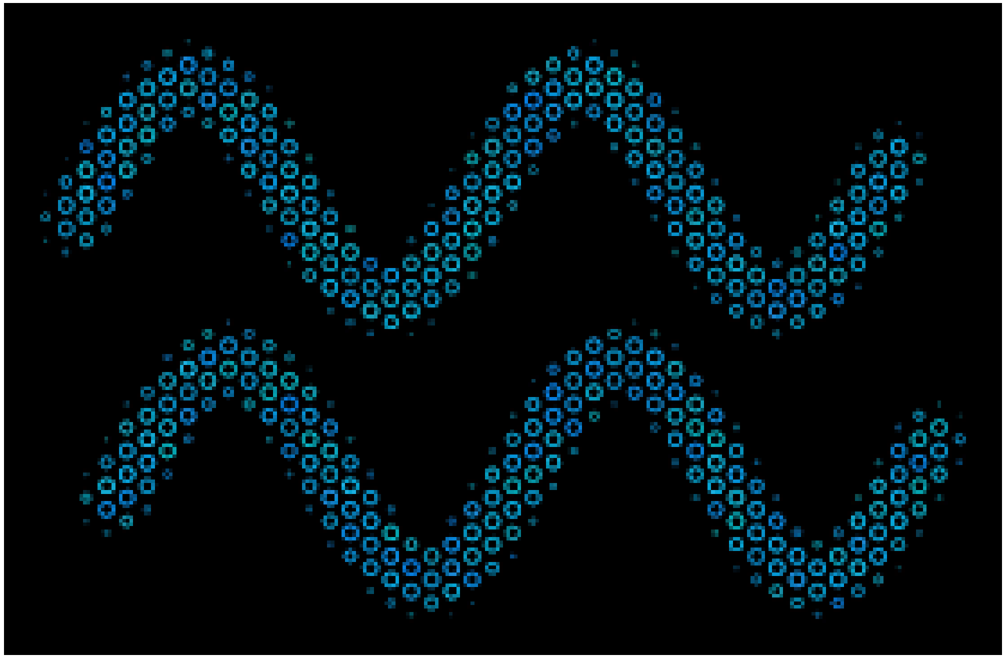
Parte 2

Circuitos de corriente alterna (AC)



RESUMEN

Fuente AC $V(t) = V_0 \cos\omega t$

Resistencias

$$I(t) = I_0 \cos\omega t$$

$$Z = X_R = R$$

$$P_R = I_{eff}^2 R$$

$$P_R = \langle P \rangle_R$$

En una resistencia *R* en AC: la corriente *I(t)* está **en fase** con la tensión *V(t)* (diferencia de fase $\delta = 0$)

Condensadores

$$I(t) = -I_0 \sin\omega t$$

$$X_C \equiv \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\langle P \rangle_C = 0$$

En un condensador *C* en AC: la corriente *I(t)* va 90º ($\pi/2$) **por delante en la fase** respecto a la tensión *V(t)* (desfase: $-\pi/2$)

Autoinductancias

$$I(t) = I_0 \sin\omega t$$

$$X_L \equiv \frac{V_0}{I_0} = \omega L$$

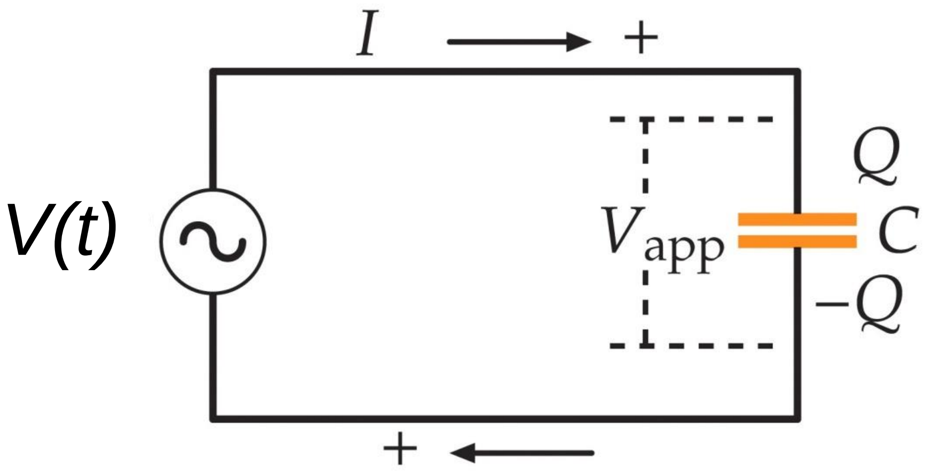
$$\langle P \rangle_L = 0$$

En una autoinductancia *L* en AC: la corriente *I(t)* va 90º ($\pi/2$) **por detrás en la fase** respecto a la tensión *V(t)* (desfase: $+\pi/2$)

Los Condensadores y las Inductancias no disipan potencia

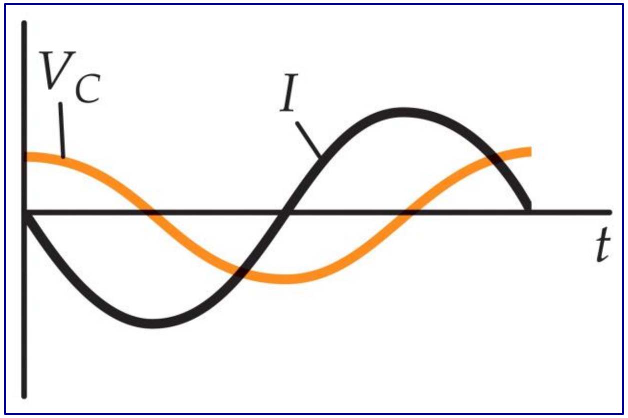
Haced vosotros mismos la demostración matemática…

Potencia disipada en C en AC



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = -I_0 \sin \omega t$$



Potencia instantánea *P(t)*:

$$P(t) = V(t)\, I(t)$$

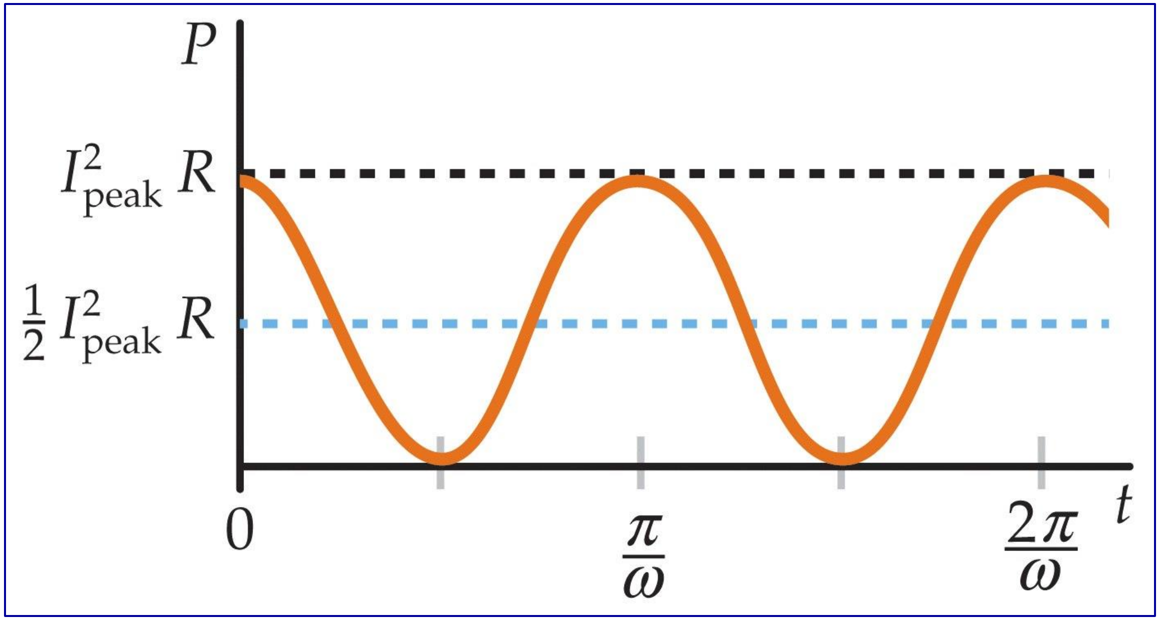
$$P(t) = -V_0 I_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{-V_0 I_0}{2} \sin 2\omega t$$

