Modos de Convergencia: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

(1) · Puntual: $\forall x \in X \ \lim f_n(x) = f(x)$

(2) · Puntual ctp. $\exists E / \mu(E) = 0, \ \forall x \in X \setminus E \ \lim f_n(x) = f(x)$

(3) · Uniforme: $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) / \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(4) · Convergencia en norma L^1:

$$f_n, f \in L^1(d\mu) \ \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|f_n - f\|_{L^1}}_{\int_X |f_n - f| \, d\mu} = 0$$

• Obs: Convergencia $L^1 \not\Rightarrow$ convergencia puntual

↳ Ejemplo: $f_1 = \chi_{[0,1)}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2)}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1)}$

$f_4 = \chi_{[0,1/4)}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2)}$, ...

$f_{2^n+k} = \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n)}$ para $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

<u>No hay convergencia puntual en ningún x</u>:

$\forall x \ \forall n \ \exists N > n \ / d(f_n(x) \neq f_N(x)) > 1/2$

Sin embargo, $\int_X |\underbrace{f_{2^n+k}}_{m} - 0| = 1/2^n = \dfrac{1}{2^{\lfloor \log_2 m \rfloor}} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$\rightarrow f_n \rightarrow 0$ convergencia en norma L^1

• Obs: en la demo. de completitud de L^1 vimos que si

$f_n \longrightarrow f$ en norma $L^1 \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión

tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ puntualmente ctp x.

- Obs: convergencia uniforme $\not\Rightarrow$ convergencia L^1.

↳ Ejemplo: $f_n = \dfrac{1}{2^n} \chi_{[2^n, 2^{n+1})}$

• $\lim f_n = 0$ uniformemente en todo $\mathbb{R}$, pues

$|f_n(x) - 0| \leq \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• $\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| = \dfrac{1}{2^n}(2^{n+1} - 2^n) = \dfrac{1}{2^n} 2^n (2-1) = 1 \not\rightarrow 0$

- Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida finita, entonces convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia en L^1.

dem: $f_n \to f$ unif $\to M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in X\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Por tanto, $\int_X |f_n - f| d\mu \leq \int_X M_n d\mu = M_n \underbrace{\mu(X)}_{\substack{\text{cte}\\ \text{finita}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

(- Convergencia puntual + condiciones del TCD $\Rightarrow$ conv. L^1)

(5) Convergencia en medida:

Dadas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, f medibles en $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ EN MEDIDA

Si $\forall \lambda > 0$ $\mu(\{x \in X / |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Prop: $f_n \to f$ en norma $L^1 \Rightarrow f_n \to f$ en medida

Lema de Chebyshev: f medible, $\lambda > 0 \Rightarrow \mu(\{x \in X / f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}$

dem (Lema)

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu \geq \int_X |f| \chi_{\{x \in X / f(x) > \lambda\}} d\mu \geq \int \lambda \chi_{\{x \in X / f(x) > \lambda\}} d\mu$$

$$= \lambda \mu(\{x \in X / f(x) > \lambda\}) \quad \square$$

dem (prop) $\mu(\{x \in X / |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{cte}} \|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

Obs: Convergencia en medida $\not\Rightarrow$ Convergencia en L^1

↳ Ej. $f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0,n)}$ $f_n \to 0$ en medida, pues

Si $n > 1/\lambda \Rightarrow \lambda > 1/n \Rightarrow m(\{x \in X / |f_n(x) - 0| > \lambda\}) = m(\emptyset) = 0$

Pero $f_n \not\to 0$ norma L^1, pues

$\int |f_n| d\mu = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$