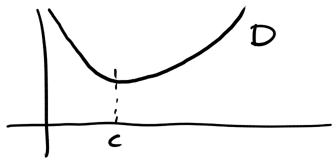
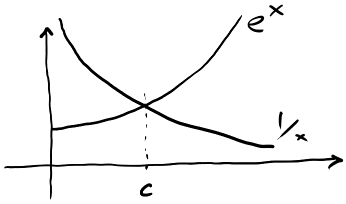
Estudiar métodos iterativos para encontrar el mínimo de $D(x) = e^x - \log(x)$, $x > 0$



$f(x) = D'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,



, $f(1) = e - 1 > 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$ $\Rightarrow c \in (0,1)$

↳ único cero de f

1. iteración de punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$, $c = g(c)$

$\Updownarrow$

$e^c = \frac{1}{c}$

$g(x) = x - \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = \frac{1}{f'(x)}$

$= x - \lambda \left(e^x - \frac{1}{x}\right)$

$g'(x) = 1 - \lambda \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)$: ¿ $|g'(c)| < 1$?

$g'(c) = 1 - \lambda \left(e^c + \frac{1}{c^2}\right) = 1 - \lambda \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = 1 - \lambda \frac{c+1}{c^2}$

↳ $|g'(c)| < 1 \iff -1 < 1 - \lambda \frac{c+1}{c^2} < 1$

$\iff 0 < \lambda (c+1) < 2c^2$

$\iff \begin{cases} \lambda > 0 \\ 2c^2 - \lambda c - \lambda > 0 \end{cases} \iff$ • $\lambda < \frac{2c^2}{c+1}$

• $c > \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8}}{4}$

$c \in (0,1)$, $f(1/2) = e^{1/2} - 2 < 0$

$\Rightarrow c \in (1/2, 1) \Rightarrow$ para encontrar un λ podemos resolver $\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8}}{4} = 1/2$: $\lambda = 1/3$

observación : si $\lambda = 1 \Rightarrow \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8}}{4} = 1$: el p.f. sería inestable (repulsor)

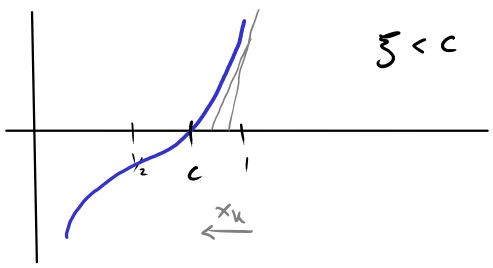
2. método de Newton

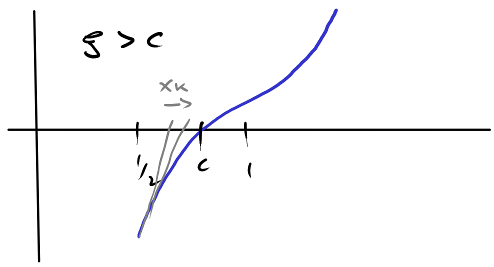
$f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$. $f \in C^\infty((0,+\infty))$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$: $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$

$f''(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$, sea ξ : $f''(\xi) = 0$: $e^\xi = \frac{2}{\xi^3}$

$\Rightarrow$ 2 escenarios posibles:



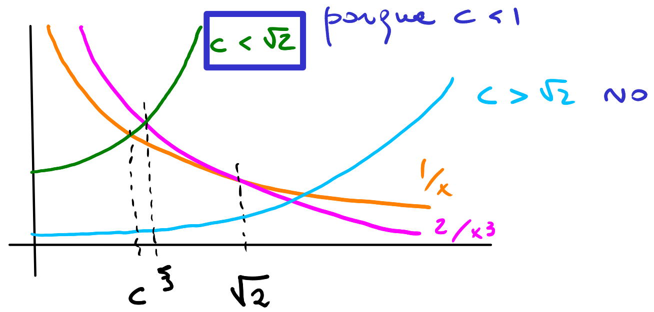


por el teorema de monotonía, tenemos convergencia

- si $\xi < c$: para $x_0 > c$
- si $\xi > c$: para $x_0 < c$

$\Big\}$ ¿en qué situación estamos?

$$\begin{cases} c : & e^c = \frac{1}{c} \\ \xi : & e^\xi = \frac{2}{\xi^3} \end{cases}$$



$\Downarrow$

$\frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$\xi > c$

$\Leftarrow$ por el teorema de monotonía, cualquier $0 < x_0 < c$ nos da convergencia (de orden 2) de Newton

pregunta: ¿podemos obtener convergencia para un $x_0 > c$?

↳ para responder, el primer paso es ver si $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} > 0 \quad \forall x > 0$

$$x - \frac{e^x - 1/x}{e^x + 1/x^2} = \frac{(x-1)e^x + 2/x}{e^x + 1/x^2}$$

es $> 0 \iff (x-1)e^x + 2/x > 0 \quad (*)$

- esto es cierto si $x \geq 1$, pero $c < 1$: tenemos que mirar también en $(0,1)$
- si $x \in (0,1)$, $(*) \iff e^x < \dfrac{2}{x(1-x)}$

↳ sea $h(x) = \dfrac{2}{x(1-x)}$

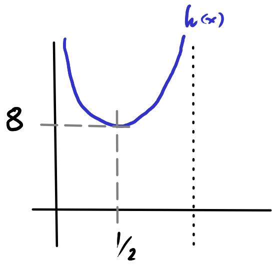
$h'(x) = \dfrac{2(2x-1)}{x^2(1-x)^2}$

$h'(x) = 0 \iff x = 1/2$

y $h(1/2) = 8$

$e^x < e^1 < 8$

$\forall x < 1$



$\Rightarrow (*)$ es cierto $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ podemos empezar el método de Newton en cualquier $x_0 > 0$:

recordar: ξ es el punto donde se anula f''

- si $x_0 > \xi$: $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $f''(x_0) > 0$

  $\Rightarrow$ los primeros pasos son decrecientes, > 0 hasta entrar en la región $c < x < \xi$

- si $c < x_0 < \xi$: $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $f''(x_0) < 0$

  $\Rightarrow$ la tangente está por encima de f y se cruza con x en un punto a la izquierda de c: en un paso se entra en la región $0 < x < c$

- si $0 < x < c \Rightarrow$ convergencia.