

## 8 Geodésicas

Si  $(S, Q)$  es una superficie con métrica y  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  son dos puntos de  $S$ , una de las motivaciones de este capítulo es la búsqueda de las curvas de  $Q$ -longitud mínima entre todas las curvas en  $S$  que unen  $\mathbf{p}$  con  $\mathbf{q}$ . Debemos hacer el siguiente aviso: el ser línea geodésica es condición necesaria pero no suficiente; quiere decirse que toda línea de longitud mínima tiene que ser geodésica pero no toda geodésica es de longitud mínima. Sin embargo todas las geodésicas son interesantes.

### 8.1 Ecuación de las geodésicas

Los resultados del apartado 7.7 implican lo siguiente:

Un camino regular  $\alpha(t)$  recorre una línea geodésica si y sólo si  $\alpha''(t)_Q$  es tangente a  $\alpha$ , es decir:

$$\alpha''(t)_Q = \text{escalar} \cdot \alpha'(t)$$

Esto vale para cualquier parametrización que trace una geodésica, pero entre todas estas parametrizaciones hay unas que se caracterizan por una ecuación particularmente sencilla.

**Definición 108.** Dada una superficie con métrica  $(S, Q)$ , un **camino geodésico para  $Q$**  es cualquier camino  $\alpha(t)$  en  $S$  que tiene aceleración Riemanniana nula:  $\alpha''(t)_Q \equiv \mathbf{0}$ .

Si  $\Phi(u, v)$  es una parametrización regular de  $S$  en la cual  $Q \equiv A(du)^2 + 2Bdu dv + C(dv)^2$  y  $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$ , entonces  $\alpha(t)$  es camino geodésico si y sólo si cumple las siguientes EDOs, llamadas **forma Lagrangiana de las ecuaciones de los caminos geodésicos**:

$$\frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_u(\alpha'_0(t)) \\ Q_v(\alpha'_0(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

**Teorema 109.** Un camino  $\alpha(t)$  en  $(S, Q)$  es camino geodésico si y sólo si es de uno de los dos tipos siguientes: o bien es constante, o bien es parametrización de una línea geodésica con rapidez Riemanniana constante  $\sqrt{Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} = c > 0$ .

En particular, las parametrizaciones por arco Riemanniano de cualquier geodésica son caminos geodésicos, llamados **geodésicas unitarias**.

**Lema 110.** Para todo camino suave  $\alpha(t) : J \rightarrow S$ , regular o no, se cumple:

$$\frac{d}{dt} Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \equiv 2Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha''(t)_Q). \quad (34)$$

*Demostración.* En los tramos regulares de  $\alpha$  existen  $\mathbf{t}, \mathbf{k}_{g, \alpha, Q}$ , la función  $s'(t) \equiv \sqrt{Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}$  es suave y se cumple (31) que, junto con la segunda propiedad enunciada en el apartado 7.5, nos da:

$$\begin{aligned} 2Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha''(t)_Q) &\equiv 2Q_{\alpha(t)}(s'(t)\mathbf{t}_{\alpha(t)}, s''(t)\mathbf{t}_{\alpha(t)} + s'(t)^2\mathbf{k}_{g, \alpha, Q}(t)) \equiv \\ &\equiv 2s'(t)s''(t) \equiv \frac{d}{dt} s'(t)^2, \end{aligned}$$

que es la identidad (34). Por otra parte la función  $h(t) \equiv Q_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$  es suave en todo el intervalo  $J$  y nunca negativa, luego tiene un *mínimo* en cada  $t_0 \in J$  con  $\alpha'(t_0) = \mathbf{0}$ . Así, pues, en los valores no regulares  $t_0$  tenemos  $h'(t_0) = 0$  y ahí la igualdad (34) se reduce a  $0 = 0$ .  $\square$

*Demostración del teorema 109.* Es evidente que todo camino constante satisface (33), luego basta demostrar que  $\alpha(t)$  es un camino geodésico no constante si y sólo si recorre una geodésica con rapidez Riemanniana constante positiva.

Si  $\alpha(t) : J \rightarrow S$  es un camino geodésico no constante, entonces (34) nos dice que la rapidez  $\|\alpha'(t)\|_Q$  es una constante positiva  $c$ , el camino es regular y se anula idénticamente el vector  $\alpha''(t)_Q/c^2$ , cuya componente conormal es  $\mathbf{k}_{g,\alpha,Q}$ . Luego  $\alpha(t)$  recorre una geodésica con rapidez Riemanniana constante. Supongamos ahora que  $\alpha(t)$  recorre una geodésica con rapidez Riemanniana constante  $c > 0$ . Este camino es regular y su curvatura geodésica está definida y es nula. Entonces calculamos:

$$\alpha''(t)_Q \equiv s''(t)\mathbf{t}_\alpha + s'(t)^2\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv \frac{dc}{dt}\mathbf{t}_\alpha + s'(t)^2\mathbf{0} \equiv \mathbf{0},$$

y  $\alpha(t)$  es un camino geodésico para  $Q$ . □

Veamos cuál es la relación entre  $\alpha_0''(t)_Q \equiv b_1\Phi_u + b_2\Phi_v$  y el vector numérico  $(u''(t), v''(t))$ . Desarrollando  $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$  por la regla de la cadena, vemos que  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  es igual a:

$$[Q]^{-1} \left( [Q] \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_u u'^2 + A_v v' u' + B_u u' v' + B_v v'^2 - \frac{1}{2} A_u u'^2 - B_u u' v' - \frac{1}{2} C_u v'^2 \\ B_u u'^2 + B_v v' u' + C_u u' v' + C_v v'^2 - \frac{1}{2} A_v u'^2 - B_v u' v' - \frac{1}{2} C_v v'^2 \end{bmatrix} \right).$$

Simplificando esa expresión, deducimos que la ecuación (33) es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A_u u'^2 + A_v u' v' + (B_v - \frac{1}{2} C_u) v'^2 \\ (B_u - \frac{1}{2} A_v) u'^2 + C_u u' v' + \frac{1}{2} C_v v'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

## 8.2 Propiedades básicas

La primera propiedad que vamos a señalar es que si  $\alpha(t)$  es un camino geodésico y  $c_0, c_1$  son constantes cualesquiera entonces  $\beta(\bar{t}) \equiv \alpha(c_0 + c_1 \bar{t})$  también es un camino geodésico. Esto es trivial cuando  $c_1 = 0$  ó  $\alpha$  es constante. Si  $c_1 \neq 0$  y  $\alpha$  no es constante, entonces  $\beta(\bar{t})$  es una reparametrización de  $\alpha(t)$  y es línea geodésica. Además  $\|\beta'\|_Q \equiv |c_1| \cdot \|\alpha'\|_Q$  es una constante positiva, luego  $\beta$  es camino geodésico.

Segunda propiedad: una isometría local  $h : (S, Q) \rightarrow (S', Q')$  lleva líneas geodésicas para  $Q$  a líneas geodésicas para  $Q'$  conservando la rapidez Riemanniana, luego lleva caminos geodésicos para  $Q$  a caminos geodésicos para  $Q'$ .

**Ejemplo: las esferas.** Es fácil comprobar que el ecuador es una geodésica de la esfera de un radio fijado (con la primera forma fundamental como métrica). Las rotaciones de  $\mathbb{R}^3$  alrededor del origen inducen isometrías de la esfera consigo misma y llevan el ecuador a las *circunferencias máximas*. Luego toda circunferencia máxima es una geodésica de la esfera.

