Hoja 6

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0,1]\times[0,1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)dx\,.$$

Solución: (a) $\sup\{L(f,\mathcal{P})\ :\mathcal{P}$ partición de $R\} = 0$ y $\sup\{U(f,\mathcal{P})\ :\mathcal{P}$ partición de $R\} = 1$. (b) No existen.

Desarrollo:(a) Sean $\mathcal{P}_1 = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{s_0, s_1, \cdots, s_m\}$ particiones del intervalo $[0,1]$. Tenemos que $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ es una partición del cuadrado $R = [0,1]\times[0,1]$ que lo descompone en mn rectángulos

$$Q_{ij} := [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \quad \text{con} \quad i = 0,1,\cdots,n-1 \quad \text{y} \quad j = 0,1,\cdots,m-1.$$

Recordamos $m_{ij} = \inf\{f(x,y)\ :\ (x,y)\in Q_{ij}\}$ y $M_{ij} = \sup\{f(x,y)\ :\ (x,y)\in Q_{ij}\}$, así que para nuestra $f(x,y)$ tenemos que $m_{ij} = 0$ y $M_{ij} = 1$. Además para la suma inferior nos queda

$$L(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\ \text{área}\ (Q_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} 0\cdot\ \text{área}\ (Q_{ij}) = 0$$

y para la superior

$$U(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\ \text{área}\ (Q_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} 1\cdot\ \text{área}\ (Q_{ij}) = \ \text{área}\ (R) = 1.$$

Por tanto

$$\sup\{L(f,\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{partición de}\ R\} = 0 \quad \text{y} \quad \inf\{U(f,\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{partición de}\ R\} = 1.$$

y concluimos que f no es integrable en R.

(b) Si $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

sabemos $\nexists \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$. (Mismo argumento que en el apartado (a) pero en una variable). Para $y = y_0$ fijo tenemos que $f(x,y_0) = g(x)$ y $\nexists \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$. Para $x = x_0$ fijo tenemos $f(x_0,y) = 0$ si $x_0 \in \mathbb{Q}$ y $f(x_0,y) = 1$ si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, por tanto

$$\int_0^1 f(x_0,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_0 \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x_0 \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases} = g(x_0)$$

y $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_0^1 g(x)dx$, que no existe.

2.- Definimos $f(x,y)$ en el cuadrado $C=[0,1]\times[0,1]$ como sigue:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C.

Solución: (a) Para $x=x_0$ fijo tenemos que $f(x_0,y)=g(y)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0\in\mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x_0\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$

Pero $\displaystyle\int_0^1 dy=\int_0^1 2y\,dy=1$, así que

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

(b) Sean $\mathcal{P}_1=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ y $\mathcal{P}_2=\{s_0,s_1,\cdots,s_m\}$ particiones del intervalo $[0,1]$. Tenemos $\mathcal{P}:=\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$ una partición del cuadrado $R=[0,1]\times[0,1]$ que lo descompone en mn rectángulos $Q_{ij}=[t_i,t_{i+1}]\times[s_j,s_{j+1}]$. Supongamos primero que $1/2\in\mathcal{P}_2$ y sea por ejemplo $s_{j_0}=1/2$, entonces tenemos que

$$m_{ij}=\begin{cases} 2s_j & \text{para} \quad j+1\le j_0, \\ 1 & \text{para} \quad j+1>j_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad M_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{para} \quad j+1\le j_0, \\ 2s_{j+1} & \text{para} \quad j+1>j_0, \end{cases}$$

(Se usa que $2y\le 1$ para $0\le y\le 1/2$ pero $1\le 2y$ para $1/2\le y\le 1$).
Para la suma inferior

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{j=0}^{j_0-1}\sum_{i=0}^{n-1}2s_j \text{ área } (Q_{ij})+\sum_{j=j_0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij}),$$

y para la superior

$$U(f,\mathcal{P})=\sum_{j=0}^{j_0-1}\sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij})+\sum_{j=j_0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1}2s_{j+1} \text{ área } (Q_{ij}).$$

