Integrar: Intro

- Cauchy (funciones continuas): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$. partición.

$S_c(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$

$|||P|||=\max\{x_i-x_{i-1} / i=1,\dots,n\}$. $\int_a^b f := \lim_{|||P|||\to 0} S_c(f,P)$.

S(18-19)

- Riemann (1854). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. ¿Algunas no continuas se pueden integrar?

Darboux

$m_i=\inf\underbrace{\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}}_{A_i}$. $M_i=\sup A_i$

$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$, $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$

$\overline{\int_a^b} f=\inf_P U(f,P)$. $\underline{\int_a^b} f=\sup_P L(f,P)$. f integrable si $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$

- Du Bois Reymond. una función acotada en $[a,b]$ es integrable si su conjunto de puntos de discontinuidad es "pequeño"

Problema: medir conjuntos arbitrarios contenidos en $\mathbb{R}$.

- $m((a,b))=\dots=m([a,b])=b-a$
- Si $A\subset\mathbb{R}$ es abierto, $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ disjuntos dos a dos (componentes conexas)

$\Rightarrow m(A)=\sum_{k=1}^{\infty} m((a_k,b_k))$.

- Definición provisional: (Lebesgue, principios S20) – MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE

Dado $E\subset\mathbb{R}$, $m^*(E)=\inf\{m(A): A \text{ abierto}, E\subset A\}$.

$=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k): a_k<b_k\ \forall k \text{ y } E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\}$

Conjunto de Cantor: $C_0=[0,1]$. $C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$

$C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$

⋮ (se quita el tercio central de cada subintervalo).

$\mathcal{C}=\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$: No numerable y $\boxed{m^*(\mathcal{C})=0}$ Ejercicio - fácil $m^*(\mathcal{C}_i)=\frac{1}{3^i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$

Teorema: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada es integrable Riemann si y solo si el conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida (exterior) cero.

__Fallo de la Integral de Riemann__. Con hipótesis razonables, si tengo una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables en $[a,b]$ y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, puede ocurrir

$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$. Incluso, puede ocurrir que f no sea integrable Riemann.

__Ejemplo__: $\mathbb{Q} \subset [0,1]$, $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\} = \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \dots\}$ ← p. ej.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{otro caso}: x \in [0,1] \end{cases}$$

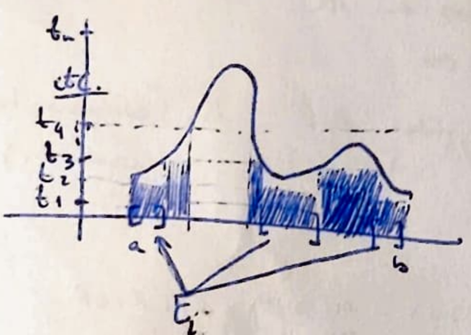
Cada f_n es integrable: discont. en un número finito de puntos.

El límite: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (punto a punto) : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cos(\pi m! x)$

f no integrable en $[0,1]$

$\Rightarrow$ Necesitamos una definición mejor de integral (Lebesgue 1902).

__Integral de Lebesgue__:



$$E_k = \{x \in [a,b] : t_{k-1} \le f(x) < t_{k+1}\}$$

$$S(t_0, \dots, t_k, f) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot m^*(E_k).$$

Medida (exterior) de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Notación: $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $|I|$ = longitud del intervalo: $|(a,b)| = b-a$. $|(-\infty, b)| = \infty$.

def Dado $E \subset \mathbb{R}$, definimos su medida exterior de Lebesgue:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,/\, \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ intervalos}, \ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Propiedades: a) $m^*(E) \geq 0 \ \forall E \subset \mathbb{R}$.

porque $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq 0 \ \forall \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow 0$ cota inferior de $\left\{ \sum |I_k| / \cdots \right\}$ $\Big\} \Rightarrow \inf\{\sum |I_k| \cdots\} \geq 0$

El ínfimo es la mayor cota inferior

Ej a) $m^*(\emptyset) = 0$

dem: prop a) $m^*(\emptyset) \geq 0$, $\emptyset \subset (0, 1/n)$, $\sum_{i=1}^{1} |(0,1/n)| = 1/n$

$\Rightarrow m^*(\emptyset) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n.$

$\Rightarrow m^*(\emptyset) \leq 0.$ D

Ej b) $m^*(\{0\}) = 0$:

dem: $\{0\} \subset (-1/n, 1/n) \Rightarrow m^*(\{0\}) \leq |(-1/n, 1/n)| = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow m^*(\{0\}) \leq 0$ D

Ej. c) El conjunto de Cantor $m^*(\underbrace{\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i}_{\mathcal{C}}) = 0$ (unión de intervalos)

dem: $\mathcal{C} \subset C_n \Rightarrow m^*(\mathcal{C}) \leq |C_n| = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow m^*(\mathcal{C}) \leq 0$ D

b) $A \subset B \subset \mathbb{R} \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$

c) $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) \quad \forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Dem: b) observemos que si $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

$\Rightarrow \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,/\, \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ intervalos } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}}_{J_A} \supset \underbrace{\left\{ \sum |I_k| / \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ interv. } B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}}_{J_B}$

$\Rightarrow \inf J_A \leq \inf J_B.$ D

Dem (c):

Equivalente: $A, A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$.

Dado $\varepsilon > 0$, para $k = 1, 2, \dots$; tomamos $\{I_{i,k}\}_{i=1}^{\infty}$ familia de intervalos

tq. $A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ik}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |I_{ik}| \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ik} \right)$, $\{I_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ es numerable.

$$m^*(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por def}}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |I_{ik}| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \underbrace{\varepsilon}_{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k).$$

Prop: $m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} J_l \;/\; \{J_l\}_{l=1}^{\infty} \text{ fam. de intervalos abtos. acotados} : E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l \right\}$

Dem: $\mathcal{C}_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ fam de intervalos} ;\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$

$\mathcal{C}_2 = \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} |J_l| : \{J_l\}_{l=1}^{\infty} \text{ fam interv. abtos acotados } E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l \right\}$.

$\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \to \inf \mathcal{C}_1 \leq \inf \mathcal{C}_2$ → Si $\inf \mathcal{C}_1 = \infty$, nada que probar.

Tenemos que ver $\inf \mathcal{C}_2 \leq \inf \mathcal{C}_1$. Si $\inf \mathcal{C}_1 < \infty$,

Sea $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ una col. de intervalos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \overbrace{m^*(E)}^{\inf \mathcal{C}_1} + \varepsilon$.

Dado uno de estos I_j (1) si I_j acotado: $I_j = [a_j, b_j)$ ó $(a_j, b_j]$ etc.

$$\to I_j \subset J_j := \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, b_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \right)$$

$$\to E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| + \varepsilon$$

$$\leq \inf \mathcal{C}_1 + 2\varepsilon.$$

$\to \inf \mathcal{C}_2 \leq \inf \mathcal{C}_1 + 2\varepsilon$. Si hacemos $\varepsilon \to 0$, $\inf \mathcal{C}_2 \leq \inf \mathcal{C}_1$ □

Para una medida, queremos la propiedad de ~~aditividad numerable~~ sigma-aditividad, es decir, si $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $A_j \cap A_k = \emptyset \ \forall j \neq k$, entonces $m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$.

La medida exterior de Lebesgue, m^* no la cumple:

<u>Contraejemplo</u>: En $[0,1)$ definimos la rel. de equivalencia:

$$x \, R \, y \overset{def}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}. \quad ([\sqrt{2}] = \{\sqrt{2} + q : q \in \mathbb{Q}\}).$$

<u>Formo $E \subset [0,1)$ eligiendo un elemento y sólo uno de cada clase</u> (uso axioma de elección). Dado $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, defino $E_q = \{x + q \,/\, x \in E\}$.

Cumple (1) si $q, r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, $q \neq r \Rightarrow E_q \cap E_r = \emptyset$.

(2) $[0,1) \subset \bigcup_q E_q \subset [0,2)$

$\Rightarrow m^*(\bigcup_q E_q) \leq m^*([0,2)) = 2$, $m^*([0,1)) = 1 \leq m^*(\bigcup_q E_q)$

$m^*(E_q) = m^*(E_r) \ \forall q, r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$

Pero, si $m^*(\bigcup_q E_q) = \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} m^*(E_q) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$ #

Por tanto, $m^*(\bigcup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} E_q) \neq \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} m^*(E_q)$

3

Tema 2: σ - ÁLGEBRAS

Def: Sea X un conjunto no vacío. Una σ - ÁLGEBRA $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (no vacía) que cumple: a) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

b) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$

Prop: 1) $X \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$

3) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

4) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Dem 1) $\mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists E \in \mathcal{A} \underset{b)}{\Rightarrow} E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$.

2) $X \in \mathcal{A} \underset{b)}{\Rightarrow} \emptyset = X^c \in \mathcal{A}$

3) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow E_i^c \in \mathcal{A} \ \forall i > 0 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

4) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A, B^c \in \mathcal{A} \underset{3)}{\Rightarrow} \underbrace{A \cap B^c}_{= A \setminus B} \in \mathcal{A}$.

Ej: . Dado $X \neq \emptyset$: $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras. (triviales)

. X no numerable, $\mathcal{A} = \{E \subset X \mid E$ ó E^c numerable ó finito $; \emptyset\}$ es σ-álgebra.

Dm. $X \neq \emptyset$ obvio, $\mathcal{A} \ni X \Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$.

b) Si $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} E \text{ numerable/finito} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A} \\ E^c \text{ numerable/finito} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}. \end{cases}$

a) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$

Caso 1: todos numerables ó finitos: obvio ~~que~~ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable ó finito.

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Caso 2: Alguno no numerable $\Rightarrow A_j^c$ numerable o finito

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_j^c \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$ numerable o finito $\square$

Prop: Si I un conjunto arbitrario de índices (posiblem. no numerable) y $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ es una colección de σ-álgebras en $X \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra

Dem: b) trivial

a) trivial

$\emptyset \neq \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ porque $\emptyset \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I$.

def: Dado $\mathcal{F}$ familia de subconjuntos de X no vacía, llamamos a la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{F}$, σ-ÁLGEBRA GENERADA POR $\mathcal{F} = \bigcap\{\mathcal{A} \supset \mathcal{F} : \mathcal{A}$ σ-álgebra de $X\} = \mathcal{M}(\mathcal{F})$

Notas: 1) Bien def: $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$, que es una σ-álgebra

intersecc. de σ-álg. es σ-álg.

2) Si $\mathcal{N}$ una σ-álg. con $\mathcal{F} \subset \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{N}$.

"$\mathcal{M}(\mathcal{F})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$".

Ejemplo: σ-álgebra de Borel: la generada por los abiertos de $\mathbb{R} = X$ → topología usual

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\text{abiertos de } \mathbb{R} \text{ con la topología usual}\})$$

- Un abierto en $\mathbb{R}$ es una unión cualquiera de intervalos abiertos.
- Los elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se llaman borelianos:

$E \subset \mathbb{R}$ abto $\rightarrow E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$E \subset \mathbb{R}$ cerrado $\Rightarrow E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ contiene $\begin{cases} \text{uniones numerables de cerrados (conjuntos } F_\sigma) \\ \text{intersecc. numerables de abiertos (conjuntos } G_\delta) \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x\}$ cerrado $\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Todo conjunto numerable o con complementario numerable está en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Prop: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ coincide con

a) $\mathcal{M}(\{(a,b) : a<b \in \mathbb{R}\})$

b) $\mathcal{M}(\{[a,b) : a<b \in \mathbb{R}\})$

c) $\mathcal{M}(\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\})$ etc.

Prop $B_1 \subset B_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\Rightarrow \mathcal{M}(B_1) \subset \mathcal{M}(B_2)$

$$\mathcal{M}(B_1) = \underbrace{\bigcap\{\mathcal{A} \supset B_1 : \mathcal{A} \text{ σ-álgebra de } X\}}_{S_1}, \quad \mathcal{M}(B_2) = \underbrace{\bigcap\{\mathcal{A} \supset B_2 : \mathcal{A} \text{ σ-álgebra}\}}_{S_2}. \quad S_1 \supset S_2$$

$\Rightarrow \bigcap S_1 \subset \bigcap S_2$.

$A_1 \in S_2 \Rightarrow A_1 \supset B_2 \supset B_1 \Rightarrow A_1 \in S_1$

Medidas.

Notación: si $\mathcal{A}$ σ-álgebra en X, entonces: $(X, \mathcal{A})$ se llama ESPACIO MEDIBLE. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman CONJUNTOS MEDIBLES.

> **def.** Dado $(X, \mathcal{A})$ espacio medible. Una MEDIDA en $(X, \mathcal{A})$ es una $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que (1) $\mu(\emptyset) = 0$, (o finitos)
> (2) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos
> $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Nomenclatura con la def. anterior: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ESPACIO DE MEDIDA.

- si $\mu(X) < \infty$, entonces μ es medida
- si $\mu(X) = 1$, entonces μ se dice PROBABILIDAD
- si $\mu(X) = \infty$ y existen $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ tq. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y $\forall i \in \{1, 2, ...\}$ $\mu(E_i) < \infty$

entonces μ es σ-FINITA.

Ejemplo:

(A) En $(X, \mathcal{P}(X))$, la MEDIDA DE CONTAR: $\mu(E) = \begin{cases} \text{card}(E) = |E| & \text{si } E \text{ finito} \\ \infty & \text{si } E \text{ infinito.} \end{cases}$

(B) En $(X, \mathcal{P}(X))$, dado $x_0 \in X$ se define la medida "Delta de Dirac en x_0" como $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E. \end{cases}$

(C) X no numerable. $\mathcal{A} = \{E \subset X : E$ finito ó numerable o E^c finito o numerable$\}$ (σ-álg.)

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ numerable o finito} \\ 1 & \text{si } E^c \text{ numerable o finito.} \end{cases}$$

(1) $\emptyset$ finito $\Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$

(2) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ numerables todos disjuntos dos a dos $\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ numerable o finito

$\mathcal{A} \supset \{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos con un E_{i_0} infinito, $E_{i_0}^c$ finito o numerable

$\Rightarrow E_{i_0}^c \supset \bigcup_{i \neq i_0} E_i \Rightarrow \forall i \neq i_0$ E_i finito o numerable

$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c \subset E_{i_0}$, finito o numerable $\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$ finito o numerable

(D) $(X, \mathcal{A})$ esp. medible $\to \mu(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$ ejemplo trivial

Propiedades:

a) $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

Dem: $\mu(E) \leq \mu(F) + \mu(F \setminus E) \underset{(2)}{=} \mu(F) = \mu(E \cup (F \setminus E))$

disjuntos

b) $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$.

Dem: $A_1 = F_1$. $\forall j > 1$ $A_j = F_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} F_i \in \mathcal{A}$ (prop de σ-álgebra)

$\Rightarrow \{A_j\}_{j=1} \subset \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

Como $A_j \subset F_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mu(A_j) \leq \mu(F_j)$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j)$$

Además, como los A_j son disjuntos, $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

y $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ $\square$

c) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tales que $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ (i.e. $\forall j \in \mathbb{N}$ $E_j \subset E_{j+1}$)

Entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$ (obvio que existe)

Dem: $A_1 = E_1$, $\forall j > 1$ $A_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y los A_j son disjuntos dos a dos. (Obs: $A_j = E_j \setminus E_{j-1}$)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=2}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1}) \cup E_1\right) =$$

$$= \mu(E_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \Big(\mu(\underbrace{E_1}_{A_1}) + \sum_{j=2}^{N} \mu(\underbrace{E_j \setminus E_{j-1}}_{A_j})\Big) = \lim_{N \to \infty} \mu(E_N) \quad \square$$

Conjuntos disjuntos dos a dos, $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = E_N$

d) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $\mu(E_1) < \infty$ (*), $E_1 \supset E_2 \supset \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$

Dim: $A_k = E_1 \setminus E_k$ para $k > 1 \Rightarrow A_2 \subset A_3 \subset \dots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=2}^{\infty} (E_1 \cap E_j^c) = E_1 \cap \bigcup_{j=2}^{\infty} E_j^c = E_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right)^c = E_1 \setminus \left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(E_1 \setminus \left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right)\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_1 \setminus E_j) = \lim_{j \to \infty} \left(\mu(E_1) - \mu(E_j)\right)$$

medidas finitas (*)

$E_j \subset E_1 \Rightarrow \mu(E_1) = \mu(E_1 \setminus E_j) + \mu(\underbrace{E_1 \cap E_j}_{E_j})$

$$= \mu(E_1) - \lim_{j \to \infty} \mu(E_j) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) \quad \square$$

finito

(*) Nota: es suficiente que $\exists k \in \mathbb{N} : \mu(E_k) < \infty$

Contraejemplo de que si eliminas la hipótesis

$\{\exists N_0 : \mu(N_0) < \infty\}$, d) es falsa:

$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu =$ medida de contar$)$. $\forall k \in \mathbb{N}$:

$E_k = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, k-1\}$. $\mu(E_k) = \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \infty$.

Ahora, $\emptyset = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.

<u>def</u>: Dada $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, se define

- $\liminf_{(i\to\infty)} E_i = \underline{\lim}\, E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i\right)$.
- $\limsup_{(i\to\infty)} E_i = \overline{\lim}\, E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right)$

$\Big\}$ siempre existen

Si $\underline{\lim}\, E_i = \overline{\lim}\, E_i$, se define $\lim E_i = \overline{\lim}\, E_i = \underline{\lim}\, E_i$

- Sobre $\liminf E_i$:

(*) $H_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, $H_2 = \bigcap_{i=2}^{\infty} E_i$, $\vdots$ $\Big\} \Rightarrow H_1 \subset H_2 \subset \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ está bien def

- Sobre $\limsup E_i$: $H_k \overset{(**)}{=} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \Rightarrow H_1 \supset H_2 \supset \cdots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ bien def.

- $\mu(\underline{\lim}\, E_i) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(H_n) \le \underline{\lim}\, \mu(E_n)$

$\mu(H_n) \le \mu(E_n)$ $\forall n$

Obs: $\liminf E_i = \{x \in X : \exists N_0 \text{ " } x \in E_i \ \forall i \ge N_0\}$

<u>dem</u>: $x \in \liminf E_i \Leftrightarrow \exists n_0 : H_{n_0} = \bigcap_{i=n_0}^{\infty} E_i \quad x \in H_{n_0}$

$\Leftrightarrow \exists n_0 : x \in E_i \ \forall i \ge n_0$ $\square$

Obs: $\limsup E_i = \{x \in X : \exists B \subset \mathbb{N}, \operatorname{card} B = \infty : x \in E_i \ \forall i \in B\}$

$= \{x \in X : x$ pertenece a infinitos conjuntos $E_i\}$

<u>dem</u>: (**) $x \in \limsup E_i \Leftrightarrow x \in H_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. $H_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \ge n : x \in E_{n_0}$

$\Leftrightarrow x$ pertenece a infinitos conjuntos E_i

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ definimos la medida exterior de Lebesgue:

$$E\subset\mathbb{R} \Rightarrow m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \;/\; \{I_k\} \text{ intervalos con } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E \right\}$$

def Se define la σ-ÁLGEBRA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}$ como:

$$\mathcal{M} = \{ E\subset\mathbb{R} \;/\; \forall A\subset\mathbb{R} \;\; m^*(E\cap A) + m^*(E^c\cap A) = m^*(A) \}$$

$$\boxed{\text{Teorema: } \mathcal{M} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra. } m^*|_{\mathcal{M}} \text{ es una medida que denotamos } m}$$

↳ Se demostrará.

