HOJA DE EJERCICIOS 6
Análisis Matemático. (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Consideramos la función $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por la siguiente fórmula:

$$f(x,y)\ \equiv\ \begin{pmatrix} x+e^x \\ y^2+\operatorname{sen}(x-1)\end{pmatrix}.$$

(a) Demuestra que existe una inversa local $g\equiv(g_1,g_2)$ de f tal que el dominio de g es un abierto $V\ni(1+e,1)$ y $g(1+e,1)=(1,1)$.

(b) Demuestra que en el abierto V se verifica la siguiente identidad:

$$Dg\ \equiv\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+e^{g_1}} & 0 \\ \dfrac{-\cos(g_1-1)}{2g_2\cdot(1+e^{g_1})} & \dfrac{1}{2g_2}\end{bmatrix}.$$

(c) Derivando esa identidad, obtén identidades:

$$\begin{aligned} g_{2xx} &\equiv \text{fórmula}_1\,(g_1,g_2)\,, & (1)\\ g_{2xy} &\equiv \text{fórmula}_2\,(g_1,g_2)\,, & (2)\\ g_{2yx} &\equiv \text{fórmula}_3\,(g_1,g_2)\,, & (3)\\ g_{2yy} &\equiv \text{fórmula}_4\,(g_1,g_2)\,, & (4)\end{aligned}$$

entre las derivadas segundas de g_2 y expresiones concretas en g_1 y g_2. Comprueba que (2) y (3) dan el mismo resultado, aunque se llega a ellas por caminos diferentes.

(d) Calcula explícitamente la matriz hessiana de g_2 en el punto $(1+e,1)$.

(e) Repite el proceso con g_1.

---

a) $Df(1,1)=\begin{pmatrix}1+e^x & 0\\ \cos(x-1) & 2y\end{pmatrix}_{(1,1)}=\begin{pmatrix}1+e & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$\det Df(1,1)=2(1+e)\neq 0$. Aplicar TFInversa

b) $f(g_1(u,v),g_2(u,v))=(u,v)\ \Rightarrow\ Dg=[Df(g_1,g_2)]^{-1}$

$Df(x,y)=\begin{pmatrix}1+e^x & 0\\ \cos(x-1) & 2y\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Df(g_1,g_2)^{-1}=\begin{pmatrix}1+e^{g_1} & 0\\ \cos(g_1-1) & 2g_2\end{pmatrix}^{-1}$

$=\dfrac{1}{2g_2(1+e^{g_1})}\begin{pmatrix}2g_2 & 0\\ -\cos(g_1-1) & 1+e^{g_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+e^{g_1}} & 0\\ \dfrac{-\cos(g_1-1)}{2g_2(1+e^{g_1})} & \dfrac{1}{2g_2}\end{pmatrix}$

c) $\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{1}{1+e^{g_1}}$, $\frac{\partial g_1}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{-\cos(g_1-1)}{2g_2(1+e^{g_1})}$, $\frac{\partial g_2}{\partial v} = \frac{1}{2g_2}$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-\cos(g_1-1)}{2g_2(1+e^{g_1})}\right) =$$

$$= \frac{\sin(g_1-1)\frac{\partial g_1}{\partial u}\cdot 2g_2(1+e^{g_1}) + \cos(g_1-1)\left[2\frac{\partial g_2}{\partial u}(1+e^{g_1}) + 2g_2 e^{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial u}\right]}{[2g_2(1+e^{g_1})]^2}$$

$$= \frac{2g_2\sin(g_1-1) - \frac{1}{g_2}[\cos(g_1-1)]^2 + \cos(g_1-1)\frac{2g_2 e^{g_1}}{1+e^{g_1}}}{4g_2^2(1+e^{g_1})^2}$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g_2}{\partial v}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_2^2}\frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{1}{4}\frac{\cos(g_1-1)}{g_2^3(1+e^{g_1})}$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$$

