Hoja 3

Derivadas parciales y funciones diferenciables

9.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(*a*) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(*b*) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(*c*) $f(x,y,z) = z^2\, e^x\, \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(*d*) $f(x) = (e^x\, \operatorname{sen} x, e^x\, \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(*e*) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

Solución. (*a*)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}, \qquad Df(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(*b*)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \end{pmatrix}, \qquad Df(\pi, -\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

(*c*)

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2e^x\cos(y) & -z^2e^x\sin(y) & 2ze^x\cos(y) \end{pmatrix}, \qquad Df(0,\pi/2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*d*)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} e^x\sin(x) + e^x\cos(x) \\ e^x\cos(x) - e^x\sin(x) \\ 2x \end{pmatrix}, \qquad Df(\pi/6) = \begin{pmatrix} e^{\pi/6}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \\ e^{\pi/6}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

(*e*)

$$Df(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} & 0 \\ 2x & 2y & 2z & -18t \end{pmatrix},$$

$$Df(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -54 \end{pmatrix}$$

10.- Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x) = \|x\|^4$ y $f(x) = \langle a, x\rangle$, siendo $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_{\mathbf{v}}f(x)$ y $D_{\mathbf{v}}g(x)$ para cada $x, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{1}$.

(b) Tomando $n = 2$, hallar todos las direcciones unitarias $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $D_{\mathbf{v}}g(2, 3) = 6$.

(c) Tomando $n = 3$, hallar todos las direcciones unitarias $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $D_{\mathbf{v}}g(1, 2, 3) = 0$.

Solución. (a) *Lo haremos de dos maneras. Por definición:*

$$D_{\mathbf{v}}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\mathbf{v}) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\langle a, \mathbf{v}\rangle}{h} = \langle a, \mathbf{v}\rangle$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}g(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h\mathbf{v}) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\|x + h\mathbf{v}\|^4 - \|x\|^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\|x\|^4 + 4h\|x\|^2\langle x, \mathbf{v}\rangle + o(h) - \|g\|^4}{h} = 4\|x\|^2\langle x, \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

De otra manera, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *y* $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, *entonces*

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \qquad g(x) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^2$$

Claramente tanto f *como* g *son diferenciables en todo* $\mathbb{R}^n$ *por lo tanto*

$$D_{\mathbf{v}}f(x) = \langle \nabla f, \mathbf{v}\rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\rangle = \langle a, \mathbf{v}\rangle$$

$$D_{\mathbf{v}}g(x) = \langle \nabla g, \mathbf{v}\rangle = \langle (4x_1\|x\|^2, 4x_2\|x\|^2, \dots, 4x_n\|x\|^2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\rangle = 4\|x\|^2\langle x, \mathbf{v}\rangle$$

(b) *Queremos encontrar las direcciones unitarias* $\mathbf{v}$ *tales que*

$$6 = D_{\mathbf{v}}g(2, 3) = 4\|(2, 3)\|^2\langle (2, 3), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\rangle = 52(2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2)$$

además como $\mathbf{v}$ *debe de ser unitario tambíen tenemos que* $\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 = 1$, *resolvemos el sistema y nos quedan las soluciones (No queda bonito, pero lo importante es llegar a este punto).*

(c) *Queremos encontrar las direcciones unitarias* $\mathbf{v}$ *tales que*

$$0 = D_{\mathbf{v}}g(1, 2, 3) = 4\|(1, 2, 3)\|^2\langle (1, 2, 3), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\rangle,$$

es decir $0 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$ *además como* $\mathbf{v}$ *debe de ser unitario tambíen tenemos que* $\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2 = 1$. *(Basta con llegar hasta aquí)*

11.- Sea $f(r, t) = t^n\, e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r \geq 0$ y $t > 0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r, t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) \qquad (r, t > 0)\,.$$

Solución. *Por una parte*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(r, t) = nt^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}} + t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{r^2}{4t^2}.$$

Por otra

$$r^2\frac{\partial f}{\partial r}(r, t) = -t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{2r^3}{4t}$$

Así

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) = \frac{1}{r^2}\left(t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{r^4}{4t^2} - t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{6r^2}{4t}\right) = -\frac{6}{4}t^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}} + t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{r^2}{4t^2}$$

Por tanto igualando las dos partes vemos que $n = -\dfrac{3}{2}$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y) = e^{-y}\cos x$.

(b) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(c) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

Solución. (a)

$$\nabla f(x,y) = \big(-e^{-y}\sin(x), -e^{y}\cos(x)\big)$$

(b)

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+2y^2+3z^2}, \frac{4y}{x^2+2y^2+3z^2}, \frac{6z}{x^2+2y^2+3z^2}\right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

(c) *Para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *se tiene que*

$$\nabla f(x,y) = \left(y \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, x\sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

y para $(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

13.- (a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y) = \sqrt{3x^2+5y^2}$ en el origen.

(b) Comprobar que f es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcular el vector $\nabla f(2,1)$.

