HOJA DE EJERCICIOS 3 (Grupo 130)
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. De las siguientes fórmulas dí, razonadamente, cuáles son verdad y cuáles falsas (cerca del origen en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$).

$$\operatorname{sen} y = \mathrm{O}(|y|) \qquad x \operatorname{sen} y = \mathrm{O}(x^2+y^2) \qquad \operatorname{sen} x = \mathrm{o}(|x|)$$

$$1-\cos x = \mathrm{O}(x^2) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{o}(|x|) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{O}(|x|^{0'99})$$

1) $\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{|y|} = 1$, $\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{|y|} = -1$; $\left|\frac{\operatorname{sen} y}{|y|}\right| \leq 1$ cerca de cero. Cierta

2) $\frac{|x \operatorname{sen} y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \leq 1$. Cierta

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} \neq 0$. Falsa

4) $1-\cos x = \mathrm{O}(x^2)$; $1-\cos x = 1-(1-x^2+\mathrm{O}(x^4))$
$= x^2 + \mathrm{O}(x^4)$. Cierta

5) $\frac{x}{\log|x|} = \mathrm{o}(|x|)$; $\lim_{x\to 0} \frac{|x|/\log|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log|x|} = 0$
Cierta

6) $\frac{x}{\log|x|} = \mathrm{O}(|x|^{0'99})$; $\lim_{x\to 0} \frac{|x|/\log|x|}{|x|^{0'99}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{0'01}}{\log|x|} = 0$
Cierta.

Problema 2. Considera la función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ \\ 2x + 7y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada vector $v = (a,b)$, calcula la derivada direccional $(D_v f)_{(1,1)}$ por el siguiente método: calcula el camino $t \longmapsto f\big((1,1) + tv\big)$ como una función explícita de t y derívalo en $t = 0$.

b) Calcula las siguientes matrices

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)},$$

y evalúa los producto matriciales $M_1 v$ y $M_2 v$ ¿Cuál de ellos es igual a $(D_v f)_{(1,1)}$?

c) ¿Cuál de las dos matrices M_1, M_2 es la jacobiana de f en $(1,1)$? Da una explicación.

a) $t \to f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1+ta\\1+tb\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+ta)^2+(1+tb)^3\\ 2(1+ta)+7(1+tb)^2\end{pmatrix}$

$(D_v f)_{(1,1)} = \begin{pmatrix}2a+3b\\2a+14b\end{pmatrix}$

b) $M_1 = \begin{pmatrix}2x & 3y^2\\ 2 & 14y\end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 14\end{pmatrix}$; $M_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+3b\\2a+14b\end{pmatrix}$

$M_2 = \begin{pmatrix}2x & 2\\ 3y^2 & 14y\end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 14\end{pmatrix}$; $M_2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+2b\\3a+14b\end{pmatrix}$

c) M_1 es la jacobiana en $(1,1)$

Problema 3. Utiliza la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables en todo punto.

a) $F(x,y) = f\big(h(x)\,,\, g(x,y)\big)$,

b) $G(x,y) = g\big(f(x,y)h(x)\,,\, y\big)$,

c) $H(x,y) = g\big(f\big(x, h(y)\big)\,,\, xy\big)$,

a) $F: \begin{matrix} (x,y) & \xrightarrow{\varphi} & (h(x), g(x,y)) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{matrix} : F = f \circ \varphi$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\varphi(x,y)} \begin{pmatrix} h'(x) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}$$

c) $H: \left.\begin{matrix} (x,y) & \xrightarrow{\varphi} & (f(x,h(y)), xy) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{matrix}\right\} H = g \circ \varphi$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)_{\varphi(x,y)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \cdot h'(y) \\ y & x \end{pmatrix}$$

Problema 4. Es sabido que si en un entorno de x_0 existen las funciones $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ y son continuas, entonces $f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en x_0. Veamos que esta condición suficiente no es necesaria.

a) Dada la función

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprueba que las funciones f_x, f_y están definidas en todo $\mathbb{R}^2$ pero no son continuas en $(0,0)$.

b) Demuestra que, de todas maneras, la función f es diferenciable en $(0,0)$.

a) Continua en $(0,0)$: $0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = (x^2+y^2)\left|\mathrm{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$\leq (x^2+y^2) \longrightarrow 0$ cuando $\|(x,y)\| \to 0$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \,\mathrm{sen}\frac{1}{|h|} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \,\mathrm{sen}\frac{1}{|h|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\frac{1}{|h|} = 0$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Con $y = x$, $x \to 0^+$: $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}\right)\left(\dfrac{-x}{\sqrt{2}\,x}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}x}\right)$ no tiene límite

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

Igual para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: no es continua en $(0,0)$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\left|\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$$. Es dif. en $(0,0)$ y $Df(0,0) = (0,0)$

