Hoja 5: Aplicaciones lineales. Matriz de una aplicación lineal.

1. Para cada una de las aplicaciones siguientes decide, razonadamente, si es lineal o no.

i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ,\ F(x,y) = (2x+3y, -5x)$.

ii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ,\ F(x,y) = (x, y^2)$.

iii) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \ ,\ T\big[f(x)\big] = f(\cos x)$.

iv) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \ ,\ T\big[f(x)\big] = \cos\big(f(x)\big)$.

v) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \ ,\ F\big(p(x)\big) = p(x+1)$.

vi) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \ ,\ F\big(p(x)\big) = p(x)+1$.

vii) $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} \ ,\ \mathcal{F}\big(p(x)\big) = \displaystyle\int_{-1}^{2} p(x)\,dx$.

viii) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ ,\ F(A) = \det A$.

ix) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ ,\ F(A) = I_2 + A$.

x) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \ ,\ F(A) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right] A \left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

2. De una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sabemos que $A(1,0,0) = -1$, $A(2,1,0) = 5$ y $A(3,4,1) = 7$. Sabiendo eso, determina $A(3,5,-1)$.

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Halla, en función de a, una base de $\operatorname{Im} A$ y una base de $\ker A$.

b) Comprueba que, para todos los valores de a, se cumple:
$$\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\ker A) \;=\; \dim\big(\text{dominio de } A\big).$$

4. Para el espacio vectorial $\mathbb{V}$ de las matrices reales simétricas 2×2, consideramos la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Comprueba que $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dada por $f(M) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right] M \left[\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right] - M$ es lineal y halla la matriz A de f respecto de $\mathcal{B}$ en salida y en llegada (atención: A es 3×3).

b) Utiliza A para hallar una base de $\operatorname{Im} f$ y una base de $\ker f$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de matrices simétricas 2×2).

c) Comprueba que $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim\big(\text{dominio de } f\big)$.

5. Sea $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 1.

a) Demuestra que se pueden definir dos aplicaciones $F, G : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ por las siguientes fórmulas:

$$F(\varphi) \;=\; (1+3x)\,\varphi + (1-3x^2)\,\varphi' \quad , \quad G(\varphi) \;=\; (6+3x)\,\varphi + (1-3x^2)\,\varphi' \,.$$

b) Comprueba que F y G son lineales y halla sus matrices respecto de la base $\{1, x\}$, tanto en salida como en llegada.

c) Utiliza el resultado de b) para demostrar rápidamente que $G = \dfrac{3}{4}F^4 - F^3 - 5F$, es decir

$$G \;=\; \frac{3}{4}\,F\circ F\circ F\circ F - F\circ F\circ F - 5\,F.$$

6. Sea $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx + cx^2 \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 2. Definimos una aplicación $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ por la fórmula $F(\varphi) \;=\; 2\,\varphi - (x+1)\,\varphi'$.

a) Comprueba que F está bien definida y es lineal.

b) Halla la matriz A de F respecto de la base $\{2+x, 3x, x^2\}$ en salida y la base $\{1, x, x^2\}$ en llegada.

c) Utiliza A para hallar una base de $\operatorname{Im} F$ y una base de $\ker F$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de polinomios). Comprueba que $\dim(\operatorname{Im} F) + \dim(\ker F) = \dim\big(\text{dominio de } F\big)$.

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la aplicación $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como $T_a(\mathbf{v}) \;=\; \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}^t + \mathbf{v}\,[1 \;\; 3a]$.

a) Comprueba que T_a es lineal y halla su matriz respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Utiliza el resultado de a) para determinar los valores de a para los que T_a es inyectiva.

8. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación lineal $G_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ como $G_a(\mathbf{x}) = A_a\mathbf{x}$, siendo

$$A_a \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2a \\ 3 & 4+a & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5+a \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de a para los que G_a es suprayectiva.