Potencia *promedio* disipada en *C* en AC

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t = I_0^2 R\cos^2\omega t$$

Potencia promedio <*P*>:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$



Potencia *promedio* disipada en *C* en AC

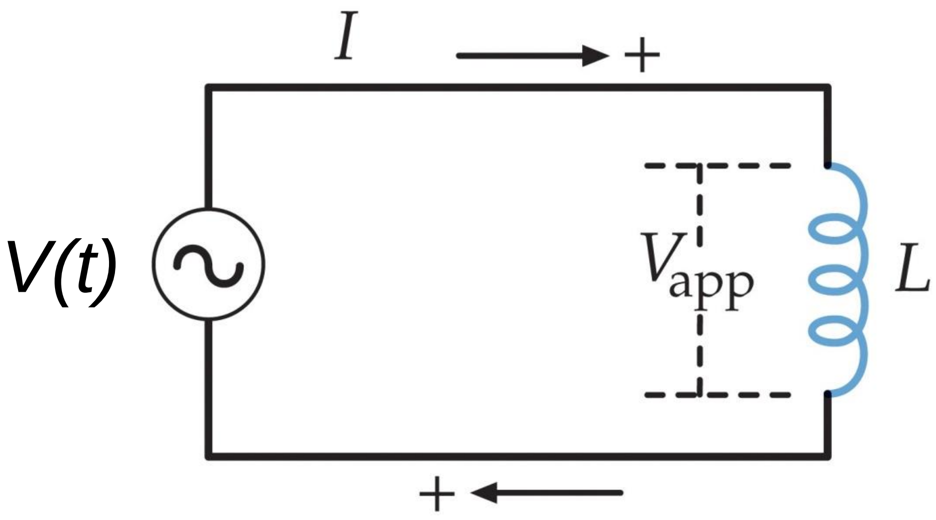
$$\langle P \rangle = -\frac{V_0 I_0}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Potencia promedio $\langle P \rangle$ disipada por una corriente AC **sinusoidal** aplicada a un condensador:

IMPORTANTE!!!

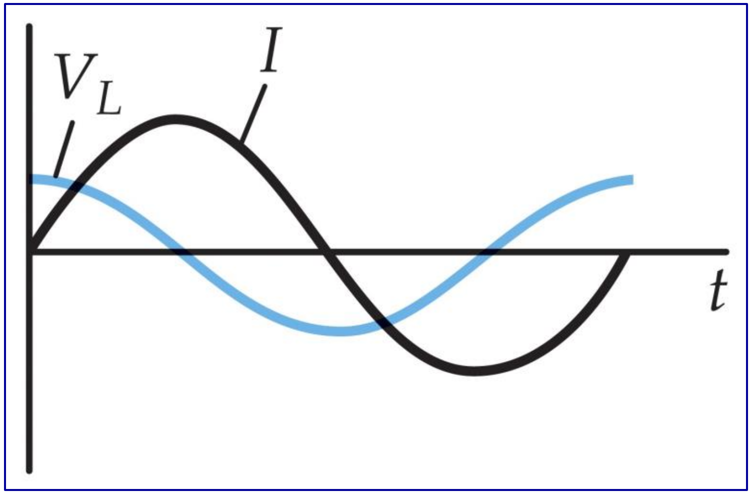
$$\boxed{\langle P \rangle = 0}$$

Potencia disipada en L en AC



$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

$$\boxed{I(t) = I_0 \sin \omega t}$$



Potencia instantánea *P(t)*:

$$P(t) = V(t)\, I(t)$$

$$P(t) = V_0 I_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{V_0 I_0}{2} \sin 2\omega t$$

Potencia *promedio* disipada en *L* en AC

$$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

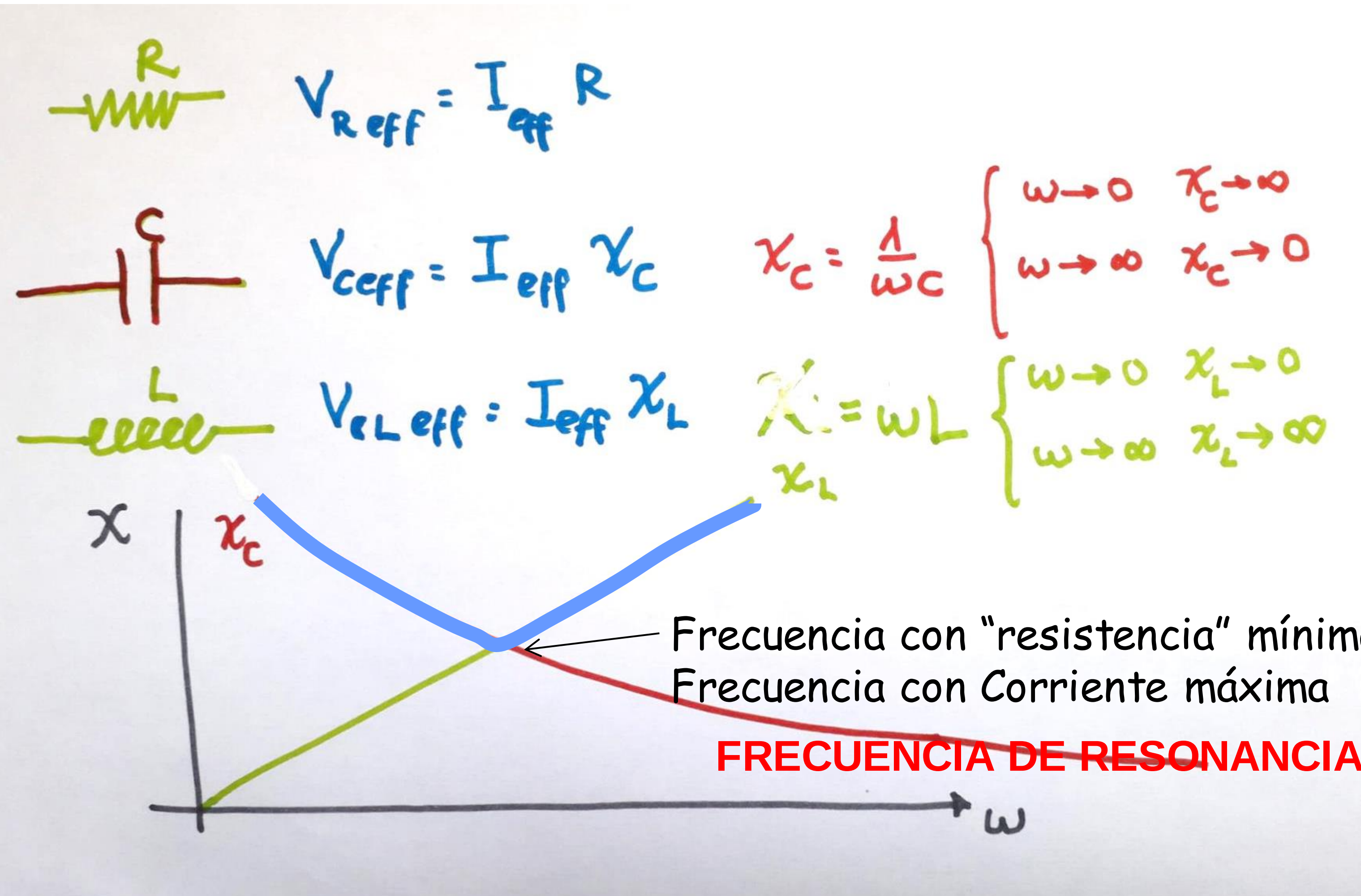
Potencia promedio $\langle P \rangle$ disipada por una corriente AC **sinusoidal**:

IMPORTANTE!!!

$$\boxed{\langle P \rangle = 0}$$

Resumen: Elementos *R*, *C*, *L* en AC

Los Condensadores y las Inductancias en AC se comportan como “Resistencias que varían con la frecuencia del voltaje aplicado….
Para

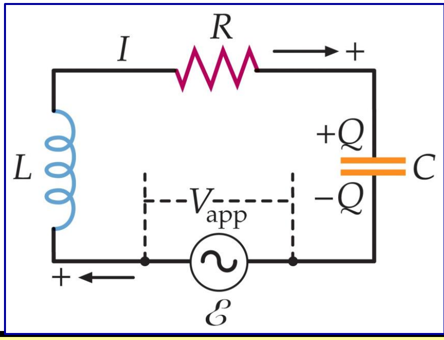


Frecuencia con “resistencia” mínima?
Frecuencia con Corriente máxima

FRECUENCIA DE RESONANCIA

Circuitos *R*,*C*, *L* en corriente alterna.

OBJETIVO: Analizar un Circuito en serie *R*, *C*, *L* en AC



¿Cómo relacionan el V(t) y la I(t)?

