5.2. SUBESPACIOS INVARIANTES. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN ENDOMORFISMO.

Def. 5.2.1. Sea $f: V \to V$ endomorfismo y W sub. vec. de V. Se dice que W es <u>invariante</u> respecto de f si $f(W) \subset W$, es decir, para todo $\vec{x} \in W$, $f(\vec{x}) \in W$.

Ej 5.2.1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = (2x, y)$. Prueba que $W_1 = \langle \vec{e}_1 \rangle$ y $W_2 = \langle \vec{e}_2 \rangle$ son invariantes por f.

Ej. 5.2.2. Sea R_α una rotación de ángulo α en $\mathbb{R}^3$ con respecto al eje OZ

a) Escribe la matriz de R_α con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$

b) Prueba que el plano XOY es invariante por R_α

c) Prueba que la recta OZ es invariante por R_α

Ej 5.2.3. Sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XOY.

(a) Halla la matriz de P en la base canónica

(b) Sea W un plano (sub. vector) que contiene al eje OZ. Prueba que W es invariante por P.

NOTA: Si $f \in End(V)$, $E = \{\vec{0}\}$ y V son siempre invariantes por f.

Proposición 5.2.2.

La intersección y la suma de subespacios invariantes respecto de una aplicación lineal $A \in L(V)$ son subespacios invariantes respecto de A.

Demostración. Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de V que son invariantes respecto de A; si $\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ se tiene que $\vec{x} \in W_1$ y $\vec{x} \in W_2$; como W_1 y W_2 son invariantes tenemos que $A(\vec{x}) \in W_1$ y $A(\vec{x}) \in W_2$; así pues, $A(\vec{x}) \in W_1 \cap W_2$. Esto prueba que $W_1 \cap W_2$ es invariante.

Sea ahora $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W_1 + W_2$; como A es lineal y W_1, W_2 son invariantes respecto de A, se tiene que

$$A(\vec{x}) = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2) \in W_1 + W_2,$$

con lo que se demuestra que $W_1 + W_2$ es también invariante. El razonamiento es similar si se consideran más de dos subespacios vectoriales.

Sea W sub. vec. de V con $\dim(W) = 1$ e.d. $W = \langle \vec{v} \rangle$, y $f \in End(V)$. Si W es invariante por f, se tiene o $f(\vec{v}) \in W \Rightarrow f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Para cualquier otro $\vec{x} \in W$, $\vec{x} = \alpha \vec{v}$ $(\alpha \in \mathbb{K})$ y como f es lineal

$$f(\vec{x}) = f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v}) = \alpha \lambda \vec{v} = \lambda(\alpha \vec{v}) = \lambda \vec{x}.$$

Es decir, cualquier $\vec{x} \in W$ satisface la misma igualdad que $\vec{v}$.

Definición 5.2.3 (Valores y vectores propios)

Un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ se llama *vector propio* o *autovector* de una aplicación lineal $A \in L(V)$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$; este escalar λ se denomina *valor propio* o *autovalor* de la aplicación A correspondiente al vector $\vec{x}$.

Nota. Observar que, por el razonamiento realizado antes de la Definición 6.2.2, si $\vec{x}$ es un vector propio de A con autovalor λ, todo elemento no nulo del subespacio unodimensional generado por $\vec{x}$ es un autovector de A con el mismo autovalor λ.

Supongamos que una aplicación lineal A en un espacio V de dimensión n tiene n vectores propios linealmente independientes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, respectivamente; tomando $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ como una base de V se tiene que

$$A(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1, A(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2, ..., A(\vec{e}_n) = \lambda_n\vec{e}_n$$

y, por tanto, la matriz de A con respecto a esta base es la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, toda aplicación lineal que tiene una matriz diagonal en una cierta base tiene a los elementos de esta base como vectores propios. Si decimos que una aplicación lineal $A \in L(V)$ es *diagonalizable* si existe una base de V en la cual la matriz de A es diagonal, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 5.2.4

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación lineal $A \in L(V)$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si y solo si existe una base de V formada por vectores propios.

Definición 5.2.5

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se dice **diagonalizable** sobre $\mathbb{K}$ si la aplicación lineal $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que la tiene como matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$.

De esta definición se deduce que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con determinante no nulo, tal que $D = C^{-1}AC$ es una matriz diagonal.

PREGUNTA: ¿Como se calculan los autovalores y autovectores de un endomorfismo f con matriz A en una base?

Supongamos que $\vec{x}$ es un vector propio de una aplicación lineal A en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor, es decir, $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V y $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ es la matriz de A con respecto a esta base tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda x_j\vec{e}_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j = \lambda\vec{x} = A(\vec{x}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_jA(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\vec{e}_i.$$

Puesto que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V hemos de tener

$$\left.\begin{array}{rl} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Puesto que (2.1) es un sistema homogéneo, para que posea una solución no nula se ha de tener que el determinante de la matriz de sus coeficientes sea nulo, esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = |A - \lambda I| = 0, \qquad (2.2)$$

donde I denota la matriz identidad. La igualdad (2.2) es una ecuación en λ de grado n y sus soluciones en $\mathbb{K}$ son los autovalores de A.

<u>NOTA:</u> Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, la ecuación (2.2) tiene n soluciones en $\mathbb{C}$, contando cada una con su multiplicidad. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, no siempre la ecuación (2.2) tiene n soluciones reales. Por ejemplo, $x^2+1=0$ no tiene soluciones reales (pero tiene dos complejos, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$).

Ej 5.2.4. a) Halla los autovalores y autovectores del endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(x,y) = (x+2y,\ 5x+4y).$$

b) ¿Es f diagonalizable? Si lo es, ¿en que base?