Usando

$$\sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij})= \text{ área } ([0,1]\times[s_j,s_{j+1}])=s_{j+1}-s_j$$

$$\sum_{j=0}^{j_0-1}(s_{j+1}-s_j)=\text{longitud}([0,1/2])=1/2$$

$$\sum_{j=j_0}^{m-1}(s_{j+1}-s_j)=\text{longitud}([1/2,0])=1/2$$

obtenemos que:

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{j=0}^{j_0-1}2s_j(s_{j+1}-s_j)+\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad U(f,\mathcal{P})=\frac{1}{2}+\sum_{j=j_0}^{m-1}2s_{j+1}(s_{j+1}-s_j)$$

Pero $\displaystyle\sum_{j=0}^{j_0-1}2s_j(s_{j+1}-s_j)$ es menor que el área del triángulo de vértices $(0,0),(1/2,0)$ y $(1/2,1)$, que es $1/4$.

Y la suma $\displaystyle\sum_{j=j_0}^{m-1} 2s_{j+1}(s_{j+1}-s_j)$ es mayor que el área del trapecio con vértices $(1/2,0),(1,0),(1/2,1)$ y $(1,2)$, que es $3/4$. Por tanto llegamos a que

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \geq \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Hemos supuesto que $\dfrac{1}{2} \in \mathcal{P}_2$ pero si no es el caso, definimos $\mathcal{P}_2^* = \mathcal{P}_2 \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ y $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2^*$, y es fácil comprobar (ejercicio) que $L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}^*)$ y $U(f,\mathcal{P}^*) \leq U(f,\mathcal{P})$ y como la desigualdad es válida para $\mathcal{P}^*$ obtenemos

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \geq U(f,\mathcal{P}^*) - L(f,\mathcal{P}^*) \geq \frac{1}{2}.$$

Recordar que f es integrable en $R \iff$ para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}$ tal que $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \epsilon$.

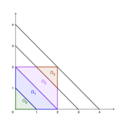
3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\int_Q f(x+y)\,dx\,dy$, donde $Q = [0,2]\times[0,2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

Solución: El conjunto de discontinuidades de f está contenido en un número finito de gráficas de funciones (en este caso, segmentos de recta). El valor de la integral es 6.

Desarrollo: Descomponemos $Q = [0,2]\times[0,2]$ en las siguientes regiones:

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{(x,y)\in Q \;:\; x+y<1\} \\
\Omega_1 &= \{(x,y)\in Q \;:\; 1\leq x+y<2\} \\
\Omega_2 &= \{(x,y)\in Q \;:\; 2\leq x+y<3\} \\
\Omega_3 &= \{(x,y)\in Q \;:\; 3\leq x+y<4\}
\end{aligned}$$

y obsevamos que $f(x+y) = i$ para todo $(x,y)\in\Omega_i$ con $i = 0,1,2,3$.



La función es discontinua en el punto $(2,2)$ y en los segmentos de recta

$$\{x+y=3 \;:\; 1\leq x\leq 2\}, \quad \{x+y=2 \;:\; 0\leq x\leq 2\} \;\text{ y }\; \{x+y=1 \;:\; 0\leq x\leq 1\}.$$

Por tanto es continua salvo en un conjunto de 2-medida cero y en consecuencia es integrable. Además

$$\begin{aligned}
\int_Q [x+y]\,dx\,dy &= \int_{\Omega_0} 0\,dx\,dy + \int_{\Omega_1} 1\,dx\,dy + \int_{\Omega_2} 2\,dx\,dy + \int_{\Omega_3} 3\,dx\,dy \\
&= \text{área}(\Omega_1) + 2\ \text{área}(\Omega_2) + 3\ \text{área}(\Omega_3) = 6
\end{aligned}$$

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados.