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

Análogo a R, X_L,X_C

$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

$$|Z| = \sqrt{\left[(X_L - X_C)^2 + R^2\right]}$$

Definiremos la Z, **impedancia** total del circuito:

Ojo, debido a los desfases los voltajes no suman como en DC

$$V_0^2 = (V_{L,0} - V_{C,0})^2 + V_{R,0}^2$$

$$\tan\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Circuito general *R*, *C*, *L* en AC

- Necesitamos métodos para circuitos AC capaces de describir *al mismo tiempo* las relaciones de *amplitud* y de *fase* entre *I(t)* y V(t).

$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

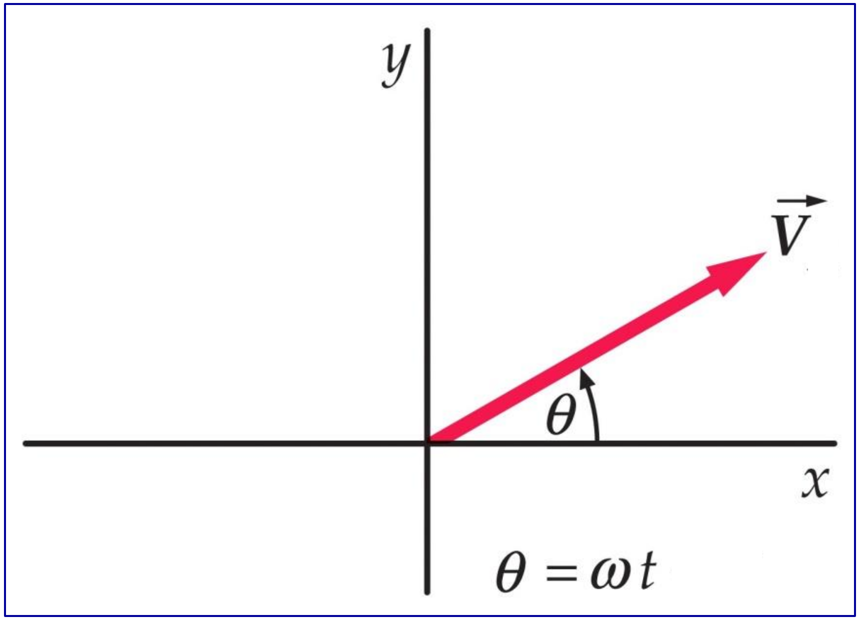
$$\boxed{I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)}$$

Método “geométrico”: **Fasores** o vectores rotantes (sólo a modo ilustrativo para entender fórmulas finales, identificando desfases con ángulos entre vectores)

Método de los *fasores* o vectores rotantes

En corriente alterna AC, tanto la tensión *V(t)* como la corriente *I(t)* tienen una *dependencia oscilatoria sinusoidal* con el tiempo *t*.

$\rightarrow$ Se pueden representar como las **proyecciones** sobre un eje coordenado (por ejemplo, el eje *x*) de **vectores rotantes** con *velocidad angular* ω : **Fasores**



Ejemplo:

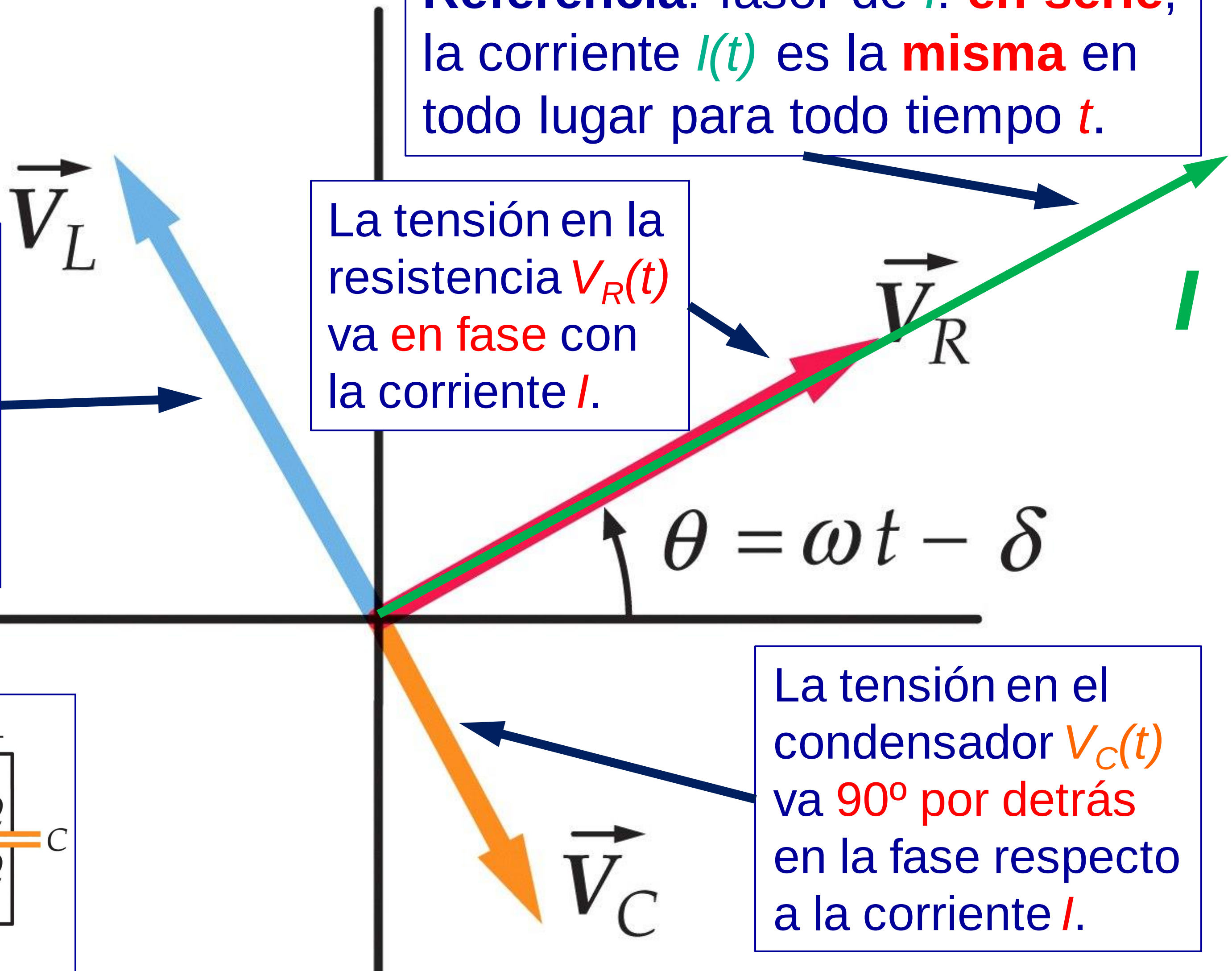
V(t): *proyección* sobre el eje *x* del *fasor* ***V***

Módulo o *longitud* del fasor: ***amplitud*** de la señal oscilatoria

$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

Intuición sobre desfases y fasores…

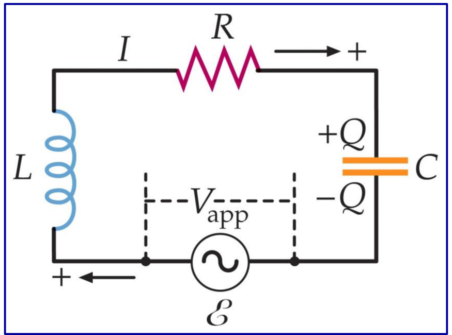
Referencia: fasor de *I*: **en serie**, la corriente *I(t)* es la **misma** en todo lugar para todo tiempo *t*.



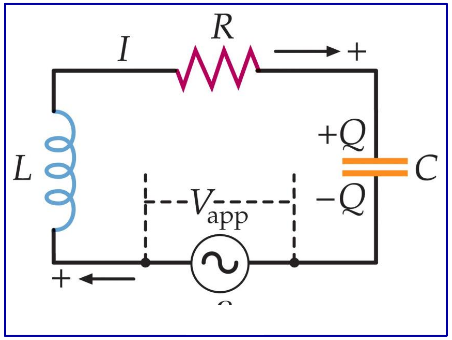
La tensión en la resistencia $V_R(t)$ va en fase con la corriente *I*.

