INTERSECCIÓN Y SUMA DE VARIEDADES LINEALES. FÓRMULAS DE GRASSMANN.

Sea $\mathbb{A}=(A,V,\varphi)$ un K-espacio afín de dimensión $n<\infty$. En esta sección estudiaremos las operaciones básicas con variedades lineales, así como las consecuencias que tienen en la dimensión de la nuevas variedades.

Proposición 1. Sean $L_1=a_1+V_1$, $L_2=a_2+V_2$ dos variedades lineales de $\mathbb{A}$. Entonces.

$$L_1\cap L_2\neq\emptyset \iff \varphi(a_1,a_2)\in V_1+V_2$$

Demostración. Supongamos que $L_1\cap L_2\neq\emptyset$ sea $c\in L_1\cap L_2$. Entonces $\overrightarrow{a_1c}\in V_1$, $\overrightarrow{a_2c}\in V_2$. Por esto $\overrightarrow{a_1a_2}=\overrightarrow{a_1c}+\overrightarrow{ca_2}\in V_1+V_2$.
Recíprocamente, si $\overrightarrow{a_1a_2}\in V_1+V_2$ entonces $\overrightarrow{a_1a_2}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1\in V_1$ y $\vec{v}_2\in V_2$. En consecuencia, si $c=\varphi_{a_1}^{-1}(\vec{v}_1)\in L_1$, se tiene que

$$\overrightarrow{a_2c}=\overrightarrow{a_2a_1}+\overrightarrow{a_1c}=-\overrightarrow{a_1a_2}+\overrightarrow{a_1c}=-\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{v}_1=-\vec{v}_2\in V_2.$$

Luego, $c\in L_2$, lo que concluye la demostración. $\boxtimes$

El siguiente resultado muestra que la intersección de dos variedades lineales es otra variedad lineal y nos dice cual es su subespacio director.

Proposición 2. Si $L_1=a_1+V_1$ y $L_2=a_2+V_2$ son dos variedades lineales tales que $L_1\cap L_2\neq\emptyset$, entonces, para cada $c\in L_1\cap L_2$ se tiene

$$L_1\cap L_2=c+V_1\cap V_2.$$

En particular, $L_1\cap L_2$ es una variedad lineal y $\dim L_1\cap L_2=\dim V_1\cap V_2$.

Demostración: Si $c\in L_1\cap L_2$, por la proposición 1, se tiene

$$x\in L_1\cap L_2 \iff \vec{cx}\in V_1\cap V_2$$, lo que da el enunciado.

La unión conjuntista de variedades lineales no es en general una variedad lineal. Por ejemplo, dos puntos a_1, a_2 en $\mathbb{A}$ no forman una variedad lineal, pero determinan una recta $L = a_1 + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle$. La siguiente definición es la generalización de este hecho, en que a partir de dos variedades lineales L_1 y L_2 se crea una nueva variedad lineal, que llamaremos suma de L_1 y L_2.

<u>Definición</u>. Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se define el conjunto $L_1 + L_2$ como la mínima variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a $L_1 \cup L_2$. Esto equivale a la igualdad:

$$L_1 + L_2 = \bigcap \{ L \mid L \text{ variedad lineal de } \mathbb{A}, L \supseteq L_1 \cup L_2 \}.$$

Llamaremos a $L_1 + L_2$ variedad lineal suma de $L_1 + L_2$.

A priori, no es evidente que $L_1 + L_2$ sea una variedad lineal. Pero, el siguiente resultado confirma este hecho.

<u>Proposición 3</u>. Sean $L_1 = a_1 + V_1$, $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales de $\mathbb{A}$. Entonces:

$$L_1 + L_2 = a_1 + \left(V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle \right).$$

<u>Demostración</u>. Sea $N := a_1 + (V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle)$. Entonces $L_1 + L_2 \subset N$ ya que $L_1 \subset N$, $L_2 \subset N$. Veamos el recíproco. Sea L una variedad lineal de $\mathbb{A}$ tal que $L_1 \subset L$ y $L_2 \subset L$; veamos que $N \subset L$. Sea $x \in N$, entonces $\overrightarrow{a_1 x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + t\overrightarrow{a_1 a_2}$ para $\vec{v}_1 \in V_1$, $\vec{v}_2 \in V_2$, $t \in K$. Pero, si $L = a_1 + W = a_2 + W$, entonces, $t\overrightarrow{a_1 a_2} \in W$, y por tanto

$$\overrightarrow{a_1 x} \in V_1 + V_2 + W \subset W + W + W = W,$$

lo que da el resultado.

