(2.1) Hecho en clase

(2.3) $X=\{a,b,c,d\}$. $\mathcal{A}=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, X\}$

$C(M)=X\setminus M$ $\quad C\downarrow$

$\mathcal{A}=\{X, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}, \{a,b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset\}$

$\Rightarrow \forall M\in\mathcal{A}\ M^c\in\mathcal{A}$.

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{a\}^c$	$\{b\}^c$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{a\}^c$	$\{b\}^c$	X
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}^c$			
$\{b\}$								
$\{a,b\}$								
$\{c,d\}$								
$\{a\}^c$								
$\{b\}^c$								
X								

etc. $\forall M,N\in\mathcal{A}\ M\cup N\in\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ finito, si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathcal{A}$,

$\exists\{B_j\}_{j=1}^{n}\subset\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$ t.q.

$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{j=1}^{n}B_j$, (por el principio del palomar?)

Por inducción en n, si $\bigcup_{j=1}^{n-1}B_j\in\mathcal{A}\ \forall\{B_j\}_{j=1}^{n-1}\in\mathcal{A}$

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n}B_j=B_n\cup\bigcup_{j=1}^{n-1}B_j\in\mathcal{A}\Rightarrow$ cierto para $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$, si $\{B_j\}_{j=1}^{n}\subset\mathcal{A}\Rightarrow\bigcup_{j=1}^{n}B_j\in\mathcal{A}$.

$\Rightarrow\forall\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$.

(2.4) $X=\{a,b,c,d\}$

$\mathcal{M}(\underbrace{\{\{a\}\}}_{\mathcal{E}_1})\stackrel{?}{=}\{\emptyset,\{a\},\{b,c,d\},X\}=\mathcal{A}_{\{a\}}=\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}$

$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}\supset\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ (1)

$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}$ claramente σ-álgebra. Además, $\forall$ σ-álgebra $\mathcal{B}$

t.q. $\{a\}\in\mathcal{B}$; $X,\emptyset\in\mathcal{B}$ por def de σ-álgebra,

$\{a\}^c\in\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}\subset\mathcal{B}$.

Es decir, $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}\subset\underbrace{\bigcap_{\mathcal{E}_1\subset\mathcal{B}\ \sigma\text{-álgebra}}\mathcal{B}}_{\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ $\Big|$ $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$

(1)

Im 2.1.

$\mathcal{E}_2 = \{\{a\},\{b\}\}$

En este caso, la candidata es $\mathcal{A}$ del ej. (2.3).

- $\mathcal{A}$ σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{A}$
- Si $\mathcal{B}$ σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}_2$, entonces

$X, \emptyset \in \mathcal{B}$ por ser σ-álgebra

$\{a\}^c, \{b\}^c, \underset{\{a\}\cup\{b\}}{\underset{\parallel}{\{a,b\}}}, \underset{\{a,b\}^c}{\underset{\parallel}{\{b,c\}}}, \{a\}, \{b\} \in \mathcal{B}$ (uniones y complementarios)

$\Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

Es decir, $\displaystyle\bigcap_{\substack{\mathcal{B}\ \sigma\text{-álgebra} \\ \text{que contiene} \\ \text{a } \mathcal{E}_2}} \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \quad \therefore \mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$

$= \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$

(2.5) La σ-álgebra generada por $\mathcal{S} = \{(a,b) : a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ es la misma que la generada por

$S_1 = \{[a,b] : a<b \in \mathbb{R}\}$ $\quad S_2 = \{[a,b) : a<b \in \mathbb{R}\}$

$S_3 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$

Sean $S, T \in 2^X$ no vacíos:

$S \in \mathcal{M}(T) \wedge T \in \mathcal{M}(S) \Rightarrow \mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(S)$

<u>Dem</u>: $S \subset \mathcal{M}(T) \Rightarrow \mathcal{M}(T)$ σ-álgebra que contiene a $S \Rightarrow \mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}(T)$

$T \subset \mathcal{M}(S)$ σ-álgebra $\Rightarrow \mathcal{M}(T) \subset \mathcal{M}(S)$ $\square$

$[\,\cdot\,,\quad\cdot\,]$

Directamente pruebo todo:

