Pa y $(\sigma_2)_{xy} = -1.53$ Pa, los cuales están aplicados en las direcciones $\hat{n}_1 = [-0.74968, 0.66180]^T$ y $\hat{n}_2 = [0.66181, 0.74968]^T$. Los ángulos 41.4° y 48.6° se calculan respectivamente como los arcocosenos de 0.74968 y 0.66181.*

que se puede escribir en notación tensorial como

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}) = 0;$$

* Delta de Kronecker

expandiendo el determinante anterior obtenemos

$$(\sigma_x - \sigma_n)\left[(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2\right] - \tau_{xy}\left[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}\right] + \tau_{xz}\left[\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}\right] = 0;$$

al agrupar y reducir términos llegamos al *polinomio característico* o *ecuación característica* de la matriz de tensiones $\underline{\sigma}$ tridimensional:[20]

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0 \qquad (2.43)$$

$a=-1$, $b=I_1$, $c=-I_2$, $d=I_3$

$ax^3+bx^2+cx+d = 0$

donde,

Identificamos los coeficientes con ecuaciones matriciales que podemos resolver en Maxima

$$\Theta := I_1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) \qquad (2.44a)$$

$$I_2 := \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(\underline{\sigma}))^2 - \operatorname{tr}(\underline{\sigma}^2)\right) \qquad (2.44b)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xz}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix}\sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\right)$$

$$I_3 := \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \det(\underline{\sigma}). \qquad (2.44c)$$

[20] El lector se preguntará por qué esa convención de signos tan extraña en la ecuación (2.43); la razón de dicha convención subyace tras el hecho de que esta es la forma usual empleada en muchos textos sobre la teoría de la plasticidad para definir los invariantes de esfuerzo; de este modo, algunas "ecuaciones propias de dicha teoría queden escritas de una forma más natural."

→ En particular, se refiere al esfuerzo de fluencia de von Mises:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3 I_2}$$

Aquí tr($\underline{\underline{\sigma}}$) denota la *traza* de la matriz $\underline{\underline{\sigma}}$, es decir, la suma de los elementos de la diagonal principal de $\underline{\underline{\sigma}}$. Los coeficientes del polinomio característico I_1, I_2 e I_3 se conocen como los *invariantes de esfuerzo* (*stress invariants* en inglés) y llevan este nombre porque se puede demostrar (ver, por ejemplo, Wang (1953, página 9)) que su valor es independiente del sistema de coordenadas en el que se está trabajando (los esfuerzos principales son independientes del sistema de referencia adoptado y de los cosenos directores α, β y γ). Es decir, el cambio del sistema de coordenadas no cambiará el valor de I_1, I_2 e I_3.[21] Los invariantes son especialmente útiles cuando se necesita crear descripciones del comportamiento de los materiales ya que, obviamente, un material no sabe que sistema de coordenadas hemos utilizado para la descripción de su comportamiento.

Las expresiones (2.44) para los invariantes de esfuerzo se pueden obtener en MAXIMA utilizando el siguiente código:

```
sigma: matrix(
[sx,  txy, txz],
[txy, sy,  tyz],
[txz, tyz, sz ]
);

/* se calcula el polinomio caracteristico y se expresa como funcion de sn */
polinomcar: expand(charpoly(sigma, sn));

/* se extraen los coeficientes del polinomio caracteristico, es decir, se
extraen los invariantes de esfuerzo */
I0:  coeff(polinomcar, sn, 3); /* imprime -1 */
I1:  coeff(polinomcar, sn, 2);
I2: -coeff(polinomcar, sn, 1);
I3:  coeff(polinomcar, sn, 0);

/* se verifican las igualdades (2.44), por lo que cada linea debe imprimir */
/* cero. Aqui, el comando mat_trace(M) calcula la traza de la matriz M */
factor(I1 - mat_trace(sigma));
factor(I2 - (mat_trace(sigma)^2 - mat_trace(sigma.sigma))/2);
factor(I3 - determinant(sigma));
```

En el código anterior se usaron los comandos `factor()` que factoriza expresiones algebraicas, `determinant(A)` que calcula el determinante de una matriz cuadrada A y el comando `mat_trace(M)` que calcula la traza de una matriz cuadrada M; adicionalmente, se ha utilizado el comando `charpoly(sigma, sn)` para calcular el polinomio característico de la matriz $\underline{\underline{\sigma}}$ y escribirlo en función de la variable `sn`, es decir, σ_n (por

