7 Cálculo de variaciones para integrales simples

Este capítulo tiene dos propósitos. Uno es describir el cálculo de la primera variación de funcionales integrales. El segundo es calcular la curvatura geodésica en coordenadas cualesquiera, que obtendremos como un caso particular de cálculo de la primera variación.
Empecemos aclarando lo que significa la palabra *funcional.*

Definición 94. *Un **funcional** es una transformación que va de funciones a números. Dicho con más detalle, es una aplicación $X \to \mathbb{R}$ donde X es un espacio de funciones.*
*Un **operador** es una transformación que va de funciones a funciones. Más en detalle, es una aplicación $X \to Y$ donde X, Y son ambos espacios de funciones.*

Si $\mathscr{F}$ denota un funcional, escribiremos $\mathscr{F}[\eta]$ para indicar el número producido al actuar $\mathscr{F}$ sobre un objeto η perteneciente al espacio de funciones en el que $\mathscr{F}$ está definido.

7.1 Lagrangianos y funcionales integrales

Definición 95. *Dada una superficie S, un **Lagrangiano en** S es un "campo de funciones en los planos tangentes". Más concretamente, es un objeto L que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in S$ una función escalar $L(\mathbf{p}, \cdot) : T_{\mathbf{p}}S \longrightarrow \mathbb{R}$ que lleva cada vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ a un número $L(\mathbf{p}, \mathbf{v})$.*

Si nos dan una parametrización regular $\Phi(u, v)$ de S, entonces podemos dar L como una expresión en las cuatro cantidades u, v, du, dv. Por ejemplo, el Lagrangiano

$$L \equiv (u+v)\,(du)^2 + uv^3\,e^{dv}, \tag{23}$$

es la función cuyo efecto sobre el par general (punto, vector tangente en ese punto) en S es el siguiente:

$$L\big(\ \Phi(u,v)\ \ ,\ \ a_1\,\Phi_u(u,v) + a_2\,\Phi_v(u,v)\ \big) \equiv (u+v)\,a_1^2 + uv^3\,e^{a_2}\,.$$

Un Lagrangiano actúa sobre las parejas punto-velocidad de cualquier camino $\alpha(t)$ en S, produciendo la función $t \mapsto L\big(\alpha(t), \alpha'(t)\big)$.

Definición 96. *Sean L un Lagrangiano en S y $[a,b]$ un intervalo. El **funcional integral** correspondiente es el funcional*

$$\mathscr{L} : \{\text{caminos suaves } \ \alpha(t) : [a,b] \to S\} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

dado por la fórmula:

$$\mathscr{L}[\alpha] = \int_{t=a}^{t=b} L\big(\,\alpha(t)\,,\,\alpha'(t)\,\big)\,dt\,.$$

Si por ejemplo L es el Lagrangiano dado por (23) y $\mathscr{L}$ es el correspondiente funcional integral, entonces para cada camino $\alpha(t) \equiv \Phi\big(u(t), v(t)\big)$ se tiene:

$$\mathscr{L}[\alpha] = \int_a^b \Big(\big(u(t)+v(t)\big)\,u'(t)^2 + u(t)\,v(t)^3\,e^{v'(t)} \Big)\,dt\,.$$

La frase "integrales simples" en el título del presente apartado se refiere a integrales respecto de una sola variable.

7.2 Deformaciones

Fijado un camino $\alpha_0(t) : [a,b] \to S$, en este apartado vamos a ver cómo "deformarlo suavemente" sin sacarlo de la superficie S.

Definición 97. *Una **deformación del camino** $\alpha_0(t)$ **en la superficie** S es una aplicación de dos variables independientes:*

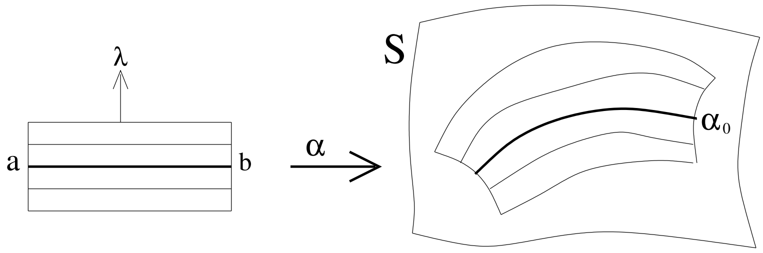
$$\alpha(t,\lambda) : [a,b] \times J' \longrightarrow S \qquad , \qquad [a,b] \times J' \ni (t,\lambda) \longmapsto \alpha(t,\lambda)\,,$$

cumpliendo los requisitos siguientes:

$$0 \in J' \quad , \quad \alpha(t,0) \equiv \alpha_0(t) \quad , \quad \alpha \text{ es función suave de } (t,\lambda).$$

*Llamamos a λ el **parámetro de deformación.***

A medida que cambiamos el valor del parámetro λ, el camino $t \mapsto \alpha(t,\lambda)$ va cambiando. Para $\lambda = 0$ este camino coincide con $\alpha_0(t)$.



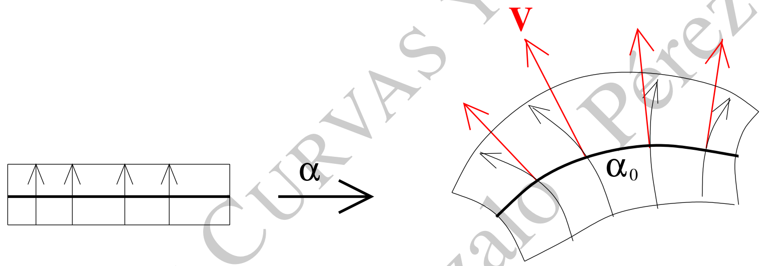
Definición 98. *La **velocidad inicial de deformación,** para la deformación $\alpha(t,\lambda)$, es el campo de velocidades $\mathbf{V}(t)$ a lo largo de $\alpha_0(t)$ definido de la siguiente manera:*

$$\mathbf{V}(t) \;\equiv\; \left.\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \;\equiv\; \alpha_\lambda(t,0)\,.$$

Para cada $t_0 \in [a,b]$ el objeto $\mathbf{V}(t_0)$ es la velocidad en $\lambda = 0$ del camino $\lambda \mapsto \alpha(t_0,\lambda)$, que es un camino en S pasando por $\alpha_0(t_0)$ en $\lambda = 0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{V}(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}S \quad \text{para todo } \; t_0 \in [a,b]\,,$$

es decir que $\mathbf{V}(t)$ es un **campo de vectores tangente a S a lo largo de α_0**.



El campo $\mathbf{V}(t)$ codifica la velocidad a la que la deformación desplaza cada punto de α_0 al mover el parámetro λ desde el valor inicial $\lambda = 0$.

