Matemáticas e Ingeniería Informática

Hoja 12: Formas canónicas

1. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.

$f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $\qquad f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

$f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $\qquad f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

$f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_5(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $\qquad f_6 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_6(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

2. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla una forma canónica de Jordan real J y una base en la que el endomorfismo tenga cono matriz J.

$g_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $\qquad g_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

3. Llamamos **proyector** a cualquier endomorfismo $f : E \to E$ tal que $f \circ f = f$.

(a) Para un tal f, demuestra que $\operatorname{Im} f \subseteq \ker(f - \mathrm{id}_E)$ y que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subseteq \ker f$.

(b) Demuestra que los autovalores de f son 1 y 0 (se admite que $\dim E$ pueda ser infinita).

(c) Partiendo de $\mathrm{id}_E \equiv f - (f - \mathrm{id}_E)$, demuestra que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker f$, y que f es la proyección de E sobre el subespacio $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ con dirección el subespacio $\ker f$. Deduce que las inclusiones del apartado (a) son igualdades.

4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ escalares cualesquiera.

(a) Calcula el polinomio característico de A, siendo A una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix} .$$

(Sugerencia: empieza desarrollando $\det(A - \lambda I_n)$ por la primera fila).

(b) Da una fórmula general que a cada n y cada polinomio $\varphi(\lambda) \equiv a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-\lambda)^n$ les asocia una matriz que tiene a $\varphi(\lambda)$ por polinomio característico. Se llama **matriz compañera del polinomio** $\varphi(\lambda)$ a esa matriz (o a su traspuesta).

(c) Calcula el polinomio $(2 - \lambda)^3$ y halla la forma de Jordan de su matriz compañera.

5. Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

(a) Comprueba que $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(b) Calcula $\exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$ y $\exp\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$.

(c) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en una de las formas indicadas en (2); utiliza esto para calcular $\exp(A)$ y $\exp(B)$.