Tercero. Las ecuaciones (35) dan las derivadas  $u'', v''$  como funciones explícitas suaves de  $u, v, u', v'$ , es decir que son dos EDOs suaves de segundo orden. La teoría de EDOs nos dice:

Si la métrica  $Q$  es suave, sus caminos geodésicos son suaves.

Tenemos ahora el concepto de **geodésica maximal**, dada por una solución  $\alpha(t) : J \rightarrow S$  de (33) no prolongable a soluciones en intervalos que contengan estrictamente a  $J$ . Dados un punto  $\mathbf{p}_0 \in S$ , una velocidad  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}_0} S$  y un valor  $t_0$ , existe un único camino geodésico maximal  $\alpha(t)$  para  $Q$  con **datos iniciales**  $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$ . El valor general  $\alpha(t)$  de dicho camino depende suavemente de la cuaterna  $(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t_0, t)$ .

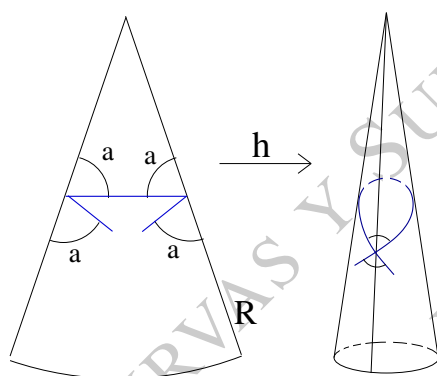
*Atención:* hay muchas más geodésicas que líneas de curvatura o asintóticas. Por cada punto  $\mathbf{p}$  de la superficie pasan infinitas geodésicas distintas (una por cada dirección tangente en  $\mathbf{p}$ ), mientras que a lo sumo pasan dos líneas de curvatura y dos asintóticas.

Cuarto: si dos geodésicas maximales son tangentes en un punto entonces son reparametrización la una de la otra y, en particular, tienen la misma imagen. Supongamos que  $\alpha(t), \beta(\bar{t})$  son caminos geodésicos maximales cumpliendo  $\alpha(t_0) = \beta(\bar{t}_0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha'(t_0) = c \cdot \beta'(\bar{t}_0) = \mathbf{v}$  para unos valores  $t_0, \bar{t}_0$  y  $c \neq 0$ . Es fácil dar una reparametrización  $\gamma(t) \equiv \beta(c_0 + c_1 t)$  que cumpla  $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$  y  $\gamma'(t_0) = \mathbf{v}$ , lo que fuerza  $\alpha(t) \equiv \gamma(t)$ . Luego  $\alpha$  es una reparametrización de  $\beta$  y  $\beta$  lo es de  $\alpha$ .

**Ejemplo: geodésicas de la esfera.** Hemos visto que las circunferencias máximas son geodésicas de la esfera (con la primera forma fundamental como métrica). Como tales circunferencias realizan todas las parejas (punto, dirección tangente), toda geodésica maximal de la esfera es tangente a una de estas circunferencias y tiene que coincidir con ella. Luego toda geodésica de la esfera está contenida en una circunferencia máxima.

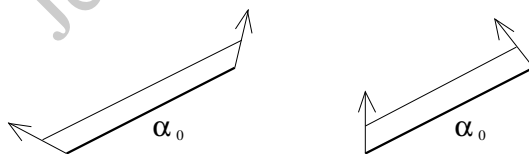
Quinto: continuación de una geodésica por otra. Sean  $\alpha(t) : (a, t_0] \rightarrow S$  y  $\beta(t) : [t_0, b) \rightarrow S$  dos caminos geodésicos (admitimos aquí las posibilidades  $a = -\infty$  o  $b = \infty$ ) con  $\alpha(t_0) = \mathbf{p} = \beta(t_0)$  y  $\alpha'(t_0) = \mathbf{v} = \beta'(t_0)$ . Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son partes de una sola geodésica maximal, por lo tanto  $\alpha \cup \beta : (a, b) \rightarrow S$  es un camino geodésico y es suave incluso en  $t = t_0$ .

Veamos un ejemplo de esta construcción. Sea  $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow C$  isometría local del plano menos el origen a un cono circular agudo  $C$  y sea  $R \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  una región angular tal que la imagen  $h(R)$  da exactamente una vuelta a  $C$ :  $h$  es inyectiva en el interior de  $R$  y las imágenes por  $h$  de los dos lados de  $R$  coinciden con una generatriz de  $C$ . Tomamos tres segmentos de recta en  $R$  con la disposición indicada por la siguiente figura, en la cual los cuatro ángulos que se indican por “a” miden lo mismo. Las imágenes por  $h$  de esos tres segmentos “empalman bien” y producen una geodésica del cono que se cruza a sí misma.



### 8.3 Lema de Gauss y coordenadas de Fermi

La siguiente figura muestra dos deformaciones de un segmento de recta  $\alpha_0(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , geodésica en el plano Euclídeo. Al aplicar la fórmula (30) del apartado 7.6 el término integral vale cero, porque  $\alpha_0$  tiene curvatura geodésica idénticamente nula. La derivada de la longitud es, pues, igual al término de evaluación  $\sum_{t \in \{a,b\}} \mathbf{t}_{\text{ext}, \alpha_0} \cdot \mathbf{V}(t)$  en ambas deformaciones.



En la figura de la izquierda el par  $\mathbf{V}(a), \mathbf{V}(b)$  muestra una disposición *divergente*, lo que hace positivo el término de evaluación, y el segmento se alarga. En la figura de la derecha la disposición de  $\mathbf{V}(a), \mathbf{V}(b)$  es *convergente*, el término de evaluación es negativo y el segmento se acorta.

Para una superficie con métrica  $(S, Q)$ , es fácil convencerse de lo siguiente:

Si deformamos un segmento de geodésica  $\alpha_0(t)$  sin cambiar la  $Q$ -longitud, y además la velocidad de deformación  $\mathbf{V}(t)$  es  $Q$ -ortogonal a  $\alpha_0$  en un extremo, entonces  $\mathbf{V}(t)$  también tiene que ser  $Q$ -ortogonal a  $\alpha_0$  en el otro extremo.

**Teorema 111. (Lema de Gauss)** Sea  $\Phi(u, v) : J \times J' \rightarrow S$  una parametrización (no necesariamente regular) en la que cada camino  $u \mapsto \Phi(u, \text{cte})$  es una geodésica *unitaria* para  $Q$ . Si hay un valor  $u_0 \in J$  tal que  $Q(\Phi_u, \Phi_v)|_{u=u_0} \equiv 0$ , entonces se tiene  $Q(\Phi_u, \Phi_v) \equiv 0$  en todo  $J \times J'$ .

