ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Problemas. 16 de Noviembre.

Ejercicio 1. Hoja 4. Demostrad que S_3 es isomorfo a un subgrupo de S_4.

Solución:

Definimos una aplicación $f\colon S_3 \to S_4$, $\sigma \mapsto f(\sigma)$, donde

$$f(\sigma)(a) = \begin{cases} \sigma(a) & \text{si } a \in \{1,2,3\} \\ 4 & \text{si } a = 4 \end{cases}.$$

Comprobamos que f es un homomorfismo inyectivo:

- Para cada $\sigma, \tau \in S_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{si } a \in \{1,2,3\}, \quad & f(\sigma\circ\tau)(a) = (\sigma\circ\tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = f(\sigma)(\tau(a)) = (f(\sigma)\circ f(\tau))(a) \\ \text{si } a = 4, \quad & f(\sigma\circ\tau)(4) = 4 = f(\sigma)(4) = (f(\sigma)\circ f(\tau))(4) \end{aligned}$$

- Supongamos que $f(\sigma) = f(\tau)$. En particular, se tiene $\sigma(a) = \tau(a)$ para todo $a \in \{1,2,3\}$. Por lo que, $\sigma = \tau$.

Finalmente, si aplicamos el Primer Teorema de Isomorfía, concluimos que

$$S_3 \simeq S_3/\ker(f) \simeq \operatorname{im}(f) \leq S_4.$$

Ejercicio 2. Hoja 4. Dado $n \geq 3$, halla dos ciclos que no conmuten en S_n. Halla una potencia de un ciclo que no sea un ciclo en algún $n \geq 4$.

Solución:

Comprobamos que los 2-ciclos $\sigma = (1\,2)$ y $\tau = (1\,3)$ no conmutan:

$$\sigma\circ\tau = (1\,2)(1\,3) = (1\,3\,2) \neq (1\,2\,3) = (1\,3)(1\,2) = \tau\circ\sigma\,.$$

Comprobamos que el cuadrado del 4-ciclo $(1\,2\,3\,4)$ no es un ciclo:

$$(1\,2\,3\,4)^2 = (1\,2\,3\,4)(1\,2\,3\,4) = (1\,3)(2\,4)$$

Ejercicio 3. Hoja 4. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos:

(a) $(1\,2)(2\,3)(3\,4)$

(b) $(2\,4\,6)(1\,4\,7)(1\,3\,5)$

(c) $(1\,2)(5\,3\,2\,1\,4)(2\,3)$

(d) $(1\,2\,3\,4)(2\,3\,4\,5)$

Solución:

(a) $(1\,2)(2\,3)(3\,4) = (1\,2)(3\,4\,2) = (1\,2\,3\,4)$.

(b) $(2\,4\,6)(1\,4\,7)(1\,3\,5) = (2\,4\,6)(1\,3\,5\,4\,7) = (1\,3\,5\,6\,2\,4\,7)$

(c) $(1\,2)(5\,3\,2\,1\,4)(2\,3) = (1\,2)(1\,4\,5\,3) = (1\,4\,5\,3\,2)$

(d) $(1\,2\,3\,4)(2\,3\,4\,5) = (1\,2\,4\,5\,3)$

Ejercicio 4. Hoja 4. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de transposiciones.

(a) $(1\,4)(2\,7)(5\,2\,3)(3\,4)(1\,4\,7\,2)$

(b) $(7\,2\,3\,6)(8\,5)(5\,7\,1)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6)$

Solución:

$$\begin{aligned}\text{(a)}\quad (1\,4)(2\,7)(5\,2\,3)(3\,4)(1\,4\,7\,2) &= (1\,4)(2\,3\,5\,7)(1\,3\,4\,7\,2) = (1\,4)(1\,5\,7\,3\,4\,2) = (1\,5\,7\,3)(2\,4)\\ &= (1\,3)(1\,7)(1\,5)(2\,4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)}\quad (7\,2\,3\,6)(8\,5)(5\,7\,1)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6) &= (7\,2\,3\,6)(1\,8\,5\,7)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6) = (7\,2\,3\,6)(1\,7\,8\,5\,3)(4\,8\,6)\\ &= (7\,2\,3\,6)(1\,7\,8\,6\,4\,5\,3) = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8)\\ &= (1\,3)(1\,2)(4\,6)(4\,5)(7\,8)\end{aligned}$$

