A menos que se especifique, los índices $i, j, k \ldots$ recorren conjuntos numerables: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}$

Notación. $I \subset \mathbb{R}$ intervalo: $|I|$ = longitud de I.

df $E \subset \mathbb{R}$. Su MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE: $m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ intervalos}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$.

propiedades: (a) $\forall E \subset \mathbb{R}$ $m^*(E) \geq 0$ (b) $A \subset B \subset \mathbb{R} \to m^*(A) \leq m^*(B)$

(c) $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$

prop. $m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} J_\ell \;/\; \{J_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \text{ intervalos abiertos acotados}, E \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} J_\ell \right\}$

- Para una medida queremos σ-aditividad. m^* no la cumple (ver apuntes, hoja 3)

2. σ-Álgebras

df. $X \neq \emptyset$. Una σ-ÁLGEBRA $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ cumple: $\left\{\begin{array}{ll} (i) \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \\ (ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \end{array}\right\}$ $(X, \mathcal{A})$: ESP. MEDIBLE; $E \in \mathcal{A}$ CONJ. MEDIBLE

prop: (a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ (b) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$ (c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

prop: $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ colección (salvaje) de σ-álgebras en $X \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ σ-álgebra en X.

df $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. σ-ÁLGEBRA GENERADA POR $\mathcal{F}$: $\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} \supset \mathcal{F} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-álgebra en } X\}$.

ejemplo: σ-ALG. DE BOREL: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{T}_{usual})$ en $\mathbb{R}$.

prop $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\underbrace{\{[a,b) : a<b \in \mathbb{R}\}}_{\mathcal{B}_{[)}}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}_{(\,)}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}_{[\,]}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}_{(-\infty)}) \ldots$

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ contiene a todos los abiertos, cerrados, numerables, conumerables, unión numerable de cerrados, intersecc. numerable de abiertos, ...

prop $B_1 \subset B_2 \subset \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{M}(B_1) \subset \mathcal{M}(B_2)$

Medidas

df $(X, \mathcal{A})$ Esp. medible. Una MEDIDA EN $(X, \mathcal{A})$ es una $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ t.q.:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ESPACIO DE MEDIDA (EdM)

df (i) $\mu(X) < \infty$: medida FINITA. (ii) $\mu(X) = 1$ PROBABILIDAD

(iii) $\mu(X) = \infty$, $\exists \{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \;/\; X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $\mu(F_i) < \infty\ \forall i \Rightarrow$ Medida σ-FINITA

prop: (a) $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$ (b) $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$

(c) $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$: $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$

(d) $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$: $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $\mu(E_1) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$

df $\{E_i\} \subset \mathcal{P}(X)$: $\liminf E_i = \underline{\lim}\, E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i\right)$. $\limsup E_i = \overline{\lim}\, E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right)$

$\underline{\lim}\, E_i = \overline{\lim}\, E_i \to \lim E_i := \underline{\lim}\, E_i = \overline{\lim}\, E_i$.

prop: · Si $\mu\left(\bigcup E_i\right) < \infty$, entonces $\mu(\liminf E_i) \leq \liminf \mu(E_i)$. $\mu(\limsup E_i) \geq \limsup \mu(E_i)$

· Si $\mu(X) < \infty$, $\left\{\begin{array}{l} \mu(\liminf E_i) \leq \liminf \mu(E_i) \leq \limsup \mu(E_i) \leq \mu(\limsup E_i) \\ \exists \lim E_i \Rightarrow \mu(\lim E_i) = \lim \mu(E_i). \end{array}\right.$

· $\liminf E_i = \{x \in X : \exists N_0 \;/\; x \in E_n\ \forall n \geq N_0\}$

· $\limsup E_i = \{x \in X : x \text{ pertenece a infinitos conjuntos } E_i\}$

TIM t.1

def σ-ÁLGEBRA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}$: $\mathcal{L} = \{E \subset \mathbb{R} \;/\; \forall A \subset \mathbb{R} \;\; m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\}$

tma: $\mathcal{L}$ σ-álgebra, $m := m^*|_{\mathcal{L}}$ es una medida.