**Demostración.** Sea  $u_1 \in J$  un valor distinto de  $u_0$ , por ejemplo  $u_1 > u_0$ .

Para cada  $v_0 \in J'$  definimos el camino  $\alpha_{v_0}(u) \equiv \Phi(u, v_0)$ ,  $u \in [u_0, u_1]$  y consideramos la restricción  $\Phi(u, v) : [u_0, u_1] \times J' \rightarrow S$  como una deformación de  $\alpha_{v_0}$ . Esta es una deformación hecha toda ella de geodésicas unitarias, y todas con la misma longitud  $u_1 - u_0$ , luego tiene variación de  $Q$ -longitud igual a cero. Además su velocidad de deformación es  $\Phi_v(u, v_0)$ , que por hipótesis es  $Q$ -ortogonal a  $\alpha'_{v_0}(u) \equiv \Phi_u(u, v_0)$  en el extremo  $u = u_0$ ; luego tiene que darse la misma  $Q$ -ortogonalidad en el extremo  $u = u_1$ . Al ser esto cierto para todas las geodésicas  $\alpha_{v_0}$ , deducimos que  $Q(\Phi_u, \Phi_v)|_{u=u_1} \equiv 0$ . Este razonamiento vale para todo  $u_1 > u_0$ . Análogamente se hace para  $u_1 < u_0$ .  $\square$

Si  $\Phi(u, v)$  está en las hipótesis del teorema 111, y si  $U \subseteq J \times J'$  es un dominio en el que  $\Phi$  es regular y bicontinua, entonces las coordenadas  $(u, v)$  que así quedan definidas en el trozo de superficie  $V = \Phi(U)$  dan la siguiente expresión para la métrica:  $Q|_V \equiv (du)^2 + C(u, v)(dv)^2$ , es decir que  $(u, v)$  son **coordenadas de Fermi** para  $Q$  en  $V$ . La función  $h \equiv \sqrt{C}$  es suave y permite escribir la siguiente identidad en  $V$ :

$$Q \equiv (du)^2 + h^2(dv)^2. \quad (36)$$

Recíprocamente, unas coordenadas de Fermi nos dan una familia de geodésicas unitarias. En efecto, si la métrica está dada por (36) se comprueba de inmediato que los caminos  $u \mapsto \Phi(u, \text{cte})$  satisfacen las ecuaciones (33) y tienen rapidez Riemanniana igual a 1.

Veamos dos construcciones de coordenadas de Fermi basadas en el lema de Gauss.

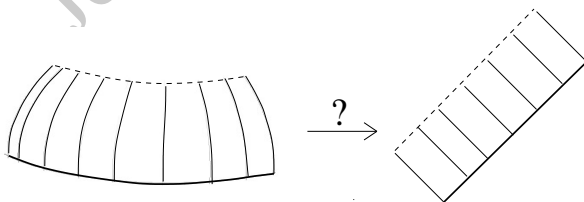
**Primera construcción: cepillos.** Dadas una métrica  $Q$  y una curva regular  $\beta(v)$  en  $S$ , un *cepillo de nervio*  $\beta$  está formado por segmentos de geodésica  $Q$ -unitaria (las “cerdas” del cepillo”) que cortan  $Q$ -ortogonalmente a  $\beta$ . Lo llamamos *cepillo geodésico* si su nervio también es una geodésica, pero la construcción vale para cualquier curva regular  $\beta$ .

Para construir el cepillo tomamos  $\eta(v)$ , conormal  $Q$ -unitaria a  $\beta(v)$ , y para cada valor  $v$  definimos el camino  $\gamma_v(u)$  como la única geodésica unitaria para  $Q$  con los datos iniciales:

$$\gamma_v(0) = \beta(v) \quad , \quad \gamma'_v(0) = \eta(v) .$$

La aplicación  $\Phi(u, v) \equiv \gamma_v(u)$  es suave y, por el lema de Gauss, satisface  $Q(\Phi_u, \Phi_v) \equiv 0$ . También satisface, por construcción, la identidad  $Q(\Phi_u) \equiv 1$ . En los valores  $(u, v) = (0, v)$  los vectores  $\Phi_u, \Phi_v$  son no nulos y ortogonales, luego linealmente independientes y  $\Phi$  es regular en esos valores. Por lo tanto si  $U \subset \mathbb{R}_{uv}^2$  es un entorno pequeño de  $(0, v_0)$  la restricción  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$  es biyectiva con inversa suave. En el trocito de superficie  $V = \Phi(U)$ , que rodea a  $\mathbf{p} = \Phi(0, v_0)$ , tenemos las coordenadas  $(u, v)$  que son de Fermi para  $Q$ . Esta construcción permite tener coordenadas de Fermi alrededor de cualquier punto  $\mathbf{p} \in S$ .

*Segunda demostración del teorema 61 del apartado 4.8.* La siguiente figura muestra un arco de ecuador (trazo grueso) en la esfera unidad junto con segmentos de meridiano ortogonales al ecuador, formando así “medio cepillo” en la esfera,



si existiera una isometría de ese trocito de esfera al plano Euclídeo, llevaría esta configuración a medio cepillo geodésico en el plano. El arco de trazo grueso iría al segmento de trazo grueso y el arco de trazo discontinuo al segmento de trazo discontinuo. La isometría no existe porque los segmentos mencionados tienen igual longitud, mientras que los arcos en la esfera no.  $\square$

**Segunda construcción: coordenadas polares geodésicas.** Fijamos un punto  $\mathbf{p} \in S$  y una base  $Q$ -ortonormal  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $T_{\mathbf{p}}S$ . Antes de las polares, vamos a definir unas coordenadas especiales  $(u, v)$  alrededor de  $\mathbf{p}$ . Para cada vector  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  denotamos por  $\gamma_v(t)$ ,  $t \geq 0$ , el camino geodésico con datos iniciales  $\gamma_v(0) = \mathbf{p}$ ,  $\gamma'_v(0) = \mathbf{v}$  y consideramos la aplicación:

$$\phi(u, v) \equiv \gamma_{u\mathbf{u}_1 + v\mathbf{u}_2}(t)|_{t=1} ,$$

que es suave y va de un entorno de  $(0,0)$  en  $\mathbb{R}_{uv}^2$  a  $S$ . La primera propiedad enunciada en el apartado 8.2 implica la identidad  $\gamma_v(t) \equiv \gamma_v(ct)$ , en la que hacemos  $t = 1$ ,  $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$  y derivamos respecto de  $c$ :

$$\left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \phi(ca, cb) = \left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \gamma_v(1) = \left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \gamma_v(c \cdot 1) = \gamma'_v(0) = \mathbf{v},$$

en particular  $\phi_u(0,0) = \mathbf{u}_1$  y  $\phi_v(0,0) = \mathbf{u}_2$ . Vemos que  $\phi$  es regular en  $(u,v) = (0,0)$  y convierte a  $(u,v)$  en una buenas coordenadas en un trocito de superficie  $V \subset S$  rodeando a  $\phi(0,0) = \mathbf{p}$ . Podemos tomar  $V$  definido por  $\{u^2 + v^2 < r_0^2\}$  para un  $r_0 > 0$  suficientemente pequeño.

Tenemos la aplicación suave  $\psi(r, \theta) \equiv \phi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $-r_0 < r < r_0$ , que cumple  $\psi_\theta|_{r=0} \equiv \mathbf{0}$ , luego  $Q(\psi_r, \psi_\theta)|_{r=0} \equiv 0$  y, por el lema de Gauss, se tiene  $Q(\psi_r, \psi_\theta) \equiv 0$ . La restricción de  $\psi$  a  $0 < r < r_0$  convierte a  $(r, \theta)$  en unas buenas coordenadas polares en  $V \setminus \{\mathbf{p}\}$  (imprescindible tomar  $r > 0$  y quitar el punto  $\mathbf{p}$ ). Los “radios”  $\{\theta = \text{cte}\}$  en  $V$  son las geodésicas de  $Q$ -longitud igual a  $r_0$  que emanan de  $\mathbf{p}$ . Finalmente:

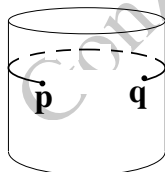
$$Q|_{V \setminus \{\mathbf{p}\}} \equiv (dr)^2 + C(d\theta)^2, \quad (37)$$

con  $C : V \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \mathbb{R}$  función escalar suave y positiva.