7.3 Primera variación

Dado un funcional integral $\mathscr{L}$ y fijado un camino $\alpha_0(t) : [a,b] \to S$, en este apartado vamos a definir un objeto que bien puede considerarse como "la diferencial de $\mathscr{L}$ en α_0". Para ello vamos a mover (deformar) α_0 y a estudiar cómo varía (en primera derivada) el valor de $\mathscr{L}$.

Definición 99. *Cada deformación $\alpha(t,\lambda)$ da lugar a una función escalar $J' \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$J' \ni \lambda \;\longmapsto\; \mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big] \;=\; \int_{t=a}^{t=b} L\big(\alpha(t,\lambda)\,,\,\alpha_t(t,\lambda)\big)\,dt\,,$$

*y entonces la **primera variación del funcional** es el número* $\left.\dfrac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big]$.

Al calcular la primera variación vamos a ver que los datos L, $[a,b]$, α_0 determinan un funcional:

$$\mathscr{A} : \{\,\text{campos de vectores tangentes a } S \text{ a lo largo de } \alpha_0\,\} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}\,,$$

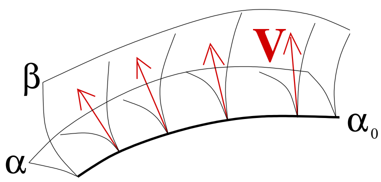
tal que para cada deformación $\alpha(t,\lambda)$ de $\alpha_0(t)$ con velocidad inicial de deformación $\mathbf{V}(t)$ se tiene:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big] = \mathscr{A}[\mathbf{V}]\,,$$

y además el funcional $\mathscr{A}$ es *lineal,* es decir $\mathscr{A}[\mathbf{V}+\mathbf{W}] = \mathscr{A}[\mathbf{V}] + \mathscr{A}[\mathbf{W}]$ y $\mathscr{A}[c\,\mathbf{V}] = c\,\mathscr{A}[\mathbf{V}]$ para toda constante c. Este funcional lineal sería la *diferencial de $\mathscr{L}$ en α_0*.

En particular, dos deformaciones α,β de α_0 que tengan la misma velocidad inicial de deformación producen *la misma primera variación* aunque sean deformaciones muy distintas:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha(t,0)\equiv\beta(t,0)\equiv\alpha_0(t)\\ \alpha_\lambda(t,0)\equiv\beta_\lambda(t,0)\equiv\mathbf{V}(t)\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big]\;=\;\mathscr{A}[\mathbf{V}]\;=\;\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\mathscr{L}\big[\,\beta(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big]\,.$$



El cálculo de la primera variación en la forma $\mathscr{A}[\mathbf{V}]$ se hace en los tres pasos siguientes:

- Pasar dentro de la integral la derivada respecto del parámetro de deformación y derivar el integrando por la regla de la cadena.
- Dar el valor particular (normalmente, 0) al parámetro de deformación y hacer aparecer los coeficientes de $\mathbf{V}(t)$ y/o sus derivadas (esto último requiere que la deformación sea al menos de clase $\mathscr{C}^2$).
- Dejar los coeficientes de $\mathbf{V}(t)$ sin derivada, integrando por partes.

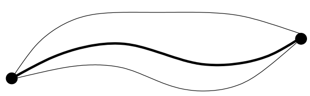
Vamos a explicar estos pasos con varios ejemplos en el apartado 7.4. Si tenemos una métrica de Riemann Q en S, siempre se puede dar el resultado final así:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big]\;=\;\Big[\;\mathrm{lineal}_1\big(\mathbf{V}(a)\big)+\mathrm{lineal}_2\big(\mathbf{V}(b)\big)\Big]+\int_{t=a}^{t=b}Q_{\alpha_0(t)}\big(\mathbf{a}(t)\,,\,\mathbf{V}(t)\big)\,dt\;. \tag{24}$$

El primer sumando, llamado **término de evaluación,** es suma de una función lineal de $\mathbf{V}(a)$ más una función lineal de $\mathbf{V}(b)$. El otro sumando se llama **término integral;** en él $\mathbf{a}(t)$ es un campo de vectores, tangente a S a lo largo de α_0, que sólo depende de L,α_0,Q y que vale para *todas* las deformaciones $\alpha(t,\lambda)$ en S con $\alpha(t,0)\equiv\alpha_0(t)$. La suma de esos dos términos produce el funcional lineal $\mathscr{A}[\mathbf{V}]$.

Lema 100. *Para todo campo de vectores $\mathbf{V}(t)$ suave y tangente a S a lo largo de α_0, existen deformaciones $\alpha(t,\lambda)$ de α_0 en S que tienen a $\mathbf{V}(t)$ por velocidad inicial de deformación.*
En el caso de que $\mathbf{V}(a)$ y $\mathbf{V}(b)$ sean nulos se puede conseguir además que $\alpha(t,\lambda)$ sea ***deformación de extremos fijos,*** *es decir que para todo $\lambda\in J'$ cumpla:*

$$\alpha(a,\lambda)=\alpha_0(a)\quad;\quad\alpha(b,\lambda)=\alpha_0(b)$$



Demostración. Hacemos uso de una parametrización regular $\Phi(u,v)$ de S, de modo que sea $\alpha_0(t)\equiv\Phi\big(u(t),v(t)\big)$ para ciertas funciones suaves $u(t),v(t):[a,b]\to\mathbb{R}$. También existen funciones $v_1(t),v_2(t)$, $t\in[a,b]$, suaves y tales que $\mathbf{V}(t)\equiv v_1(t)\,\Phi_u\big(u(t),v(t)\big)+v_2(t)\,\Phi_v\big(u(t),v(t)\big)$.
La deformación dada por $\alpha(t,\lambda)\;\equiv\;\Phi\big(\,u(t)+\lambda\,v_1(t)\,,\,v(t)+\lambda\,v_2(t)\,\big)$ cumple todo lo afirmado. □

El cálculo del campo $\mathbf{a}(t)$ es valioso porque el siguiente lema nos dice que es único. También el término de evaluación es único y valioso.

