(5.1) Sea $X \neq \phi$. $\mu^*: 2^X \to [0,1]$.

def μ^*: $\mu^*(\phi)=0$, $\mu^*(A)=1$ si $A\neq 0$, $A\subset X$

Medida ext:

(i) $\mu^*(\phi)=0$ (iii) $A\subset B \Rightarrow \mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in X$. ~~(…)~~

$\Rightarrow$ • Si todos ϕ: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=\mu^*(\phi)\leq \underbrace{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)}_{0}=0$

$\overset{\|}{0}$

• Si alguno $A_{i_0}\neq\phi$: $\mu^*(\underbrace{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}_{\neq 0})=1\leq\sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$

$\overset{\|}{\mu^*(A_{i_0})}\leq\sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$

$E\subset X$ medible si $\forall A\subset X$ $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E^c\cap A)=\mu^*(A)$

• Si $|X|=1$, $\mathcal{P}(X)=\{\phi, X\}=\mathcal{M}$

- Si $|X|>1$: • Si E tiene algún elemento, $\underbrace{\mu^*(\underbrace{E\cap X}_{E})}_{1}+\underbrace{\mu^*(\underbrace{E^c\cap X}_{X\setminus E})}_{1}\neq\mu^*(E)$

$\neq X$

• Si E vacío $\Rightarrow E\in\mathcal{M}$.

- Si $E=X \Rightarrow E\in\mathcal{M}$.

$\therefore \mathcal{M}=\{\phi, X\}$ la σ-álgebra trivial.

(5.2) $X\neq\phi$. $\mu^*(\phi)=0$, $\mu^*(X)=2$. $\underbrace{\mu^*(A)=1}_{\text{si } A\neq\phi, A\neq X.}$

Medida ext:

(i) $\mu^*(\phi)=0$, (iii) $A\subset B \Rightarrow \underbrace{\mu^*(A)}_{a}\leq\underbrace{\mu^*(B)}_{b}$

$b=0 \Rightarrow A=0$
$b=1 \Rightarrow a\in\{0,1\}$
$b=2 \Rightarrow a\in\{0,1,2\}$

(ii) $A_1, \ldots, A_n \ldots \in X \to b=\sum_i \mu^*(A_i)$. $a=\mu^*(\bigcup_i A_i)$

$b=0 \Rightarrow a=0$ (todos vacíos)
$b=1 \Rightarrow a=1$ (sólo uno no vacío)
$b\geq 2 \Rightarrow a\leq 2$ (por def)

$a\leq b$.

fin ej. 5.1

• Si $E = \{x\}$ con $x \in X \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

Es decir, $\boxed{\mathcal{M} = 2^X}$

dem: • $A = X \Rightarrow \mu^*(A) = 2 = \underbrace{\mu^*(X \setminus \{x\}) + \mu^*(\{x\})}_{2 \text{ en todo caso, ya sea } X = \{x\} \text{ o } |X| > 1}$

• $A = \emptyset \Rightarrow 0 = \mu^*(A) = \underbrace{\mu^*(\emptyset \cap \{x\})}_{0} + \underbrace{\mu^*(\emptyset \cap \{x\}^c)}_{0}$

• $A \subsetneq X$, $A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\mu^*(A) = 1 = \underbrace{\mu^*(A \cap \{x\}) + \mu^*(A \cap \{x\}^c)}_{1 \text{ ya sea } x \in A \text{ o } x \notin A}$.

(5.3) μ^* medida exterior finitamente aditiva $\Rightarrow$ numerablemente aditiva

---

Sean [redacted] $A_1, A_2, \dots \subset X$ disjuntos dos a dos.

$\mu^*(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{B_n}) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Por def de μ^*, $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

$\hookrightarrow B_n \subset A \Rightarrow \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A)$

~~$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leq \mu^*$~~ Si $\mu^*(A) = \infty$, ya está.

Si $\mu^*(A) < \infty \Rightarrow \mu^*(B_n)$ creciente, acotada

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \mu^*(A)$ ∎

(5.4) μ^* medida ext. H μ^*-medible.

$$\mu^*_H = \mu^*\Big|_{\mathcal{P}(H)}$$

5.5 (a) funciona (b) no

(a) μ^*_H medida exterior: (i) ✓ (ii) ✓, (iii) ✓ Todo obvio

(b) $A \subset H$ μ^*_H-medible

$$\Rightarrow \forall M \subset H \quad \mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(\overbrace{M \cap H \cap A^c}^{H \setminus A})$$

Sea $K \subset X$: $\cancel{\mu^*(K)} = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$

$$= \mu^*(K \cap A \cap H) + \underbrace{\mu^*(K \cap A \cap H^c)}_{0 \text{ por ser } \phi.\ A \cap H^c = \phi} +$$

H μ^*-medible

$$+ \mu^*(K \cap A^c \cap H) + \underbrace{\mu^*(K \cap A^c \cap H^c)}$$

$$= \underbrace{\mu^*((K \cap H) \cap A) + \mu^*((K \cap H) \cap A^c)}_{(K \cap H) \subset H \ \to \mu^*(K \cap H)} + \mu^*(K \cap H^c)$$

$$= \mu^*(K) \Rightarrow A \ \mu^*\text{-medible}$$

$A \subset H$ μ^*-medible.