## 8.4 Resultados globales 5: longitud mínima

**Definición 112.** Sean  $(S, Q)$  una superficie con métrica y  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$  un par de puntos. Un camino  $\alpha(t) : [t_0, t_1] \rightarrow S$  que cumpla  $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha(t_1) = \mathbf{q}$  es **minimizante** si realiza la  $Q$ -longitud mínima entre todos los caminos en  $S$  que empiezan en  $\mathbf{p}$  y terminan en  $\mathbf{q}$ . Diremos que  $\alpha$  es **minimizante único** si los caminos de  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  en  $S$  que realizan ese mínimo son solamente las composiciones de  $\alpha$  con funciones monótonas suprayectivas  $J \rightarrow [t_0, t_1]$ , es decir los caminos que recorren monótonamente la imagen  $\alpha([t_0, t_1])$ .

Los comentarios al final del apartado 7.3 implican que una curva minimizante, que sea regular y al menos de clase  $\mathcal{C}^2$ , satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional longitud $_Q$ , es decir que tiene que ser una geodésica. El recíproco es falso: un tramo de geodésica puede no ser minimizante; un ejemplo obvio es la “geodésica que se cruza a sí misma” vista al final del apartado 8.2; otro ejemplo lo proporciona un arco de circunferencia que dé más de media vuelta en un cilindro de revolución.

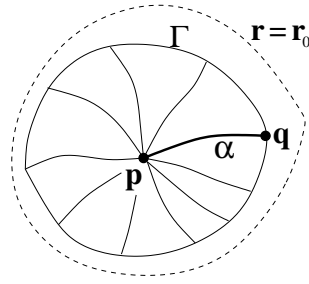


Los métodos del apartado 7.3 no sirven con caminos no regulares o de clase peor que  $\mathcal{C}^2$ : no nos permiten saber si un camino minimizante así de malo está obligado o no a recorrer una geodésica.

El siguiente teorema nos dice que *tramos cortos* de una geodésica son minimizantes únicos, no sólo entre caminos suaves sino también entre caminos poco regulares, e implica que todo camino minimizante tiene que recorrer una geodésica aunque sea muy poco regular. El significado de “tramo corto” lo precisamos en términos de las construcciones del apartado 8.3.

**Teorema 113.** Sea  $\alpha(t)$  una geodésica unitaria para la métrica  $Q$ . Supongamos que centradas en el punto  $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$  hay unas coordenadas polares geodésicas  $(r, \theta)$  con  $0 < r < r_0$ . Entonces para cada  $\ell < r_0$  el tramo  $\alpha(t) : [t_0, t_0 + \ell] \rightarrow S$  es minimizante único entre todos los caminos en  $S$  que, siendo al menos de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, empiezan en  $\mathbf{p}$  y terminan en  $\mathbf{q} = \alpha(t_0 + \ell)$ .

**Demostración.** Sea  $V_0 \subset S$  el trocito de superficie rodeando a  $\mathbf{p}$  y tal que en  $V_0 \setminus \{\mathbf{p}\}$  hay unas buenas coordenadas polares geodésicas  $(r, \theta)$  dadas por  $\psi(r, \theta)$  con  $0 < r < r_0$ . Tomamos la curva  $\Gamma = \{r = \ell\}$ , que es cerrada y rodea al punto  $\mathbf{p}$ , y el trocito de superficie  $V = \{r \leq \ell\} \subset V_0$  que está limitado por  $\Gamma$ . El tramo  $\alpha(t)|_{[t_0, t_0 + \ell]}$  recorre un “radio”  $\{\theta = \theta_0\} \cap V$ .



**Enunciado auxiliar:** todo camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos en  $V$ , que empiece en  $\mathbf{p}$  y termine en algún punto de la curva  $\Gamma$ , tiene longitud $_Q > \ell$  excepto si recorre algún radio  $\{\theta = \theta_1\} \cap V$  monótonamente (en cuyo caso tiene longitud $_Q = \ell$ ).

A partir de este enunciado se prueba el teorema por el siguiente argumento. Sea  $\beta(t) : J \rightarrow S$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos que empieza en  $\mathbf{p}$  y termina en  $\mathbf{q}$ . Estamos demostrando un teorema de naturaleza global y nos vamos a basar en otro resultado global “más elemental”, cuya prueba omitiremos:

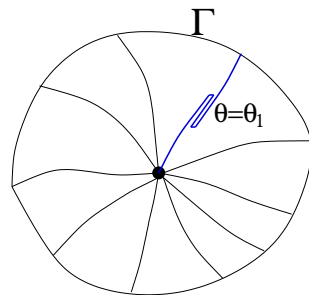
Un camino en  $S$  que empiece en  $\mathbf{p}$  y llegue a visitar  $S \setminus V$  tiene necesariamente un tramo inicial contenido en  $V$  y uniendo  $\mathbf{p}$  con un punto de  $\Gamma$ .

No suponemos que  $\beta$  esté contenido en  $V$ . La longitud del tramo inicial, contenido en  $V$  y uniendo  $\mathbf{p}$  con algún punto de  $\Gamma$ , es al menos  $\ell$ . Si  $\beta$  llega a salir de  $V$  tendrá  $Q$ -longitud mayor que  $\ell$  porque hay que añadir la del tramo exterior a  $V$ . Si  $\beta$  se queda dentro de  $V$  todo el tiempo, el enunciado auxiliar nos dice que su  $Q$ -longitud es al menos  $\ell$ , con igualdad sólo si recorre un radio monótonamente. Como  $\beta$  termina en  $\mathbf{q}$ , el único radio que puede recorrer es la imagen de  $\alpha$  y así quedaría probado que  $\alpha$  es minimizante único.

Falta probar el enunciado auxiliar. Así, pues, sea  $\gamma(t) : J \rightarrow V$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos que une  $\mathbf{p}$  con un punto  $\mathbf{p}' \in \Gamma$ . Hay un tramo  $\gamma(t)|_{[a,b]}$  con  $\gamma(a) = \mathbf{p}$ ,  $\gamma((a,b]) \subset V \setminus \{\mathbf{p}\}$  y  $\gamma(b) \in \Gamma$ . Como  $(r, \theta)$  son buenas coordenadas polares en  $V \setminus \{\mathbf{p}\}$ , hay funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos  $r(t), \theta(t) : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\gamma(t) \equiv \psi(r(t), \theta(t))$  para  $t \in (a, b]$  y, aplicando la fórmula (37):

$$\text{longitud}_Q[\gamma|_{(a,b)}] = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + C \cdot \theta'(t)^2} dt \stackrel{[1]}{\geq} \int_a^b |r'(t)| dt \stackrel{[2]}{\geq} r(b) - \lim_{t \searrow a} r(t) = \ell.$$

La primera desigualdad [1] es estricta a menos que  $\theta(t)$  sea una constante  $\theta_1$ , en cuyo caso el tramo  $\gamma(t)|_{[a,b]}$  recorre el radio  $\{\theta = \theta_1\} \cap V$ ; pero aún puede ser estricta la segunda desigualdad [2] si  $\gamma|_{[a,b]}$  tiene retrocesos, pues entonces habrá tramos del radio  $\{\theta = \theta_1\} \cap V$  que son recorridos al menos tres veces por el camino  $\gamma(t)$  (de ida, de vuelta y otra vez de ida).



