5.9. FORMA DE JORDAN REAL DE ENDOMORFISMOS CON AUTOVALORES COMPLEJOS

Cuando alguno de los autovalores de un endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^n)$ sea complejo, la forma canónica de Jordan descrita en la sección 5.7 tiene valores complejos. En esta sección mostraremos como hallar una forma canónica real para $f \in End(V)$, con V e.v. sobre $\mathbb{R}$.

En la sección 5.3 hemos mostrado como hacerlo para $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ver teorema 5.3.3). Repasemos el resultado.

Supongamos que $\lambda = \alpha - i\beta$ y $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$ son los autovalores de A con $\beta > 0$. Sea $\vec{0} \neq \vec{z} \in \ker(A - \lambda I)$, e.d. $A\vec{z} = (\alpha - i\beta)\vec{z}$. Escribir $\vec{z} = \vec{u} + i\vec{v}$ con $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Se tiene

$$A(\vec{u}) + iA(\vec{v}) = A(\vec{u} + i\vec{v}) = (\alpha - i\beta)(\vec{u} + i\vec{v})$$
$$= (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) + i(-\beta\vec{u} + \alpha\vec{v})$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria se tiene

$$\left.\begin{aligned} A(\vec{u}) &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \\ A(\vec{v}) &= -\beta\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son l. i. sobre $\mathbb{R}$: si fueran l.d., $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \gamma \cdot \vec{v}$. De (9.1) se deduce

$$A(\vec{v}) = -\beta(\gamma\vec{v}) + \alpha\vec{v} = (-\beta\gamma + \alpha)\vec{v}$$

y A tendría un autovalor real, $-\beta\gamma + \alpha$, en contra de nuestra hipótesis.

Por tanto, $\mathcal{B} = \{\vec{u} = Real(\vec{z}), \vec{v} = Img(\vec{z})\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ y en esta base

$$M(A; \mathcal{B}) = J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sea ahora $f \in End(V)$ con V e.v. sobre $\mathbb{R}$ de dim. finita y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ su matriz en una base dada. Si todos los autovalores de f son reales, la forma canónica de Jordan es la dada en el teorema 5.7.1.

Supongamos que al menos uno de sus autovalores es complejo. Sea $\lambda = \alpha - i\beta$ $(\beta > 0)$ este autovalor. Como A es una matriz con elementos reales, $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$ tambien es autovalor:

$$|A - \bar{\lambda} I| = \overline{|A - \lambda I|} = \bar{0} = 0.$$

Como $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{0} \iff (A - \bar{\lambda} I)\vec{\bar{z}} = \vec{0}$, las bases de los autoespacios máximos $E_{m_1}(\lambda)$ y $E_{m_2}(\bar{\lambda})$, que producen la base de Jordan compleja de A (ver figura en pg. 5.39) pueden elegirse conjugadas y $m_1 = m_2$. Sean

$$\beta_1 = \{\vec{z}_1, .., \vec{z}_m\} \quad , \quad \beta_2 = \{\vec{\bar{z}}_1, .., \vec{\bar{z}}_m\}$$

las bases de Jordan de $E_{m_1}(\lambda)$ y $E_{m_2}(\bar{\lambda})$ respectivamente y

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m} , \quad J_2 = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \bar{\lambda} & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

sus correspondientes matrices elementales. Se tiene

$$\left\{\begin{aligned} A\vec{z}_1 &= \lambda \vec{z}_1 \\ A(\vec{z}_2) &= \vec{z}_1 + \lambda \vec{z}_2 \\ &\vdots \\ A(\vec{z}_m) &= \vec{z}_{m-1} + \lambda \vec{z}_m \end{aligned}\right\} , \quad \left\{\begin{aligned} A(\vec{\bar{z}}_1) &= \bar{\lambda}\vec{\bar{z}}_1 \\ A(\vec{\bar{z}}_2) &= \vec{\bar{z}}_1 + \bar{\lambda}\vec{\bar{z}}_2 \\ &\vdots \\ A(\vec{\bar{z}}_m) &= \vec{\bar{z}}_{m-1} + \bar{\lambda}\vec{\bar{z}}_m \end{aligned}\right\} . \qquad (9.1)$$