Lema 101. *Fijemos L,α_0,Q. Si $\mathbf{a}(t),\widetilde{\mathbf{a}}(t)$, $t\in[a,b]$, son dos campos de vectores tangentes a S a lo largo de α_0 que son suaves y satisfacen la igualdad (24) para todas las deformaciones de α_0 en S, entonces $\mathbf{a}(t)\equiv\widetilde{\mathbf{a}}(t)$. De hecho $\mathbf{a}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ ya están obligados a ser idénticos si satisfacen (24) para las deformaciones de extremos fijos de α_0 en S.*

Demostración. Si una deformación es de extremos fijos entonces la velocidad inicial de deformación $\mathbf{V}(t)$ se anula en los extremos y, como el término de evaluación es suma de una función lineal de $\mathbf{V}(a)$ más una función lineal de $\mathbf{V}(b)$, para tales deformaciones la igualdad (24) se reduce a:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathscr{L}\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big] \;=\; \int_{t=a}^{t=b} Q_{\alpha_0(t)}\big(\mathbf{a}(t)\,,\mathbf{V}(t)\big)\,dt \;=\; \int_{t=a}^{t=b} Q_{\alpha_0(t)}\big(\widetilde{\mathbf{a}}(t)\,,\mathbf{V}(t)\big)\,dt\;.$$

Por otra parte acabamos de ver que todo campo suave $\mathbf{V}(t)$, tangente a S a lo largo de α_0 y nulo en los extremos, es igual a $\alpha_\lambda(t,0)$ para alguna deformación $\alpha(t,\lambda)$ de extremos fijos de α_0 en S. Concluimos que todo $\mathbf{V}(t)$ suave, tangente a S a lo largo de α_0 y nulo en los extremos, cumple:

$$\int_a^b Q_{\alpha_0(t)}\big(\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\,,\mathbf{V}(t)\big)\,dt \;=\; 0\,.$$

Esto vale, en particular, para el campo $\mathbf{V}(t)\equiv(t-a)\,(b-t)\,\big(\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\big)$ porque es tangente a S a lo largo de α_0, suave y nulo en los extremos. Por lo tanto:

$$0 \;=\; \int_a^b Q_{\alpha_0(t)}\Big(\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\;,\;(t-a)\,(b-t)\,\big(\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\big)\Big)\,dt \;=\; \int_a^b (t-a)\,(b-t)\,\|\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\|_Q^2\,dt\;.$$

Pero el factor $(t-a)\,(b-t)$ es positivo para $t\in(a,b)$, luego tiene que ser $\mathbf{a}(t)-\widetilde{\mathbf{a}}(t)\equiv\mathbf{0}$. □

Definición 102. *Dado un Lagrangiano L en una superficie S y un camino $\alpha_0(t):[a,b]\to S$, las* ***ecuaciones de Euler-Lagrange*** *son $\mathbf{a}(t)\equiv\mathbf{0}$, siendo $\mathbf{a}(t)$ el único campo de vectores tangente a S a lo largo de α_0 que satisface (24) para todas las deformaciones de α_0 en S.*

> Un camino $\alpha_0(t)$ en S es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si el funcional integral asociado a L tiene primera variación nula para toda deformación de extremos fijos de α_0 en S. En particular, esto lo cumple un camino con extremos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ que realice el mínimo del funcional entre todos los caminos en S que empiezan en $\mathbf{p}$ y terminan en $\mathbf{q}$.

7.4 Ejemplos de cálculo de variaciones

En este apartado cambiamos de la notación habitual (u,v) para las coordenadas curvilíneas a la notación (u_1,u_2). Tenemos, pues, una parametrización regular $\Phi(u_1,u_2)$ para S.
En todos los ejemplos partimos de un camino $\alpha_0(t)\equiv\Phi\big(u_1(t),u_2(t)\big)$ y de una deformación $\alpha(t,\lambda)\equiv\Phi\big(\,u_1(t,\lambda)\,,\,u_2(t,\lambda)\,\big)$ de α_0 en S. Escribimos $\mathbf{V}(t)\equiv v_1(t)\,\Phi_{u_1}+v_2(t)\,\Phi_{u_2}$ para la velocidad inicial de deformación. Se cumplen las identidades:

$$u_1(t,0)\;\equiv\;u_1(t)\quad,\quad u_2(t,0)\;\equiv\;u_2(t)\quad,\quad u_{1\lambda}(t,0)\;\equiv\;v_1(t)\quad,\quad u_{2\lambda}(t,0)\;\equiv\;v_2(t)\,.$$

Escribiremos el término integral con ayuda de la "métrica fácil" $Q_0\equiv(du_1)^2+(du_2)^2$ en S.

Ejemplo 1. Consideramos en S el Lagrangiano $L_1\equiv du_1\,du_2$. El correspondiente funcional integral es $\mathscr{L}_1[\alpha_0]=\displaystyle\int_a^b u_1'(t)\,u_2'(t)\,dt$ para un camino y $\mathscr{L}_1[\alpha(\cdot,\lambda)]=\displaystyle\int_a^b u_{1t}\,u_{2t}\,dt$ para una deformación.
Vamos a calcular despacio la primera variación de $\mathscr{L}_1$; en los demás ejemplos iremos un poco más deprisa. Empezamos metiendo la derivada respecto de λ dentro de la integral:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\mathscr{L}_1\big[\,\alpha(\,\cdot\,,\lambda\,)\,\big] \;=\; \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\int_a^b u_{1t}\,u_{2t}\,dt \;=\; \int_a^b\left[\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}(u_{1t}\,u_{2t})\right]\,dt\;.$$

Fíjate: la derivada ordinaria se ha convertido en una derivada parcial al meterla dentro de la integral. Ahora derivamos el integrando y, suponiendo que la deformación es al menos de clase $\mathscr{C}^2$, intercambiamos el orden de derivación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}(u_{1t}\,u_{2t}) \;&\equiv\; \big(u_{1t\lambda}\,u_{2t}+u_{1t}\,u_{2t\lambda}\,\big)_{\lambda=0} \equiv u_{1\lambda t}(t,0)\,u_{2t}(t,0)+u_{1t}(t,0)\,u_{2\lambda t}(t,0) \;\equiv\\ &\equiv\; \frac{d\,u_{1\lambda}(t,0)}{dt}\,u_2'(t)+u_1'(t)\,\frac{d\,u_{2\lambda}(t,0)}{dt} \;\equiv\; v_1'(t)\,u_2'(t)+u_1'(t)\,v_2'(t)\,,\end{aligned}$$

y así es como se hacen aparecer en el integrando los coeficientes de $\mathbf{V}(t)$ o sus derivadas (en este ejemplo, sólo las derivadas). Hemos llegado a:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\int_a^b u_{1t}\,u_{2t}\,dt \;=\; \int_a^b \big(\,v_1'(t)\,u_2'(t)+u_1'(t)\,v_2'(t)\,\big)\,dt\,.$$

En este momento ya se ve el funcional:

$$\mathscr{A}[\mathbf{V}] \;=\; \mathscr{A}\big[\,v_1(t)\Phi_u+v_2(t)\Phi_v\,\big] \;=\; \int_a^b \big(\,v_1'(t)\,u_2'(t)+u_1'(t)\,v_2'(t)\,\big)\,dt\,,$$

que es claramente lineal en $\big(v_1(t),v_2(t)\big)$ porque $u_1'(t),u_2'(t)$ están fijadas. Pero no hemos terminado porque hay que hacer que v_1,v_2 no estén derivadas en la fórmula definitiva; esto lo conseguimos integrando por partes:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\int_a^b u_{1t}\,u_{2t}\,dt \;=\; \big[\,u_2'(t)\,v_1(t)+u_1'(t)\,v_2(t)\,\big]_a^b+\int_a^b \big(\,-u_2''(t)\,v_1(t)-u_1''(t)\,v_2(t)\,\big)\,dt\,.$$

Tal como hemos anunciado en el apartado 7.3, el término de evaluación es suma de una función lineal de $\mathbf{V}(a)$ más una función lineal de $\mathbf{V}(b)$. Esto va a ser siempre así.

