(6.1) F func. de distrib. / $dF(a,b) < \underbrace{dF(a,b]}_{F(b)-F(a)} < dF[a,b]$

$\cdot\, dF(a,b) = \lim_{n\to\infty} dF(a, b-\frac{b-a}{n+1}] = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$ (*)

$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a, b-\frac{b-a}{n+1}]}$ son crecientes

$dF(a, b-\frac{b-a}{n+1}] = F(b-\frac{b-a}{n+1}) - F(a)$, $\frac{b-a}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$dF[a,b] = \lim_{n\to\infty} dF\underbrace{(a-1/n, b]}_{\text{decrecen a } [a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n, b]} = F(b) - \lim_{x\to a^-} F(x)$ (**)

Podemos tomar $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } x\in[-1,1) \\ 2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

$\to \begin{cases} dF(-1,1) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1^-} F(x) - F(-1) = 1-1 = 0 \\ dF(-1,1] = F(1)-F(-1) = 2-1 = 1 \\ dF[-1,1] \overset{(**)}{=} F(1) - \lim_{x\to -1^-} = 2-0 = 2 \end{cases}$

(6.2) $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \mu = \text{med. de contar})$ $A\subset\mathbb{R}$. $\nu(B) = \mu(B\cap A)$ $\forall B\subset\mathbb{R}$

a) $A = \{1,2,3,4,\dots\} = \mathbb{N}$. ¿Es ν una medida de Lebesgue-Stieltjes?

Si tomamos $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lfloor x\rfloor & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $\quad \mu_F(-\infty,0) = 0$

Es fácil ver que $\begin{cases} \mu_F(n,n+1) = 0 = \lim_{x\to(n+1)^-} F(x) - F(n) = 0 & \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ \mu_F(\{n\}) = F(n) - \lim_{x\to n^-} F(x) = n-(n-1) = 1 & \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Por tanto, para cada $\underset{\mathcal{M}_F}{\hat{B}}\subset\mathbb{R}$, $B = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B\cap\{n\} \uplus \underbrace{B\cap(-\infty,0)}_{\text{mide } 0} \uplus \underbrace{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B\cap(n,n+1)}_{\text{mide } 0}$

$\Rightarrow \mu_F(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ si } n\in B \\ 1 \text{ si } n\notin B}}{\mu_F(B\cap\{n\})} = \nu(B)$

¿$\mathcal{M}_F = 2^{\mathbb{R}}$? Hay que ver que $B\subset\mathbb{R} \Rightarrow B\in\mathcal{M}_F$?

(b) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. ¿ $\exists$ medida Lebesgue-Stieltjes?

No: Si lo fuera, $F(x)$ función de distribución, por tanto continua por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$$

I.E. Sea $\varepsilon = 1$ $\exists \delta_1 > 0 /$

$$0 < x \leq \delta_1 \Rightarrow \underbrace{F(x) - F(0)}_{\geq 0} < 1$$

Es decir, $F(\delta_1) - F(0) < 1$

Es decir, "$\mu_F(0, \delta_1]$" < 1 ¡! $\mu_F(0, \delta_1] = \infty$

(6.3)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1] \\ 1+x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 2+x^2 & \text{si } x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$\{2\}$: $\mu_F(\{2\}) = F(2) - \lim_{x \to 2^-} F(x) = 9 - 6 = 3$

$[-1/2, 3)$: $\mu_F([-1/2, 3)) = \lim_{x \to 3^-} F(x) - \lim_{x \to -1/2^-} F(x) = 9 - \frac{1}{2} = 17/2$

$\underbrace{(-1, 0]}_{2-0=2} \cup \underbrace{(1, 2)}_{6-2=4} \xrightarrow{\mu_F} 6$

$[0, 1/2) \cup (1, 2] \xrightarrow{\mu_F} \frac{1}{4} + 1 + 9 - 2 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} = \underbrace{\{x > 0 \mid 2x^2 + x - 1 > 0\}}_{(1/2, \infty)} \uplus \underbrace{\{x < 0 / 2x^2 - x - 1 > 0\}}_{(-\infty, -1/2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$ $\begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$ $\begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$$\mu_F(A) = \lim_{x \to (-1/2)^-} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) + \lim_{x \to \infty} F(x) - F(1/2)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 9 - 2 - 1/4 = 7 + 1/4 = 29/4$$

(6.4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no neg. integrable Lebesgue sobre cada intervalo finito y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Probar $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ función de distribución de probabilidad y además F continua.