Funciones medibles $(X, \mathcal{A})$ espacio medible

def $f: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) se dice MEDIBLE si $\forall\, \mathcal{U}$ abto a $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$.

prop: $f: X \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

a) f medible

b) $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A}$ | $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{A}$, etc: $\left\{ [a,b], [\,), (\,], (\,), (-\infty, b], (\infty, a) \right.$

c) $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

tma: $f, g: X \to \mathbb{R}$ medibles $\Rightarrow$ λf, $f+g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$ son medibles

Obs: $f: X \to \mathbb{R}$ medible $\Rightarrow$ $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$ medibles $\left\{ \begin{array}{l} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{array} \right.$

def $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, su topología usual, generada por (top del orden) $\mathcal{B} = \{(a,b)\} \cup \{(a, \infty]\} \cup \{[-\infty, b)\}$

prop: $f: (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ medible $\Leftrightarrow$ $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

tma: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ medibles $X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $\sup f_k$, $\inf f_k$, $\liminf f_k$, $\limsup f_k$ medibles

tma: $f: X \to \mathbb{C}$. $f = \mathrm{Re} f + i\, \mathrm{Im} f$. $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f: X \to \mathbb{R}$. f medible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f$ medibles

tma: • $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $h: (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}$ medible

• $f: X \to \mathbb{R}$ medible, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ medible

def $E \subset X$. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA: $\chi_E \equiv \mathbb{1}_E$. $\chi_E(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \notin E \\ 1 & \text{si } x \in E \end{array} \right\}$ medible $\Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$.

def $s: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) FUNCIÓN SIMPLE si $s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}(x)$,

con $a_i \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $E_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

Obs: s simple $\Rightarrow$ se escribe de forma única como $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$, $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ disjuntos dos a dos, $a_1 < a_2 < \dots$

tma: $f: X \to [0, \infty]$ medible $\Rightarrow$ $\exists \{s_n\}$ sucesión de funciones simples medibles $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ tales que $\forall x \in X$ $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$. Además, la convergencia es uniforme en todo conjunto donde f sea acotada. $s_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2^n & \text{si } f(x) \geq 2^n \\ k/2^n & \text{si } f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \; k \in \{0, 1, \dots, 2^{2n} - 1\} \end{array} \right.$

Obs: $f: X \to \mathbb{C}$ medible $\to$ $\exists \{\varphi_n\}$ simples medibles / $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ unif. en conjuntos donde f sea acotada.

def s función simple, medible, no negativa, con representación estándar $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ $\longrightarrow$ $\int s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$. (Convención: $0 \cdot \infty = 0$).

prop: s_1, s_2 simples medibles, no neg:

a) $c \geq 0 \Rightarrow \int c s_1 \, d\mu = c \int s_1 \, d\mu$

b) $s_1 + s_2$ simple, med, no neg. $\int (s_1 + s_2) \, d\mu = \int s_1 \, d\mu + \int s_2 \, d\mu$

c) $s_1(x) \leq s_2(x)$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $\int s_1 \, d\mu \leq \int s_2 \, d\mu$

d) $H \in \mathcal{A}$, $\nu(H) := \int_H s_1 \, d\mu = \int s_1 \chi_H \, d\mu$ medida en $(X, \mathcal{A})$

cor. $\{s_i\}_{i=1}^{N}$ simples, med. no neg $\Rightarrow$ $\int \left(\sum_1^N s_i\right) d\mu = \sum_1^N \int s_i \, d\mu$.

def $f: X \to [0,\infty]$ medible: $\int f d\mu = \sup \{ \int s d\mu \,/\, s$ simple, medible, $0 \le s(x) \le f(x) \ \forall x \in X \} \in [0,\infty]$.

prop: $f_1, f_2 : X \to [0,\infty]$ medibles $\Rightarrow$ (a) $c \in \mathbb{R}^+ \to \int c f_1 = c \int f_1$
(b) $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$
(c) $f_1(x) \le f_2(x) \ \forall x \in X \Rightarrow \int f_1 \le \int f_2$.