El término integral queda $\displaystyle\int_a^b Q_{0,\alpha_0(t)}\big(\mathbf{a}(t),\mathbf{V}(t)\big)\,dt$ donde:

$$\mathbf{a}(t) \;\equiv\; -u_1''(t)\,\Phi_{u_1}-u_2''(t)\,\Phi_{u_2} \qquad , \qquad \Phi_{u_1}\ \text{y}\ \Phi_{u_2}\ \text{evaluadas en}\ \big(u_1(t),u_2(t)\big)\,,$$

por lo tanto la ecuaciones de Euler-Lagrange para L_1 son:

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1'' &=& 0\\ u_2'' &=& 0 \end{array}\right\}$$

Las soluciones de dichas ecuaciones son los caminos $\alpha_0(t)\equiv\Phi(\,c_1+c_2\,t\,,\,c_3+c_4\,t\,)$, formando una familia a cuatro parámetros.

Ejemplo 2. El Lagrangiano es $L_2\equiv du_1\,e^{du_2}$. El funcional integral es $\mathscr{L}_2[\alpha_0]=\displaystyle\int_a^b u_1'\,e^{u_2'}\,dt$. Para una deformación $\alpha(t,\lambda)$, es $\mathscr{L}_2\big[\alpha(\cdot,\lambda)\big]=\displaystyle\int_a^b u_{1t}\,e^{u_{2t}}\,dt$. Metemos la derivada respecto de λ dentro de la integral y derivamos el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\big(u_{1t}\,e^{u_{2t}}\big) \;\equiv\; \big[\,u_{1\lambda t}\,e^{u_{2t}}+u_{1t}\,u_{2\lambda t}\,e^{u_{2t}}\,\big]_{\lambda=0} \;\equiv\; v_1'(t)\,e^{u_2'(t)}+u_1'(t)\,v_2'(t)\,e^{u_2'(t)}\,,$$

dejamos v_1,v_2 sin derivada integrando por partes:

$$\int_a^b\Big(v_1'\,e^{u_2'}+u_1'\,v_2'\,e^{u_2'}\Big)\,dt \;=\; \big[\,v_1\,e^{u_2'}+u_1'\,v_2\,e^{u_2'}\,\big]_a^b+\int_a^b\bigg[\Big(-\frac{d}{dt}\,e^{u_2'}\Big)\,v_1+\Big(-\frac{d}{dt}\,\big(u_1'\,e^{u_2'}\big)\Big)\,v_2\bigg]\,dt\,.$$

El término integral queda $\displaystyle\int_a^b Q_{0,\alpha_0(t)}\big(\mathbf{a}(t),\mathbf{V}(t)\big)\,dt$ con:

$$\mathbf{a}(t) \;\equiv\; \Big(-\frac{d}{dt}\,e^{u_2'}\Big)\,\Phi_{u_1}+\Big(-\frac{d}{dt}\,\big(u_1'\,e^{u_2'}\big)\Big)\,\Phi_{u_2}\,.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para L_2 son:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\,e^{u_2'} &=& 0\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\,\big(u_1'\,e^{u_2'}\big) &=& 0 \end{array}\right\}$$

y vuelven a dar $u_2'\equiv c_4\,,\,u_1'\equiv c_2$, luego las soluciones $\alpha_0(t)\equiv\Phi\big(\,c_1+c_2\,t\,,\,c_3+c_4\,t\,\big)$ son las mismas que para L_1. Esto prueba que el **problema inverso** (hallar el Lagrangiano a partir de las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange) no tiene solución única.

Ejemplo 3. El Lagrangiano es $L_3 \equiv \dfrac{(du_1)^2}{du_2}$. Tiene una propiedad especial: es homogéneo de grado 1 (aunque no lineal) en las velocidades. Esto hace que el funcional integral

$$\mathscr{L}_3[\alpha_0] \;=\; \int_a^b \frac{u_1'(t)^2}{u_2'(t)}\,dt\;,$$

sea invariante por las reparametrizaciones de α_0 que conservan el sentido de recorrido. No hace ningún daño que $\mathscr{L}_3$ esté definido sólo en caminos con u_2' nunca nula. Calculamos la primera variación:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \frac{u_{1t}^2}{u_{2t}}\,dt \;&=\; \int_a^b \left[\frac{2\,u_1'\,v_1'}{u_2'} - \frac{(u_1')^2\,v_2'}{(u_2')^2}\right] dt \;=\\ =\;& \left[\frac{2\,u_1'}{u_2'}\,v_1 - \frac{(u_1')^2}{(u_2')^2}\,v_2\right]_a^b + \int_a^b \left[\left(-\frac{d}{dt}\,\frac{2u_1'}{u_2'}\right) v_1 + \left(\frac{d}{dt}\,\frac{(u_1')^2}{(u_2')^2}\right) v_2\right] dt\,.\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para L_3 son:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\frac{u_1'}{u_2'} \;&=\; 0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{u_1'}{u_2'}\right)^2 \;&=\; 0\end{aligned}\right\}$$

son las dos equivalentes y se reducen a una sola, pero de segundo orden. Los caminos solución vienen dados por $(u_1,u_2)\equiv(c_1,c_2)+h(t)\cdot(c_3,c_4)$ con la función $h(t)$ bastante arbitraria, luego forman una familia infinito-dimensional. Las líneas trazadas en la superficie por dichos caminos son imágenes por Φ de rectas en el plano de parámetros $\mathbb{R}^2_{u_1u_2}$; forman una familia de sólo dos parámetros.

Lo que está ocurriendo es que si un camino α_0 es solución de estas ecuaciones de Euler-Lagrange entonces todas las reparametrizaciones de α_0 son también soluciones. Es fácil demostrar que esto sucede con todo Lagrangiano que sea homogéneo de grado 1 en las velocidades.

