2. Sean $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canónica y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (0,1), \vec{v}_2 = (1,1)\}$ otra base de $\mathbb{R}^2$. Considera la aplicación bilineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ que con respecto a la base $\mathcal{B}$ está dada por

$$\varphi((x_1', x_2'), (y_1', y_2')) = x_1' y_1' + 2x_1' y_2' + 3x_2' y_2' \,.$$

a) Escribe $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matriz de φ en la base $\mathcal{B}$.

b) Calcula, de dos formas diferentes, $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$, la matriz de φ en la base $\mathcal{C}$.

c) ¿Es simétrica? ¿Y definida positiva? Justifica tu respuesta.

(a)

$\varphi(v_1, v_1) = \varphi((1,0),(1,0)) = 1$

$\varphi(v_1, v_2) = \varphi((1,0),(0,1)) = 2$

$\varphi(v_2, v_1) = \varphi((0,1),(1,0)) = 0$

$\varphi(v_2, v_2) = \varphi((0,1),(0,1)) = 3$

$$\Rightarrow M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$

$\vec{e}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (-1, 1)_B$

$\vec{e}_2 = \vec{v}_1 = (1, 0)_B$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(\varphi) = P^t \cdot M_B(\varphi) \cdot P =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

otra forma:

$\varphi(e_1, e_1) = \varphi((-1,1),(-1,1)) = 2$

$\varphi(e_1, e_2) = \varphi((-1,1),(1,0)) = -1$

$\varphi(e_2, e_1) = \varphi((1,0),(-1,1)) = 1$

$\varphi(e_2, e_2) = \varphi((1,0),(1,0)) = 1$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) φ no es simétrica.

$\varphi(e_1, e_2) = -1 \neq \varphi(e_2, e_1) = 1$.

– Al no ser simétrica, φ no es definida positiva