Universidad Autónoma de Madrid

Análisis Matemático. Soluciones al examen del 12 de Enero de 2022.

Problema 1 a) Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en un espacio métrico completo (X, d). Demuestra que si $\{x_n\}$ es de Cauchy y además $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ entonces $\{y_n\}$ es de Cauchy.

Solución.
Sea $\varepsilon > 0$. Existen enteros positivos s'_ε , s''_ε tales que

$$n, k \geq s'_\varepsilon \implies d(x_n, x_k) < \varepsilon \quad , \quad n, k \geq s''_\varepsilon \implies \begin{cases} d(x_n, y_n) < \varepsilon \\ d(x_k, y_k) < \varepsilon \end{cases}$$

Definimos $s_\varepsilon = \max\{s'_\varepsilon, s''_\varepsilon\}$ y tenemos:

$$n, k \geq s_\varepsilon \implies \begin{cases} d(x_n, x_k) < \varepsilon \\ d(x_n, y_n) < \varepsilon \\ d(x_k, y_k) < \varepsilon \end{cases}$$

Además:

$$d(y_n, y_k) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_k) + d(x_k, y_k) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \;=\; 3\,\varepsilon \;,$$

es decir, el entero s_ε es tal que

$$n, k \geq s_\varepsilon \implies d(y_n, y_k) < 3\,\varepsilon\,.$$

Como 3ε es arbitrariamente pequeño, queda probado que $\{y_n\}$ es de Cauchy.

Problema 1 b) Demuestra que si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son de Cauchy entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

Primera solución.
Como (X, d) es completo, existen puntos $p, q \in X$ con $\{x_n\} \to p$, $\{y_n\} \to q$. Entonces

$$\{d(x_n, y_n)\} \;\to\; d(p, q)\;,$$

por ser la distancia una función continua.

Segunda solución. Hemos visto en clase, y recogido en los apuntes, que para todo punto $x \in X$ la función $d(x, \cdot)$ es Lipschitziana con 1 como constante de Lipschitz:

$$\big|\, d(x, z) - d(x, z')\,\big| \leq d(z, z') \quad , \quad \text{para cualesquiera } z, z' \in X\;,$$

y análogamente para las funciones $d(\cdot, y)$, con $y \in X$ cualquiera. Se deduce:

$$\begin{aligned} \big|\, d(x_n, y_n) - d(x_k, y_k)\,\big| \;&=\; \big|\, d(x_n, y_n) - d(x_n, y_k) + d(x_n, y_k) - d(x_k, y_k)\,\big| \leq \\ &\leq\; \big|\, d(x_n, y_n) - d(x_n, y_k)\,\big| + \big|\, d(x_n, y_k) - d(x_k, y_k)\,\big| \leq \\ &\leq\; d(y_n, y_k) + d(x_n, x_k)\;. \end{aligned}$$

La suma $d(y_n, y_k) + d(x_n, x_k)$ tiende a cero cuando $n, k \to \infty$, porque tanto $\{y_n\}$ como $\{x_n\}$ son de Cauchy. Esto prueba que $\big\{d(x_n, y_n)\big\}$ es una sucesión numérica de Cauchy, luego hay un número real finito que es su límite.

Problema 1 c) Sean $A_1, \ldots, A_N$ números reales. Consideremos la función $F(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} A_i x_i$. Para cada norma $\| \cdot \|_a$ en $\mathbb{R}^N$, definimos $|||F|||_a = \sup_{\|x\|_a = 1} \big| F(x) \big|$. Calcula $|||F|||_1$.

Solución.
Sea $j_0 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ un índice tal que $|A_{j_0}| = \max_j |A_j|$. Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$\big| F(x) \big| \;=\; \big| \, A_1 x_1 + \cdots A_N x_N \, \big| \;\leq\; |A_{j_0}| \cdot (\, |x_1| + \cdots |x_N| \,) \;=\; |A_{j_0}| \cdot \|x\|_1 \;,$$

luego $|||F|||_1 \leq |A_{j_0}|$.
Por otra parte, para el vector $\mathbf{e}_{j_0}$ de la base estándar es $\|\mathbf{e}_{j_0}\|_1 = 1$ y $\big| F(\mathbf{e}_{j_0}) \big| = |A_{j_0}|$, luego $|||F|||_1 \geq |A_{j_0}|$.
En definitiva $|||F|||_1 = |A_{j_0}| = \max_j |A_j| = \|(A_1, \ldots, A_n)\|_\infty$.