$(x>y)$ · $F(x)-F(y) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy - \int_{-\infty}^{y} f(z)\,dz = \int_{y}^{x} f(z)\,dz = \int (f\chi_{(x,y)})\,dm$

F cont.

Sea $\{x_n\} \to x$ una sucesión cualquiera que converge a x

~~Por~~ ,

Entonces ~~$F(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{(-\infty,x_n]}$~~ $|F(x_n)-F(x)| = \int \underbrace{f\chi_{(x,x_n]}}_{f_n}\,dm$

$|f_n| \le |f|$ y $\int |f| < \infty$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ctp

~~Dado~~ TCD: $\lim_{n\to\infty} |F(x_n)-F(x)| = \int 0\,dm = 0$

$\to F(x_n) \longrightarrow F(x)$ $(n\to\infty)$

F no decreciente porque $\int_{y}^{x} f(z)\,dz \ge \int_{y}^{x} 0\,dz = 0$ si $x>y$

$\Rightarrow F(x)-F(y) \ge 0$ si $x>y$

De probabilidad porque $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

~~Otra forma~~

Si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } x\in[0,1] \\ 0 & \text{en } x\notin[0,1] \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

(6.5) $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-kx} & \text{si } x\ge 0 \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$ $k\ge 0$ cte.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-kx}\,dx = \frac{\alpha}{-k} e^{-kx}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{\alpha}{k}$

f densidad de probabilidad $\Leftrightarrow k=\alpha$.

b) $k = 1/3 = \alpha$ probabilidad de que la conversación dure >3

$\int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{\infty} \frac{1}{3} e^{-x/3}\,dx = -e^{-(1/3)x}\Big|_{3}^{\infty} = \boxed{e^{-1}}$

6.2 c) $\int_{3}^{6} f(x)\,dx = -e^{-x/3}\Big|_{3}^{6} = e^{-1} - e^{-2}$

(6.6) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ 1/3 & x \in [-1, \sqrt{2}) \\ 1/2 + \dfrac{x-\sqrt{2}}{10} & x \in [\sqrt{2}, 5) \\ 1 & x \in [5, \infty) \end{cases}$

- $dF\,\mathbb{R} = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1$
- $dF(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2},5]) = dF([\sqrt{2},5]\setminus\mathbb{Q}) = \underbrace{dF([\sqrt{2},5))}_{\text{finito}} - \underbrace{dF(\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},5])}_{\text{finito}}$

$= \boxed{1 - \frac{\sqrt{2}}{10} - 1/3}$

$dF(\{x\}) \overset{\circledast}{=} \begin{cases} 0 & \text{otro cero} \\ 1/3 & \text{si } x = -1 \\ 1/2 - 1/3 & \text{si } x = \sqrt{2} \\ 1/2 - \frac{5-\sqrt{2}}{10} & x = 5 \end{cases} \rightarrow dF\{5\} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\cancel{dF(\mathbb{Q})}$ $dF(\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},5)) = \sum_{q\in[\sqrt{2},5)} dF(\{q\}) \overset{\circledast}{=} 0$

- $dF([-2,\sqrt{2}]\setminus\mathbb{Q}) = dF((-2,\sqrt{2}]) - \underbrace{dF((-2,\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q})}_{dF\{-1\} = 1/3} =$

$= 1/2 - 0 - 1/3 = \boxed{1/6}$

$dF(\mathbb{Q}\cap[1,6]) = dF(\{5\}) = \boxed{\sqrt{2}/10.}$

(6.7) F de distrib. en $\mathbb{R}$

a) $\underbrace{\text{El conjunto de puntos de discontinuidad de } F}_{A}$ es numerable:

Para $a \in A$, $dF(\{a\}) > 0$

Sea $E_n = (n, n+1]$, con $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow dF^*(E_n \cap A) \leq dF^*(E_n) = \underbrace{F(n+1) - F(n)}_{\text{finito}} < \infty$

Definimos ahora $I_{n,m} = \{a \in E_n\cap A \;/\; F(\{a\}) \in [1/(m+1), 1/m]\}$

Para $m \in \mathbb{N}$, $I_{n,0} = \{a \in E_n \cap A \;/\; F(\{a\}) > 1\}$

Si alguno de los $I_{n,m}$ es infinito, para $m \in \{0, 1, \dots\}$

$\Rightarrow \infty = dF(I_{n,m}) \leq dF(E_n \cap A) < \infty$ NO!