TCM (Tma. Convergencia Monótona): Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones medibles, $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \ \forall x \in X$,
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,\infty] \Rightarrow f$ medible, $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

cor: (a) $f_1, f_2 : X \to [0,\infty]$ medibles $\Rightarrow \int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$
(b) $\{f_n\}$ medibles $X \to [0,\infty] \Rightarrow \int (\Sigma f_n) d\mu = \Sigma (\int f_n d\mu)$

prop: $f: X \to [0,\infty]$ medible. $E \in \mathcal{A}$ $\nu_f(E) := \int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$ medida en $(X, \mathcal{A})$

Lema de Fatou: $\{f_n\}$ suc. de medibles no neg. $\Rightarrow \int (\liminf f_n) d\mu \le \liminf (\int f_n d\mu)$.

Notación: una propiedad se cumple "c.t.p. x" si se cumple en todo X excepto en un conjunto de medida 0.

prop: $f: X \to [0,\infty]$ medible $\Rightarrow \{ \int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ctp $\}$.

cor: $f, g : X \to [0,\infty]$ medibles: $f = g$ c.tp $\Rightarrow \int f = \int g$.

prop: $f, g: X \to [0,\infty]$ medibles. $f = g$ c.t.p. $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{A}$ $\nu_f(E) = \nu_g(E)$

TCM (mejorado) $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles $/ \ 0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$ ctp.x,
$f(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ c.tp x. f medible $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\int f_n d\mu) = \int f d\mu$.

def $(X, \mathcal{M}, \mu)$ COMPLETO si $\forall E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = 0 \Rightarrow \forall F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$.

Obs: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ no completo. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ completo.

tma. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. Se definen $\bar{\mathcal{A}} := \{ E \cup F \,/\, E \in \mathcal{A} \ \exists H \in \mathcal{A} \,/\, \mu(H) = 0 \wedge F \subset H \}$ $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$ } COMPLECCIÓN DE $(X, \mathcal{A}, \mu)$
Entonces: (1) $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ EdM completo
(2) f medible $(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f$ medible $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$.
Si además $f(x) \ge 0 \ \forall x \in X$, $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$.
(3) g $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$-medible $\Rightarrow \exists h$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$-medible $/ \ h = g$ ctp $\int g d\bar{\mu} = \int h d\mu$.

def $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ medible $\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ Cuando $\int f^+ < \infty$ ó $\int f^- < \infty$.

def $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ medible se dice INTEGRABLE si $\int |f| < \infty$ i.e. si $\int f^+, \int f^- < \infty$.

prop 1) $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ med. integrables, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (a) cf integrable, $\int cf = c \int f$
(b) $f+g$ integrable $\int (f+g) = \int f + \int g$
(c) $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$.

def $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. $f: X \to \mathbb{C}$ medible. $\int_X f d\mu := \int_X \mathrm{Re} f d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f d\mu$ Cuando tenga sentido

def $f: X \to \mathbb{C}$ INTEGRABLE si f medible y $\int |f| < \infty$ i.e. si $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ integrables.

prop 2) $f, g : X \to \mathbb{C}$ med. integrables, $c \in \mathbb{C} \to$ 1a), 1b)

prop. $f: X \to \mathbb{C}$ medible e integrable $\Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \le \int_X |f| d\mu$

prop $f, g: X \to \mathbb{C}$ med. integrables. Son equivalentes $\begin{cases} a) & f = g \text{ c.t.p} \\ b) & \forall E \in \mathfrak{M} \quad \int f \chi_E = \int g \chi_E \\ c) & \int |f-g| = 0 \end{cases}$

def
- $f \sim g \overset{def}{\iff} f = g$ c.t.p.
- $L^1(\mu) = \{ f: X \to \mathbb{C} \text{ integrables} \} / \sim$
- $\|f\|_1 = \|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu$