Nota: no se define la medida m para $E\notin\mathcal{M}$.

Se puede demostrar $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

↑ ya visto

Funciones medibles.

$(X, \mathcal{A})$ esp. medible

def Una función $f: X\to\mathbb{R}$ (o $f: X\to\mathbb{C}$) se dice MEDIBLE si $\forall U$ abierto en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$), $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$

Prop: Sea $f: X\to\mathbb{R}$. Son equivalentes:

(a) f medible

(b1) $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{A}$ ((b3) $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$)

(b2) $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}([a,\infty))\in\mathcal{A}$

(c1) $\forall a<b\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((a,b))\in\mathcal{A}$ ((c2) $[\;)$, $(\;]$, $[\;]$)

(d) $\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$

dem (parte)

(a) ⇒ (b1) (a,∞) abierto $\Rightarrow f^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{A}$ ($\because$ f medible) □

(b1) ⇒ (c1) $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [(a,\infty)\cap(b-1/n,\infty)^c]\right) =$

$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b-1/n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a,\infty)\setminus(b-1/n,\infty)$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\underbrace{f^{-1}((a,\infty))}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{f^{-1}((b-1/n,\infty))^c}_{\in\mathcal{A}} \Big] \in\mathcal{A}$ por prop. de σ-álgebra □

(c1) ⇒ (a) $\{(a,b) : a<b\in\mathbb{Q}\}$ es base numerable de la topología usual de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall U\subset\mathbb{R}$ abierto, $\exists\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ / $U = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}((a_i,b_i))}_{\in\mathcal{A}\ (c1)} \in\mathcal{A}$ □

(d) $\Rightarrow$ (a) trivial. Recordamos que: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{T}_{\text{usual de } \mathbb{R}})$. (*)

(a) $\Rightarrow$ (d) Considero $\mathcal{H} = \{D \subset \mathbb{R} \,/\, f^{-1}(D) \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Se cumple: a) U abto $\Rightarrow U \in \mathcal{H}$ (hipótesis)

(**) $\mathcal{H}$ es σ-álgebra (problema hoja 2)

Por tanto, con (*), (**), a) se tiene que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{H}$ $\square$

(i.e. $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$)

Ejercicio: f medible $\Leftrightarrow \forall D$ cerrado en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$ (trivial)

$\boxed{\text{Teorema: Sean } f,g : X \to \mathbb{R} \text{ medibles. Entonces: } \lambda f,\ f+g,\ f^2,\ f\cdot g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ |f| \text{ son medibles}}$

dem: (λf). Sea $a \in \mathbb{R}$. $(\lambda f)^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X \,/\, \lambda \cdot f(x) > a\} =$

$\lambda > 0$

$= f^{-1}((a/\lambda, \infty)) \in \mathcal{A}$ (f medible)

(f^2). $f^2((a,\infty)) = \{x \,/\, f(x)^2 > a\} = \begin{cases} f^{-1}((\sqrt{a}, \infty)) & \text{si } a \geq 0 \\ f^{-1}([0,\infty)) & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$\cap$
$\mathcal{A}$

($f+g$). $(f+g)^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X \,/\, f(x)+g(x) > a\} = \{x : f(x) > a - g(x)\}$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X \,/\, f(x) > q > a - g(x)\}$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big[\underbrace{f^{-1}((q,\infty))}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{g^{-1}((a-q,\infty))}_{\in \mathcal{A}}\Big] \in \mathcal{A}$$

f, g medibles

por prop σ-algebra

($f \cdot g$): $fg = \Big(\underbrace{(f+g)^2}_{\text{medible}} - f^2 - g^2\Big) \cdot \frac{1}{2}$ medible por (λf), (f^2), ($f+g$) $\square$

($\max\{f,g\}$): $\max\{f,g\} = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ trivial por el resto.

($|f|$) $(|f|)^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X : |f(x)| > a\} = \begin{cases} f^{-1}((a,\infty)) \cup f^{-1}((-\infty,-a)) & \text{si } a \geq 0 \\ X & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$\cap$ (f medible)
$\mathcal{A}$

$\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ $\square$

· Consecuencias: $f: X \to \mathbb{R}$ medible

$\Rightarrow f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ son medibles

· Nota: $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

· Notación: $[-\infty, \infty] =: \overline{\mathbb{R}}$. En este conjunto, la topología usual es la generada por la base

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

· Equivalencia: $f: (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ medible $\Leftrightarrow f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
(ver hoja 3)

Teorema. Sea $\{f_k\}_{k\geq 1}^{\infty}$ sucesión de funciones medibles $f_k: (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$.
Entonces $\sup f_k$, $\inf f_k$, $\liminf f_k$, $\limsup f_k$ son medibles.

dem: {Consideremos supremos = infinito ó −infinito.

$\cdot (\sup f_k)^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((a, \infty])$

$\{x \in X : \underbrace{\sup_k f_k(x) > a}_{\text{ssi } a \text{ no es cota superior}}\} = \{x \in X : \text{para algún } k \in \mathbb{N}\ f_k(x) > a\}$

$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X \,/\, f_k(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}((a, \infty])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ □

$\cdot \limsup_{k \to \infty} f_k(x) = \underbrace{\inf_{\ell} \big(\underbrace{\sup \{f_\ell(x), f_{\ell+1}(x), \dots\}}_{\text{medible por } (\sup f_k)} \big)}_{\text{medible por } (\inf f_k)}$ □ (el resto de casos análogos).

Teorema: Sea $f: X \to \mathbb{C}$. $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ con $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$
f medible $\Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ medibles

dem: ($\Rightarrow$) $(\operatorname{Re} f)^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) > a\} = \{x \in X,\ f(x) \in \Pi_a\} =$
($\Pi_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ abto en $\mathbb{C}$ con topología usual)
$= f^{-1}(\Pi_a) \in \mathcal{A}$. Parte imaginaria análoga. □

($\Leftarrow$) $\mathcal{R} = \{(a,b) \times (c,d) \,/\, a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$ base de la topología usual de $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$.
Dado $U \subset \mathbb{C}$ abto $\Rightarrow \exists \{(a_k, b_k) \times (c_k, d_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C}) \,/\, U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \times (c_k, d_k)$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k) \times (c_k, d_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\underbrace{(\operatorname{Re} f)^{-1}((a_k, b_k))}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{(\operatorname{Im} f)^{-1}((c_k, d_k))}_{\in \mathcal{A}} \Big)$

$\Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. □

Teorema: a) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow h: (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}$ medible.

b) $f: X \to \mathbb{R}$ medible $\wedge$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow g \circ f: X \to \mathbb{R}$ medible

dem: a) $B \in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \Rightarrow h^{-1}(B) \in \mathcal{T}_u \Rightarrow h^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\square$

b) $B \subset \mathbb{R}$ abto $\Rightarrow g^{-1}(B)$ abierto

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\text{abto}}) \in \mathcal{A} \quad \square$$

(def) Ejemplo: **Función característica** (o indicadora)

Sea $E \subset \mathcal{A}$ (un conj. medible), definimos

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} = \mathbb{1}_E(x)$$

Observación: χ_E medible $\Leftrightarrow$ E medible.

Razón: $$(\chi_E)^{-1}((a,\infty)) = \begin{cases} X & \text{si } a < 0 \\ E & \text{si } 0 \le a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \ge 1 \end{cases}$$

(X, $\emptyset$ medibles, por lo que χ_E medible $\Leftrightarrow$ E medible)

def: Una función simple es una combinación lineal de funciones características medibles, es decir: $s(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$, con $a_k \in \mathbb{R}$ ($\circ \mathbb{C}$) $E_k \in \mathcal{A}$ $\forall k$

Ej. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ $s(x) = \chi_{(0,3)}(x) + \chi_{[2,5)}(x)$

$$= \chi_{(0,2)}(x) + 2\chi_{[2,3)}(x) + \chi_{[3,5)}(x)$$

$$= \chi_{(0,2)\cup[3,5)}(x) + 2\chi_{[2,3)}(x)$$

Obs: • Las funciones simples son exactamente las que toman un número finito de valores.

• Toda función simple se escribe de forma única como

$$\underbrace{s(x) = \sum_{l=1}^{M} c_l \chi_{H_l}(x). \text{ Donde } H_l \in \mathcal{A} \ \forall l = 1, \dots, M; \ c_1 < c_2 < \dots < c_M \in \mathbb{R}}_{\text{Representación estándar.}}$$

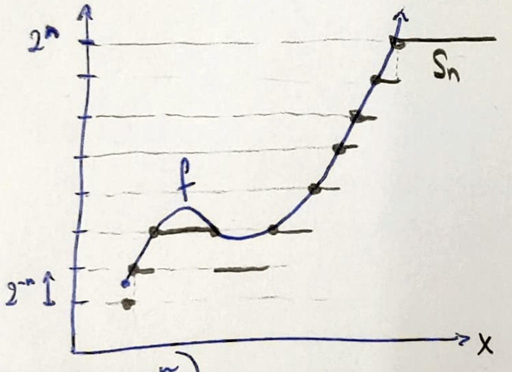
En la representación estándar de una función simple: (s)

$c_1 < \dots < c_m$, $c_k \neq 0$ $\forall k \in \{1, \dots, m\}$

$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{F_i}$, se tiene $F_i = s^{-1}(\{c_i\})$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema: Sea $f : X \to [0, \infty]$ medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $0 \le s_1 \le \dots \le s_n \le \dots$ tales que $\forall x \in X$ $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. Además, la convergencia es uniforme en cualquier conjunto en que f sea acotada.

dem: Definimos $s_n(x) = \begin{cases} 2^n & \text{si } f(x) \ge 2^n \\ \frac{k}{2^n} & \text{si } f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \ k = 0, \dots, 2^{2n}-1 \end{cases}$



Es claro que $s_n(x) \le f(x)$ $\forall x \in X$

- $\underbrace{f(x) \le 2^n \Rightarrow |s_n(x) - f(x)| \le 2^{-n} \quad \forall x \in X}$

  Esto nos da convergencia uniforme en subconjuntos de X con f acotada.

- $f(x) \ge 2^n \Rightarrow s_{n+1}(x) \ge 2^n \ge s_n(x)$

- $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$

$$\Rightarrow s_n(x) = \frac{k}{2^n} \le \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{2^n} & \text{si } f(x) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} & \text{si } f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \end{array} \right\} = s_{n+1}(x)$$

Es claro entonces que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ $\square$

Obs: Si $f : X \to \mathbb{C}$ medible, $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i (\operatorname{Im} f)^+ - i (\operatorname{Im} f)^-$

Encontramos φ_n simples medibles / $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ uniformemente en cualquier conjunto donde f sea acotada.

def: Sea s una función simple, medible y no negativa con representación estándar $s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$. $a_1 < \dots < a_n$, $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ disjuntos dos a dos.

Entonces: $\int s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$. (Convención: $0 \cdot \infty = 0$)

(*) **Obs**: Si $s = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{F_l}$, con F_l medible $\forall l$ y disjuntos dos a dos, $b_l \neq 0 \; \forall l$

$$\Rightarrow \int s \, d\mu = \sum_{l=1}^{m} b_l \mu(F_l)$$

dem: $\{b_l : l \in \{1 \dots m\}\} = \{a_k : k \in \{1, \dots, n\}\}$ con $a_1 < \dots < a_n$,

$E_k = \bigcup \{F_l / a_k = b_l\}$ unión disjunta $\Rightarrow \mu(E_k) = \sum_{l / b_l = a_k} \mu(F_l)$

$$\Rightarrow \int s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l / b_l = a_k} \mu(F_l) = \sum_{l} b_l \mu(F_l)$$

Propiedades: Sean s_1, s_2 simples, medibles, no negativas

a) $c \geq 0 \Rightarrow \int c s_1 \, d\mu = c \int s_1 \, d\mu$

b) $s_1 + s_2$ es simple, medible, no negativa, y $\int (s_1 + s_2) \, d\mu = \int s_1 \, d\mu + \int s_2 \, d\mu$

c) $s_1(x) \leq s_2(x) \; \forall x \in R \Rightarrow \int s_1 d\mu \leq \int s_2 \, d\mu$

d) Dado $H \in \mathcal{A}$, definimos $\int_H s_1 \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap H) = \int s_1 \chi_H \, d\mu$

$$\Rightarrow D(H) = \int_H s_1 \, d\mu \text{ es una medida en } (X, \mathcal{A})$$

Añadimos $a_0 = 0 = c_0$, $E_0 = (\bigcup E_k)^c$, $H_0 = (\bigcup H_j)^c$

dem: a) $c s_1(x) = \sum_{k=1}^{n} (c a_k) \chi_{E_k}(x)$ repr estándar de $c s_1 \Rightarrow$ trivial $\square$

b) $s_1 + s_2 = \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_{E_k} + \sum_{j=0}^{m} c_j \chi_{H_j} = \sum_{k,i} (a_k + c_i) \chi_{E_k \cap H_i}$, por (*),

$$\Rightarrow \int (s_1 + s_2) \, d\mu = \sum_{k,j} (a_k + c_j) \mu(E_k \cap H_j) = \sum_{k,j} a_k \mu(E_k \cap H_j) + \sum_{k,j} c_j \mu(E_k \cap H_j)$$

$$= \sum_k a_k \mu(E_k) + \sum_j c_j \mu(H_j) = \int s_1 d\mu + \int s_2 \, d\mu.$$

c) $s_1 = \sum_k a_k \chi_{E_k}$; $s_2 = \sum_j c_j \chi_{H_j}$. Si $\{E_k \cap H_j \neq \emptyset \Rightarrow a_k \leq c_j\}$, y $\bigcup E_k \subset \bigcup H_j$

$$\int s_1 d\mu = \sum_k a_k \mu(E_k) = \sum_k a_k \sum_j \mu(E_k \cap H_j) = \sum_{j,k} \mu(E_k \cap H_j) \, a_k \leq \sum_{j,k} \mu(E_k \cap H_j) \, c_j =$$

$$= \sum_j c_j \mu(H_j) = \int s_2 \, d\mu.$$

Corolario a) $s_1, \dots, s_N$ func. medibles, simples y no negativas

$$\Rightarrow \int (s_1 + \dots + s_N)\, d\mu = \int s_1\, d\mu + \dots + \int s_N\, d\mu$$

b) $s = \sum_{l=1}^{m} a_l \chi_{F_l} \Rightarrow \int s\, d\mu = \sum_{l=1}^{m} a_l\, \mu(F_l)$

dem (b): $s_l = a_l \chi_{F_l} \Rightarrow \int s_l\, d\mu = a_l\, \mu(F_l)$

Por (a), $\int s\, d\mu = \sum_{l=1}^{M} \int s_l\, d\mu = \sum_{l=1}^{m} a_l\, \mu(F_l)$

def: $f : X \to [0, \infty]$ medible. Definimos:

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int s\, d\mu \,/\, s \text{ simple, medible y } 0 \le s(x) \le f(x)\ \forall x \in X \right\},$$

entendiendo que $\int f\, d\mu \in [0, \infty]$

Prop $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ medibles

a) $c \ge 0 \Rightarrow \int c f_1\, d\mu = c \int f_1\, d\mu$

b) $\int (f_1 + f_2)\, d\mu = \int f_1\, d\mu + \int f_2\, d\mu$

c) $f_1(x) \le f_2(x)\ \forall x \in X \Rightarrow \int f_1\, d\mu \le \int f_2\, d\mu$

dem: a) $0 \le s(x) \le f(x)$, s simple $\Rightarrow 0 \le c s(x) \le c f(x)$, cs simple

$0 \le t(x) \le c f(x)$ t simple $\Rightarrow 0 \le \underbrace{\tfrac{1}{c} t(x)}_{\text{simple}} \le f(x)$

$$\Rightarrow \int c f\, d\mu = \sup \Big\{ \underset{c\int s\, d\mu}{\underset{\shortparallel}{\int cs\, d\mu}} \,/\, 0 \le cs \le cf, \dots \Big\} = c \cdot \sup \left\{ \int s\, d\mu \,/\, 0 \le s \le f, \dots \right\}$$

$$= c \int f\, d\mu.$$

c) Si $\{ 0 \le s \le f_1 \Rightarrow 0 \le s \le f_2 \} \Rightarrow \int f_1\, d\mu \le \int f_2\, d\mu$.

b) $\{ s \le f_1,\ t \le f_2 \Rightarrow s + t \le f_1 + f_2 \} \Rightarrow \int (f_1 + f_2) \ge \int f_1 + \int f_2$

$\boxed{\text{TCM}}$ **Teorema de la convergencia monótona**: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas / $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ $\forall x \in X$ y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Entonces f es medible y $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$ $\overset{\cap}{[0,\infty]}$

Obs: 1. f medible ya demostrado. (sup, lim sup, —)

2. ¿Hipótesis: sucesión monótona no decreciente?

Ej. $\cdot (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$: $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Lebesgue, la medida de Lebesgue

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{(0,k)}. \quad x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = 0 \text{ (uniforme)}$$

$$\int f_k\,dm = 1 \to \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dm = 1 \neq \int 0\,dm = 0$$

dem: $\cdot$ $\underset{\substack{\text{VI}\\ f_{n-1}(x)}}{f_n(x)} \leq f(x)\ \forall x \in X \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ I_n}}{\int f_n\,d\mu} \leq \int f\,d\mu$, $I_{n-1} \leq I_n$.

$\Rightarrow \{I_n\}$ monótona no decreciente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} I_n \leq \int f\,d\mu$.

$\cdot$ Sea s simple medible con $0 \leq s(x) \leq f(x)$. Sea $\alpha \in (0,1)$.

Defino $E_n = \{x \in X / f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$. Se cumple $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

Por tanto, $\nu(X) = \lim_{k\to\infty} \nu(E_n)$. Es decir, $\int_X s\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int s\chi_{E_k}\,d\mu$.

$$\Rightarrow \int \alpha s\,d\mu = \alpha\underbrace{\int s\,d\mu}_{} = \lim_{n\to\infty} \int \alpha s\chi_{E_n}\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E_n}\,d\mu \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu}_{}$$

Tomo supremo en s

$\Rightarrow \alpha \int f\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$ $\forall \alpha \in (0,1)$. Luego $\alpha \to 1$

$\Rightarrow \int f\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$ □

Corolario: a) Sean $f_1, f_2 : X \to [0,\infty]$ medibles $\Rightarrow \int (f_1+f_2)\,d\mu = \int f_1\,d\mu + \int f_2\,d\mu$
b) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones medibles $X \to [0,\infty] \Rightarrow \int (\sum_n f_n)\,d\mu = \sum_n (\int f_n\,d\mu)$.

