f nilpotente $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, $f^k = 0$

$f: V \to V$

Si $f^{k-1} \neq 0$ y $f^k = 0 \Rightarrow k$ es orden de nilpotencia de f.

(a) f nilcíclico con orden k y $\vec{u}$ vector cíclico para f de orden k

$\Rightarrow V = \langle \vec{u}, f(\vec{u}), f^2(\vec{u}) \dots, f^{k-1}(\vec{u}) \rangle$.

Tenemos que ver que $\beta = \{ \vec{u}, \dots, f^{k-1}(\vec{u}) \}$ es base,

(a) Sea $\vec{u} \in V$ vector cíclico de f, k orden de nilpot.

$\Rightarrow f(\vec{u}) \neq \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

[Ya que, de lo contrario, $f^n(\vec{u}) = \lambda^n \vec{u} \neq 0$ para $n > k$, $\Rightarrow f$ no nilpotente]

$\Rightarrow \{ \vec{u}, f(\vec{u}) \}$ l.i. (Caso base)

Supongamos que para $i < k$,

$\beta_i = \{ \vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^i(\vec{u}) \}$ son l.i.

$\Rightarrow \beta_i \cup \{ f^{i+1}(\vec{u}) \} = \beta_{i+1}$ ¿l.i?

~~...~~ La única forma de que esto sea falso, es que $f^{i+1}(\vec{u}) = \sum_{j=0}^{i} a_j f^j(\vec{u})$

Aplicamos f: $f^{i+2}(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{i+1} b_j f^j(\vec{u})$ ...

Tenemos que $f^{i+2}(\vec{u})$ es c.l. de β_i, de nuevo

y $\forall m > i$ $f^m(\vec{u})$ es c.l. de β_i también

(no me ha dado tiempo)

(b) $\beta' = \{ f^{k-1}(\vec{u}), f^{k-2}(\vec{u}), \dots, f(\vec{u}), \vec{u} \}$

$$f(f^{k-1}(\vec{u})) = f^{k}(\vec{u}) = \vec{0}$$
$$\vdots$$
$$f(f^{i}(\vec{u})) = f^{i+1}(\vec{u})$$
$$\vdots$$
$$f(f(\vec{u})) = f^{2}(\vec{u})$$
$$f(\vec{u}) = f(\vec{u})$$

$$M(f; \beta', \beta') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} & I_{k-1} \\ 0 & \cdots \; 0 \end{bmatrix}$$

(c) Sea λ autovalor de f, endomorfismo nilpotente,

entonces $\exists \vec{v} \in V$ tq. $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

$\Rightarrow$ Sea k el orden de nilpotencia de f,

$$f^k(\vec{v}) = \vec{0}, \quad f^k(\vec{v}) = \lambda^k \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \lambda^k \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$$

(d) $$J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & O \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ O & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$ matriz de $f : V \longrightarrow V$,

dim $V = n$.

$\mathcal{B} = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ base de V con la matriz $J_n(0)$.

El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u_n}$ es tal que

$$f(\vec{u_n}) = \vec{u_{n-1}}, \; f(\vec{u_{n-1}}) = \vec{u_{n-2}} \ldots \quad f(\vec{u_i}) = \vec{u_{i-1}}$$

$$\ldots f(\vec{u_2}) = \vec{u_1}, \; f(\vec{u_1}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f^n(\vec{u_n}) = \vec{0} \quad y \quad f^{n-1}(\vec{u_n}) = \vec{u_1} \neq \vec{0}$$

f es nilpotente, con orden de nilpotencia $n = \dim V$, con el ~~en~~ n-ésimo vector de la base de V con la que tiene la matriz $J_n(0)$ como vector cíclico $(\vec{u_n})$.