Sean

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_j &= \text{Real}(z_j) = \tfrac{1}{2}(\vec{z}_j + \vec{\bar{z}}_j) \\ \vec{v}_j &= \text{Img}(z_j) = \tfrac{1}{2i}(\vec{z}_j - \vec{\bar{z}}_j) \end{aligned}\right\} , \quad j = 1, 2, .., m . \qquad (9.2)$$

El conjunto de $2m$ vectores dados en (9.2) son l. i sobre $\mathbb{R}$: supongamos que tenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{u}_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{v}_j = \vec{0} \quad , \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Se tiene

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{\vec{z}_j + \vec{\bar{z}}_j}{2} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{\vec{z}_j - \vec{\bar{z}}_j}{2i}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - i\beta_j) \vec{z}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + i\beta_j) \vec{\bar{z}}_j$$

Como $\beta_1 \cup \beta_2$ es l. i. sobre $\mathbb{C}$, deducimos

$$\alpha_j - i\beta_j = 0 \;, \quad \alpha_j + i\beta_j = 0 \quad , \; j = 1, 2, \ldots m.$$

Esto implica $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, c.q.d.

Usando (9.1) se tiene

$$A(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}\left[A(\vec{z}_1) + A(\vec{\bar{z}}_1)\right] = \frac{1}{2}\left[(\alpha - i\beta)\vec{z}_1 + (\alpha + i\beta)\vec{\bar{z}}_1\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2}(\vec{z}_1 + \vec{\bar{z}}_1) + \frac{\beta}{2i}(\vec{z}_1 - \vec{\bar{z}}_1) = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{v}_1$$

$$A(\vec{v}_1) = \frac{1}{2i}\left[A(\vec{z}_1) - A(\vec{\bar{z}}_1)\right] = \frac{1}{2i}\left[(\alpha - i\beta)\vec{z}_1 - (\alpha + i\beta)\vec{\bar{z}}_1\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2i}(\vec{z}_1 - \vec{\bar{z}}_1) - \frac{\beta}{2}(\vec{z}_1 + \vec{\bar{z}}_1) = -\beta \vec{u}_1 + \alpha \vec{v}_1$$

Para $k = 2, 3, \ldots m$

$$A(\vec{u}_j) = \frac{1}{2}\left[A(\vec{z}_j) + A(\vec{\bar{z}}_j)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{z}_{j-1} + (\alpha - i\beta)\vec{z}_j + \vec{\bar{z}}_{j-1} + (\alpha + i\beta)\vec{\bar{z}}_j\right]$$

$$= \vec{u}_{j-1} + \alpha \vec{u}_j + \beta \vec{v}_j$$

$$A(\vec{v}_j) = \frac{1}{2i}\left[A(\vec{z}_j) - A(\vec{\bar{z}}_j)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\vec{z}_{j-1} + (\alpha - i\beta)\vec{z}_j - \vec{\bar{z}}_{j-1} - (\alpha + i\beta)\vec{\bar{z}}_j\right]$$

$$= \vec{v}_{j-1} - \beta\vec{u}_j + \alpha\vec{v}_j .$$

Si elegimos

$$\beta = \{\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_m\}$$

(observa cómo se han ordenado los elementos de β)

la matriz de A restringida a $E_m(\lambda)$ es

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{cc|cc|c}
\alpha & -\beta & 1 & 0 & \\
\beta & \alpha & 0 & 1 & \\
\hline
 & & \alpha & -\beta & 1 \quad 0 \\
 & & \beta & \alpha & 0 \quad 1 \\
\hline
 & & & & \ddots \\
 & 0 & & & \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{array}
\end{array}
\end{pmatrix}_{2m \times m} \qquad (9.3)$$

que es la forma de Jordan real para el bloque $E_M(\lambda) \cup E_M(\bar{\lambda})$.

