5.8. EJEMPLOS DE FORMAS DE JORDAN (Complejas)

Resumen y guía:

1) Dada una aplicación lineal A se comienza calculando los autovalores; sean estos $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$, con multiplicidades $s_1, ..., s_r$, respectivamente, con $s_1 + \cdots + s_r = n$ (n = dimensión del espacio vectorial V en el que está definida A).
2) Para cada autovalor λ se calcula la cadena de subespacios

$$E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq E_m(\lambda) = E_{m+1}(\lambda) = \cdots$$

donde $E_s(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^s$, $s = 1, 2, ...$ La secuencia anterior se estabiliza después de un cierto número de pasos m (el subespacio $E_m(\lambda)$ se denomina *autoespacio máximo* asociado a λ). El valor de m puede obtenerse sabiendo que $\dim E_m(\lambda)$ = multiplicidad de λ en $p_A(x)$.

Nota. Es conveniente ahora observar la figura 6.3.

3) Elegir $\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m,q_m}$ en $E_m(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda), ..., \vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda)\}$$

sea una base de $E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda)$ ($q_m = \dim E_m(\lambda) - \dim E_{m-1}(\lambda)$). Estos vectores forman la primera fila de la tabla de la figura 6.3.
4) Hallar

$$\vec{v}_{m-1,1} = (A - \lambda I)\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_m} = (A - \lambda I)\vec{v}_{m,q_m}$$

que son los q_m primeros vectores de la segunda fila de la tabla de la figura 6.3. Completar esta fila de la tabla con vectores $\vec{v}_{m-1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}$ en $E_{m-1}(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m-1,j} + E_{m-2}(\lambda)\}_{j=1}^{q_{m-1}}$$

sea una base de $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$ ($q_{m-1} = \dim E_{m-1}(\lambda) - \dim E_{m-2}(\lambda)$).
5) Continuar el proceso anterior hasta obtener los elementos $\vec{v}_{1,1}, ..., \vec{v}_{1,q_m}, \vec{v}_{1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{1,q_{m-1}}, ..., \vec{v}_{1,q_3+1}, ..., \vec{v}_{1,q_2}$ de $E_1(\lambda)$ que estan en la última fila. Si fuera necesario estos elementos se completan con los vectores $\vec{v}_{1,q_2+1}, ..., \vec{v}_{1,q_1}$ de manera que todos ellos sean una base de $E_1(\lambda)$.
6) Escribir la base B_λ en el siguiente orden: por columnas de izquierda a derecha y en cada columna de abajo hacia arriba (ver figura 6.3). La matriz de $A|_{E_m(\lambda)}$ en la base B_λ estará formada por matrices elementales de Jordan de la forma $J_k(\lambda)$ descritas al comienzo de la sección 6.7.
7) Repetir los pasos 2) a 6) para cada autovalor λ_i, $i = 1, ..., r$; por el Corolario 6.7.7, $B = B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_r}$ es la base de Jordan de A y en esta base la matriz de A es su forma de Jordan J.

Figura 6.4

Ej 5.8.1. Halla una forma canónica de Jordan J de la aplicación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y una matriz C tal que $A = CJC^{-1}$

S/ $|A-\lambda I| = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$. Autovalores: $\lambda=1$ (triple), $\mu=2$ (simple).

$\boxed{\lambda=1}$ $E_1(1) = \ker(A-I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{Bmatrix} \; ; \; E_1(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$E_2(1) = \ker(A-I)^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{x_4 = 0\}$$

$$E_2(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ya paramos porque $\dim(E_2(1)) = 3$ = multiplicidad de $1 = 1$.

Elegimos la base:

$\vec{u}_3 \in E_2(1) \setminus E_1(1)$ p.e. $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se elige $\vec{u}_2 = (A-I)\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(1)$

Como $\dim(E_1(1)) = 2$, elegimos $\vec{u}_1$ l.i. con $\vec{u}_2$. Por ejemplo

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(1)$$

Se tiene

$$\vec{u}_1 \in E_1(1) \Rightarrow A(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_2 \in E_1(1) \Rightarrow A(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$$

$$\vec{u}_2 = (A-I)\vec{u}_3 \Rightarrow A(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

La matriz de $A|_{E_2(1)}$ en la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$\boxed{\lambda=2}$ $E_1(2)=\ker(A-2I)$

$$\begin{pmatrix}-1&0&2&-6\\0&-1&-1&3\\0&0&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=0\\x_3=3x_4\end{array}\right\}$$

$$E_1(2)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\3\\1\end{pmatrix}=\vec{u}_4\right\rangle$$

$$J=\left(\begin{array}{c|cc|c}1&0&0&0\\\hline 0&1&1&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&2\end{array}\right),\quad P=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ej 5.8.2. Halla una forma canónica de Jordan de la aplicación $A:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ dada por

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1+2x_2+3x_3,\ x_2+2x_3,\ x_3+2x_4,2x_4+x_5,x_5)$$

S/ $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix};\ p_A(\lambda)=(\lambda-1)^4(\lambda-2)$$