(a) $\displaystyle\int_Q x^2 e^y\,dx\,dy,\ Q = [-1,1]\times[0,\log 2];$ (b) $\displaystyle\int_Q \text{sen }(x+y)\,dx\,dy,\ Q = [0,\pi]\times[0,\pi];$

(c) $\displaystyle\int_Q |xy|\,dx\,dy,\ Q = [-1,2]\times[1,3];$ (d) $\displaystyle\int_Q \text{sen }^2(3x-2y)\,dx\,dy,\ Q = [0,\pi]\times[0,\pi].$

Solución: (a) $\dfrac{2}{3}$ (b) 0 (c) 10 (d) $\dfrac{\pi^2}{2}$

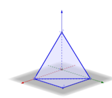
5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q=[0,1]\times[0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también en cada caso el conjunto

$$\mathcal{D}=\{(x,y)\in Q:\ f \text{ no es continua en } (x,y)\}.$$

$$(a)\ f(x,y)=\begin{cases}1-(x+y) & \text{si}\quad x+y\le 1,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}\qquad (b)\ f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{si}\quad x^2\le y\le 2x^2,\\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Solución: (a) $\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{5}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Desarrollo: (a) La función es continua en Q y por tanto integrable.



Además si denotamos por Ω el triángulo en el plano xy con vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$, el volumen del sólido S es

$$\begin{aligned}\text{Volumen}(S)&=\int_\Omega(1-x-y)dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\right]dx=\int_0^1\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(b) La función f es discontinua en

$$\{(x,x^2)\ :\ 0<x\le 1\}\cup\{(x,2x^2)\ :\ 0<x\le 1/\sqrt{2}\}$$

pues $x+x^2>0$ para $0<x\le 1$, y $x+2x^2>0$ para $0<x\le 1/\sqrt{2}$. Este conjunto tiene 2-medida cero y por tanto f es integrable en Q. Recuerda que si $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua, usando continuidad uniforme, vimos que la gráfica de g tiene 2-medida cero. En este caso

$$\{(x,x^2)\ :\ 0<x\le 1\}\subset \text{gráfica}(g_1)\quad \text{y}\quad \{(x,2x^2)\ :\ 0<x\le 1/\sqrt{2}\}\subset\text{gráfica}(g_2)$$

con $g_1:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g_1(x)=x^2$ y $g_2:[0,1/\sqrt{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g_2(x)=2x^2$.
Sea $\Omega=\{(x,y)\in Q\ :\ x^2\le y\le 2x^2\}$, como f vale 0 en $Q\setminus\Omega$ el volumen del sólido S es

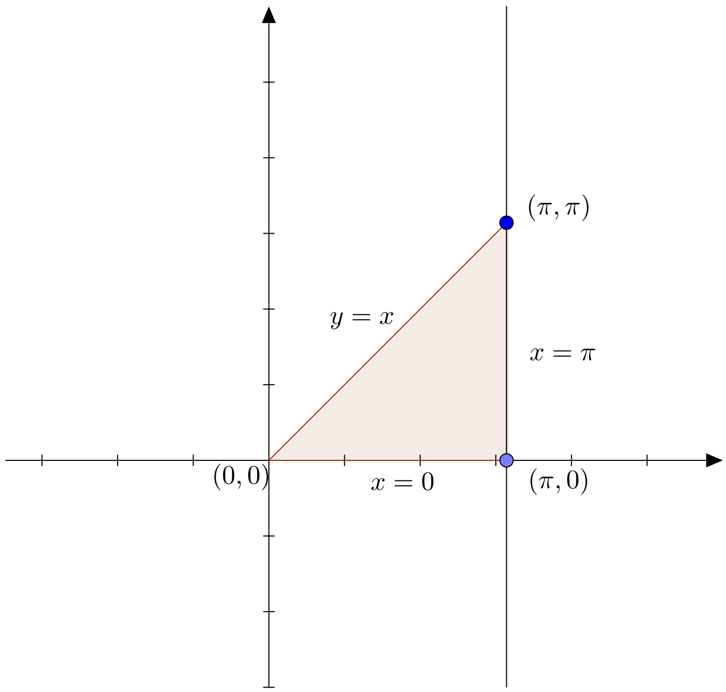
$$\begin{aligned}\text{Volumen}(S)&=\int_\Omega(x+y)dx\,dy=\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}/\sqrt{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx\right]dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{x=\sqrt{y}/\sqrt{2}}^{x=\sqrt{y}}dy\\&=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+y^{3/2}-\frac{y}{4}-\frac{y^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)dy=\left(\frac{y^2}{8}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{2y^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{8}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

