Estructuras Algebraicas

Hoja 1. Grupos.

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los dos ejes OX y OY. Sea

$$V = \{\text{id}, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_\pi\},$$

donde id es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^2$; σ_X y σ_Y son las simetrías respecto a los ejes OX y OY, respectivamente y ρ_π es una rotación de ángulo π en torno al origen. Demostrad que $(V, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $ab = b \circ a$ para todo $a, b \in V$ y $\circ$ es la composición de aplicaciones. Hallad la tabla de grupo de $(V, \cdot)$, conocido como 4-*grupo de Klein*.

2. En el intervalo $I = (-1, 1)$ de la recta real se define la siguiente operación:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

para $x, y \in I$. ¿Es $(I, *)$ un grupo?

3. Sea G un grupo. Demostrad que las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) G es abeliano.

(ii) $(ab)^2 = a^2b^2$ para todo $a, b \in G$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$para todo $a, b \in G$.

4. Demostrad que un grupo G en el que todo $g \in G$ satisface $g^2 = 1$ es necesariamente abeliano.

5. Demostrad que para que un subconjunto distinto del vacío de un grupo finito sea subgrupo basta que sea cerrado para la operación. Encontrad un contraejemplo en un grupo infinito.

6. Sea $\{H_i : i \in I\}$ un conjunto no vacío de subgrupos de un grupo G. Demostrad que el subconjunto $\bigcap_{i \in I} H_i$ de G es un subgrupo. La intersección arbitraria de subgrupos es un subgrupo.

7. Sea G un grupo y $H \leq G$. Definid explícitamente una relación de equivalencia en G con la propiedad que, para cada $g \in G$, la clase de equivalencia de g sea Hg.

8. (Transitividad de índices) Si $H \leq K \leq G$ y G es finito, probad que

$$|G : H| = |G : K||K : H|.$$

9. Sean $H \leq K \leq G$. ¿Cuántos elementos puede tener K si $|H| = 4$ y $|G| = 24$?

10. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G. Encontrad todos los posibles órdenes de $H \cap K$ cuando:

a) $|H| = 16$ y $|K| = 20$. **b)** $|H| = |K| = 7$. **c)** $|H| = 15$ y $|K| = 14$.

11. Sea G un grupo, se define el centro de G como $\mathbf{Z}(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$. Demostrad que $\mathbf{Z}(G) \lhd G$.

12. El grupo D_6 diédrico de orden 6 es el grupo de transformaciones del espacio que dejan invariante un triángulo equilátero. Escribimos r para la rotación de $2\pi/3$ alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$, y escribimos s para la reflexión sobre el eje OY. Demostrad que:

- **a)** $o(r) = 3$ y $o(s) = 2$.
- **b)** $r^i \neq s$ para cualquier exponente $i \in \mathbb{Z}$.
- **c)** $sr^i \neq sr^j$ si $i, j \in \{0, 1, 2\}$ con $i \neq j$.
- **d)** $\mathsf{D}_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \langle r, s \rangle$.
- **e)** $sr^i = r^{-i}s$ para cualquier $i \in \mathbb{Z}$.
- **f)** $\mathbf{Z}(\mathsf{D}_6) = 1$.
- **g)** $\langle r \rangle \triangleleft \mathsf{D}_6$.

13. Escribid la tabla de grupo de S_3. Enumerad los subgrupos de S_3 indicando cuáles son normales.

14. Hallad todos los elementos del grupo $\mathsf{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y determinad el orden de cada uno. Hallad los elementos de orden 9 del grupo $\mathsf{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

15. Sea G un grupo, decide razonadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- **a)** $H \leq G$ y H abeliano implica $H \triangleleft G$.
- **b)** $H \leq G$ y $|H| = 2$ implica $H \triangleleft G$.
- **c)** Si $H \triangleleft K$ y $K \triangleleft G$, entonces $H \triangleleft G$.
- **d)** Si $H \triangleleft G$ y $|H| = m$ entonces H es el único subgrupo de G de orden m.