- $m(S) \subset m(S_1)$

Sea $(a,b) \in S \Rightarrow (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right]}_{\in S_1}$

$\Rightarrow (a,b) \in m(S_1) \therefore S \subset m(S_1) \Rightarrow m(S) \subset m(S_1)$

- $m(S_1) \subset m(S_2)$

Sea $[a,b] \in S_1 \Rightarrow [a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a, b + \frac{1}{n}\right)}_{\in S_2}$

$\Rightarrow [a,b] \in m(S_2) \therefore m(S_1) \subset m(S_2)$

- $m(S_2) \subset m(S_3)$

Sea $[a,b) \in S_2 \Rightarrow [a,b) = (-\infty, a)^c \cap (-\infty, b)$

$\left[\begin{array}{l} \forall b \in \mathbb{R},\ (-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right]}_{\in m(S_3)} \Rightarrow (-\infty, b) \in m(S_3) \\ \qquad \Rightarrow (-\infty, b)^c \in m(S_3) \end{array}\right.$

$\Rightarrow [a,b)$ intersección $\underset{\text{finita}}{\uparrow}$ de elem. de $m(S_3)$.

$\Rightarrow [a,b) \in m(S_3) \therefore S_2 \subset m(S_3)$

- $m(S_3) \subset m(S)$

Sea $(-\infty, b] \in S_3$

$\left.\begin{array}{l} (-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(b-n, b)}_{\in S} \in m(S) \\ (b-1, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(b-1, b+1/n)}_{\in S} \in m(S) \end{array}\right\} (-\infty, b] = (-\infty, b) \cup (b-1, b]$

$\Downarrow$

$(-\infty, b] \in m(S)$

Entonces $m(S) = m(S_1) = m(S_2) = m(S_3)$ $\square$

2.2

(2.6) Sea $f : X \to Y$. $\mathcal{A} \subset 2^X$ σ-álgebra en X

$\mathcal{B} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ σ-álgebra

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $\emptyset \subset Y$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$

  y $Y \subset Y$, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$

- Sean $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$

$$\Rightarrow f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(E_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$$

Sea $E \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(E^c) = \{x \in X : f(x) \notin E\}$

$$= X \setminus \{x \in X : f(x) \in E\} = \underbrace{(f^{-1}(E))^c}_{\in \mathcal{A}}$$

Como $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$,

$\Rightarrow E^c \in \mathcal{B}$ $\square$

(2.7) No vacía ✓ porque $\mathcal{A} \neq \emptyset$

- $R \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{A} : R = f^{-1}(E)$

$$\Rightarrow R^c = (f^{-1}(E))^c = f^{-1}(\underbrace{E^c}_{\in \mathcal{A}}) \in \mathcal{B}$$

- $\{f^{-1}(E_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}_{\in \mathcal{A}}\Big) \in \mathcal{B} \quad \square$$

(2.8) $\mathcal{K} = \{M \subset X : |M| \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \setminus \emptyset$

$\mathcal{B} = \{M \subset X : (M = \{\emptyset, X\})$ ó $(M$ finito/numerable$)$ ó $(X \setminus M$ finito o numerable$)\}$

- $\mathcal{B}$ σ-álgebra tq $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$:

Dem
- $\mathcal{B} \neq \emptyset$ obvio porque $\emptyset$; los complementarios están, por def de $\mathcal{B}$
- Sean $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$:
  - Si todo B_i finito ó numerable (ó $\emptyset$), unión de conjuntos numerables (o finitos) es numerable (ó $\emptyset$) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$.
  - Si un B_k es tq. $X \setminus B_k$ finito/numerable/vacío

$$\Rightarrow X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c \subset B_k^c, \text{ que es}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c \text{ finito/numerable/vacío}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}.$$

$\therefore$ $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}$

- Si $\mathcal{A}$ σ-álgebra con $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ por def. de σ-álgebra
  - (·) si M es finito $\Rightarrow M \in \mathcal{K} \Rightarrow M \in \mathcal{A}$
  - (··) si M numerable, $M = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\mathcal{A}}{\{a_i\}} \in \mathcal{A}$
  - Si $X \setminus M$ numerable ó finito $\Rightarrow X \setminus M \in \mathcal{A}$ por (·), (··) $\Rightarrow M \in \mathcal{A}$

Es decir, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ $\therefore$ $\mathcal{B} \subset m(\mathcal{K})$ $\square$

2.3

(2.9) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ÁLGEBRA si: i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

iii) $\forall A \in \mathcal{A},\ A^c \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ álgebra en X: $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ cerrada para uniones numerables crecientes.