(Para escribir como integrales iteradas hemos usado que Ω es una región del tipo 2)

6.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\Omega x\cos(x+y)\,dx\,dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

Solución: $-\dfrac{3\pi}{2}$

Desarrollo: Primero tenemos que determinar los límites de integración para ello dibujamos el triangulo Ω.



Así ya podemos calcular nuestra integral

$$\int_\Omega x\,\cos(x+y)\,dx\,dy\,, = \int_0^\pi \left(\int_0^x x\,\cos(x+y)\,dy\right)\,dx = \int_0^\pi x\,\sin(x+y)|_0^x\,dx$$
$$= \int_0^\pi x\,\sin(2x)\,dx - \int_0^\pi x\,\sin(x+\pi)\,dx$$

Calculamos por partes ambas integrales

$$\int_0^\pi x\,\sin(x+\pi)\,dx = -\int_0^\pi x\,\sin(x)\,dx = x\cos(x)|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\,dx = -\pi \qquad \begin{bmatrix} u = x & du = 1 \\ dv = \sin(x) & v = -\cos(x) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^\pi x\,\sin(2x)\,dx = -\left.\frac{x}{2}\cos(2x)\right|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = -\frac{\pi}{2} \qquad \begin{bmatrix} u = x & du = 1 \\ dv = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\int_\Omega x\,\cos(x+y)\,dx\,dy\,, = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

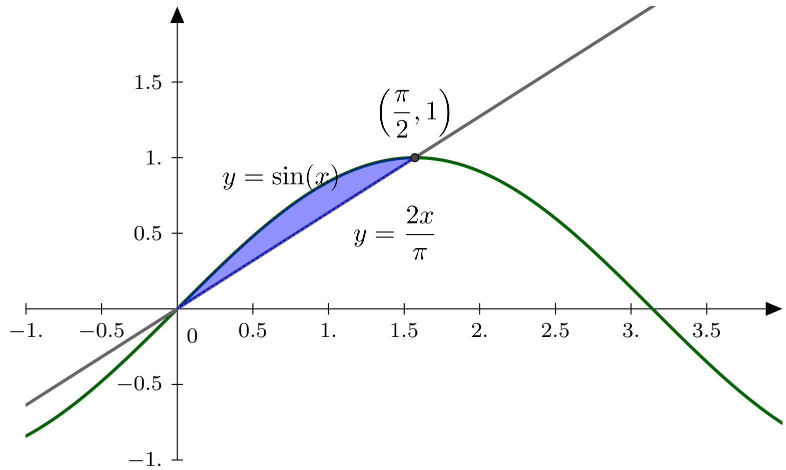
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral

$$\int_\Omega x\,\cos(x+y)\,dx\,dy\,, = \int_0^\pi \left(\int_y^\pi x\,\cos(x+y)\,dx\right)\,dy.$$

7.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_D y dx\,dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ 2x/\pi \leq y \leq \text{sen}\ x\}$.

Solución: $\dfrac{\pi}{24}$

Desarrollo: Primero debemos determinar los límites de integración para ello dibujamos la región D.



