4.2. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Para una matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hemos definido su <u>determinante</u> como

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.1)$$

y lo habíamos usado en el Tema 1 para hallar la inversa de A cuando $|A| \neq 0$. Observa que si $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son las dos permutaciones de S_2, como $sig(\sigma) = -1$ y $sig(I) = 1$ (2.1) se puede escribir como

$$det(A) = |A| = sig(I)\, a_{1,I(1)} a_{2,I(2)} + sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)}$$

Def 2.1 Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se define su <u>determinante</u> como

$$det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

donde S_n es el conjunto de las permutaciones de los elementos $\{1, 2, .., n\}$.

Ej 2.1. Escribe el determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

S/ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Las permutaciones de S_n con su signo son

$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $sig(I) = 1$; $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$, $sig(\sigma_1) = (-1)^2 = 1$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$, $sig(\sigma_2) = (-1)^2 = 1$

$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3)$, $sig(\rho_1) = -1$; $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3)$, $sig(\rho_2) = -1$

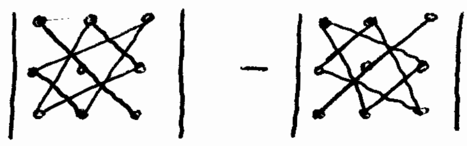
$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)\ ,\ sig(\rho_3) = -1.$$

Por tanto

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

que es la conocida <u>regla de Sarrus</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



Dada $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, denotaremos por f_i al vector de la fila i, $i = 1,..,n$, y por c_j al vector de la columna j, $j = 1,..n$. Es decir

$$f_i = (a_{i,1}, a_{i,2} \dots, a_{i,n})\ ,\ i = 1,..,n$$
$$c_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, .., a_{n,j})^t\ ,\ j = 1,..,n$$

Por tanto

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = [c_1, c_2, .., c_n]$$

y escribiremos $|A| = det(f_1, .., f_m)$ ó $|A| = det(c_1, .., c_n)$ como el determinante de los n vectores fila de A y el determinante de los n vectores columnas de A.

<u>Proposición 2.2</u>

Si $A \in (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $|A| = |A^t|$

D/ $$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

(reordenamos cada producto poniendo $\sigma(j) = k \Leftrightarrow j = \sigma^{-1}(k)$. Observa que $\sigma \in S_n \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in S_n$)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1),1}\, a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}$$

(Cambiamos índices $\gamma = \sigma^{-1}$ y observamos que $sig(\gamma) = sig(\sigma^{-1}) = sig(\sigma)$)

$$= \sum_{\gamma \in S_n} sig(\gamma)\, a_{\gamma(1),1}\, a_{\gamma(2),2} \cdots a_{\gamma(n),n}$$

$= |A^t|$ (por definición de matriz traspuesta) ∎

A continuación vamos a enumerar propiedades del determinante de una matriz. Las escribiremos para los vectores fila, pero por la proposición 2.1 son igualmente válidas para los vectores columna.

PROPIEDAD 1. $Det(f_1, .., \lambda f_k, .. f_n) = \lambda Det(f_1, .. f_k, .. f_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $k = 1, .. n$.

Traducción: si se multiplica una fila (o una columna) de una matriz por un número $\lambda \in \mathbb{K}$, su determinante queda multiplicado por λ.

D/ Sean $B = (b_{i,j}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \lambda f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ y $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$. Entonces,

si $i \neq k$, $b_{i,j} = a_{i,j}$; y $b_{k,j} = \lambda a_{k,j}$ para todo $j = 1, 2, .. n$.

Por tanto

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{k,\sigma(k)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{k,\sigma(k)}) \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$= \lambda \left(\sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \right)$$

$$= \lambda |A|. \qquad \blacksquare$$

<u>PROPIEDAD 2</u> $Det(f_1, .., f_k + f_k', .., f_n) = Det(f_1, .., f_k, .., f_n) + Det(f_1, .., f_k', .., f_n)$ para todo $k = 1, .., n$.

<u>Traducción</u>: Si una vector fila (o columna) de una matriz es suma de dos vectores, su determinante es la suma de los determinantes poniendo en la fila (o columna) cada uno de los vectores

D/ Pongamos $B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k + f_k' \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$; $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$; $A' = (a'_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k' \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$. Se quiere probar que $|B| = |A| + |A'|$. Observar que $\forall j = 1, .., n$,

$$b_{i,j} = a_{ij} = a'_{i,j} \quad \text{si } i \neq k$$
$$b_{k,j} = a_{k,j} + a'_{k,j}.$$

Entonces

$$|B| = \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{k,\sigma(k)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots (a_{k,\sigma(k)} + a'_{k,\sigma(k)}) \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots b_{n,\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\, b_{1,\sigma_1} \cdots a'_{k,\sigma(k)} \cdots b_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{k,\sigma(k)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}$$

$$= |A| + |A'|. \qquad \blacksquare$$

PROPIEDAD 3 $Det(f_1, .., f_k, .., f_\ell, .., f_n) = - Det(f_1, .., f_\ell, .. f_k, .. f_n)$ para todo $k, \ell \in \{1, 2, .. n\}$, $k \neq \ell$.

Traducción: Si se intercambian dos filas (o columnas) de una matriz el determinante cambia de signo.

