4.10. DETERMINANTE DE UN ENDOMORFISMO

Sea $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo y $F \in \mathcal{A}_n(V; \mathbb{K})$ una forma n-lineal alternada. Definimos

$$\tilde{f}(F): V \times \overset{n}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

dada por

$$\tilde{f}(F)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = F(f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)) \qquad (10.1)$$

cuando $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$.

Ej 4.10.1. Comprueba que $\tilde{f}(F)$ definida por (10.1) es también una forma n-lineal alternada

Considera ahora la aplicación $\tilde{f}: \mathcal{A}_n(V, \mathbb{K}) \to \mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ dada por $F \longmapsto \tilde{f}(F)$ dada en (10.1). Esta aplicación es lineal. Como $\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ tiene dimensión 1 (Teorema 4.9.6), $\tilde{f} = \lambda I$. ¿Cuál es este valor de λ?

Sea $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V y $F \in \mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ una forma n-lineal alternada no nula. Como $\tilde{f}(F) = \lambda F$ se tiene

$$\tilde{f}(F)(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \lambda F(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

Usando ahora (10.1)

$$\tilde{f}(F)(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = F(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) \overset{(9.4)}{=}$$

$$= F(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \cdot D_\beta(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$$

Por tanto $\lambda = D_\beta(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ que coincide con el determinante de la matriz de f en la base β y que llamamos $\det(f)$.

Proposición 4.10.1

Sean $f, g : V \longrightarrow V$ endomorfismos de V. Se tiene
$$\widetilde{g \circ f} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$$

D/ Para toda $F \in \mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ y $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{g \circ f}(F)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) &\overset{(10.1)}{=} F(g \circ f(\vec{v}_1), \ldots, g \circ f(\vec{v}_n)) \\
&\overset{(10.1)}{=} \tilde{g}(F)(f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)) \\
&\overset{(10.1)}{=} \tilde{f}(\tilde{g}(F))(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \\
&= (\tilde{f} \circ \tilde{g}(F))(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)
\end{aligned}$$

De aquí se deduce el resultado.

Corolario 4.10.2.

(a) Si $f, g : V \to V$ son dos endomorfismos, de V
$$\det(g \circ f) = \det(f) \cdot \det(g)$$

(b) Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ son dos matrices cuadradas
$$|A \circ B| = |A| \cdot |B|$$

D/(a) Sabemos que $\tilde{f} = (\det f) I$, $\tilde{g} = (\det g) I$ y $\widetilde{g \circ f} = \det(f \circ g) I$. Por la proposición 4.10.1,
$$\det(f \circ g) I = (\det f) I (\det g) I \Rightarrow$$
$$\det(f \circ g) = (\det f) \cdot \det(g).$$

(b). Se deduce de (a) porque la matriz de $g \circ f$ es el producto de la matriz de g y la matriz de f.