Para calcular el punto de corte de las curvas $y=\sin(x)$ y $y=\dfrac{2x}{\pi}$, simplemente igualamos y resolvemos la ecuación. Los puntos de corte que nos interesan son el $(0,0)$ y el $(\dfrac{\pi}{2},1)$. Teniendo esto ya podemos calcular la integral

$$\int_D y dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin(x)} y\,dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin(x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x^2}{\pi^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx-\frac{2x^3}{3\pi^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx-\frac{\pi}{12}.$$

Calculemos por partes la integral que nos falta

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^2\,dx=-\sin(x)\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\sin^2(x)\,dx\qquad\begin{bmatrix}u=\sin(x) & du=\cos(x)\\ dv=\sin(x) & v=-\cos(x)\end{bmatrix}$$
$$=\frac{\pi}{2}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}.$$

Por tanto

$$\int_D y dx\,dy=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{24}.$$

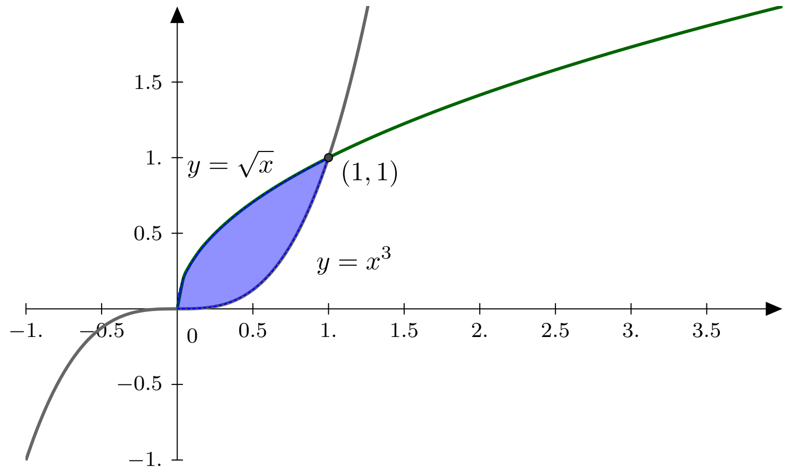
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral (La cual es más complicada)

$$\int_D y dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi y}{2}} y\,dx\right)dy.$$

8.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_D x^3y\text{sen}\,\frac{\pi y^2}{x}dxdy$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^3\le y\le\sqrt{x}\}$.

Solución: $\dfrac{1}{10\pi}$

Desarrollo: Primero debemos determinar los límites de integración para ello dibujamos la región D.



Ahora ya podemos calcular la integral:

$$\int_D x^3 y \sin\frac{\pi y^2}{x} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} x^3 y \sin\frac{\pi y^2}{x}\, dy\right) dx = \int_0^1 \frac{-x^4}{2\pi} \cos\frac{\pi y^2}{x}\Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 x^4\cos(\pi)\, dx - \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 x^4 \cos\pi x^5\, dx = \frac{1}{10\pi} + \frac{\sin(\pi x^5)}{10\pi^2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{10\pi}.$$

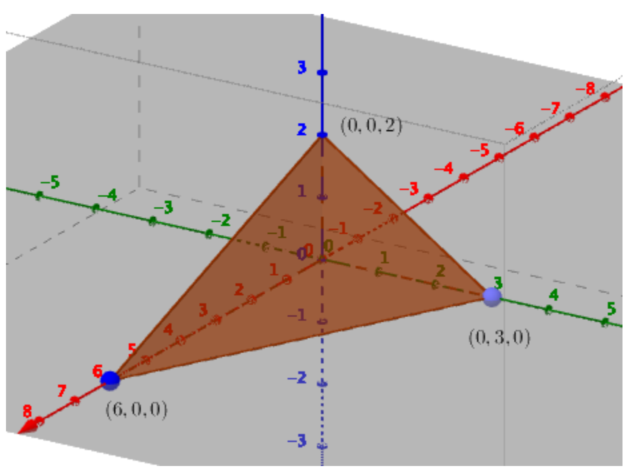
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral, (Como veis esta es mucho más complicada)

$$\int_D x^3 y \sin\frac{\pi y^2}{x} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} x^3 y \sin\frac{\pi y^2}{x}\, dx\right) dy.$$