$\Rightarrow$ si $M \subset H$, $\cancel{\mu^*_H(A)}$, $\mu^*_H(M) = \mu^*(M) =$

$$= \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) =$$

(μ^*-med)

$$= \underbrace{\mu^*_H(M \cap A) + \underbrace{\mu^*(M \cap A^c \cap H)}_{\mu^*_H(M \cap \underbrace{A^c \cap H}_{H \setminus A})}}_{\mu^*_H(M)\ \square} + \underbrace{\mu^*(M \cap A^c \cap H^c)}_{0 \text{ porque } M \subset H}$$

tm. ej. 5.2

(5.6) μ^* medida ext. $\{A_j\}$ disjuntos y μ^*-medibles.

$$\rightarrow \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) \quad \forall E \subset X$$

$$\mu^*\Big(\underbrace{E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)}_{B}\Big) = \mu^*\left(A_1 \cap E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \mu^*\left(E \cap \bigcup_{j=2}^{\infty} (\underbrace{A_j}_{A_j = A_j \setminus A_1 \ \forall j \neq 1})\right)$$

$$= \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*\left(\bigcup_{j=2}^{\infty} (E \cap A_j)\right)$$

Es claro $\leq$. Veámos $\geq$. (Si $\mu^*(B) = \infty$, es trivial) Supongamos $\mu^*(B) < \infty$

Sea $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap A_j)$

<1>1. Por inducción sobre n, voy a demostrar: $\mu^*(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$ ✓

- Caso base $\mu^*(B_1) = \mu^*(E \cap A_1)$

H.I. $\forall k < n \quad \mu^*(B_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap A_j)$

- $\mu^*(B_n) = \mu^*(B_n \cap A_n) + \mu^*(B_n \cap A_n^c) =$

$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{(E \cap A_j \cap A_n^c)}_{A_j \subset A_n^c \ \forall j \neq n}\Big)$$

$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n-1} (E \cap A_j)}_{B_{n-1}}\Big) \underset{H.I.}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) \quad \square$$

<1>2. $B_n \subset B \Rightarrow \underbrace{\mu^*(B_n)}_{\text{Creciente, acotada}} \leq \mu^*(B) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leq \mu^*(B)$

$\mu^*(B) < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) \quad \square$$

(5.7) $|X|$ infinito. Clase recubridora: $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\} \cup \{\{x\} : x \in X\}$

Definimos $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = \infty$, $\rho(E) = 1$ si $E \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset, X\}$.

(ρ es una premedida) $\longrightarrow$ $\mu^* = \mu^*_\rho$ la medida exterior asociada

$\longrightarrow$ $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles.

Sea $A \subset X$:

<1>1. A finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Obvio $\mu^*(A) \leq n = \sum_{i=1}^{n} \rho(\{a_i\})$

En general ⊛

- Si $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ cubre A, $\subset \mathcal{C}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \rho(I_k) \in \underbrace{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}_{\text{Todo subconjunto tiene mínimo}}$

· Supongamos $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ cubre A, $\subset \mathcal{C}$ y con $n > \sum_{k=1}^{\infty} \rho(I_k)$

$\Longrightarrow$ <2>1. Son todos vacíos salvo un número de ellos:

$\{I_{k_j}\}_{j=1}^{m}$ no vacíos, ~~el resto son~~ y unielementales, $m<n$

<2>1. $\left|\bigcup_{j=1}^{m} I_{k_j}\right| \leq m < n = |A|$ # Contradicción.

⊛ $\therefore$ El mínimo del conjunto $\{\sum_{k=1}^{\infty} \rho(I_k) / \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = A,\ \{I_k\} \subset \mathcal{C}\}$ es n.

A finito $\Rightarrow \mu^*(A) = \text{card}(A)$

<1>2. A infinito: $\mu^*(A) = \infty$.

Sup $\mu^*(A) \underset{\circledast}{=} n-1 < \infty \Rightarrow \exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \,/\, \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = A$, $\sum \rho(I_k) < n$

mayor que el ínfimo

Pero $\sum \rho(I_k) < n$ implica que un número finito de ellos son unielementales, el resto vacíos

Hm. ej. 5.3 $\Rightarrow \left|\bigcup_{k=1} I_k\right| < \infty \Rightarrow A \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$!!!

σ-Algebra de conjuntos medibles: $\mathcal{M} = 2^X$.

- Sea $E \in 2^X$ finito
  - Sea $A \subset X$ finito $\circledast$

    $\Rightarrow \mu^*(A) = \text{card}(A)$

    $\mu^*(\underbrace{E \cap A}_{\text{finito}}) + \mu^*(\underbrace{E^c \cap A}_{\text{finito}}) = \text{card}(A \cap E) + \text{card}(A \setminus E)$

    $= \text{card}(A)$
  - Sea $A \subset X$ infinito

    $\Rightarrow \mu^*(A) = \infty = \mu^*(\underbrace{E \cap A}_{\text{finito}}) + \mu^*(\underbrace{A \cap E^c}_{\text{infinito}}) = \infty$.

    ∞
- Sea $E \in 2^X$ infinito
  - Sea $A \subset X$ finito $\circledast$ igual
  - Sea $A \subset X$ infinito

    $\Rightarrow$ bien $A \cap E$ infinito o $A \cap E^c$ infinito $\circledast\circledast$

    $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

    $\circledast\circledast$ De lo contrario, A finito.

(5.8) X no numerable. $\mathcal{C} = \{A \subset X \,/\, A \text{ numerable ó } X \setminus A \text{ numerable}\}$

$\mu: \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$. $\mu(E) = \text{card } E$ si finito (E)

$\mu(E) = \infty$ si E infinito

(a) Medida completa.
- Es trivial que es medida $\left\{ \begin{array}{l} \mu(\emptyset) = 0 \\ \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \end{array} \right.$
- Si $E \in \mathcal{C}$ con $\mu(E) = 0 \to E = \phi \Rightarrow \forall F \subset \emptyset$, $F \in \mathcal{C}$ porque $F = \phi$

(b) μ^* manda conjuntos infinitos a ∞
conjuntos finitos a su cardinal