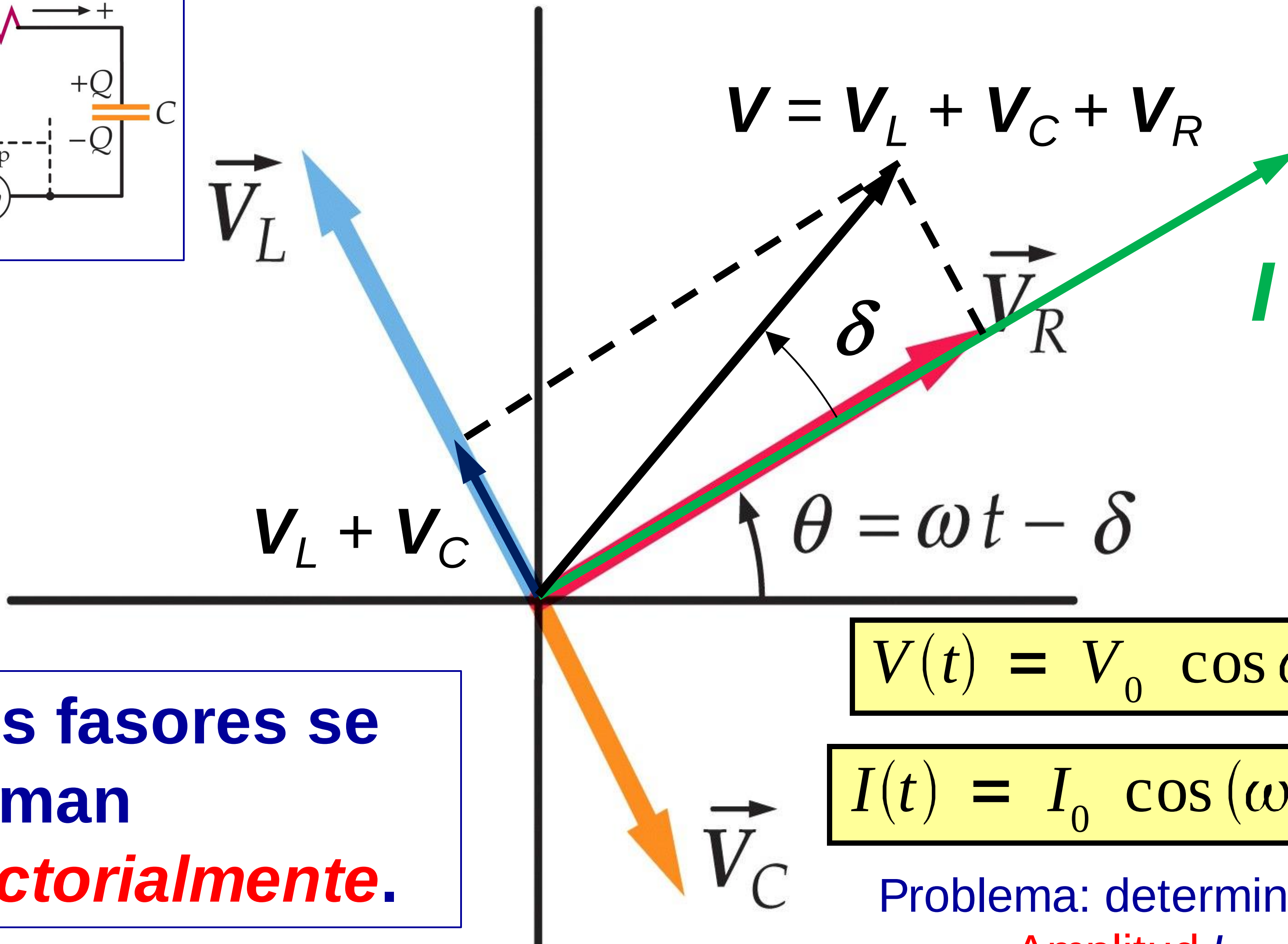
La tensión en la autoinductancia $V_L(t)$ va 90º por delante en la fase respecto a la corriente *I*.

La tensión en el condensador $V_C(t)$ va 90º por detrás en la fase respecto a la corriente *I*.



Circuito general *R*, *C*, *L* en serie





$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$

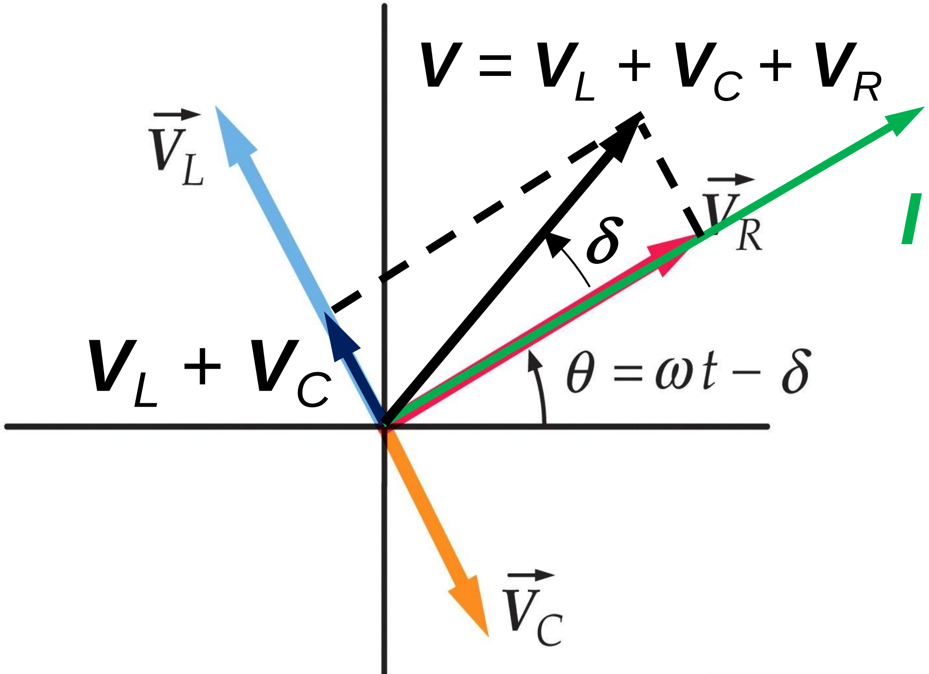
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Los fasores se suman *vectorialmente*.

Problema: determinar

- Amplitud I_0
- Desfase δ

Circuito general *R*, *C*, *L* en serie



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

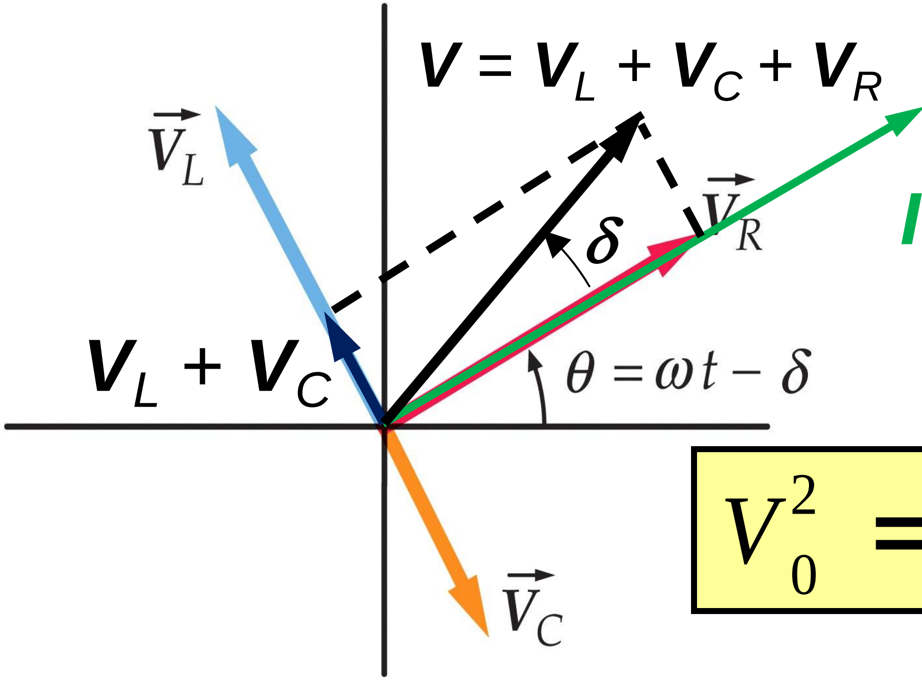
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Los ***módulos*** de los fasores (***amplitudes*** de las señales) verifican:

$$\boxed{V_0^2 = (V_{L,0} - V_{C,0})^2 + V_{R,0}^2}$$

$$\boxed{\tan \delta = \frac{V_{L,0} - V_{C,0}}{V_{R,0}}}$$

Circuito general *R*, *C*, *L* en serie



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{V_0^2 = (V_{L,0} - V_{C,0})^2 + V_{R,0}^2}$$