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z = 6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

Solución: 6

Desarrollo: Primero dibujemos la pirámide en cuestión



Ahora si recordamos, el volumen de nuestra pirámide es simplemente un tercio del área de la base por la altura entonces

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{3\cdot 6}{2}\right)\cdot 2 = 6.$$

Ahora calculemos el volumen mediante una integral, como sabemos si denotamos P a la pirámide

$$V = \int_P dx\, dy\, dz.$$

Gracias al dibujo deducimos los límites de integración y pasamos a calcular dicha integral (se puede cambiar el orden de integración yo solo pongo una de las posibilidades)

$$\begin{aligned} V &= \int_P dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} \int_0^{6-3z-2y} dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} 6 - 3z - 2y\, dy\, dz \\ &= \int_0^2 6\left(3 - \frac{3}{2}z\right) - 3z\left(3 - \frac{3}{2}z\right) - \left(3 - \frac{3}{2}z\right)^2 dz = \int_0^2 \frac{9}{4}z^2 - 9z + 9\, dz \\ &= 6 - 18 + 18 = 6. \end{aligned}$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x,y) = \dfrac{1}{3}(6 - x - 2y)$ y $g(x,y) = 0$ en $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0, y > 0, x + 2y < 6\}$ que es el interior del triángulo con vértices $(0,0), (6,0)$ y $(0,3)$. Es decir,

$$\begin{aligned} V &= \int_T (f(x,y) - g(x,y))\, dx\, dy = \int_T \frac{1}{3}(6 - x - 2y) dx\, dy = \frac{1}{3}\int_0^6 \left[\int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} (6 - x - 2y) dy\right] dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^6 \left[\frac{(6-x)^2}{2} - \left(\frac{6-x}{2}\right)^2\right] dx = \frac{1}{12}\int_0^6 (6-x)^2 dx = \frac{1}{12}\frac{6^3}{3} = 6 \end{aligned}$$

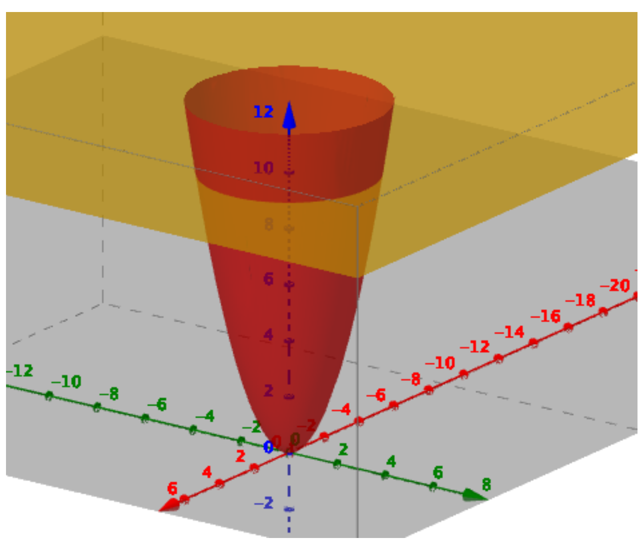
10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ y $x = 1$.

