

Hoja 11: Formas canónicas

1. Consideramos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula los autovalores de f .

(b) Considera el endomorfismo \mathbb{C} -lineal $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $g(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$. Comprueba que $\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix}$ es un autovector de g ¿con qué autovalor?

(c) Haz un dibujo de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ de \mathbb{R}^2 , definida de la manera siguiente (atención al signo):

$$\mathbf{v} = \operatorname{Re} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = -\operatorname{Im} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que la matriz de f en \mathcal{B} es $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\operatorname{sen} \pi/3 \\ \operatorname{sen} \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix}$, con $\pi/3 \text{ rad} = 60^\circ$.

(d) Deduce del apartado anterior que $f^3 \equiv -I_{\mathbb{R}^2}$ y que $f^6 \equiv I_{\mathbb{R}^2}$.

(e) Llamemos x_1, x_2 a las coordenadas respecto de \mathcal{B} . Llamemos x, y a las coordenadas en la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Consideramos la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^2 , formada por dos vectores perpendiculares de longitud unidad. Denotamos por y_1, y_2 las funciones coordenadas respecto de \mathcal{B}' . Demuestra las identidades:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y/2 \\ (2x-y)/2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (x+y)/\sqrt{2} \\ (x-y)/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$3(x_1^2 + x_2^2) \equiv x^2 - xy + y^2 \equiv \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2.$$

Deduce que para cada $r_0 > 0$ la curva de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$ se define también por la ecuación

$$\frac{y_1^2}{6r_0^2} + \frac{y_2^2}{2r_0^2} = 1,$$

luego dicha curva es la **elipse** centrada en el origen, de semieje mayor $\sqrt{6}r_0$, con dirección la recta $L_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle = \{y = x\}$, y de semieje menor $\sqrt{2}r_0$ con dirección la recta $L_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle = \{y = -x\}$ perpendicular a L_1 . En particular (semieje mayor) = $\sqrt{3} \cdot$ (semieje menor) para todas estas elipses. Dibújalas. Concluye que si \mathbf{v} es un vector en la elipse, $f(\mathbf{v})$ también está en la elipse.

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$, siendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula los autovalores de F (en $\det(M - \lambda I_3)$ resta la segunda fila de la primera).

(b) Halla un autovector complejo para la matriz M que sea de la forma $\begin{pmatrix} 5 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(c) Halla una base de \mathbb{R}^3 en la cual la matriz de F tenga la forma $\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, con $b > 0$.

3. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. (En el determinante de $f_2 - \lambda I$ resta la segunda fila de la primera).

$f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. (En $\det(f_3 - \lambda I)$ resta la tercera columna de la primera).

$f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. (En $\det(f_4 - \lambda I)$ suma la segunda columna a la primera).

4. Consideramos el espacio bidimensional $E = P_{\mathbb{R}}^{(1)}[x]$ y el endomorfismo $L : E \rightarrow E$ cuyo efecto sobre el polinomio general $p(x) \in E$ es el siguiente:

$$L(p) = -2p(0) + (3+x)p - (1+x^2)p'.$$

(a) Halla la forma canónica de Jordan J de L y una base de Jordan (formada por polinomios).

(b) Calcula el iterado $L^{13}(4-7x)$ (sugerencia: halla una fórmula para J^k).

5. Sea A una matriz real $n \times n$ con n impar. Demuestra que A tiene al menos un autovalor real.

6. Sea A una matriz real $n \times n$ con n par. Demuestra que si $\det A < 0$ entonces A tiene al menos un autovalor real positivo y al menos un autovalor real negativo.

¿Están obligados a ser reales los autovalores de una matriz real 2×2 con determinante positivo?

7. Si A una matriz $n \times n$, con entradas en cualquier cuerpo \mathbb{K} , se define $\text{traza}(A)$ como la suma de sus entradas diagonales.

(a) Prueba que si A y B son matrices cuadradas $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$.

(b) Sea A una matriz $n \times n$, con entradas en cualquier cuerpo \mathbb{K} , y sea $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la lista completa de los autovalores de A (con las repeticiones correspondientes, si alguno es múltiple, e incluyendo los que estén fuera de \mathbb{K}). Demuestra las fórmulas: $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{traza } A$ y $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$.

¿Son válidas esas fórmulas si sólo tomamos los autovalores que estén en \mathbb{K} ?

8. Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Prueba la fórmula siguiente para el polinomio característico de la matriz A :

$$|A - xI| = -x^3 + \text{traza}(A)x^2 - \frac{1}{2}[(\text{traza}(A))^2 - \text{traza}(A^2)]x + |A|.$$

9. Sea $A = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$ una matriz 3×3 y sea $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ la lista completa de sus autovalores. Demuestra la fórmula:

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix},$$