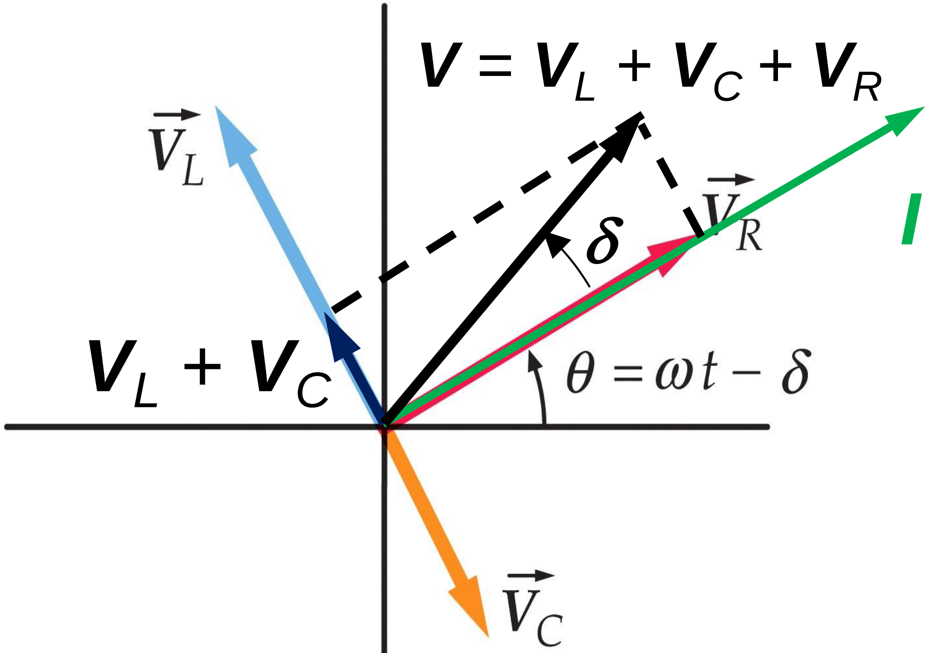
Ponemos los ***módulos*** de los fasores (***amplitudes*** de las señales) en términos de las ***reactancias*** correspondientes: *resistiva*, *inductiva*, *capacitiva*:

$$V_{R,0} = I_0 X_R = I_0 R$$

$$V_{L,0} = I_0 X_L = I_0 \omega L$$

$$V_{C,0} = I_0 X_C = \frac{I_0}{\omega C}$$

Circuito general *R*, *C*, *L* en serie

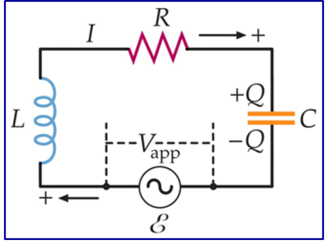


$$V_0^2 = (V_{L,0} - V_{C,0})^2 + V_{R,0}^2$$

$$\tan\delta = \frac{V_{L,0} - V_{C,0}}{V_{R,0}}$$

$$\rightarrow \quad V_0^2 = I_0^2\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]$$

$$\tan\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



$$V_0^2 = I_0^2\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]$$

$$\tan\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$|Z| = \sqrt{\left[\left(X_L - X_C\right)^2 + R^2\right]}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

Z, **impedancia** total del circuito: análogo a la R en DC

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

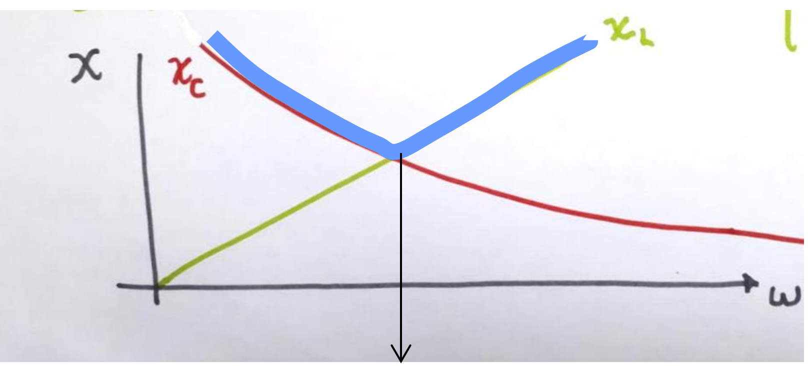
$$|Z| = \sqrt{\left[(X_L - X_C)^2 + R^2\right]}$$

Z, **impedancia** total del circuito: análogo a la R en DC

¿Cómo depende la Z de la frecuencia ω?

Z será mínima si X_L=X_C ⟶ ωL=1/ ωC

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



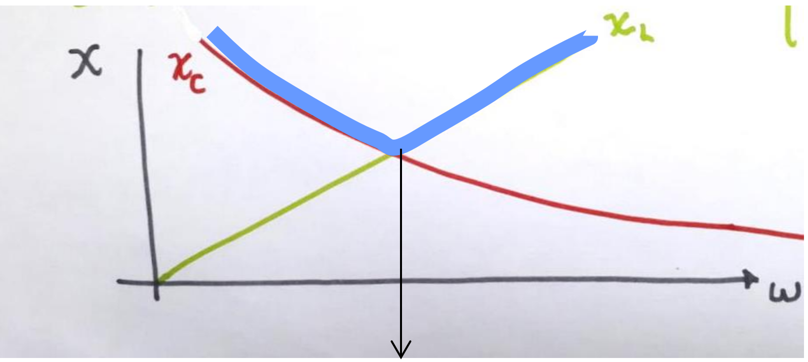
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ **frecuencia de resonancia**

¿Cómo depende la Corriente de la frecuencia ω?

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

$$|Z| = \sqrt{\left[(X_L - X_C)^2 + R^2\right]}$$

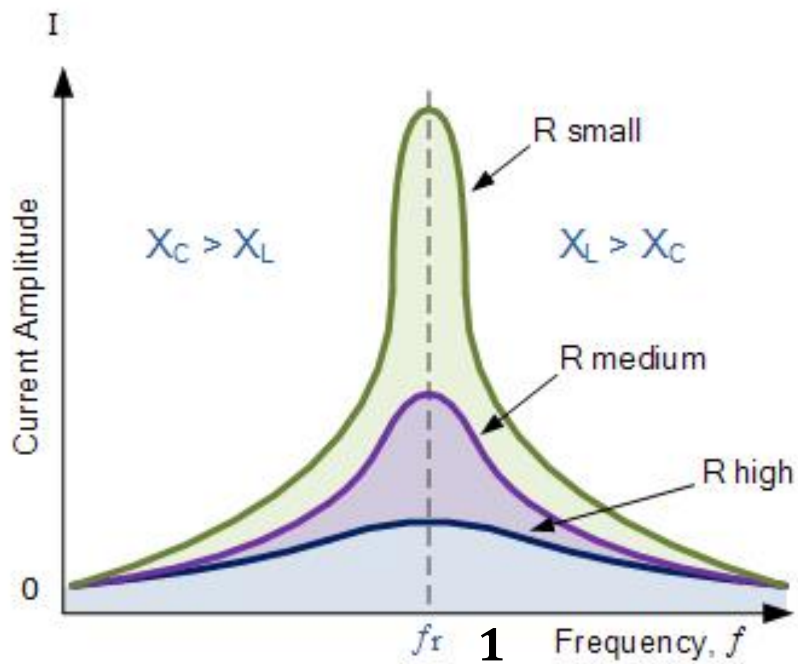


$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ **frecuencia de resonancia**

La I tiene un máximo muy pronunciado a la frecuencia de resonancia

La R regula el ancho del pico



$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonancia *RCL*

$$|Z| = \sqrt{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]} = \frac{V_0}{I_0}$$

Frecuencia de **resonancia**.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Para $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\longrightarrow$ $\delta = 0$

En la resonancia además:

la corriente está en fase con la tensión.