Ejercicio 5. Hoja 4. Halla las órbitas de los elementos de $\Omega = \{1, \ldots, 8\}$ bajo la acción de σ por evaluación, para cada permutación σ del ejercicio anterior.

Solución:

(a) $\sigma = (1\,4)(2\,7)(5\,2\,3)(3\,4)(1\,4\,7\,2)$

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(5) = \mathcal{O}(7) = \{1, 3, 5, 7\}, \quad \mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(4) = \{2, 4\}.$$

(b) $\sigma = (7\,2\,3\,6)(8\,5)(5\,7\,1)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6)$

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(3) = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(5) = \mathcal{O}(6) = \{4, 5, 6\}, \quad \mathcal{O}(7) = \mathcal{O}(8) = \{7, 8\}.$$

Ejercicio 6. Hoja 4. Sea $\sigma = (a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6) \in \mathsf{S}_6$. Encuentra σ^i para cada $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Solución:

$$\sigma = (a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6), \quad \sigma^2 = (a_1\,a_3\,a_5)(a_2\,a_4\,a_6), \quad \sigma^3 = (a_1\,a_4)(a_2\,a_5)(a_3\,a_6),$$
$$\sigma^4 = (a_1\,a_5\,a_3)(a_2\,a_6\,a_4), \quad \sigma^5 = (a_1\,a_6\,a_5\,a_4\,a_3\,a_2), \quad \sigma^6 = \text{id}.$$

Ejercicio 7. Hoja 4. Demuestra que el orden de τ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos cuyo producto es τ y calcula el orden de τ^{1000} para cada una de las siguientes permutaciones:

(a) $\tau = (1\,4)(2\,7)(5\,2\,3)(3\,4)(1\,4\,7\,2)$

(b) $\tau = (7\,2\,3\,6)(8\,5)(5\,7\,1)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6)$

Solución:

Sea $\tau_1 \ldots \tau_t$ la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma \in S_n$. Denotamos $m_i = \text{long}(\tau_i) = \text{o}(\tau_i)$, para cada $i = 1, ..., l$, y $m = \text{mcm}(m_1, ..., m_l)$. La descomposición en ciclos disjuntos de cualquier potencia σ^k es $\tau_1^k...\tau_l^k$. Por tanto, el orden de σ será el menor entero positivo k tal que $\tau_i^k = 1$ para todo $i = 1, ..., l$. Recordamos que $\tau_i^k = 1$ si y sólo si m_i divide a k. Por tanto, el orden de σ será el menor entero positivo k que es múltiplo de m_i para $i = 1, ..., l$. Pero esta es exactamente la definición de mínimo común múltiplo de $m_1, ..., m_l$. Por lo que, concluimos que $\mathrm{o}(\sigma) = m$.

(a) La descomposición en ciclos disjuntos es

$$\tau = (1\,4)(2\,7)(5\,2\,3)(3\,4)(1\,4\,7\,2) = (1\,5\,7\,3)(2\,4).$$

Por tanto, $\mathrm{o}(\tau) = \mathrm{mcm}(2,4) = 4$. Además, $\tau^{1000} = \tau^{4\cdot 250} = \tau^4 = \mathrm{id}$, por lo que, $\mathrm{o}(\tau^{1000}) = 1$.

