5.6. SUBESPACIOS INVARIANTES DE ENDOMORFISMOS

Todo endomorfismo $f: V \to V$ tiene siempre dos subespacios invariantes, a saber, $\{\vec{0}\}$ y V. En algunos casos, estos son los dos únicos subespacios invariantes de un endomorfismo

Ej 5.6.1. Prueba que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$$

solo tiene $\{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}^2$ como subespacios invariantes.

S/ Si tuviera un subespacio invariante de $\dim = 1$, sería $V_1 = \langle \vec{v} \rangle$ con $\vec{v} \neq 0$. Entonces $f(\vec{v}) \in V_1$ y, por tanto, $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, $\vec{v}$ sería autovector de f con autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero f no tiene autovalores reales:

$$|A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 + 1 = 0, \text{ no tiene soluciones reales}$$

Proposición 5.6.1.

> Sea V e.v. de dim. finita sobre $\mathbb{C}$ y $f \in End(V)$. El endomorfismo f tiene un subespacio invariante de dim 1.

D/ Si $\dim V = n$, $p_f(\lambda) = |f - \lambda I|$ es un polinomio en λ de grado n. Por el teorema fundamental del álgebra existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p_f(\lambda_0) = 0$, es decir λ_0 es autovalor de f. Sea $\vec{v}$ un autovector de f con autovalor λ_0. Entonces $\langle \vec{v} \rangle$ es invariante por f y tiene $\dim = 1$ porque $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$f(a\vec{v}) = a f(\vec{v}) = a\lambda_0 \vec{v} \in \langle \vec{v} \rangle.$$

Proposición 5.6.2.

> Sea V e.v. de dim. finita sobre $\mathbb{R}$ y $f \in End(V)$. El endomorfismo f tiene un subespacio invariante de dim $= 1$ ó 2.

D/ Si $\dim(V) = 1$ el resultado es claro. Si $p_f(\lambda) = |f - \lambda I|$ tiene una raíz real, se procede como en la demostración de la Prop. 5.6.1 para obtener un sub. invariante de dim $= 1$.

Supongamos que $p_f(\lambda)$ no tiene raíces reales y sea $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ una raíz compleja. Consideramos

$$V_{\mathbb{C}} = \{ \vec{z} = \vec{u} + i\vec{v} : \vec{u}, \vec{v} \in V \}$$

con las operaciones

$$(\vec{u}_1 + i\vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + i\vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + i(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$(\alpha + i\beta)(\vec{u} + i\vec{v}) = (\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) + i(\beta\vec{u} + \alpha\vec{v}).$$

Con estas operaciones, $(V_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sea

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \quad f_{\mathbb{C}}(\vec{u} + i\vec{v}) = f(\vec{u}) + i f(\vec{v}).$$

Se comprueba fácilmente que $f_{\mathbb{C}}$ es lineal (pq f lo es).

Si $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ con $A = M(f, \mathcal{B})$, entonces $\mathcal{B}$ es también base de $V_{\mathbb{C}}$ y $f_{\mathbb{C}}(\vec{z}) = f_{\mathbb{Z}}(\vec{u} + i\vec{v}) = f(\vec{u}) + i f(\vec{v})$ $= A\vec{u} + iA(\vec{v}) = A(\vec{u} + i\vec{v})$; es decir $A = M(f_{\mathbb{C}}, \mathcal{B})$. Por tanto,

$$p_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda) = |A - \lambda I| = p_f(\lambda)$$

Por tanto, $\lambda_0 = \alpha - i\beta$ $(\beta \neq 0)$ es también autovalor de $f_{\mathbb{C}}$. Sea $\vec{z}_0 = \vec{x}_0 + i\vec{y}_0 \neq \vec{0}$ un autovector de $f_{\mathbb{C}}$ con autovalor λ_0.