[21] En términos más generales, consideremos las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{P}$ las cuales son de tamaño $n \times n$. En álgebra lineal, se dice que las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son *semejantes* si existe una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. Es posible demostrar matemáticamente que las matrices semejantes tienen el mismo determinante, polinomio característico y valores propios (aunque los vectores propios, en general, serán distintos). Dado que $\boldsymbol{T}$ es una matriz ortogonal y por lo tanto invertible, se tiene por virtud de la ecuación (2.16) que $\underline{\underline{\sigma}}'$ y $\underline{\underline{\sigma}}$ son matrices semejantes.

→ Cambio coordenadas de la matriz (Σ):

$$\Sigma' = T^T(\Sigma)T$$

ejemplo, el polinomio característico de `A : matrix([2, -1],[-1, 3]);` es $x^2 - 5x + 5$, por lo tanto, `pol : expand(charpoly(A, y));` imprimiría en MAXIMA $y^2 - 5y + 5$); de otro lado, el comando **coeff** se utiliza para extraer los coeficientes de un polinomio; por ejemplo, continuando con el resultado anterior, `coeff(pol, y, 2);` extrae el coeficiente que acompaña a y^2, es decir, 1 y `coeff(pol, y, 1);` imprimiría -5; en otras palabras:

```
(%i1) A : matrix([2, -1],[-1, 3]);
(%o1)                                  [  2   - 1 ]
                                       [          ]
                                       [ - 1   3  ]
(%i2) pol : expand(charpoly(A, y));
                                        2
(%o2)                                  y  - 5 y + 5
(%i3) coeff(pol, y, 2);
(%o3)                                     1
(%i4) coeff(pol, y, 1);
(%o4)                                   - 5
(%i5) coeff(pol, y, 0);
(%o5)                                     5
```

Las raíces del polinomio característico (2.43), que llamaremos σ_1, σ_2 y σ_3, son los *esfuerzos* o *tensiones principales* y representan los valores de σ_n que garantizan la existencia de un plano para el cual $\boldsymbol{\sigma_s} = \mathbf{0}$. Estos valores son números reales, los cuales se organizan, generalmente, de mayor a menor, es decir, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; como σ_1, σ_2 y σ_3 son las raíces del polinomio característico (2.43), tenemos que

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0.$$

Los vectores propios asociados a los valores propios determinan las direcciones principales. Estos valores no cambiarán al variar el sistema de coordenadas de referencia. Los vectores propios determinan los *planos principales* en los cuales el esfuerzo cortante $\boldsymbol{\sigma_s}$ es cero.

Si cambiamos el sistema de coordenadas de referencia de [1, 0, 0], [0, 1, 0] y [0, 0, 1] a uno cuyos ejes principales coinciden con los vectores $\hat{\boldsymbol{n}}_1$, $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_3$, respectivamente, entonces en este caso, la matriz de tensiones se reduciría a

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}};$$

aquí los términos de la diagonal principal son precisamente los valores propios de la matriz de tensión original (2.42). Como los invariantes de esfuerzo son independientes del sistema de coordenadas elegido, y dado que utilizando como base de sistema de coordenadas $\hat{\boldsymbol{n}}_1$, $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_3$ no tenemos esfuerzos cortantes, se pueden reexpresar

> La matriz de tensiones correspondiente a un plano bajo un estado de carga definido por el vector $\vec{q}$, tal que la dirección de este coincide con $\hat{a}_n$, está dada por la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de la matriz de Cauchy (Σ) del elemento.

