(1.1). $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona acotada.

(*) $\mathcal{P}_n = \{\underbrace{a + \frac{b-a}{n} \cdot i}_{t_i}\}_{i=0}^{n}$ $\quad \cancel{S(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_n)}$

Para $\varepsilon > 0$

> **Teorema.** Una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es Riemann-integrable si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$$U(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \underset{\parallel}{M_i} \le \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

WLOG, f monótona creciente $\max\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = t_{i-1}$

$$L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)$$

$$\Rightarrow U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ \square$$

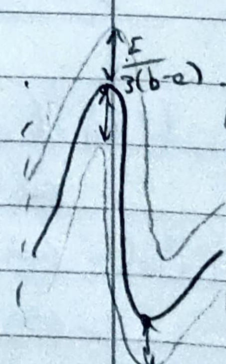
(1.2) $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{unif} f \iff$ Dado $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \ge n_0, x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Usando (*):

$$U(f, \mathcal{P}_m) - L(f, \mathcal{P}_m) = \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(M_i^f - m_i^f\right) =$$

$$\le \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\left(M_i^f - M_i^{f_n}\right) + \left(M_i^{f_n} - m_i^{f_n}\right) + \left(m_i^{f_n} - m_i^f\right) \right)$$



$$M_i^{f_n} \ge M_i^f - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad m_i^{f_n} \ge m_i^f - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\le \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \underbrace{\frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(M_i^{f_n} - m_i^{f_n}\right)}_{U(f_n, \mathcal{P}_m) - L(f_n, \mathcal{P}_m) < \frac{\varepsilon}{3}}$$

para n, m suficientemente grande cierto

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

B TIM (1.1)

(1.4) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ denso y medida nula.

Sea $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ conjunto numerable

$I_{n,\varepsilon} = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ es tq

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\varepsilon}$, $|I_{n,\varepsilon}| = \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |I_{n,\varepsilon}| = \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

(1.5) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $m^*(A_n) = 0$. Para cada n podemos encontrar

$\Rightarrow \exists \{I_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ intervalos tales que

$\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Por tanto, $\{I_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ es una familia de intervalos con cardinalidad numerable, tal que

$0 \leq \sum_{n,k=1}^{n} |I_{n,k}| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\cancel{I_{n,k}}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

D

(1.6) $(X, \mathcal{T})$ e.t. $A \subset X$ es denso (en X)

$\Leftrightarrow \bar{A} = X$

$\Leftrightarrow (A \subset B,\ B \text{ cerrado} \Rightarrow B = X)$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{T},\ A \cap V = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$

$\Rightarrow$ Sup. $A \subset [0,1]$, $m^*(A) = 1$, A no denso

$\Rightarrow \exists V$ abierto, $V = (a,b) \subset [0,1]$ tal que $(a<b)$

$A \cap (a,b) = \emptyset$, $(a,b) \neq \emptyset$

$\Rightarrow [0,a] = I_1$, $I_2 = [b,1]$ para $I_n = \left[0, \frac{\min(a, b-a)}{2^n}\right]$ $n > 2$

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1] \setminus (a,b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \frac{\min(a, b-a)}{4} + 1 - (b-a)$

$\Rightarrow \sum |I_n| \leq \frac{b-a}{4} - (b-a) + 1 = 1 - \frac{3}{4}(b-a) < 1$

Contradice que $1 = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \mid \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalos tq $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \}$

(1.8) $A \cup B \supset B \Rightarrow m^*(A \cup B) \geq m^*(B)$. Para $\varepsilon > 0$,

Como $m^*(A) = 0$, $m^*(B) = m^*(B)$

$\exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ recubrimiento por intervalos de A

tq $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ rec. por inter. de B:

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_k = m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\{I_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ recubrimiento numerable por intervalos de $A \cup B$ con

$m^*(A \cup B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| = m^*(B) + \varepsilon$

$\Rightarrow$

$m^*(A \cup B) \leq m^*(B)$. $\square$

(1.9)

