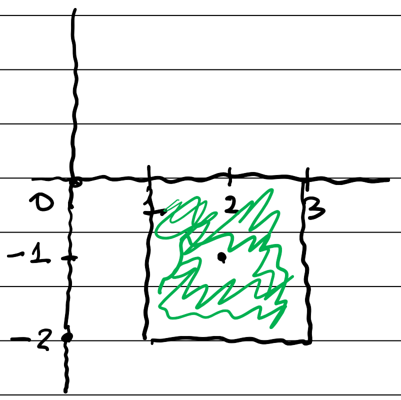
Problema 1. Para cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y el correspondiente conjunto E que se dan, demuestra que hay un único punto $a \in E$ tal que $f(a) = a$. Describe un procedimiento para calcular a con dos decimales de precisión.

(a) $f(x,y) = \left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cos y + 2 \,,\, \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - 1 \right)$, $E = \{|x-2| \le 1, |y+1| \le 1\}$.

(b) $f(x,y) = \left(\frac{xe^y}{40} \,,\, 1 + \frac{x^2 + 2\cos y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y-1| \le 1\}$.

(e) $f(x,y) = \left(\frac{e^{x/3}}{4} + \frac{y^2}{10} \,,\, \frac{1}{5} + \frac{x^2 y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y| \le 1\}$.

• a) 1) $f: E \longrightarrow E \qquad (x,y) \in E$



$\left|\frac{1}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cos y + 2 - 2\right| =$

$\left|\frac{1}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cos y\right| \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \le 1$

$\left|\frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - 1 + 1\right| =$

$= \left|\frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} y\right| \le \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \le 1$

2) $\|f(x,y) - f(x',y')\|_\infty \le k \, \|(x,y) - (x',y')\|_\infty$, $k < 1$

(1)

$\left|\frac{1}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cos y + 2 - \frac{1}{3} \operatorname{sen} x' + \frac{1}{3} \cos y' - 2\right| \le$

$\le \frac{1}{3} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| + \frac{1}{3} |\cos y - \cos y'| \overset{\text{TVM}}{\le}$

$\le \frac{1}{3} |x - x'| + \frac{1}{3} |y - y'| \le \frac{2}{3} \|(x,y) - (x',y')\|_\infty$

$\left|\frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - 1 - \frac{1}{6} \cos x' - \frac{1}{2} \operatorname{sen} y' + 1\right|$

$\le \frac{1}{6} |\cos x - \cos x'| + \frac{1}{2} |\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y'| \overset{\text{TVM}}{\le}$

$\le \frac{1}{6} |x - x'| + \frac{1}{2} |y - y'| \le \frac{2}{3} \|(x,y) - (x',y')\|_\infty$

La desigualdad (1) se cumple con $k = 2/3 < 1$. Por tanto f tiene un único punto fijo p

¿Cómo se aproxima p?

$x_0 = (2,-1)$, $f(x_0)$, $f^2(x_0)$, $f^3(x_0)$, ..., $f^n(x_0)$, ...

Buscar n tal que $\|f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)\|_\infty < 10^{-2}$

Sabemos $\|f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)\|_\infty \leq k^n \|f(x_0) - x_0\|_\infty$

$\|f(2,-1) - (2,-1)\|_\infty \leq \frac{2}{3}$; $k = 2/3$. Es suficiente elegir

n tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3} \leq 10^{-2} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 10^{-2} \iff$

$(n+1)\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) \leq -2$; $n+1 \geq -2/\log_{10}(2/3)$

Problema 2. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que A es contractiva de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ pero no lo es de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

---

1) $A : (\mathbb{R}^2, \| \ \|_1) \to (\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$

$|||A|||_{1\to 1}$ = máximo de la suma de los valores absolutos de las columnas de A (prob 18, Hoja 1)

$|||A|||_{1\to 1} = \frac{1}{10} \max\{9, 9\} = 9/10 < 1$

Si $\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'} \in \mathbb{R}^2$, $\left\|A\binom{x}{y} - A\binom{x'}{y'}\right\|_1 \leq |||A|||_{1-1} \left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|_1$

$= \frac{9}{10} \left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|_1$ es contractiva con $k = 9/10 < 1$.

2) $A : (\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$

$|||A|||_{\infty\to\infty} = \frac{1}{10} \max\{11, 7\} = 11/10$

$\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$, $\binom{x'}{y'} = \binom{0}{0}$, $\left\|A\binom{1}{1} - A\binom{0}{0}\right\|_\infty = \left\|\binom{11/10}{7/10}\right\|_\infty = 11/10$

$\left\|\binom{1}{1} - \binom{0}{0}\right\|_\infty = 1 \Rightarrow k \geq 11/10$ No es contractiva

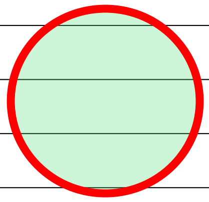
Problema 3. En este ejercicio exploramos lo que pasa al debilitar alguna hipótesis del teorema de la aplicación contractiva.

a) (Espacio compacto, $K = 1$). Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad. Da un ejemplo de una $f : C \to C$ sin punto fijo, pero que cumpla $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|$ para cualesquiera $p, q \in C$.

b) (Espacio no completo). Da un ejemplo de una $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ contractiva pero sin punto fijo.

