Cálculo Numérico I

Curso 2020-2021 | Hoja de Problemas 5 | 1º de Mat./2º de D.G.

1. Demostrar que, si $\widehat{R}_{kk} > 0$ la factorización QR reducida es única.

2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Encontrar una descomposición $A = QR$ por Gram-Schmidt.

3. Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Demostrar que $U^2 = I$ si y solo si U tiene la forma $I - 2P$, donde P es una proyección ortogonal.

4. a) Sea
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Hallar una factorización $B = QR$ y explicar qué dos posibilidades hay para las dimensiones de los factores Q y R y cómo se relacionan esas dos opciones.

   b) Sea ahora $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$ y con rango n. Si quisiésemos resolver el problema
$$\texttt{encontrar el } x \texttt{ tal que } ||b - Bx||_2 \texttt{ es mínimo} \qquad (*)$$
se podría usar la descomposición QR de B para reducirlo a la resolución de un sistema lineal triangular ¿qué sistema? Justificar la respuesta.

   c) Indicar el numero de operaciones (en orden de magnitud) que se realizan para resolver el problema $(*)$ del apartado anterior.
Nota: al contar separar la parte de la descomposición QR de la correspondiente a la resolución del sistema triangular.

5. Se considera la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcular su factorización QR.

   b) Utilizarla para resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, los sistemas sobredeterminados
$$Ax = b_j,$$
donde
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

   c) Denotando por x_1, x_2, x_3 las respectivas soluciones, calcular los residuos $r_j = b_j - Ax_j$, $j = 1, 2, 3$. ¿A qué se debe la diferencia entre los tres resultados?

d) Pensando en una matriz A y un dato b generales, ¿En qué caso (para una matriz A y un dato b generales) es nulo el residuo $r = b - Ax$? ¿Puede suceder que $\|r\|_2 > \|b\|_2$? ¿Puede suceder que $r = b$ (es decir, $Ax = 0$)? ¿En qué casos ocurre que $r = b/2$?

6. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y sean A, T matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker T = 0$. Ponemos $A_1 = AT$. Sean x, x_1 las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$ y$A_1 x_1 = b$ en el sentido de mínimos cuadrados.

   a) Demostrar la siguiente desigualdad para los residuos: $\|b - Ax\|_2 \leq \|b - A_1 x_1\|_2$.

   b) Demostrar que, en el caso $n = p$, se tiene la igualdad de los residuos.

7. Demostrar que todas las proyecciones de $\mathbb{C}^2$ son de una de las siguientes formas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\alpha\beta & \alpha(1-\alpha\beta) \\ \beta & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

para algún valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
(Recordar que una proyección en $\mathbb{C}^n$ es una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $P^2 = P$.)

8. Sean P, Q proyecciones ortogonales de $\mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$PQ \text{ es una proyección ortogonal} \iff PQ = QP$$

9. Sean Q_1, Q_2 matrices reales en $\mathbb{R}^{n\times n}$ tales que la matriz compleja $U = Q_1 + iQ_2$ es unitaria. Demostrar que la matriz $R \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ dada por

$$R = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal