Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 2 *(Medidas, conjuntos medibles)*

1. Demostrar que en la definición de medida exterior de Lebesgue, se puede suponer que los intervalos del recubrimiento son abiertos o bien son cerrados

2. En $\mathbb{R}$, consideramos la medida de Lebesgue. Demuestra que:

   a) Todo conjunto nulo es medible.

   b) Todo intervalo es medible.

   c) Si A es medible y $A\Delta B$ es nulo, entonces B es medible y tiene la misma medida que A. *Recordatorio:* $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, diferencia simétrica de A y B.

3. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que la familia de conjuntos
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$
es una σ - álgebra en X.

4. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construir la σ - álgebra generada por
$$\mathcal{E} = \{\{a\}\} \;\text{ y por }\; \mathcal{E} = \{\{a\}, \{b\}\}$$

5. Probar que la σ-álgebra generada por los borelianos en $\mathbb{R}$ coincide con la σ-álgebra generada por cada una de las siguientes familias de conjuntos:
$$S_1 := \{[a, b] : \; a, b \in \mathbb{R}, \, a < b\},$$
$$S_2 := \{[a, b) : \; a, b \in \mathbb{R}, \, a < b\},$$
$$S_3 := \{(-\infty, b] : \; b \in \mathbb{R}\}.$$

6. Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en X. Probar que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una σ - álgebra en Y.

7. Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en Y. Probar que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en X

8. Determinar la σ álgebra engendrada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no-numerable

9. Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **álgebra** si cumple: i) $X \in \mathcal{A}$; ii) la unión **finita** de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$, y iii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Probar que una álgebra $\mathcal{A}$ en X es una σ - álgebra si y solo si es cerrada para las uniones numerables crecientes, (es decir si $E_i \in \mathcal{A}, \;\; E_1 \subset E_2 \subset, \ldots,$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$)

10. Probar que la unión de una sucesión creciente de álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset$ ... es un álgebra. Pero dar ejemplos de que:

    - la unión de dos álgebras puede no ser una álgebra, y
    - la unión de una sucesión $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset$ ... de σ-álgebras puede no ser una σálgebra.

11. ¿Existe alguna σ-álgebra infinita que tenga sólo una cantidad numerable de miembros?

12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{A}$, comprobar que
$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$$

13. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E \in \mathcal{A}$ fijo, definimos $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_E es una medida sobre $\mathcal{A}$.

14. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se definen las operaciones de conjuntos $\liminf E_j := \bigcup_n \bigcap_{j \geq n} E_j$; $\limsup E_j := \bigcap_n \bigcup_{j \geq n} E_j$. Sean $E_j \in \mathcal{M}$, $j \geq 1$. Probar que si $\mu(\cup E_j) < \infty$:

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$$
$$\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces:

a) $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$

b) Si existe $\lim E_j$, entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$

15. Sea X un conjunto infinito numerable. Consideremos la σ - álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos para $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; A \; \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } \; A \; \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a) Probar que μ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

b) Probar que $X = \lim_{n \to \infty} A_n$, para cierta sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$, tales que $\mu(A_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

16. Sea $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sea μ una medida que verifica $\mu(a_1) = \mu(a_2) = \mu(a_3) = \frac{1}{3}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$A_n = \{a_1, a_2\} \quad \text{si n es par}$$
$$A_n = \{a_3\} \quad \text{si n es impar}$$

Probar que $\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n)$.

17. Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que cada elemento x pertenece a un número finito de A_n para c.t.x. (Dicho de otra manera el conjunto de los puntos x que pertenecen a infinitos de los A_n, es decir, $\limsup A_n$, mide cero.)

18. Sea $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo, es decir, tal que todos los subconjuntos de un conjunto medible de **medida cero** también son medibles.. Sea $g : X_1 \to X_2$ una aplicación, $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$, $\quad \mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprobar que $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo. **NOTA: μ_2 se le denomina medida inducida en X_2 por la aplicación g.**