(b) La descomposición en ciclos disjuntos es

$$\tau = (7\,2\,3\,6)(8\,5)(5\,7\,1)(1\,5\,3\,7)(4\,8\,6) = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8).$$

Por tanto, $\mathrm{o}(\tau) = \mathrm{mcm}(2,3) = 6$. Además, $\tau^{1000} = \tau^{6\cdot 166+4} = \tau^4 = (1\,2\,3)(4\,5\,6)$, por lo que, $\mathrm{o}(\tau^{1000}) = \mathrm{o}(\tau^4) = 3$.

Ejercicio 8. Hoja 4. Calcula el orden de cada una de las permutaciones siguientes:

(a) $\alpha = (4\,5\,6)(5\,6\,7)(6\,7\,1)(1\,2\,3)(2\,3\,4)(3\,4\,5)$,

(b) $\beta = (4\,5)(4\,3\,1)$,

(c) $\gamma = (3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3)(6\,7\,1)(5\,6\,7)(4\,5\,6)$.

Solución:

(a) $\alpha = (4\,5\,6)(5\,6\,7)(6\,7\,1)(1\,2\,3)(2\,3\,4)(3\,4\,5) = (4\,5)(6\,7)(1\,2\,3\,6\,7)(2\,3)(4\,5) = (1\,2\,7) \implies \mathrm{o}(\alpha) = 3$

(b) $\beta = (4\,5)(4\,3\,1) = (1\,5\,4\,3) \implies \mathrm{o}(\beta) = 4$

(c) $\gamma = (3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3)(6\,7\,1)(5\,6\,7)(4\,5\,6) = (2\,4)(3\,5)(1\,6\,7\,2\,3)(4\,6)(5\,7) = (1\,6\,2\,5\,4\,7\,3) \implies \mathrm{o}(\gamma) = 7$

Ejercicio 9. Hoja 4. Demuestra que el subgrupo G de S_4 generado por los elementos $\sigma = (1\,4\,3\,2)$ y $\tau = (2\,4)$ es isomorfo a D_8.

Solución:

Recordamos que $D_8 = \langle r, s\rangle$. Todo homomorfismo $f\colon D_8 \to S_4$ está determinado por la imagen de los elementos r y s. Definimos f tomando $f(r) = \sigma$ y $f(s) = \tau$. De forma que, $f(s^j r^i) = \tau^j \sigma^i$, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$. Comprobamos que f es un homorfismo de grupos inyectivo:

- En primer lugar, comprobamos que f esta bien definido, es decir, que respeta las relaciones del grupo D_8. Observamos que

$$f(r)^4 = \sigma^4 = 1, \quad f(s)^2 = \tau^2 = 1, \quad f(s)f(r) = \tau\sigma = (1\,2)(3\,4) = \sigma^3\tau = f(r)^3 f(s)$$

$$f(s)f(r)^2 = \tau\sigma^2 = (1\,3) = \sigma^2\tau = f(r)^2 f(s), \quad f(s)f(r)^3 = \tau\sigma = (1\,4)(2\,3) = \sigma^3\tau = f(r)f(s)$$

- Por definición, hemos establecido que $f(s^j r^i) = \tau^j\sigma^i = f(s)^j f(r)^i$. Por lo que, f es un homomorfismo.

- Comprobamos que f es inyectivo. Supongamos que $f(s^j r^i) = f(s^k r^l)$, para ciertos enteros i, j, k, l. Entonces tendríamos que $\tau^j \sigma^i = \tau^k \sigma^l$, lo que implicaría que $\tau^{j-k} = \sigma^{l-i}$. Observamos que, como τ es un 2-ciclo, sus potencias son un 2-ciclo o la identidad; y como σ es un 4-ciclo, sus potencias son un 4-ciclo, dos 2-ciclos disjuntos o la identidad. Por tanto, la igualdad $\tau^{j-k} = \sigma^{l-i}$ solo sucede si $\tau^{j-k} = \sigma^{l-i} = 1$. En este caso, tendríamos que $j \equiv k \mod 2$ y $l \equiv i \mod 4$. Por lo que, $s^j = s^k$ y $r^l = r^i$, de forma que $s^j r^i = s^k r^l$.