En definitiva, para que haya igualdad en [1] y en [2] es necesario que el tramo  $\gamma(t)|_{[a,b]}$  recorra un radio monótonamente. Otros tramos de  $\gamma$ , si los hay, tienen que tener longitud $_Q = 0$  y por lo tanto ser constantes: puede ser  $\gamma \equiv \mathbf{p}$  un rato al principio y  $\gamma \equiv \mathbf{p}'$  otro rato al final. Luego la curva total  $\gamma$  recorre el radio  $\{\theta = \theta_1\} \cap V$  monótonamente. Esto demuestra el enunciado auxiliar y completa la prueba del teorema.  $\square$

Al ser toda geodésica minimizante en trozos pequeños, pero no siempre en tramos largos, deducimos:

Ser minimizante no es una propiedad local: no basta con comprobarla en tramos cortos.

## 8.5 Conservación del momento

**Teorema 114.** Supongamos que, para una cierta parametrización  $\Phi(u, v)$ , los coeficientes de la métrica son independientes del parámetro  $v$ :

$$Q \equiv A(u)(du)^2 + 2B(u)dudv + C(u)(dv)^2,$$

entonces  $Q_{\alpha(t)}(\Phi_v, \alpha'(t))$  es constante a lo largo de todo camino geodésico  $\alpha(t)$ .

**Advertencia.** No toda métrica de Riemann admite coordenadas curvilíneas en las que quede así de sencilla, véase el comentario en el apartado 9.6.

**Demostración del teorema 114.** En el sistema (33), que caracteriza los caminos geodésicos, tenemos  $Q_v \equiv 0$  con lo cual la segunda ecuación queda:

$$\frac{d}{dt}(Bu'(t) + Cv'(t)) = 0,$$

pero  $Bu'(t) + Cv'(t) \equiv Q_{\alpha(t)}(\Phi_v, u'\Phi_u + v'\Phi_v) \equiv Q_{\alpha(t)}(\Phi_v, \alpha'(t))$ .  $\square$

**Definición 115.** Si la métrica es como en el teorema 114, El **momento** de una geodésica orientada  $\Gamma$  es la constante  $m = Q_{\alpha(s)}(\Phi_v, \alpha'(s))$  siendo  $\alpha(s)$  una parametrización de  $\Gamma$  por longitud de arco Riemanniano y que recorra la geodésica en el sentido de la orientación.

Si cambiamos la orientación de la geodésica el momento se multiplica por  $-1$ . El cuadrado  $m^2$  del momento es el mismo para las dos orientaciones y puede calcularse a partir de *cualquier* parametrización regular  $\beta(t)$  de la geodésica mediante la siguiente fórmula:

$$m^2 = \frac{Q_{\beta(t)}(\Phi_v, \beta'(t))^2}{Q_{\beta(t)}(\beta'(t))}. \quad (38)$$

En efecto, si  $s(t)$  es una longitud Riemanniana de arco y  $\gamma(s)$  es la parametrización tal que  $\beta(t) \equiv \gamma(s(t))$  entonces  $\gamma(s)$  es una geodésica unitaria y se tiene:

$$\frac{Q_{\beta(t)}(\Phi_v, \beta'(t))^2}{Q_{\beta(t)}(\beta'(t))} = \frac{Q_{\gamma(s)}(\Phi_v, s'(t)\gamma'(s))^2}{Q_{\gamma(s)}(s'(t)\gamma'(s))} \Big|_{s=s(t)} = \frac{s'(t)^2 \cdot Q_{\gamma(s)}(\Phi_v, \gamma'(s))^2}{s'(t)^2 \cdot Q_{\gamma(s)}(\gamma'(s))} = \frac{s'(t)^2}{s'(t)^2} \cdot \frac{m^2}{1}.$$

**Observa** la importancia del exponente 2 en el numerador de (38), para que aparezca el mismo factor  $s'(t)^2$  en ambos términos de la fracción.

Veamos un ejemplo completo de cómo (38) ayuda a calcular las líneas geodésicas. Hallemos las geodésicas del plano hiperbólico, representado por el modelo del **semiplano superior**:

$$S = \{(x, y) : y > 0\} \subset \mathbb{R}_{xy}^2, \quad Q \equiv \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Utilizaremos la parametrización obvia  $\Phi(x, y) \equiv (x, y)$  y así  $\{\Phi_x, \Phi_y\}$  coincide con la base canónica  $\{e_1, e_2\}$ . Los coeficientes de la métrica son independientes de  $x$ , luego el momento de cada geodésica es  $m \equiv Q(\mathbf{t}, \Phi_x) \equiv x'(s)/y^2$ , siendo  $s$  una longitud Riemanniana de arco.

Las coordenadas  $(u, x)$ , dadas por  $y = e^u$ , son de Fermi porque  $Q \equiv (du)^2 + e^{-2u}(dx)^2$ . Entonces, según hemos comentado en el apartado 8.3, las semirrectas verticales  $\{x = \text{cte}\}$  son geodésicas y  $u = \log y$  es una longitud Riemanniana de arco para ellas. Éstas contienen a cualquier geodésica de momento nulo, porque  $0 = x'(s)/y^2$  implica  $x(s) \equiv \text{cte}$ . Se sigue que las semirrectas verticales son las geodésicas maximales de momento nulo.

Buscamos las geodésicas de momento no nulo descritas por  $x \mapsto \Phi(x, y(x))$ , parametrizaciones en las que  $y$  es puesta como función suave de  $x$ . Estas parametrizaciones tienen  $m > 0$ ; les aplicamos la fórmula (38) y obtenemos:

$$m^2 = \frac{(1/y^2)^2}{(1 + y'(x)^2)/y^2} = \frac{1}{y^2 + y^2 y'(x)^2}.$$

Despejamos la derivada y procuramos que multiplique a todo lo que dependa de la función incógnita  $y(x)$ :

$$y'(x)^2 = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1 - m^2 y^2}{m^2 y^2} \quad , \quad \pm \frac{m y y'(x)}{\sqrt{1 - m^2 y^2}} = 1 .$$

Integrando respecto de  $x$  aparece una **constante de integración**  $x_0$ :

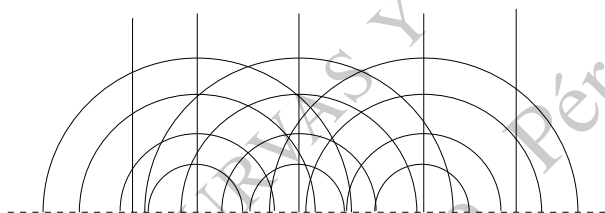
$$\pm \frac{1}{m} \sqrt{1 - m^2 y^2} = x - x_0 .$$

Elevamos al cuadrado para eliminar la ambigüedad de signo:  $\frac{1}{m^2} - y^2 = (x - x_0)^2$  y resulta que cada geodésica de momento no nulo  $m$  está contenida en una *semicircunferencia*:

$$\Gamma_{m,x_0} = \left\{ (x,y) : y > 0 , (x - x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{m^2} \right\} ,$$

cuyo radio es  $1/m$  y cuyo centro  $(x_0, 0)$  está sobre el eje  $\{y = 0\}$ . Cada una de estas *semicircunferencias* es una geodésica maximal de momento no nulo: primero, contiene a cualquier geodésica del mismo momento que la toque; segundo, es tangente en cada punto a alguna geodésica del mismo momento, a la cual contiene, luego es toda ella geodésica.