Ejemplo 4. Consideramos $L_4 \equiv u_1\,du_2$ y $\mathscr{L}_4[\alpha_0] = \int_a^b u_1\,u_2'(t)\,dt$. Este Lagrangiano es lineal en las velocidades (de hecho, es una forma de Pfaff). Calculamos:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} (\,u_1\,u_{2t}\,)\,dt \;=\; \int_a^b (\,v_1\,u_2' + u_1\,v_2'\,)\,dt\;.$$

No integramos por partes el término $v_1\,u_2'$ porque no tiene ninguna derivada de (v_1,v_2). Sí integramos por partes el término $u_1\,v_2'$, llegando a:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} (\,u_1\,u_{2t}\,)\,dt \;=\; \big[\,u_1\,v_2\,\big]_a^b + \int_a^b (\,u_2'\,v_1 - u_1'\,v_2\,)\,dt\;.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left.\begin{aligned}u_2' \;&=\; 0\\ u_1' \;&=\; 0\end{aligned}\right\}$$

son de primer orden. Las soluciones están dadas por $(u_1,u_2)\equiv(c_1,c_2)$ y forman una familia a dos parámetros.

7.5 Primera variación de la longitud Riemanniana

Dada una métrica de Riemann Q en una superficie S, podemos tomar $L \equiv \sqrt{Q}$ como Lagrangiano y el funcional integral que resulta es la logitud Riemanniana:

$$\mathrm{longitud}_Q[\alpha_0] \;=\; \int_a^b \sqrt{Q_{\alpha_0(t)}\big(\alpha_0'(t)\big)}\,dt\;.$$

Al calcular la primera variación de este funcional utilizamos, por supuesto, la misma métrica Q para escribir el término integral.

Definición 103. *Dada una curva regular $\alpha_0(t) \subset S$, llamamos* ***curvatura geodésica de α respecto de Q*** *al único campo de vectores $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t)$ tangente a S a lo largo de α_0 y tal que para toda deformación $\alpha(t,\lambda)$ de α_0 en S, con velocidad inicial de deformación $\mathbf{V}(t)$, se tiene (atención al signo):*

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q\big[\,\alpha(\cdot,\lambda)\,\big] \;=\; (\text{eval}) + \int_{\alpha_0} Q\big(\mathbf{V}(t)\,,\, -\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t)\big)\, ds(t)\;, \tag{25}$$

siendo $s(t)$ un parámetro longitud Riemanniana de arco para α_0 respecto de Q. Cuando no haya dudas acerca de la curva y la métrica, denotaremos este campo $\mathbf{k}_g$.

La unicidad del campo $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t)$ está garantizada por el lema 101. Veamos tres propiedades suyas.

Primera propiedad: de la invariancia de la longitud Riemanniana por reparametrizaciones, y de (25), se deduce que si $\beta_0(\tilde{t}) \equiv \alpha_0\big(t(\tilde{t})\big)$ es una reparametrización de α_0 entonces las dos curvas tienen curvaturas geodésicas iguales en puntos iguales, es decir:

$$\beta_0(\tilde{t}) \equiv \alpha_0\big(t(\tilde{t})\big) \implies \mathbf{k}_{g,\beta_0,Q}(\tilde{t}) \;=\; \mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}\big(t(\tilde{t})\big)\;.$$

Definición 104. *Una* ***línea geodésica para Q*** *es una curva regular en S que tiene curvatura geodésica respecto de Q idénticamente nula. Llamamos* ***líneas geodésicas de*** *S a las líneas geodésicas para la primera forma fundamental de S.*

Por la primera propiedad, al reparametrizar una línea geodésica permanece línea geodésica.

La ecuación de las líneas geodésicas $\mathbf{k}_{g,\alpha,Q}(t) = \mathbf{0}$ es la ecuación de Euler-Lagrange para el funcional longitud_Q.

Definición 105. *Sean (S,Q) una superficie con una métrica de Riemann y $\alpha(t) \subset S$ una curva regular. Un campo de vectores $\mathbf{a}(t)$ es* ***conormal a*** *α si para todo valor paramétrico t cumple las dos condiciones siguientes:*

$$\mathbf{a}(t) \in T_{\alpha(t)}S \quad , \quad Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\,,\,\mathbf{a}(t)\big) \;=\; 0\;,$$

es decir, tangente a la superficie y Q-ortogonal a la curva en cada punto de ésta.

Segunda propiedad: el vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ es conormal a la curva α_0.
Para demostrar esto tomamos una reparametrización $\beta_0(s) \equiv \alpha_0(t)|_{t=t(s)}$, $s_0 \leq s \leq s_1$, de α_0 por longitud Riemanniana de arco. Por la primera propiedad y $\beta'(s) = t'(s)\cdot\alpha'\big(t(s)\big)$, es equivalente que $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ sea conormal a α_0 con que $\mathbf{k}_{g,\beta_0,Q}$ sea conormal a β_0. Para probar esto último, definimos la función $a(s) \equiv Q_{\beta_0(s)}\big(\beta_0'(s)\,,\,\mathbf{k}_{g,\beta_0(s),Q}\big)$ y demostramos que $a \equiv 0$. Una adaptación obvia del lema 101 nos dice que $a(s)$ será idénticamente nula si para toda $c(s) : [s_0,s_2] \to \mathbb{R}$, suave y nula en los extremos, se cumple:

$$0 \;=\; \int_{s_0}^{s_1} c(s)\,a(s)\,ds \;=\; \int_{s_0}^{s_1} Q_{\beta_0(s)}\big(c(s)\beta_0'(s)\,,\,\mathbf{k}_{g,\beta_0,Q}(s)\big)\,ds\;. \tag{26}$$

Para cada tal función $c(s)$ vamos a elegir una deformación $\beta(s,\lambda)$ de β_0 en S, que sea de extremos fijos y tenga velocidad inicial de deformación $\mathbf{V}(s) \equiv c(s)\,\beta_0'(s)$. Entonces tendremos:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q[\beta(\cdot,\lambda)] \;=\; \int_{s_0}^{s_1} Q_{\beta_0(s)}\big(c(s)\beta_0'(s)\,,\,-\mathbf{k}_{g,\beta_0,Q}(s)\big)\,ds\;,$$

y la igualdad (26) será equivalente a:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q[\beta(\cdot,\lambda)] = 0\;. \tag{27}$$

Consideramos las siguientes funciones:

$$\sigma^\lambda(s) : [s_0,s_1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \sigma^\lambda(s) \;\equiv\; s + \lambda\, c(s)\;.$$