---

a) $f : C \to C$



$f(p) = -p$ No tiene punto fijo

$\|f(p) - f(q)\| = \|-p - (-q)\| = \|p - q\|$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{2}x$

$|f(x) - f(x')| = \frac{1}{2}|x - x'|$, $k = 1/2$

Si fuera $\frac{1}{2}x = x \Rightarrow x = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Problema 4. Vamos a hacer uso del siguiente resultado, donde tanto las normas involucradas como las bolas son las euclídeas estándar.

> *Sean un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $a \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que existen dos números $r, \lambda > 0$ y una matriz* **ortogonal** *P tales que*
>
> $$\text{para todo } x \in \overline{B}(a,r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } v^t\big(P\,Df(x)\big)\,v \;\geq\; \lambda\|v\|^2 .$$
>
> *Entonces f es inyectiva en $B(a,r)$ y $f\big(B(a,r)\big) \supset B\big(\,f(a)\,,\,\lambda\,r\,\big)$.*

Se pide dar un radio r de inyectividad alrededor de a y una bola centrada en $f(a)$ en la que esté definida la inversa local con $f(a) \mapsto a$, para cada una de las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y puntos $a \in \mathbb{R}^2$ siguientes:

Indicación: acuérdate de aprovechar la desigualdad $v_1 v_2 \geq -(v_1^2 + v_2^2)/2$.

a) $a = (4,2)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy + e^{y/10} \\ 5x - \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $a = (1,1)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + \frac{\operatorname{sen} y}{6} \\ \frac{x}{10} - e^y \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $a = (0,1)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} 5\,e^y\,x + \cos y \\ x + y^4 \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = I_2$.

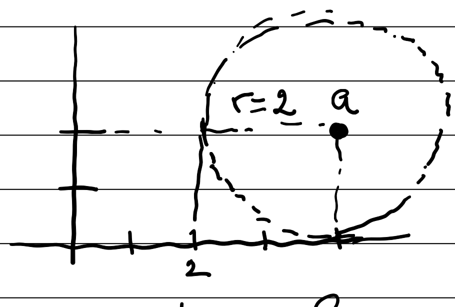
---

a) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $v^t P\, Df(x,y)\, v =$

$$(v_1,v_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x+\frac{1}{10}e^{y/10} \\ 5 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (v_2, v_1)\begin{pmatrix} y v_1 + x v_2 + \frac{1}{10}e^{y/10} v_2 \\ 5v_1 - y v_2 \end{pmatrix} = y\, v_1 v_2 + x\, v_2^2 + \frac{1}{10} e^{y/10} v_2^2$$

$$+ 5v_1^2 - y v_1 v_2 = 5v_1^2 + \left(x + \frac{1}{10}e^{y/10}\right) v_2^2$$



Si $(x,y) \in \overline{B}(a, \underset{\leq r}{2})$ con $a = (4,2)$ es claro que $x \geq 2$ e $y \geq 0$

Entonces

$$v^t P\, Df(x,y)\, v > 5v_1^2 + 2v_2^2 \geq 2\left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|_2^2$$

Tomar $\lambda = 2$

f es inyectiva en $B(a,2)$ y tiene inversa definida en $B(f(a),4)$.

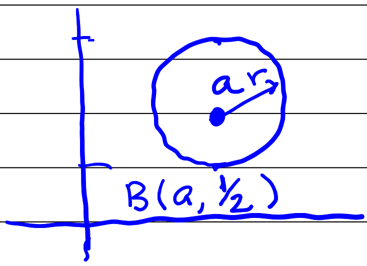
b) $a=(1,1)$, $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^3+\frac{1}{6}\operatorname{sen} y \\ \frac{x}{10}-e^y\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

S/ $v^t P Df(x,y) v = (v_1,v_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x^2 & \frac16\cos y\\ \frac1{10} & -e^y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

$= (v_1,-v_2)\begin{pmatrix}3x^2v_1+\frac16(\cos y)v_2\\ \frac1{10}v_1 - e^y v_2\end{pmatrix} =$

$3x^2v_1^2 + \frac16(\cos y)v_1v_2 - \frac1{10}v_2v_1 + v_2^2e^y$

$\boxed{-(v_1^2+v_2^2) \le 2v_1v_2 \le v_1^2+v_2^2}$



$(x,y)\in B(a,1/2) \Rightarrow x\ge 1/2$

$\frac12 \le y \le 3/2 \le \pi/2$

$v^tPDf(x,y)v \ge 3x^2v_1^2 - \frac1{12}(\cos y)(v_1^2+v_2^2) - \frac1{20}(v_1^2+v_2^2)+v_2^2e^y$