Problema 2 Demuestra que el siguiente sistema tiene solución única para cualquier valor de la constante c

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & c + \dfrac{\operatorname{sen} y}{5} + \dfrac{1}{7} \arctan x \\ y & = & \dfrac{|x|}{6} + \dfrac{1}{9 + y^2} \end{array}\right\}$$

Solución.
Hay que demostrar que la siguiente función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c + \dfrac{\operatorname{sen} y}{5} + \dfrac{1}{7} \arctan x \\ \\ \dfrac{|x|}{6} + \dfrac{1}{9 + y^2} \end{pmatrix} \;,$$

es contractiva para alguna norma $\| \cdot \|$ en $\mathbb{R}^2$, es decir que para cualesquiera vectores

$$u \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad u' \;=\; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \;,$$

se tiene $\| \, f(u) - f(u') \, \| \leq \varepsilon \, \|u - u'\|$, siendo ε una constante menor que 1.
Puesto que $\frac{d}{dx} \arctan x = 1/(1 + x^2)$ y $\frac{d}{dy} \operatorname{sen} y = \cos y$ están acotadas por 1 en valor absoluto, se tiene:

$$|\, \arctan x - \arctan x' \,| \leq |x - x'| \quad , \quad |\, \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y' \,| \leq |y - y'| \;.$$

Sabemos que la función $| \cdot |$ tiene constante de Lipschitz 1:

$$\big| \, |x| - |x'| \, \big| \leq |x - x'| \;.$$

Acotamos ahora la derivada de la cuarta función:

$$\left| \frac{d}{dy} \, \frac{1}{9 + y^2} \right| \;=\; \frac{|-2y|}{(9 + y^2)^2} \;\leq\; \frac{1 + y^2}{(9 + y^2)^2} \;\leq\; \frac{1}{9} \;.$$

Deducimos las siguientes desigualdades:

$$\left| \frac{1}{7} \arctan x - \frac{1}{7} \arctan x' \right| \leq \frac{1}{7} \, |x - x'| \quad , \quad \left| \frac{\operatorname{sen} y}{5} - \frac{\operatorname{sen} y'}{5} \right| \leq \frac{1}{5} \, |y - y'| \;,$$

$$\left| \frac{|x|}{6} - \frac{|x'|}{6} \right| \leq \frac{1}{6} \, |x - x'| \quad , \quad \left| \frac{1}{9 + y^2} - \frac{1}{9 + {y'}^2} \right| \leq \frac{1}{9} \, |y - y'| \;,$$

de donde, sea cual sea la constante c, se deduce:

$$f(u) - f(u') \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} |a| \;\leq\; \frac{1}{7}|x-x'| + \frac{1}{5}|y-y'| \\ \\ |b| \;\leq\; \frac{1}{6}|x-x'| + \frac{1}{9}|y-y'| \end{cases}$$

Por una parte:

$$|a| \leq \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right) \|u-u'\|_\infty \leq 0'35\,\|u-u'\|_\infty \quad , \quad |b| \leq \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right) \|u-u'\|_\infty \leq 0'28\,\|u-u'\|_\infty\,,$$

luego

$$\|f(u)-f(u')\|_\infty \;\leq\; 0'35\,\|u-u'\|_\infty\,.$$

La función f es contractica para la norma $\|\cdot\|_\infty$ y por lo tanto tiene un único punto fijo, que es la única solución al sistema original.

Por otra parte:

$$|a|+|b| \leq \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)|x-x'| + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\right)|y-y'| \leq 0'31\,|x-x'| + 0'32\,|y-y'| \leq 0'32\,\|u-u'\|_1\,,$$

es decir:

$$\|f(u)-f(u')\|_1 \;\leq\; 0'32\,\|u-u'\|_1\,.$$

La función f es contractiva para la norma $\|\cdot\|_1$ y por lo tanto tiene un único punto fijo, que es la única solución al sistema original.

También es f contractiva para la norma $\|\cdot\|_2$, pero el cálculo es bastante más largo.

Problema 3 Sean $C = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=2\,,\; x-yz+1=0\,\}$ y $f(x,y,z) \equiv xy - ayz + z$.

a) Demuestra que C es una subvariedad. Halla su dimensión y codimensión.