($\Leftarrow$) Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$

Definimos $E_1 = A_1$, $E_2 = A_1 \cup A_2, \dots, E_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

Entonces $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ pues son uniones finitas de elementos de $\mathcal{A}$. Además $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \dots$

Como $\mathcal{A}$ cerrada para uniones numerables crecientes:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A} \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad \square$$

($\Rightarrow$) Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset \dots$

Por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ cerrada para uniones numerables crecientes.

(2.10) Sean $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$ álgebras. $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$

(i) $X \in \mathcal{A}_i \ \forall i > 0 \Rightarrow X \in \mathcal{A}$

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ una unión numerable creciente $\exists k \in \mathbb{N} : \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}_k$ álgebra

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : A \in \mathcal{A}_k$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : A^c \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$\therefore \mathcal{A}$ álgebra

- $X = \{a, b, c, d\}$
$A_1 = \{\phi, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$
$A_2 = \{\phi, \{b\}, \{a, c, d\}, X\}$ } σ-álgebras ⇒ álgebras
Pero $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ no álgebra (ni σ-álg.) porque

$\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
- La unión de una sucesión $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots$ de σ-álgebras puede no serlo. ? (***)

(2.12) $\mu(E) + \mu(F) = \mu((E \cap F) \cup (E \setminus F))$ Disjuntos
$+ \mu((F \cap E) \cup (F \setminus E))$

$= \mu(E \cap F) + \mu(E \cap F) + \mu(\underbrace{E \cap F^c}_{E \setminus F}) + \mu(\underbrace{F \cap E^c}_{F \setminus E})$

disjuntos

$= \mu(E \cap F) + \mu(\underbrace{(E \cap F) \cup (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)}_{E \cup F})$ □

(2.13) $\mu_E(\phi) = \mu(\phi \cap E) = \mu(\phi) = 0$
Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$

$\mu_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(E \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right]\right) =$

$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap E)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_E(A_i)$ □

~~(2.11) Si existe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$~~

(***) Idea: Tomar $A_j \in \mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}$ para $j \in \mathbb{N}$
¿Puede que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$?

2.4

(2.14) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida $\begin{cases} \liminf E_j = \bigcup_n \bigcap_{j\geq n} E_j \\ \limsup E_j = \bigcap_n \bigcup_{j\geq n} E_j \end{cases}$

$E_j \in \mathcal{A}$, $j \geq 1$. $\mu(\bigcup E_j) < \infty$ (****)

$H_n = \bigcup_{j\geq n} E_j \longrightarrow H_1 \supset H_2 \supset \dots$; $H_n \underset{(\ast\ast\ast)}{\supseteq} E_j \ \forall j \geq n$

$I_n = \bigcap_{j\geq n} E_j \longrightarrow I_1 \subset I_2 \subset \dots$; $I_n \underset{(\ast)}{\subseteq} E_m$, $m \geq n$

a) $\mu(\underline{\lim}\, E_j) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \overset{\downarrow}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu(I_n)}_{= \sup_n \mu(I_n)} \underset{(\ast\ast)}{\leq} \underline{\lim}\, \mu(E_n)$

(**) $(\ast) \rightarrow \mu(I_n) \leq \mu(E_m)$, $m \geq n$

Por tanto, $\underbrace{\inf_{m\geq n} E_m \geq \mu(I_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

existe sup, por (****)

$$\Downarrow$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} E_m \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) \quad \square$$

$\mu(\overline{\lim}\, E_j) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu(H_n)}_{\inf_n \mu(H_n)} \geq \overline{\lim}\, \mu(E_j)$

