7.3 SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

teorema: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

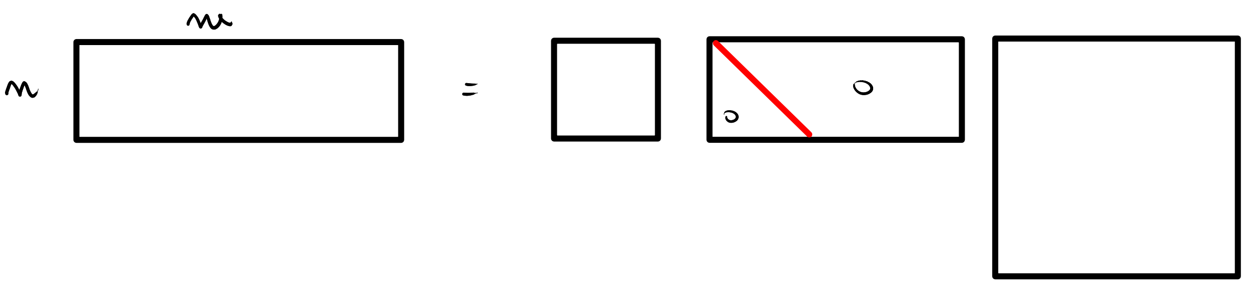
VALORES SINGULARES

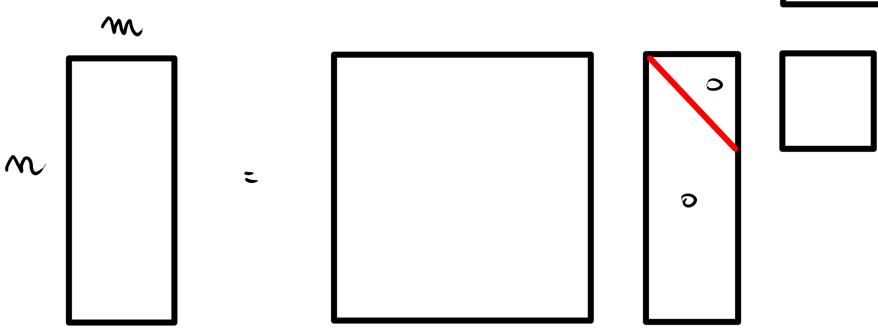
$\Rightarrow \exists \ \Sigma \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ DIAGONAL, $\sigma_k \overset{def}{=} \Sigma_{kk} \geq 0$

elementos diagonales

$\exists \ U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ UNITARIAS

t.q. $A = U \Sigma V^*$, $\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$ $\forall k = 1 \dots$





$$A = U \quad \Sigma \quad V^*$$

observación:

- si A es Hermítica y ≥ 0, esta es su diagonalización: $U = V$ matriz de autovectores normalizados y Σ matriz cuadrada y diagonal de autovalores
- la SVD se puede hacer con cualquier matriz

demostración:

- sea $\sigma_1 = |||A|||_2 = \max\limits_{\|v\|_2=1} \|Av\|_2$,

sea $v_1 \in \mathbb{C}^m$: $\|v_1\|_2 = 1$, $\sigma_1 = \|Av_1\|_2$ vector en el que se tiene el max

y sea $u_1 = \dfrac{Av_1}{\sigma_1}$ $(u_1 \in \mathbb{C}^n,\ \|u_1\|_2 = 1)$

- eligemos $V_1 = \left(v_1 \,\vdots\, \tilde{V}_1 \right) \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$U_1 = \left(u_1 \,\vdots\, \tilde{U}_1 \right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$

donde $\tilde{V}_1$, $\tilde{U}_1$ son obtenidas por compleción de base ortonormal

$\Rightarrow A V_1 = \left(\sigma_1 u_1 \,\vdots\, \cdots \right)$, $U_1^* A V_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -w- \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

decimos w, A_2 los términos que queden allí

- demostramos que $w = 0$: eligemos $B = U_1^* A V_1$

$$\left\| B \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \|w\|^2 \\ A_2 w \end{pmatrix} \right\|_2$$

esta norma es seguramente más grande del valor (absoluto) de la primera componente

$$\geq \sigma_1^2 + \|w\|^2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|^2}\ \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2$$

$\Rightarrow |||B|||_2 \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|^2}$.

por otro lado $|||B|||_2 = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|U_1^* A V_1 x\|_2}{\|x\|_2}$

donde $\|U_1^* A V_1 x\|_2 = \|A V_1 x\|_2$, y $\|x\|_2 = \|V_1 x\|_2$: unitarias

$\Rightarrow |||B|||_2 = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|A V_1 x\|_2}{\|V_1 x\|_2} = \max\limits_{y\neq 0} \dfrac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = |||A|||_2 = \sigma_1$

• $\Rightarrow$ tenemos $U_1^* A V_1 = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 & -0- \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$

sobre A_2 podemos hacer lo mismo:
construir $V_2 \in \mathbb{C}^{m-1 \times m-1}$, $U_2 \in \mathbb{C}^{m-1 \times m-1}$ tales que

$U_2^* A_2 V_2 = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_2 & -0- \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$, donde $\sigma_2 = |||A_2|||_2$

$$\hookrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) U_1^*}_{\text{matriz unitaria: producto de unitarias}} A \underbrace{V_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right)}_{\text{matriz unitaria: producto de unitarias}} = \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ \hline & 0 & A_3 \end{array}\right)$$

• de esta manera podemos seguir hasta obtener $U^* A V$ = matriz diagonal con elementos diagonales ≥ 0

