WUOLAH

ex3-sols.pdf

pakado

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**EDO** **CURSO ACADÉMICO 2008-2009**	NOTA

Nombre y Apellidos ____________________
Grupo ____________________

Problema 1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial del segundo orden*

$$\frac{1}{4}\,y'' + 3\,y' + 25y = \cos(2t)\,.$$

Solución. El polinomio caractéristico es $p(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^2 + 3\lambda + 25$, y sus soluciones son $\lambda_\pm = -6 \pm 8i$. Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_C(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_+\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_-\,t} = \mathrm{e}^{-6t}\left[c_1\mathrm{e}^{8i\,t} + c_2\mathrm{e}^{-8i\,t}\right]$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ son constantes arbitrarias, pero tales que la solución sea real. Es conveniente encontrar dos soluciones linealmente independientes que sean reales, y eso se puede hacer eligiendo

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y_1(t) = \mathrm{e}^{-6t}\,\frac{\mathrm{e}^{8i\,t} + \mathrm{e}^{-8i\,t}}{2} = \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t)$$

y tambien

$$c_1 = \frac{1}{2i}\,, \quad c_2 = -\frac{1}{2i} \qquad \Rightarrow \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{-6t}\,\frac{\mathrm{e}^{8i\,t} - \mathrm{e}^{-8i\,t}}{2i} = \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t)$$

las dos soluciones son independientes dado que su determinante Wronskiano

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) & \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) \\ -8\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) - 6\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) & 8\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) - 6\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) \end{bmatrix} \neq 0$$

es distinto de cero en $t = 0$ (támbien en $8t = \pi/2$) entonces es distinto de cero en todo punto. Por lo tanto y_1 y y_2 son independientes y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_R(t) = k_1\,\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) \,+\, k_2\,\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t)$$

para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Ahora tenemos que buscar una solución particular, y la buscamos de la forma

$$\begin{aligned} y_P(t) &= A\cos(2t) + B\sin(2t) \\ y_P'(t) &= -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ y_P''(t) &= -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) \end{aligned}$$

ahora es claro que

$$\frac{1}{4}\,y_P'' + 3\,y_P' + 25y_P = \cos(2t) \iff (24A + 6B)\cos(2t) + (24B - 6A)\sin(2t) = \cos(2t)$$

entonces se llega a la conclusion que y_P satisface la ecuación solo cuando $A = 4/102$ y $B = 1/102$, por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y_G(t) = y_R(t) + y_P(t) = k_1\,\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) \,+\, k_2\,\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) + \frac{4}{102}\cos(2t) + \frac{1}{102}\sin(2t)\,,$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Problema 2 *Dado el siguiente sistema homogéneo con coeficientes constantes*

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X}\,.$$

Hallar la solución general. Encontrar aquella solución tal que $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$. *Es unica?*

Solución. El polinomio caractéristico es $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$, entonces tenemos un autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebrica y geometrica 1, y un autovalor $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebrica 2.
Buscamos una matriz P de cambio de variable que transforme A en su forma de Jordan J:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad J = P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovectores: $\mathbf{v}_1$ es el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$, por lo tanto es solución del sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (0, 0, z)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$. $\mathbf{v}_2$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = 3$, por lo tanto es solución del sistema $(A-3I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (x, 2x, 3x)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$. Está claro que la dimension del autoéspacio correspondiente a $\mathbf{v}_2$ es 1, es decir su multiplicidad geometrica es 1. Entonces la matriz no es diagonalizable, siendo la multiplicidad algebrica 2 y la geometrica 1. Busco entonces el autovector generalizado $\mathbf{w}$, que es solución del sistema $(A-3I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, que tiene la forma $\mathbf{w} = (x, 2x-1, 3x-4)$, y elígo $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$. Por lo tanto la matriz P es dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Jordan $J = D + N$,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{D\,t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^{Nt} = I + Nt + \underbrace{N^2}_{=0}\frac{t^2}{2} + ... = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dado que $N^2 = 0$. Adémas $DN = ND$, es decir las dos matrices N y D comútan, entonces

$$\mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{Dt+Nt} = \mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{Nt} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & t\,\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

En fin calculo la matriz exponencial:

$$\mathrm{e}^{At} = P\,\mathrm{e}^{Jt}\,P^{-1} = \begin{bmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 4\mathrm{e}^{3t} & (1-2t)\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ (6t-5)\mathrm{e}^{3t} + 5\mathrm{e}^{2t} & (-3t+4)\mathrm{e}^{3t} - 4\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

y la solución general tendrá la forma $\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0)$. Si $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$, entonces la unica solución tiene la forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 4\mathrm{e}^{3t} & (1-2t)\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ (6t-5)\mathrm{e}^{3t} + 5\mathrm{e}^{2t} & (-3t+4)\mathrm{e}^{3t} - 4\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} - 3\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

.

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.