Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Hoja 1: Matrices y sistemas de ecuaciones

1. Utiliza el método de Gauss para determinar las condiciones que deben satisfacer los datos $a, b, \dots$ para que el sistema tenga solución; después utiliza dichas condiciones para mostrar las relaciones existentes entre las filas de la matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-3y+2z &=& a \\ -2x+y+z &=& b \\ x-8y+7z &=& c \\ 2x \qquad +z &=& d \\ x-y+6z &=& e \end{array}\right\} [1] \quad , \quad \left.\begin{array}{rcl} x+2y-z+t &=& a \\ 2x+3y \qquad +t &=& b \\ x+y+z \qquad &=& c \\ -x \qquad -3z+t &=& d \end{array}\right\} [2]$$

Para $(a, b, c, d, e) = (1, -1, 2, 0, -1)$ halla todas las soluciones de [1].

Para $(a, b, c, d) = (4, 5, 1, 2)$ halla todas las soluciones de [2].

2. Utiliza el método de Gauss para hallar la inversa por de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -2 & 3 & -4 \\ & & 1 & -3 & 6 \\ & & & 1 & -4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} ,$$

3. Calcula las inversas por el método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1'001 & 1 \\ 1 & 1 & 1'001 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1'01 & 1 \\ 1 & 1 & 1'01 \end{bmatrix} .$$

¿Cuánto ha variado la matriz? ¿Cuánto ha variado la inversa?

4. Denotamos por X la matriz incógnita 2×2 y por Y la matriz incógnita 3×3. Para cada una de las siguientes ecuaciones matriciales, averigua si tiene solución y en caso afirmativo halla la solución general.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} .$

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} .$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$

5. Cada una de las ecuaciones matriciales siguientes tiene dos incógnitas. Se pide:

   – Determina el tamaño de X y el de Y (pueden variar de una ecuación a otra).
   – Averigua si la ecuación tiene o no solución.
   – Si hay solución o soluciones, halla la solución general.

(1) $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X + Y \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X + Y \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

6. A continuación se da un sistema de ecuaciones (de primer grado) con dos incógnitas matrices. Determina el tamaño de cada incógnita, averigua si tiene solución y en caso afirmativo halla la solución general.

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} Y &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} X + Y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

7. Sea a un número distinto de cero

   a) Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, calcula A^2.

   b) Dada $B = \begin{bmatrix} 0 & -1/a \\ a & -1 \end{bmatrix}$, calcula B^3.

   c) Dada $C = \begin{bmatrix} 0 & -1/a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, calcula C^2.

   d) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene I_2? ¿Cuántas raíces cuadradas tiene $-I_2$?

8. Llamamos **suma telescópica** a una suma de diferencias de la forma

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \ ,$$

en la que cada minuendo es igual al sustraendo de la siguiente diferencia. Claramente, el valor de una tal suma es $a_n - a_0$. Utilizando las identidades:

$$(k+1) - k = 1 \ , \ (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 \ , \ (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \ ,$$

demuestra las siguientes identidades, poniendo cada suma en forma telescópica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \ , \ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \ , \ \sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + 3k + 1) = n^3 \ .$$

Después, razona que esas tres igualdades equivalen al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} ,$$

y despeja de ahí fórmulas para $\sum_{k=1}^{n-1} k$ y $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$. Del mismo modo, resolviendo un sistema 4×4, halla una fórmula para $\sum_{k=1}^{n-1} k^3$ y obtén la siguiente identidad:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = (1 + 2 + \cdots + m)^2 \ .$$