(%i1)
```
sigma: matrix (
    [sx, txy, txz],
    [txy, sy, tyz],
    [txz, tyz, sz]
);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} sx & txy & txz \\ txy & sy & tyz \\ txz & tyz & sz \end{pmatrix}$

(%i2)
```
/**se calcula el polinomio característico y se
 * expresa como función de sn
*/
polinomcar: expand(
    charpoly(sigma, sn)
);
```

(%o2) $-sx\,tyz^2+sn\,tyz^2+2\,txy\,txz\,tyz-sy\,txz^2+sn\,txz^2-sz\,txy^2+sn\,txy^2+sx\,sy\,sz-sn\,sy\,sz-sn\,sx\,sz+sn^2\,sz-sn\,sx\,sy+sn^2\,sy+sn^2\,sx-sn^3$

(%i6)
```
/**se extraen los coeficientes del polinomio característico,
 * es decir, se extraen los invariantes de esfuerzo
 */
a: coeff(polinomcar, sn, 3); /**igual a (-1) */
b: coeff(polinomcar, sn, 2);
c: coeff(polinomcar, sn, 1);
d: coeff(polinomcar, sn, 0);
```

(%o3) -1

(%o4) $sz+sy+sx$

(%o5) $tyz^2+txz^2+txy^2-sy\,sz-sx\,sz-sx\,sy$

(%o6) $-sx\,tyz^2+2\,txy\,txz\,tyz-sy\,txz^2-sz\,txy^2+sx\,sy\,sz$

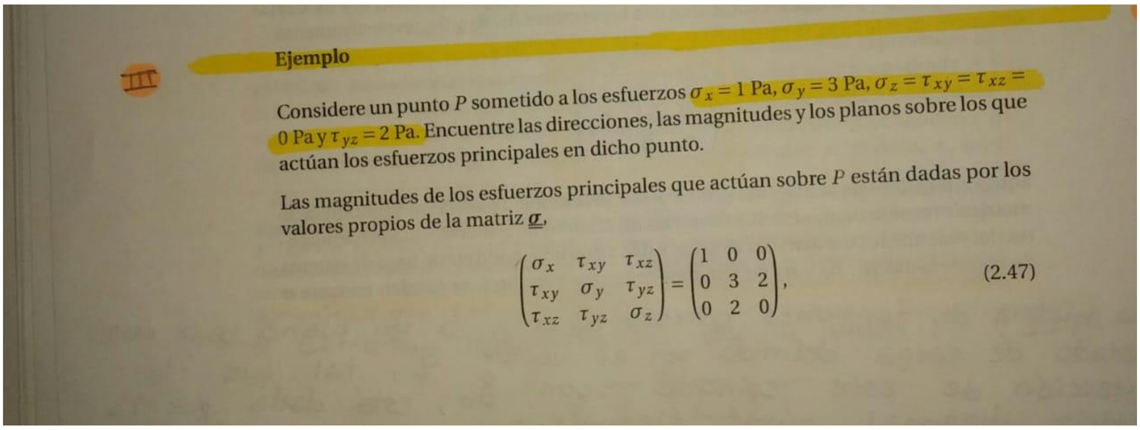
(%i9)
```
/**reescribimos las líneas de código anteriores de una
 * manera más acorde con la documentación
*/
I1: coeff(polinomcar, sn, 2);
I2: -coeff(polinomcar, sn, 1);
I3: coeff(polinomcar, sn, 0);
```

(%o7) $sz+sy+sx$

(%o8) $-tyz^2-txz^2-txy^2+sy\,sz+sx\,sz+sx\,sy$

(%o9) $-sx\,tyz^2+2\,txy\,txz\,tyz-sy\,txz^2-sz\,txy^2+sx\,sy\,sz$

```
(%i12) /**se verifican las igualdades (2.44), por lo que cada línea
        * debe imprimir cero (0). Aquí, el comando mat_trace(M)
        * calcula la traza de la matriz M
        */
       factor(
           I1 - mat_trace(sigma)
       );
       factor(
           I2 - (mat_trace(sigma)^2 - mat_trace(sigma.sigma))/2
       );
       factor(
           I3 - determinant(sigma)
       );
(%o10) 0
(%o11) 0
(%o12) 0
```



III

Ejemplo

Considere un punto P sometido a los esfuerzos $\sigma_x = 1$ Pa, $\sigma_y = 3$ Pa, $\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ Pa y $\tau_{yz} = 2$ Pa. Encuentre las direcciones, las magnitudes y los planos sobre los que actúan los esfuerzos principales en dicho punto.

Las magnitudes de los esfuerzos principales que actúan sobre P están dadas por los valores propios de la matriz $\underline{\underline{\sigma}}$,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

Al igual que en el ejemplo de tensiones principales para el caso bidimensional, buscaremos generalizar el problema escribiendo el algoritmo para su solución en un programa de Python. Si bien para el caso tridimensional el abordaje no será procedimental como en el 2D, sino que el código estará orientado a la programación, haciendo uso de funciones y otros métodos cuyo propósito es optimizar el código y hacerlo reusable, en tanto el problema está generalizado.