- $\frac{\partial^2 g_2}{\partial v^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{g_2^3}$ (comprobar)

d) $$Hg_2(1+e,1) = \begin{pmatrix} \frac{e-1}{4(1+e)^3} & \frac{1}{4(1+e)} \\ \frac{1}{4(1+e)} & -1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 2. **(a)** Prueba que la ecuación

$$xy = \log\frac{x}{y}$$

admite una única solución $y = f(x)$ definida en un entorno de $a = \sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$.
(b) Calcula explícitamente los números $f'(a)$ y $f''(a)$.

$$\sqrt{e}\,\frac{1}{\sqrt{e}} = \log\frac{\sqrt{e}}{1/\sqrt{e}} \quad \checkmark \qquad F(x,y) = xy - \log\frac{x}{y}$$

$$= xy - \log x + \log y$$. Aplicar TF Implícita:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2\sqrt{e} \neq 0$$

$\exists\ y = f(x)$ en un entorno de $\sqrt{e}$ tal que

$$F(x, f(x)) = 0$$

b) $$0 = F(x, f(x)) = x f(x) - \log x + \log f(x)$$

Derivando

$$0 = f(x) + x f'(x) - \frac{1}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (1)$$

$x = a = \sqrt{e}$; $$0 = \frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\, f'(a) - \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{f'(a)}{1/\sqrt{e}}$$

$$\Longrightarrow f'(a) = 0$$

Derivando en (1)

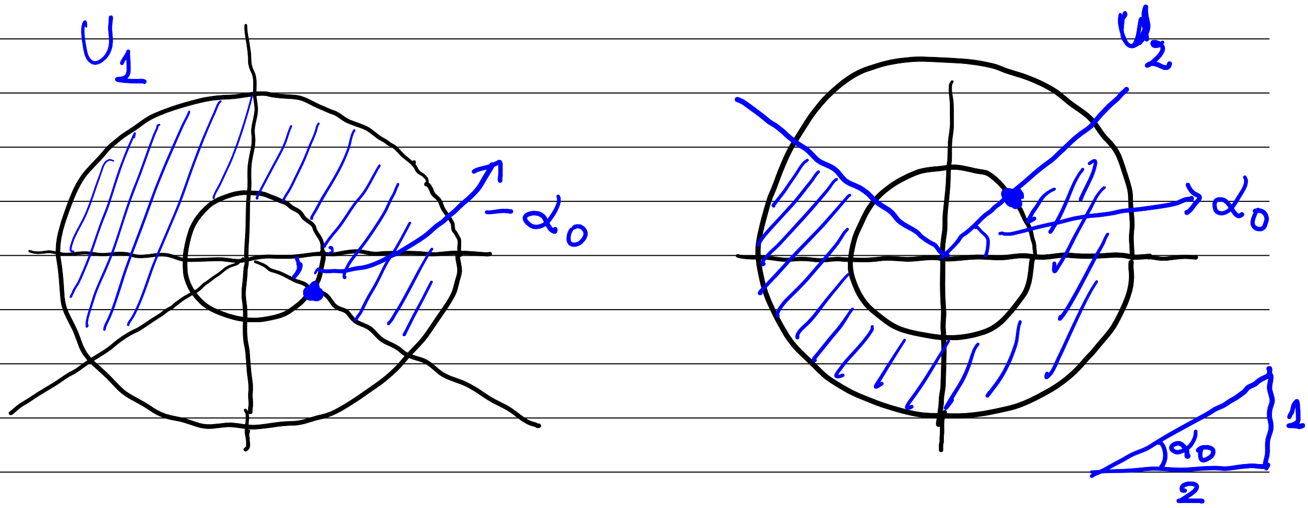
$$0 = f'(x) + f'(x) + x f''(x) + \frac{1}{x^2} + \frac{f''(x) f(x) - f'(x)^2}{[f(x)]^2}$$