Autovalores: $\lambda=1$ (cuádruple), $\lambda=2$ (simple)

$\boxed{\lambda=1}$ $E_1(1)=\ker(A-I)$

$$\begin{pmatrix}0&2&3&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_2=x_3=x_4=x_5=0$$

$$E_1(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$E_2(1)=\ker(A-I)^2$:

$$\begin{pmatrix}0&2&3&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&4&6&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_3=0\\x_4=0\\x_5=0\end{array}\right\}$$

$$E_2(1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$E_3(1) = \ker(A-I)^3$

$$\begin{pmatrix}0&2&3&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0&14&6\\0&0&0&4&4\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x_4=0\\x_5=0\end{matrix}\right\}$$

$$E_3(1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$E_4(1) = \ker(A-I)^4 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$. Pasamos

$$J(1) = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Para $\mu=2$, $E_1(2)$ ~~ker~~ $(A-2I)$ tiene dimensión 1, luego

$$J = \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&2\end{array}\right)$$

en una base adecuada.

Ej. 5.8.3. Halla una forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&-1&0&1\\1&1&0&0\\0&-2&0&1\end{pmatrix}$$

y la base en la que se obtiene J.

S/ $$\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1&0\\0&-1-\lambda&0&1\\1&1&-\lambda&0\\0&-2&0&1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2 = 0\ ;\ \lambda = i\ (\text{doble}),\ \mu = -i\ (\text{doble})$$

$\boxed{\lambda = i}$ $\quad E_1(i) = \ker(A - iI)$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{iF_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{iF_2} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & i \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} z_1 + i z_2 - i z_3 = 0 \\ (1-i) z_2 + i z_4 = 0 \\ -i z_4 = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} z_1 = i z_3 \\ z_2 = 0 \\ z_4 = 0 \end{array}\right\} ; \quad E_1(i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$E_2(i) = \ker(A - iI)^2$

$$(A - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2-2i & 2i & 1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ -2i & -2i & -2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{iF_3} \begin{pmatrix} -2 & -2-2i & 2i & 1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ 2 & 2 & -2i & i \\ 0 & 4i & 0 & -2-2i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{pmatrix} +2 & 2+2i & -2i & -1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ 0 & -2i & 0 & i+1 \\ 0 & 4i & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + 2F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2+2i & -2i & -1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ 0 & -2i & 0 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{vmatrix} -2+2i & -2i \\ -2i & i+1 \end{vmatrix} = 0} \begin{pmatrix} 2 & 2+2i & -2i & -1 \\ 0 & -1+i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + iF_2} \begin{pmatrix} 2 & 1+i & -2i & 0 \\ 0 & -1+i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2 z_1 + (1+i) z_2 - 2i z_3 = 0 \\ (-1+i) z_2 - i z_4 = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 2 z_1 + (1+i) z_2 = 2i z_3 \\ (-1+i) z_2 = i z_4 \end{array}\right\}$$

- Con $z_3 = 1$ y $z_4 = 0$, $z_2 = 0$ y $2z_1 = 2i z_3 \Rightarrow z_1 = i$
- Con $z_3 = 0$ y $z_4 = 2i$, $z_2 = \dfrac{i(2i)}{-1+i} = \dfrac{-2}{-1+i} = \dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$

  y $2z_1 = -(1+i) z_2 = -(1+i)(1+i) = -2i \Rightarrow z_1 = -i$

$$E_2(i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1+i \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\begin{array}{l} \text{Paramos pq. } \dim E_2(i) = \\ \ker((A-iI)^2) = 2 = \text{mult. de } \lambda = i \end{array} \right)$$

Elegimos $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1+i \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_1 = (A-iI)\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(i)$

Como $u_1 \in E_1(i)$, $A\vec{u}_1 = i\vec{u}_1$; de $\vec{u}_1 = (A-iI)\vec{u}_2$ deducimos $A(\vec{u}_2) = u_1 + i\vec{u}_2$. En la base $\beta_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$,

$$M(A|_{E_2(i)}) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mu = -i}$ Como la matriz A ~~t~~iene elementos reales y $\mu = -i = \bar{i} = \bar{\lambda}$, al resolver $(A+\mu I)\vec{w} = \vec{0}$ y $(A-\mu I)^2\vec{w} = \vec{0}$ se obtienen vectores conjugados de los del caso anterior:

$$\vec{u}_4 = \overrightarrow{\bar{u}_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 0 \\ -2i \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = (A+i)\vec{u}_4 = \overline{(A-i)}\,\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(-i)$$

En la base $\beta_2 = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$,

$$M(A|_{E_2(-i)}) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & i & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -i & 1 \\ & & 0 & -i \end{array} \right), \quad \beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$$

Ej 5.8.4. Halla ~~una~~ forma canónica de Jordan J del endomorfismo $f: \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ dado por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3x_1,\ 2x_2,\ x_2+2x_3,\ 4x_4-4x_5,\ x_4,\ -x_4+3x_5+2x_6)$$

indicando la matriz del cambio de base.

S/

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 3 & & & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ \hline & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{array}\right), \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$