$\boxed{(L^1(\mu), \|\cdot\|_1) \text{ espacio normado y completo}}$ ← tma

(esp. de Banach)

TCD (Tma. Convergencia Dominada): Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de $X \to \mathbb{C}$ integrables.
Sea f integrable / $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ctp x. $\exists h$ integrable /
$|f_n(x)| \leq h(x)$ c.t.p. x. Entonces $\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$, $\underbrace{\|f_n - f\|_1 \to 0}_{\text{más fuerte}}$

corolario TCD: $\{f_n\}$ integrables con $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$
$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge ctp x. $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$

obs: g integrable $\Rightarrow g(x) < \infty$ ctp x.

Corolario de $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ esp. de Banach: Sea $f: X \times [a,b] \to \mathbb{C}$. ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)
tal que $\forall t \in [a,b)$ $f_t: x \longmapsto f(x,t)$ integrable

Def: $F(t) = \int f(x,t) \, d\mu(x)$

a) $\exists g \in L^1 / |f(x,t)| \leq |g(x)| \; \forall t, x$, $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x, t_0)$ $\forall x, t_0 \Rightarrow F(t_0) = \lim_{t\to t_0} F(t)$

b) $\forall x, t \; \exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, $\exists h \in L^1 / \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq h(x) \; \forall x, t$
$\Rightarrow F$ derivable, $F'(t_0) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right) d\mu(x)$

3. Espacios de medida

def MED. EXTERIOR: μ^* en X. $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty] / \begin{cases} a) & \mu^*(\emptyset) = 0 \\ b) & A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \\ c) & \mu^*(\bigcup E_i) \leq \sum_i \mu(E_i) \end{cases}$

def $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ÁLGEBRA EN X si (a) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$ (b) $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$

Ej. (1) $\mathcal{A} = \{$uniones finitas de intervalos de la forma $(a,b]$, (a, ∞), $(-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$

def $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ un álgebra. $\rho: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es PREMEDIDA EN X si $\begin{cases} (a) & \rho(\emptyset) = 0 \\ (b) & \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \text{ disjuntos 2 a 2}, \bigcup E_i \in \mathcal{A} \\ & \Rightarrow \rho(\bigcup E_i) = \sum \rho(E_i) \end{cases}$

Ej (3) PREMEDIDAS DE LEBESGUE-STIELTJES: $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ como ej(1)
- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (no decreciente, conti por la derecha $\equiv$ func. de distribución)
- $\rho_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. $\rho_F((-\infty, b]) = F(b) - \lim_{x\to -\infty} F(x)$. $\rho_F((a, \infty)) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$

ρ_F premedida en $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$

Ej (2): $\rho = \rho_{id}$ ↗ Ej (4) $\mu_F^*(\{b\}) = F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)$

prop $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ álgebra en X, ρ premed en $(X, \mathcal{A})$. $\mu_\rho^*(E) = \inf \{ \sum \rho(E_i) / \{E_i\} \subset \mathcal{A}, E \subset \bigcup E_i \}$
es medida exterior en X y $\mu_\rho^*|_{\mathcal{A}} = \rho$.

tma de Carathéodory (de construcción de medidas). $X \neq \emptyset$, μ^* med. ext. de X

$\mathcal{M} := \{A \subset X \,/\, \forall E \subset X \ \ \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)\} \equiv$ σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ σ-álgebra en X y $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ medida completa.