$x = a = \sqrt{e}$: $$0 = \sqrt{e}\, f''(a) + \frac{1}{e} + \frac{f''(a)}{1/\sqrt{e}} \Rightarrow f''(a) = -\frac{1}{2e\sqrt{e}}$$

Problema 3. Dibuja los abiertos

$$U_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4 \,,\; y > -\frac{1}{2}\,|x| \right\}, \qquad U_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4 \,,\; y < \frac{1}{2}\,|x| \right\}.$$

Halla una inversa del cambio a polares definida en U_1 y otra definida en U_2. Demuestra que, sin embargo, no hay ninguna inversa local continua en $U_1 \cup U_2$.
Indicación: halla todas las inversas en U_1 y todas las inversas en U_2, y comprueba que no se las puede casar.



$P(x,y) = (r, \alpha) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{arctg} y/x\right)$

En U_1, $1 < r < 2$; sea $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 1/2$

$V_1 = \{ (r,\alpha) : 1 < r < 2,\ -\alpha_0 < \alpha < \pi + \alpha_0 \}$

$P^{-1}(r,\alpha) = (r\cos\alpha,\ r \operatorname{sen} \alpha)$

En U_2, $1 < r < 2$

En $V_2 = \{ (r,\alpha) : 1 < r < 2,\ \pi - \alpha_0 < \alpha < 2\pi + \alpha_0 \}$

la inversa es

$P^{-1}(r,\alpha) = (r\cos\alpha,\ r\operatorname{sen}\alpha)$

$U_1 \cup U_2 = \{ (x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4 \} \equiv U$

Si P tuviera inversa continua, P sería abierta. Pero U es abierto en $\mathbb{R}^2$ y

$P(U) = \{ (r,\alpha) : 1 < r < 2,\ 0 < \alpha \leq 2\pi \}$

que no es abierto

Problema 5. Demuestra que existe una única función $f : U \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno U de $(0,0)$, tal que

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad e^{f(x,y)} \equiv \left(1 + x\,e^{f(x,y)}\right)\left(1 + y\,e^{f(x,y)}\right).$$

Calcula explícitamente $\nabla f(0,0)$.

$$F(x,y,z) = (1+xe^z)(1+ye^z) - e^z \in C^\infty$$

$$F(0,0,0) = 1 - 1 = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xe^z(1+ye^z) + (1+xe^z)ye^z - e^z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = -1 \neq 0$$

Por el TF Implícita, $\exists\ z = f(x,y)$ t.q.

$$(1+xe^{f(x,y)})(1+y\,e^{f(x,y)}) - e^{f(x,y)} = 0 \qquad (1)$$

en un entorno de $(0,0)$.

Para calcular $\nabla f(0,0)$ hay que calcular $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\left(e^{f(x,y)} + xe^{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right)(1+y\,e^{f(x,y)}) +$$

$$(1+xe^{f(x,y)})\,y\,e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x} - e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

En $(x,y) = (0,0)$,

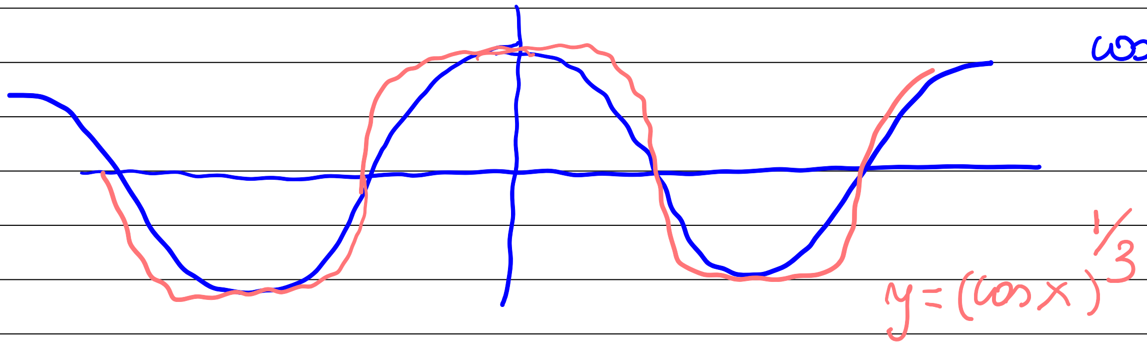
$$(e^0 + 0)(1+0) + 0 - e^0\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