Solución: (a) 50π (b) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Desarrollo:

(a) Primero dibujamos la región



Entonces para calcular el volumen de esta región, que llamaremos Ω, deberemos calcular

$$\int_\Omega dx\, dy\, dz$$

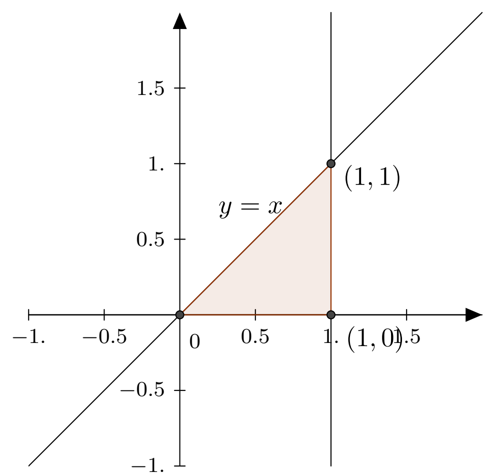
Aquí debemos darnos cuenta que la forma más fácil de hacer esto es pasar a coordenadas cilíndricas, con lo que nos quedaría

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} dx\,dy\,dz &= \int_{\Omega} r\,d\theta\,dr\,dz = \int_0^{10}\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dz = \int_0^{10}\int_0^{\sqrt{z}} 2\pi r\,dr\,dz \\ &= \int_0^{10} \pi z\,dz = 50\pi.\end{aligned}$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x,y) = 10$ y $g(x,y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 10\}$. Es decir,

$$\begin{aligned}V &= \int_D (f(x,y) - g(x,y))\,dx\,dy = \int_D (10 - x^2 - y^2)dx\,dy = \int_0^{\sqrt{10}}\int_0^{2\pi} r(10 - r^2)\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} (10r - r^3)\,dr = 2\pi(5\cdot 10 - \frac{100}{4}) = 50\pi\end{aligned}$$

(b) En este caso vamos a dibujar nuestra región, Ω, proyectada al plano $z = 0$ para que sea vea mejor.



Entonces para calcular el volumen de la región que nos interesa deberemos calcular

$$\int_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^x\int_0^{e^{-x^2}} dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x,y) = e^{-x^2}$ y $g(x,y) = 0$ en el interior T del triángulo de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(1,1)$ (ver dibujo). Es decir,

$$\begin{aligned}V &= \int_T (f(x,y) - g(x,y))\,dx\,dy = \int_T e^{-x^2}dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{-x^2}\,dy\right]\,dx \\ &= \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\Big)dy.$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\Big)dx\,,$

(c) $\displaystyle\int_1^e \Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\int_{-\text{sen }x/2}^{\text{sen }x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$

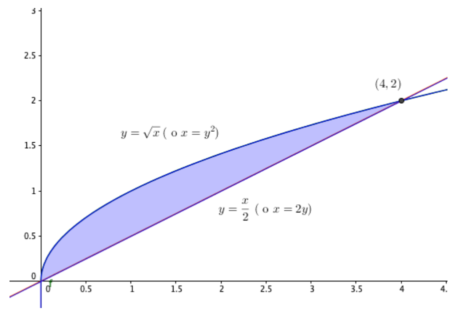
Solución:

$$(a)\int_0^4\Big[\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big]dx \quad (b)\int_1^2\Big[\int_1^{y^2} f(x,y)\,dx\Big]dy \quad (c)\int_0^1\Big[\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

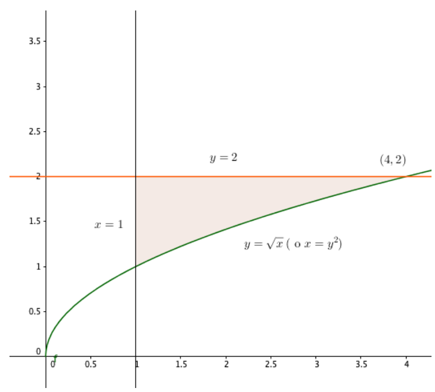
$$(d)\int_{-1}^0\Big[\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx\Big]dy+\int_0^1\Big[\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

Regiones de integración:

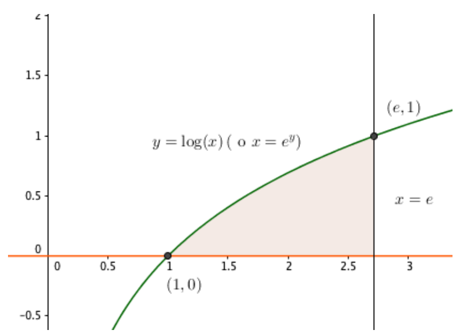
(a)