Nota: esto prueba la prop de la página anterior, parte (b).

dem (a): Tomamos $\{S_n^{(1)}\}$ sucesión de funciones simples $0 \leq S_1^{(1)}(x) \leq \dots \leq \dots / \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}(x) = f_1(x)\ \forall x \in X$

$\{S_n^{(2)}\}$ " $0 \leq S_1^{(2)}(x) \leq \dots / \lim S_n^{(2)}(x) = f_2(x)\ \forall x \in X$

$\Rightarrow 0 \leq S_1^{(1)} + S_1^{(2)} \leq S_2^{(1)} + S_2^{(2)} \leq \dots / \lim_{n\to\infty} [S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x)] = f_1(x) + f_2(x)\ \forall x \in X$

Por TCM, $\int (f_1+f_2)\,d\mu \underset{\text{TCM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int (S_n^{(1)}+S_n^{(2)})\,d\mu \underset{\text{simples}}{=} \lim_{n\to\infty} \int S_n^{(1)}\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int S_n^{(2)}\,d\mu \underset{\text{TCM}}{=} \int f_1\,d\mu + \int f_2\,d\mu$

□

dem (b). $\forall N \in \mathbb{N}$, $\int \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \right) d\mu \overset{\circledast}{=} \sum_{k=1}^{N} \left(\int f_k \, d\mu \right)$

Por definición, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} f_k \right)}_{g_N(x)}$, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$, $g_N \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

$$\overset{TCM}{\Longrightarrow} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \lim_{N \to \infty} \int g_N \, d\mu = \lim_{N \to \infty} \int \left(\sum_{k=1}^{N} f_n \right) d\mu \overset{\circledast}{=}$$

$$\overset{\circledast}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\int f_k \, d\mu \right) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int f_k \, d\mu \right) \quad \square$$

Prop. Si $f: X \to [0, \infty]$ medible y para $E \in \mathcal{A}$ definimos $\nu(E) = \int_E f \, d\mu := \int f \chi_E \, d\mu$, entonces ν es una medida en $(X, \mathcal{A})$

dem: ejercicio

obs: si E medible, definimos $\mathcal{A}_E = \{ F \cap E \,/\, F \in \mathcal{A} \} = \{ G \in \mathcal{A} \,/\, G \subset E \}$.

y $\mu_E(F) = \mu(F)$ $\forall F \in \mathcal{A}_E$. i.e. $\mu_E = \mu|_{\mathcal{A}_E}$

$\Rightarrow$ $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ es un espacio de medida y

$\int_E f \, d\mu = \int f|_E \, d\mu_E$ $\forall f: X \to [0, \infty]$ medible.

Lema (de Fatou). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones medibles no negativas.

Entonces $\int \left(\liminf_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$

dem $\int (\liminf f_n) \, d\mu = \int \lim_{N \to \infty} [\inf \{ f_N, f_{N+1}, \dots \}] \, d\mu = I$

Denotamos $H_N(x) = (\inf \{ f_N, f_{N+1}, \dots \})(x)$. H_N medible y $0 \leq H_N \leq H_{N+1}$ $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\to I = \int \Big(\lim_{N \to \infty} \underbrace{H_N}_{\text{creciente}} \Big) d\mu \underset{TCM}{=} \lim_{N \to \infty} \int H_N \, d\mu =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int \underbrace{\inf \{ f_N, f_{N+1}, \dots \}}_{\leq f_N} d\mu \leq \liminf_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu$$

el límite de $\int f_n d\mu$ podría no existir. Pero el liminf siempre existe.

Notación: se dice que una propiedad se cumple "en casi todo punto" / "c.t.p" "casi seguro" / "casi por todo" / "almost everywhere" / "c.s." / "a.e." / "cpt" si se cumple en todo punto salvo en un conjunto de medida 0.

Ej: "$f=0$ c.t.p" $\Rightarrow \exists E \in \mathcal{A} \,/\, \mu(E)=0 \;\wedge\; f(x)=0 \;\forall x \in E^c$.

$\boxed{\text{Prop. Sea } f: X \to [0,\infty] \text{ medible. Entonces: } \int f\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f=0 \text{ c.t.p.}}$

dem: ($\Leftarrow$) $\exists E \in \mathcal{A} \,/\, \mu(E)=0,\; f(x)=0 \;\forall x \in E^c$.

$$\int f\,d\mu = \int (f\chi_E + f\chi_{E^c})\,d\mu \overset{\checkmark}{=} \int f\chi_E\,d\mu + \underbrace{\int \underbrace{f\chi_{E^c}}_{0}\,d\mu}_{0} \overset{*}{=} 0 \;\square$$

$$0 = \infty\mu(E) = \int \infty\chi_E\,d\mu \geq \infty\chi_E \text{ (simple)}$$

(*) Otro modo: $0 \leq s \leq f\chi_E$, s simple medible. $s = \sum_{j=1}^{M} a_j \chi_{E_j}$, $a_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $E_j \subset E$

$\Rightarrow 0 \leq \mu(E_j) \leq \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_j)=0$

$\Rightarrow \int s\,d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j\,\mu(E_j) = 0.$

$\Rightarrow \int f\chi_E\,d\mu = \sup\{\int s\,d\mu \,/\, 0 \leq s \leq f\chi_E,\ s \text{ simple, medible}\}$
$= \sup\{0\} = 0$

($\Rightarrow$) Hay que ver $\mu(\underbrace{\{x \in X \,/\, f(x) \neq 0\}}_{E \text{ medible, pues } f \text{ medible}}) = 0$.

$$\Rightarrow E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X \,/\, f(x) \geq 1/n\}}_{f^{-1}([1/n,\infty]) = E_n} \quad : (E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots)$$

$$0 = \int f\,d\mu \geq \int f\chi_{E_n}\,d\mu \geq \int \underbrace{\tfrac{1}{n}\chi_{E_n}}_{\text{simple}}\,d\mu = \tfrac{1}{n}\mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n)=0$$
$\mu(E_n) \geq 0$

$$\Rightarrow \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(E_n)}_{0} = 0 \;\square$$

$\boxed{\text{Corolario. Sean } f,g: X \to [0,\infty] \text{ medibles, } f=g \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int f\,d\mu = \int g\,d\mu}$

dem: $h := \max\{f,g\}$ medible. $\overset{*}{\Rightarrow} h(x) \geq f(x)$, $h(x) = f(x)$ c.t.p.
$\Rightarrow (h-f): X \to [0,\infty]$ medible. $(h-f)=0$ ctp $\Rightarrow \int (h-f)\,d\mu = 0$
(**) $\Rightarrow \int h\,d\mu = \int f\,d\mu$. (**) $h = (h-f)+f$ positivas $\Rightarrow \int h = \int (h-f) + \int f$

Lo mismo a partir de (*), para $\int h\,d\mu = \int g\,d\mu$.

Prop: Sean $f, g: X \to [0, \infty]$ medibles. Definimos las medidas
$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu, \quad \alpha(E) = \int_E g\, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$
Entonces $f = g$ c.t.p $\iff \nu(E) = \alpha(E)\ \forall E \in \mathcal{A} \underset{\text{def}}{\iff} \int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu\ \forall E \in \mathcal{A}$

dem: • $f = g$ c.t.p $\Rightarrow \int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$ es el corolario

•($\Leftarrow$) $E = \{x \in X / f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$, pues $|f-g|$ medible, $E = (|f-g|)^{-1}((0,\infty])$

(*) Cont

Teorema de la convergencia monótona (versión mejorada)
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones medibles t.q.
$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ c.t.p. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

Entendiendo que si $x \in E$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ puede no existir, le doy cualquier valor. el conjunto de medida cero donde no se cumple la hipótesis.

dem: Sea E con $\mu(E) = 0$ y $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ en E^c
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\int_E f_n\, d\mu}_{0,\text{ pues } f_n \chi_E = 0 \text{ c.t.p.}}\Big) + \lim_{n\to\infty}\left(\int_{E^c} f_n\, d\mu\right) \underset{TCM}{=} \int_{E^c} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$
$$= \int_{E^c} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu + \underbrace{\int_E \left(\lim f_n\right) d\mu}_{0} = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu.$$

(*) Cont. $E = E_1 \cup E_2$. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 = \{x / g(x) - f(x) > 0\}$. $E_2 = \{x / f(x) - g(x) > 0\}$

$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, pues $E_1 = (\underbrace{(g-f)^+}_{\text{medible}})^{-1}((0,\infty])$, $E_2 = ((f-g)^+)^{-1}((0,\infty])$

$E_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x / (g-f)(x) \geq 1/n\}}_{E_{1n} \text{ medible}}$. $E_{11} \subset E_{12} \subset E_{13} \subset \dots \Rightarrow \mu(E_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{1n}) = 0$

$$\int_{E_{1n}} (g-f) = 0 = \int (g-f)\chi_{E_{1n}} \geq \int \frac{1}{n} \chi_{E_{1n}} = \frac{1}{n}\mu(E_{1n}) \geq 0$$
$$\uparrow$$
$$\int_{E_{1n}} g = \int_{E_{1n}} f$$

Del mismo modo, $\mu(E_2) = 0$.

$0 \leq \mu(E) = \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$
$\Rightarrow f = g$ c.t.p. □

Prop. puesta como ejercicio: (s simple, medible y no negativa)

$$\boxed{\text{Dado } H \in \mathcal{A} \quad \int_H s\,d\mu := \int s\,\chi_H\,d\mu \Rightarrow \nu(H) = \int_H s\,d\mu \text{ medida en } (X, \mathcal{A})}$$

dem: $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$, $0 < a_1 < a_2 < \dots$. $E_k \cap E_j = 0$ si $j \neq k$ $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$

- $\nu(\phi) = \int s\,\chi_\phi\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0$
- Sean $A_1, A_2, \dots \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos

$$\Rightarrow \nu(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}_{A}) = \int s\,\chi_A\,d\mu \underset{\chi_{E_k}\chi_A = \chi_{E_k \cap A}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mu(E_k \cap A) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mu\Big(\underbrace{E_k \cap \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big)}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_k \cap A_j) \text{ disjuntos dos a dos}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mu(E_k \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int s\,\chi_{A_j}\,d\mu\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \quad \square$$

Prop. como ejercicio:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: X \to [0,\infty] \text{ medible y } E \in \mathcal{A}:\ \nu(E) = \int f\,\chi_E\,d\mu \\ \Rightarrow \nu \text{ medida en } (X, \mathcal{A}) \end{array}}$$

dem:

- $\nu(\phi) = \int (f\,\chi_\phi\,d\mu) = \int 0\,d\mu = 0$.
- Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $\forall j, k \in \mathbb{N}$ $j \neq k \Rightarrow A_j \cap A_k = \phi$.

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j. \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_j \text{ para un } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \notin A_j\ \forall j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es claro que $\chi_A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)$

(Ya que si $x \notin A_j\ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \chi_{A_j}(x) = 0\ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \chi_A(x) = 0$

si $x \in A_j$ para un $j \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ k \neq j \Rightarrow x \notin A_k$

$\Rightarrow \chi_{A_k}(x) = 0$

$\Rightarrow \chi_A(x) = \chi_{A_j}(x) = 1$)

$$\Rightarrow \nu(A) = \int f\,\chi_A\,d\mu = \int f\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}\Big)d\mu = \int \sum_{j=1}^{\infty} (f\,\chi_{A_j})\,d\mu \underset{\text{corolario pág 9.2}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int f\,\chi_{A_j}\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \quad \square$$

Ej. (TCM) $I = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \chi_{(0,n)}}_{f_n(x) \text{ medible, prod. de medibles. } (1+\frac{x}{n})^n \text{ cont } \Rightarrow \text{ medible}} dx$

$\underbrace{0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{(n/x)}\right)^{(n/x)}\right)^x \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x = \frac{f(x)}{e^{-2x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• En $[n, n+1)$ es claro. En $(0,n)$, se puede ver que

1) $F(t) = (1 + x/t)^t$ es creciente.

2) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{x+n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^n} x^k n^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\left(x^k/n^k\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n}{n}\frac{(n-2)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}\right) \frac{1}{k!} x^k$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) x^k$

$\le \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right) x^k = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

• En $\mathbb{R} \setminus (0, n+1)$ es obvio, ambos son 0.

Por el teorema de la convergencia monótona:

$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \chi_{(0,\infty)} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$

TCM mejorado: $\{f_n\}$ suc. de funciones medibles / $f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$ c.t.p. x

y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ c.t.p. y f medible (podría no serlo)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Ojo: f podría no ser medible. Ejemplo: En $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$

$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Sea $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $m(F)=0$, $E \subset F$ / $E \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow f(x) = e^x \chi_{E^c}$ no es medible, pues $E^c \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ($f^{-1}(\{0\}) = E \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$)

Pero $f_n(x) \to f(x)$ ctp, pues $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in F^c$ con $m(F) = 0$.

def: Un espacio de med. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice COMPLETO si:
$\forall E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$ $\forall F \subset E$, se tiene $F \in \mathcal{M}$.

Nota: • $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ no es completa (no demostrado en clase) { Con $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$)
• $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \{ E \subset \mathbb{R} \,/\, m(E \cap A) + m(E^c \cap A) = m(A) \ \forall A \subset \mathbb{R} \}$
$(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ sí es completo.

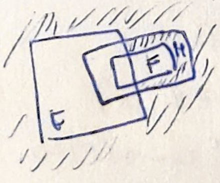
Teorema. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un edm. Se definen:
$\overline{\mathcal{A}} := \{ E \cup F \,/\, E \in \mathcal{A}, \exists H \in \mathcal{A} \,/\, \mu(H) = 0,\ F \subset H \}$
$\bar{\mu}(E \cup F) := \mu(E)$ (si $E \in \mathcal{A}$, $\exists H \in \mathcal{A} / \mu(H) = 0$, $F \subset H$).
Entonces (1) $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ es un edm. completo.
(2) Si f medible $(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces f medible $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$.
(2.1) si además $f(x) \geq 0$ $\forall x \in X$, $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$.
(3) Si g medible en $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu}) \Rightarrow \exists h$ medible en $(X, \mathcal{A}, \mu)$
tal que $g = h$ ctp. $\int h \, d\mu = \int g \, d\bar{\mu}$.
$(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ se denomina COMPLECCIÓN DE $(X, \mathcal{A}, \mu)$

• Veremos que $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ es la compleción de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$.

demo: (1.1) $\overline{\mathcal{A}}$ σ-álgebra
• $E_i \cup F_i \in \overline{\mathcal{A}}$ con $E_i \in \mathcal{A}$, $H_i \in \mathcal{A}$ / $F_i \subset H_i$, $\mu(H_i) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cup F_i) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)}_{\in \mathcal{A}} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i) \quad \text{con } H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \mathcal{A} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

$$\text{y } \mu(H) = 0 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cup F_i) \in \overline{\mathcal{A}}$$



• $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$ con $E \in \mathcal{A}$, $H \in \mathcal{A}$, $\mu(H) = 0$, $F \subset H$

$$\underbrace{(E \cup F)^c}_{} = \underbrace{(E \cup H)^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(H \setminus (F \cup E))}_{\subset H \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(H) = 0.} \Rightarrow (E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{A}}.$$

(1.2) $\bar{\mu}$ medida (bien def).
bien def: Si $E \cup F = M \cup N$ con $E, M \in \mathcal{A}$, F y N $\underbrace{\text{subconjuntos de conjuntos de } \mu\text{-medida } 0.}$ $F \subset H$, $N \subset L$

$\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E) \overset{?}{=} \mu(M)$

$$\left.\begin{aligned} &E \subset E \cup F = M \cup N \subset M \cup L \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(M) + \mu(L) = \mu(M) \\ &M \subset E \cup H \Rightarrow \mu(M) \leq \mu(E) \end{aligned}\right\} \mu(E) = \mu(M)$$

$\bar{\mu}$ es medida:

Sean $\{(E_i \cup F_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset \bar{\mathcal{A}}$ disjuntos con $F_i \subset H_i \in \mathcal{A}$ de μ-medida 0.

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cup F_i)\Big) = \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i}_{\subset H = \bigcup H_i \in \mathcal{A} \text{ de } \mu\text{-medida } 0}\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \underset{E_i \text{ disjuntos 2 a 2}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \bar{\mu}(E_i \cup F_i) \quad \square$$

(1.3) $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ (se usa que $E = E \cup \emptyset$)

(1.4) $(X, \bar{\mathcal{A}}, \mu)$ es completo (Ejercicio)

(2) Primero si $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{A}$, luego funciones simples y, tomando límites, f cualquiera (ejercicio)

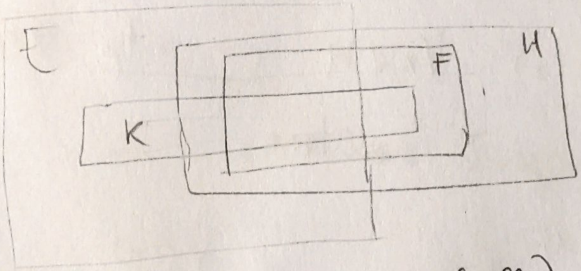
(3) Ejercicio

Termino las demostraciones:

(1.4) $(X, \bar{\mathcal{A}}, m)$ completo. Sea $E \cup F \in \bar{\mathcal{A}}$ (con $\bar{\mu}(E \cup F) = 0$), $[E \in \mathcal{A}, \exists H \supset F \ \mu(H) = 0]$

Sea $K \subset E \cup F \Rightarrow K = \emptyset \cup K$ con $\emptyset \in \mathcal{A}$, $K \subset E \cup H$ /

$0 \leq \mu(E \cup H) \leq \mu(E) + \mu(H) = 0$ $\square$



(2) (2.1) Sea $f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{M})$ medible

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}$ $f^{-1}(B) \in \bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$

$\Rightarrow f: (X, \bar{\mathcal{A}}) \to (Y, \mathcal{M})$ medible.

(2.2) $f \geq 0$.

Caso 1: $f = \chi_E$ medible ($E \in \mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$) Entonces

$$\int f \, d\mu = \mu(E) = \bar{\mu}(E) = \int f \, d\bar{\mu}$$

Caso 2: $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ simple con $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$. $\{E_j\}$ medibles disjuntos 2 a 2.

Por prop. de integral $\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{N} \bar{\mu}(E_j) a_j = \int f \, d\bar{\mu}$.

Caso 3: $f \geq 0$ cualquiera

$\Rightarrow \int f \, d\mu = \sup \{ \int s \, d\mu \ / \ 0 \leq s(x) \leq f(x) \ \forall x \in X$, s simple medible no neg $\}$

$= \sup \{ \int s \, d\bar{\mu} \ / \ 0 \leq s(x) \leq f(x) \ \forall x \in X$, simple medible, no neg $\} = \int f \, d\bar{\mu}$ $\square$

(3) Por ser g medible en $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ $\exists (\overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión creciente de funciones $\overline{\mu}$-medibles, simples y no neg /

/ $0 \leq \overline{s}_1(x) \leq \overline{s}_2(x) \leq \dots \quad \forall x \in X$, $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

$$\overline{s}_n(x) = \sum_{j=1}^{N_n} a_j \chi_{\overline{E_{nj}}}(x), \text{ con } 0 < a_1 < \dots < a_{N_n},$$

$\overline{\mathcal{A}} \supset \{\overline{E_{nj}}\}_{j=1}^{N_n}$ disjuntos dos a dos

y $\overline{E_{nj}} = E_{nj} \cup F_{nj}$ / $E_{nj} \in \mathcal{A} \ni H_{nj} \supset F_{nj}$ / $\mu(H_{nj}) = 0$

Definimos $s_n(X) := \sum_{j=1}^{N_n} a_j \chi_{E_{nj}}(x)$ simple, μ-medible, no neg

$$\Rightarrow \int s_n \, d\mu = \int s_n \, d\overline{\mu} = \sum_{j=1}^{N_n} a_j \underset{\mu(E_{nj}) = \overline{\mu}(\overline{E_{nj}})}{\overline{\mu}(E_{nj})} = \int \overline{s}_n \, d\overline{\mu} \quad (*)$$

$$s_n(x) = \overline{s}_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{N_n} H_{nj}\right)}_{H_n}, \quad \mu(H_n) = \overline{\mu}(H_n) = 0$$

Por tanto, $\forall x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n =: H$ se tiene $\underbrace{0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \dots}_{\text{c.t.p.}}$ $(***)$

y $\mu(H) = \overline{\mu}(H) = 0$

Definimos $h(x) = \limsup s_n(x)$ medible, pues $s_n(x)$ medibles

y $h(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad \forall x \notin H$ $\underline{\text{i.e. c.t.p.}}$ $(***)$

Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i)} \int g \, d\overline{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int \overline{s}_n \, d\overline{\mu} \\ \text{(ii)} \int h \, d\overline{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\overline{\mu} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \overline{s}_n \, d\overline{\mu} \end{array}\right\} (**)$$

$$\Rightarrow \int h \, d\mu \underset{(2.1)}{=} \int h \, d\overline{\mu} \underset{(**)}{=} \int g \, d\overline{\mu} \qquad \square$$

def $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

Se define $\int_X f\,d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$, cuando tenga sentido ⊛

Recuerdo: $f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$. $f = f^+ - f^-$. $|f| = f^+ + f^-$

⊛ es decir, cuando $\int f^+ d\mu < \infty$ ó $\int f^- d\mu < \infty$

def. Se dice que una función medible <u>es integrable</u> si $\int |f|\,d\mu < \infty$.