$\inf_n \mu(H_n) \geq \inf_n \sup_{j\geq n} \mu(E_j)$

$\mu(H_n) \underset{(\ast\ast\ast)}{\geq} \sup_{j\geq n} \mu(E_j)$

b) Si existe $\lim E_j = \underline{\lim}\, E_j = \overline{\lim}\, E_j$

$$\overline{\lim}\, \mu(E_j) \leq \mu(\lim E_j) \leq \underline{\lim}\, \mu(E_j) \leq \overline{\lim}\, \mu(E_j)$$

Por def de $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$

$\Rightarrow \underline{\lim}\, \mu(E_j) = \overline{\lim}\, \mu(E_j) = \lim E_j$

$\mu(\lim E_j)$ $\square$

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, $\underbrace{\sup_{n\geq m} x_n}_{y_m} \geq \underbrace{\inf_{n\geq m} x_n}_{z_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} z_m \text{ sucesión creciente} \\ y_m \text{ sucesión decreciente} \end{cases}$

$\dots y_{m-1} \geq y_m \geq z_m$,

$\Rightarrow \inf_m y_m \geq \sup_m z_m \quad \square$

(2.15) X infinito numerable. $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ σ-álg.

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ infinito} \end{cases}$

b) $A_n = \{x_m\}_{m=1}^{n}$

$A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$X = \lim_{n\to\infty} A_n$, pues $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = X$, $\overline{\lim} A_n = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n = \bigcap X = X$

$\underline{\lim} A_n = \bigcup_m \underbrace{\bigcap_{n\geq m} A_n}_{A_m} = \bigcup_m A_m = X$

a) Caso base: Sea $A_i \subset X$ $i=1,2$ disjuntos

· ~~Si A_1 es finito,~~ $A_1 \cup A_2$ finito también

· Si ambos finitos, $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) = 0$

$\Rightarrow \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2)$

· Uno finito, otro infinito $\rightarrow A_1 \cup A_2$ infinito

$\Rightarrow \infty = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0 + \infty$

. Ambos infinitos: $A_1 \cup A_2$ inf. $\rightarrow \infty = \infty + \infty$.

Supongamos que para todo $m \leq n$ se cumple:

Sean $A_1, \dots, A_m \subset X$ disjuntos dos a dos

$\Rightarrow \mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j)$

- Ahora, para $\{A_i\}_{i=1}^{n+1} \subset X$ disjuntos dos a dos

$\Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n$, A_{n+1} disjuntos dos a dos,

(HI) $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = r$, $s = \mu(A_{n+1})$

Como en caso base,

$\begin{cases} r,s = \infty \Rightarrow \bigcup_{m\leq n+1} A_m \text{ infinito} & \infty + \infty = \infty \\ r = \infty, s = 0 \Rightarrow \bigcup_{m\leq n+1} A_m \text{ infinito}, & \infty + 0 = \infty \\ r = s = 0 \Rightarrow \bigcup_{m\leq n+1} A_m \text{ finito}, & 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n+1} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n+1} \mu(A_m)$

$\square$

Con el ejemplo $A_i = \{x_i\}$ vemos que $\forall i \in \mathbb{N}$ $\mu(A_i) = 0$,

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \neq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(X) = \infty$.

(2.16) $\liminf A_n = \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} A_n = \bigcup_m \phi = \phi \Rightarrow \underline{\mu(\liminf A_n) = 0}$

La sucesión $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots\}$ ⊛

⊛ $\Rightarrow \inf_{n\geq m} \mu(A_n) = \frac{1}{3} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underline{\sup_m \inf_{n\geq m} \mu(A_n) = \liminf \mu(A_n) = \frac{1}{3}}$.