Por tanto, cada $I_{n,m}$ es finito

y $E_n \cap A = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{n,m} \Rightarrow E_n\cap A$ numerable

$\Rightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n \cap A$ numerable $\square$

b) Como A es numerable, A^c es denso.
Cada abierto no vacío de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ contiene ~~inf~~ no numerables puntos $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{T}_u \quad B \cap A^c \neq \emptyset \quad \square$

(6.8)

$C_0 = [0, 1]$ Sup ~~$\varepsilon < 1/3$~~ $\varepsilon < 1$

$C_1 = [0, 1/2 -$

~~Cada vez quitamos un intervalo de tamaño $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ a los subintervalos que conforman C_{k-1} para formar C_k~~

~~$\Rightarrow m(C_0) = 1, \; m(C_1) = 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \; m(C_2) = 1 - \frac{\varepsilon}{8}$ etc.~~

~~$\Rightarrow m(C) = \lim_{k \to \infty} 1 - \frac{\varepsilon}{\,}$~~
~~$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$~~

Cada vez se quita al anterior C_k para construir C_{k+1} el intervalo "de en medio" de cada intervalo (componente conexa) de C_k de longitud ε^k. ~~longitud del intervalo, de forma que~~

Entonces: ~~$m(C_0) = 1, m(C_1) = 1$~~ Como con el conjunto de Cantor, el conjunto C_k está formado por 2^k intervalos

$\Rightarrow m(C_0) = 1, \; m(C_1) = 1 - 2\varepsilon^1, \; m(C_2) = 1 - 2\varepsilon^1 - 2^2\varepsilon^2$

$$m(C_N) = 1 - \sum_{n=1}^{N} (2\varepsilon)^n = 1 - \frac{(2\varepsilon)^{N+1} - 2\varepsilon}{2\varepsilon - 1} = \cancel{\frac{2\varepsilon - 1 - (2\varepsilon)^{N+1} - 2\varepsilon}{2\varepsilon - 1}} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{1 - 2\varepsilon}}$$

$$\xrightarrow{N \to \infty} 1 - \left(\frac{2\varepsilon}{\underbrace{1 - 2\varepsilon}}\right) = m\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} C_N\right)$$

Toma cualquier valor entre $0 \; (\varepsilon = 0)$ y $1 \; (\varepsilon = 1/4)$

Otra forma: se quita un ε^k am del anterior

$m(C_0) = 1, \; m(C_1) = 1 - \varepsilon^1 = ~~(1-\varepsilon~~ \; m(C_2) = (1 - \varepsilon^1)(1 - \varepsilon^2) \ldots$

$m(C_n) = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \cdots (1 - \varepsilon^n)$

6.3

(6.9) F cont, de distrib.

a) A numerable $\Rightarrow dF(A) = 0$

dem: $dF(\{q\}) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}$ por ser cont.

$\Rightarrow dF(A) = \sum_{\kappa \in A} dF(\{\kappa\}) = 0 \quad \square$

b) Por ser no trivial, $\exists a, b \in \mathbb{R} \,/\, F(a) \neq F(b)$ finitos

WLOG $a < b$, $F(a) < F(b)$

$\Rightarrow$ Tomamos $A = (a, b] \setminus \mathbb{Q}$

$$dF(A) = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\overset{\infty \\ \vee}{dF((a,b])}} - \underbrace{dF((a,b] \cap \mathbb{Q})}_{0 \text{ numerable}} > 0.$$

A no contiene intervalos abiertos porque $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

c) $dF(\mathbb{R} \setminus A) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} A$ denso en $\mathbb{R}$

NO:

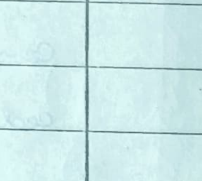
~~$F(x)$ x en $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ 0 en $[0,1]$ $(0,1]$ $A = \mathbb{R} \setminus [0,1]$. dF~~ $\mathbb{R} \setminus (0,1]$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{en } x \le 0 \\ 0 & \text{en } x \in (0, 1] \\ x-1 & \text{en } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$A = \mathbb{R} \setminus (0,1]$ no denso en $\mathbb{R}$

$dF(\mathbb{R} \setminus A) = dF(0,1] = F(1) - F(0) = 0$

(6.10) $F : [0, \infty) \to [0, \infty) \quad F(x) = \log(1 + x)$



Conjunto de Cantor contenido en 2^n intervalos de longitud $1/3^n$:

$$2^n dF[x, x + 1/3^n] = 2^n \log\left(\frac{1 + x + 1/3^n}{1 + x}\right) = 2^n \log\left(1 + \frac{1/3^n}{1+x}\right) \le 2^n \log\left(1 + 1/3^n\right) =$$

$$= \log\left(1 + 1/3^n\right)^{2^n} = \log\left(1 + 1/3^n\right)^{3^n \cdot \left(\frac{2^n}{3^n}\right)} = \underset{\substack{\downarrow n \to \infty \\ 0}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{\substack{\downarrow n \to \infty \\ 1}}{\log\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{3^n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow \boxed{dF\{\text{Cantor}\} = 0}$

