(3.1) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$. $P(n) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Fijo $k \in \mathbb{N}$, $X : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\} = \mathbb{N}_k$

$n \mapsto n \pmod{k}$

En $\mathbb{N}_k$ se induce la σ-álgebra:

$$\mathcal{A}_X = \{A \subset \mathbb{N}_k \,/\, X^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_k)$$

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P^*(A)$$

$0 \leq r \leq k-1$

$$P^*(r) = P(X^{-1}(\{r\})) = P(\{zk + r \,/\, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$$

$$= \sum_{z=0}^{\infty} P(zk+r) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{2^r (2^k)^z} =$$

$$= \frac{1}{2^r} \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^z$$

$$= \frac{1}{2^r} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} \right)$$

(Ojo, si $r=0$, consideramos a partir de $z=1$ $\leadsto \left(\frac{1/2^k}{1-1/2^k}\right) = P^*(0)$)

$$(1-x)\sum_{z=0}^{\infty} x^z = x^0 + \sum_{z=1}^{\infty} x^z - \sum_{x=1} x^z$$

(3.2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0] \\ 1 & x \in (0, 1] \\ 2 & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$f^{-1}((a, \infty)) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } a < 0 \\ (0, \infty) \text{ si } a \in [0, 1) \\ (1, \infty) \notin \mathcal{A}!! \text{ si } a \in [1, 2) \end{cases}$$

$\cap$
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\Downarrow$ f no medible

Forma general son
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ b & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}}$$

thm of 3.1

(3.3) Podemos tomar $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. $X = \{1, 2\}$
$E = \{1\}$, $E^c = \{2\}$

a) Falsa. $\boxed{\text{Sea } E \subset X \ / \ E \notin \mathcal{A} \not\ni E^c}$ (*)

$$f(x) = \chi_E(x) - \chi_{E^c}(x)$$

no es medible, pues $f^{-1}((0,2)) = E \notin \mathcal{A}$

Pero $|f|(x) \equiv 1$ sí medible

b) No: (*), $f_1 \equiv \chi_E$; $f_2 \equiv \chi_{E^c}$ no med.

Pero $f_1 + f_2 \equiv 1$

c) No, (*) $f_1 = \chi_E$; $f_2 \equiv \chi_{E^c}$ no med

$f_1 \cdot f_2 \equiv 0$ medible

(3.4) Existe $\{s_n\}$. medibles no negativas crecientes
$\downarrow^{n\to\infty}$ punto a punto
f

⇒ Sea B_n ... $\mu(B_n)$ ...

Tomamos $t_n = s_n \chi_{B_n}$ donde pomos.

Como μ σ-finita, $\exists \{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ /

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i, \quad \mu(H_i) < \infty$$

$$\Rightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i, \quad \mu(B_n) < \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) < \infty$$

$\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $x \in B_n$ $\forall n \geq n_0$ $\square$

(3.5) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ decreciente $/ \; x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$$\Rightarrow (a, \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, \infty]$$

$$\Rightarrow f^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}((x_n,\infty])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \; \square$$

(3.6) $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n = 1, 2, \ldots$ medibles $\Rightarrow A = \{x \in X / \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} \in \mathcal{A}$

Sol: $A \subseteq \{x \in X / h^{-1}(x) = 0\} = h^{-1}(\{0\}) = C \in \mathcal{A}$

Donde $h = \limsup f_n - \liminf f_n$ medible

$C_1 = \{\limsup f_n(x) = \pm\infty\} \in \mathcal{A}$. C_1

$C_2 = \{\liminf f_n(x) = \pm\infty\} \in \mathcal{A}$

$A = (C \setminus C_1) \setminus C_2 \Rightarrow A \in \mathcal{A} \; \square$

(3.7) Supremo de familia no numerable de funciones medibles no medible. (Con valores en $[-\infty, \infty]$)

Sol: $f_i : X \to [-\infty, \infty]$ $i \in I$ no contable, f_i med.

$f = \sup_I f_i : X \to [-\infty, \infty]$ no med.

Tomemos $X = \mathbb{R}$. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, E no medible (Lebesgue)

$f = \chi_E$ no es medible. → Por tanto necesariamente no contable

$\forall x_0 \in E$ $f_{x_0}(x) = \chi_{\{x_0\}}$ medible, pues $\{x_0\}$ med. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\sup_{x_0 \in E} f_{x_0} = \chi_E = f$ no medible!

Tema 9: 3.2

(3.8) $(X, \mathcal{A})$ esp. medible.

$\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ medibles / $E_\alpha \subset E_\beta$ si $\alpha < \beta$

$X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha$. $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha \overset{⊛}{=} \phi$

$\exists f : X \to \mathbb{R}$ / $f(x) \leq \alpha$ en E_α
$f(x) \geq \alpha$ en E_α^c

Se nos describe $f^{-1}((-\infty, \alpha]) = E_\alpha$

$\boxed{\text{Tomamos } f(x) = \inf\{\alpha\in\mathbb{R} / x \in E_\alpha\}}$

Este ínfimo existe, por ⊛

$\forall x \in X$ $\exists \alpha\in\mathbb{R}$ / $x \notin E_\alpha$ "más pequeño" que los E_β con $\alpha < \beta$

Por tanto $x \in f^{-1}((-\infty, \alpha])$

$\Leftrightarrow \alpha \geq \inf\{\beta\in\mathbb{R} / x \in E_\beta\} = f(x)$

$\Leftrightarrow x \in E_\alpha$ $\square$

(3.10) Pistas: Tao "Measure..."