Si además $\mathcal{A}$ álgebra en X, ρ premedida en $(X, \mathcal{A})$ y $\mu^* = \mu^*_\rho \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$

· Consecuencias: 1) <u>Medidas de Lebesgue-Stieltjes</u>

- $\mathcal{A}$ del Ej (1). ρ_F del ej (3) (F func. de distrib), $\mu_F^*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \,/\, E_j \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup E_j\}$

- $\mathcal{M}_F = \{A \subset \mathbb{R} \,/\, \forall E \subset \mathbb{R} \ \ \mu_F^*(E) = \mu_F^*(E \cap A) + \mu_F^*(E \cap A^c)\}$ es una σ-álgebra,

  $\mu_F = \mu_F^*|_{\mathcal{M}_F}$ medida completa, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_F$

- $\forall a < b \in \mathbb{R}$ $(a,b) \in \mathcal{M}_F \Longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_F$.

- $\mu_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$.

· Consecuencias 2) Con $F \equiv id$, <u>Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$</u> $\mathcal{M}_{id} = \mathcal{L}$ $\left(\begin{array}{l} m^* \equiv \mu^*_{id} \\ m = \mu^*_{id}|_{\mathcal{L}} \end{array}\right)$

· $m(\{x\}) = 0$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \underset{\text{no visto}}{\subsetneq} \mathcal{L} \underset{\text{visto}}{\subsetneq} \mathcal{P}(\mathbb{R})$ m medida completa

tma: $\underbrace{E \in \mathcal{L} \Rightarrow m(E) = \inf\{m(V) : V \text{ abto en } \mathbb{R}_u,\ E \subset V\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto en } \mathbb{R}_u,\ K \subset E\}}_{m \text{ es una medida regular}}$.

tma: $E \in \mathcal{L} \longrightarrow$ (1) $\exists \{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ abtos $/ \ E \subset \bigcap U_j$, $m(\bigcap U_j \setminus E) = 0$
(2) $\exists \{H_j\}_{j=1}^{\infty}$ cerrados $/ \ \bigcup H_j \subset E$, $m(E \setminus \bigcup H_j) = 0$

tma: $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ es la compleción de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}})$.

tma: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada: $\begin{cases} f \text{ integrable Riemann} \Rightarrow f \text{ medible e integrable } (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m) \text{ y } \int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,dm \\ f \text{ integrable Riemann} \Leftrightarrow f \text{ continua en casi todo punto } x \in [a,b] \end{cases}$

· Integrales Riemann Impropias: f acotada en $[a, N]$ $\forall N \geq a$, $N \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} \text{Si existe, se define } \lim_{N \to \infty} \int_a^N f\,dx =: \int_a^{\infty} f\,dx. \\ \text{Si } f \geq 0 \text{ entonces (tma anterior) } \int_a^N f\,dx = \int \overbrace{f\chi_{[a,N]}}^{f_n} dm,\ f_n \uparrow f \overset{TCM}{\Rightarrow} \int_a^{\infty} f\,dx = \int_{[a,\infty)} f\,dm \end{cases}$

· Si existe $\int_a^{\infty} f\,dx$ pero $f \not\geq 0$, no tiene por qué ser cierto (f podría ser no Lebesgue-integrable)

TIM t.3

4. Medidas producto y teorema de Fubini.

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ Espacios de medida

def: · $E \in \mathcal{M}, F \in \mathcal{N}$: $E \times F$ es un RECTÁNGULO EN $X \times Y$.

· σ-ÁLGEBRA PRODUCTO: $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ = mín. σ-álg. que contiene a los rectángulos

def $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i \ / \ n \in \mathbb{N}, \ \{E_i \times F_i\}_{i=1}^{n}$ rectángulos$\}$

Obs: unión finita de rectángulos se puede escribir como unión disjunta (finita) de rect.

def $\{E_i \times F_i\}_{i=1}^{n}$ familia de rectángulos disjuntos 2a2: $\rho(\bigcup_j E_j \times F_j) = \sum_i \rho(E_i \times F_i) = \sum_i \mu(E_i)\nu(F_i)$

prop: · ρ bien definida (indep. de la representación de rectángulos elegida)

· $\mathcal{A}$ es álgebra y ρ es premedida en $(X \times Y, \mathcal{A})$.