Es decir, si $\int f^+ < \infty$ y $\int f^- < \infty$.

<u>Propiedades 1)</u> Sean $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles e integrables, $c \in \mathbb{R}$. Entonces → Ejercicio: demostrar.

(a) cf integrable, $\int (cf)\,d\mu = c\int f\,d\mu$

(b) $f+g$ integrable, $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$

(c) $\underbrace{f \leq g}_{\text{(en todo } X)} \Rightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

def: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ edm. $f: X \to \mathbb{C}$ medible. Se define

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \operatorname{Re} f\,d\mu + i\int_X \operatorname{Im} f\,d\mu \quad \text{cuando esto tenga sentido}$$

def Se dice que $f: X \to \mathbb{C}$ es <u>integrable</u> si $\int |f|\,d\mu < \infty$, es decir, si $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ integrables

<u>Propiedades 2</u>: Sean $f, g: X \to \mathbb{C}$ medibles e integrables, $c \in \mathbb{C}$. → Ejercicio: demostrar

Entonces: se cumplen (a) y (b) de <u>Prop 1</u>

<u>Proposición</u>: $f: X \to \mathbb{C}$ medible e integrable $\Rightarrow \left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$

<u>dem</u>: $\operatorname{Re} f = g$, $\operatorname{Im} f = h$. $\int_X f\,d\mu = \left|\int_X f\,d\mu\right| e^{i\alpha}$

$$\Rightarrow \left|\int_X f\,d\mu\right| = e^{-i\alpha}\int f\,d\mu \underset{(a)}{=} \int (e^{-i\alpha} f)\,d\mu \underset{\mathbb{R}^+}{=} \operatorname{Re}\left(\int e^{-i\alpha} f\,d\mu\right) \underset{def}{=}$$

$$= \int \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f)\,d\mu \underset{\substack{(c)\\ \operatorname{Re} z \leq |z|}}{\leq} \int |e^{-i\alpha} f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu \quad \square$$

$\rightarrow$ Ejercicio

Prop: Sean $f, g : X \to \mathbb{C}$ medibles e integrables. Son equivalentes:

(a) $f = g$ ctp

(b) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int f \chi_E \, d\mu = \int g \chi_E \, d\mu$

(c) $\int \underbrace{|f-g|}_{\text{el valor absoluto es necesario}} d\mu = 0$

def

- Se establece una relación de equivalencia: f, g (medibles e) integrables

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = g \text{ c.t.p.}$$

- Se define $L^1(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ integrables} \} / \sim$

con la norma $\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$

$(L^1(\mu), \|\cdot\|_{L^1})$ es un espacio normado (ejercicio) y completo (se demostrará si hay tiempo)

[todo sucesión de Cauchy con la dist. $\|f-g\|_{L^1}$ es convergente]

A $(L^1(\mu), \|\cdot\|_{L^1})$ se lo denomina ESPACIO DE BANACH

$f_n : X \to \mathbb{C}$

Teorema de la Convergencia Dominada (o de Lebesgue)

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones integrables. Sea f integrable tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ctp x, tal que $\exists h$ integrable que cumple $|f_n(x)| \le h(x)$ ctp x.

Entonces: $\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

dem: Considerando partes reales e imaginarias, el teorema se reduce al caso: $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$|f_n(x)| \le h(x)$ ctp $x \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x)| \le h(x)$ ctp x.

Por tanto, $h + f_n \ge 0$, $h - f_n \ge 0$ ctp, $h + f \ge 0$, $h - f \ge 0$ ctp

Aplicamos el Lema de Fatou:

① $\int h + \int f = \int (h+f) \, d\mu = \int \liminf (h + f_n) \, d\mu \le \liminf \int (h + f_n) \, d\mu = \int h \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu$

② $\int h - \int f = \int (h-f) \, d\mu = \int \liminf (h - f_n) \, d\mu \le \liminf \int (h - f_n) \, d\mu = \int h \, d\mu + \liminf \int (-f_n) \, d\mu$
$= \int h \, d\mu - \limsup \int f_n \, d\mu$

de ① y ② se saca

$$\left.\begin{array}{l} ①\ \int f\,d\mu \le \liminf \int f_n\,d\mu \\ ②\ \int f\,d\mu \ge \limsup \int f_n\,d\mu \end{array}\right\} \liminf \int f_n\,d\mu = \limsup \int f_n = \int f\,d\mu$$

$$\overset{\text{VI}}{\liminf} \int f_n\,d\mu \ge \int f\,d\mu$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu \quad \square$$

(*) de la demostración anterior:

$\forall n\ \exists E_n \in \mathcal{M} \ /\ \mu(E_n)=0,\ |f_n(x)| \le h(x) \quad \forall x \in E_n^c$

$\Rightarrow \forall n \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ /\ \mu(E)=0,\ |f_n(x)| \le h(x)\ \forall x \in E^c$

$E^c \subseteq E_n^c\ \forall n$

$\Rightarrow |f(x)| \le h(x) \quad \forall x \in E^c,\ \mu(E)=0 \Rightarrow (|f| \le h \text{ ctp.})$

Corolario del T. Convergencia Dominada: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrables tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge ctp x. Además, $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n\,d\mu\right)$.

dem: definimos $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. (medible)

$$\int g\,d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\,d\mu \underset{\text{CTM}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int |f_n|\,d\mu\right) < \infty \Rightarrow g \text{ integrable}$$

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

$g(x) < \infty$ ctp x ya que si $A = \{x : g(x) = \infty\}$ cumpliese $\mu(A) > 0$

$$\rightarrow \int_X g(x)\,d\mu \ge \int_A g(x)\,d\mu = \infty \cdot \mu(A) = \infty \ \# \ \int g\,d\mu < \infty$$

$\boxed{g \text{ integrable} \Rightarrow g(x) < \infty \text{ ctp } x}$

Además, $\int \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right| d\mu \le \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\,d\mu = \int g\,d\mu < \infty \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$ integrable

Por último, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f_n(x)}_{G_N(x)}$ ctp x: $|G_N(x)| \le \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)| \le g(x)$ integrable

Aplicamos TCD con G_N, g

$$\Rightarrow \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu \ \square$$

Espacio normado $L^1(\mu)$ (ya visto)

$\{f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ c.t.p.}\}$, $L^1(\mu) = \{g \text{ integrable}\}/\sim$

$$\underbrace{\|g\|_1}_{\text{abuso de notación}} = \|[g]\|_1 = \int |g| d\mu \quad \text{norma en } L^1(\mu)$$

$$\|\cdot\|_{L^1} \equiv \|\cdot\|_1$$

$\boxed{\text{Teorema: } (L^1(\mu), \|\cdot\|_{L^1}) \text{ es completo, es decir, de Banach}}$

dem: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; / \; n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$

(1) Existen $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$ tales que

$\forall k \; \forall n \geq n_k \quad \|f_n - f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$.

En particular, $\forall l \geq n_k \quad \|f_{n_l} - f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$

(2) Definimos $g_1 = f_{n_1}$, $g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \quad \forall k \geq 2$.

$(*)$ $\sum_1^\infty \int |g_n| d\mu = \int |f_{n_1}| + \sum_2^\infty \int |f_{n_n} - f_{n_m}| < \int |f_{n_1}| + \underbrace{\sum_2^\infty \frac{1}{2^{n-1}}}_{=1} < \infty$

Por el corolario, $f = \sum_1^\infty g_n$ bien def, integrable y $\int f d\mu = \sum_1^\infty \int g_n d\mu$

(3) $\sum_{n=1}^\infty g_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N g_n = \lim_{N\to\infty} \left[\cancel{f_{n_1}} + (f_{n_2} - \cancel{f_{n_1}}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) \ldots + f_{n_N} - f_{n_{N-1}}\right]$

$= \lim_{N\to\infty} f_{n_N} = f$. Es decir, $\exists \lim f_{n_N}(x) = f(x)$ ctp x

y f es integrable

(4) Para ver que $f_{n_N} \longrightarrow f$ en norma $\|\cdot\|_{L^1}$:

$\lim_{N\to\infty} \int |f_{n_N} - f| d\mu = 0$:

(4.1) $f_{n_N} \longrightarrow f$ ctp $x \Rightarrow |f_{n_N} - f| \longrightarrow 0$ ctp

(4.2) $H(x) = \sum_1^\infty |g_n(x)|$. Por TCM y $(*)$, H integrable. $H(x) \geq |f_{n_k}(x)| = \left|\sum_{n=1}^k g_n(x)\right|$

$\Rightarrow |f(x)| \leq H(x) \Rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2H(x)$ integrable.

$\xrightarrow{TCD} \lim_{N\to\infty} \int |f_{n_N} - f| d\mu = \int \underbrace{\lim_{N\to\infty} |f_{n_N} - f|}_{0} d\mu = 0 \quad \square$

Resumen de la demostración anterior:

- $\{f_n\}$ de Cauchy
- $\exists$ subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $f \in L^1 / f_{n_k} \longrightarrow f$ en L^1, $\|\cdot\|_1$

Consecuencia: $f_n \to f$ en norma L^1

Idea: $\|f_n - f\|_{L^1} = \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|_1}_{\hat{\varepsilon} \text{ por Cauchy}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_1}_{\hat{\varepsilon} \text{ por } f_{n_k} \to f}$

Corolario: Sea $f: X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $(a<b,\ a,b \in \mathbb{R})$ tal que $\forall t \in [a,b]$ $x \overset{f_t}{\longmapsto} f(x,t)$ es integrable.

Definimos $F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$

(a) Si existe $g \in L^1$ / $|f(x,t)| \leq |g(x)|$ $\forall t, x$

y $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ $\forall x$. Entonces:

$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$

(b) Si $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe $\forall x,t$ y $\exists h \in L^1$ /

$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq h(x)$ $\forall x,t$, entonces F derivable

y $F'(t_0) = \int_X \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t_0)\right) d\mu(x)$

dem: (b) $F'(t_0) = \lim_{k \to 0} \frac{F(t_0+k) - F(t_0)}{k} = \lim_{k \to 0} \int \frac{(f(x,t_0+k) - f(x,t_0))}{k} d\mu(x)$

$\overset{?}{=} \int \left(\lim_{k \to 0} \frac{f(x,t_0+k) - f(x,t_0)}{k}\right) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x)$

? TCD: Por th. valor medio, $\forall k$ $\exists k'$ / $\underbrace{\left|\frac{f(x,t_0+k) - f(x,t_0)}{k}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0+k')\right|}_{\hat{\leq}\ h(x)}$

Ya aplicamos el TCD y se puede meter el lim en la integral (los k pueden ser $k = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$)

3. Espacios de medida.

$X \neq \emptyset$

def. Una MEDIDA EXTERIOR μ^* en X es una aplicación

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$ (c) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

(b) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

def. Una ÁLGEBRA EN X es una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacía que cumple:

(a) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$

(b) $\{E_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} E_i \subset \mathcal{A}$

Ejemplo: (1) $\mathcal{A} = \{$uniones finitas de intervalos de la forma $(a,b], (-\infty, b], (a, \infty)$ con $a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$. es un álgebra.

def. Dado $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra, una PREMEDIDA EN $(X, \mathcal{A})$ es una aplicación $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

(a) $\rho(\emptyset) = 0$

(b) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow \rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i)$

Ejemplo (2) En $\mathcal{A}$ como en (1), $\rho((a,b]) := b-a$,

$\rho((-\infty, b]) = \rho((a, \infty)) = \infty$. $\rho(\emptyset) = 0$

Si $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ disjuntos dos a dos. I_i de la forma $\begin{cases} (a,\infty) \\ (a,b] \\ (-\infty, b] \end{cases}$

Y se define $\rho(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho(I_i)$

(2.1) ρ está bien definida: si I intervalo e $I = \bigcup_{i=1}^{M} I_i$ disjuntos 2 a 2

$\Longrightarrow \rho(I) = \sum_{i=1}^{M} \rho(I_i)$

$I_i = (a_{i-1}, a_i]$ $\forall i \in \{1, \dots, M\}$
con $a_0 = a$, $a_M = b$

(2.2) ρ es una premedida (Ejercicio)

Ejemplo (3). PREMEDIDAS DE LEBESGUE-STIELJES.

· Dada $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente y continua por la derecha. Definimos $\rho_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. $\rho_F((a,\infty)) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$

⊛

$$\rho_F((-\infty, b]) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

$E = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. I_i disjuntos dos a dos y de la forma $(a,b]$, (a,∞), $(-\infty,b]$

$$\Rightarrow \rho_F(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_F(I_i)$$

· Entonces ρ_F bien definida y es premedida en $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ (del ejemplo (1)) $\to$ Ejercicio

· ρ del ejemplo (2) es ρ_F con $F(x) \equiv x$.

⊛ F es una función de distribución

Prop. Dados $X \neq \phi$, $\mathcal{A}$ un álgebra en X, ρ premedida en $(X, \mathcal{A})$.

Definimos $\mu_\rho^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) / \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$.

Entonces μ_ρ^* es una medida exterior y $\rho \equiv \mu_\rho^*|_{\mathcal{A}}$

dem: Ejercicio. (Ver cap 1 y ejercicio 7 hoja 1)
pg 2 de estos apuntes

Ejemplo (4) F func. de distrib. en $\mathbb{R}$, ρ_F la premedida asociada, μ_F^* la medida exterior asociada. Dado $\{b\} \subset \mathbb{R}$, ¿cuál es su medida exterior?

· $\mu_F^*(\{b\}) \leq \mu_F^*((b-1/n, b]) = \rho_F((b-1/n, b]) =$

$= F(b) - F(b-1/n)$. hacemos $n \to \infty$

$\Rightarrow \mu_F^*(\{b\}) \leq F(b) - \lim_{n\to\infty} F(b-1/n) = F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)$ (a)

· Sean $E_i \in \mathcal{A}$ intervalos / $\{b\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \exists i_0 / \{b\} \subset E_{i_0}$

(b.1) Si $E_{i_0} = (a,c]$ con $a < b \leq c \Rightarrow \sum \mu_F^*(E_i) \geq \mu_F^*(E_{i_0}) = F(c) - F(a) \geq$

$\geq F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)$

(b.2), (b.3) Si $E_{i_0} \in \{(a,\infty), (-\infty, c]\} \Rightarrow \sum \mu_F^*(E_i) \geq \mu_F^*(E_{i_0}) \geq F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)$

$\lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$

$F(c) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$

(b) En cualquier caso $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F^*(E_i) \geq F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x) \to \mu_F^*(\{b\}) \geq F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)$

(a),(b) $\Rightarrow \boxed{\mu_F^*(\{b\}) = F(b) - \lim_{x\to b^-} F(x)}$ □

Teorema de Carathéodory (de construcción de medidas)

Sea $X \neq \phi$, μ^* una medida exterior sobre X, definimos:

$$\mathcal{M} = \{ A \subset X \ / \ \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E) \ \forall E \subset X \}$$

Entonces: (a) $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

(b) $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa

Además, si $\mathcal{A}$ una álgebra de X, ρ premedida en $(X, \mathcal{A})$ y $\mu^* = \mu_\rho^*$; entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$

Nombre: $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles

Demostraciones como ejercicio del ejemplo de la página anterior, ej (3):

- ρ_F bien definida: si I intervalo, $I = \sum_{j=1}^{M} I_j$ con $\{I_j\}$ disjuntos dos a dos y de la forma $(a,b]/(a,\infty)/(-\infty,b]$.

$\Longrightarrow \rho(I) = \sum_{j=1}^{M} \rho(I_j)$.

<1>1. Caso $I \in \{(a,\infty), (-\infty,b] : a,b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ obvio $\infty = \underbrace{\sum \rho(I_j)}_{\text{alguno es } \infty}$

<1>2. Caso $I = (a,b] \Rightarrow$ Se pueden ordenar los I_j: $I_j = (a_j, a_{j+1}]$ con $j \in \{0, \dots, M-1\}$, $a_0 = a$, $a_M = b$.

$\Rightarrow \rho_F(I) = F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{M} \left(F(a_{j+1}) - F(a_j) \right) = \sum_{j=1}^{M} \rho_F(I_j)$.

- ρ_F premedida.

<1>1. $\rho_F(\phi) = 0$, por definición de ρ_F.

<1>2. Sean $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$, $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos

<2>1. Por <1>2.1, $E \overset{(2.1)}{=} \sum_{k=1}^{M} I_k$, I_k $\underbrace{\text{disjuntos dos a dos}}$ y en $\mathcal{A}$ → "intervalos" (por definición de $\mathcal{A}$) ejemplo (1) pág. 16.2)

<2>2. Cada E_j está contenido a un $I_{k_{j_0}}$ y es disjunto a los demás I_k, $k \neq j$

<2>3. Para ver $\rho(E) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M} \rho(I_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j)$, es suficiente ver que si $\{E_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ todos los E_j dentro de I_k, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{j_n} = I_k$, entonces $\rho(I_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_{j_n})$.

<3>1. Caso $I_k=(a,b]$. Se ve que E_{jn} se pueden ordenar como

$E_{jn}=(a_{n+1},a_n]$, con $n\in\{1,2,\dots\}$ $a_1=b$.

- Pueden ser finitos los E_{jn} $\Rightarrow \exists m \,/\, a_{m+1}=a$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \rho(I_k)=F(b)-F(a)\\ \sum_{n=1}^{m}\rho(E_{jn})=\sum_{n=1}^{m}\left(F(a_n)-F(a_{n+1})\right)=F(a_1)-F(a_{m+1})\end{array}\right\}=.$$

- Pueden ser infinitos con $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(E_{jn})=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M}\left(F(a_n)-F(a_{n+1})\right)=\lim_{M\to\infty}\left(F(a_1)-F(a_{M+1})\right)$$

$$=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)=F(b)-F(a)=\rho(I_k)$$

<3>2. Caso $I_k=(-\infty,b]$. Es claro que E_{jn} se pueden ordenar como $E_{jn}=(a_{n+1},a_n]$, $n\in\{0,1,\dots\}$ $a_0=b$.

