4.2 NORMAS DE MATRICES

<u>def</u>: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $\|\cdot\|$ norma en $\mathbb{K}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ es una norma de matrices si

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

<u>ejemplo</u>: (norma de Frobenius)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2} \rightsquigarrow$$

es la norma Euclidea de A considerada como un vector => es una norma

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\Big|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\Big|^2}_{\substack{\text{Cauchy-Schwarz} \\ \leq \\ \left(\sum_{k=1}^{n}|A_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k'=1}^{n}|B_{k'j}|^2\right)}} \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|A_{ik}|^2\right)}_{\|A\|_F^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n}|B_{k'j}|^2\right)}_{\|B\|_F^2}$$

<u>no ejemplo</u>: (norma ∞)

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j\in\{1..n\}} |A_{ij}| \rightsquigarrow$$

es la norma $p=\infty$ de A considerada como vector => es una norma

sean $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = \|B\|_\infty = 1 \qquad \|AB\|_\infty = 2 > 1 \cdot 1$ ∴ NO ES UNA NORMA DE MATRICES

<u>def</u>: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{K}^n$

la norma inducida por $\|\cdot\|$ es

$$|||A||| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

<u>preguntas</u>: $|||\cdot|||$ es una norma?

es una norma de matrices?

proposición: toda norma inducida es una norma de matrices

demostración: sea $\|\cdot\|$ una norma $\mathbb{K}^n$

- $|||\cdot|||$ es una norma en $\mathbb{K}^{n\times n}$ ← Ejercicio

- para ver que es una norma de matrices observemos que $\boxed{\|Ay\| \leq |||A||| \, \|y\|}$ $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\forall y \in \mathbb{K}^n$

$$|||A||| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$

$$\Rightarrow \quad \|ABx\| \leq |||A||| \, \|Bx\| \leq |||A||| \, |||B||| \, \|x\|$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq |||A||| \, |||B||| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}, \ \forall x \in \mathbb{K}^n$$ ← hasta el sup

#

como calcular explícitamente normas inducidas por $\|\cdot\|_p$, cuando $p = 1, 2, \infty$

proposición: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A^{(1)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(m)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — & A_{(1)} & — \\ — & A_{(2)} & — \\ & \vdots & \\ — & A_{(m)} & — \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{l} A^{(j)}{}_i = A_{ij} \\ A_{(i)\,j} = A_{ij} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \bullet \ |||A|||_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j\in\{1..m\}} \|A^{(j)}\|_1 = \max_{j\in\{1..m\}} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|$$

$$\bullet \ |||A|||_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i\in\{1..m\}} \|A_{(i)}\|_1 = \max_{i\in\{1..m\}} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}| .$$

ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|A^{(1)}\|_1 = 5$, $\|A^{(2)}\|_1 = 8$, $\|A^{(3)}\|_1 = 4$

$\|A_{(1)}\|_1 = 13$, $\|A_{(2)}\|_1 = 4$

$$\Rightarrow \quad |||A|||_1 = 8, \quad |||A|||_\infty = 13.$$

demostración:

- $$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{m} |x_j| \cdot \underbrace{\|A^{(j)}\|_1}_{\leq \max_{j\in\{1..m\}} \|A^{(j)}\|_1}$$

$$\leq \max_{j\in\{1..m\}} \|A^{(j)}\|_1 \cdot \|x\|_1$$

para terminar la prueba tenemos que asegurarnos que no es siempre <

$\hookrightarrow$ si $k = \arg\max_{j\in\{1...m\}} \|A^{(j)}\|_1$, sea $x = e_k$ $\quad (x_j = \delta_{jk})$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_{ik}| = \|A^{(k)}\|_1 = \max_{j\in\{1..m\}} \|A^{(j)}\|_1$$

- $$\|Ax\|_\infty = \max_{i\in\{1..m\}} \left|\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j\right| \leq \max_{i\in\{1..m\}} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|\,|x_j|$$

$$|x_j| \leq \max_{j\in\{1..m\}} |x_j| = \|x\|_\infty$$

$$\leq \|x\|_\infty \max_{i\in\{1..m\}} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|}_{\|A_{(i)}\|_1}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{i\in\{1..m\}} \|A_{(i)}\|_1$$

para asegurarnos de que $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ no es <

sea $k = \arg\max_{i\in\{1..m\}} \|A_{(i)}\|_1$, $\quad x_j = \begin{cases} \frac{\overline{A_{kj}}}{|A_{kj}|} & \text{si } A_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{si } A_{kj} = 0 \end{cases}$

para este x tenemos

$$\left|\sum_{j=1}^{m} A_{kj} x_j\right| = \sum_{j=1}^{m} |A_{kj}| = \|A_{(k)}\|_1, \quad \|x\|_\infty = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|A_{(k)}\|_1 = \max_{i\in\{1..m\}} \|A_{(i)}\|_1 .$$

#

observación sobre la prueba: en ambos casos se demuestra primero que $\exists\ N = N(A)$ tal que $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $\forall x \in \mathbb{K}^m$ se cumple $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$. Luego se encuentra un $x^* \in \mathbb{K}^m$ concreto para el que se tiene $\frac{\|Ax^*\|}{\|x^*\|} = N(A)$. Esto quiere decir que $N(A) = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.