Finalmente, tenemos que $\operatorname{im}(f) = \langle f(r), f(s) \rangle = \langle \sigma, \tau \rangle = G$. Por tanto, aplicando el Primer Teorema de Isomorfía, concluimos que

$$D_8 = D_8/\{1\} = D_8/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f) = \langle \sigma, \tau \rangle = G.$$

Ejercicio 10. Hoja 4. Si σ es un k-ciclo con k impar, demuestra que existe un ciclo τ tal que $\tau^2 = \sigma$.

Solución:

Supongamos que $k = 2n+1$. Sea $\sigma = (a_1 \ldots a_k)$ un k-ciclo. Se tiene que

$$\sigma^k = \sigma^{2n+1} = \mathrm{id} \implies \sigma = \sigma^{k+1} = \sigma^{2n+2} = \sigma^{2(n+1)} = (\sigma^{n+1})^2.$$

Comprobamos que $(n+1, 2n+1) = 1$, pues si d es un divisor común de $n+1$ y $2n+1$, entonces d divide a $2(n+1) - (2n+1) = 1$. Por lo que, tenemos que $o(\sigma^{n+1}) = 2n+1$. Veamos que σ^{n+1} es un $(2n+1)$-ciclo. Observamos que σ^{n+1} es tal que $\sigma^{n+1}(a_i) = a_{i+n+1 \mod k}$. Comprobamos que la órbita de cada a_i tiene $2n+1$ elementos:

$$a_i \mapsto a_{i+n+1} \mapsto a_{i+2(n+1)} \mapsto \cdots \mapsto a_{i+r(n+1)} = a_i \implies r(n+1) \equiv 0 \mod 2n+1 \implies r \equiv 0 \mod 2n+1.$$

Por tanto, $\tau = \sigma^{n+1}$ es un k-ciclo tal que $\tau^2 = \sigma$.

Ejercicio 12. Hoja 4. Sea σ un producto de ciclos disjuntos de igual longitud. Demuestra que σ es una potencia de un ciclo.

Solución:

Supongamos que $\sigma = (a_{11}, ..., a_{1l})(a_{21}, ..., a_{2l})...(a_{m1}, ..., a_{ml})$, de forma que $o(\sigma) = l$. Consideramos

$$\tau = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}, a_{12}, ..., a_{m2}, ..., a_{1l}, ..., a_{ml}).$$

Comprobamos que $\tau^m = \sigma$, puesto que, para todo $k \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., l\}$, se tiene

$$\tau^m(a_{kj}) = a_{kj+1} = \sigma(a_{kj}),$$

interpretando $l+1$ como 1.

Ejercicio 13. Hoja 4. Indica cuáles de estas permutaciones son pares:

(a) $(2\,4\,6\,8)$,

(b) $(2\,4\,6)(1\,3\,4)$,

(c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4)$.

Solución:

(a) $(2\,4\,6\,8)$ es un 4-ciclo. Por lo que, es impar, es decir, su signo es -1.

(b) $(2\,4\,6)(1\,3\,4)$ es composición de dos 3-ciclos, cada uno de ellos es par, es decir, su signo es 1. Como la función signo es un homomorfismo, el signo de este elemento es $1 \cdot 1 = 1$, es decir, es par.

(c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4)$ es composición de un 2-ciclo, un 3-ciclo y un 4-ciclo, con signos -1, 1 y -1 respectivamente. Como la función signo es un homomorfismo, el signo de este elemento es $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$, es decir, es par.

Ejercicio 14. Hoja 4. Calcula el orden y el signo de la permutación $\sigma = (5\,7\,3\,9)(4\,2)(3\,8\,5)(1\,6\,4)$ de S_9. Calcula σ^{26} y σ^{-1}.