16. Si N es un subgrupo normal de G y $|N| = 2$, demostrad que entonces $N \leq \mathbf{Z}(G)$.

17. Demostrad que si un grupo G tiene orden par, entonces existe un elemento $g \neq 1$ de G que es su propio inverso. (Es decir, los grupos de orden divisible por 2 tienen al menos un elemento de orden 2.)

18. Encontrad un grupo G y elementos $a, b \in G$ tales que $o(a)$ y $o(b)$ sean coprimos pero $o(ab) \neq o(a)o(b)$.

19. Sea G un grupo y $g \in G$ de orden finito. Demostrad que si $j \in \mathbb{Z}$ es coprimo con $o(g)$ entonces $\langle g^j \rangle = \langle g \rangle$.

20. Sean $g, h \in G$ de orden finito con $(o(g), o(h)) = 1$. Demostrad que si $gh = hg$ entonces $o(gh) = o(g)o(h)$.

21. Sea G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{N}$. ¿Es $G_n = \{x \in G \mid o(x) \text{ divide a } n\}$ un subgrupo de G? ¿Ocurre lo mismo si G no es abeliano?

22. Encontrad el número de generadores de los grupos cíclicos de órdenes $6, 8, 12$ y 60.

23. Encontrad el número de elementos de cada uno de los grupos cíclicos indicados:

- **a)** El subgrupo de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ generado por la clase de $25 \in \mathbb{Z}$.
- **b)** El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por i.
- **c)** El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- **d)** El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $1 + i$.

24. Mostrad que en un grupo cíclico finito G de orden n, la ecuación $x^m = 1$ tiene exactamente m soluciones para cada m que divide a n. ¿Qué ocurre si $1 < m < n$ y m no divide a n?

25. Decide razonadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Todo grupo cíclico es abeliano.

b) Todo grupo abeliano es cíclico.

c) El grupo aditivo $\mathbb{Q}$ es cíclico.

d) Todo elemento no trivial de un grupo cíclico es generador.

e) Todo grupo de orden menor o igual que 4 es cíclico.

f) Todo grupo cíclico de orden mayor que 2 tiene al menos dos generadores distintos.

26. (Grupo cuaternio) Sea $G \leq GL_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demostrad que $o(A) = o(B) = 4$; $A^2 = B^2$, y $BA = AB^3$.

b) Demostrad que $G = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$ con $|G| = 8$.

c) Observad que se puede calcular la tabla de grupo de G con los datos de **a)**.

d) Demostrad que todo subgrupo de G es normal y hallad $\mathbf{Z}(G)$.

El grupo G se llama *grupo cuaternio* de orden 8 y se denota por Q_8.

27. Sea A un grupo abeliano. Demostrad que $A_{\text{tor}} := \{a \in A \mid o(a) < \infty\} \leq A$. Comprobad que $\{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid o(M) < \infty\}$ no es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

28. Demostrad que ninguno de los grupos $\mathsf{C}_n \times \mathsf{C}_n$, $\mathsf{C}_n \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es cíclico si $n \geq 2$.

29. Considerando las matrices reales $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, demostrad que el producto de elementos de orden finito no tiene por qué resultar un elemento de orden finito.

30. Sea p primo y sea $n \in \mathbb{N}$. Sean H y K subgrupos de C_{p^n}. Demostrad que $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

31. Sea G una grupo y $N \lhd G$ un subgrupo normal de G. Sea $x \in G$ de orden finito. Demostrad que el orden de xN en G/N es un divisor del orden de x en G.

32. Sea $N \lhd G$ con $|G/N| = n$. Demostrad que si $x \in G$ satisface $x^m = 1$ y $(n, m) = 1$, entonces $x \in N$.

33. Demostrad que si H es un subgrupo de un grupo G, $H \leq \mathbf{Z}(G)$ y G/H es cíclico, entonces G es abeliano.

34. Dad un grupo G y $N \lhd G$ tales que N y G/N sean cíclicos pero G no lo sea.

35. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G con $H \cap K = 1$. Demostrad que $HK \lhd G$ y cualquier elemento de H conmuta con cualquier elemento de K.