Solución. Ante todo $C \neq \varnothing$, porque $(1,1,2)\in C$. Si fuera $y=0$ en algún punto de C, en dicho punto tendría que ser a la vez $x=\pm\sqrt{2}$, y $x=-1$, imposible. Luego es $y\neq 0$ en todo punto de C. Al calcular la jacobiana del sistema de ecuaciones

$$\text{jac} \;=\; \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & -z & -y \end{bmatrix}\,,$$

vemos que el menor formado por las dos últimas columnas es distinto de cero en todo punto de C. Luego dicha jacobiana tiene rango 2 en todo punto de C, que por lo tanto es una subvariendad cuya codimensión es 2 y cuya dimensión es $3-2=1$.

b) Obtener un vector unitario w tangente a C en el punto $p=(1,1,2)$.

Solución. Evaluamos en p la jacobiana del sistema de ecuaciones. Entonces las filas de la matriz son una base del espacio normal a C en p. Luego un vector es tangente a C en p si y sólo si es ortogonal a las dos filas, o sea un vector anulado por la jacobiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,,$$

y llegamos a:

$$w \;=\; \lambda\cdot(1,-1,3) \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{11}}\,(1,-1,3)\,,$$

siendo necesario elegir $\lambda = \pm 1/\sqrt{11}$ para que w sea un vector unitario.

c) Calcular la derivada $D_w f(p)$.

Solución. Empezamos calculando el campo gradiente de f:

$$\nabla f \;=\; \big(y \,,\, x - az \,,\, 1 - ay \big) \;.$$

Entonces, eligiendo el valor positivo de λ en el apartado anterior:

$$D_w f(p) \;=\; w \cdot \nabla f(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{11}}\,(1,-1,3) \cdot \big(1 \,,\, 1-2a \,,\, 1-a \big) \;=\; \frac{3-a}{\sqrt{11}} \;.$$

d) Determina a para que p sea punto crítico de $f|_C$.

Solución. Que p sea punto crítico de $f|_C$ significa que el campo gradiente ∇f es normal a C en p, es decir que $\nabla f(p)$ es un vector nomal a C en p.
Por una parte, ser normal a C en p es lo mismo que ser ortogonal al vector w. Llegamos a la condición

$$0 \;=\; w \cdot \nabla f(p) \;=\; \frac{3-a}{\sqrt{11}} \;,$$

y obtenemos $a = 3$.

Por otra parte, sabemos que una base del espacio normal a C en p lo forman los gradientes en p de las ecuaciones que definen C, es decir la filas de la jacobiana antes calculada. Esto nos da la siguiente condición

$$\nabla f(p) \;=\; \lambda_1 \cdot (2,2,0) + \lambda_2 \cdot (1,-2,-1) \;,$$

que dice que p *es un punto multiplicadores de Lagrange.*
La igualdad

$$\big(1 \,,\, 1-2a \,,\, 1-a \big) \;=\; \lambda_1 \cdot (2,2,0) + \lambda_2 \cdot (1,-2,-1) \;,$$

requiere que se cumpla:

$$0 \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1-2a & 1-a \end{vmatrix} \;\equiv\; 2a - 6 \;,$$

y de nuevo obtenemos $a = 3$.

Problema 4 Consideramos la 2-forma

$$\eta \;=\; (\cos x - e^x)\, dx \wedge dy + (ay+5)\, dx \wedge dz + (x+y)\, dy \wedge dz \;,$$

y la aplicación

$$T(u,v) \;\equiv\; \big(u^2 \,,\, uv \,,\, u^2+v^2 \big) \;.$$

a) Hallar el pullback $T^*\eta$.

Solución.

$$\begin{aligned} T^*\eta \;&=\; (\cos u^2 - e^{u^2})\, d(u^2) \wedge d(uv) + \\ &\; +(auv+5)\, d(u^2) \wedge d(u^2+v^2) + \\ &\; +(u^2+uv)\, d(uv) \wedge d(u^2+v^2) \;= \\ &=\; (\cos u^2 - e^{u^2})\, 2u^2\, du \wedge dv + \\ &\; +(auv+5)\, 4uv\, du \wedge dv + \\ &\; +(u^2+uv)\, \big(2v^2\, du \wedge dv + 2u^2 \underbrace{dv \wedge du}_{=-du \wedge dv} \big) \;, \end{aligned}$$

finalmente:

$$T^*\eta \;=\; \big[\,2u^2(\cos u^2 - e^{u^2}) + 4uv\,(auv+5) + (u^2+uv)(2v^2-2u^2)\,\big]\,du\wedge dv\ .$$

b) Hallar el valor de la constante a para el cual la 2-forma η es cerrada.