Observación. Dados dos puntos $a_1, a_2 \in A$ entonces $\{a_1\} + \{a_2\} = a_1 + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle$ es la recta que pasa por a_1, a_2.

§ Fórmulas de Grassmann para variedades lineales.

Teorema (Fórmulas de Grassmann)
Sean $L_1 = a_1 + V_1$, $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$. Se tienen las siguientes igualdades

(1) Si $L_1 \cap L_2 \neq \phi$, entonces $\boxed{\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2.}$

(2) Si $L_1 \cap L_2 = \phi$, entonces $\boxed{\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim V_1 \cap V_2 + 1.}$

Demostración. Supongamos que $L_1 \cap L_2 \neq \phi$. Entonces $\overrightarrow{a_1 a_2} \in V_1 + V_2$, y en consecuencia $L_1 + L_2 = a_1 + (V_1 + V_2)$. La fórmula de Grassmann para espacios vectoriales implica que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 = $$
$$= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 .$$

Si se diera $L_1 \cap L_2 = \phi$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle) = \dim(V_1 + V_2) + \dim \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle$$
$$- \dim((V_1 + V_2) \cap \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle) = \dim(V_1) + \dim V_2$$
$$- \dim(V_1 \cap V_2) + 1 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1,$$

ya que $(V_1 + V_2) \cap \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle = \{\vec{0}\}$ puesto que L_1 no corta a L_2.

Ejercicio Dos hiperplanos afines siempre se cortan.

POSICIÓN RELATIVA DE VARIEDADES LINEALES.

Fijemos $\mathbb{A}=(A,V,\varphi)$ un K-espacio afín de dimensión n.

Definición. • Sean $L_1=a_1+V_1$, $L_2=a_2+V_2$ dos variedades lineales de $\mathbb{A}$. L_1 y L_2 se dicen paralelas si $V_1\subset V_2$ ó $V_2\subset V_1$. Escribiremos $L_1\parallel L_2$ para denotar este hecho

• Diremos que L_1 y L_2 se cortan si no son paralelas y $L_1\cap L_2\neq\phi$

• Diremos que L_1 y L_2 se cruzan si no son paralelas y $L_1\cap L_2=\phi$.

Proposición. Si L_1 y L_2 son paralelas, o bien $L_1\cap L_2=\phi$ ó una variedad lineal está contenida en la otra.

Demostración. Podemos suponer que $V_1\subset V_2$. Veamos que si $L_1\cap L_2\neq\phi$, entonces $L_1\subset L_2$ Pero

$$L_1=a_1+V_1\subset a_1+(V_1+V_2)=a_2+(V_1+V_2)=a_2+V_2=L_2,$$

puesto que $\overrightarrow{a_1a_2}\in V_1+V_2=V_2$.

Ejercicios.

Nº1.- Estudiar si las variedades de $\mathbb{A}^4$ dadas por:

$$\pi_1=\{x_1-x_2+3x_3=4,\ x_2-x_3+2x_4=-1\},$$

$$\pi_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,0)+t(-4,-1,1,1)+s(0,3,1,-1),\ t,s\in\mathbb{R}\}$$

son paralelas, se cortan o se cruzan. (Sol.: Son paralelas).

Nº2.- Estudiar si las variedades de $\mathbb{A}^5$ dadas por

$$\pi_1=\{x_1+x_2-x_3=0,\ -x_2-x_3+x_4=-2,\ -x_2+x_5=0\},$$

$$\pi_2=\{-x_1+x_2+x_3=-2,\ x_4=0,\ -x_1+x_5=0\}$$

son paralelas, se cortan o se cruzan (Sol.: Se cruzan).