La siguiente figura muestra unas cuantas geodésicas maximales del plano hiperbólico, con diversos momentos.



Al ir variando el valor del parámetro  $x_0$  todo el dibujo se traslada “horizontalmente” (en la dirección del eje  $x$ ). Por eso es tan importante tener en cuenta la constante de integración  $x_0$ : si la hubiéramos olvidado, habríamos ignorado la mayoría de las geodésicas.

Es inmediato comprobar que el modelo  $(\mathbb{R}_{uv}^2, (du)^2 + \cosh^2 u (dv)^2)$ , que dimos para el plano hiperbólico en el apartado 4.9, es globalmente isométrico al modelo del semiplano superior mediante la siguiente aplicación:

$$(u, v) \mapsto (x, y) = \left( \frac{e^v \sinh u}{\cosh u}, \frac{e^v}{\cosh u} \right) .$$

El **disco de Poincaré** es otro modelo muy útil del plano hiperbólico (atención al factor 4 y al cuadrado fuera del paréntesis en el denominador):

$$\left( \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} , \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2} \right) ,$$

es decir, si escribimos  $z = x_1 + i x_2$  entonces la métrica es  $4((dx_1)^2 + (dx_2)^2)/(1 - x_1^2 - x_2^2)^2$ . La isometría global *semiplano*  $\rightarrow$  *disco* es la restricción al semiplano de la función  $h$  que describimos utilizando la coordenada compleja  $w = x + i y$ :

$$w \xrightarrow{h} z = \frac{w - i}{w + i} \quad , \quad z \xrightarrow{h^{-1}} w = \frac{i z + i}{1 - z} .$$

Esta  $h$  define una biyección  $\mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . La frontera  $\{y = 0\}$  del semiplano se describe en la coordenada  $w$  como  $\{\text{Im}(w) = 0\}$ , o sea la recta real, y la restricción de  $h$  a dicha recta es:

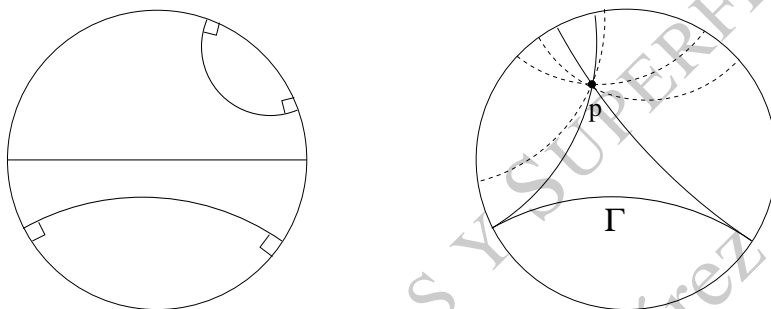
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto z = \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} + i \frac{-2t}{1 + t^2} ,$$



una **parametrización estereográfica** de la circunferencia unidad salvo  $(1,0)$ , punto correspondiente a  $z = 1$ . Por lo tanto  $h$  lleva el complemento de la recta real (los semiplanos superior e inferior) al complemento de la circunferencia unidad (interior y exterior). Pero  $h$  lleva el punto  $w = i$  al punto central del disco  $z = 0$ ; luego  $h$  lleva el semiplano superior al interior  $\{|z| < 1\}$  y lleva el semiplano inferior (menos el punto  $w = -i$ , en el cual no está definida) al exterior  $\{|z| > 1\}$  de la circunferencia unidad.

Es fácil comprobar (haz tú los cálculos) que  $h$  es isometría local entre las métricas descritas, que conserva los ángulos Euclídeos en todo su dominio (necesitarás el teorema 71 del apartado 4.10) y que lleva circunferencias o rectas a circunferencias o rectas. Se deduce que las geodésicas del semiplano superior, que son partes de rectas o circunferencias cortando al eje real en ángulo Euclídeo recto, son llevadas por  $h$  a partes de rectas o circunferencias que cortan a  $\{|z| = 1\}$  en ángulo Euclídeo recto.

Como una isometría lleva geodésicas a geodésicas, las geodésicas maximales del disco de Poincaré son: (1) los diámetros del disco y (2) arcos circulares que terminan en la frontera  $\{|z| = 1\}$  haciendo ángulo Euclídeo recto con ella. Son infinitamente largas en la métrica de Poincaré y no incluyen los puntos de frontera, que de hecho no pertenecen al disco. La figura de la izquierda muestra tres de ellas.



La figura de la derecha muestra el **axioma de Lobachevski**: en el plano hiperbólico, por un punto  $p$  exterior a una geodésica  $\Gamma$  pasan dos *paralelas* a  $\Gamma$ : geodésicas una de cuyas mitades se mantiene a distancia finita de  $\Gamma$ . Se muestran también, en línea de puntos, tres *ultraparalelas*: geodésicas disjuntas de  $\Gamma$  y que se alejan infinitamente de ella por los dos extremos.

## 8.6 Curvatura geodésica escalar

**Definición 116.** Sea  $\alpha(t)$  una curva regular en  $(S, Q)$ . Elegida una conormal unitaria  $\eta(t)$  para  $\alpha$  respecto de  $Q$ , la **curvatura geodésica escalar de  $\alpha$  respecto de  $Q$**  es la única función escalar  $k_{g, \alpha, Q}(t)$  tal que:

$$\mathbf{k}_{g, \alpha, Q}(t) \equiv k_{g, \alpha, Q}(t) \eta(t).$$

Podemos determinarla por  $k_{g, \alpha, Q}(t) = Q_{\alpha(t)}(\eta(t), \mathbf{k}_{g, \alpha, Q}(t))$ . Cuando no haya lugar a dudas, la denotamos simplemente  $k_g$ .

La curvatura geodésica escalar depende de la elección que se haga para la conormal unitaria. Si multiplicamos la conormal por  $-1$ , la curvatura escalar se multiplica también por  $-1$ .