Solución. "Cerrada" significa con derivada exterior nula:

$$0 \;=\; d\eta \;\equiv\; 0 + a\,dy\wedge dx\wedge dz + dx\wedge dy\wedge dz \;=\; (1-a)\,dx\wedge dy\wedge dz\ ,$$

luego el valor buscado es $a=1$.

c) Para ese valor de a, halla una forma de Pfaff ω tal que $d\omega=\eta$.

Solución. Separamos los términos con el factor dx:

$$\eta \;=\; dx\wedge\big[\,(\cos x - e^x)\;dy + (y+5)\,dz\,\big] + (x+y)\,dy\wedge dz\ .$$

Integramos las funciones $\cos x - e^x$, $y+5$ con respecto a x y usamos el resultado para construir la forma de Pfaff

$$\omega_1 \;=\; (\operatorname{sen} x - e^x)\,dy + (xy+5x)\,dz\ .$$

Calculamos la diferencia

$$\eta - d\omega_1 \;=\; y\,dy\wedge dz\ ,$$

que ya no contiene la variable x en ningún sitio, lo cual hace fácil el escribirla como una derivada exterior. Ejemplos:

$$y\,dy\wedge dz \;=\; \begin{cases} d\left(\dfrac{y^2}{2}\,dz\right) \\[2ex] d(-yz\,dy) \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\eta \;=\; \begin{cases} d\left(\omega_1 + \dfrac{y^2}{2}\,dz\right) & = \; d\left[(\operatorname{sen} x - e^x)\,dy + \left(xy + 5x + \frac{y^2}{2}\right)\,dz\right] \\[2ex] d\big(\,\omega_1 - yzdy\,\big) & = \; d\,\big[\,(\operatorname{sen} x - e^x - yz)\,dy + (xy+5x)\,dz\,\big] \end{cases}$$

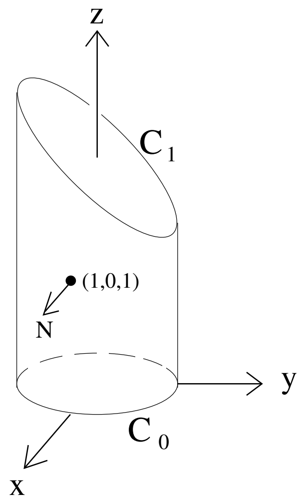
Problema 5 Consideramos la superficie

$$S \;=\; \big\{\,(x,y,z)\,:\,x^2+y^2=1\ ,\ z\geq 0\ ,\ y+z\leq 2\,\big\}\ ,$$

orientada por la normal unitaria N tal que $N(1,0,1)=(1,0,0)$.

1. Para cada una de las curvas que forman el borde de S, halla una parametrización acorde con la orientación inducida por la de S.

Solución. La superficie S es la parte de un cilindro comprendida entre una circunferencia C_0, situada en el plano $\{z=0\}$, y una elipse C_1 situada en el plano oblicuo $\{y+z=2\}$



Elegimos los siguientes puntos

$$p_0 \ = \ (1,0,0) \in C_0 \quad , \quad p_1 \ = \ (1,0,2) \in C_1 \ .$$

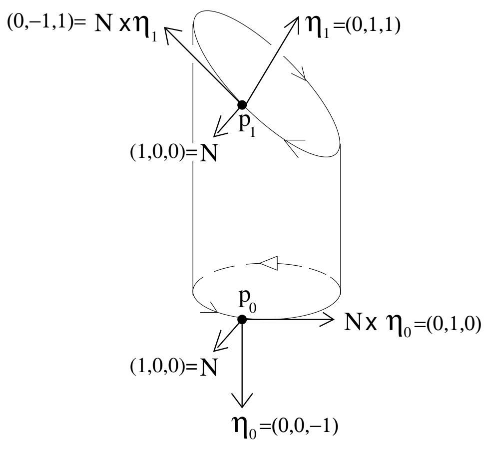
En p_0 el vector $\eta_0 = (0,0,-1)$ es una conormal exterior a S. Por lo tanto el producto

$$N(p_0) \times \eta_0 \ = \ (1,0,0) \times (0,0,-1) \ = \ (0,1,0)\,,$$

es un vector tangente a C_0 en p_0 que define la orientación de C_0 inducida por la de S.
En p_1 el vector $\eta_1 = (0,1,1)$ es una conormal exterior a S. Por lo tanto el producto

$$N(p_1) \times \eta_1 \ = \ (1,0,0) \times (0,1,1) \ = \ (0,-1,1)\,,$$

es un vector tangente a C_1 en p_1 que define la orientación de C_1 inducida por la de S.