- Si son finitos, $\exists m/ \; a_{m+1}=\infty$ <3>2.1
- Si son infinitos, $a_m\in\mathbb{R}\ \forall m\in\mathbb{N}$ <3>2.2

$$\sum_{n=0}^{m/\infty}\rho(E_{jn})=\sum_{n=0}^{m/\infty}\left[F(a_n)-F(a_{n+1})\right]=$$

<3>2.1 $=\sum_{n=0}^{m-1}\left(F(a_n)-F(a_{n+1})\right)+F(a_m)-\lim_{x\to\infty}F(x)=$

$$=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=\rho(I_k)$$

<3>2.2 $=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F(a_n)-F(a_{n+1})\right)=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=0}^{M}\left(F(a_n)-F(a_{n+1})\right)$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(F(b)-F(a_{M+1})\right)=\rho(I_k).$$

<3>3. Caso $I_k=(a,\infty)$.

<4>1 E_{jn} tienen alguno tq $(a,a_1]\in\{E_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$.
Entonces se pueden ordenar $E_{jn}=(a_{n-1},a_n]$ con a_0 similar a <3>2.

<4>2 Contrario a <4>1. Tomemos un b tal que $(b,b_1]\in\{E_{jn}\}$. Separamos los $\{E_{jn}\}$ en: los contenidos en (b,∞) ① y los contenidos en $(a,b]$ ②. Para ②, proceder como en <3>1.
Para ①, proceder como en <3>2.

demostracion del teorema de Caratheodory:

Observacion: por def. de μ^* (medida exterior) $\mu^*(E) \le \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$ $\forall A, E \subset X$.

Por tanto, se puede definir $\mathcal{M} = \{A \subset X \,/\, \mu^*(E) \ge \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c\cap E)\ \forall E \subset X\}$.

<a>1. $\mathcal{M}$ es un álgebra: (1.1) $\mathcal{M} \neq \emptyset$ porque $\emptyset \in \mathcal{M}$

(1.2) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ (simetría de definición)

(1.3) $A, B \in \mathcal{M}$, $E \subset X \Rightarrow \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap A^c \cap B^c) \le$

$$\le \mu^*(E\cap A) + \underbrace{\mu^*(E\cap A^c\cap B) + \mu^*(E\cap A^c\cap B^c)}_{\mu^*(E\cap A^c) \text{ por } B\in\mathcal{M}} =$$

$A\cup B = \underbrace{A \cup (B\cap A^c)}_{\text{disjuntos}} \rightarrow E\cap(A\cup B) = (E\cap A)\cup(E\cap B\cap A^c)$

$= \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) = \mu^*(E)$. Por tanto, $A\cup B \in \mathcal{M}$ $\boxed{a.1}$

Nota sobre (1.3): por inducción, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$.

Para terminar (a) nos falta ver que es cerrado por uniones numerables.

<b>1. $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es finitamente aditiva:

dem: Sean $A, B \in \mathcal{M}$. $A\cap B = \emptyset \Rightarrow \mu^*(A\cup B) \underset{A\in\mathcal{M}}{=} \mu^*((A\cup B)\cap A) + \mu^*((A\cup B)\setminus A)$

$= \mu^*(A) + \mu^*(B)$. (1.1). Por inducción, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ finitamente aditiva <b2>

Del mismo modo, si $A, B \in \mathcal{M}$, $E \subset X$, $A\cap B = \emptyset$

$\Rightarrow \mu^*((A\cup B)\cap E) = \mu^*((A\cup B)\cap E\cap A) + \mu^*((A\cup B)\cap E\cap A^c) =$

$= \mu^*(E\cap A) + \mu^*(B\cap E)$ (1.2)

Por (1.2) con inducción, se tiene: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ disjuntos dos a dos, $E\subset X$

$$\rightarrow \mu^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\cap E\right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j\cap E). \text{ <b1>}$$

<a>2. $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra:

Si $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, definimos $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2\cap A_1^c$, $B_3 = A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c$, ...

$\forall i \in \mathbb{N}$ $B_i \in \mathcal{M}$, porque $\mathcal{M}$ es un álgebra (cerrada por intersecciones finitas)

y $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$.

Como $\mathcal{M}$ álgebra, $\bigcup_{j=1}^N B_j \in \mathcal{M}$. Por tanto,

$$\mu^*(E) \ge \mu^*\left(\left(\bigcup_1^n B_j\right)\cap E\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_1^n B_j^c\right)\cap E\right) \underset{\text{<b1>}}{\ge} \sum_{j=1}^N \mu^*(B_j\cap E) + \mu^*\left(\bigcap_1^\infty B_j \cap E\right)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu^*(E) \ge \sum_1^\infty \mu^*(B_j\cap E) + \mu^*\left(\left(\bigcap_1^\infty B_j\right)\cap E\right) \underset{\mu^* \text{ medida ext.}}{\ge} \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right)\cap E\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_{j=1}^\infty B_j\right)\cap E\right)$$

Por tanto, $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}$ $\boxed{(a)}$

<b>2. $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ medida: $\mu^*(\emptyset)=0$ (obvio). Falta ver que es aditiva:

Sean $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ disjuntos dos a dos. Por def. de μ^* medida ext:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \overset{①}{\leq} \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i).$$

Por <b>1 es finitamente aditiva:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu^*(A_i).$$

Por tanto, $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu^*(A_i)$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \underset{②}{\geq} \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$$

$①, ② \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup A_i\right) = \sum_1^\infty \mu^*(A_i)$ $\boxed{b2}$

Obs. de la misma forma, si $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ disjuntos dos a dos y $E\subset X$

$$\overset{\langle b1\rangle}{\Longrightarrow} \mu^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\cap E\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i\cap E)$$

<b>3. Completitud de $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{M}$:

Si $A\in\mathcal{M}$, $\mu^*(A)=0$, $N\subset A \Rightarrow N\in\mathcal{M}$

dem: $\mu^*(N)=0$. Sea $E\subset X \Rightarrow \mu^*(E\cap N)+\mu^*(E\cap N^c) \leq$

$\leq \mu^*(N)+\mu^*(E) = \mu^*(E)$ $\boxed{b}$ $\quad \left(\begin{matrix} E\supseteq E\cap N^c \\ N\supset E\cap N\end{matrix}\right)$

Obs: en general, hemos visto: $N\subset X \wedge \mu^*(N)=0 \Rightarrow N\in\mathcal{M}$.

(c) $\exists\, \mathcal{A}, \rho$: $\mathcal{A}$ álgebra de X, $\rho: \mathcal{A}\longmapsto[0,\infty]$ premedida y

$\mu^*(E) = \left\{\sum_{i=1}^\infty \rho_i \,/\, \{E_i\}\subset\mathcal{A},\ \bigcup_1^\infty E_i \supset E\right\}$. Entonces $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$.

<c>1. Sea $B\in\mathcal{A}$, $E\subset X$. $\underbrace{\text{Dado } \varepsilon>0\ \exists \{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A} \,/\, \mu^*(E)\geq \sum_{j=1}^\infty (\rho(E_j))-\varepsilon}_{\text{Por def de } \mu^* \text{ como } \mu^*_\rho}$

$$\Rightarrow \mu^*(E)\geq \sum_1^\infty \rho(E_j)-\varepsilon \underset{\rho \text{ aditiva en } \mathcal{A}}{=} \sum_1^\infty\left(\rho(E_j\cap B)+\rho(E_j\cap B^c)\right)-\varepsilon \geq$$

$E\cap B \subset \left(\bigcup_{j=1}^\infty (E_j\cap B)\right)$, $E_j\cap B\in\mathcal{A}$

$$\geq -\varepsilon + \mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mu^*(E)\geq \mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c) \quad \boxed{c}$$

Consecuencias del teorema de Carathéodory

(1) Medidas de Lebesgue-Stieltjes

· En $\mathbb{R}$ tenemos el álgebra $\mathcal{A} = \{$uniones finitas de intervalos $(a,b]$, $(-\infty,b)$, (a,∞), $a,b \in \mathbb{R}\}$

· Con la premedida $\rho_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. $\rho_F((a,\infty)) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$

$\rho_F((-\infty,b]) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$ donde F fnc. de distrib. en $\mathbb{R}$ (no decrec. y cont. por la derecha).

· Definimos $\mu_F^*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) / E_j \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_j E_j\}$

$$\mathcal{M}_F = \{A \subset \mathbb{R} / \mu_F^*(A\cap E) + \mu_F^*(A^c \cap E) = \mu_F^*(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}\}$$

T. Carath. $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}_F$ es una σ-álgebra. $\mu_F := \mu_F^*|_{\mathcal{M}_F}$ es una medida completa y $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_F$

(ya sabíamos que $\mu_F^*|_{\mathcal{A}} \equiv \rho_F$).

$\Rightarrow$ $\forall a<b \in \mathbb{R}$ $\quad (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\mathcal{A}}{(a, b-1/n]} \in \mathcal{M}_F$ $\Rightarrow$ Todo abierto de $\mathbb{R}_u$ está en $\mathcal{M}_F$ (pues $\mathbb{R}$ es II axioma)

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_F$

· Si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \in \mathcal{M}_F$ porque $(x-1/n, x] \in \mathcal{M}_F$,

$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(x-1/n, x]}_{A_n \in \mathcal{M}_F}$ con $A_1 \supset A_2 \supset \dots$

$\Rightarrow \mu_F(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(A_n) \underset{A_n \in \mathcal{A}}{=} \lim_{n\to\infty} \rho(A_n) = \lim_{n\to\infty} [F(x) - F(x-1/n)] =$

$$\boxed{\mu_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(x)}$$ "salto de F en x" $= \mu_F(\{x\})$.

(2) Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (caso particular del anterior)

· Misma álgebra $\mathcal{A}$ que en (1)

· Premedida $\rho = \rho_{id}$: $(\rho((a,b]) = b-a$, $\rho((a,\infty)) = \infty$, $\rho((-\infty,b]) = \infty)$

· Medida ext. $m^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} E_i / E_i \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_i E_i\}$

· σ-álgebra: $\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R} / m^*(A\cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}\}$ σ-álgebra. $m = m^*|_{\mathcal{L}}$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$. m es una medida completa

* $m(\{x\}) = 0$ (ya visto)
* $m^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(I_i) / I_i$ intervalos abiertos $: E \subset \bigcup_i I_i\}$

Obs: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

no lo veremos ↑ ↑ ya visto

Teorema: sea $E \in \mathcal{L}$. Entonces

$$m(E) \overset{(a)}{=} \inf\{m(V) \,/\, V \text{ abierto con } E \subset V\}$$
$$\overset{(b)}{=} \sup\{m(K) \,/\, K \text{ compacto con } K \subset E\}$$

} Notación: m es una medida regular

dem: (a) La primera se ve porque $m(E) = \inf\{\sum_i \rho(I_j) \,/\, I_j \text{ intervalos abiertos}, E \subset \bigcup_j I_j\} =$

$= \inf\{\sum_j \rho(I_j) \,/\, I_j \text{ intervalos abtos disjuntos}, E \subset \bigcup_j I_j\}$

$= \inf\{m(\bigcup_j I_j) \,/\, I_j \text{ intervalos abtos disjuntos } E \subset \bigcup_j I_j\} = \inf\{m(V) : V \text{ abierto} \,/\, E \subset V\}$

(b) La segunda:

· Supongo E acotado.

. Si E cerrado $\Rightarrow K_0 = \overline{E} = E$ compacto $m(K_0) = m(E)$

$\Rightarrow \sup\{m(K) / K \text{ compacto } K \subset E\} \begin{matrix} \geq m(E) \text{ obvio} \\ \leq m(E) \text{ porque si } K \subset E \\ \Rightarrow m(K) \leq m(E) \end{matrix}$

. Si E no cerrado $E \subset \overline{E}$. $\overline{E} \setminus E \in \mathcal{M} \underset{(a)}{\Rightarrow}$ dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \mathcal{U}$ abt $/ \overline{E} \setminus E \subset \mathcal{U}$, $m(\mathcal{U}) \leq m(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$

$K = \overline{E} \setminus \mathcal{U}$ es cerrado y acotado (E acotado) $\Rightarrow K$ compacto, $K \subset E$

Además, $K = E \setminus \mathcal{U}$ porque $\begin{cases} \text{si } x \in \overline{E} \setminus \mathcal{U} \Rightarrow x \notin \mathcal{U} \underset{\overline{E} \setminus E \subset \mathcal{U}}{\Rightarrow} x \notin \overline{E} \setminus E \underset{x \in \overline{E}}{\Rightarrow} x \in E \\ \text{si } x \in E \setminus \mathcal{U} \Rightarrow x \in \overline{E},\ x \notin \mathcal{U} \Rightarrow x \in \overline{E} \setminus \mathcal{U} \end{cases}$

Por tanto, $m(K) = m(E \setminus \mathcal{U}) \underset{m(E) < \infty \text{ por ser acotado}}{=} m(E) - m(E \cap \mathcal{U}) =$ $\quad m(E) = m(E \cap \mathcal{U}) + m(E \setminus \mathcal{U})$

$$= m(E) - \underbrace{[m(\mathcal{U}) - m(\mathcal{U} \setminus E)]}_{m(\mathcal{U} \cap E)} \geq m(E) - \cancel{m(\overline{E} \setminus E)} - \varepsilon + \cancel{m(\overline{E} \setminus E)}$$

$m(\mathcal{U}) \leq m(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$

$\mathcal{U} \setminus E \supset \overline{E} \setminus E$

$\Rightarrow m(K) \geq m(E) - \varepsilon$ $\boxed{b}$

· Supongo E no acotado: $E_N = E \cap [-N, N]$. $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ acotados. $\bigcup_N E_N = E$

$\Rightarrow m(E) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \{m(E_N)\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup\{m(K) : K \text{ compacto} \subset E_N\} = \sup\{m(K) : \underset{(\text{acotado})}{K \text{ compacto} \subset E}\}$ $\boxed{b}$

$\sup\{m(K) : K \text{ compacto} \subset E\} \begin{matrix} \leq m(E) \text{ obvio } (K \subset E) \\ \geq \sup\{m(E) - \varepsilon : \varepsilon > 0\} = m(E) \end{matrix}$ □

Teorema: $E \in \mathcal{L}$, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$: entonces,

(1) $\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}_u$ / $E \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ y $m(\bigcap U_i \setminus E) = 0$

(2) $\exists \{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ cerrados / $\bigcup_{i=1}^{\infty} \subset E$ y $m(E \setminus \bigcup H_i) = 0$

dem: (1) $m(E) = \inf\{m(U) / U \in \mathcal{T}_u, E \subset U\}$

Caso 1: $m(E) < \infty \Rightarrow \exists \{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ abiertos / $m(U_j) < m(E) + \frac{1}{j}$ $\forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m(\bigcap U_j) \leq m(U_j) \leq m(E) + \frac{1}{j}$ $\forall j \in \mathbb{N}$
$E \subset \bigcap U_j \Rightarrow m(E) \leq m(\bigcap U_j)$ $\Big\}$ $m(\bigcap U_j) = m(E)$

y $m(\bigcap U_j) = m(E) + m(\bigcap U_j \setminus E) \xRightarrow[m(E)<\infty]{} m(\bigcap U_j \setminus E) = 0$

Caso 2: $m(E) = \infty$. $E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k$ donde $E_k = E \cap [k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$
$m(E_k) \leq m([k, k+1)) < \infty$

$\xRightarrow{\text{Caso 1}} \exists \{U_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ abiertos / $E_k \subset \bigcap U_j^{(k)}$, $m(\bigcap U_j^{(k)} \setminus E_k) = 0$ $\quad E \supset E_k$

Tomo ahora $U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_j^{(k)}$. $U_j \setminus E = \bigcup_k (U_j^{(k)} \setminus E) \subset \bigcup_k (U_j^{(k)} \setminus E_k)$

$m(\bigcap U_j \setminus E) = m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j^{(k)} \setminus E\right)\right) \leq m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} (U_j^{(k)} \setminus E_k)\right)\right) \leq \sum_k 0 = 0$

(2) $E^c \in \mathcal{L} \xRightarrow[(1)]{} \exists V_j$ abiertos $V_j \supset E^c$ y $m((\bigcap V_j) \setminus E^c) = 0$

Tomo $H_j = V_j^c$ cerrados $\to H_j \subset E$ y $m(E \setminus \bigcup H_j) =$

$= m(E \cap (\bigcup H_j)^c) = m((\bigcap V_j) \cap E) = m(\bigcap V_j \setminus E^c) = 0$ □

Teorema: $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ es la compleción de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}})$

dem: (1) $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{L}$. Dado E en $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \Rightarrow E = F \cup G$ donde
$F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$, $G \subset H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $m(H) = 0 \Rightarrow m^*(G) = 0 \Rightarrow G \in \mathcal{L} \Rightarrow E \in \mathcal{L}$.

(2) Sea $E \in \mathcal{L} \xRightarrow[\text{Teo anterior}]{} \exists V = \bigcap V_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $H = \bigcup H_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ / $H \subset E \subset V$

y $m(V \setminus E) = m(E \setminus H) = 0$. $E = H \cup (E \setminus H)$ con $H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
$E \setminus H \subset V \setminus H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $m(V \setminus H) = m(V \setminus E) + m(E \setminus H) = 0$ □

Teorema: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada

(1) f integrable Riemann $\Rightarrow$ f medible e integrable en $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, $\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f dm$

(2) f integrable Riemann $\Leftrightarrow$ f continua en casi todo punto $x \in [a,b]$

dem (1) Tomamos particiones $P^{(k)} = \{a = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \dots < t_{n_k}^{(k)} = b\}$

con $P^{(1)} \subset P^{(2)} \subset \dots$, $\|P^{(k)}\| = \sup_i |t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}| \xrightarrow{k \to \infty} 0$

$$s_{(k)}(f) = \sum_{j=1}^{n_k} \underbrace{\inf_{x \in [t_{j-1}^{(k)}, t_j^{(k)}]} f(x)}_{m_j^{(k)}} (t_j^{(k)} - t_{j-1}^{(k)}), \quad S_{(k)}(f) = \sum_{j=1}^{n_k} \underbrace{\sup_{x \in [t_{j-1}^{(k)}, t_j^{(k)}]} f(x)}_{M_j^{(k)}} (t_j^{(k)} - t_{j-1}^{(k)})$$

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{k \to \infty} s_{(k)}. \quad \overline{\int_a^b} f = \lim_{k \to \infty} S_{(k)}$$

- $s_{(k)}(f) = \int g_k dm$ donde $g_k = \sum_{j=1}^{n_k} m_j^{(k)} \chi_{[t_{j-1}^{(k)}, t_j^{(k)}]}$. $g_1 \le g_2 \le \dots$

$\exists g(x) = \lim g_k(x)$ medible, $\left(\exists M \in \mathbb{R} / |f(x)| \le M \ \forall x \in [a,b] \ \left(\int_a^b M < \infty\right)\right)$

$\overset{TCD}{\Longrightarrow} \underline{\int_a^b} f = \lim s_k(x) = \lim \int g_k dm = \int g dm$ y $g(x) \le f(x) \ \forall x$

- Del mismo modo, $\overline{\int_a^b} f = \int G dm$ y $G_k = \sum_{j=1}^{n_k} M_j \chi_{[t_{j-1}^{(k)}, t_j^{(k)}]}$. $G = \lim G_k$

$G_1 \ge G_2 \ge \dots$

$|g|, |G| \le M$

$\left(\begin{array}{l|l} g_k \le f \ \forall k \Rightarrow g \le f & |g_k| \le M \Rightarrow |g| \le M \\ G_k \ge f \ \forall k \Rightarrow G \ge f & |G_k| \le M \Rightarrow |G| \le M \end{array}\right)$

Ⓐ

- f integrable Riemann $\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx \Leftrightarrow \int g dm = \int G dm$

$\Leftrightarrow \int (G - g) dm = 0$

Como $G - g \ge 0$, $\int (G-g) dm = 0 \Leftrightarrow \int |G - g| dm = 0 \Leftrightarrow G = g$ ctp x ⊗

G, g medibles por ser lím. de funciones medibles (simples).