Sea  $\Phi(u, v)$  una parametrización de  $S$  que es *ortogonal* para  $Q$ , es decir:

$$Q \equiv A(du)^2 + C(dv)^2 \equiv h_1^2(du)^2 + h_2^2(dv)^2,$$

donde hemos puesto  $h_1 = \sqrt{A}$  y  $h_2 = \sqrt{C}$ . Los campos de vectores  $\frac{1}{h_1} \Phi_u, \frac{1}{h_2} \Phi_v$  forman, en cada punto  $p \in S$ , una base  $Q$ -ortonormal de  $T_p S$ . Por lo tanto, para cada parametrización por arco Riemanniano  $\alpha(s) \equiv \Phi(u(s), v(s))$  existe una función  $\varphi(s)$  tal que:

$$\alpha'(s) \equiv \cos \varphi(s) \frac{1}{h_1} \Phi_u + \sin \varphi(s) \frac{1}{h_2} \Phi_v, \quad (39)$$

y tenemos la siguiente elección para una conormal unitaria de  $\alpha$ :

$$\eta(s) \equiv -\sin \varphi(s) \frac{1}{h_1} \Phi_u + \cos \varphi(s) \frac{1}{h_2} \Phi_v. \quad (40)$$

Además (39) es equivalente a:

$$u'(s) \equiv \frac{\cos \varphi(s)}{h_1}, \quad v'(s) \equiv \frac{\sin \varphi(s)}{h_2}. \quad (41)$$

La fórmula (40), junto con las (29) del apartado 7.6, proporciona la siguiente expresión para  $Q_{\alpha(s)}(\eta(s), \mathbf{k}_g(s))$  como un producto fila por columna:

$$\left[ \begin{array}{cc} -\frac{\sin \varphi}{h_1} & \frac{\cos \varphi(s)}{h_2} \end{array} \right] \left( \frac{d}{ds} \left( \left[ \begin{array}{cc} h_1^2 & \\ & h_2^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u'(s) \\ v'(s) \end{array} \right] \right) - \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} Q_u(\alpha'(s)) \\ Q_v(\alpha'(s)) \end{array} \right] \right).$$

Con esto y (41), un cálculo largo pero fácil da el siguiente resultado para la elección (40) de  $\eta$ :

$$k_g \equiv \varphi'(s) + \frac{h_{2u}}{h_1} v'(s) - \frac{h_{1v}}{h_2} u'(s). \quad (42)$$

Si  $(u, v)$  son coordenadas de Fermi, en las que  $Q \equiv (du)^2 + h^2 (dv)^2$ , nos queda la fórmula:

$$k_g \equiv \varphi'(s) + h_u v'(s). \quad (43)$$

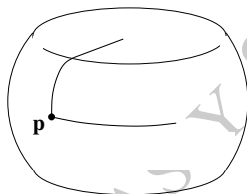
La utilizaremos en el apartado 9.7 para demostrar el teorema de Gauss para triángulos (ver apartados 9.2 y 9.7).

Veamos cómo se generaliza a curvas en superficies el teorema 28 del apartado 2.3. Dados un punto  $\mathbf{p}_0 = \Phi(u_0, v_0) \in S$ , un vector unitario  $\mathbf{t}_0 = (\cos \varphi_0 \Phi_u + \sin \varphi_0 \frac{1}{h} \Phi_v)_{(u,v)=(u_0,v_0)} \in T_{\mathbf{p}_0} S$  y especificada una función  $k(s)$ , buscamos el camino  $\alpha(s)$  en  $S$  parametrizado por arco Riemanniano y que cumple:  $\alpha(s_0) = \mathbf{p}_0$ ,  $\alpha'(s_0) = \mathbf{t}_0$  y  $k_{g,\alpha,Q}(s) \equiv k(s)$ . Las fórmulas (41) y (43) nos dicen que hay que buscar las funciones  $u(s), v(s), \varphi(s)$  que satisfacen el siguiente sistema de EDOs:

$$\frac{du}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \varphi}{h(u, v)}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = k(s) - \frac{h_u(u, v) \sin \varphi}{h(u, v)},$$

y los datos iniciales  $u(s_0) = u_0, v(s_0) = v_0$  y  $\varphi(s_0) = \varphi_0$ , entonces el camino es único y dado por  $\alpha(s) \equiv \Phi(u(s), v(s))$ .

Veamos un ejemplo, con  $Q \equiv I$ , de que si mantenemos  $k(s)$  y cambiamos  $\mathbf{p}_0$  o  $\mathbf{t}_0$ , las curvas que resultan pueden no estar relacionadas ni por isometrías de  $Q$  ni por movimientos del espacio. La superficie  $S$  es de revolución y está formada por una zona esférica cerca del ecuador, unida a dos discos horizontales por medio de dos zonas “tropicales” de transición suave. En un punto inicial  $\mathbf{p}$  situado en el ecuador, tomamos un arco de ecuador y un arco de meridiano; ambos son geodésicas y tienen  $k_g \equiv 0$ .



No puede haber una isometría de  $S$  que lleve una curva a la otra porque produciría una isometría entre un trocito de esfera y un trocito de plano, en contradicción con el teorema 61 del apartado 4.8. Tampoco hay ninguna isometría del espacio (preserve o no la superficie) que lleve una curva a la otra porque el arco de meridiano tiene un tramo rectilíneo y el ecuador no.

## 8.7 Teorema de Clairaut

La primera forma fundamental de una superficie de revolución es del tipo indicado en el teorema 114. Sea  $S$  el resultado de rotar alrededor del eje  $z$  un perfil  $(r(u), z(u))$ :

$$\Phi(u, \theta) \equiv (r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u)).$$

Si el perfil  $(r(u), z(u))$  está parametrizado por longitud de arco, entonces la primera forma fundamental es:

$$I \equiv (du)^2 + r(u)^2 (d\theta)^2.$$

A lo largo de toda parametrización geodésica  $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), \theta(t))$  se tiene  $r^2 \theta'(t) = \text{cte}$ . La pareja  $\{\Phi_u, \frac{1}{r} \Phi_\theta\}$  es ortonormal en cada punto, dando las direcciones de meridianos y paralelos respectivamente. Si  $\alpha(s) \equiv \Phi(r(s), \theta(s))$  es cualquier curva en  $S$ , parametrizada por longitud de arco, entonces

$$r \theta'(s) \equiv \alpha'(s) \cdot \frac{1}{r} \Phi_\theta \equiv \cos \angle \left( \alpha'(s), \frac{1}{r} \Phi_\theta \right) \equiv \sin \phi(s),$$

siendo  $\phi(s)$  el ángulo que hace  $\alpha$  con cada meridiano. Luego  $\Phi_\theta \cdot \alpha'(s) \equiv r^2 \theta'(s) \equiv r \sin \phi$  y tenemos el siguiente caso particular del teorema de conservación del momento:

**Teorema 117. (Alexis Clairaut, 1735).** Si  $\alpha$  es una geodésica en una superficie de revolución, entonces a lo largo de  $\alpha$  se tiene  $r \sin \phi = r_0$ , siendo  $\phi$  el ángulo que  $\alpha$  hace con cada meridiano y  $r_0$  una constante.

El teorema de Clairaut nos dice, sobre todo, cómo son geoméricamente las geodésicas de las superficies de revolución. Vamos a mirar sólo curvas de momento positivo, es decir recorridas en el sentido de  $\theta$  creciente.

A tener en cuenta: el momento  $\Phi_\theta \cdot \alpha'(s)$  también es constante a lo largo de cualquier paralelo parametrizado por arco, sea o no una geodésica. De hecho es igual al radio del paralelo.

En una geodésica el ángulo  $\phi$  aumenta a medida que  $r$  disminuye. Se alcanza el valor  $\phi = \pi/2$  cuando  $r$  es igual al momento  $r_0$  de la geodésica. En tal punto, si es que se alcanza, la geodésica será tangente a un paralelo de radio  $r_0$ , o sea un paralelo con el mismo momento que la geodésica.

