Ecuaciones-diferenciales-Extraor...

carlymb

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Ecuaciones Diferenciales. GRADO EN MATEMÁTICAS, UAM Año 2020/2021

Examen extraordinario 25 de junio de 2021

INSTRUCCIONES

- El examen consta de 5 preguntas y su duración es de tres horas.
- **Cada problema se debe contestar en una hoja diferente.** Pon tu nombre y tu número de DNI en todas las hojas.

1. (3 puntos) Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Las respuestas sin justificación no serán tenidas en cuenta.

(a) **(0,5 puntos)** Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas en $[0,1]$ y no necesariamente continuas. Si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todos n y x, y $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es una función acotada en $[0,1]$.

(b) **(0,75 puntos)** La sucesión $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$ converge uniformemente en $-\infty < x < \infty$.

(c) **(0,75 puntos)**

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} + 4te^{-3t} & -4te^{-3t} \\ 4te^{-3t} & e^{-3t} - 4te^{-3t} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental del sistema

$$\begin{cases} x' &= x - 4y, \\ y' &= 4x - 7y. \end{cases}$$

(d) **(1 punto)** Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ soluciones del sistema de primer orden

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

en $[a,b]$. Supongamos que existe t_0 y escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j(t_0) = 0.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j(t) = 0$$

para todo t en $[a,b]$.

2. (2 puntos)

(a) **(1 punto)** Consideramos la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

con $Q \in \mathcal{C}^1$. Hacer el cambio de variables

$$\begin{aligned} s &= \phi(x), \\ z(s(x)) &= y(x). \end{aligned}$$

Demostrar que tras el cambio la ecuación se transforma en una de coeficientes constantes si y solo si $(Q' + 2PQ)/|Q|^{3/2}$ es constante.

(b) **(0,5 puntos)** Comprobar que se cumple la condición del apartado anterior para la ecuación

$$y'' + \frac{x^2-1}{x}y' + x^2y = 0, \ x > 0,$$

y calcular la función $\phi(x)$ en ese caso.

(c) **(0,5 puntos)** Resolver la ecuación

$$y'' + \frac{x^2-1}{x}y' + x^2y = 0, \ x > 0.$$

---

3. (1,5 puntos) Considerar el problema

$$y' = y + \lambda x^2 \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 1,$$

donde λ es cualquier parámetro real.

(a) **(0,75 puntos)** Probar que la solución ψ de este problema existe y es única para $|x| \leq 1$.

(b) **(0,75 puntos)** Probar que

$$|\psi(x) - e^x| \leq |\lambda|(e^{|x|} - 1)$$

para $|x| \leq 1$.

---

4. (1,5 puntos) Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(a) **(0,5 puntos)** Supongamos que la matriz $A = (a_{ij})$ tiene como autovalores $\lambda_1 = 2$, con autovector asociado $(1,1)$, y $\lambda_2 = -1$, con autovector asociado $(0,1)$. Determinar qué tipo de punto crítico es el $(0,0)$, y representar el plano de fases correspondiente.

(b) **(0,5 puntos)** Supongamos que para otra elección de los coeficientes a_{ij} la matriz A tiene como autovalores $\lambda_1 = 2$, con autovector asociado $(1,1)$, y $\lambda_2 = 4$, con autovector asociado $(0,1)$. Determinar qué tipo de punto crítico es el $(0,0)$, y representar el plano de fases correspondiente.

(c) **(0,5 puntos)** Supongamos que para una tercera elección de los coeficientes la matriz A tiene un autovalor $\lambda_1 = 1 + i$, y además

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} &= 0 \\ a_{21} - a_{22} &= 0, \end{aligned}$$

y además $a_{12} > 0$, $a_{21} < 0$. Determinar qué tipo de punto crítico es el $(0,0)$, y representar el plano de fases correspondiente.

---

5. (2 puntos) Sea la ecuación de segundo orden

$$x'' + 4x^3 - x^5 = 0.$$

(a) **(1 punto)** Escribir como un sistema, y hallar una integral primera.

(b) **(1 punto)** Representar el plano de fases. Indicar trayectorias que correspondan a soluciones $x(t)$ que sean:

- Periódicas.
- Monótonas crecientes tales que
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 2.$$
- Monótonas crecientes tales que
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 2.$$