**Teoría de la integral y de la medida**
**Hoja n$^0$ 4** *(Integración y teoremas de convergencia)*

1.- Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x) = 0$, si $x$ es racional, $f(x) = n$, si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de $x$ en la escala decimal. Calcular $\int f(x)dm$, siendo $m$ la medida de Lebesgue.

2.- Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en [0,1]. Sea $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\frac{1}{3^p}$. Demostrar que $f$ es medible y calcular $\int f(x)dm$, siendo $m$ la medida de Lebesgue.

3.- Sea $f(x)$ la función definida en $(0,1)$ mediante $f(x) = 0$, si $x$ es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si $x$ es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x)dm$ siendo $m$ la medida de Lebesgue

4.- Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1d_2...$ de un $x \in (0,1)$. Decir por qué son convergentes las siguientes series:

$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$

y hallar $\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$ , expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

5.- Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]} \quad f_{2n} = \chi_{[1,2]}$ $n = 1, 2, \ldots$. Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

6.- Comprobar $\int_1^\infty \frac{1}{x}dm = \infty$, siendo $m$ la medida de Lebesgue.

7.- Sea $f_n \geq 0$, medible, $\lim f_n = f$ , $f_n \leq f \quad \forall n$. Comprobar que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$. (Sugerencia: Usar el lema de Fatou y que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$)

8.- Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$ siendo $f(x) \geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

9.- Sean $f \geq 0$ , $g \geq 0$ medibles $f \geq g$, $\int g d\mu < \infty$. Probar que

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu$$

10.- Sean $f_n(x)$ funciones medibles no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x) \downarrow f(x)$ y que para algún $k$ se verifica $\int f_k d\mu < \infty$. Probar que:

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n = f_k - f_{k+n}$).

11.- Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3, \ldots, \geq a_n, \ldots$, una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n = 0$. Sea $f_n(x) = a_n/x, \quad x > a > 0$. Comprobar que $f_n$ decrece a cero uniformemente pero $\int f_n dm = \infty$ para $\forall n$.

12.- Sea $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, definida mediante

$$f_n(x) = n, \text{ si } 0 \le x \le \tfrac{1}{n}$$
$$f_n(x) = 0, \text{ en otro caso.}$$

Comprobar que $f_n \to 0$, puntualmente pero $\int f_n dm = 1$.

13.- Sea $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ integrable. Sea $\{E_n\}$ una sucesión decreciente de conjuntos tal que $\cap_1^\infty E_n = \emptyset$ . Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$

14.- Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ medible y $f \in L^1(m)$. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dm$. Probar que $F(x)$ es continua. (Sugerencia: Usar teoremas de convergencia)

Probar que dados $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ números reales, se tiene

$$\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \le \int_{\mathbb{R}} |f| dm$$

15.- Sea $\mu(X) < \infty$ . Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\mu)$, con $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente. Demostrar que $f \in L^1(\mu)$ y que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ . (Sugerencia: Estudiar la sucesión $\varepsilon_n(x) = f_n(x) - f(x)$, escribir $f(x) = f_n(x) - (f_n(x) - f(x))$.

16.- Sea $A = [0,1] \cap \mathbf{Q}$ , entonces $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$. Definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante: $f_n(x) = 1$ si $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $f_n(x) = 0$ en los demás casos. Probar que $f_n$ es integrable Riemann, hallar $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$y estudiar si $f(x)$ es integrable Riemann

17.- Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}} = 1$.

(Sugerencia: Usar que para $n > 1$ $(1+\frac{x}{n})^n \ge \frac{x^2}{4}$ )

18.- Sea $f_n(x) = \dfrac{nx - 1}{(x\log n + 1)(1 + nx^2 \log n)}$ , $x \in (0,1]$. Comprobar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y sin embargo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$.

(Sugerencia: $f_n(x) = \dfrac{-1}{x\log n + 1} + \dfrac{nx}{(n\log n)x^2 + 1}$).

19.- Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} dx$ estudiando los casos $a < 0$ , $a = 0$, $a > 0$.

¿ Qué teoremas de convergencia son aplicables ?

20.- Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$.