Hoja nº ....

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)
UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

· Diferenciabilidad

Def. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La derivada parcial de f en $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ respecto a x_i es el límite: $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_1, x_2, \dots, x_i+h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$

si existe: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ - todas las variables fijas excepto x_i. - Dom f abto -

$\mathcal{B}_n = \{e_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$ $\quad e_i = (0,0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + e_i h) - f(x_0)}{h} : \to \frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0) \dots f_m(x_0))$

y $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el plano tg a la gráfica de f $G(f) = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Difer.

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).$$ (que pasa por (x_0,y_0))

Def. (DIFERENCIABILIDAD). Sea $f: A_{\text{abto}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. f diferenciable en $x_0 \in A$

si (1) $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ existen $\forall\, 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

(2) para la matriz $m \times n$ $\quad Df(x_0) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ ← columnas ← filas

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)^t \|}{\| x - x_0 \|} = 0.$$

Def $Df(x_0)$ matriz diferencial de f en x_0:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x_0)} (m \times n)$$

$x = (x_1, \dots x_n)$

$x_0 = (x_{01}, \dots x_{0n})$

$$(x - x_0)^t = \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_{n} - x_{0n} \end{pmatrix}_{(n \times 1)}$$

$Df(x_0) \cdot (x - x_0)^t \in \mathbb{R}^m$ $(m \times 1)$

Caso especial: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Vector gradiente $\quad \nabla f(x_0) := Df(x_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Teorema: f diferenciable en $x_0 \in Dom\, f \Rightarrow f$ continua en x_0.

Lema: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $h \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \underbrace{\|A\cdot h\|}_{m\times 1} \le M \underbrace{\|h\|}_{n\times 1}$, con $M = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)}$ $\quad \left(\big|\,|a|-|b|\,\big| \le |a-b|\right)$

Dm (tma) $\quad h = x - x_0$.

$\exists$ parciales de f y $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)\cdot h\|}{\|h\|} = 0$.

En particular ($\varepsilon = 1$)

$\exists \delta_1 > 0$, $0 < \|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| < \|h\|$

$\Rightarrow \|h\| > \|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| \ge \big|\|f(x_0+h) - f(x_0)\| - \|Df(x_0)h\|\big| \ge \|f(x_0+h) - f(x_0)\| - \|Df(x_0)\cdot h\|$

$\Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0)\| < \|Df(x_0)\, h\| + \|h\| \underset{\text{lema}}{\le} (M+1)\|h\| < (M+1)\,\delta \le \varepsilon$

Con $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M+1}\right\}$ ∎

Teorema. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si todas las parciales existen y son continuas en un entorno de x_0 $\Rightarrow f$ difer. en x_0

Def. f es de clase C^1 si todas sus parciales existen y son continuas

Prop. de derivabilidad.

(1) $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difer en x_0, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cf)$ difer en x_0 y $D(cf)(x_0) = c\cdot Df(x_0)$.

(2) $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difer en $x_0 \Rightarrow (f+g)$ y $(f\cdot g)$ difer en x_0

y $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$,

$D(fg)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)\cdot Dg(x_0)$

(3) $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difer en $x_0 \Rightarrow$ si $g(x_0) \ne 0$,

(f/g) difer. en x_0 y $D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{g(x_0)^2}$

(4) $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, f difer en $x_0 \Leftrightarrow f_i$ difer en x_0 $\forall i$

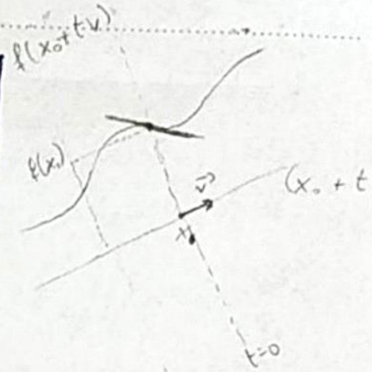
Tma. (Regla de la cadena). $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V$

$\Rightarrow g\circ f: U \to \mathbb{R}^k$. Supongamos f difer en $x_0 \in U$, g difer en $f(x_0) \in V$

$\Rightarrow (g\circ f)$ diferenciable en x_0 y $D(g\circ f) = Dg(f(x_0))\cdot Df(x_0)$

Lema: Si f difer en $x_0 \to \exists \delta, M > 0$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < M\|x - x_0\|$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....



Def. $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$

Derivada direccional de f en x_0 a lo largo del vector $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_v f(x_0) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + tv) \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

($\|v\| = 1 \to$ Deriv. direc. f en x_0 a lo largo de la dirección v)

$H(t) = f(r(t))$, con $r(t) = x_0 + tv$

$\Rightarrow H'(0) = D_v f(x_0) = Df(r(0)) \cdot r'(0) = Df(x_0) \cdot v$

Tma. f difer en $x_0 \Rightarrow$ todas las direccionales existen y $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$

(1) Si $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ difer, con $c(0) = x_0$, $c'(0) = v$

$\Rightarrow D_v f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t))$

D/ $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t)) = Df(c(0)) \cdot c'(0)$
$= \nabla f(x_0) \cdot v$

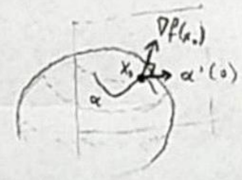
(2) (obs) $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0) \Rightarrow D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

(3) $D_{(\cdot)} f(x_0)$: $\begin{array}{c} v \longmapsto D_v f(x_0) \\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$ es ap. lineal.

Tma. f difer en x_0, $\nabla f(x_0) \neq 0$. Entonces $\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección en la que f crece más rápido. i.e: $v \in \mathbb{R}^n$ unitario, $D_v f(x_0)$ es máx. cuando $v = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

D/ $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) v = \|\nabla f(x_0)\| \, \|v\| \cos\theta \le \|\nabla f(x_0)\| \, \|v\|$

igual $\Leftrightarrow \cos\theta = 1$; $\nabla f(x_0)$, v misma dir, i.e. $v = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$



Tma. (Grad. y sup. de nivel) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S_c = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) = c \}$.

Si $x_0 \in S_c \Rightarrow \nabla f(x_0)$ es normal a S_c.

D/ $\forall \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_c$, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha'(0)$ pertenece al plano tg. a S_c

$$\nabla f(x_0) \cdot \alpha'(0) = D_{\alpha'(0)} f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (c) = 0 \ \blacksquare$$

Ecuación del plano tangente a una superficie de nivel en un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (pasa por p_0, $\nabla f(p_0)$ normal al plano)

$$\Rightarrow (p - p_0) \cdot \nabla f(p_0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)(z - z_0)$$

$\boxed{\text{Def. } f \text{ es una función de } C^2 \text{ si todas sus parciales de orden 2 existen y son continuas } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dots}\right)}$

$\boxed{\text{Teorema } f: U_{abto} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$ (se puede generalizar para más dimensiones).