D/ Sea $\rho = (k, \ell) \in S_n$ la trasposición que intercambia k y ℓ, $k \neq \ell$. Observa que si $\sigma \in S_n$, $sig(\sigma\rho) = - sig(\sigma)$ porque $\sigma\rho$ tiene una trasposición más que σ

Sean $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_\ell \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ y $B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Es decir, para $j = 1, 2 .. n$

$$b_{i,j} = a_{i,j} \quad \text{si} \quad i \neq k, i \neq \ell$$

$$b_{\ell,j} = a_{k,j}$$

$$b_{k,j} = a_{\ell,j}$$

Entonces

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{\ell,\sigma(\ell)} \cdots a_{n,\sigma(\ell)}$$

(Reemplazar σ por $\sigma\rho$)

$$= \sum_{\sigma\rho \in S_n} sig(\sigma\rho)\, a_{1,\sigma\rho(1)} \cdots a_{k,\sigma\rho(k)} \cdots a_{l,\sigma\rho(l)} \cdots a_{n,\sigma\rho(n)}$$

"ρ deja todo fijo, excepto k y l que los intercambia; además $sig(\sigma\rho) = -sig(\sigma)$." También $\sigma\rho$ recorre todas las permutaciones de S_n

$$= \sum_{\sigma \in S_n} -sig(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(l)} \cdots a_{l,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$= (-1) \sum_{\sigma \in S_n} b_{1,\sigma_1} \cdots b_{l,\sigma(l)} \cdots b_{k,\sigma(k)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

$= (-1)\,|B|$. ∎

Las propiedades anteriores son las tres propiedades fundamentales de los determinantes. De ellas se deducen otras que simplifican el cálculo de determinantes.

Proposición 2.3.

Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales su determinante es nulo (se considera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

D/ Sea $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ y supongamos que $f_i = f_j$ para $i \neq j$.

Tenemos que probar que $|A| = \det(f_1, .., f_i, .., f_j .. f_n) = 0$. Como $\det(f_1, .., f_i, .. f_j .. f_n) = -\det(f_1, .. f_j, .. f_i, .. f_n)$ por la PROPIEDAD 3, y como $f_i = f_j$ se deduce $2\det(f_1, .., f_i, .., f_i, .. f_n) = 0$. Por tanto $\det(f_1, .., f_i, .., f_i, .. f_n) = 0$. ∎

NOTA La proposición anterior es válida en todo cuerpo $\mathbb{K}$ en el que $2 \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$. Se dice que el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de 2. Un cuerpo que tiene característica 2 es $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ con $+$ y $\cdot$. En este caso $\mathbb{K}$ tiene $2 \cdot 1 = 1+1 = 0$, pero $1 \neq 0$.

Proposición 2.4

Si $\sigma \in S_n$, $\det(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)}) = \operatorname{sig}(\sigma) \det(f_1, \dots, f_n)$

D/ La propiedad 3 dice que si $\rho \in S_n$ es una trasposición, la prop 2.4 es cierta pq. $\operatorname{sig} \rho = -1$. Para una permutación $\sigma \in S_n$ escribimos $\sigma = \rho_n \circ \dots \circ \rho_1$ como producto de trasposiciones y aplicamos la propieda 3 n veces para obtener

$$\det(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)}) = (-1)^n \det(f_1, \dots, f_n) = \operatorname{sig}(\sigma) \det(f_1, \dots, f_n). \blacksquare$$

Proposición 2.5.

Si una matriz tiene toda una fila (o columna) con todos sus elementos nulos, su determinante es cero.

D/ Por la propiedad 1 con $\lambda = 0$ se deduce

$$\operatorname{Det}(f_1, \dots, 0, \dots f_n) = \operatorname{Det}(f_1, \dots, 0 \cdot f_k, \dots f_n) = 0 \operatorname{Det}(f_1, \dots, f_n) = 0. \blacksquare$$

Proposición 2.6

Si una fila (o columna) de una matriz es combinación lineal del resto de filas (o columnas) de la matriz, su determinante es nulo.

D/ Supongamos que $f_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k f_k$. Por las propiedades 1 y 2 de los determinantes

$$\det(f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = \sum_{k \neq j} \lambda_k \det(f_1, \ldots, \overset{j}{\overset{\downarrow}{f_k}}, \ldots f_j)$$

Cada sumando de la derecha es un determinante con dos filas iguales, la fila k (con $k \neq j$) y la fila j en donde aparece f_k. Por la Proposición 2.5, todos los sumandos son nulos. Por tanto $|A| = \det(f_1, \ldots f_j \ldots f_n) = 0$. ∎

Proposición 2.7.

Si a una fila (o columna) de una matriz se le suma una combinación lineal de las restantes filas (o columnas) el determinante no varía.

D/ Sea $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ y $B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Se tiene

$$|B| = \det(f_1, \ldots, f_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k f_k, \ldots f_n) \underset{}{\overset{\text{Propiedad 2}}{=}}$$

$$= \det(f_1, \ldots, f_i, \ldots f_n) + \det(f_1, \ldots, \sum_{k \neq i} \lambda_k f_k, \ldots f_n) \overset{\text{Proposición 2.6}}{=}$$

$$= \det(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) = |A|.$$ ∎

Corolario 2.8

> Si los vectores $f_1, \dots, f_n$ son linealmente dependientes, $\det(f_1, \dots, f_n) = 0$ (igual para columnas)

D/ Si $f_1, \dots, f_n$ son l. d existe al menos un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k f_k$. Aplicar la proposición 2.6 para obtener el resultado. ■

<u>NOTA</u>. El resultado del Corolario 2.8 es una equivalencia. Para demostrarlo basta ver que si $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes, $\det(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. Esto lo probaremos cuando estudiemos el determinante de un conjunto de n vectores en un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{K}$) de dim. n.