Videos recomendados como complementos

RCL fasores y numeros complejos

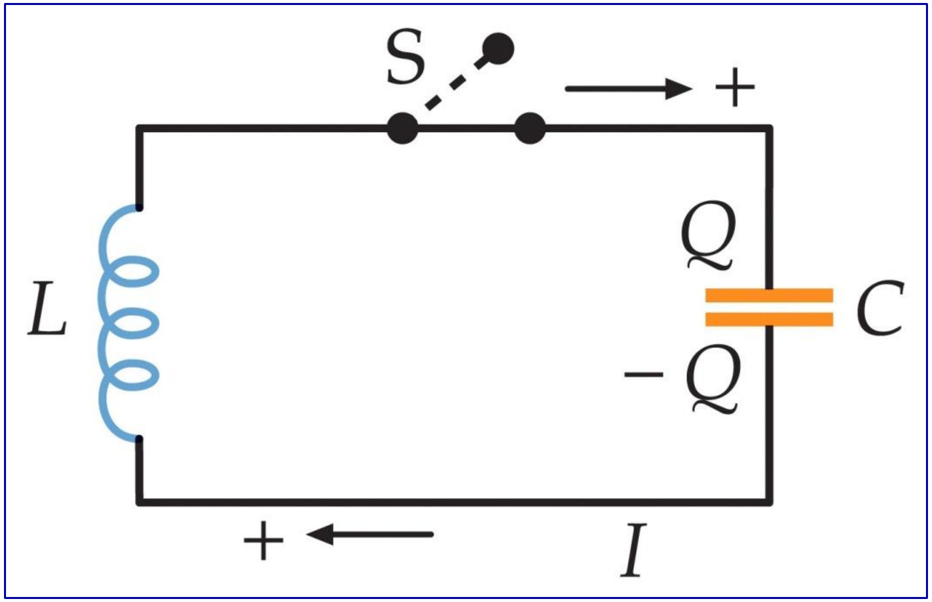
https://www.youtube.com/watch?v=z5mz02qQFnw&list=ULmBCR5nYIVgQ&index=5003
https://www.youtube.com/watch?v=H0StKpxSuRU&list=ULz5mz02qQFnw&index=5004

RCL sin fasores

https://www.youtube.com/watch?v=PRqAipvSH8I

OSCILACIONES PROPIAS DE CIRCUITOS RCL

Circuito simple LC



Ley de Kirchhoff:

$$-V_L + V_C = 0$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\boxed{\epsilon = -L\frac{dI}{dt}}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0}$$

Circuito simple *LC*: solución oscilatoria

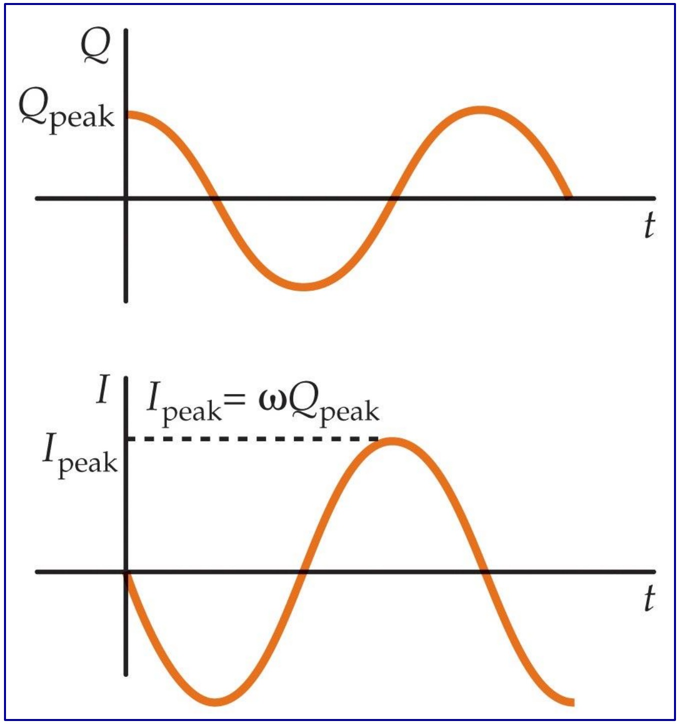
$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q = 0}$$

Solución:

$$\boxed{Q(t) = A\cos(\omega_0 t+\phi)}$$

La carga (y por tanto, también la corriente) son funciones oscilatorias con frecuencia:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$



Circuito simple *LC*

La energía total es constante pero oscila entre la cinética y la potencial: En un LC, tenemos dos clases de energía, la eléctrica y la magnética. Como no hay R,NO se disipa energía!!

Energía eléctrica en elcondensador:

$U_e = \frac{1}{2} Q V_c = \frac{1}{2} Q^2/C$

Si $Q(t) = Q_{max} \cos(\omega_0 t)$ $U_e = \frac{1}{2} (Q_{max}^2/C) \cos^2(\omega_0 t)$

Oscila entre $\frac{1}{2} (Q_{max}^2/C)$ y 0.

Energía magnética almacenada en la bobina:

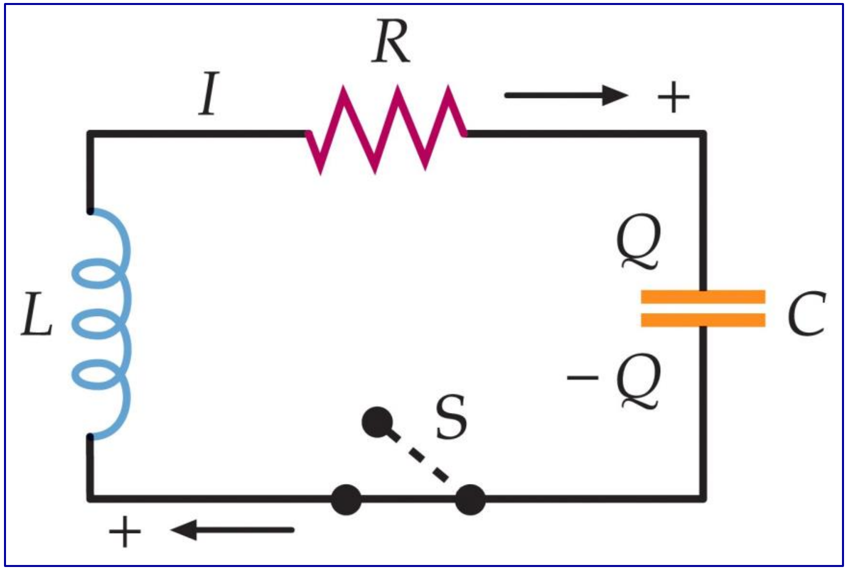
$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L(-\omega Q_{max} \operatorname{sen}(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2} (Q_{max}^2/C) \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)$

(ya que $\omega_0^2 = 1/LC$)

Oscila entre $\frac{1}{2} (Q_{max}^2/C)$ y 0

$U_{total} = \frac{1}{2} (Q_{max}^2/C) \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} (Q_{max}^2/C) \operatorname{sen}^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (Q_{max}^2/C)$ ***que es la energía inicialmente almacenada en el condensador.***

Circuito *RCL (sin generador)*



Añadimos resistencia *R*. Ley de Kirchhoff:

$$-V_L + V_R + V_C = 0$$

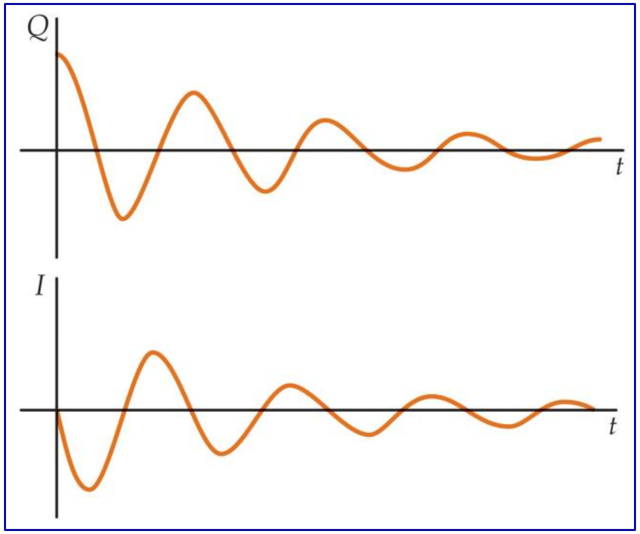
$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

Ecuación de un **oscilador armónico amortiguado**.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Circuito *RCL*: oscilaciones amortiguadas



$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$Q(t) = Q_{max}\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