```python
import numpy as np
'''
Considere un punto P sometido a los esfuerzos: sigma_x, sigma_y,
sigma_z, tao_xy, tao_xz, tao_yz
   ---> Encuentre las direcciones, las magnitudes y los planos
   sobre los que actúan los esfuerzos principales en dicho punto
'''
# ===========================================================================
def null(A, eps=1e-15):
    u, s, vh = np.linalg.svd(A)
    null_space = np.compress(s <= eps, vh, axis=0)
    return null_space.T
# ===========================================================================
def solution(U):
    #Find the eigenvalues and eigenvector of U(transpose).U
    e_vals, e_vecs = np.linalg.eig(np.dot(U.T, U))
    #Extract the eigenvector (column) associated with the
    # minimum eigenvalue
    return e_vecs[:, np.argmin(e_vals)]
# ===========================================================================
sigma_x = 1
sigma_y = 3
sigma_z = 0
tao_xy = 0
tao_xz = 0
tao_yz = 2
# ===========================================================================
#Definimos la matriz de tensiones sigma_matrix
sigma_matrix = np.zeros((3,3))
sigma_matrix[0,0] = sigma_x
sigma_matrix[0,1] = tao_xy
sigma_matrix[0,2] = tao_xz
sigma_matrix[1,0] = tao_xy
sigma_matrix[1,1] = sigma_y
sigma_matrix[1,2] = tao_yz
sigma_matrix[2,0] = tao_xz
sigma_matrix[2,1] = tao_yz
sigma_matrix[2,2] = sigma_z

#Definimos los coeficientes del polinomio característico
# asociado a sigma_matrix
# a*sigma_n**3+b*sigma_n**2+c*sigma_n+d = 0
char_poly = np.poly(sigma_matrix)

#Definimos las raíces del polinomio en sigma_n
poly_roots = np.roots(char_poly)
poly_roots = np.sort(poly_roots)[::-1] #Ordenamos de mayor a menor

#Resolvemos los sistemas de ecuaciones a fin de obtener los
# vectores asociados a las direcciones principales
# ===========================================================================
# #Esfuerzo principal sigma_1
# ===========================================================================
sigma_1 = poly_roots[0]
A1 = sigma_matrix
A1 = A1-sigma_1*np.identity(3)
result1 = solution(A1)
```

```python
# ==============================================================================
# #Esfuerzo principal sigma_2
# ==============================================================================
sigma_2 = poly_roots[1]
A2 = sigma_matrix
A2 = A2-sigma_2*np.identity(3)
result2 = null(A2).T
# ==============================================================================
# #Esfuerzo principal sigma_3
# ==============================================================================
sigma_3 = poly_roots[2]
A3 = sigma_matrix
A3 = A3-sigma_3*np.identity(3)
result3 = solution(A3)
# ==============================================================================
# RESULTADOS
# ==============================================================================
resulti = np.cross(result1, result2)
print('¿Conforman los vectores propios una base ortogonal?: ')
print(result3)
print(resulti)
print('¿Son iguales estos dos vectores?: ')
query=eval(input("---------(¿1/0?)--------->"))
if query>0:
    eugenval = np.identity(3)*poly_roots
    print("Esfuerzos principales: \n", eugenval," [Pa]")
    print("Direcciones principales: \n", result1, " (Principal mayor) \n",
          result2, "(Principal menor) \n", result3, "(Negativo) \n")
else:
    print('FATAL ERROR')
```

```
In [1]: runfile('C:/Users/Pablo Teixeira/Documents/Civil Pro/SOLID_MECHANICS/Homework/
TALLER_4/Tensiones_direcciones_principales_3D.py', wdir='C:/Users/Pablo Teixeira/
Documents/Civil Pro/SOLID_MECHANICS/Homework/TALLER_4')
¿Conforman los vectores propios una base ortogonal?:
[ 0.          0.4472136  -0.89442719]
[[ 0.          0.4472136  -0.89442719]]
¿Son iguales estos dos vectores?:

---------(¿1/0?)--------->1
Esfuerzos principales:
 [[ 4.  0. -0.]
 [ 0.  1. -0.]
 [ 0.  0. -1.]]  [Pa]
Direcciones principales:
 [0.         0.89442719 0.4472136 ]  (Principal mayor)
 [[1. 0. 0.]] (Principal menor)
 [ 0.          0.4472136  -0.89442719] (Negativo)
```