2. (a) Si A es una matriz de orden 3 con $\det(A) = \frac{1}{3}$, entonces $\det(3A) = 1$.

FALSO. Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 1/3$.

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 1. \quad \left(\forall A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \ \det(3A) = 3^3 \det(A) \right)$$

(b) Si A es una matriz invertible y B es una matriz singular (det. nulo), entonces AB es también singular.

(Damos por hecho que ambas son cuadradas, ya que B tiene determinante y AB también).

VERDADERO $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot 0 = 0$.

$\Rightarrow AB$ es también singular (tiene det. nulo.)

(c) Si A es invertible y B es una matriz singular, entonces $A+B$ es invertible

FALSO. Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ invertible} \\ |B| = 0 \Rightarrow B \text{ singular} \end{array} \right\} A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ no invertible}$$

(d) $A = (a_{ij})$ de orden 4 dada por $a_{ij} = 10i + j \Rightarrow |A| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \rightsquigarrow |A| \underset{f_4 - f_3}{\overset{f_2 - f_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

dos filas iguales

VERDADERO

$\boxed{3.}$

(a,b) $V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\boxed{\dim V}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{l.i.} \rangle \Rightarrow \underline{\dim(V) = 2.}$

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ para $a, b \in \mathbb{R}$ determinados

$\Rightarrow$ SEL compatible

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 0 & -2 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x \\ 0 & 0 & t+2y \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{V = \{(x,y,z,t) : 0 = z+x,\ 0 = t+2y\}}$

Ecuaciones implícitas de V

dim W:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{l.i} \rangle \Rightarrow \underline{\dim(W) = 3}$$

$$\text{Sea } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \text{SEL compatible}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & -1 & -3 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 3z+t+x+y \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+3z+t=0\}}$$ Ec. implícita de W.

(c) $\boxed{\dim(V+W):}$

$$V+W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{generadores de } V}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\text{generadores de } W.} \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W+V = \mathbb{R}^4, \quad \underline{\dim(W+V) = 4}$$

$$V \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+z=0, \ 2y+t=0, \ x+y+3z+t=0\}.$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \\ -4\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(3) + (2) = (1) + (4)$$

$\underline{\dim(W \cap V) = 1}$. Se cumple que: $\dim(W) + \dim(V) = \dim(W \cap V) + \dim(V + W)$

(Fórmula de Grassmann)

$\boxed{4}$ $T: P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x] \longrightarrow P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x]$

$T(1) = 1 + x + x^2 + x^3$, $T(x) = 1 + x + x^2$, $T(x^2) = 1 + x + x^2 - x^3$

(a) $\beta_1 = \{1, x-1, (x-1)^2\} = \{1, x-1, x^2-2x+1\} = \{u_1, u_2, u_3\}$

Sea $\mathcal{E}_2$ la base canónica de $P_{\mathbb{R}}[x]$, $\mathcal{E}_2 = \{1, x, x^2\}$ y

las coordenadas de los elementos de β_1 en la base $\mathcal{E}_2$:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2} \right\} \rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

triangular $\Rightarrow$ son l.i. y son $3 = \dim P_{\mathbb{R}}^{2}[x]$

$\Rightarrow B_1$ es base

↳ matriz de cambio de base en $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$ con β_1 salida, $\mathcal{E}_2$ llegada.

$\Downarrow$

β_1 es base

$\beta_2 = \{x^3-1, x^2-1, x-1, 1\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} \right\} \rightarrow \text{coordenadas en la base } \mathcal{E}_3$$

$\mathcal{E}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$\beta_2 \longrightarrow C_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

triangular $\Rightarrow$ $\underline{\beta_2 \text{ es base}}$ de $P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x]$.

matriz de cambio de base de $P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x]$ con β_2 en salida, $\mathcal{E}_3$ llegada.

(b) Matriz de T con $\mathcal{E}_2$ salida, $\mathcal{E}_3$ llegada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
(P_{\mathbb{R}}^{2}[x], \beta_1) \arrow[r, "Id"', "C_1"] \arrow[rr, bend right, "T"', "m(T;\beta_1,\mathcal{E}_3)"] & (P_{\mathbb{R}}^{2}[x], \mathcal{E}_2) \arrow[r, "T", "M"'] & (P_{\mathbb{R}}^{3}[x], \mathcal{E}_3)
\end{tikzcd}$$

$$m(T; \beta_1, \mathcal{E}_3) = M \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(M(T;\beta_1,\mathcal{B}_3))$:

$$\ker\Big(M(T;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{salida}}}{\beta_1},\underset{\substack{\uparrow\\ \text{llegada}}}{\mathcal{B}_3})\Big):$$

Base del núcleo:

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\beta_1}\right\}=\left\{(x-1)^2\right\}}$$

$$\Uparrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&-1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),\ \text{y}\ \boxed{\ker(T)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\beta_1}\right\rangle=\left\langle(x-1)^2\right\rangle}$$

Núcleo en la base β_1

(c) Matriz de T: β_1 salida, β_2 llegada

C_2 es la matriz del cambio de base con β_2 en salida y $\mathcal{B}_3$ en llegada, su inversa tiene $\mathcal{B}_3$ en salida, β_2 en llegada:

$$(C_2\mid I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&-1&-1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\-1&-1&-1&1&1&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$(P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x],\beta_1)\xrightarrow[\underbrace{M(T;\beta_1,\mathcal{B}_3)}_{\text{Calculada en el (b)}}]{T}(P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x],\mathcal{B}_3)\xrightarrow[C_2^{-1}]{Id_4}(P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x],\beta_2)$$

$$\Rightarrow\boxed{M(T;\beta_1,\beta_2)}=C_2^{-1}\cdot M(T;\beta_1,\mathcal{B}_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\1&0&0\\4&-1&0\end{pmatrix}}$$

$\hookrightarrow$ matriz de T con β_1 en salida, β_2 en llegada.

(d) Para describir $\mathcal{B}_2^*$ dual de $\mathcal{B}_2$ en función de $\mathcal{C}_3^*$ dual de $\mathcal{C}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ basta con calcular la inversa de A, donde A es la matriz que tiene como filas las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Big|$$

$$A^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_0^* & u_1^* & u_2^* & u_3^* \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_0^* = \varepsilon_3^* \\ u_1^* = \varepsilon_2^* \\ u_2^* = \varepsilon_1^* \\ u_3^* = \varepsilon_0^* + \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* . \end{array}}$$

$\mathcal{B}_2^* = \{u_0^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$

$\mathcal{C}_3^* = \{\varepsilon_0^*, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*\}$