Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 1 *(Introducción)*

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monótona y acotada. Probar que f es integrable Riemann.
2. Probar que si las funciones $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ son integrables Riemann y forman una sucesión uniformemente convergente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y se tiene $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$. Dar ejemplos de cómo, si el límite NO es uniforme, *puede* que no exista la integral $\displaystyle\int_a^b f$, o que no coincida con el $\displaystyle\lim_n \int_a^b f_n$.
3. Probar las desigualdades:
   i) $A \subset B \implies m^*(A) \leq m^*(B)$
   ii) $\displaystyle m^*\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} m^*(A_k)$
4. Probar que todo conjunto numerable tiene medida exterior de Lebesgue nula. Encontrar un conjunto denso en $[0, 1]$ de medida nula.
5. Probar que la unión numerable de conjuntos de medida exterior de Lebesgue nula tiene medida nula.
6. Probar que si $A \subset [0, 1]$ cumple $m^*(A) = 1$, entonces A es denso en $[0, 1]$.
7. Demostrar que dado un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$ se tiene $m^*(I) = \text{long}(I)$. *Indicación*: probar primero que si $\{I_k\}_{k=1}^n$ es un recubrimiento finito de I por intervalos se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \text{long}(I_k) \geq \text{long}(I)$. A continuación usar un argumento de "compacidad".
8. *a*) Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$, $\forall B \subset \mathbb{R}$.
   b) Lebesgue definió la clase de subconjuntos medibles de $[0, 1]$ como la de aquellos $A \subset [0, 1]$ tales que $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$, (donde $\mathcal{C}A = [0, 1] \setminus A$). Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.
9. Probar que el conjunto D de números en $[0, 1]$ tal que su desarrollo decimal no contienen el 5 es un conjunto de medida (exterior de Lebesgue) cero (i.e., $m^*(D) = 0$).
10. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos $\displaystyle\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \left\{ \sup_{|x-y|\leq\delta} f - \inf_{|x-y|\leq\delta} f \right\}$. [1]
    a) Probar que f es continua en x si y solo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.
    b) (*) Demostrar el Teorema de Lebesgue: f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si $\forall k = 1, 2, \ldots$, el conjunto $E_k = \{x \in [a, b] : \mathcal{O}_f(x) \geq 1/k\}$ tiene medida nula.

[1] $\mathcal{O}_f(x)$ denota la oscilación de f en x.