$\left.\begin{array}{l} g \le f \le G \\ G = g \text{ ctp} \end{array}\right\} \Rightarrow f = g = G$ ctp $\underset{\substack{(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m) \\ \text{completa}}}{\overset{g, G \text{ med}}{\Longrightarrow}}$ f medible y $\int g dm = \int f dm$

$\Longrightarrow \int f dm = \int_a^b f dx$ $\boxed{A}$

(2) $\{g(x) = G(x) \Leftrightarrow f$ continua en $x\}$ (Para $\forall x \in [a,b] \setminus (\bigcup P^{(k)})$)

Por tanto, f integrable Riemann $\underset{⊗}{\Longleftrightarrow}$ $G = g$ ctp x $\Leftrightarrow$ f continua ctp x $\square$

$\bigcup P^{(k)}$ tiene medida 0, no tiene importancia

Ejemplo: $f \equiv \chi_{\mathbb{Q}}$. no integrable Riemann en ningún intervalo
. medible en $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, $f = 0$ ctp $\to \int f\,dm = 0$.

Ejemplo: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu = \text{medida de contar})$: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\longleftrightarrow \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$
$n \mapsto x_n = f(n)$
(toda función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es medible)

- $f(x) \geq 0$; $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\chi_{\{n\}}(x) \to \int f\,d\mu = \int \left(\sum_1^{\infty} f(n)\chi_{\{n\}}\right) d\mu =$

$$\overset{TCM}{=} \sum_1^{\infty} \underbrace{\int f(n)\chi_{\{n\}}\,d\mu}_{f(n)\,\underbrace{\mu(\{n\})}_{1}} = \sum_1^{\infty} f(n)$$

- $f(x) \in \mathbb{C}$ general: $\int |f|\,d\mu = \sum_1^{\infty} |f(n)|$ por el caso anterior.
  - f integrable $\iff \int |f| < \infty \iff \sum_1^{\infty} |f(n)| < \infty \iff$ absolutamente convergente.
  - Si f integrable, $\int f\,d\mu = \int \left(\sum_1^{\infty} f(n)\chi_{\{n\}}\right) d\mu \overset{TCD}{=} \sum \int f(n)\chi_{\{n\}} = \sum_1^{\infty} f(n)$

$\left|\sum f(n)\chi_{\{n\}}\right| \leq \sum |f(n)\chi_{\{n\}}| = H(x)$ integrable

Integrales Riemann Impropias:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Sea f acotada en $[1, N]$ $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \underset{\text{Si existe}}{:=} \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx \underset{TMA}{=} \lim_{N\to\infty} \int f\chi_{[1,N]}\,d\mu$$

$\begin{cases} \text{Si } f(x) \geq 0 \ \forall x \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int f \underbrace{\chi_{[1,N]}}_{f_n \uparrow f} d\mu \overset{TCM}{=} \int_1^{\infty} f\,d\mu \\ \text{Si } f(x) \not\geq 0, \text{ puede ocurrir } \exists \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ pero } f \text{ no integrable Lebesgue} \end{cases}$

Ejemplo: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n-1, n]}(x)$

- $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{(-1)^N}{N}\right)$ $\Bigg\{$ existe y es finito (real), por criterio de Leibniz: serie cuyos términos tienden a 0 y alternados en signo.
- $\int_0^{\infty} f\,dm$ no existe
  porque $\int_0^{\infty} |f|\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.

Sin embargo, $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f\,dm = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$

Medidas producto y teorema de Fubini.

Tenemos $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida.

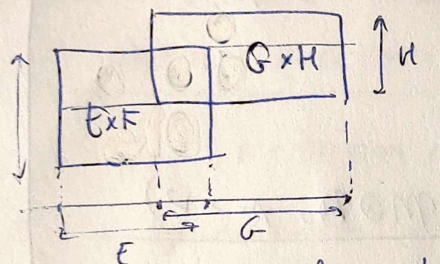
Queremos una medida en $X \times Y$ (relacionada con estos).

def: (a) Un RECTÁNGULO EN $X\times Y$ es un conjunto $E \times F$ con $E \in \mathcal{M}$, $F \in \mathcal{N}$.

(b) Llamamos σ-ÁLGEBRA PRODUCTO, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ a la mínima σ-álgebra que contiene a los rectángulos.

· Definimos $\mathcal{A} = \{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i \ / \ n\in\mathbb{N}, \{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{M}, \{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{N}. \}$

Obs: Toda unión finita de rectángulos se puede escribir como unión disjunta (finita) de rectángulos



$$G\times H \cup E \times F = (G\times H) \,\dot\cup\, (E\setminus G \times H \cap F) \,\dot\cup\, (E \times F \setminus H)$$

· En $\mathcal{A}$ definimos: si $\{E_i \times F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ familia de rectángulos disjuntos dos a dos,

$$\rho\Big(\dot\bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} \rho(E_i \times F_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\,\nu(F_i).$$

Proposición: a) ρ bien definida. Es decir, si tengo dos colecciones de rectángulos disjuntos dos a dos: $\{E_i \times F_i\}_{i=1}^n$, $\{G_j \times H_j\}_{j=1}^m$ con

(**) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i = \bigcup_{j=1}^{m} G_j \times H_j \Rightarrow$ la medida dada por ρ es la misma.

b) $\mathcal{A}$ es un álgebra y ρ es una premedida en $(X\times Y, \mathcal{A})$

Idea: a) Hay que ver que si $E \times F = \dot\bigcup_{j=1}^{k} G_j \times H_j \Rightarrow \mu(E)\nu(F) = \sum_{j=1}^{k} \rho(G_j \times H_j)$

Para ello, escribimos $\chi_{E\times F} = \chi_E \cdot \chi_F \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{k} \chi_{E_j}\chi_{F_j}$

(*) integramos en X $\Rightarrow \forall y \quad \mu(E)\chi_F(y) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{F_j}(y)\mu(E_j) \xrightarrow[\text{en } Y]{\text{integro}} \mu(E)\nu(F) = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)\nu(F_j).$

Pasamos (**) a esa representación a $\{E_i \times F_i \cap G_j \times H_j\}_{i=1, j=1}^{n, m} = \mathcal{F}$

Por lo mostrado en la idea, $\rho(\bigcup \mathcal{F}) = \rho(\dot\bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i) = \rho(\dot\bigcup_{j=1}^{m} G_j \times H_j)$.

b) Uniones finitas claro por def.

$X \times Y \setminus E\times F = (X \setminus E \times Y) \cup (X \times Y \setminus F) \in \mathcal{A}$.

$X \times Y \setminus \bigcup_1^n E_i \times F_i = \bigcap_1^n (E_i^c \times Y) \cup (X \times F_i^c) = \bigcap_1^n (E_i^c \times Y) \cup \bigcap_1^n (X \times F_i^c) =$

$= \left(\bigcap_1^n E_i^c\right) \times Y \ \cup \ X \times \left(\bigcap_1^n F_i^c\right) \in \mathcal{A}$

ρ premedida: faltan uniones numerables

$$E \times F = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \times H_i \Rightarrow \chi_E \chi_F = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{G_i} \chi_{H_i}$$

TCM, integro en X

$$\longrightarrow \mu(E) \chi_F(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \chi_{H_i}$$

TCM, integro en Y

$$\longrightarrow \mu(E) \nu(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \nu(H_i)$$

<u>Corolario</u>: Con fnc. de Carathéodory, a partir de $\mathcal{A}, \rho$ construimos un <u>espacio de medida completo $(X \times Y, \mathcal{Q}, \lambda)$</u> tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{Q}$, $\lambda|_{\mathcal{A}} = \rho$.

Como $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ = mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{Q}$.

Denotamos $\mu \times \nu := \lambda|_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$.

<u>Tenemos espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$</u> con $\rho = \mu \times \nu|_{\mathcal{A}}$

De hecho, como $(X \times Y, \mathcal{Q}, \lambda)$ es completo, podemos definir $\mu \times \nu$ en la compleción de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

<u>Ejemplos</u>: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m \times m) =$
$= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, m \times m)$

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$:

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\quad U \subset \mathbb{R}^2$ abto $\Rightarrow U = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n$, $\{E_n\}, \{F_n\} \in$
$E_n \times F_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\square$

<u>Nomenclatura</u>: dados $A \subset X \times Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, definimos
$A_{x_0} = \{y \in Y \,/\, (x_0, y) \in A\}$. $A^{y_0} = \{x \in X \,/\, (x, y_0) \in A\}$.

<u>Nomenclatura</u>: dada $f: X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ se definen:

$\forall x \in X \quad f_x : Y \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad y \longmapsto f(x,y)$ $\qquad \forall y \in Y \quad f^y : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad x \longmapsto f(x,y)$

Ej: $A = E\times F$ $\quad E\subset X,\ F\subset Y \rightarrow A_x = \begin{cases} F & \forall x\in E \\ \emptyset & \forall x\notin E \end{cases}$ $\quad A^y = \begin{cases} E & x\in F \\ \emptyset & x\notin F \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} A_x \text{ medible } \forall x\in X \Leftrightarrow F \text{ medible} \\ A^y \text{ medible } \forall y\in Y \Leftrightarrow E \text{ medible} \end{array} \right\}$.

Además, si $E\in \mathcal{M}$, $F\in\mathcal{N}$ (E y F medibles), entonces:

$$\nu(A_x) = \nu(F)\underbrace{\chi_E(x)}_{\text{medible}} \Rightarrow \int \nu(A_x)\,d\mu(x) = \mu(E)\,\nu(F) = \mu\times\nu\,(A)$$

$$\mu(A_y) = \mu(E)\,\chi_F(y) \Rightarrow \int \mu(A_y)\,d\nu(y) = \mu(E)\,\nu(F) = \mu\times\nu\,(A)$$

Proposición: (a) $A\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N} \Rightarrow \forall x\in X\ A_x\in\mathcal{N},\ \forall y\in Y\ A^y\in\mathcal{M}$
(b) f $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-medible $\Rightarrow \forall x\in X$ f_x $\mathcal{N}$-medible. $\forall y\in Y$ f^y $\mathcal{M}$-medible

dem (a) $R := \{A\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{M} \,/\, A_x\in\mathcal{N},\ A^y\in\mathcal{M}\ \forall x\in X, y\in Y\} \subseteq \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$.

- Por el ejemplo anterior, $E\in\mathcal{M}$, $F\in\mathcal{M} \Rightarrow E\times F\in R\neq\emptyset$

Además, R es una σ-álgebra (ejercicio)

$\therefore\ \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\subseteq R$, porque $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N} = \mathcal{M}(\{E\times F : E\in\mathcal{M}, F\in\mathcal{N}\})$

- $A\in R \Rightarrow A_x\in\mathcal{M}\ \forall x\in X$, $A^y\in\mathcal{M}\ \forall y\in Y$. $(A^c)_x = \{y\in Y \,/\, (x,y)\notin A\} = (A_x)^c\in\mathcal{N}$.
$(A^c)^y = (A^y)^c\in\mathcal{M}$
- $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subset R$. $E = \bigcup E_i$. $E_x = \{y \,/\, (x,y)\in E_i$ para algún $i\} = \bigcup_{i=1}^\infty \{y \,/\, (x,y)\in E_i\} = \bigcup_{i=1}^\infty (E_i)_x \in\mathcal{N}$
$E^y = \bigcup_{i=1}^\infty (E_i)^y\in\mathcal{M}$.

(b) f $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-medible, $x\in X$, B abierto $\Rightarrow (f_x)^{-1}(B) = \{y \,/\, f_x(y)\in B\} =$
$= \{y \,/\, f(x,y)\in B\} = \{y \,/\, (x,y)\in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ por f medible, (a).
(f^y se hace igual)

Teorema: $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ σ-finitos, $A\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$; entonces:
(a) $\begin{array}{l} X\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto\nu(A_x) \end{array}$ es μ-medible. (b) $\begin{array}{l} Y\longrightarrow\mathbb{R} \\ y\longmapsto\mu(A^y) \end{array}$ es ν-medible
(c) $\mu\times\nu\,(A) = \int_Y \mu(A^y)\,d\nu(y) = \int_X \nu(A_x)\,d\mu(x)$

dem: Prop anterior nos dice que las funciones (a), (b) están bien def.
(sigue por detrás)

Caso 1: los EdM. son finitos. $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,/\, A \text{ cumple a), b), c)}\} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

- $\forall E \in \mathcal{M}, F \in \mathcal{N}$, $E \times F \in \mathcal{C}$ (por el ejemplo anterior)
- $\mathcal{C}$ contiene a todas las uniones numerables de rectángulos: ⊛

$\{E_i \times F_i\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos (rectángulos)

$A = \bigcup_{1}^{\infty} (E_i \times F_i)$ Podemos suponer

$A_x = \{y : (x,y) \in E_i \times F_i \text{ para un } i\} = \bigcup_{1}^{\infty} (E_i \times F_i)_x$ (disjuntos) ⊛

$\Rightarrow A_x$ medible por ser unión numerable de medibles

$\overset{⊛}{\Rightarrow} \nu(A_x) = \sum_{1}^{\infty} \nu((E_i \times F_i)_x)$ es una función μ-medible

por ser suma numerable de funciones positivas μ-medibles

$$\int \nu(A_x)\, d\mu(x) \overset{TCM}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int \nu((E_i \times F_i)_x)\, d\mu(x) \underset{\text{ejercicio anterior}}{=} \sum \mu \times \nu(E_i \times F_i) = \mu \times \nu(A)$$

[Queremos ver que $\mathcal{C}$ σ-álgebra, con eso $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$, pero falla]

def: $X \neq \emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{C}$ es una clase monótona si

(1) $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. $E_i \in \mathcal{C}\ \forall i \Rightarrow \bigcup E_i \in \mathcal{C}$

(2) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$. $E_i \in \mathcal{C}\ \forall i \Rightarrow \bigcap E_i \in \mathcal{C}$

Lema: $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ un álgebra. $\mathcal{C}(\mathcal{A}) :=$ la mínima clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$. $\mathcal{M}(\mathcal{A}) :=$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$

dem: $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ clase monótona por ser σ-álgebra

$\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{C}(\mathcal{A})$. (La otra implicación se demostrará)

Por ⊛, $\mathcal{A} = \{\text{uniones finitas de rectángulos}\} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$

Por el lema, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Por 1.1) $\mathcal{C}$ clase monótona

Paso 1.2) (1.1) y $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$ $\therefore \mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Paso 1.1) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ $\forall i$, $A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \forall i$ $f_i(x) = \nu((A_i)_x)$, $g_i(y) = \mu((A_i)^y)$ medibles,

$\mu \times \nu(A_i) = \int f_i\, d\mu = \int g_i\, d\nu$

$(\bigcup A_i)_x = \bigcup (A_i)_x \Rightarrow$ $\nu(\bigcup A_i) = \nu(\bigcup (A_i)_x) \overset{\nu\text{ medida}}{=} \lim_{i \to \infty} \nu((A_i)_x) = f(x)$ medible por límite de medibles (creciente) ⓐ

ⓑ análogo

ⓒ $\mu \times \nu(\bigcup A_i) = \int_{X \times Y} \chi_{\bigcup A_i}\, d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} (\lim_{i \to \infty} \chi_{A_i})\, d(\mu \times \nu) \underset{TCM}{=} \lim_{i \to \infty} \int_{X \times Y} \chi_{A_i}\, d(\mu \times \nu) =$

$\underset{A_i \in \mathcal{C}}{=} \lim \int_X \nu((A_i)_x)\, d\mu(x) \underset{TCM}{=} \int_X \lim \nu((A_i)_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(\bigcup (A_i)_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu((\bigcup A_i)_x)\, d\mu$ □ (1.1)

(1.1) $\cdot$ $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ $A_i \in \mathcal{C}\ \forall i$.

$\Rightarrow \nu((\bigcap A_i)_x^{*}) = \nu(\bigcap (A_i)_x^{*}) \underset{\substack{\uparrow \\ \nu \text{ finita, } A_1^y \supset A_2^y \supset \dots}}{=} \lim_{i\to\infty} \nu((A_i)_x^{*})$ medible por límite de medibles

$\mu\times\nu(\bigcap A_i) = \int_{X\times Y} \chi_{\bigcap A_i}\, d(\mu\times\nu)(x,y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{i\to\infty} \int_{X\times Y} \chi_{A_i}\, d(\mu\times\nu) =$

$\left(\begin{array}{l} \text{TCD} \\ |\chi_{A_i}| \le \chi_{X\times Y}, \text{ integrable por } \mu,\nu \text{ finitas} \\ \chi_{\bigcap A_i} = \lim \chi_{A_i} \end{array}\right)$

$= \lim_{i\to\infty} \int_X \nu((A_i)_x)\, d\mu(x) \underset{\uparrow}{=} \int_X \lim_{i\to\infty} \nu((A_i)_x)\, d\mu(x) =$

$\left(\begin{array}{l} \text{TCD} \\ \nu((A_i)_x) \le \nu(Y) \quad \forall i\in\{1,2,\dots\},\ \forall x\in X \\ \int_X \nu(Y)\, d\mu < \infty \text{ por } \mu,\nu \text{ finitas.} \end{array}\right)$

$= \int_X \nu((\bigcap A_i)_x)\, d\mu$ $\square$ (1.1)

Caso 2: μ,ν σ-finitas (si no lo son, el teorema falla).

- Tomamos $\cdot$ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ con $\mu(X_n) < \infty\ \forall n$, $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$

  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

  $\cdot$ $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ con $\nu(Y_n) < \infty\ \forall n$, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

- Sea $A = \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Considero $A_n = A \cap (X_n \times Y_n)$

  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(a) $x \longmapsto \nu(A_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((A_n)_x) \underset{\substack{\uparrow \\ Y_n \supset (A_n)_x}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\nu|_{Y_n}((A_n)_x)}_{\text{medible por caso 1}}$ medible por lim de medibles.

(c) $\mu\times\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\times\nu(A_n) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \nu|_{Y_n}((A_n)_x)\, d\mu(x) \underset{\text{TCM}}{=} \int_X \nu(A_x)\, d\mu(x)$

$\nu|_{Y_n}((A_n)_x) = \nu((A_n)_x)$

$\mu\times\nu(A_n) = \underbrace{\mu\times\nu|_{X_n\times Y_n}}_{\text{medida finita, } \mu\times\nu|_{X_n\times Y_n} = \mu|_{X_n}\times\nu|_{Y_n}}(A_n)$ (caso 1). $\square$

(b) igual que (c).