De la misma manera, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,1)$

Problema 6. Demuestra que la ecuación

$$\cos x - y^3 \; = \; 0 \, ,$$

define una única función implícita $y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y dibuja el grafo $\{y = y(x)\}$. Esta $y(x)$ es función $\mathcal{C}^\infty$ de x en un entorno de $x_0 = 0$ (ahí se cumple la condición del teorema de las funciones implícitas), pero encuentra valores de x, alejados del valor $x = 0$, en los que $y(x)$ ni siquiera es diferenciable.



En $x_0 = 0$, con $F(x,y) = \cos x - y^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3y^2$

y $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = -3 \neq 0$. Se puede aplicar el TF Implícita.

Pero en $x_1 = \pi/2$, $y'(\pi/2) = \infty$ y $y'(\pi/2) = -\infty$

Problema 7. Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$, definimos una función vectorial $F(x,y) \equiv \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ por las siguientes identidades:

$$\begin{cases} u(x,y) \equiv f(x) \\ v(x,y) \equiv -y + x\,f(x) \end{cases}$$

Demuestra que si f' no se anula entonces F tiene una inversa **global** (es decir, F es biyectiva de $\mathbb{R}^2$ a un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$, por lo cual existe $F^{-1} : V \to \mathbb{R}^2$).
Si además $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, halla explícitamente las derivadas parciales de F^{-1} en el origen.

Probar que $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$$\left.\begin{cases} u(x_1,y_1) = u(x_2,y_2) \\ v(x_1,y_1) = v(x_2,y_2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x_1) = f(x_2) \\ -y_1 + x_1 f(x_1) = -y_2 + x_2 f(x_2) \end{array}\right\}$$

Como f' no se anula, f es monótona y por tanto inyectiva $\Rightarrow x_1 = x_2$. En la segunda ecuación $y_1 = y_2$

b) $\dfrac{\partial F^{-1}}{\partial u}(0,0) = (0,0)$, $\dfrac{\partial F^{-1}}{\partial v}(0,0) = (0,-1)$

Problema 9. Estudia si es posible despejar $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y^2 + x\,z\,u + y\,v^2 = 3 \\ x\,y\,u^3 + 2\,x\,v - u^2\,v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x,y,z) = (1,1,1)$ y $(u,v) = (1,1)$. En caso afirmativo, calcula $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$ en el punto $(x,y,z) = (1,1,1)$.

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y,z,u,v) = (\underbrace{xy^2 + xzu + yv^2 - 3}_{F_1},\ \underbrace{xyu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2}_{F_2}) = 0$$

$$F(1,1,1,1,1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{(1,1,1,1,1)} = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3xy^2 - 2uv^2 & 2x - 2vu^2 \end{pmatrix}_{(1,1,1,1,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,1,1) = -2 \neq 0$$

Derivando con respecto a x:

$$\left.\begin{aligned} &\cancel{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0} \\ &\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^2 + zu + xz\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ &yu^3 + 2v + (3xy^2 - 2uv)\frac{\partial u}{\partial x} + (2x - 2vu^2)\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}$$

En $(1,1,1,1,1)$

$$\left.\begin{aligned} 2+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 3+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1)=-3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1,1)=1/2$$

Tambien pide $\frac{\partial v}{\partial z}$: se hace lo mismo derivando con respecto a z y sale $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ y $\frac{\partial v}{\partial z}=-1/2$

Con matrices

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(1,1,1,1,1)}}_{2\times 3} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{(1,1,1,1,1)}}_{2\times 2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = 0_{2\times 3}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$