(truco: integrar resp. X y luego resp. Y)

cor: Por T. Carathéodory, con $\mathcal{A}, \rho$ construimos un Espacio de Medida completo ⊛

$(X \times Y, Q, \lambda)$ tal que $\mathcal{A} \subset Q$, $\lambda|_{\mathcal{A}} = \rho$

$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset Q$ (porque $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$). $\mu \times \nu := \lambda|_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$

Entonces $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ Esp. de Med.

Por ⊛, podemos definir $\mu \times \nu$ en la compleción de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Nomenclatura: · $A \subset X \times Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$: $A_{x_0} = \{y \in Y \ / \ (x_0, y) \in A\}$. $A^{y_0} = \{x \in X \ / \ (x, y_0) \in A\}$

· $f: X \times Y \to \mathbb{C}$, $\forall x \in X, y \in Y$: $f_x: Y \to \mathbb{C}$, $y \mapsto f(x,y)$; $f^y: X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x,y)$

prop: $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \Rightarrow \forall (x,y) \in X \times Y$ $A^y \in \mathcal{M}$, $A_x \in \mathcal{N}$.

f $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible $\Rightarrow \forall (x,y) \in X \times Y$ f_x $\mathcal{N}$-med., f^y $\mathcal{M}$-med.

tma: $(X, \mathcal{M}, \mu)(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-finitos, $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Entonces:

(a) $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \nu(A_x)$ $\mathcal{M}$-medible, (b) $Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \mu(A^y)$ $\mathcal{N}$-medible, (c) $\mu \times \nu(A) = \int_X \nu(A_x)\,d\mu = \int_Y \mu(A^y)\,d\nu$.

def $X \neq \emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{C}$ CLASE MONÓTONA si (1) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, $\{E_i\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup E_i \in \mathcal{C}$
(2) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, $\{E_i\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap E_i \in \mathcal{C}$

lema $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ álgebra, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ = mín. clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Tma Tonelli-Fubini: $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ Esp. de Med. σ-finitos:

(Tonelli) $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible, $f \geq 0$

$\Rightarrow g(x) = \int_Y f_x(y)\,d\nu(y)$ $\mathcal{M}$-medible, $h(y) = \int_X f^y(x)\,d\mu(x)$ $\mathcal{N}$-medible, $\int_{X \times Y} f\,d\mu \times \nu = \int_X g\,d\mu = \int_Y h\,d\nu$

(Fubini) $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-integrable, f_x integrable c.t.p. $x \in X$, f^y integrable c.t.p. $y \in Y$

$\Rightarrow g(x), h(y)$ definidas c.t.p. (x o y resp.) son integrables y $\int_{X \times Y} f\,d\mu \times \nu = \int_X g\,d\mu = \int_Y h\,d\nu$

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Desde $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ definimos $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, m\times m)$ (no completo):

$m(A)=0$, $A\in\mathcal{L}$, $B\subset[0,1]$, $B\notin\mathcal{L}$ $\Rightarrow A\times B\subset A\times[0,1]\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$

con $m\times m(A\times[0,1])=0$ pero $A\times B\notin\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ porque si $x_0\in A$,

entonces $(A\times B)_{x_0}=B\notin\mathcal{L}$

def: ESPACIO DE MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^2$: $(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}^2,m^2)$ = compleción $(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},m\times m)$

De forma análoga en $\mathbb{R}^n$: $(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n,m^n)$ = compleción $(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},\mathcal{L}^{n-1}\otimes\mathcal{L},m^{n-1}\times m)$

tma: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\mathcal{L}^2$-medible. Si $f\geq 0$ ó f integrable, entonces

f_x, f^y son $\mathcal{L}$ medibles ctp (x o y resp). Si f integrable, entonces

f_x, f^y integrables ctp (x o y resp):

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,dm^2=\int_{\mathbb{R}}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,dm(y)}_{g(x)}\Big)dm(x)=\int_{\mathbb{R}}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f^y(x)\,dm(x)}_{h(y)}\Big)dm(y)$$

h, g medibles e integrables si f lo es.