Teorema de Tonelli-Fubini: $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ EdM σ-finitos:

(a) (Tonelli) $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-medible, $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in X\times Y$

$\Longrightarrow$ $g(x)=\int_Y f_x(y)\,d\nu(y)$ es $\mathcal{M}$-medible,

$h(y)=\int_X f^y(x)\,d\mu(x)$ es $\mathcal{N}$-medible y

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_X g(x)\,d\mu(x) = \int_Y h(y)\,d\nu(y)$$

(b) (Fubini) $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ es $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ medible e integrable,

f_x es ν-integrable ctp $x\in X$, f^y es μ-integrable ctp $y\in Y$

$\Rightarrow$ $g(x)=\int_Y f_x(y)\,d\nu(y)$, $h(y)=\int_X f^y(x)\,d\mu(x)$ definidas ctp x, ctp y (resp)

Son integrables (μ y ν resp.) y

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_X g\,d\mu = \int_Y h\,d\nu.$$

dem (esquema)

(a) Caso 1: $f=\chi_E$, $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ $g(x)=\int_Y \chi_E(x,y)\,d\nu(y)=\nu(E_x)$ $\mathcal{M}$-medible por teorema anterior

$h(y)=\mu(E^y)$ $\mathcal{N}$-medible

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu = \mu\times\nu(E) = \int_Y \overset{\mu(E^y)}{\overset{\parallel}{h}}\,d\nu = \int_X \overset{\nu(E_x)}{\overset{\parallel}{g}}\,d\mu. \ \square$$

Caso 2: $f=\sum_1^n a_k\chi_{E_k}$ función simple ≥ 0

$\Rightarrow$ $g(x) = \sum_1^n a_k \int \chi_{E_k}(x,y)\,d\nu(y)$ medible por caso 1

y $$\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu \overset{\text{linealidad}}{=} \sum_1^n a_k \underbrace{\int_{X\times Y}\chi_{E_k}(x,y)\,d\mu\times\nu}_{\overset{\text{caso 1}}{=} \int_X\left(\int_Y \chi_{E_k}(x,y)\,d\nu\right)d\mu} \overset{\text{lin}}{=} \int_X\left(\int_Y\left(\sum_1^n a_k\chi_{E_k}\,d\nu\right)\right)d\mu \ \square$$

Caso 3: $f\geq 0$ $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ medible

$\longrightarrow$ $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ simples $0\le s_1\le s_2\le\dots$ / $\lim s_n(x,y)=f(x,y)$ $\forall x,y$.

Caso 2, TCM:

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu = \lim\int_{X\times Y} s_n\,d\mu\times\nu \overset{C2}{=} \lim \int_X \underbrace{\left(\int_Y s_n(x,y)\,d\nu(y)\right)}_{g_n(x)} d\mu(x) \overset{TCM}{=} \int_X \underbrace{\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)}_{g(x)} d\mu$$

$g(x)$ medible por límite de las g_n (medibles)

$\square$ (a)

b) $f = \underbrace{(\mathrm{Re} f)^+}_{f_1} - \underbrace{(\mathrm{Re} f)^-}_{f_2} + i\underbrace{(\mathrm{Im} f)^+}_{f_3} - i\underbrace{(\mathrm{Im} f)^-}_{f_4}$. Se aplica (a) a f_i $i=1,2,3,4$

f integrable $\Rightarrow \int |f| < \infty \Rightarrow \int f_i \, d\mu\times\nu < \infty$

$\Rightarrow g_i(x) = \int_Y f_i(x,y)\, d\nu(y)$ $\mathcal{M}$-medibles ctp $x \in X$

Además $\int_{X\times Y} f_i \, d\mu\times\nu = \int_X g_i(x)\, d\mu(x) < \infty$ por tanto,

$g_i(x) < \infty$ ctp $x \in X$ — def. de integral compleja, bien def por

$\Rightarrow \underset{\underset{\infty}{\wedge}}{g(x)} = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = g_1(x) - g_2(x) + i(g_3(x) - g_4(x))$

ctp $x \in X$ i.e. $\forall x \in E^c$ con E de μ-medida 0

Tomamos $\tilde{g}(x) = g(x)\chi_{E^c}$. $\int_{X\times Y} f \, d\mu\times\nu = \int_X \tilde{g}\, d\mu$. □

Ejemplos: $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu)$. μ medida de contar

$$\Rightarrow (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu\times\mu) \underset{\uparrow \text{ ejercicio}}{=} (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}), \overset{\overset{\text{medida de contar}}{\shortparallel}}{\mu'})$$

$a: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$(m,n) \mapsto a_{m,n}$

Tonelli: $a_{m,n} \geq 0 \ \forall m,n \Rightarrow \int a \, d\mu\times\mu = \int \left(\int a_{m,n}\, d\mu(n)\right) d\mu(m) =$

$= \sum_m \sum_n a_{m,n}$ en particular $\underbrace{\sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}}$

Fubini: $(\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset) \Rightarrow$ ctp $x \equiv \forall x$

$\hookrightarrow \int_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} |a|\, d\mu\times\mu \overset{(\text{Tonelli})}{=\!=} \sum_n \sum_m |a_{nm}| < \infty \xrightarrow{\text{Fubini}}$

$\Longrightarrow \sum_m \sum_n a_{nm} = \sum_n \sum_m a_{nm}$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{2^{-n}\cdot\chi_{\{m\leq n\}}}_{a_{mn}} =$

$\overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_{\{m\leq n\}} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}\right)}_{\frac{2^{-m} - "2^{-\infty}"}{1-2^{-1}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{2^{-m+1}} = 2$

25

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Desde $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ hemos definido $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, m\times m)$.

Este espacio no es completo:

Tenemos $m(A)=0$, $A\in\mathcal{L}$, $B\subset[0,1]$ $B\notin\mathcal{L}$

$\Rightarrow A\times B\subset A\times[0,1]\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ con $m\times m(A\times[0,1]) = m(A)\cdot m([0,1])=0$

Pero $A\times B\notin\mathcal{L}$ porque si $A\times B\in\mathcal{L}$, entonces $\forall x\in X$ $(A\times B)_x\in\mathcal{L}$

pero si $x_0\in A$, $(A\times B)_{x_0} = B\notin\mathcal{L}$ ¡!

def: El espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ es la compleción de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, m\times m)$. Se denota $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2, m^2)$

Obs: se define análogamente el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$

i.e. $(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}^3, m^3) = \text{Compleción}((\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \mathcal{L}^2\otimes\mathcal{L}, m^2\times m)$ etc.

Teorema: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\mathcal{L}^2$-medible. Si $f\geq 0$ o f integrable,

$\Longrightarrow$ f_x, f^y son $\mathcal{L}$ medibles ctp x o y resp.

Si además f integrable, también son integrables ctp x o y resp.

y $$\int_{\mathbb{R}^2} f\,dm^2 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,dm(y)\right)}_{g(x)} dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f^y(x)\,dm(x)\right)}_{h(y)} dm(y)$$

(g, h son $\mathcal{L}$ medibles e integrables si f lo es)

Teorema (Regularidad). Sea $E\in\mathcal{L}^2$. Entonces

(a) $m^2(E) = \inf\{m(U) : U \text{ abto}, E\subset U\} = \sup\{m(K) : E \quad K \text{ compacto}\}$

(b) $\exists G$ unión numerable de compactos, H intersección numerable de abiertos t.q. $E = G\cup M = H\setminus N$ para $M, N\in\mathcal{L}^2$ con $m(M) = m(N) = 0$.

Corolario: $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2, m^2)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, m\times m)$

Propiedades: $E\in\mathcal{L}^2$, $a\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$ $\quad a=(a_1, a_2)$

$\Rightarrow a+E = \{a+x / x\in E\}$, $\lambda E = \{\lambda x / x\in E\}\in\mathcal{L}^2$ y $m^2(a+E) = m^2(E)$, $m(\lambda E) = \lambda^2(E)$

dem: $\{A_i\}, \{B_i\}\subset\mathcal{L}$ y $E\subset\bigcup A_i\times B_i \Leftrightarrow a+E\subset\bigcup(a_1+A_i)\times(a_2+B_i)$

y $\rho(A_i\times B_i) = \rho((a_1+A_i)\times(a_2+B_i))$ $\square$

$\lambda E\subset\bigcup\lambda A_i\times\lambda B_i$, $\rho(\lambda A_i) = \lambda\rho(A_i)$

Teorema (del cambio de variable)

Sea Ω un abierto, $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$:

- f es $\mathcal{L}^2$ medible, $f : G(\Omega) \to \mathbb{R} \Rightarrow f \circ G$ $\mathcal{L}^2$ medible

si además $f \geq 0$ o f integrable, entonces

$$\int_{G(\Omega)} f \, dm^2 = \int_\Omega f \circ G(y) \, |\det D_y G| \, dm^2(y). \quad (y \in \mathbb{R}^2)$$

Corolario: $E \subset \Omega \cap \mathcal{L}^2 \longrightarrow G(E) \in \mathcal{L}^2$ y $m^2(G(E)) = \int_{G(E)} dm^2 =$

$$= \int_E |\det D_y G| \, dm^2(y)$$

Corolario: $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal e invertible: $G \in GL(n, \mathbb{R})$

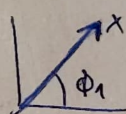
$$\Rightarrow m^n(G(E)) = m^n(E) \, |\det G| \quad \forall E \subset \Omega \cap \mathcal{L}^n$$

Nota: 2 se puede cambiar por n en los 3 anteriores

Coord. Esféricas en $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$. $r = |x|$, $\bar{x} = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$. $|\cdot| \equiv \|\cdot\|_2$

En $\mathbb{R}^2$: $x = r\bar{x}$, con $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. $1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2$

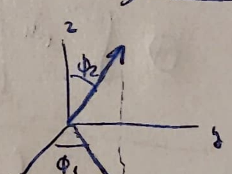
$\therefore$ $x = r(\cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_1)$, $\phi_1 \in (0, 2\pi)$ ⊛



En $\mathbb{R}^3$: ϕ_2 := ángulo que forman $\bar{e}_3$ y x: $\phi_2 \in (0, \pi)$

$x = r(\operatorname{sen}\phi_2 \cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_2 \operatorname{sen}\phi_1, \cos\phi_2)$

$\bar{x} = (\underbrace{\operatorname{sen}\phi_2 \cdot \bar{v}}_{v}, \cos\phi_2)$ con $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{v} = (\cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_1)$

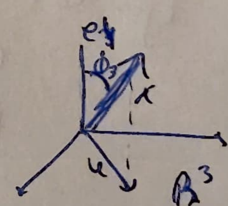


En $\mathbb{R}^4$: ϕ_3 := ángulo que forman $\bar{x}$ y $\bar{e}_4$. $\phi_3 \in (0, \pi)$

$\bar{x} = (\underbrace{\bar{u} \operatorname{sen}\phi_3}_{u}, \cos\phi_3)$. $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$

$\bar{u} = (\operatorname{sen}\phi_2 \bar{v}, \cos\phi_2)$

$\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{v} = (\cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_1)$



$\therefore$ $x = r(\operatorname{sen}\phi_3 \operatorname{sen}\phi_2 \cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_3 \operatorname{sen}\phi_2 \operatorname{sen}\phi_1, \operatorname{sen}\phi_3 \cos\phi_2, \cos\phi_3)$

En $\mathbb{R}^5$: ϕ_4 := ángulo$(x, \bar{e}_5)$. $\phi_4 \in (0, \pi)$

$\bar{x} = (w, \cos\phi_4)$. $w \in \mathbb{R}^4$, $|w| = \operatorname{sen}\phi_4$. $\bar{w} = (u, \cos\phi_3)$ ...

$|u| = \operatorname{sen}\phi_3$ $\quad \bar{u} = (v, \cos\phi_2)$

$|v| = \operatorname{sen}\phi_2$ $\quad \bar{v} = (\cos\phi_1, \operatorname{sen}\phi_1)$.

etc

⊛ nos dejamos sin parametrizar $(0, \infty) \times \{0\}$: pero mide cero.

En $\mathbb{R}^5$: $x = r($

$\operatorname{sen}\phi_4 \operatorname{sen}\phi_3 \operatorname{sen}\phi_2 \cos\phi_1,$

$\operatorname{sen}\phi_4 \operatorname{sen}\phi_3 \operatorname{sen}\phi_2 \operatorname{sen}\phi_1,$

$\operatorname{sen}\phi_4 \operatorname{sen}\phi_3 \cos\phi_2,$

$\operatorname{sen}\phi_4 \cos\phi_3,$

$\cos\phi_4$

$) = G(r, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$

$$|\det DG| = |\det(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{columna } \frac{\partial G}{\partial r}}}{\bar{x}}, r\,\text{algo}_1, r\,\text{algo}_2, r\,\text{algo}_3, r\,\text{algo}_4)| = r^4 \underbrace{F(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)}_{\substack{\text{función de} \\ \cos\phi_k,\ \operatorname{sen}\phi_k \\ k\in\{1,\dots,4\}}}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^5)$,

$$\int_{\mathbb{R}^5} f\, dm^5 = \int_0^\infty \underbrace{\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi}_{3} \int_0^{2\pi} \underbrace{f\circ G(r,\phi_1,\dots,\phi_4)}_{f(r\bar{x})} r^4 F(\phi_1\dots\phi_4)\, d\phi_4 \dots d\phi_1\, dr$$

$$= \int_0^\infty r^4 \left[\int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \dots d\phi_4 \dots d\phi_1\right] dr = \circledast$$

$\to$ Definimos una medida en S^{n-1}: σ_{n-1} que cumple

$$\int_{S^{n-1}} h(\bar{y})\, d\sigma_{n-1}(\bar{y}) = \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{n-2} \int_0^{2\pi} h(G(1, \phi_1, \dots \phi_{n-1})) F(\phi_1 \dots \phi_{n-1})\, d\phi_{n-1} \dots d\phi_1,$$

$$\circledast \int_0^\infty r^4 \left[\int_{S^4} f(r\bar{x})\, d\sigma_4(\bar{x})\right] dr = \int_{\mathbb{R}^5} f\, dm^5$$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ invariante por rotaciones: (p.ej $f(x) = e^{-|x|^2}$), cumple que $\exists \tilde{f}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ / $f(x) = \tilde{f}(|x|)$

Entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty r^{n-1}\left(\int_{S^{n-1}} \underbrace{f(r\bar{x})}_{\tilde{f}(r)}\, d\sigma_{n-1}\right) dr =$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{f}(r)\left(\int_{S^{n-1}} d\sigma_{n-1}\right) dr = \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma_{n-1}\right) \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{f}(r)\, dr$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sigma_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{f}(r)\, dr$$

- $m^n(B(0,1)) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_{B(0,1)}}_{\text{radial}} \, dm^n$

radial: $\chi_{B(0,1)}(x) = \chi_{(0,1)}(|x|)$

$$\therefore \boxed{m^n(B(0,1)) = \sigma_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^1 r^{n-1} \, dr = \frac{\sigma_{n-1}(S^{n-1})}{n}}$$

- $\sigma_{n-1}(S^{n-1})$: $\quad \sigma_1(S^1) = 2\pi, \quad \sigma_2(S^2) = 4\pi.$

$\mathbb{R}$: $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^2} dy \right)^{1/2} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|^2+|y|^2)} dx dy \right)^{1/2} =$

$\underset{\text{Polares}}{\overset{=}{T}} \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\theta \, dr \right)^{1/2} = \left(2\pi \, e^{-r^2}/2 \Big|_0^\infty \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}.$

$\mathbb{R}^n$: - $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{n/2}$

- $\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-|x|^2}}_{} dx = \sigma_{n-1}(S^{n-1}) \cdot \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr$

$f(x) = \tilde{f}(|x|)$.

$\tilde{f}(r) = e^{-r^2}$

- $\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \underset{t=r^2:\ dt = 2t\,dr}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt =$

$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \qquad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt.$

$\Gamma(1) = 1. \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \ldots$

$$\therefore \boxed{\sigma_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{\pi^{n/2}}{2\Gamma(n/2)}}$$

dem: Teorema del cambio de variable: casos específicos:

Caso 1: G aplicación lineal invertible, $\Omega = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ G composición de finitas aplicaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} G_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, cx_k, \dots, x_n) & \text{para un } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ G_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, \underbrace{x_k + cx_l}_{l \neq k}, x_{k+1}, \dots, x_n) & \text{para un } l \neq k,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ G_3(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_n) & j \neq k \end{cases}$$

Demostrar el teorema para el caso 1 es equivalente a probarlo para aplicaciones como G_1, G_2, G_3.

- Si f medible Borel y T continua, $f \circ T$ medible Borel:

$$(f \circ T)^{-1}([a,b)) = T^{-1}(\underbrace{f^{-1}([a,b))}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}).$$

Si $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ y T continua, entonces $T^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

dem: si E abierto, es cierto

def: $\mathcal{D} = \{E \subset \mathbb{R}^n : T^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}$ es σ-álgebra (ejercicio hoja 2?)

y $\forall E$ abto, $E \subset \mathcal{D}$, se concluye $\mathcal{D} \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ $\square$

Hay que probar el teorema del cambio de variable con $T = G_1, G_2, G_3$.

P.ej: G_1: Usar Fubini, se reduce a ver que $\int_{\mathbb{R}} g(x_k)\, dm(x_k) = \int_{\mathbb{R}} |c| g(cy_k)\, dm(y_k)$,

lo cual se hace viéndolo para $g = \chi_E$ medible, luego g simple

y luego g general como límite de simples crecientes, TCM.

- $g = \chi_E$ medible: $\int_{\mathbb{R}} |c| \chi_E(cy_k)\, dm(y) \underset{\chi_E(cy) = \chi_{c^{-1}E}(y)}{=} |c|\, m(c^{-1}E) = m(E)$ $\square$

- g simple ≥ 0, obvio por el anterior.

P.ej: G_3: obvio, solo se cambia el orden de 2 variables, la integral es igual.

...

- ¿Qué hacer para extenderlo a f medible $\mathcal{L}^n$?

Hay que ver que si $E \in \mathcal{L}^n$, entonces (si T continua) $T^{-1}(E) \in \mathcal{L}^n$.

dem: $E \in \mathcal{L}^n \Rightarrow E = A \cup B$, $A, H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $m^n(H) = 0$, $B \subset H \Rightarrow T^{-1}(E) = T^{-1}(A) \cup T^{-1}(B)$

$T^{-1}(B) \subset T^{-1}(H)$ y $m^n(T^{-1}(H))$

$$= \int \chi_{T^{-1}(H)}\, dm^n = \int \chi_H(T(x))\, dm^n \overset{\text{teorema para medibles Borel}}{=} \underbrace{\int \chi_H(T(x)) |\det T|\, dm^n}_{\int \chi_H\, dm^n} \cdot |\det T|^{-1} = |\det T|^{-1} m^n(H) = 0$$

Caso 2: G general

$f = \chi_E$, $E \in \mathcal{T}_{usual, \mathbb{R}^n}$.

Afirmación: Todo abierto $E \subset \mathcal{T}_{usual, \mathbb{R}^n}$ es unión numerable de cajas de la forma: $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ disjuntos 2 a 2.

$$\left[\; E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)}_{\bigcup \left\{ \begin{array}{l} [a_1 + \frac{1}{2}, b_1) \times \dots \times [a_n + \frac{1}{2}, b_n) \\ [a_1 + \frac{1}{3}, a_1 + \frac{1}{2}) \times \dots \times [a_n + \frac{1}{3}, a_n + \frac{1}{2}) \\ \vdots \\ [a_1 + \frac{1}{m}, a_1 + \frac{1}{m-1}) \times \dots \times [a_n + \frac{1}{m}, a_n + \frac{1}{m-1}) \end{array} \right.} \right.$$

porque $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{usual})$ es II axioma.

