Pablo Cuesta Sierra. NIA: 422974

2. Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto a $\mathcal{C}$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Halla los ángulos que forman entre sí los vectores de la base $\mathcal{C}$ respecto de este producto escalar.

c) Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, a partir de la base $\mathcal{C}$, respecto del producto escalar definido por φ.

---

a) φ es bilineal simétrica porque A es simétrica.

Veámos que es def. positiva: (Criterio de Sylvester).

$\Delta_1 = |2| = 2 > 0$.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 > 0$.

$\Rightarrow$ Es un producto escalar.

b) $\varphi = \langle , \rangle$. Sabemos: $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{3\times 3} = (a_{ij})_{3\times 3}$.

$\cos \measuredangle(e_i, e_j) = \dfrac{\langle e_i, e_j \rangle}{\|e_i\| \|e_j\|}$. $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle}$

$\Rightarrow \measuredangle(e_1, e_2) = \arccos\left(\dfrac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\| \|e_2\|}\right) =$

$= \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot 1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\measuredangle(e_2, e_3) = \arccos\left(\dfrac{\langle e_2, e_3 \rangle}{\|e_2\| \|e_3\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{0}{1 \cdot \sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

$\measuredangle(e_1, e_3) = \arccos\left(\dfrac{\langle e_1, e_3 \rangle}{\|e_1\| \|e_3\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

c) La nueva base: $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Tomamos $u_1 = e_1$.

Necesitamos $u_2 \perp u_1$, y tq. $L(u_1, u_2) = L(e_1, e_2)$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = e_2 + \alpha_1 e_1 \\ \langle u_2, \underset{(u_1)}{e_1} \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \langle e_2 + \alpha_1 e_1, e_1 \rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{-\langle e_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = \dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{u_2 = (-1/2, 1, 0)}$. Coord en $\mathcal{C}$.

(1) $u_3 \perp u_1 (= e_1)$
(2) $u_3 \perp u_2$
y $u_3 = e_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

(1) $\Rightarrow \langle u_3, u_1 \rangle = \langle e_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow 1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

(2) $\langle u_3, u_2 \rangle = \langle e_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, -\frac{1}{2} e_1 + e_2 \rangle =$

$= \langle e_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, -\frac{1}{2} e_1 \rangle + \langle e_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_2 \rangle =$

$= -\frac{1}{2} - \cancel{\alpha_1} - \frac{1}{2}\alpha_2 + 0 + \cancel{\alpha_1} + \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow -1/2 + 1/2\, \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha_1 = -1$.

$\Rightarrow u_3 = (-1, 1, 1)_{\mathcal{C}}$.

$$\boxed{\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (-1/2, 1, 0), (-1, 1, 1) = u_3\}.}$$