• ¿son decrecientes los elementos diagonales obtenidos (como dice el enunciado)?
Veamos que $\sigma_2 = |||A_2|||_2 \leq \sigma_1$:

- por el mismo argumento usado para la matriz B, basado en el comportamiento de $|||\cdot|||_2$ con matrices unitarias, tenemos

$$\left|\left|\left| \left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) U_1^* A V_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right) \right|\right|\right|_2 = |||A|||_2 = \sigma_1$$

- por otro lado, con el vector $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ tenemos

$$\left\| \left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) U_1^* A V_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & -0- \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right) x \right\|_2 = \sigma_2$$

: si $\sigma_2 > \sigma_1$, esta sería $|||A|||_2$ #

observación:

- $AA^* = U\Sigma V^* V \Sigma^* U^* = U\Sigma\Sigma^* U^*$

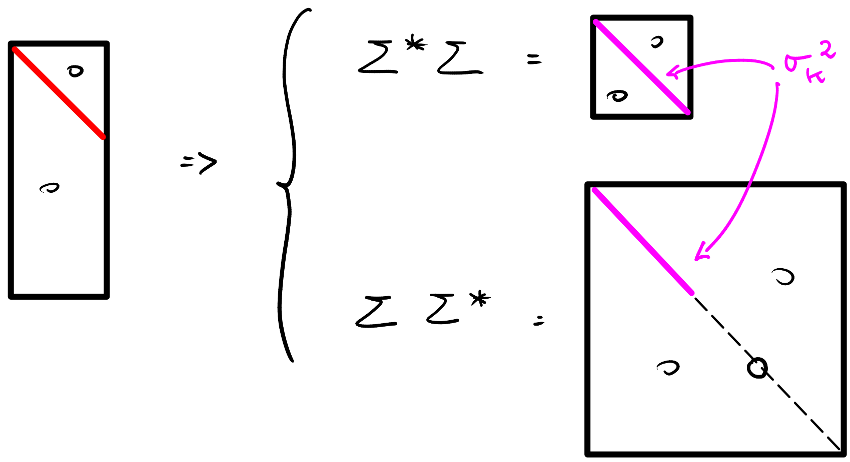
  $\Rightarrow$ U es una matriz unitaria que diagonaliza AA^*,

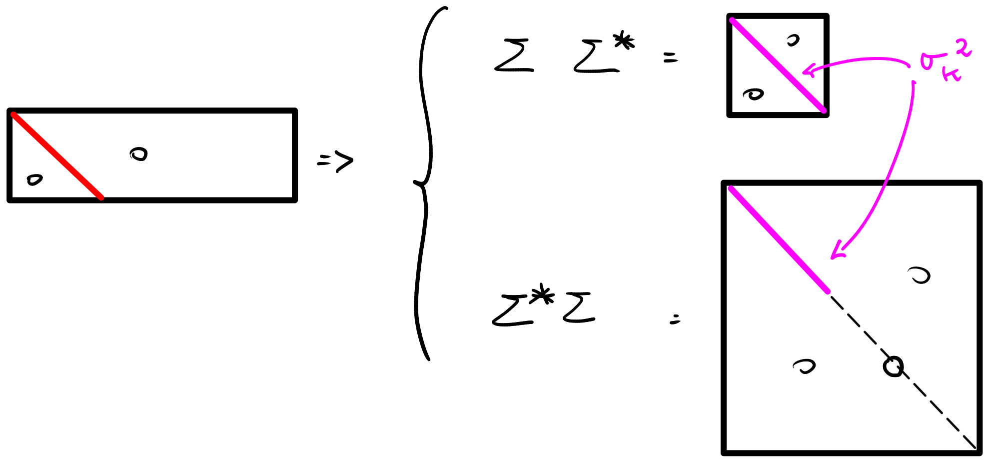
  $\{U^{(i)}\}$ BON de autovectores de AA^*

- $A^*A = V\Sigma^* U^* U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^*$

  $\Rightarrow$ V es una matriz unitaria que diagonaliza A^*A,

  $\{V^{(i)}\}$ BON de autovectores de A^*A

- si $\Sigma =$ 

- si $\Sigma =$ 

↳ podemos usar estas observaciones para calcular la SVD

¿ cómo calcular (a mano) la SVD?

1) diagonalizar $A^*A = V \Lambda V^*$
y obtener V unitaria,
Λ diagonal $\Lambda = \Sigma^t \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

2) construir Σ
. del mismo tamaño de A
. diagonal, con $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$

3) encontrar U, del tamaño apropiado, t.q:
. unitaria
. t.q. $AV = U\Sigma$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

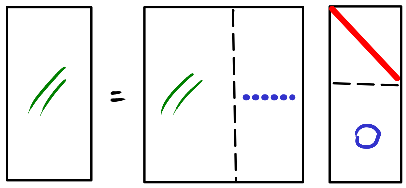
1) $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) para U : $AV = A = U\ \Sigma$

esta condición NO DETERMINA la tercera columna de U



$\Rightarrow U^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$U^{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$

↳ pero U tiene que ser UNITARIA → COMPLECIÓN DE BASE ORTONORMAL: $U^{(3)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^*}$$

---

observación: ¿qué pasa si diagonalizamos AA^*?

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} AA^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ AA^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ AA^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{esta no es la } U \text{ de antes!}}$ esta es $\Sigma\Sigma^t$

¿porqué? a la hora de diagonalizar AA^*, hemos hecho una elección de base ortonormal para el autoespacio con autovalor 4, pero si hay multiplicidad esta elección no es única y la buena depende de V