(6.11) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ esp. de prob. X_1, X_2 variables aleatorias sobre Ω: $\boxed{X_1, X_2 : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \text{ medibles}}$

F_{X_1}, F_{X_2} las funciones de distrib. de las medidas de probabilidad producidas por X_1, X_2 respect.:

$$F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, \quad j \in \{1, 2\}$$

Probar que si $P\underbrace{\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\}}_{A} = 1$ entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

$$F_{X_1}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x\} =$$
$$= P\{\omega \in A : X_2(\omega) \leq x\} + \underbrace{P\{\omega \notin A : X_1(\omega) \leq x\}}_{\leq P(A^c) = 0}$$
$$= P\{\omega \in A : X_1(\omega) \leq x\}$$

$$F_{X_2}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \leq x\}$$
$$= P(\omega \in A : X_1(\omega) \leq x\}$$
$$+ \underbrace{P(\omega \notin A : X_2(\omega) \leq x\}}_{0}$$

D

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$
$$1 \quad\quad 1 \Rightarrow 0$$

(6.12) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, $P(A) = \int_A f(x)\,dx$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$

$X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ $\quad X(x) = \begin{cases} -2\log x & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

~~$F_X(x) = P\overbrace{\{y \in \mathbb{R} / X(y) \leq x\}}^{A_x}$. Como $X(x) \leq 0$, $F_X(x) = A_x = \mathbb{R}$ si $x \geq 0$~~

~~$\Rightarrow \{x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = 1 = P(\mathbb{R})\}$~~

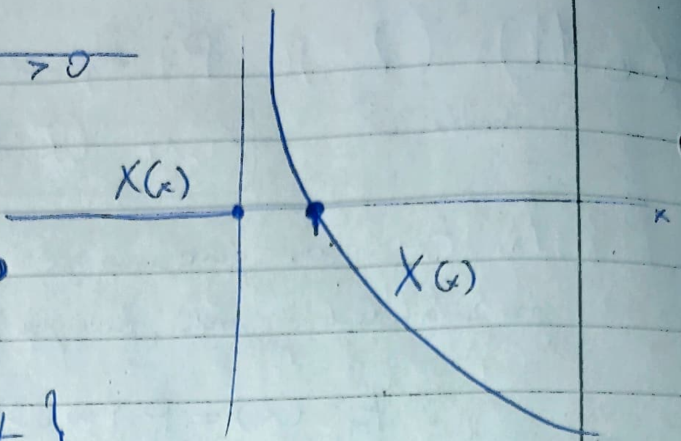
~~$x < 0 \Rightarrow A_x = \{y > 0 / -2\log y \leq x\} = \{y > 0 / \log y \geq \frac{x}{-2}\} =$~~

~~$= \{y > 0 / y \geq e^{x/-2}\} = [e^{x/-2}, \infty)$~~

6.4

~~Si $e^{x/-2} > 1$, entonces $\frac{x}{-2} > 0$~~

$$X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -2\log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$$F_X(t) = P\{x \in X \,/\, X(x) \leq t\}$$

Como $P(\mathbb{R} \setminus [0,1]) = 0$,

$$F_X(t) = P\{x \in [0,1] \,/\, X(x) \leq t\} \stackrel{\{0,1\} \text{ tiene P-medida } 0}{=}$$

$$= P\underbrace{\{x \in (0,1) \,/\, -2\log x \leq t\}}_{A_t}$$

Si $t \leq 0$, $A_t = \emptyset$

porque $x \in (0,1) \Rightarrow \log x \in (-\infty, 0) \Rightarrow -2\log x > 0 \geq t$

$\Rightarrow \boxed{F_X(t) = 0 \text{ si } t \leq 0}$

Si $t > 0$, $A_t = \{x \in (0,1) \,/\, \underbrace{-2\log x \leq t}\} = [e^{t/-2}, 1)$

$\Updownarrow$

$\log x \geq t/-2 \Leftrightarrow x \geq e^{t/-2}$

$\Downarrow$

$$F_X(t) = P(A_t) = \int_{e^{t/-2}}^{1} 1 \, dz = 1 - e^{t/-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{t/-2} & \text{si } t > 0 \end{cases}}$$