tma (Regularidad) $E\in\mathcal{L}^2$. Entonces (a) $m^2(E)=\inf\{m^2(U): U \text{ abto}, E\subset U\}=\sup\{m^2(K): K \text{ compacto}, K\subset E\}$

(b) $\exists G$ unión numerable de compactos, H intersecc. numerable de abtos /

$E=G\cup M=H\setminus N$ para $M,N\in\mathcal{L}^2$, $m^2(M)=0=m^2(N)$

cor: $(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}^2,m^2)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},m\times m)$

prop: $E\in\mathcal{L}^2$, $a\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}_+\Rightarrow a+E,\ \lambda E\in\mathcal{L}^2$, $m^2(a+E)=m^2(E)$, $m^2(\lambda E)=\lambda^2 m^2(E)$

tma (Cambio de variable) $\mathbb{R}^n\supset\Omega$ abierto, $G:\Omega\to\mathbb{R}^n$ difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$;

f $\mathcal{L}^n$ medible $f:G(\Omega)\to\mathbb{R}\Rightarrow f\circ G$ $\mathcal{L}^n$ medible en Ω.

Si $f\geq 0$ o f integrable, entonces $\int_{G(\Omega)} f\,dm^2=\int_\Omega f\circ G(y)\,|\det D_yG|\,dm^2(y)$ ($y\in\mathbb{R}^n$)

cor. $E\in\mathcal{L}^n$, $E\subset\Omega$, Ω abto $\Rightarrow G(E)\in\mathcal{L}^n$, $m^n(G(E))=\int_{G(E)}dm^n=\int_E|\det DG|\,dm^n$.

cor. $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineal e invertible, $(G\in GL(n,\mathbb{R}))$

$\Rightarrow m^n(G(E))=m^n(E)\,|\det G|$ $\forall E\in\mathcal{L}^n$.

Ver coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$

5. Medidas y derivadas

def: $\mathcal{A}$ σ-álgebra en X. Una MEDIDA CON SIGNO es: $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow (-\infty, \infty]$ / ($\acute{o}$ $[-\infty, \infty)$)

$\nu(\emptyset) = 0$, $\forall \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2, $\nu(\bigcup E_i) = \sum \nu(E_i)$

(i) Ej: $(X, \mathcal{A})$ E. Medible, μ, ν medidas en $(X, \mathcal{A})$, ν finita

$\Longrightarrow$ $\mu - \nu$ medida con signo

(ii) Ej: Como el anterior, $f, g : X \to [0, \infty)$ medibles, g integrable:

$\int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu$ medida con signo.

(iii) Ej: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM, $f : X \to \mathbb{R}$ integrable $\Rightarrow$ $\int_E f \, d\mu$ med con signo

def: ν med. con signo en $(X, \mathcal{A})$. $E \in \mathcal{A}$ es...

- POSITIVO si $\forall F \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(E)$ $\nu(F) \geq 0$
- NEGATIVO si " $\nu(F) \leq 0$
- NULO si " $\nu(F) = 0$

(ii) $\{x \in X / f(x) \geq g(x)\}$ positivo, $\{x : f(x) < g(x)\}$ negativo

Teorema de descomposición de Hahn: $(X, \mathcal{A})$ e. medible, ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$. Entonces:

$\exists P, N \in \mathcal{A}$ / $P \cap N = \emptyset$, $P \cup N = X$, P positivo, N negativo para ν

Si otros P', N' cumplen lo anterior, entonces $P \Delta P' = N \Delta N' = \emptyset$.

· Obs: $\nu|_P$ medida positiva en $(P, \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(P))$

$\nu|_N$ medida en $(N, \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N))$

def: ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$ esp. medible. $P, N \in \mathcal{A}$ descomp. de Hahn de ν.

