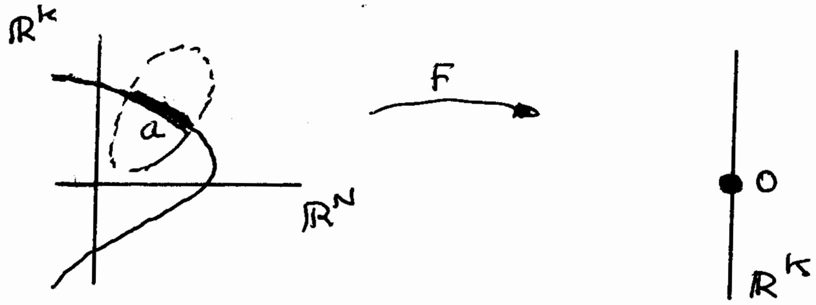
SUBVARIEDADES DE $\mathbb{R}^{N+k}$

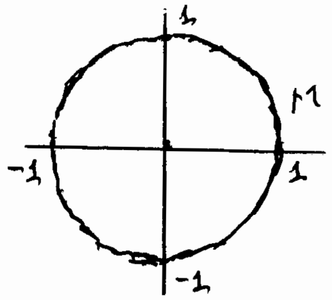
DEF 1. $M \subset \mathbb{R}^{N+k}$ es una C^s-subvariedad de dimensión N si $\forall\, a \in M$ existe $U \subset \mathbb{R}^{N+k}$ abierto, $a \in U$, y una función $F: U \to \mathbb{R}^k$ tal que $F \in C^s(U)$ y $DF(x)$ tiene rango k para todo $x \in U \cap M$ y

$$U \cap M = \{x \in U : F(x) = 0\} = F^{-1}(\{0\}).$$



Ejemplo A: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ es una C^∞-subvariedad de dimensión 1.

Tomar $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Sea $U = \mathbb{R}^2$ (abierto). Para $(x,y) \in U \cap M = M$, $DF(x,y) = (2x, 2y)$ tiene rango en $U \cap M = M$ porque $(0,0) \notin M$. El entorno $U = \mathbb{R}^2$ es el mismo para todo $a \in M$.



TEOR 2. Dada $M \subset \mathbb{R}^{N+k}$, son equivalentes:

A) M es una C^s-subvariedad de dimensión N

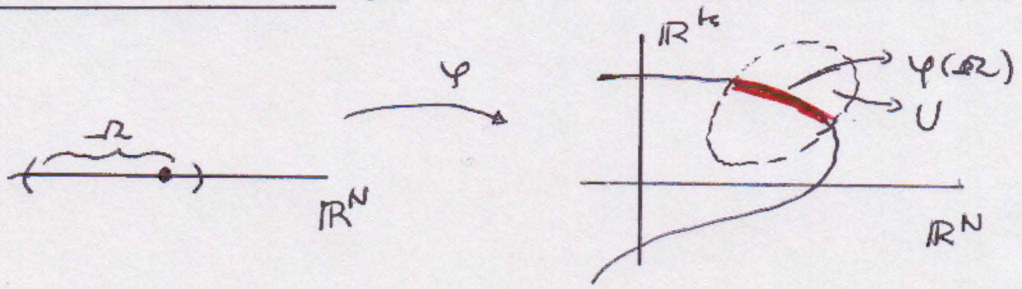
B) $\forall\, a \in M$ existe $U \subset \mathbb{R}^{N+k}$ abierto, $a \in U$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\varphi: \Omega \mapsto \mathbb{R}^{N+k}$, $\varphi \in C^s(\Omega)$, tal que

i) $\varphi(\Omega) = U \cap M$ ii) rango $D\varphi(x) = N$ $\forall\, x \in \Omega$

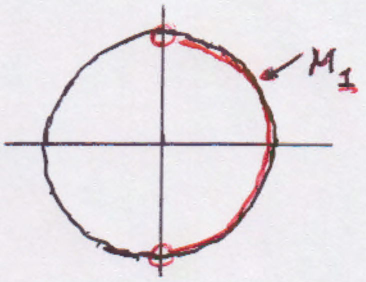
iii) φ es un homeomorfismo.

<u>NOTA 1</u>. $\varphi : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ es un <u>homeomorfismo</u> si la función $\varphi : U \to \varphi(U)$ es continua y tiene inversa continua.

<u>NOTA 2</u>. La función φ del teorema 2 se dice que es una <u>parametrización local</u> de M en un entorno de $a \in M$.