$=(3x^2-\frac1{12}\cos y-\frac1{20})v_1^2 + (e^y-\frac1{12}\cos y-\frac1{20})v_2^2$

$\ge \underbrace{(\frac34-\frac1{12}-\frac1{20})}_{>0} v_1^2 + (e^{1/2}-\frac1{12}-\frac1{20})v_2^2 \ge \lambda \left\|\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right\|^2$

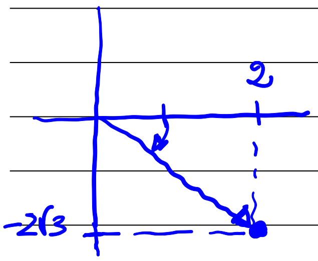
con $\lambda = \min\{\frac34-\frac1{12}-\frac1{20},\ e^{1/2}-\frac1{12}-\frac1{20}\} = \frac34-\frac1{12}-\frac1{20}>0$

Problema 5.

> Se llama **inversa local** de una función f a la inversa $\left(f|_U\right)^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ de cualquier restricción suya a un abierto $f|_U$ que sea inyectiva.

Elige una inversa local del cambio a polares $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$, definida alrededor del punto $x = 2$, $y = -2\sqrt{3}$. Calcula la matriz jacobiana en este punto de la inversa local elegida.

$\left.\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \begin{matrix} 0<r<\infty \\ 0\le\theta<2\pi \end{matrix} \text{ es inyectiva}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} 0<r<\infty \\ 2\pi<\theta<4\pi \end{matrix}\right\}$



$(x,y) = (2, -2\sqrt{3})$

$r = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

θ t.q. $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e.d.

$\theta = -\pi/3$

$U = \{(r,\theta) : 0<r<\infty, \ -2\pi<\theta<0\}$

$D(f|_U)^{-1}(2,-2\sqrt{3}) = \left[Df(4,-\pi/3)\right]^{-1}$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}_{(4,-\pi/3)} = \begin{pmatrix} 1/2 & +4\sqrt{3}/2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 4\,1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \dots \sim$

Problema 9. Un **polinomio complejo** es una función $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por

$$\mathbb{C}\ni z \longmapsto f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n ,$$

donde $a_0,\ldots,a_n$ son números complejos constantes.
Se sabe que si $f(z)$ es un polinomio complejo *no constante* y $U\subseteq\mathbb{C}$ es cualquier abierto, entonces $f(U)$ también es un abierto. Deduce de esto que una tal función es suprayectiva (teorema fundamental del Álgebra).

Indicación: demuestra que si una sucesión $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ es tal que $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ ya era acotada para empezar.

S/ Hay que probar que $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es abierto, $f(\mathbb{C})$ es abierto en $\mathbb{C}$. Si probamos que $f(\mathbb{C})$ es cerrado, tendríamos $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ porque $\mathbb{C}$ es conexo.

Lema 1. Si $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ con límite en $\mathbb{C}$, entonces $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada

Lema 2 Si $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ es tal que $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ también es acotada

D/ Si $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ no fuera acotada, $\exists\{j_k\}\nearrow\infty$ (subsu) t.q. $|z_{j_k}|\xrightarrow{k\nearrow\infty}\infty$. Sea M una cota de $\{|f(z_j)|\}_{j=1}^{\infty}$.

Tenemos

$$\frac{M}{|z_{j_k}|^n}\geq\frac{|f(z_{j_k})|}{|z_{j_k}|^n}=\frac{1}{|z_{j_k}|^n}\left|a_n z_{j_k}^n + a_{n-1}z_{j_k}^{n-1}+\cdots+a_0\right|$$

0

$$\geq\frac{1}{|z_{j_k}|^n}|a_n z_{j_k}^n|-\frac{1}{|z_{k_j}|^n}\left|a_{n-1}z_{j_k}^{n-1}+\cdots+a_0\right|$$

$$=|a_n|-\left|a_{n-1}\frac{1}{z_{j_k}}+\cdots+\frac{a_0}{z_j^n}\right|\xrightarrow{k\nearrow\infty}|a_n|\neq 0$$

imposible porque $a_n\neq 0$.

Probemos que $f(\mathbb{C})$ es cerrado. Sea $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}\subset f(\mathbb{C})$ tal que $\lim_{j\to\infty} w_j = w_0\in\mathbb{C}$. Como $w_j\in f(\mathbb{C})$, existe

$z_j \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z_j) = w_j$. La sucesión $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ $= \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ está acotada por el lema 1. Por el lema 2, $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada. Existe una subsucesión $\{z_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge, digamos a $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$f(z_0) = f\left(\lim_{k\to\infty} z_{j_k}\right) \overset{f \text{ cont}}{=} \lim_{k\to\infty} f(z_{j_k}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} w_{j_k} = w_0$$

y entonces $w_0 = f(z_0) \in f(\mathbb{C})$