Solución:

Comenzamos escribiendo la descomposición de σ en ciclos disjuntos:

$$\sigma = (5\,7\,3\,9)(3\,8\,5)(4\,2)(1\,6\,4) = (3\,8\,7)(5\,9)(1\,6\,2\,4).$$

Sabemos que $\mathrm{o}(\sigma) = \mathrm{mcm}(3\,2\,4) = 12$. Como la función signo es un homomorfismo, tenemos que:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}((3\,8\,7))\,\mathrm{sgn}((5\,9))\,\mathrm{sgn}((1\,6\,2\,4)) = (+1)(-1)(-1) = +1$$

Calculamos σ^{26}:

$$\sigma^{26} = \sigma^{2\cdot 12+2} = (\sigma^{12})^2\sigma^2 = 1^2\sigma^2 = \sigma^2 = (3\,8\,7)^2(5\,9)^2(1\,6\,2\,4)^2 = (3\,7\,8)(1\,2)(6\,4).$$

Calculamos σ^{-1}:

$$\sigma^{-1} = (3\,8\,7)^{-1}(5\,9)^{-1}(1\,6\,2\,4)^{-1} = (3\,7\,8)(5\,9)(1\,4\,2\,6).$$

Ejercicio 16. Hoja 4. Dadas las permutaciones $\alpha = (1\,2)(3\,4)$ y $\beta = (5\,6)(1\,3)$, encuentra una permutación γ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

Solución:

Tenemos que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = (\gamma(1)\,\gamma(2))(\gamma(3)\,\gamma(4))$. Si $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$, entonces podemos tomar

$$\gamma(1) = 5, \quad \gamma(2) = 6, \quad \gamma(3) = 1, \quad \gamma(4) = 3.$$

Para determinar completamente γ, podemos escoger $\gamma(5) = 2$ y $\gamma(6) = 4$, de forma que, tenemos la permutación $\gamma = (1\,5\,2\,6\,4\,3)$.

Ejercicio 17. Hoja 4. Demuestra que no existe ninguna permutación α tal que $\alpha(1\,2\,3)\alpha^{-1} = (1\,3)(5\,7\,8)$.

Solución:

Tenemos que $\alpha(1\,2\,3)\alpha^{-1} = (\alpha(1)\,\alpha(2)\,\alpha(3))$ será un 3-ciclo y tendrá orden 3. Como $(1\,3)(5\,7\,8)$ está en su descomposición en ciclos disjuntos, sabemos que tiene orden $6 = \mathrm{mcm}(2,3)$ y no será un 3-ciclo. Así, concluimos que no se puede dar la igualdad $\alpha(1\,2\,3)\alpha^{-1} = (1\,3)(5\,7\,8)$ para ningún $\alpha \in S_8$.

Ejercicio 19. Hoja 4. Sea p un número primo. Demuestra que los únicos elementos de orden p en S_n son los productos de p-ciclos disjuntos.

Solución:

Sea $\tau_1 \dots \tau_t$ la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma \in S_n$. Sabemos que $\mathrm{o}(\sigma) = \mathrm{mcm}(\mathrm{o}(\tau_1), \dots, \mathrm{o}(\tau_t))$. Por tanto, como p es primo, $\mathrm{o}(\sigma) = p$ si y solo si $\mathrm{o}(\tau_i) \in \{1, p\}$ y existe j tal que $\mathrm{o}(\tau_j) = p$, es decir, si y solo si σ es producto de p-ciclos disjuntos.

Ejercicio 20. Hoja 4. Demuestra que D_{2n} es isomorfo a un subgrupo de S_n, para cada $n \geq 3$.

Indicación:

Podemos interpretar los elementos de D_{2n} como movimientos del plano que mueven los vértices de un polígono regular de n vértices. Cada uno de ellos mueve los vértices de manera distinta. De esta forma, D_{2n} actúa sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$. Por lo que, existe un homomorfismo inyectivo $\rho \colon \mathsf{D}_{2n} \to \mathsf{S}_n$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfía, concluimos que $\mathsf{D}_{2n} \simeq \mathrm{im}(\rho) \leq \mathsf{S}_n$.