Máximos, mínimos y puntos de silla

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar
(abierto)
y sea $a \in A$. Recordar que $B(a,r)$ denota la bola abierta de centro a y radio r, es decir, $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$

a es un máximo local $\longleftrightarrow$ $\exists r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$ y $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in B(a,r)$

a es un mínimo local $\longleftrightarrow$ $\exists r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$ y $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a,r)$

a es máximo absoluto $\longleftrightarrow$ $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in A$

a es mínimo absoluto $\longleftrightarrow$ $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

Obs: Si a es máximo o mínimo local y f es diferenciable en a $\longrightarrow$ $Df(a)$ es la aplicación nula
La matriz de $Df(a)$ es $(0 \cdots 0)_{1 \times n}$ y $\nabla f(a) = (0, \dots, 0)$

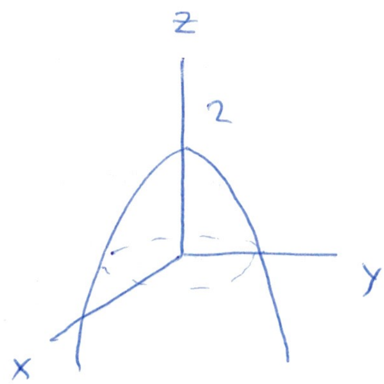
pues: Dado $v \in \mathbb{R}^n$, $g(t) = f(a+tv)$ tiene max o min en $t=0$ $\longrightarrow$ $0 = g'(0) = \langle \nabla f(a), v \rangle$ $\longrightarrow$ $\langle \nabla f(a), v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ $\longrightarrow$ $\nabla f(a) = (0, \dots, 0)$. $\lrcorner$

a es punto crítico $\longleftrightarrow$ f no es diferenciable en a ó $Df(a)$ es la aplicación nula.

a es punto de silla $\longleftrightarrow$ $Df(a)$ es la aplicación nula pero toda bola $B(a,r)$ contiene puntos x tales que $f(x) < f(a)$ y puntos x tales que $f(x) > f(a)$.

Ejemplos:

(1) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$



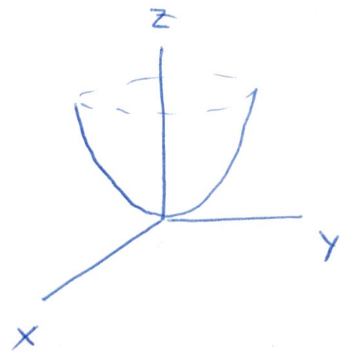
$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$f(0,0) = 2$

$f(x,y) = 2 - (x^2 + y^2) \leq 2 = f(0,0)$ $\therefore$ max absoluto en $(0,0)$

(2) $f(x,y) = x^2 + y^2$



$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$

$\therefore$ min absoluto en $(0,0)$

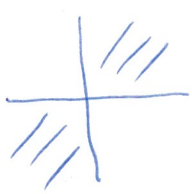
(3) $f(x,y) = xy$

$\nabla f(x,y) = (y, x)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$f(0,0) = 0$

(Ver gráfica usando GeoGebra)



$f(x,y) > 0 = f(0,0)$
para (x,y) en 1er y 3er cuadrante con $xy \neq 0$

$f(x,y) < 0 = f(0,0)$
para (x,y) en 2do y 4to cuadrante con $xy \neq 0$

$\therefore f$ tiene punto de silla en $(0,0)$

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ y f diferenciable en a $\longrightarrow$ si $R_1(x,a) := f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)$

tenemos que

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + R_1(x,a)$$
$$= f(a) + \langle \nabla f(a), (x-a) \rangle + R_1(x,a)$$

con $\dfrac{|R_1(x,a)|}{\|x-a\|} \longrightarrow 0$ cuando $x \to a$

es decir $R_1(x,a) = o(\|x-a\|)$ cuando $x \to a$

Para $x = a + h$ (con $h \in \mathbb{R}^n$)

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \underbrace{R_1(a+h,a)}_{\substack{\parallel \\ o(\|h\|)}}$$ cuando $h \to \vec{0}$

Supongamos el punto a es candidato a máximo o mínimo local $\longrightarrow \nabla f(a) = (0, \dots, 0)$

$\longrightarrow$ $\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\text{para determinar el signo de esta diferencia necesito más información!}} = R_1(a+h,a)$

Fórmula de Taylor con resto para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{n+1} en un intervalo abierto I que contiene al punto a, entonces para todo $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a)$$

con $$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ (Resto de Lagrange)

para algún c en el intervalo cerrado con extremos a y x

En particular $R_n(x,a) = o(\|x-a\|^n)$ cuando $x \to a$.

También $$R_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Ahora para campos escalares $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (abierto)

De primer orden:

Sea f de clase C^2 en $B(a,r) \subset A$, entonces para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $a+h \in B(a,r)$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + R_1(a+h,a)$$

con $R_1(a+h,a) = o(\|h\|)$ cuando $h \to 0$

Además

$$R_1(a+h,a) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)\, h_i h_j$$

para algún c en el segmento de recta que une a con $a+h$. Aquí $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$.

Observaciones:

- La expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)\, h_i h_j$

puede "escribirse" en forma matricial

$$(h_1 \cdots h_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(c) \end{pmatrix}_{n\times n}}_{H(c) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)\right)_{n\times n}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

matriz Hessiana de f en c

notación: $h\, H(c)\, h^t$

Si f es C^2 la matriz Hessiana es simétrica.

- Otra fórmula para el resto:

$$R_1(a+h, a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\, h_i h_j\, dt$$

De segundo orden:

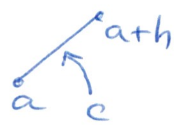
Sea f de clase C^3 en $B(a,r) \subset A$, entonces para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $a+h \in B(a,r)$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h H(a) h^t + R_2(a+h,a)$$

con $R_2(a+h,a) = o(\|h\|^2)$ cuando $h \to \vec{0}$

Además

$$R_2(a+h,a) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)\, h_i h_j h_k$$



para algún c en el segmento de recta que une a con $a+h$

$$R_2(a+h,a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a+th) h_i h_j h_k \, dt$$

Dem: Dado h $\exists \delta > 0$ tal que $a+th \in B(a,r)$ para $-\delta < t < 1+\delta$. Definimos

$$g : \underset{\text{(intervalo)}}{(-\delta, 1+\delta)} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad g(t) = f(a+th)$$

y aplicamos Taylor en una variable pues

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + R_2(1,0)$$

Observar que $g(t) = f(a+th)$ y por la regla de la cadena

$$g'(t) = \langle \nabla f(a+th), h \rangle$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) h_i h_j = h H(a+th) h^t$$

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a+th) h_i h_j h_k$$

Las fórmulas para el resto salen del caso de una variable. No teneis que memorizarlas ☺

Ejemplos: Escribir fórmula de Taylor de segundo orden.

(1) $f(x,y) = e^{x+y}$ con $a=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x+y}$$

que evaluadas en $(0,0)$ dan 1

$$f(x,y) = f(0,0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}_{<\nabla f(0,0),\,(x,y)>} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]$$

$$+ R_2((x,y),(0,0))$$

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2\right] + R_2((x,y),(0,0))$$

(2) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ $\quad a = (1, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\tfrac{\pi}{2}) = -\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi/2) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Por tanto

$$\operatorname{sen}(xy) = 1 + \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (x-1)^2 - \pi (x-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

$$+ R_2\left((x,y), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$