Problema 5. Analícese, para cada una de las funciones siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales primeras y la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

b) Continuidad: $0 \leq |g(x,y) - g(0,0)| = \left| \dfrac{x^4 e^{-|x|}}{x^2+y^2} \right| = \dfrac{x^4 e^{-|x|}}{x^2+y^2}$

$\leq \dfrac{x^2(x^2+y^2)\,e^{-|x|}}{(x^2+y^2)} = x^2 e^{-|x|} \leq x^2 \longrightarrow 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$. Es continua en $(0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 e^{-|h|}}{h} = \lim_{h\to 0} h e^{-|h|} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$0 \leq \frac{|g(x,y)-g(0,0)-0|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4 e^{-|x|}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{x^2 e^{-x}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\frac{(x^2+y^2)\,e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0 \text{ si } (x,y)\to(0,0)$$

Es diferenciable en $(0,0)$.

a) No es continua en $(0,0)$: $\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$, $(y = \lambda x^2)$

$$\frac{x^2 \lambda x^2}{x^4+\lambda^2 x^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \quad \text{depende de } \lambda$$

No es dif. en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

c) Continua en $(0,0)$

$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$

h no es diferenciable en $(0,0)$

Problema 6. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, dotado de un producto escalar $<\cdot,\cdot>$ con norma asociada $||\cdot||$.

a) Demuestra que la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ||x||^2$ es diferenciable en todo $x \in E$, y que

$$(df)_x(u) \;=\; 2 < x, u > \quad \text{para cada } u \in E.$$

b) Dados un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y un camino diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$, demuestra que $\|\alpha(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$.

a) $f(x) = ||x||^2$

$$\lim_{||u||\to 0} \frac{|f(x+u) - f(x) - \overbrace{(Df)_x(u)}^{2<x,u>}|}{||u||} = \lim_{||u||\to 0} \frac{|\,||x+u||^2 - ||x||^2 - 2<x,u>|}{||u||}$$

$$= \lim_{||u||\to 0} \frac{||u||^2}{||u||} = \lim_{||u||\to 0} ||u|| = 0$$

$$f(x+u) - f(x) = ||x+u||^2 - ||x||^2 = 2<x,u> + ||u||^2$$

b) $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\alpha(t)) = ||\alpha(t)||^2$

$$\varphi'(t) = Df(\alpha(t)).(\alpha'(t)) \overset{a)}{=} 2<\alpha(t), \alpha'(t)>$$

$$||\alpha(t)|| = 0 \iff \varphi'(t) = 0 \iff <\alpha(t), \alpha'(t)> = 0 \iff$$

$\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo t

Problema 8. Sean $m > 0$ y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función *homogénea de grado* m, es decir que cumple lo siguiente:

$$f(tx) = t^m f(x) \quad \text{para cualesquiera } x \in \mathbb{R}^N \ , \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \, .$$

Demuestra que $\langle \nabla f(x), x \rangle \equiv m\, f(x)$.

S/ Fijar $x \in \mathbb{R}^N$; tomar $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(tx) = t^m f(x)$. Su derivada

$$\varphi'(t) = m\, t^{m-1} f(x)$$

Como φ es una función compuesta:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{g_x} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R} \\ \quad\ \ t \ \longrightarrow \ tx \ \longrightarrow f(tx) \end{array}\right\} \quad \varphi = f \circ g_x$$

Regla de la cadena

$$\varphi'(t) = (Df)_{g_x} \cdot (Dg_x)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_{tx} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= \langle \nabla f(tx), x \rangle$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad m\, t^{m-1} f(x) = \langle \nabla f(tx), x \rangle$. Tomando $t = 1$ se obtiene $\quad m\, f(x) = \langle \nabla f(x), x \rangle$.

Problema 9. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Prueba que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y)$.

b) Ayudándote del resultado en a), halla una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y\,.$$

c) Halla una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\,xy \quad , \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 - 2 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^z\,.$$

a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y)$ por el TFC

b) $y = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y) \Longrightarrow g_2(x,y) = y$

$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)dt + \int_0^y t\,dt = \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \dfrac{y^2}{2}$

$x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_1(x,0) \Rightarrow g_1(x,0) = x \Longrightarrow$

$f(x,y) = \int_0^x t\,dt + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow f(x,y,z) = \int 2xy\,dx = x^2y + \varphi(y,z)$

$x^2 - 2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z)$; $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = -2 \Rightarrow$

$\varphi(y,z) = \int -2\,dy = -2y + \phi(z) \Rightarrow$

$f(x,y,z) = x^2y - 2y + \phi(z)$

$e^z = \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow \phi(z) = e^z$

$f(x,y,z) = x^2y - 2y + e^z$