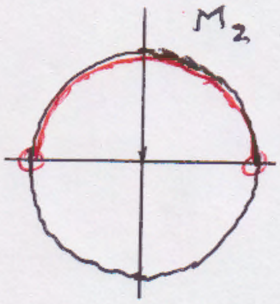
<u>EJEMPLO B</u> $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ es una C^∞-subvariedad de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$ porque cumple B del teorema 2.



Para $(x_0, y_0) \in M_1 = M \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\}$ tomar $\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Con $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\}$, $\varphi(\Omega) = U \cap M$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y $D\varphi(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ tiene rango 1 en $(-\pi/2, \pi/2) = \Omega$ porque $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ no se anulan a la vez. Además, φ es continua y $\varphi^{-1}(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ es también continua porque si $(x,y) \in \varphi(\Omega)$ se tiene $x \neq 0$.



Para $(x_0, y_0) \in M_2 = M \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y>0\}$ tomar $\varphi : (0, \pi) = \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Con $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y>0\}$, $\varphi(\Omega) = U \cap M$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y $D\varphi(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ tiene rango 1. Ahora la inversa es $\varphi^{-1}(x,y) = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ que es continua porque $y>0$.

Hacer $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<0\} \cap M$ y $M_4 = M \cap \{(x,y) : \mathbb{R}^2 :$ $y<0\}$ de manera similar

---

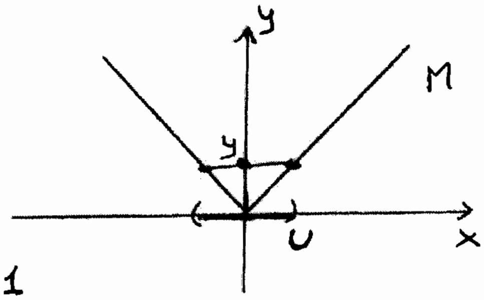
<u>TEOR. 3</u>. Dada $M \subset \mathbb{R}^{N+k}$, son equivalentes:

A) M es una C^s-subvariedad N-dim en $\mathbb{R}^{N+k}$

C) Para cada $a \in M$ existen $U \subset \mathbb{R}^{N+k}$ abierto con $a \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^{N+k}$ difeomorfismo sobre $f(U)$ tal que $f(U \cap M) = f(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{\vec{0}\})$

<u>NOTA 5</u>. Las funciones f del teorema 3 "aplastan" trozos de M en $\mathbb{R}^N$.

<u>Ej C</u>. $M = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0,\ y \geq 0\}$ no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$. Si fuera una C^1-sob. para $(0,0) \in M$ existiría $U(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ y $F : U \to \mathbb{R}$ con $F \in C^1(U)$ y $DF(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ con rango 1 para todo $(x,y) \in U$.



Si $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$, por el TFImplícita, se puede despejar $x = f(y)$ cerca de $y=0$. Pero esto es imposible porque a cada y le corresponden dos valores de x ya que los puntos (x,x) y $(-x,x)$ pertenecen a M.

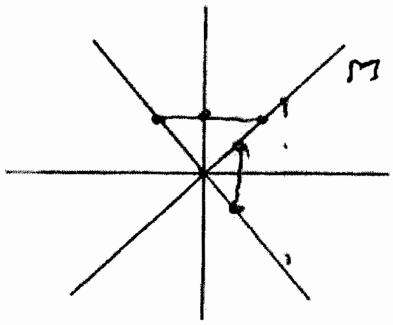
Si $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$, por el TFImplícita, se puede despejar $y = g(x)$ con $g \in C^1$ cerca de $x=0$. Pero esto es imposible porque $g(x) = |x|$ no es diferenciable en $x=0$.

Como $DF(0,0)$ no puede tener rango 1, M no es una subvariedad diferenciable.

PROP. 4 Una subvariedad N-dim M de $\mathbb{R}^{N+k}$ se puede escribir, quizá tras permutar las variables, localmente como la gráfica de una función diferenciable. Concretamente, reordenando adecuadamente las variables, para cada $a \in M$ existe $U \ni U(a)$ y $f : V \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ tales que

$$U \cap M = \{(x, f(x)) : x \in V\}.$$

Ej D. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$ no es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$. Si lo fuera cerca de $(0,0)$ debería ser la gráfica de una función. Pero al despejar $y = \pm x$ ó $x = \pm y$ no dan funciones.



PROP 5. Sea M una subvariedad n-dim de $\mathbb{R}^{n+k}$. Cualquier función inyectiva $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ con $\varphi(V) \subset M$ y rango $D\varphi = n$ en V es una parametrización local, e.d. φ es un homeomorfismo.