Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 3 *(Funciones medibles)*

1.- Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$ siendo $P(n) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Definimos $X : \mathbf{N} \to \{0, 1, \ldots k-1\}$ mediante $X(n) =$ resto de n (modulo k), ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 18, Hoja 2) . Calcular $P^*(r)$, $0 \leq r \leq k-1$.

2.- Sea $\mathcal{A}$ la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ 1, & \text{si} \quad x \in (0, 1] \\ 2, & \text{si} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

¿Es f medible? ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$?

3.- Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
a) $| f |$ medible $\Rightarrow f$ medible.
b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible.
c) $f_1.f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible
d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible
d) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible

4.- Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en $\mathcal{A}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita. Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \mathcal{B}_n \ldots \quad \mu(\mathcal{B}_n\} < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f.

5.- Probar que si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica que $f^{-1}((r, \infty])$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si $r \in A$, con A denso en $\mathbb{R}$).

6.- Si $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n = 1, 2, \ldots$, son medibles, probar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n \to \infty} f_n(x)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$.

7.- Probar que el supremo de una familia no contable de funciones medibles con valores en $[-\infty, \infty]$ puede no ser medible (a menos que la σ-álgebra sea muy especial).

8.- Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Supongamos que tenemos una familia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de conjuntos medibles tal que $E_\alpha \subset E_\beta$ siempre que $\alpha < \beta$, $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} E_\alpha = X$ y $\bigcap_{\alpha \in \mathbf{R}} E_\alpha = \emptyset$. Probar que existe una función medible $f \colon X \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) \leq \alpha$ en E_α y $f(x) \geq \alpha$ en E_α^c para todo α. (*Pista.* Usar el ejercicio 5.)

9.- Probar que si $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es monótona, entonces f es medible Borel.

10.- *(Teorema de Egorov)* Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita (es decir, $\mu(X) < \infty$), sea $f_n \colon X \to \mathbf{C}$ una sucesin de funciones medibles que converge puntualmente en casi todo punto a un límite $f \colon X \to \mathbf{C}$, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existe un conjunto medible E de medida a lo sumo ε tal que f_n converge uniformemente a f fuera de E. Dar un ejemplo que demuestre que la afirmacin puede ser falsa cuando la medida μ no sea finita.