Para $|\lambda|$ pequeño y $s \in [s_0, s_1]$ tenemos la acotación $|\lambda\, c'(s)| \leq \frac{1}{2}$ y las correspondientes σ^λ son estrictamente crecientes y de hecho difeomorfismos $[s_0, s_1] \to \left[\sigma^\lambda(s_0), \sigma^\lambda(s_1)\right] = [s_0, s_1]$. Esto nos permite definir $\beta(s,\lambda) \equiv (\beta_0 \circ \sigma^\lambda)(s)$, que es una deformación de β_0 hecha de reparametrizaciones, luego $\mathrm{longitud}_Q[\beta(\cdot,\lambda)]$ es constante para $|\lambda|$ pequeño y se cumple (27). Además, su velocidad inicial de deformación es:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \beta_0\big(\sigma^\lambda(s)\big) \;=\; \left(\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \sigma^\lambda(s)\right) \cdot \beta_0'\big(\sigma^0(s)\big) \;\equiv\; c(s)\, \beta_0'(s)\,,$$

y, como $\beta(s,\lambda)$ es claramente de extremos fijos, cumple (26). Esto prueba que $a \equiv 0$ y que $\mathbf{k}_{g,\beta_0,Q}$ es conormal a β_0, luego $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ es conormal a α_0.

Tercera propiedad: Si $Q \equiv I$ es la primera forma fundamental de S, entonces $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,I}(t)$ es igual a $\mathbf{k}^\top_{\alpha_0(t)}$, la proyección ortogonal del vector curvatura espacial $\mathbf{k}_{\alpha_0}(t)$ sobre el plano tangente $T_{\alpha_0(t)}S$.

Por la primera propiedad, basta demostrar esto para una parametrización $\alpha_0(s)$, $s_0 \leq s \leq s_1$, por longitud de arco. Es suficiente ver que, para toda deformación $\alpha(s,\lambda)$ de α en S, que sea de extremos fijos y con velocidad inicial de deformación $\mathbf{V}(s)$ (nula en los extremos), se tiene:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{longitud}[\alpha(\cdot,\lambda)] \;=\; \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{V}(s) \cdot \big(-\mathbf{k}^\top_{\alpha_0}(s)\big)\, ds\,.$$

Como $\mathbf{V}(s) \in T_{\alpha_0(s)}S$ para todo s, tenemos la identidad:

$$\mathbf{V}(s) \cdot \mathbf{k}^\top_{\alpha_0}(s) \;\equiv\; \mathbf{V}(s) \cdot \mathbf{k}_{\alpha_0}(s) \;\equiv\; \mathbf{V}(s) \cdot \alpha_0''(s)\,,$$

y hay que demostrar la siguiente fórmula (ten en cuenta que s es longitud de arco para $\alpha_0 \equiv \alpha(\cdot,0)$, pero no necesariamente para las curvas $\alpha(\cdot,\lambda)$ con $\lambda \neq 0$):

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\alpha_s \cdot \alpha_s}\, dt \;=\; \int_{s_0}^{s_1} -\mathbf{V}(s) \cdot \alpha_0''(s)\, ds\,. \tag{28}$$

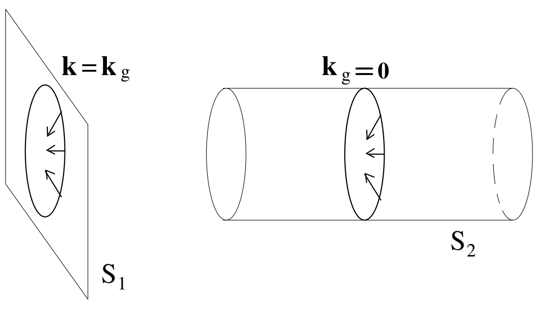
Calculamos:

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \sqrt{\alpha_s \cdot \alpha_s}\, ds \;=\; \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2\sqrt{\alpha_0'(s) \cdot \alpha_0'(s)}} \left(2\,\alpha_{s\lambda} \cdot \alpha_s\right)_{\lambda=0} ds \;=$$
$$=\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2}\,(2)\,\mathbf{V}'(s) \cdot \alpha_0'(s)\, ds \;=\; \int_{s_0}^{s_1} -\mathbf{V}(s) \cdot \alpha_0''(s)\, ds\,,$$

donde en la última igualdad hemos integrado por partes y tenido en cuenta que $\mathbf{V}(s)$ se anula en los extremos. Esto prueba (28) y la tercera propiedad.

Caso particular: El plano $\mathbb{R}^2_{xy}$ con la métrica estándar $Q_0 \equiv (dx)^2 + (dy)^2$ puede verse como el plano horizongtal $\{z = 0\}$ con su primera forma fundamental. Se deduce que dada una curva regular *plana* $\alpha(t)$ el vector $\mathbf{k}_{g,\alpha,Q_0}(t)$ coincide con la curvatura $\mathbf{k}_\alpha(t)$ definida en el apartado 2.1.

Fijada α, el vector $\mathbf{k}_{g,\alpha,I}$ depende de la superficie que tomemos conteniendo a α. Consideremos por ejemplo una circunferencia, como superficie S_1 el plano de la circunferencia y como superficie S_2 el cilindro de revolución uno de cuyos paralelos es la circunferencia.



El vector curvatura espacial de la circunferencia yace tangente al plano S_1, luego coincide con el vector curvatura geodésica de la circunferencia en el plano y la circunferencia no es una línea geodésica de S_1. Esos mismos vectores curvatura espacial de la circunferencia son ortogonales al cilindro S_2, por lo que al proyectarlos ortogonalmente sobre los planos tangentes al cilindro se obtiene el vector nulo. Luego la circunferencia sí es una línea geodésica del cilindro S_2.

Si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ contiene alguna recta, dicha recta es automáticamente una geodésica de S porque su vector curvatura espacial es nulo y al proyectarlo ortogonalmente sobre cualquier plano sigue siendo nulo. Pero el ejemplo de la circunferencia en el cilindro muestra que una geodésica puede tener curvatura espacial no nula.

Si una curva contenida en una superficie es birregular, entonces es geodésica de esa superficie si y sólo si su normal de Frenet es normal a la superficie.

