9.4 POLINOMIO INTERPOLADOR EN LA FORMA DE NEWTON

<u>Ejemplo</u>: polinomio interpolador por los puntos

$$(0,-5),\quad (1,-3),\quad (-1,-15)$$
$$(x_0, y_0)\quad (x_1, y_1)\quad (x_2, y_2)$$

- busquemos $p_0 \in \mathcal{P}_0$ que pase por $(0,-5)$: $p_0(x) = -5$
- busquemos $p_1 \in \mathcal{P}_1$ que pase por $(0,-5)$, $(1,-3)$

  en la forma $p_1(x) = p_0(x) + R_1(x)$

  ↳ • $R_1 \in \mathcal{P}_1$

  • $p_1(0) = \underbrace{p_0(0)}_{-5} + R_1(0) = -5 \Rightarrow R_1(0) = 0$ $\Rightarrow R_1 = c\,x$

  $R_1 = a_1(x-x_0)$

  ?

  • $p_1(1) = -3 \Rightarrow p_0(1) + R_1(1) = -3$

  $-5 + c = -3 \Rightarrow c = 2$ $\qquad p_1 = -5 + 2x$

- busquemos $p_2 \in \mathcal{P}_2$ que pase por $(0,-5)$, $(1,-3)$, $(-1,-15)$

  en la forma $p_2(x) = p_1(x) + R_2(x)$

  ↳ • $R_2 \in \mathcal{P}_2$

  • $\begin{cases} -5 = p_2(0) = \overset{=-5}{p_1(0)} + R_2(0) \\ -3 = p_2(1) = \overset{=-3}{p_1(1)} + R_2(1) \end{cases} \Rightarrow R_2(x) = c\,x\,(x-1)$

  $R_2(x) = a_2(x-x_0)(x-x_1)$

  ?

  • $-15 = p_2(-1) = p_1(-1) + R_2(-1)$

  $= -5 - 2 + 2c \Rightarrow c = -4$ $\qquad p_2 = -5 + 2x - 4x^2$

$$a_2 = \frac{y_2 - p_1(-1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = y_0 \cdot 1 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

definición (PEN): decimos polinomios elementales de Newton por los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{m-1}$

$$\begin{cases} N_0(x) = 1 \\ N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j) , \quad k \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

observaciones:

- $\{N_k\}_{k=0}^{m}$ son una base de P_m

  porque N_k es de grado k $\Rightarrow$ son l.i.
  (por la independencia lineal de los monomios)

- $N_k(x) = N_{k-1}(x) \cdot (x - x_{k-1})$

  $\Rightarrow$ para calcular en un punto $\bar{x}$ los valores $\{N_0(\bar{x}), N_1(\bar{x}), \dots, N_m(\bar{x})\}$ es suficiente calcular $N_m(\bar{x})$ recordando los productos parciales: $2m$ flop

teorema: sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$
y sean $\{N_k\}_{k=0}^{m}$ los PEN por $\{x_i\}_{i=0}^{m-1}$

digamos $p_k(x) = p_k(x; \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{k})$ el polinomio interpolador de P_k por $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{k}$

$\Rightarrow$ el polinomio interpolador de P_m por $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$ se escribe $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k N_k(x)$, donde

$$\begin{cases} a_0 = y_0 \\ a_k = \dfrac{y_k - p_{k-1}(x_k; \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{k-1})}{N_k(x_k)} , \quad k \in \{1, \dots, m\} . \end{cases}$$

demostración:

- $P_0(x;\{(x_0,y_0)\}) = y_0$

- $P_1(x;\{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}) = P_0(x;\{(x_0,y_0)\}) + R_1(x)$

lo buscamos
en esta forma

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 \in \mathcal{P}_1 \\ R_1(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow R_1(x) = c(x-x_0) = a_1 N_1(x)$$

determinado por
$P_1(x_1) = y_1$

$$P_0(x_1) + a_1 N_1(x_1) = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{N_1(x_1)}$$

- por inducción: supongamos que conocemos $P_{k-1}(x;\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{k-1})$, y busquemos P_k en la forma

$$P_k(x;\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{k}) = P_{k-1}(x;\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{k-1}) + R_k(x)$$

- $R_k \in \mathcal{P}_k$
- $i \in \{0,\dots,k-1\}$: $P_k(x_i) = y_i$

$\Leftrightarrow R_k(x_i) = 0$

$$\Leftrightarrow R_k(x) = c\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

$$= a_k N_k(x)$$

polinomio de grado $\leq k$ del que se conocen k ceros distintos

- $i = k$: $P_k(x_k) = y_k \Leftrightarrow P_{k-1}(x_k) + a_k N_k(x_k) = y_k$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{P_{k-1}(x_k) - y_k}{N_k(x_k)}$$

#

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

↳ . nos permiten obtener una reordenación de los cálculos que aprovecha de la forma iterativa de esta construcción para usar el menor número de operaciones

. las vamos a introducir para el problema de interpolar $\{(x_i, \underbrace{f(x_i)}_{y_i})\}_{i=0}^{n}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>teorema</u> : sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sean $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

y sean $\{N_k\}_{k=0}^{n}$ los PEN por $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$

$\Rightarrow$ el polinomio interpolador de P_n por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

se escribe $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f[x_0, \dots, x_k]}_{\text{son los } a_k \text{ del teorema anterior}} N_k(x)$

: · P_n es único
· $\{N_k\}_{k=0}^{n}$ es base

donde $f[x_0, \dots, x_n]$ se llaman diferencias divididas de f, y son dadas por

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) = y_0 \\ f[x_0, \dots, x_k] = \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & k \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

esta construcción recursiva, para 2 y 3 puntos, es

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_1}}{x_2 - x_0}$$