Otra forma: familias diádicas de cuadrados: (para $\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{D}_{2^l} = \left\{ \left[\frac{n}{2^l}, \frac{n+1}{2^l}\right) \times \left[\frac{m}{2^l}, \frac{m+1}{2^l}\right) : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

demostración sin terminar.

Medidas y derivadas:

def: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ σ-álgebra en X. Una MEDIDA CON SIGNO es: $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty]$ (ó $[-\infty, \infty)$) que cumple

(i) $\nu(\emptyset) = 0$, (ii) $\forall \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos $\nu(\bigcup E_j) = \sum \nu(E_j)$

Ej: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. Sean $f, g : X \to [0, \infty)$ medibles, $\int_X g \, d\mu < \infty$

Entonces para $E \in \mathcal{A}$ definimos $\nu(E) = \int_X f \chi_E \, d\mu - \int_X g \chi_E \, d\mu$: medida con signo

Ej. $(X, \mathcal{A})$ espacio medible; μ, ν medidas en $(X, \mathcal{A})$ con ν finita, entonces $(\mu - \nu)$ medida con signo.

Ej: $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$: $f(x) = 1$, $g(x) = 5\chi_{[0,1]}(x)$. $\nu(E) = \int_E f \, dm - \int_E g \, dm =$

$= \underline{m(E) - 5m(E \cap [0,1])}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \nu([0,2]) = 2 - 5 = -3 \\ \nu([1,2]) = 1 \end{array}\right\}$ $[0,2] \supset [1,2]$

$m(E \setminus [0,1]) - 4m(E \cap [0,1])$

Ej: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable

$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ para $E \in \mathcal{A}$ es una medida con signo.

def: Sea ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$. Se dice que $E \in \mathcal{A}$

(a) es POSITIVO si $\forall F \subset E$ con $F \in \mathcal{A}$ $\nu(F) \geq 0$

(b) " NEGATIVO " $\nu(F) \leq 0$

(c) " NULO " $\nu(F) = 0$

Ej. $f, g \geq 0$ medibles en $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM con $\int_X g \, d\mu < \infty$ (**)

$\nu(E) = \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu$. Entonces:

$A = \{x : f(x) \geq g(x)\}$ es positivo para ν

($A' = \{x : f(x) > g(x)\} \subset A$ también lo es)

$B = \{x : f(x) = g(x)\}$ es nulo para ν

$C = \{x : f(x) \leq g(x)\}$ es negativo para ν

Teorema (de descomposición de Hahn): $(X, \mathcal{A})$ e. medible, ν medida con signo sobre $\mathcal{A}$. Entonces:

$\exists P, N \in \mathcal{A}$ / $P \cap N = \emptyset$, $P \cup N = X$, P positivo y N negativo para ν (*)

Además, si otros P', N' cumplen lo mismo (*), entonces

$(P' \setminus P) \cup (P \setminus P') = P \Delta P'$ y $N \Delta N'$ son nulos para ν

Nota: P, N como (*) $\Rightarrow$ $\nu|_P$ es una medida (positiva) en $(P, \mathcal{A}_P)$

$-\nu|_N$ medida (positiva) en $(N, \mathcal{A}_N)$

Donde $\mathcal{A}_E = \{F \subset E : F \in \mathcal{A}\} = \{E \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ $\forall E \in \mathcal{A}$.

Ej (**) $P = \{x \in X / f(x) \geq g(x)\}$, $N = \{x \in X / f(x) < g(x)\}$ descomposición (una) de Hahn de la medida ν.

Def: ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$ esp. medible. $P, N \in \mathcal{A}$ descomposición de Hahn de ν. Se definen para $E \in \mathcal{A}$:

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P). \quad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N)$$

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E)$$

Obs: $|\nu|, \nu_+, \nu_-$ son <u>medidas</u> en $(X, \mathcal{A})$.

$\nu = (\nu_+) - (\nu_-)$ (<u>Descomposición de Jordan</u>), con las def. de

Teorema: (a) $|\nu|, \nu^+, \nu^-$ medidas sobre $(X, \mathcal{A})$

(b) $\nu = \nu^+ - \nu^-$

(c) Si μ, λ dos medidas sobre $(X, \mathcal{A})$, λ finita, $\nu = \mu - \lambda$ la medida con signo, entonces

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) \geq \nu^+(E), \quad \lambda(E) \geq \nu^-(E)$$

(dem) a), b) ejercicio

(c) Si $E \in \mathcal{A}$, $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = -\lambda(E \cap P) + \mu(E \cap P) \leq$
$\leq \mu(E \cap P) \leq \mu(E)$ $\square$ (ν^- igual)

Obs: $|\nu(E)| = |\nu^+(E) - \nu^-(E)| \leq \nu^+(E) + \nu^-(E) = |\nu|(E)$.

Ejemplo: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Edm. $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Def: $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ medida con signo $\forall E \in \mathcal{A}$.

Entonces: $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$. $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$, $|\nu|(E) = \int_E |f| d\mu$.

$$\text{Con: } \underbrace{P = \{x \in X / f(x) \geq 0\}. \quad N = \{x \in X / f(x) < 0\}}_{\text{descomp. de Hahn para } \nu}.$$

$\underbrace{f^+ = f\chi_P}$. $f^- = -f\chi_N$.

$\Rightarrow f\chi_{E \cap P} = f\chi_P \chi_E = f^+\chi_E$ $\square$

def: Sean λ, μ medidas con signo. Decimos que son MUTUAMENTE SINGULARES ($\lambda \perp \mu$) si $\exists E, F \in \mathcal{A}$ / $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, F nulo para μ, E nulo para λ.

(De manera informal: "μ vive en E", "λ vive en F")

Ejemplos: (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ μ = medida de Lebesgue. δ_a (Delta de Dirac en $a \in \mathbb{R}$).

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

"δ_0 vive en $\{0\}$", $\underbrace{F = \{a\}}_{\text{nulo para } \mu}$, $\underbrace{E = \mathbb{R} \setminus \{a\}}_{\text{nulo para } \delta_a}$

(b) ν medida con signo. P, N una descomposición de Hahn.

$\Rightarrow$ "ν^+ vive en P", "ν^+ vive en N"

def: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. ν medida con signo en $(X, \mathcal{A})$.
ν es ABSOLUTAMENTE CONTINUA RESPECTO A μ ($\nu \ll \mu$) si:
$\forall E \in \mathcal{A}$ $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

Ejemplo: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ EdM. $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu. \Rightarrow \nu \ll \mu.$$

dem: $\nu(E) = 0 \Rightarrow \int f \chi_E \, d\mu = 0$.

Ejercicio (a) $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+, \nu^- \ll \mu$

(b) Si $\nu \ll \mu$, $\nu \perp \mu \Rightarrow \nu \equiv 0$

Prop: Si μ, ν medidas sobre $\mathcal{A}$, $\nu \ll \mu$ y ν finita
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $(\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon)$ $\forall E \in \mathcal{A}$

dem: Bajo las hipótesis, supongamos $\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0$ $\exists E_\delta$ / $\mu(E) < \delta$, $\nu(E) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ / $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists E_n$: $\mu(E_n) < 1/2^n$, $\nu(E) \geq \varepsilon$

Defino: $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$: $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \cdots$, $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \limsup_k E_k$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu(F) \leq \mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^n} \Rightarrow \mu(F) = 0 \Bigg\} *$$

Por ν finita, $\nu(F) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \nu(E_n) \geq \varepsilon \Rightarrow \nu(F) > 0$

Prop: μ medida y ν medida con signo en $\mathcal{A}$, $\nu \ll \mu$, ν finita
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $F \in \mathcal{A}$, $\mu(F) < \delta \Rightarrow |\nu|(F) < \varepsilon$

dem: $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ y aplicando la prop. anterior a ν^+ y ν^-.

Lema: μ, ν medidas sobre $\mathcal{A}$ finitas. Entonces:

bien $\nu \perp \mu$

bien $\exists\, \varepsilon > 0,\ E \in \mathcal{A} \,/\, \mu(E) > 0 \quad \forall F \overset{\in \mathcal{A}}{\subset} E \quad \nu(F) \geq \varepsilon \mu(F)$

dem: Queremos ver que $(\nu - \varepsilon\mu)(F) \geq 0 \ \forall F \in \mathcal{A}$, si $F \subset E$

Es decir, que E es positivo para la medida con signo $(\nu - \varepsilon\mu)$

Definimos $\forall n \in \mathbb{N} \quad \nu_n = \left(\nu - \frac{1}{n}\mu\right)$ medidas con signo.

Consideramos descomposiciones de Hahn de cada ν_n: $\forall n \in \mathbb{N}$

$P_n, N_n \in \mathcal{A} \qquad P_n \cap N_n = \phi,\ P_n \cup N_n = X$

P_n positivo para ν_n, N_n negativo para ν_n.

$P = \bigcup P_n \in \mathcal{A},\ N = \bigcap N_n \in \mathcal{A}$

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad N \subset N_n \Rightarrow \nu_n(N) \leq 0 \Rightarrow \nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$

$\underset{\substack{(n \to \infty) \\ \mu \text{ finita}}}{\Longrightarrow} \nu(N) = 0$

Por tanto, ν vive en $P = N^c$.

Caso 1: μ vive en $N \Rightarrow \mu \perp \nu$.

Caso 2: $\mu(P) > 0 < \mu(P) \leq \quad \mu(P_n)$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \mu(P_{n_0}) > 0$.

Tomo $E = P_{n_0}$, $\varepsilon = 1/n_0$. Entonces E positivo para $\left(\nu - \frac{1}{n_0}\mu\right)$

$\Rightarrow \forall F \subset E,\ F \in \mathcal{A},\quad \nu(F) - \frac{1}{n_0}\mu(F) \geq 0 \quad \square$

<u>Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym</u>

Sean $(X, \mathcal{A})$ espacio medible. μ medida σ-finita. ν medida con signo finita sobre $\mathcal{A}$. Entonces $\exists\, \lambda, \rho$ medidas con signo finitas / $\nu = \lambda + \rho$, $\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$ (descomp. de Lebesgue)

Además $\exists\, f_0 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \,/\, \forall E \in \mathcal{A}\ \rho(E) = \int_E f_0 \, d\mu$. ($f_0$ es la derivada de Radon-Nikodym de ρ resp μ)

La descomposición de ν es única y f_0 es única salvo μ-medida cero

Nota: $\nu = \lambda + f_0 d\mu$ (abuso de notación: $(f_0 d\mu)(E) = \int_E f_0 \, d\mu$)

dem: podemos suponer ν medida finita (no negativa) y que μ es finita

Def: $\mathcal{F} := \{ f : X \to [0,\infty) : \mu\text{-medible y } \forall E \in \mathcal{A} \int_E f d\mu \leq \nu(E) \}$.

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $0 \in \mathcal{F}$
- $f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow \max\{g, f\} \in \mathcal{F}$.

Porque $X_+ = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$. $X_- = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$

$E \in \mathcal{A} \Rightarrow E = (E \cap X_+) \uplus (E \cap X_-)$

$$\int_E \max\{f, g\} d\mu = \int_{E \cap X_+} f d\mu + \int_{E \cap X_-} g d\mu$$

$$\leq \nu(E \cap X_+) + \nu(E \cap X_-) = \nu(E)$$

$a = \sup\left\{ \int_X f d\mu \ / \ f \in \mathcal{F} \right\} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subset \mathcal{F} \ / \left(\int_X f_n d\mu\right) \uparrow a$

Llamo $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{F}$, $\int_X f_n d\mu \leq \int_X g_n d\mu \leq a$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = a, \quad g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \ldots$$

Por TCM $g_n \uparrow f_0$ con $\int_X f_0 d\mu = a$

Y para cada $E \in \mathcal{A}$ $\int_E g_n d\mu \leq \nu(E) \Rightarrow$ con límites $n \to \infty$
$\int_E f_0 d\mu \leq \nu(E)$ $\Big\}$ $f_0 \in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow a = \max\left\{ \int_X f d\mu \ / \ f \in \mathcal{F} \right\} = \int_X f_0 d\mu = a$

Por ν finita, $f_0 \in \mathcal{F}$, $f_0 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Def: $\rho(E) = \int_E f_0 d\mu$ $\forall E \in \mathcal{A}$. Es medida y $\rho(X) = a \leq \nu(X) < \infty$ finita.

$\rho \ll \mu$: si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f_0 d\mu = 0 \Rightarrow \rho(E) = 0$

Además $\rho(E) = \int_E f_0 d\mu \leq \nu(E)$

$\Rightarrow \lambda = \nu - \rho$ es medida y finita. (porque ν y ρ lo son)

Aplicando el lema: Caso 1: $\lambda \perp \mu$

Caso 2: $\exists E \in \mathcal{A} \,/\, \mu(E) > 0 \,.\, \exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall \begin{pmatrix} F \subset E \\ F \in \mathcal{A} \end{pmatrix} \lambda(F) \geq \varepsilon \mu(F)$

i.e. $\nu(F) - \rho(F) \geq \varepsilon \mu(F)$ i.e. $\nu(F) \geq \int_F f_0 \, d\mu + \varepsilon \mu(F) =$

$\stackrel{*}{=} \int_F (f_0 + \varepsilon \chi_E) \, d\mu$

Ahora, si $F \in \mathcal{A}$, $F = (F \cap E) \uplus (F \cap E^c)$ $\quad f_0 \in f \Rightarrow \nu(A) \geq \int_X f_0 \, d\mu$

$\Rightarrow \nu(F) = \nu(F \cap E) + \nu(F \cap E^c) \geq$

$\stackrel{*}{\geq} \int_{E \cap F} (f_0 + \varepsilon \chi_E) \, d\mu + \int_{E^c \cap F} (f_0 + \underbrace{\varepsilon \chi_E}_{\substack{\parallel \\ 0 \text{ en } E^c \cap F}}) \, d\mu$

$= \int_F (f_0 + \varepsilon \chi_E) \, d\mu \Rightarrow f_0 + \varepsilon \chi_E \in f$

Pero $\int_X (f_0 + \varepsilon \chi_E) \, d\mu = a + \varepsilon \underbrace{\mu(E)}_{\vee \, 0} > a$ $\quad$ Caso 2 no se da.

· Unicidad: si tengo dos descomposiciones de Lebesgue de μ:

$\lambda + \rho = \lambda' + \rho' = \nu$ con $\lambda, \lambda' \perp \mu$, $\nu, \nu' \ll \mu$.

$\Rightarrow \lambda - \lambda' = \rho' - \rho$ $\underbrace{(\perp \mu) \text{ y } (\ll \mu)}$

$\boxed{\alpha \perp \mu \text{ y } \alpha \ll \mu \Rightarrow \alpha \equiv 0}$

dem: $\exists E, F \in \mathcal{A}$ descomp. de ~~[illegible]~~ $(\perp)$

$E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$, $\mu(F) = 0$, $\alpha(E) = 0$

$\underset{\alpha \ll \mu}{\Rightarrow} \alpha(F) = 0 \Rightarrow E, F$ nulos para α $\square$

· Unicidad de f_0: si existe g medible, $\rho(E) = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \int_E f_0 \, d\mu = \int_E g \, d\mu \Rightarrow \int_E (f - g) \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow f = g$ c.t.p $\square$

Otra versión del teorema: $(X, \mathcal{A})$ esp. medible, μ σ-finita (medida), ν medida con signo σ-finita en $(X, \mathcal{A})$. Entonces $\exists \rho, \lambda$ m. con signo σ-finitas en $\mathcal{A}$ / $\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$, $\nu = \rho + \lambda$ (descomp. Lebesgue)

Además, $\exists f_0$ μ-medible: $\rho(E) = \int_E f_0 \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$ (única salvo medida cero única)

Además, f_0 cumple: por ν σ-finita, $\exists \{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2 / $\cup X_i = X$

$\nu(X_i) < \infty \Rightarrow f_0$ integrable en cada X_i

Corolario: Con las hipótesis del teorema L·R·N (no la versión 2). Entonces:

$$\{\vartheta \ll \mu \Rightarrow \lambda \equiv 0\} \qquad \left\{\vartheta \perp \mu \Rightarrow \begin{array}{c} \rho \equiv 0 \\ (f_0 \equiv 0) \end{array}\right\}$$

Dem: (a) $0 \perp \mu$, $\vartheta \ll \mu$, $\vartheta = 0 + \vartheta$. por unicidad □

(b) igual.

Unicidad de la extensión de una premedida (Caratheodory)

Sea ρ una premedida en un álgebra $\mathcal{A}$.

$$\rho^*(E) := \inf\left\{\sum \rho(A_i) \mid \{A_i\} \subset \mathcal{A}, E \subset \bigcup A_i\right\} \quad \forall E \subset X$$

es una medida exterior en X

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{M}$ σ-álgebra completa de X con $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$

$\rho^*|_{\mathcal{M}} = \mu_\rho$ es una medida en $\mathcal{M}$ / $\mu_\rho|_{\mathcal{A}} = \rho$

Tenemos $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ y por ser $\mathcal{M}$ completa,

$\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} \subset \mathcal{M}$

$$\boxed{\text{(1) Si } \vartheta \text{ otra medida en } \mathcal{M}(\mathcal{A}) \,/\, \vartheta|_{\mathcal{A}} = \rho, \text{ entonces } \vartheta \leq \mu_\rho.}$$

dem: Dados $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\varepsilon > 0$ $\exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ / $E \subset \bigcup A_i$, $\sum \rho(A_i) \overset{\circledast}{\leq} \mu_\rho(E) + \varepsilon$.

Entonces $\vartheta(E) \leq \vartheta(\bigcup A_i) \leq \sum \vartheta(A_i) \leq \sum \rho(A_i) \leq \mu_\rho(E) + \varepsilon$

con $\varepsilon \to 0$, $\vartheta(E) \leq \mu_\rho(E)$. □

$$\boxed{\text{(2) Si, con las hipótesis de (1), } \underset{\text{ssi } \mu_\rho \text{ finita.}}{\rho \text{ es finita}}, \text{ entonces } \vartheta \equiv \mu_\rho}$$

dem: elijo A_i como antes. $\mu_\rho(\bigcup A_i \setminus E) = \mu_\rho(\bigcup A_i) - \mu_\rho(E) \underset{\circledast}{\leq} \varepsilon$.

$\mu_\rho(E) \leq \mu_\rho(\bigcup A_i) = \vartheta(\bigcup A_i) = \vartheta(\bigcup A_i \setminus E) + \vartheta(E) \leq \mu_\rho(\bigcup A_i \setminus E) + \vartheta(E) \leq \varepsilon + \vartheta(E)$ □

$\mu_\rho(\bigcup_1^n A_i) = \rho(\bigcup_1^n A_i) = \vartheta(\bigcup_1^n A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ □

(3) Si μ_ρ (o ϑ) es σ-finita $\Longrightarrow \mu_\rho \equiv \vartheta$ en $m(A)$
(Con las hipótesis de (1))

dem: Escribimos $X = \biguplus X_i$ disjuntos, μ_ρ-finitos. Aplicamos (2) en X_i.

(4) Si μ_ρ es σ-finita, $\mu_\rho \equiv \vartheta$ en $\overline{m(A)}$