Teoría de la integral y de la medida

Hoja 7 *(medidas y σ-álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)*

1.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \qquad m = n \\ -1 & \text{si} \qquad m = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\int \mid f \mid d(\mu \times \nu) = \infty$, y $\int (\int f d\mu) d\nu$, $\int (\int f d\nu) d\mu)$ existen y son distintas.

2.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ medible; $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y) = f(x)g(y)$.

a). Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible

b). Si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X \times Y} h \, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f \, d\mu \right) \left(\int_Y g \, d\nu \right)$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

3.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). Sugerencia: empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\int_X f \, d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f.

4.- Sea $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en [0,1]), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x,y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sin embargo $\int_Y d\nu \int_X \chi_V d\mu = 0$; $\int_X d\mu \int_Y \chi_V d\nu = 1$.

Sugerencia: Si $V_n = (I_1^j \times I_1^j) \cup \ldots \cup (I_n^j \times I_n^j)$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots 2^n$, entonces $V = \cap_1^\infty V_n$. (Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar).

5.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el teorema de Fubini?

6.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1] \times [-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

7.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(x-y)g(y)$ es integrable en y para casi todo x. Para estos valores de x, definimos $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dm(y)$. Se dice que h es la convolución de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h| dm$.

8.- Sea $d\nu$ la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^2), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, $d\nu$ es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Si $d\nu_\phi$ es la medida inducida por $d\nu$ y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\quad \nu_\phi([1,e]) \quad$ y $\quad \nu_\phi((e^2, e^3])$.

9.- Si consideramos en $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, dm, y si $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas dm_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.