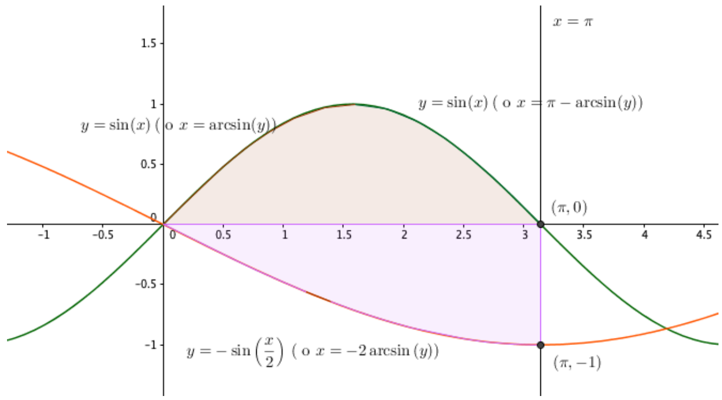
(b)



(c)



(d) Este apartado es un poco más complicado, lo primero que hacemos es representar nuestra región de integración y la dividimos en dos del siguiente modo



La parte de arriba de la región de integración sería la correspondiente a $\int_0^1 \Big[\int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx\Big]dy$,

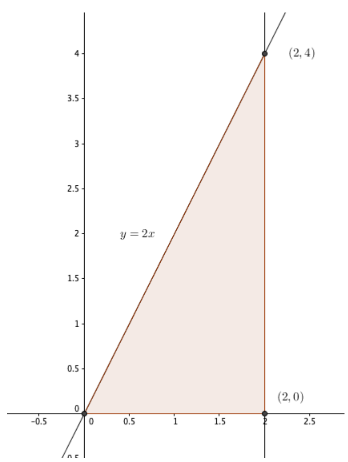
y la parte de abajo corresponde a $\int_{-1}^0 \Big[\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx\Big]dy$

12.- Invirtiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dxdy\,.$$

Solución: $e^4 - 1$

Desarrollo: Primero dibujamos la región de integración:



Con esto ya podemos invertir el orden de integración, y la anterior integral nos quedaría

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^2 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1.$$

13.- Si $D = [-1,1] \times [-1,2]$, probar que

$$1 \leq \int_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1} \leq 6\,.$$

Desarrollo: Primero definimos la función de dos variables $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$. Claramente la función f es continua en D y como D es un compacto, esta función alcanzará un máximo y un mínimo absoluto.

Como $f(x,y) \leq 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(0,0) = 1$ (ya tenemos nuestro máximo absoluto). No es difícil ver que el mínimo absoluto se alcanza en los puntos $(1,2)$ y en el $(-1,2)$ y es $1/6$. Con esto ya tenemos que

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \max_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\} \int_D dx\,dy = \max_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\}A(D) = 6$$

y de igual modo

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \min_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\} \int_D dx\,dy = \min_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\}A(D) = 1.$$

14.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(*a*) $\displaystyle\int_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(*b*) $\displaystyle\int_T x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $z=0, z=\pi, y=0, y=1, x=0, x+y=1$.

(*c*) $\displaystyle\int_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x\,y$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

Solución: (a) 7 (b) 0 (c) $\dfrac{1}{364}$

15.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(*b*) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(*c*) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(*d*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx.$

Solución:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_y^1 \Big[\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big]\,dx\Big]\,dy.$ (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^{1-y} \Big[\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dx\Big]\,dy.$

(*c*) $\displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^1 \Big[\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dx\Big]\,dy.$ (*d*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \Big[\int_{\sqrt{x^2y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big]\,dx\Big]\,dy.$