7.6 Fórmula fundamental para la curvatura geodésica

Calculando la primera variación de longitud_Q vamos a obtener una fórmula general para el cálculo de $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ en coordenadas curvilíneas cualesquiera. Partimos, para hacer el cálculo, de una parametrización regular $\Phi(u,v)$, con la correspondiente expresión de la métrica:

$$Q \equiv A(u,v)\,(du)^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,(dv)^2 \,,$$

y denotamos por $[Q]$ la matriz $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right]$. Sea $\alpha(t,\lambda)$ una deformación de α_0 en S y escribamos:

$$\alpha_0(t) \equiv \Phi\big(u(t)\,,\,v(t)\big) \quad , \quad \alpha(t,\lambda) \equiv \Phi\big(u(t,\lambda)\,,\,v(t,\lambda)\big)\,,$$

donde las funciones cumplen $u(t,0) \equiv u(t)$ y $v(t,0) \equiv v(t)$. Asimismo:

$$\mathbf{V}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_\lambda(t,0) \equiv v_1(t)\,\Phi_u\big(u(t)\,,\,v(t)\big) + v_2(t)\,\Phi_v\big(u(t)\,,\,v(t)\big)\,,$$

donde se tiene $v_1(t) \equiv u_\lambda(t,0)$ y $v_2(t) \equiv v_\lambda(t,0)$. Empezamos el cálculo:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q(\lambda) = \int_{t=a}^{t=b} \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} \sqrt{[u_t \;\; v_t]\,[Q] \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}}\, dt =$$
$$= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{Q_{\alpha_0(t)}\big(\alpha_0'(t)\big)}} \left([u'(t) \;\; v'(t)]\,\big([Q]_\lambda\big)_{\lambda=0} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} + 2\,[v_1'(t) \;\; v_2'(t)]\,[Q] \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} \right) dt\,.$$

Introducimos ahora $s = \int \sqrt{Q_{\alpha_0(t)}\big(\alpha_0'(t)\big)}\,dt$, que es un parámetro longitud Riemanniana de arco para α_0. Tenemos $u'(t) = s'(t)\,u'(s)$ y análogamente para v, v_1, v_2, lo cual nos permite escribir:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q(\lambda) =$$
$$= \int_a^b \frac{1}{2s'(t)} \left(s'(t)^2\,[u'(s) \;\; v'(s)]\,\big([Q]_\lambda\big)_{\lambda=0} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} + 2\,s'(t)^2\,[v_1'(s) \;\; v_2'(s)]\,[Q] \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} \right) dt\,.$$

Teniendo en cuenta que $s'(t)\,dt = ds$ hacemos el siguiente cambio e integramos por partes:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q(\lambda) =$$
$$= \int_{\alpha_0} \left(\frac{1}{2}\,[u'(s) \;\; v'(s)]\,\big([Q]_\lambda\big)_{\lambda=0} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} + [v_1'(s) \;\; v_2'(s)]\,[Q] \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} \right) ds =$$
$$= \quad (\text{eval}) + \int_{\alpha_0} \left(\frac{1}{2}\,[u'(s) \;\; v'(s)]\,\big([Q]_\lambda\big)_{\lambda=0} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} - [v_1(s) \;\; v_2(s)] \cdot \frac{d}{ds}\left([Q] \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} \right) \right) ds\,.$$

Denotamos por Q_u, Q_v los siguientes campos de formas cuadráticas (atención: pueden no ser definidos positivos):

$$Q_u \equiv A_u (du)^2 + 2B_u\, du dv + C_u (dv)^2 \quad , \quad Q_v \equiv A_v (du)^2 + 2B_v\, du dv + C_v (dv)^2 \,,$$

lo que nos permite escribir:

$$[u'(s) \;\; v'(s)] \left([Q]_\lambda\right)_{\lambda=0} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} \equiv [v_1 \;\; v_2] \begin{bmatrix} Q_u\big(\alpha_0'(s)\big) \\ Q_v\big(\alpha_0'(s)\big) \end{bmatrix} \equiv [v_1 \;\; v_2] \begin{bmatrix} Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \\ Q_v(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \end{bmatrix},$$

siendo $\mathbf{t}_{\alpha_0} \equiv \alpha_0'(t)/s'(t) \equiv \alpha'(t)/\|\alpha_0'(t)\|_Q$ la tangente Q-unitaria que apunta en el mismo sentido que $\alpha_0'(t)$, y así conseguimos tener la matriz fila $[v_1 \;\; v_2]$ como factor común en el integrando:

$$\text{término integral} = \int_{\alpha_0} [v_1 \;\; v_2] \left(-\frac{d}{ds}\left([Q]\begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \\ Q_v(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \end{bmatrix} \right) ds =$$

$$= \int_{\alpha_0} [v_1 \;\; v_2][Q][Q]^{-1} \left(-\frac{d}{ds}\left([Q]\begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \\ Q_v(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \end{bmatrix} \right) ds =$$

$$= \int_{\alpha_0} Q_{\alpha_0(s)}\big(\mathbf{V}(s)\,,\, -\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(s)\big)\, ds\,,$$

donde $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ es el campo de vectores tangente a S a lo largo de α_0 dado por las identidades siguientes:

$$\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q} \equiv a_1 \Phi_u + a_2 \Phi_v \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \equiv [Q]^{-1} \left(\frac{d}{ds}\left([Q]\begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix}\right) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \\ Q_v(\mathbf{t}_{\alpha_0}) \end{bmatrix} \right). \tag{29}$$

Para el término de evaluación tenemos la siguiente expresión:

$$(\text{eval}) = \left[[v_1(s) \;\; v_2(s)]\,[Q] \begin{pmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{pmatrix} \right]_{s=s_0}^{s=s_1} = \Big[Q_{\alpha_0(s)}\big(\mathbf{V}(s)\,,\, \mathbf{t}_{\alpha_0}(s)\big) \Big]_{s_0}^{s_1}.$$

Para ponerlo en una forma que no dependa del sentido de recorrido de la curva, definimos (sólo en los extremos) la **tangente exterior** como el vector unitario tangente que apunta hacia afuera de la curva:

$$\mathbf{t}_{\text{ext},\alpha_0}(s_0) = -\mathbf{t}_{\alpha_0}(s_0) \quad , \quad \mathbf{t}_{\text{ext},\alpha_0}(s_1) = \mathbf{t}_{\alpha_0}(s_1)$$

y obtenemos una fórmula para la primera variación de la longitud Riemanniana que es independiente del sentido de recorrido de la curva:

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \text{longitud}_Q(\lambda) = \sum_{s\in\{s_0,s_1\}} Q_{\alpha_0(s)}\big(\mathbf{V}(s)\,,\, \mathbf{t}_{\text{ext},\alpha_0}(s)\big) + \int_{\alpha_0} Q\big(\mathbf{V}\,,\, -\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}\big)\, ds\,. \tag{30}$$

Terminamos este apartado exponiendo la **invariancia de la curvatura geodésica por isometrías.** Sean (S,Q) y (S',Q') dos superficies con sendas métricas de Riemann y $h : (S,Q) \to (S',Q')$ una isometría local, que suponemos al menos de clase $\mathscr{C}^2$. Si $\alpha_0(t) : J \to S$ es una curva regular en S entonces la compuesta $h\circ\alpha(t) : J \to S'$ es una curva regular en S'.