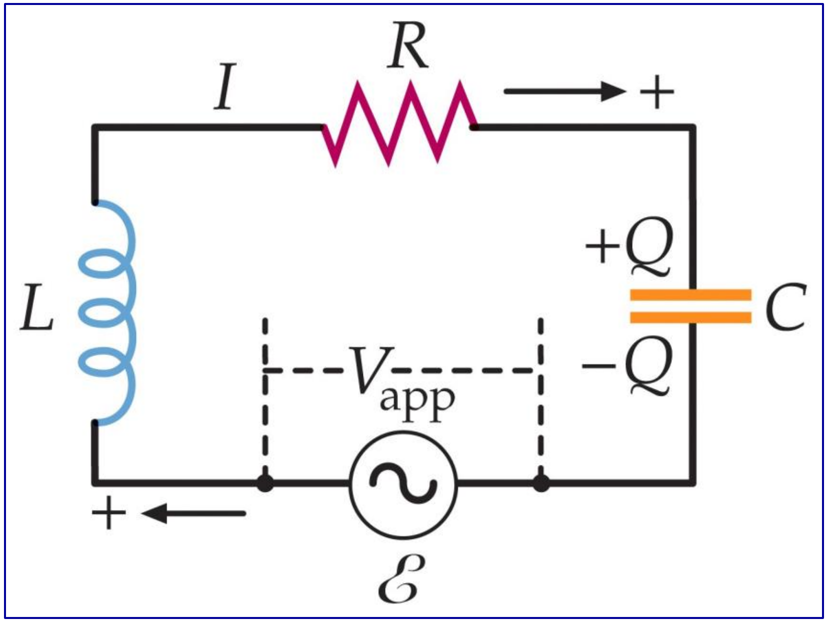
$\gamma = R/2L$ Coeficiente de amortiguamiento $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

Solución:
Función oscilatoria con frecuencia ω cuya amplitud decae exponencialmente en el tiempo con constante τ:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

Circuito *RCL* con fuente de frecuencia ω



Circuito RCL con generador (ya lo hemos visto): podemos interpretarlo en términos de ecs. diferenciales:

Ley de Kirchhoff:

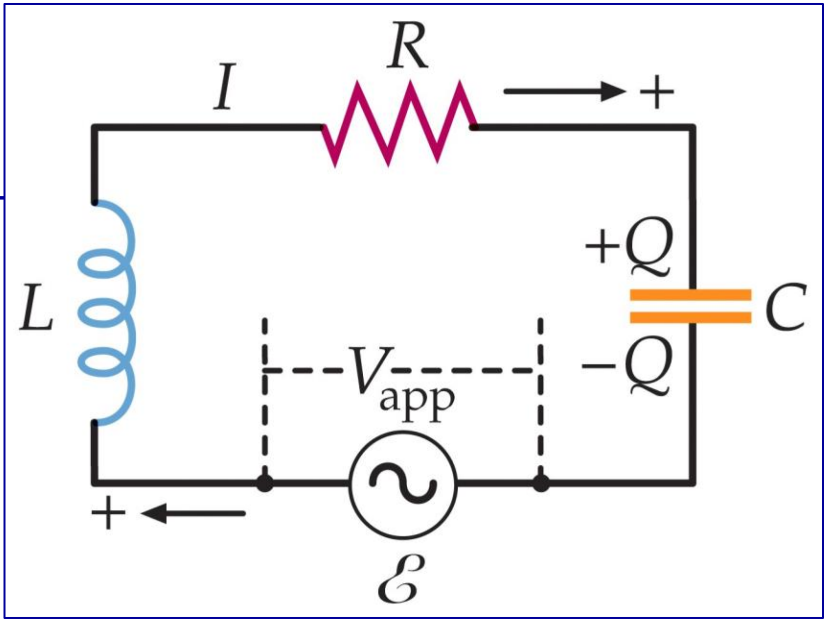
$$-V_L + V_R + V_C = V(t)$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V(t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{1}{L}V(t)}$$

Ecuación de un **oscilador armónico amortiguado** y **forzado**.

Circuito *RCL* con fuente de frecuencia ω



$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q = \frac{1}{L}V(t)$$

Asumimos *V(t)* oscilatoria con frecuencia ω:

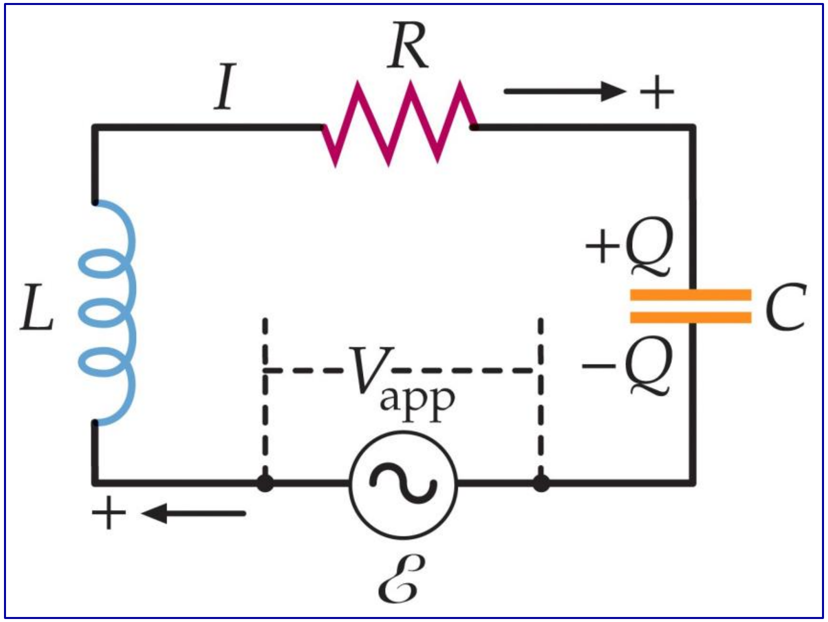
$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$

Buscamos *una* solución de la ecuación diferencial, válida para tiempos muy grandes cuando hayan desaparecido posibles comportamientos transitorios.
Físicamente, esperamos que la corriente sea también una función oscilatoria con la misma frecuencia ω:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t-\delta)$$

Debemos determinar la amplitud I_0 y el desfase δ.

Circuito *RCL* con fuente de frecuencia ω



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Sustituimos *V(t)* e *I(t)* en:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{1}{L} V(t)$$

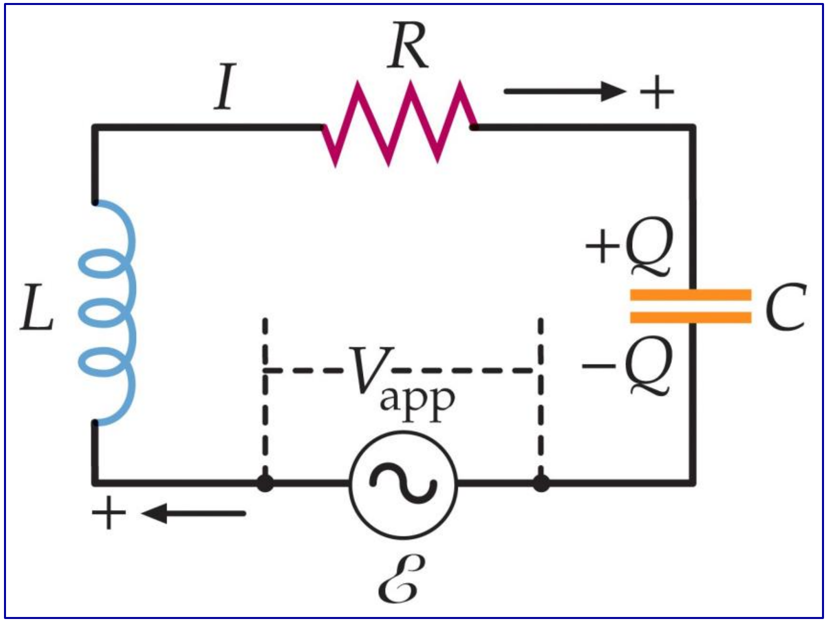
con $I = \frac{dQ}{dt}$:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I + \frac{1}{LC}\int I\, dt = \frac{1}{L} V(t)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Circuito *RCL* con fuente de frecuencia ω