⊛ $\Rightarrow \sup_{n\geq m} \mu(A_n) = 2/3 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{\limsup \mu(A_n) = 2/3}$

$\limsup A_n = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n = \bigcap_m X = X \Rightarrow \underline{\mu(\limsup A_n) = 1}$

(2.17) $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$

Tengo que ver $\mu(\underbrace{\limsup A_n}) = 0$

$\{x$ que pertenecen a infinitos $A_n\}$

(**) ~~$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \mu(\limsup A_n)$~~

~~$\limsup A_n = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n \subset \bigcap_m \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$~~

~~Dos casos: $\limsup A_n = \phi \Rightarrow$ trivial~~

~~$\limsup A_n \neq \phi \Rightarrow \exists x \in \limsup A_n : \mu(\{x\}) > 0$~~

~~$\Rightarrow \exists \{A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tq $x \in A_{n_j} \ \forall j \in \{1, 2, \dots\}$~~

~~(**) Supongamos $\limsup A_n$ con medida $> 0 \Rightarrow \exists x \in \limsup A_n$:~~

~~$\mu(\{x\}) > 0$, de lo contrario,~~

$0 \le \mu(\overline{\lim}\, A_n) = \mu\Big(\bigcap_m \underbrace{\bigcup_{n\ge m} A_n}_{H_m:\ H_1 \supset H_2 \supset \dots}\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n\ge m} A_n\Big) \le$

$\le \lim_{m\to\infty} \sum_{n\ge m} \mu(A_n) \overset{(*)}{=} 0$ □

Si $\{x_n\} \subset [0,\infty)$ tq $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ~~acotada~~ convergente,

$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ creciente y acotada, convergente.

$\Rightarrow$ y_n de Cauchy $\Rightarrow y_{n+1}$

$\Big\{\sum_{n\ge m} \mu(A_n)\Big\}_m$ acotada inferiormente y decreciente $\Rightarrow$ converge.

Si $\sum_{n\ge m} \mu(A_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} r > 0$, entonces

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists m_0 : \forall m \ge m_0$

$\Big|\sum_{n\ge m} \mu(A_n) - r\Big| = \Big|\sum_{n\ge m} \mu(A_n) - r\Big| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\sum_{n\ge m} \mu(A_n) < r + \varepsilon$

$\sum_{n\ge m} \mu(A_n) > r - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\sum_{n\ge m} \mu(A_n) \ge r \quad \forall m$

$(*)$ $\lim_{m\to\infty} \sum_{n\ge m} \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} \mu(A_n) =$

$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ N\to\infty}} \Big[\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \sum_{n=1}^{m(-1)} \mu(A_n)\Big] = 0$

(2.18) $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ EdM completo: todo subconjunto de un conjunto medible de medida cero son medibles.

Sea $g: X_1 \to X_2$ aplicación. $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$

$\mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$

2.6

$\mathcal{A}_2$ σ-álgebra:

- $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, pues $\emptyset \in \mathcal{A}_2$: $\emptyset = g^{-1}(\emptyset)$, $\emptyset \subset X_1 \in \mathcal{A}_1$.
- $A \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \underset{\underset{g^{-1}(A^c)}{\|}}{g^{-1}(A)^c} \in \mathcal{A}_1$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_2$.

- $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow g^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}_1 \ \forall i \in \{1, \ldots\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} g^{-1}(A_i)}_{\| \atop g^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)} \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2 \quad \square$$

Por tanto, $\mathcal{A}_2$ σ-álgebra

μ_2 medida:

- $\mu_2(\emptyset) = \mu_1(g^{-1}(\emptyset)) = \mu_1(\emptyset) = 0$.
- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_2$ disjuntos dos a dos

$\Rightarrow \{g^{-1}(A_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_1$ disjuntos dos a dos (*)

Dem: $A, B \in A_2$ disjuntos
$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) =$
$= \{x \in X_1 : g(x) \in A\} \cap \{x : g(x) \in B\}$
$= \{x \in X_1 : g(x) \in A \wedge g(x) \in B\}$
$= \{x \in X : g(x) \in A \cap B\} = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu_1\left(g^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) =$$
$$= \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} g^{-1}(A_i)\right) \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(g^{-1}(A_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(A_i) \quad \square$$

- $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ completo:

Sea $A \in \mathcal{A}_2$ con $\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(g^{-1}(A)) = 0$

Sea $B \subset A \Rightarrow g^{-1}(B) \subset g^{-1}(A) \Rightarrow g^{-1}(B)$ μ_1-medible, pues $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ completo $\Rightarrow B \in \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow B$ medible (μ_2) $\square$.