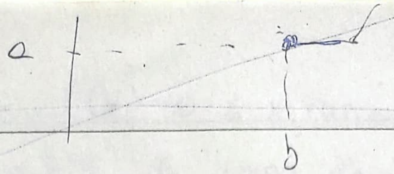
(3.9) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona. Hay que ver que $\forall a \in \mathbb{R}$ $E = f^{-1}((a,\infty))$ medible Borel. Voy a ver que $f^{-1}((a,\infty)) \in \{\phi, \mathbb{R}, (b,\infty), [b,\infty)\}$ para un $b\in\mathbb{R}$.

Dado a, dos casos: (1) $\nexists x\in\mathbb{R} / f(x) > a \Rightarrow E = \phi \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

(2) $\exists x_1 \in\mathbb{R} / f(x_1) > a$ (2.1) $\forall x\in\mathbb{R} / f(x) > a \Rightarrow E = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

(2.2) $\exists x_0 \in\mathbb{R} / f(x_0) \leq a$. además, si $x < x_0 \overset{⊛}{\Rightarrow} f(x) \leq f(x_0) \leq a$

Por tanto, el conjunto $E = \{x / f(x) > a\}$ tiene una cota inferior: x_0 (ya que $f(x) > a \overset{⊛}{\Rightarrow} x \geq x_0$)



$\Rightarrow \exists \inf E =: b$.

~~$x \geq b \Rightarrow f(x) \geq f(b)$~~

- Caso $b \in E \Rightarrow f(b) > a$

  ~~$\Rightarrow f(b) \geq a$~~

  - $x > b \Rightarrow f(x) \geq f(b) > a \Rightarrow x \in E$
  - $x < b \Rightarrow x \notin E$, pues $b = \inf E \Rightarrow b \leq x \ \forall x \in E$

  $E = [b, \infty)$

- Caso $b \notin E \Rightarrow f(b) \leq a$

Como $b = \inf E$, $E \neq \emptyset$ (2)

Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E / x_\varepsilon < b + \varepsilon$

Por tanto, si $x > b$, $\varepsilon = x - b$

$\exists x_{b-x} \in E / x_{b-x} < b + x - b = x$

$\Rightarrow a < f(x_{b-x}) \leq f(x) \Rightarrow x \in E$

Si $x < b \Rightarrow x \notin E$ pues $x \geq b \ \forall x \in E$

$E = (b, \infty)$ □

(3.10) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM $\mu(X) < \infty$. $f_n : X \to \mathbb{C}$ convergen puntualmente ctp $f(x) : X \to \mathbb{C}$. Dado $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow \exists E \in \mathcal{A}$ $\mu(E) \leq \varepsilon$ / $f_n \to f$ unif en E^c.

---

dem: Para cada $\eta > 0$, $A_\eta = \bigcap_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \in X / |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}}_{A_{\eta,N}}$

$A_{\eta,1} \supset A_{\eta,2} \supset \cdots$ $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow x \notin A_\eta$

Por tanto, $\mu(A_\eta) = 0$. Pues $\mu(X) < \infty$, $\lim_{N \to \infty} \mu(A_{\eta,N}) = 0 = \mu(A_\eta)$

Para $k \in \mathbb{N}$, tomamos $N_k \in \mathbb{N} / \mu(A_{1/k, N_k}) < 2^{-k} \varepsilon$

Tomamos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[A_{1/k, N_k}\right] \to \mu(A) < \varepsilon$

Afirmo: $f_n \to f$ unif en $X \setminus A$. Dado $\eta > 0$, tomo $k > 1/\eta$.

Si $x \in X \setminus A$, $n \geq N_k \Rightarrow x \in X \setminus A_{1/k, N_k}$ por lo que

$|f_n(x) - f(x)| < 1/k < \eta$ □

tpm ej 3-3

(3.6) $f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ medibles $\forall n$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g = \limsup f_n \\ h = \liminf f_n \end{array}\right\} : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medibles}$$

$$\{\infty, -\infty\} \in \mathcal{B} \Rightarrow \underbrace{C_1 = \{x \in X / g(x) = \pm\infty\},\ C_2 = \{x \in X / h(x) = \pm\infty\}}_{\in \mathcal{A}}$$

El conjunto $A_1 = \{x \in X / h(x) = g(x)\}$

$$= \{x \in X / h(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X / h(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}$$

medible: $\{x \in X / h(x) > g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{x \in X / h(x) > q > g(x)\}}_{h^{-1}((-\infty, q)) \cap g^{-1}((q, \infty))}$, $h^{-1}((-\infty, q)) \in \mathcal{A}$, $g^{-1}((q, \infty)) \in \mathcal{A}$

$$A = (A_1 \setminus C_1) \setminus C_2 \in \mathcal{A}$$