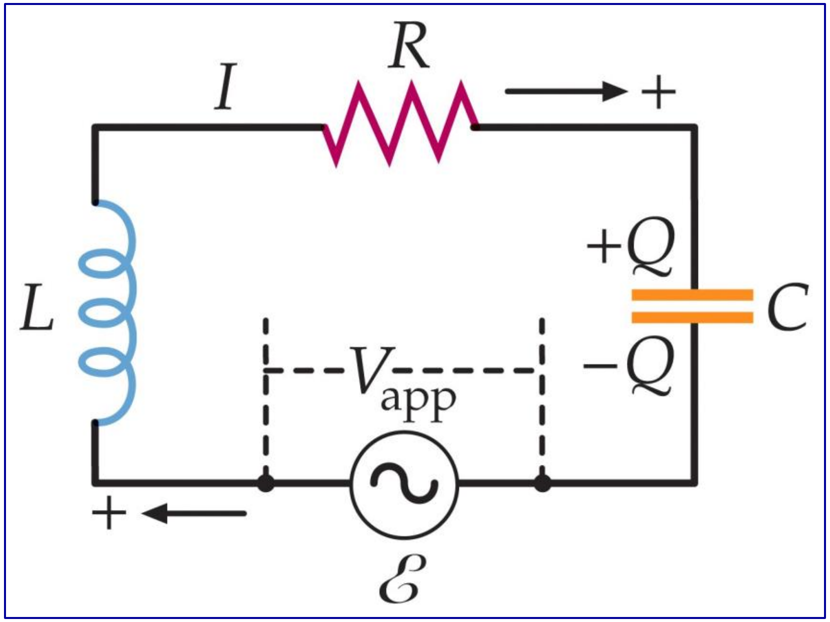


$$\tan\delta = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\frac{V_0}{I_0} = |Z|$$

$$|Z| = \sqrt{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]} = \frac{V_0}{I_0}$$

Resonancia *RCL*



$$|Z| = \sqrt{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]} = \frac{V_0}{I_0}$$

Resonancia: Vemos que *I(t)* es máxima para aquélla frecuencia ω_0 que hace mínima $|Z|$:

$$\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = 0$$

Condición de **resonancia**.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

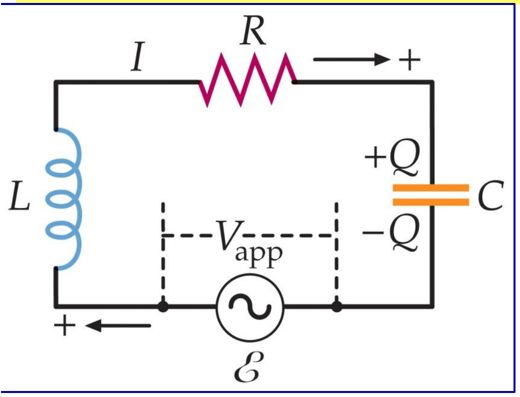
Frecuencia de **resonancia**.

En la resonancia además:

$$\phi = 0$$

En la resonancia, la corriente está en fase con la tensión.

Circuito *RCL* con fuente de frecuencia ω

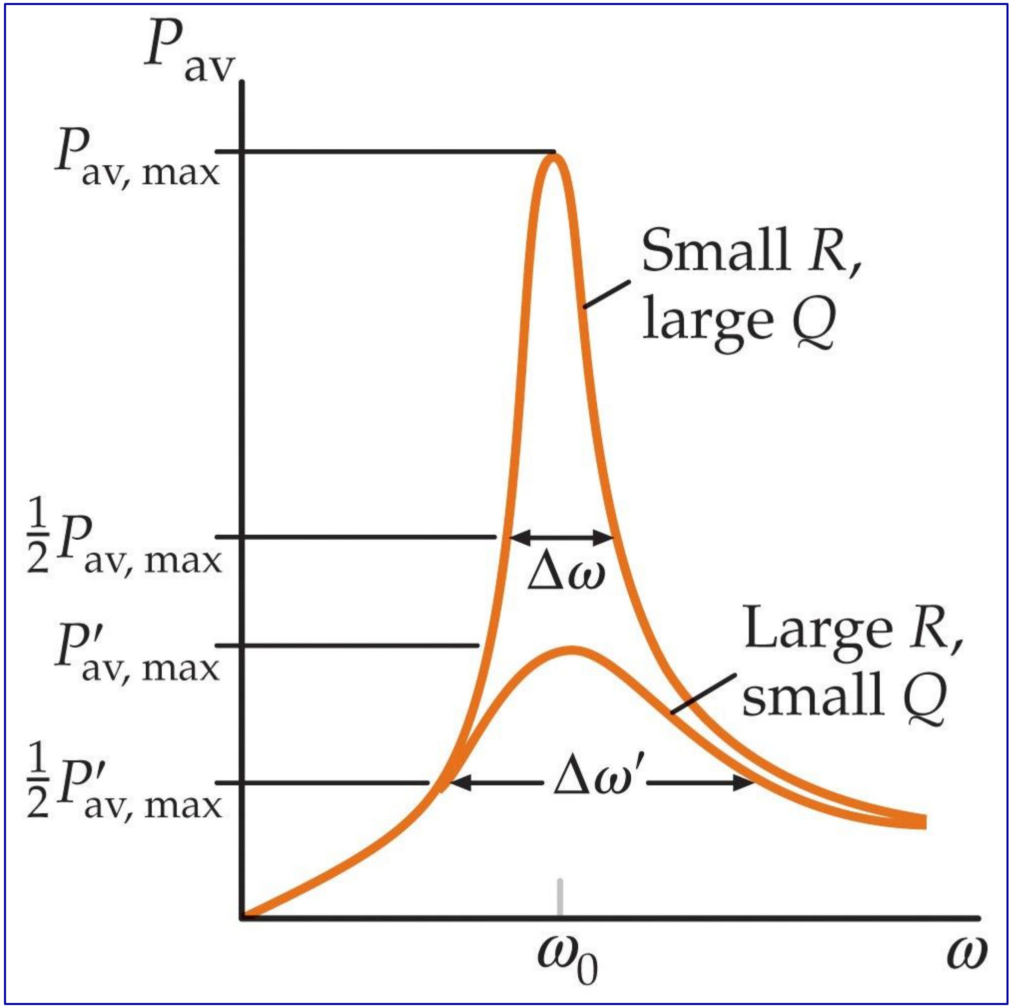


Frecuencia de **resonancia**.

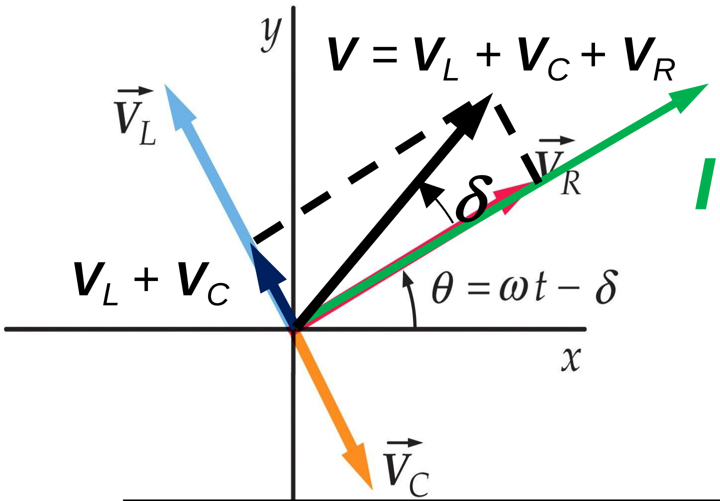
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

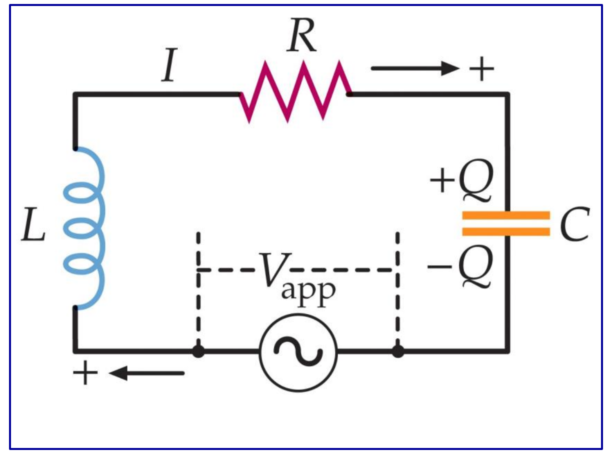
Curva de la *respuesta* del sistema *I(t)* como función de la frecuencia ω de la fuente: *máxima corriente* y *máxima potencia P transferida* para la frecuencia de resonancia ω_0.

La anchura del pico de resonancia depende de *R*: Factor de calidad Q (adimensional)



Circuito general *R*, *C*, *L* en serie





Resultado final:

$$\boxed{I_0 = \frac{V_0}{|Z|}}$$

con $$\boxed{|Z| = \sqrt{\left[\left(X_L - X_C\right)^2 + R^2\right]} = \sqrt{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right]}}$$,

|*Z*| : módulo de la **impedancia** total del circuito: generalización del concepto de resistencia

$$\boxed{\tan\delta = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}}$$