Para los parámetros  $(u, \theta)$  la superficie de revolución tiene  $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{bmatrix}$  y las ecuaciones (33) de los caminos geodésicos  $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), \theta(t))$  quedan así:

$$\begin{cases} u''(t) - r(u) r_u(u) \theta'(t)^2 = 0 \\ \frac{d}{dt} (r^2 \theta'(t)) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Hemos visto que el sistema (44) implica el siguiente sistema de EDOs de primer orden:

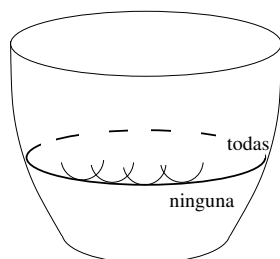
$$\begin{cases} (\text{rapidez})^2 : & u'(t)^2 + r(u)^2 \theta'(t)^2 = \text{cte}_1 \\ \text{rapidez} \cdot \text{momento} : & r^2 \theta'(t) = \text{cte} \end{cases} \quad (45)$$

Se trata de ver hasta qué punto (45) implica (44). Para *todo* camino  $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), \theta(t))$ , geodésico o no, tenemos la identidad:

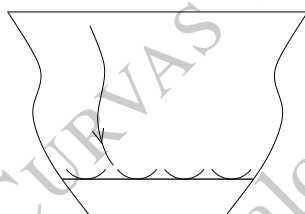
$$\frac{d}{dt} (u'(t)^2 + r(u)^2 \theta'(t)^2) \equiv 2u'(t) \cdot (u''(t) - r(u)r_u(u)\theta'(t)^2) + 2\theta'(t) \frac{d}{dt} (r(u)^2 \theta'(t)).$$

Un camino que cumpla (45) cumplirá (44) si a lo largo de él  $u'(t)$  sólo se anula en puntos aislados. La dificultad la plantean los paralelos, pues todos satisfacen (45) cuando se les parametriza por longitud de arco pero sólo van a satisfacer (44) los que tienen  $r_u(u_0) = 0$ .

**Caso más frecuente:** el valor  $u_0$  cumple  $r_u(u_0) \neq 0$ . Entonces el paralelo  $u = u_0$  no es una geodésica, y de hecho la primera ecuación del sistema (44) nos dice que las geodésicas  $\alpha(s)$  tangentes a él tienen, en el punto  $\alpha(s_0)$  de tangencia,  $u'(s_0)$  nula pero  $u''(s_0)$  no nula y del mismo signo que  $r_u(u_0)$ . Luego cumplen  $r(u(s)) > r(u_0)$  para  $s$  cercano a  $s_0$  pero distinto de  $s_0$ ; están todas del “lado ancho” del paralelo y ninguna del “lado estrecho”

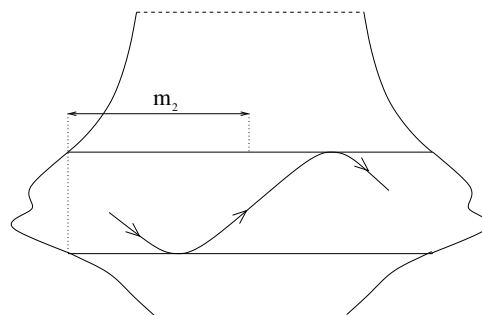
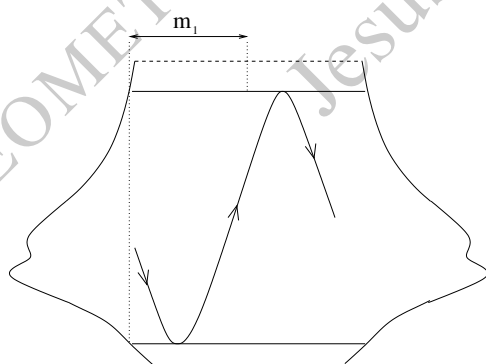


Llamemos “zona  $r > c$ ” a cualquier componente conexa del subconjunto  $\{r > c\}$  de la superficie. Dada una zona  $r > r(u_0)$  que tenga  $u = u_0$  como paralelo límite, toda geodésica unitaria con momento  $r(u_0)$  que esté en esa zona forma ángulo *agudo* con los meridianos, con lo cual tiene  $u(s)$  estrictamente monótona y acaba alcanzando a alguna de las geodésicas unitarias del mismo momento y tangentes a dicho paralelo

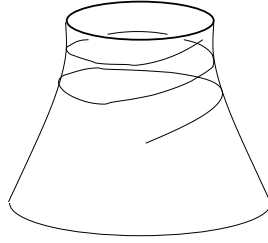


Como dos geodésicas unitarias con igual momento son tangentes donde se encuentran, se unen en una sola geodésica. Así resulta en este caso que las geodésicas de momento  $r(u_0)$  situadas en esa zona alcanzan de hecho al paralelo  $u = u_0$  y “rebotan” tangenteamente contra él.

Es frecuente que una zona  $r > r(u_0)$  esté limitada por dos paralelos  $u = u_0$  y  $u = u_1$  de igual radio  $r(u_0) = r(u_1)$  y con  $r_u(u_0)$  y  $r_u(u_1)$  ambas no nulas (y forzosamente de signos opuestos). Entonces las geodésicas unitarias de momento  $r(u_0)$  situadas en esa zona rebotan alternativamente contra un paralelo y el otro



**Caso excepcional:** el valor  $u_0$  cumple  $r_u(u_0) = 0$ . En este caso puede haber ninguna, una o dos zonas  $r > r(u_0)$  que tengan  $u = u_0$  como paralelo límite. Volviendo con el sistema (44), ahora el paralelo  $u = u_0$  sí es una geodésica y sabemos que otra geodésica distinta de él no puede tocarlo tangenteamente. Las geodésicas unitarias de momento  $r(u_0)$  situadas en alguna de esas zonas (si hay tal zona) *no pueden alcanzar al paralelo*: se le acercan asintóticamente dando infinitas vueltas alrededor del eje de revolución, pues al tener  $r \sim r(u_0)$  y  $r^2 \theta'(s) = r(u_0)$  la velocidad angular  $\theta'(s) = r(u_0)/r^2$  en esas geodésicas es próxima a la constante positiva  $1/r(u_0)$ .



Si una zona  $r > r(u_0)$  está limitada por dos paralelos  $u = u_0$  y  $u = u_1$  de igual radio  $r(u_0) = r(u_1)$  y, por ejemplo, es  $r_u(u_0) \neq 0$  pero  $r_u(u_1) = 0$ , entonces las geodésicas unitarias  $\alpha(t)$  de momento  $r(u_0)$  situadas en esa zona rebotan (una sola vez) contra el paralelo  $u = u_0$  y son asintóticas al paralelo  $u = u_1$  tanto para  $t \rightarrow +\infty$  como para  $t \rightarrow -\infty$ .

Si  $r_u(u_0) = r_u(u_1) = 0$ , entonces las geodésicas unitarias  $\alpha(t)$  de momento  $r(u_0)$  situadas en esa zona no rebotan: son asintóticas a un paralelo cuando  $t \rightarrow +\infty$  y asintóticas al otro paralelo cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Las **superficies helicoidales**, parametrizadas por  $\Phi(u, v) \equiv (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u) + cv)$ , con  $c$  una constante, también tienen  $E, F, G$  independientes de  $v$ :

$$I \equiv (r_u^2 + z_u^2)(du)^2 + 2cz_u dudv + (r(u)^2 + c^2)(dv)^2,$$

y cada hélice  $u = u_0$  juega el papel que jugaban los paralelos en las superficies de revolución: hay geodésicas que se acercan asintóticamente a la hélice o rebotan contra ella, según respectivamente que la hélice sea geodésica o no.

GEOMETRÍA DE CURVAS Y SUPERFICIES  
Jesús Gonzalo Pérez