Solución. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}|h|}{h} \quad \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5}|h|}{h} \quad \nexists$$

(b) *Para todo* $(x,y) \neq (0,0)$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{5y}{\sqrt{3x^2+5y^2}}$$

las cuales son continuas para todo $(x,y) \neq (0,0)$*, por tanto la función* f *es diferenciable en estos puntos.*

(c) *Para todo* $(x,y) \neq (0,0)$*:*

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x}{\sqrt{3x^2+5y^2}}, \frac{5y}{\sqrt{3x^2+5y^2}}\right) \Rightarrow \nabla f(2,1) = \left(\frac{6}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{17}}\right)$$

14.- Hallar los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v} = (u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ de la función $f(x,y) = 3\,x^2 + y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2+y^2 = 1$.

Solución. *Primero tenemos que observar que* f *es diferenciable en todo punto. Dado* (x,y) *en la circunferencia unidad fijo, entonces sabemos que*

$$\max_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{v}}f(x,y) = \max_{\mathbf{v}}\langle \nabla f, \mathbf{v}\rangle = \langle \nabla f, \lambda\nabla f\rangle \quad \lambda = \frac{1}{\|\nabla f\|}$$

Esto se ve simplemente por la aplicación del Teroma de Cauchy-Schwarz y nos viene a decir que las Derivadas direccionales alcanzan su maximo justo en la dirección del gradiente. La elección del λ *es simplemente para que* $\mathbf{v}$ *sea unitario.*

Entonces para un punto (x,y) la dirección que nos da el máximo en las derivadas direccionales es

$$\mathbf{v}_{max} = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \frac{(6x,2y)}{\|(6x,2y)\|} = \left(\frac{6x}{\sqrt{36x^2+4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{36x^2+4y^2}}\right)$$

Ahora queremos ver en qué puntos (x,y) de la circunferencia unidad se alcanza el siguiente máximo

$$\max_{\|(x,y)\|=1} D_{\mathbf{v_{max}}} f(x,y) = \max_{\|(x,y)\|=1} \langle \nabla f, \mathbf{v}_{max}\rangle = \max_{\|(x,y)\|=1} \|\nabla f\| = \max_{x^2+y^2=1} \sqrt{36x^2+4y^2}.$$

Esto se puede reducir a un problema de optimización en una varible, por ejemplo si consideramos $y^2 = 1-x^2$, y definimos la función

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{32x^2+4}$$

lo único que tenemos que hacer es maximizarla para $x \in [-1,1]$, lo cual nos da que la función g alcanza su máximo en los puntos $x = \pm 1$. Despejando la y nos queda que la solución a nuestro problema son los puentos $(x,y) = (\pm 1, 0)$ y los $\mathbf{v}_{max}$ asociados a esos puntos.

15.- Hallar los valores de a,b,c tales que la derivada direccional respecto de un vector unitario de la función

$$f(x,y,z) = a\,x\,y^2 + b\,y\,z + c\,x^3 z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje $0Z$ (eje positivo de las Z's).

Solución. *Como hemos visto en el apartado anterior las derivadas direccionales de la función f serán máximas en el punto $(1,2,-1)$ si $\mathbf{v}$ es proporcional al graciente en ese punto. Como nos dice que esta dirección $\mathbf{v}$ tiene que ser $(0,0,1)$ (paralela al eje 0Z y unitaria), ya sabemos que el gradiente de f en el punto $(1,2,-1)$ tiene que ser de la forma $(0,0,\lambda)$, además*

$$64 = \max_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{v}} f(1,2,-1) = \max_{\mathbf{v}} \langle \nabla f, \mathbf{v}\rangle = \langle \nabla f, (0,0,1)\rangle = \lambda \quad \lambda = \frac{1}{\|\nabla f\|}$$

Por tanto

$$(0,0,64) = \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c)$$

Resolviendo este sistema nos queda que $a = 6, b = 24$ y $c = -8$.

16.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1/\sqrt{13}$ y $D_{\mathbf{v}} f(a) = \sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ y $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(a) Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

(b) Hallas las dos direcciones unitarias $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}} f(a) = 0$.

Solución. (a) *Como la función f es diferenciable en el punto a sabemos que*

$$\frac{1}{\sqrt{13}} = D_{\mathbf{u}} f(a) = \langle (\frac{\partial f}{\partial x}(a)), \frac{\partial f}{\partial y}(a)), (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

$$\sqrt{2} = D_{\mathbf{v}} f(a) = \langle (\frac{\partial f}{\partial x}(a)), \frac{\partial f}{\partial y}(a)), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

De este sistema obtenemos que $\nabla f(a) = (5,-3)$.

(b)

$$0 = D_{\mathbf{w}} f(a) = \langle \nabla f(a), \mathbf{w}\rangle = 5\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2$$

Además como $\mathbf{w}$ es unitario $\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_2^2 = 1$, resolviendo el sistema nos da como soluciones

$$\mathbf{w} = \left(\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}}\right) \qquad \mathbf{w} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right)$$

17.- Hallar la derivada de $f(x,y) = x^2 - 3\,xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1,2)$.

Solución. *Definimos la función $g(x) = f(x, x^2 - x + 2)$, y la derivada de f a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1,2)$ coincidirá con la deriava de g en el punto 1.*

$$g(x) = x^2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = -9x^2 + 8x - 6 \Rightarrow g'(1) = -7.$$