Probaremos que

$$W = \langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle < V$$

es un subespacio invariante de V mediante f. En efecto,

$$f_{\mathbb{C}}(\vec{x}_0 + i\vec{y}_0) = (\alpha + i\beta)(x_0 + iy_0)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(x_0) + i f(\vec{y}_0) = (\alpha x_0 - \beta y_0) + i(\beta x_0 + \alpha y_0).$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias

$$f(\vec{x}_0) = \alpha \vec{x}_0 - \beta \vec{y}_0 \in W, \quad f(\vec{y}_0) = \beta \vec{x}_0 + \alpha \vec{y}_0 \in W. \qquad (6.1)$$

Si $\vec{x}_0 = \vec{0}$, W tiene $\dim = 1$ porque $\vec{y}_0 \neq 0$ ($\vec{z} = \cancel{x_0} + i\vec{y}_0 \neq \vec{0}$).
Si $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$, W tiene dimensión 2. Si tuviera $\dim = 1$, existiría $\gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\vec{y}_0 = \gamma \vec{x}_0$. Entonces,

$$f(x_0) = \alpha \vec{x}_0 - \beta \vec{y}_0 = \alpha x_0 - \beta\gamma x_0 = (\alpha - \beta\gamma) x_0$$

y f tendría como autovalor $\alpha - \beta\gamma \in \mathbb{R}$. Esto es imposible pq. hemos supuesto que f no tiene autovalores reales. ■

Ej 5.6.2. ¿Cuál es la matriz de $f|_W$ en la base $\beta_1 = \{\vec{x}_0, \vec{y}_0\}$ de la demostración anterior? ¿Y en la base $\beta_2 = \{\vec{x}_0, -\vec{y}_0\}$? ¿Y en la base $\beta_3 = \{y_0, x_0\}$?

S/ $M(f|_W; \beta_1) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (ver (6.1))

Como $f(\vec{x}_0) = \alpha \vec{x}_0 + \beta(-\vec{y}_0)$ y $f(-\vec{y}_0) = -\beta x_0 + \alpha(-\vec{y}_0)$,

$$M(f|_W; \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Finalmente,
$$M(f|_W; \beta_3) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ej. 5.6.3 Halla un subespacio invariante de dim 2 del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y,\ 5x+3y,\ 2x-4z)$

S/ $W = < \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ es inv. para f y de dim$=2$.

Lema 5.6.3

Sea V e.v. de dim. finita sobre $\mathbb{K}$ y $f \in End(V)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f, para todo $r = 1, 2, 3, \dots$ se tiene que $Ker((f-\lambda I)^r)$ es invariante por f.

D/ Recuerda que $(f-\lambda I)^r = (f-\lambda I) \circ \overset{r}{\dots} \circ (f-\lambda I)$.

Si $\vec{v} \in Ker((f-\lambda I)^r)$, tenemos que probar que $f(\vec{v}) \in Ker((f-\lambda I)^r)$. Tenemos

$$(f-\lambda I)^r(f(\vec{v})) = (f-\lambda I)^r(\lambda\vec{v} + (f-\lambda I)(\vec{v}))$$
$$= \lambda(f-\lambda I)^r(\vec{v}) + (f-\lambda I)^{r+1}(\vec{v})$$
$$= \lambda(f-\lambda I)^r(\vec{v}) + (f-\lambda I)(f-\lambda I)^r(\vec{v}) =$$
$$= \lambda \cdot \vec{0} + (f-\lambda I)(\vec{0}) = \vec{0}$$

porque $(f-\lambda I)^r(\vec{v}) = \vec{0}$ pq. $\vec{v} \in Ker(f-\lambda I)^r$. ∎

Esta es una observación sobre como se puede escribir la matriz de $f: V \to V$ en una base especial si

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r \qquad \text{(suma directa)}$$

e.d.

$$V = \sum_{i=1}^{r} V_i \quad \text{y} \quad V_i \cap \Big(\sum_{k \neq i} V_k\Big) = \{\vec{0}\}.$$

Sea $\beta_s = \{\vec{u}_{s,1}, \dots, \vec{u}_{s,n_s}\}$ base de V_s, $s=1,\dots,r$. Como

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i \quad \text{(soma directa)}$$

$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_r$ es base de V.

En la base β,

$$M(f,\beta) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

donde A_s es la matriz de $f|_{V_s}$ en la base β_s (cuadrada de orden $n_s \times n_s$).
