TEMA 2.- Diferenciabilidad y extremos locales

2.1 - Oes de Landau

Def: Decimos que f es una o grande de φ ($f(x) = O(\varphi(x))$) si existe una cte. C t.q

$$C \geq 0, \quad \|f(x)\| \leq C\,\varphi(x) \quad \forall x \in U$$

Decimos que f es una o pequeña de φ cuando x tiende a x_0 ($f(x) = o(\varphi(x))$) si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(x)} = 0$$

Si $f = o(\varphi)$, entonces $f = O(\varphi)$

Prop: Si $L: E \to F$ es lineal y $L(x) = o(\|x\|)$, entonces $L \equiv 0$

2.2 - Diferenciabilidad: derivadas de orden 1

Def: Decimos que f es diferenciable en x_0 si $\exists L: E \to F$ lineal acotada t.q:

$$R_1(x) = f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|), \quad \text{o equivalentemente}$$

$$R_1(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + L(h)) = o(\|h\|)$$

$R_1(x)$ y $R_1(h)$ reciben el nombre de resto de Taylor de primer orden

Decimos que f es diferenciable en U si es diferenciable en todo $x \in U$

Propiedades:

a) L, si existe, es única y se llama diferencial de f en x_0 ($(df)_{x_0}$)

b) Si f no es continua, f no puede ser diferenciable

c) $$(df)_{x_0}(v) = \begin{pmatrix} (df_1)_{x_0}(v) \\ \vdots \\ (df_k)_{x_0}(v) \end{pmatrix}$$

d) f, g diferenciables y c constante, entonces $f+g$, $f-g$ y cf también lo son y además

$$(d(f+g))_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}, \quad (d(f-g))_{x_0} = (df)_{x_0} - (dg)_{x_0}, \quad (d(cf))_{x_0} = c\,(df)_{x_0}$$

2.2.1 - Regla de la cadena

Def: La derivada direccional de f con respecto a v en x_0 es

$$(D_v f)(x_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + tv), \quad \text{equivalentemente}$$

$$(D_v f)(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

La regla de la cadena a lo largo de caminos cualesquiera afirma que para todo camino diferenciable $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = x_1'(t) f_{x_1}(\alpha(t)) + \dots + x_n'(t) f_{x_n}(\alpha(t))$$

Teorema: f es diferenciable en x_0 si y sólo si satisface la regla de la cadena a lo largo de todos los caminos diferenciables

En general, g, f diferenciables

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))(Df(x_0))$$

2.2.2.- Matriz Jacobiana

Def. Llamamos matriz jacobiana de f en x_0 $((Df)_{x_0})$ a la matriz t.q.

$$(df)_{x_0}(v) = (Df)_{x_0} \cdot v$$

$$(Df)_{x_0} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

2.3.- Funciones de clase C^t

Def. Se dice que f es diferenciable de clase ...

- C^0 si es continua
- C^1 si existen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ y son continuas
- C^k si existen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ y son de clase C^{k-1}
- C^∞ si es C^k $\forall k$

Teorema. Si $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ existen y son continuas, entonces f es diferenciable

Teorema (Lema de Schwarz)

$$f_{x_1x_2}(x_0) = f_{x_2x_1}(x_0), \text{ y por lo tanto}$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

Notación (Multíndices)

Un multíndice es una n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de enteros ≥ 0

y $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$D_f^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = D_f^{(2,1)}$$

Prop. f, g de clase $C^\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow fg$ es de clase C^ℓ

$\Rightarrow g\circ f$ es de clase C^ℓ

2.4.- Desarrollos de Taylor y extremos locales

2.4.1.- Desarrollo cuadrático de Taylor

Def: La matriz Hessiana de f en a es

$$\text{Hess}(f)_a = [f_{x_ix_j}(a)]_{n\times n}$$

Teorema: $f(a+h) = f(a) + (\nabla f) \cdot h + \frac{1}{2} h^t \,\text{Hess}(f)_a\, h + R(h)$

donde $R(h)$ es $o(\|h\|^2)$ y $O(\|h\|^3)$ si f es C^3

$$f(h) = f(a) + \nabla f(h-a) + \frac{1}{2}(h-a)^t \,\text{Hess}(f)_a (h-a) + R(h-a)$$

2.4.2 - Extremos locales

Def Decimos que a es un punto crítico de f si $\nabla f_a = 0$

Teorema: a punto crítico de f

$(Hf)_a$ definida positiva $\Rightarrow$ a mínimo local

$(Hf)_a$ definida negativa $\Rightarrow$ a máximo local

$(Hf)_a$ indefinida $\Rightarrow$ a ni máximo ni mínimo local

2.4.3.- Desarrollo general de Taylor

Teorema - Definición. Existe un único $P_\ell(x)$ t.q

(1) $P_\ell(x)$ tiene grado $\leq \ell$

(2) $D^\alpha f(a) = D^\alpha P_\ell(a)$ $\forall \alpha$ multíndice con $0 \leq |\alpha| \leq \ell$

A este $P_\ell(x)$ se le llama polinomio de Taylor de orden ℓ de f en a

$$P_\ell(x) = \phi_0 + \frac{1}{1!}\phi_1(x-a) + \frac{1}{2!}\phi_2(x-a) + \cdots + \frac{1}{\ell!}\phi_\ell(x-a)$$

donde $\phi_s(h) = \frac{d^s}{dt^s}\Big|_{t=0} f(a+th) = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_s\leq n} f_{x_{i_1}\cdots x_{i_s}}(a)\, h_{i_1}\cdots h_{i_s}$

$$P_\ell(x) = f(a) + \nabla f_a(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t (Hf)_a h + \frac{1}{3!}\phi_3(h) + \cdots + \frac{1}{\ell!}\phi_\ell(h)$$

Teorema Son equivalentes

(1) $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden ℓ de f en a

(2) $P(x)$ tiene grado $\leq \ell$ y la diferencia $f(x) - P(x)$ es una $o(\|x-a\|^\ell)$

Además, si f es $C^{\ell+1}$, entonces $f(x) - P(x) = O(\|x-a\|^{\ell+1})$