S/ a) Autovalores $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$

Autovectores: para $\lambda_1 = 6$, $\vec{v}_1 = \alpha(2,5)$

para $\lambda_2 = -1$, $\vec{v}_2 = \beta(1,-1)$

b) ¡Es diagonalizable en la base $\beta = \{\vec{u}_1 = (2,5), \vec{u}_2 = (1,-1)\}$ (por ejemplo). Además

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

Ej 5.2.5- Sea R_α la rotación de ángulo α en $\mathbb{R}^2$. Halla los valores de α para los que R_α es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

S/ $\alpha = 2k\pi$ ó $\alpha = 2(k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

A la expresión $|A-\lambda I|$ (Ver (2.2)) se le llama POLINOMIO CARACTERÍSTICO de la aplicación f que tiene A como matriz en una cierta base β.

PREGUNTA: ¿Depende el polinomio característico de f de la base que se haya usado para escribir su matriz?

RESPUESTA: NO

Sea $P_\beta(\lambda)=|A-\lambda I|$ el pol. característico cuando $A=M(f;\beta)$ y $P_{\beta'}(\lambda)=|A'-\lambda I|$ el análogo para la base β'. Si C es la matriz del cambio de base de β a β' sabemos que $A'=C^{-1}AC$. Entonces

$$P_{\beta'}(\lambda)=|A'-\lambda I|=|C^{-1}AC-C^{-1}\lambda IC|=|C^{-1}||A-\lambda I||C|$$
$$=|A-\lambda I|=P_\beta(\lambda).$$

Ej. 5.2.6. Sea $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

¿Es T diagonalizable en $\mathbb{C}$? ¿Considerada como endomorfismo de $\mathbb{R}^2$, ¿es T diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

La Proposición 5.2.4 nos da una condición necesaria y suficiente para saber cuándo una aplicación lineal es diagonalizable sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, a saber, que exista una base del espacio vectorial V formada por vectores propios; en algunos casos puede resultar laborioso encontrar esta base. Una condición que es suficiente para poder asegurar la diagonalización de una matriz está contenida en la proposición siguiente:

Proposición 5.2.6.

Los vectores propios de una aplicación lineal A correspondientes a valores propios distintos dos a dos son linealmente independientes. En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y $A: V\to V$ tiene n valores propios distintos dos a dos, la aplicación A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción según el número de autovalores. Si solo hay un autovalor λ_1 y $\vec{x}_1$ es uno de sus autovectores, $\vec{x}_1$ es linealmente independiente puesto que $\vec{x}_1 \neq 0$ por definición de vector propio.

Supongamos que existen dos autovalores λ_1, λ_2 con vectores propios $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, respectivamente, y que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ fueran linealmente dependientes podríamos encontrar α_1, α_2 no nulos a la vez, tal que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}. \tag{2.4}$$

Aplicando A a ambos miembros de (2.4) tenemos

$$\alpha_1 A(\vec{x}_1) + \alpha_2 A(\vec{x}_2) = \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \tag{2.5}$$

y multiplicando (2.4) por λ_2 tenemos

$$\alpha_1\lambda_2\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}. \tag{2.6}$$

Restando (2.6) de (2.5) obtenemos $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$; como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, hemos de tener $\alpha_1 = 0$; sustituyendo α_1 en (2.4) obtenemos $\alpha_2 = 0$, lo cual es una contradicción.

Para demostrar la proposición por inducción supongamos que es válida para cualesquiera $k - 1$ valores propios y que tenemos k valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos con vectores propios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$, respectivamente. Supongamos que tenemos una combinación lineal de la forma

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}. \tag{2.7}$$

Aplicando A a ambos miembros de (2.7) tenemos

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A(\vec{x}_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\lambda_j\vec{x}_j = \vec{0}. \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.7) por λ_k tenemos

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\lambda_k\vec{x}_j = \vec{0}. \tag{2.9}$$

Restando (2.9) de (2.8) obtenemos

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_k)\vec{x}_j = \vec{0}.$$

Puesto que los λ_j son distintos dos a dos, la hipótesis de inducción nos permite concluir que α_1, α_2, ..., α_{k-1} son cero; sustituyendo en (2.7) se obtiene $\alpha_k = 0$ y, por tanto, $\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k\}$ son linealmente independientes.

Ej 5.2.7. Decide si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

NOTA: Un endomorfismo f puede ser diagonalizable y tener autovalores múltiples. Por ejemplo, f = Identidad es diagonalizable y todos sus autovalores son 1.

Ej 5.2.8 Halla los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el endomorfismo $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T_a(x,y,z) = (az, ay, 0)$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Subespacio propio o AUTOESPACIO de un autovalor

Sea $A \in L(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea λ_0 un autovalor de A, con $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Denominamos *subespacio propio correspondiente a* λ_0 al subconjunto

$$E(\lambda_0) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I).$$

Observar que $E(\lambda_0)$ contiene todos los vectores propios correspondientes al valor propio λ_0 junto con el vector $\vec{0}$.

Puesto que el núcleo de cualquier aplicación lineal es un subespacio vectorial de V, tenemos que $E(\lambda_0)$ es un subespacio vectorial de V. Además, de los resultados de la sección 5.4 se deduce que

$$\begin{aligned}\dim(E(\lambda_0)) &= \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Img}(A - \lambda_0 I)) = \\ &= \dim(V) - r(A - \lambda_0 I).\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo queda como ejercicio para el lector.

Ej. 5.2.8. Hallar los subespacios propios del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = (3x + y + 5z, 7y, 7z)$$