Una parametrización de C_0 acorde la orientación como borde es

$$\alpha_0(t) \ = \ \big(\ \cos t\,,\ \mathrm{sen}\, t\,,\ 0\big) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

porque le da una vuelta a C_0 y cumple $\alpha_0(0) = p_0$ y $\alpha_0'(0) = (0,1,0)$.
Una parametrización de C_1 acorde con la orientación como borde es

$$\alpha_1(t) \ = \ \big(\ \cos t\,,\ -\mathrm{sen}\, t\,,\ 2 + \mathrm{sen}\, t\big) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

porque la da una vuelta a C_1 y cumple $\alpha_1(0) = p_1$ y $\alpha_1'(0) = (0,-1,1)$.

2. Calcula $\displaystyle\int_S d\omega$ para $\omega = (z-2)\,dx + (3x+e^y)\,dy + y\,dz$, utilizando el teorema de Stokes.

Solución. Denotando por ∂S el borde de S con la orientación inducida por la de S, el teorema de Stokes nos dice:

$$\int_S d\omega \;=\; \int_{\partial S}\omega \;=\; \int_{\alpha_0}\omega + \int_{\alpha_1}\omega \;=\; \int_{[0,2\pi]}\alpha_0^*\omega + \int_{[0,2\pi]}\alpha_1^*\omega\ .$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^*\omega &= -2\,d\cos t + (3\cos t + e^{\operatorname{sen} t})\,d\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,d0 \;=\\
&= \big(2\ \operatorname{sen} t + 3\cos^2 t + (\cos t)\,e^{\operatorname{sen} t}\big)\,dt\ ,\\
\alpha_1^*\omega &= (\operatorname{sen} t)\,d\cos t + (3\cos t + e^{-\operatorname{sen} t})\,d(-\operatorname{sen} t) - (\operatorname{sen} t)\,d(2+\operatorname{sen} t) \;=\\
&= \big(-\operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t - (\cos t)\,e^{-\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t\cos t\big)\,dt\ ,
\end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]}\alpha_0^*\omega &= 0 + 3\pi + 0 \;=\; 3\pi\ ,\\
\int_{[0,2\pi]}\alpha_1^*\omega &= -\pi - 3\pi + 0 + 0 \;=\; -4\pi\ ,\\
\int_{[0,2\pi]}\alpha_0^*\omega + \int_{[0,2\pi]}\alpha_1^*\omega &= 3\pi - 4\pi \;=\; -\pi\ .
\end{aligned}$$

El teorema de Stokes nos dice que $\displaystyle\int_S d\omega = -\pi$.

Cálculo directo de $\displaystyle\int_S d\omega$ (esto no se pedía en el problema, lo hacemos aquí para comprobar la veracidad del teorema de Stokes).
Si definimos la siguiente región plana

$$R_0 \;=\; \big\{\,(u,v)\,:\,0\le u\le 2\pi\ ,\ 0\le v\le 2-\operatorname{sen} u\,\big\}\ ,$$

entonces la siguiente parametrización barre la superficie S exactamente una vez:

$$\varphi : R_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad,\quad \varphi(u,v) \;=\; \big(\,\cos u\,,\,\operatorname{sen} u\,,\,v\,\big)\ .$$

Además φ es compatible con la orientación que se da a S en el enunciado del problema, porque

$$\varphi(0,1) \;=\; (1,0,1) \quad,\quad (\varphi_u\times\varphi_v)_{(0,1)} \;=\; (0,1,0)\times(0,0,1) \;=\; (1,0,0) \;=\; N\big(\varphi(0,1)\big)\ .$$

Calculamos:

$$d\omega \;=\; dz\wedge dx + 3\,dx\wedge dy + dy\wedge dz \quad,\quad \varphi^*d\omega \;=\; (\operatorname{sen} u + \cos u)\,du\wedge dv\ ,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_S d\omega &= \int_{u=0}^{u=2\pi}\left(\int_{v=0}^{v=2-\operatorname{sen} u}(\cos u + \operatorname{sen} u)\,dv\right)du \;=\\
&= \int_0^{2\pi}(\cos u + \operatorname{sen} u)\,(2-\operatorname{sen} u)\,du \;=\\
&= \int_0^{2\pi}(2\cos u - \cos u\operatorname{sen} u + 2\operatorname{sen} u - \operatorname{sen}^2 u)\,du \;=\\
&= 0+0+0-\pi \;=\; -\pi\ .
\end{aligned}$$

Vemos que se cumple el teorema de Stokes.