~~1.11) Sea $\mathcal{A}$ numerable infinita. $\mathcal{A} = \{E_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$~~
~~$\Rightarrow \exists\, \mathcal{f}' \subset \mathcal{A}$ $\mathcal{f}'$ infinita con conjuntos disjuntos:~~
~~$\mathcal{f}' = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_1 = E_1$~~

(2.2)

(a) Todo conjunto E tal que $m^*(E) = 0$ es medible:

dem: Sea $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

$$m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A) \overset{?}{=} m^*(A)$$

Por un lado, $m^*(E \cap A) \leq m^*(E) = 0$

y $m^*(\underbrace{E^c \cap A}_{\subset A}) \leq m^*(A)$

Por tanto, $\underbrace{m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A)}_{\geq} \leq m^*(A)$

$$m^*((E \cap A) \cup (E^c \cap A)) = m^*(A) \quad \square$$

(b) Sea $[a,b] = I$ un intervalo de $\mathbb{R}$

Sea $A \subset \mathbb{R}$.

$$m^*(I \cap A) + m^*(I^c \cap A) \geq m^*(A)$$

prop triviales de m^*

Sea $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ un recubrimiento ~~finito~~ numerable por intervalos de A, entonces podemos encontrar $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ recubrimientos numerables de $I \cap A$, $I^c \cap A$ (respectivamente) tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| + \sum_{n=1}^{\infty} |S_n|$

Construimos las familias de la siguiente forma:

Para I_k, como I es un intervalo,

$$\begin{cases} I_k \cap I \text{ es un intervalo que interseca a } I \text{ ó es vacío} \\ I_k \cap I^c \text{ es vacío ó un intervalo o la unión de dos intervalos.} \end{cases}$$

Añadimos, si procede, $I_k \cap I$ a los J_j

Añadimos, si procede, $I_k \cap I^c$ (uno o dos intervalos) a los S_n

2.7.

De este modo, cada I_k se divide en uno, dos, o tres intervalos disjuntos y así se forman $\{J_j\}$, $\{S_n\}$. Es claro que $\sum |I_k| = \sum |J_j| + \sum |S_n|$.

Como $\forall k$ $\exists$ intervalos en $\{J\}, \{S\}$ tq

$$I_k = J_j \text{ ó } J_j \cup S_n \text{ ó } J_j \cup S_{n_1} \cup S_{n_2}$$

Con $J_j = I_k \cap I$ si existe

$S_{n_1} \cup S_{n_2} = I_k \cap I^c$

$\{I_k\}$ recubrimiento de A

$\Rightarrow \{I_k\}$ recubrimiento de $A \cap I$

$\Rightarrow \{I_k \cap I\}$ recubrimiento de $A \cap I$

$\Rightarrow \{J_j\}$ recubrimiento numerable por intervalos de $A \cap I$

$\Rightarrow \{I_k \cap I^c\}$ recubrimiento de $A \cap I^c$

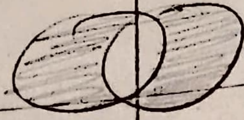
$\Rightarrow \{S_n\}$ recubrimiento numerable por intervalos de $A \cap I^c$.

Como para cada recubrimiento de A, encontramos sendos recubrimientos de $A \cap I$, $A \cap I^c$ con exactamente la misma suma, podemos afirmar

$$m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \leq m^*(A) \quad \square$$

2.2 c) A medible $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ mdo

Sea $E \subset \mathbb{R}$. $m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E)$



$m(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.

$\Rightarrow = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

- $m^*(E \cap B) = m^*(E \cap B \cap A) + m^*\big(\overset{0}{\cancel{\underset{\substack{\cap \\ (B \cap A^c)}}{E \cap B \cap A^c}}}\big)$ mide 0

$\Rightarrow \begin{cases} m^*(A \cap B^c) \leq m^*(A \Delta B) = 0 \\ m^*(B \cap A^c) \leq m^*(A \Delta B) = 0 \end{cases}$

- $m^*(E \cap B^c) = m^*\big(\overset{0}{\cancel{\underset{\substack{\cap \\ (B^c \cap A)}}{E \cap B^c \cap A}}}\big) + m^*(E \cap B^c \cap A^c)$ mide 0

