Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 5 *(Medidas exteriores)*

1.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ mediante $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \emptyset$, $A \subset X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

2.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ para $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

3.- Comprobar que si μ^* es una medida exterior finitamente aditiva entonces es numerablemente aditiva.

4.- Sea μ^* una medida exterior, sea H un conjunto μ^*-medible, sea μ^*_H la restricción de μ^* a $\mathcal{P}(H)$.
a) Comprobar que μ^*_H es una medida exterior en H.
b) Comprobar que $A \subset H$ es μ^*_H-medible si y solo si es μ^*-medible

5.- Si en el ejercicio 4) se suprime la hipótesis de que H sea μ^*-medible, ¿qué partes seguirían siendo ciertas y cuales fallarían?

6.- Sea μ^* una medida exterior, sean $\{A_j\}$ una sucesión de conjuntos μ^*-medibles disjuntos. Probar que

$$\mu^*\left(E \bigcap \left(\bigcup_1^\infty A_j\right)\right) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j), \qquad \forall E \subset X.$$

Esto aparece en la demostración del Teorema de Caratheodory. (Sugerencia: Empezar considerando que A_1 es medible y tomando como conjunto de prueba $E \cap (\cup_1^\infty A_j)$.)

7.- Sea X un conjunto con un número infinito de elementos. Tomemos como clase recubridora $\mathcal{C}$, la formada por el vacío, el total y los conjuntos con un único elemento. Definimos $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = \infty$, $\rho(E) = 1$, si $E \in \mathcal{C}$, $E \neq \emptyset$, X. Describir la medida exterior así obtenida. Estudiar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

8.- Sea X un conjunto no-numerable. Sea $\mathcal{C}$ la σ - álgebra formada por los conjuntos numerables y no-numerables de complementario numerable.
Sea $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ definida mediante $\mu(E) = \text{card } E$, si E es finito, $\mu(E) = \infty$ en otro caso.
a) Probar que μ es una medida completa en $\mathcal{C}$.
b) Estudiar la medida μ^* construida a partir de $\mathcal{C}$ y μ.