$B_0 = [0, 1] \to 1$

$B_1 = [0, 0'5) \cup [0{,}6, 1] \to 1 - 0'1$

$B_2 = [0, 0'05) \cup [0'06, 0'15) \cup [0'16, 0'25) \cup [0'26, 0'35) \cup$
$\cup [0'36, 0'45) \cup [0'46, 0'5) \cup [0'6, 0'65) \cup$
$\cup [0'66, 0'75) \cup [0'76, 0'85) \cup [0'86, 0'95) \cup [0'96, 1]$

$\ell(B_0) = 1$

$\ell(B_1) = 0'5 + 0'4 = 0'9$

$\ell(B_2) = 0'05 + 4 \cdot 0'09 + 0'04 + 0'05 + 3 \cdot 0'09 + 0'04 = 0{,}81$
$= 0'1 + 0'08 + 0'54 = 0'72$

$\ell(B_j) = (0'9)^j$. $B = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_j$

TIM
1.2

(1.7) Def de capacidad (1.2) EDO
(1.8 b) $\rightarrow m^*(CA^a) \leq 1$ porque $CA^a \subset [0,1]$

$$\underbrace{m^*(CA) + m^*(A)}_{\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)} \geq m^*(A \cup CA) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) \geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$\Rightarrow m^*(CA) = 1$ □

(1.7) $I \subset \mathbb{R}$ intervalo (cerrado) cualquiera. $I = [a,b]$, $a<b$
$\{I_k\}_{k=1}^{n}$ recubrimiento finito por intervalos abiertos (*)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |I_k| \geq |I|$

Demostración de : I, por (*) $\exists (a_1,b_1) \in \{I_k\}_{k=1}^{n}$ intervalo que contiene a a: $a \in (a_1,b_1)$

Caso 1: $a_1 < a < b < b_1 \rightarrow$ terminamos
Caso 2: $a_1 < a < b_1 < b$

$\Rightarrow b_1 \in [a,b] \Rightarrow \exists (a_2,b_2) \in \{I_k\}_{k=1}^{n}$ intervalo
tq $b_1 \in (a_2,b_2)$ con $\begin{cases} a_2 < b_1 < b < b_2 \rightarrow \text{terminamos} \\ \text{ó } a_2 < b_1 < b_2 < b \end{cases}$

$\hookrightarrow b_2 \in I \Rightarrow \exists (a_3,b_3) \in \{I_k\}_{k=1}^{n} : b_2 \in (a_3,b_3)$ etc

Terminamos cuando el intervalo l-ésimo contenga a b: $a_l < b < b_l$

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \geq \sum_{i=1}^{l} (b_i - a_i) = b_l - a_1 + \sum_{i=1}^{l-1} (b_i - a_{i+1}) \geq$$

En todo caso, $b_i > a_{i+1}$, por construcción

$$\geq b_l - a_1 \underset{\substack{\uparrow \\ b<b_l,\ a_1<a}}{\geq} b - a = |I| \quad (*2)$$

• $(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \supset [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$
Con I_1, $k \geq 1$: $I_k = (0, \frac{1}{2^k})$, $|I_k| = \frac{1}{2^k} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset [a,b]$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = b - a + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$\Rightarrow m^*(I) \leq b - a$ (*1)

Por ser $[a,b]=I$ compacto, para cada recubrimiento por intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ existe un subrecubrimiento finito

$\{I_{j_k}\}_{k=1}^{n}$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|I_j| \geq \sum_{k=1}^{n}|I_{j_k}| \underset{(*2)}{\geq} |I| = b-a$$

$$\Rightarrow \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|I_j| , \{I_j\} \text{ recubrimiento por intervalos de } I\right\} \geq b-a$$

$$\Rightarrow m^*(I) \geq b-a \quad (*3)$$

$$(*3), (*1) \Rightarrow m^*(I) = |I| = b-a.$$

(1.2) Si $f_n \to f$ unif y $f, f_1, f_2, \dots$ integrables Riemann $[a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{f}$$

Por ser unif la convergencia

$\boxed{\forall \varepsilon>0} \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}:}$ $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right|} \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)}\,dx = \varepsilon$$

Tomando lo recuadrado, concluimos que (def. de límite)

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Fin 1.2