$m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c) =$

$= m^*(\underset{\substack{\cap \\ (E \cap A)}}{E \cap B \cap A}) + m^*(\underset{\substack{\cap \\ (E \cap A^c)}}{E \cap B^c \cap A^c})$

$\leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E)$

$\Rightarrow$ B medible $\square$

$\begin{cases} m^*(A) = m^*(B \cap A) + m^*(\overset{0}{\cancel{B \cap A^c}}) \leq m^*(B) \\ m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(\overset{0}{\cancel{A \cap B^c}}) \leq m^*(A) \end{cases}$

$\Rightarrow m^*(A) = m^*(B)$ $\square$

2.8

(2.10) $\underbrace{\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots}_{\sigma\text{-álgebras}}$ / $\overset{\mathcal{A}}{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j}$ no σ-álgebra.

Tomo $X = \mathbb{N}$.

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1\}^c, \mathbb{N}\}$

$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1\}^c, \{2\}^c, \{1,2\}^c, \mathbb{N}\}$

$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\},$
$\{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c, \{1,2\}^c, \{2,3\}^c, \{1,3\}^c, \{1,2,3\}^c, \mathbb{N}\}$

$\vdots$

$\mathcal{A}_n = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\}) \cup \{A^c / A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\}$

Sin embargo, el conjunto $\{n : n \text{ par}\} = \bigcup_{n \text{ par}} \{n\}$ es ~~unión~~ numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$,

pero $\{n : n \text{ par}\} \notin \mathcal{A}_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{n : n \text{ par}\} \notin \mathcal{A}$.

Los elementos son $\begin{cases} \text{finitos} \\ \text{ó} \\ \text{con complementario finito.} \end{cases}$

(2.11) Si $\mathcal{A}$ infinita $\Rightarrow$ card $\mathcal{A} \geq$ card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ = card $\mathbb{R}$ > card $\mathbb{N}$

(1) ~~Sea~~ Consideramos una familia $f = \{E_1, E_2, \ldots\} \subset \mathcal{A}$ /

$\cancel{E_k \neq E_j}$ $\cancel{\forall j \neq k}$ $E_k \neq \emptyset \ \forall k$, $E_j \cap E_k = \emptyset \ \forall j \neq k$

(2) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ inyectiva (Por ser disjuntos dos a dos)

$H \longmapsto \bigcup_{k \in H} E_k$

$\Rightarrow$ card $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq$ card $\mathcal{A}$

Supongamos $\mathcal{A}$ numerable: hacemos (1).

- Como $\mathcal{A}$ infinito, X infinito.

Dado $x \in X$, defino $E_x = \underset{\uparrow}{\cap}\{E \in \mathcal{A} \,/\, x \in E\} \overset{\uparrow}{\in} \mathcal{A}$.

numerable, pues $\mathcal{A}$ numerable

(A). Si $y \in E_x$, considero E_y. Demostramos $E_y = E_x$:

- $E_y \subset E_x$ porque si no fuera así,

$y \in E_y \cap E_x \subsetneq E_y$, lo que contradice def E_y

- ~~Simétricamente~~, $E_x \subset E_y$: porque. Sup $E_x \not\subset E_y$:

Caso 1 $x \in E_y \Rightarrow E_x \subset E_y$ trivial ✱

Caso 2: $x \notin E_y \Rightarrow \underbrace{E_x \setminus E_y}_{} \subsetneq E_x$

$\mathcal{A} \ni E_x \cap E_y^c \subsetneq E_x$ ~~contra~~ E_x

$x^{\in}$ ✱ un medible más pequeño que E_x

De (A) se deduce: $E_x \cap E_y \neq \emptyset \Rightarrow E_x = E_y$

$\mathcal{f} = \{E_x \,/\, x \in X\}$ familia de disjuntos 2 a 2.

(B) $\mathcal{A}$ contenida en la sigma-álgebra generada por f

Si $E \in A \Rightarrow E = \bigcup\{E_x \in f \,/\, x \in E\}$

Por tanto, $\underline{\text{card } f = \infty}$ □

Si card $f < \infty \Rightarrow m(f)$ tiene card. finito

Pero $\mathcal{A} \subset m(f)$.

2.9