Se define: $E \in \mathcal{A}$ $\nu_+(E) = \nu(E \cap P)$, $\nu_-(E) = -\nu(E \cap N)$, $|\nu|(E) = \nu_+(E) + \nu_-(E)$

tma (descomposición de Jordan) (a) $|\nu|$, ν_+, ν_- medidas sobre $(X, \mathcal{A})$.

(b) $\nu = \nu^+ - \nu^-$. (c) Si μ, λ medidas sobre $(X, \mathcal{A})$ / λ finita, $\nu = \mu - \lambda$,

entonces $\mu \geq \nu^+$, $\lambda \geq \nu^-$

· Obs: $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

def: λ, μ med. con signo MUTUAMENTE SINGULARES ($\lambda \perp \mu$) si $\exists E, F \in \mathcal{A}$ /

$E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, F nulo para λ, E nulo para μ.

def. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$ es ABSOLUTAM. CONTINUA RESP. μ

($\nu \ll \mu$) si $\forall E \in \mathcal{A}$ $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

Ej. · $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+, \nu^- \ll \mu$

· $\nu \ll \mu$, $\nu \perp \mu \Rightarrow \nu = 0$

prop. μ, ν medidas sobre $(X, \mathcal{A})$, ν finita $\nu \ll \mu$

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; / \; \forall E \in \mathcal{A} \; (\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon)$

prop. μ medida, ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$. $\nu \ll \mu$, ν finita

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; / \; \forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) < \delta \Rightarrow |\nu|(E) < \varepsilon$.

lema μ, ν medidas sobre $\mathcal{A}$ finitas $\rightarrow \nu \perp \mu$ ó
$\exists \varepsilon > 0, E \in \mathcal{A} / \mu(E) > 0, \forall F \overset{\in \mathcal{A}}{\subset} E \;\; \nu(F) \geq \varepsilon \mu(F)$

tma (Lebesgue-Radon-Nikodym): Sean $(X, \mathcal{A})$ EM, μ med. σ-finita, ν medida con signo finita (sobre $\mathcal{A}$). Entonces $\exists \lambda, \rho$ medidas con signo finitas / $\nu = \lambda + \rho$, $\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$ (descomp. de Lebesgue)

Además $\exists f_0 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \; / \; \forall E \in \mathcal{A} \;\; \rho(E) = \int_E f_0 \, d\mu$

↑ Derivada de R-N de ρ resp. μ.

La descomp. de L es única, la derivada de R-N también. Salvo μ-medida nula

- Abuso de notación $\nu = \lambda + f_0 d\mu$.

Otra versión: Todo igual, ν σ-finita, λ, ρ σ-finitas

f_0 solo medible, integrable en la "partición" σ-fin. de X

corolario: Con hipótesis del teorema anterior, $\begin{cases} \nu \ll \mu \Rightarrow \lambda = 0 \\ \nu \perp \mu \Rightarrow \rho = 0, \; (f_0 = 0) \end{cases}$

Unicidad de extensión de premedidas (Caratheodory)

- ρ premed. en $(X, \mathcal{A})$. ($\mathcal{A}$ álgebra)

ρ^* med. ext. asociada; μ_ρ medida, $\mathcal{M}$ σ-álg. completa del T. Carath.:

$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, $\rho^*|_{\mathcal{M}} = \mu_\rho$, $\rho = \mu_\rho|_{\mathcal{A}}$

(1) ν otra medida en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ / $\nu|_{\mathcal{A}} = \rho \Rightarrow \nu \leq \mu_\rho$.

(2) Hipótesis de (1), ρ finita (ssi μ_ρ finita) $\rightarrow \nu \equiv \mu_\rho$.

(3) Hip. de (1), μ_ρ σ-finita (o ν σ-finita) $\Rightarrow \nu \equiv \mu_\rho$.
no lo entiendo

(4) Hip. de (1), μ_ρ σ-finita $\Rightarrow \mu_\rho \equiv \nu$ en $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$

TIM 6.5