

**Hoja 2: Sucesiones**

---

**1.-** Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (a) $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$               | (b) $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$          | (c) $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$                                     |
| (d) $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$     | (e) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$ | (f) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}} \right\}$                     |
| (g) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$      | (h) $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$            | (i) $\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$                            |
| (j) $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\}$    | (k) $\left\{ \frac{2^n}{4^n+1} \right\}$             | (l) $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$                 |
| (m) $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$ | (n) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$         | (ñ) $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right\}$ |

**2.-**

(a) Utilizar la igualdad  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  para simplificar la expresión  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

**3.-** (\*) Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

**4.-** Sea  $a > 1$ . Se define por recurrencia la sucesión  $\{a_n\}$  por la relación  $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$ ,  $a_1 = \sqrt{a}$ . Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

**5.-** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales definida por  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$ , sabiendo que  $a_1$  es un número mayor que  $-\frac{3}{2}$ . Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso  $a_1 \geq 3$  y  $a_1 < 3$ .

**6.-** Sea  $a_1 = 1$ . Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$(a) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \quad (b) \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n, \quad (c) \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, \quad (d) \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

**7.-** Se define recurrentemente la sucesión  $a_1 = a > 0$  y  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ . ¿Es convergente la sucesión?

**8.-** Demostrar que si  $A \subset \mathbb{R}$  está acotado superiormente, existe una sucesión  $\{a_n\}$  con  $a_n \in A$  y tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$ .

**9.-**

a) (\*) Demostrar que la sucesión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por  $e$ . *Indicación: Puede ser útil tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton,  $(n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k$ , donde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , y  $0! = 1$ .*

b) (\*\*) Demostrar que si  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

**10.-** Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

**11.-** (\*)

(a) Probar por inducción que para  $n = 1, 2, \dots$  se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

*Indicación: Tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton.*

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

**12.-** Hallar los siguientes límites

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right).$

c) (\*)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \right).$

d) (\*\*)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right).$

**13.-** Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

(a)  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$

(b) (\*)  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ ,

(c) (\*)  $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ .

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

**14.-** La sucesión de término general  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  cumple que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$  para  $n > n_0$ . Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.