Teorema 5.9.2 (Teorema de Jordan real)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formada por yuxtaposición sobre la diagonal principal de matrices elementales de Jordan $J_k(\lambda)$ y matrices de la forma (9.3) con $\beta \neq 0$, y una matriz $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con determinante no nulo tal que

$$A = RJR^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan real* de A.

NOTA: El teorema 5.9.2 es válido para $f \in \mathrm{End}(V)$ con V e.v. sobre $\mathbb{R}$.

Ej 5.9.1. Halla una forma de Jordan real J de

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y una matriz $R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A = RJR^{-1}$.

S/ $$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda+1\right]$$

$= -\lambda^2+\lambda-1-\lambda^3+\lambda^2-\lambda = -\lambda^3-1=0$. Resolver $\lambda^3=-1$.

$z=-1=1\,e^{i\pi}$

$z_0 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{\pi i} = -1$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{4\pi}{3}} = e^{\frac{5\pi}{3}i} =$

$= e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

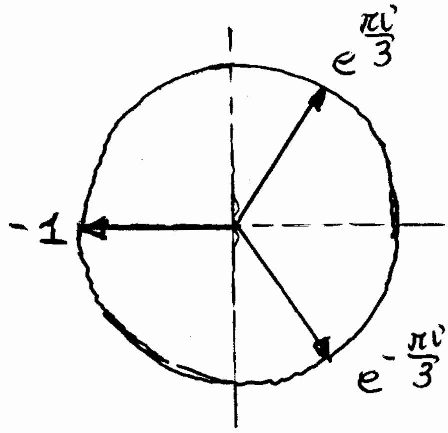
FÓRMULA PARA HALLAR RAÍCES COMPLEJAS
Si $z=re^{i\alpha}$, las raíces n-ésimas de z son: $z_k=\sqrt[n]{r}\;e^{i\frac{\alpha}{n}+i\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$

Numerar:

$\lambda_1=-1$

$\lambda_2 = e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_3 = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\boxed{\lambda_1=-1}$ $E_1(-1)=\ker(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_3=0 \end{array} \right\} ; \; E_1(-1) = \left\langle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $E_1(\lambda_2) = \ker(A-\lambda_2 I)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_2 = 0 \\ z_1 = \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_3 \end{array} \right\}$$

$$E_1(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z} \right\rangle$$

Tomamos

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (partes reales e imaginarias de $\vec{z}$)

En la base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2\}$ se tiene

$$A\vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \quad \text{p.q.} \quad \vec{u}_1 \in \ker(A+I)$$

$$A(\vec{u}_2) + iA(\vec{v}_2) = A(\vec{z}) = A(\vec{u}_2 + i\vec{v}_2) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\vec{u}_2 + i\vec{v}_2) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_2\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_2\right)$$

e.d.

$$A(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_2$$

$$A(\vec{v}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$$

Las matrices pedidas son

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right), \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 5.9.2. Describe razonadamente una forma canónica de Jordan real J de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ver Ej. 5.8.3)

S/ Los autovalores $\mu = \lambda = -i$ (doble) y $\bar{\lambda} = i$ (doble) se han calculado en el Ej. 5.8.3. En este mismo ejercicio se ha obtenido, para $\mu = \lambda = -i$

$$E_1(\mu) = \ker(A + iI) = < \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$E_2(\mu) = \ker(A + iI)^2 = < \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 0 \\ -2i \end{pmatrix} >$$

y habíamos elegido $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 0 \\ -2i \end{pmatrix}$ para hacer una base de Jordan de $E_2(\mu)$. Tomamos la base formada por las partes reales e imaginarias de $\vec{z}_1$ y $\vec{z}_2$:

$$\beta = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{v}_1 = -\vec{u}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{u}_2$$

Entonces

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$