Teorema 106. *Las diferenciales de h llevan los vectores curvatura geodésica de α_0 a los respectivos de $h\circ\alpha_0$, es decir que para todo $t\in J$ tenemos:*

$$(dh)_{\alpha_0(t)}\big(\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t)\big) = \mathbf{k}_{g,h\circ\alpha_0,Q'}(t)\,.$$

Demostración. Podemos suponer que el parámetro t es longitud Riemanniana de arco para α_0 en (S,Q), luego también para $h\circ\alpha_0$ en (S',Q').
Fijamos un valor paramétrico t_0, consideramos el punto $\mathbf{p}=\alpha_0(t_0)\in S$ y tomamos una parametrización regular $\Phi(u,v)$ de un trozo de S alrededor de $\mathbf{p}$, con $\Phi(u_0,v_0)=\mathbf{p}$. Entonces $\Psi(u,v)\equiv h\circ\Phi(u,v)$ es una parametrización regular de un trozo de S' alrededor del punto $h(\mathbf{p})$. Esto define unas coordenadas curvilíneas (u,v) tanto en S cerca de $\mathbf{p}$ como en S' cerca de $h(\mathbf{p})$ y, como h es una isometría local, las expresiones de Q y de Q' en esas coordenadas son idénticas, o sea tienen la misma matriz $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C\end{smallmatrix}\right]$ como función de (u,v). Como consecuencia, al utilizar las fórmulas (29) obtenemos *la misma pareja de números* a_1,a_2 en las dos expresiones:

$$\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t_0)\;=\;a_1\,\Phi_u(u_0,v_0)+a_2\,\Phi_v(u_0,v_0)\quad,\quad \mathbf{k}_{g,h\circ\alpha_0,Q'}(t_0)\;=\;a_1\,\Psi_u(u_0,v_0)+a_2\,\Psi_v(u_0,v_0)\,.$$

Entonces la diferencial $(dh)_\mathbf{p}$ lleva el vector $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t_0)$ al vector $\mathbf{k}_{g,h\circ\alpha_0,Q'}(t_0)$ porque lleva la base $\{\Phi_u(u_0,v_0),\Phi_v(u_0,v_0)\}$ a la base $\{\Psi_u(u_0,v_0),\Psi_v(u_0,v_0)\}$. □

7.7 Cálculo de la curvatura geodésica en cualquier parámetro regular

La función $s(t)\equiv\int\|\alpha_0'(t)\|_Q\,dt$ no suele ser elemental, lo que nos impide hallar explícitamente la parametrización de α_0 por longitud Riemanniana de arco. Veamos cómo calcular la curvatura geodésica mediante derivadas respecto del parámetro original t.

Teorema-definición 107. *Dado un camino suave $\alpha_0(t)\subset S$, la **aceleración Riemanniana de** $\alpha_0(t)$ **respecto de** Q es el vector $\alpha_0''(t)_Q$ definido por el siguiente análogo de las identidades (29):*

$$\alpha_0''(t)_Q\;\equiv\;b_1\,\Phi_u+b_2\,\Phi_v\quad,\quad\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}\equiv[Q]^{-1}\left(\frac{d}{dt}\left([Q]\begin{bmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{bmatrix}\right)-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}Q_u\big(\alpha_0'(t)\big)\\ Q_v\big(\alpha_0'(t)\big)\end{bmatrix}\right).$$

En los tramos regulares de α_0, los vectores $\mathbf{t}_{\alpha_0},\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}$ están definidos y se cumple la identidad:

$$\alpha_0''(t)_Q\;\equiv\;s''(t)\,\mathbf{t}_{\alpha_0}+s'(t)^2\,\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}\,. \tag{31}$$

En los valores paramétricos t_0 con $\alpha_0'(t_0)=\mathbf{0}$, simplemente es $\alpha_0''(t_0)_Q=u''(t_0)\,\Phi_u+v''(t_0)\,\Phi_v$.

Demostración. Es obvio que $(b_1,b_2)=\big(u''(t),v''(t)\big)$ en los t con $\alpha_0'(t)=\mathbf{0}$. En los tramos con $\alpha_0'(t)\neq\mathbf{0}$ la función $s(t)$ sirve como nuevo parámetro y podemos hacer el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left([Q]\begin{bmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{bmatrix}\right)\;&\equiv\;\frac{d}{dt}\left(s'(t)\,[Q]\begin{bmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{bmatrix}\right)\equiv\\ &\equiv s''(t)\,[Q]\begin{bmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{bmatrix}+s'(t)^2\,\frac{d}{ds}\left([Q]\begin{bmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Además $Q_u\big(\alpha_0'(t)\big)\equiv s'(t)^2\,Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0})$ e igual para Q_v. Haciendo la suma y multiplicando desde la izquierda por $[Q]^{-1}$, se llega a la siguiente identidad equivalente a la (31):

$$\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}\equiv s''(t)\begin{bmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{bmatrix}+s'(t)^2\,[Q]^{-1}\left(\frac{d}{ds}\left([Q]\begin{bmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{bmatrix}\right)-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}Q_u(\mathbf{t}_{\alpha_0})\\ Q_v(\mathbf{t}_{\alpha_0})\end{bmatrix}\right).$$

□

Atención: fijadas S y $\alpha_0(t)$, el vector $\alpha_0''(t)_Q$ suele cambiar si cambiamos Q.

Observa: el gran parecido de (31) con la fórmula (3) del apartado 2.2, que para una curva plana $\alpha(t)$ permite calcular $\mathbf{k}_\alpha$ como la componente de $\alpha''(t)/\|\alpha'(t)\|^2$ ortogonal a α. Del mismo modo, la siguiente consecuencia inmediata de (31)

$$\frac{\alpha_0''(t)_Q}{s'(t)^2}\;\equiv\;\frac{\alpha_0''(t)_Q}{Q_{\alpha_0(t)}\big(\alpha_0'(t)\big)}\;\equiv\;\text{escalar}\cdot\alpha_0'(t)+\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q} \tag{32}$$

permite, junto con la segunda propiedad enunciada en el apartado 7.5, calcular $\mathbf{k}_{g,\alpha_0,Q}(t)$ como la *componente conormal* del vector $\alpha_0''(t)_Q/s'(t)^2=\alpha_0''(t)_Q/Q_{\alpha_0(t)}\big(\alpha_0'(t)\big)$.

Igual que ocurría con la curvatura estudiada en el apartado 2.1, la curvatura geodésica sólo está definida para curvas regulares porque su cálculo requiere dividir por $Q\big(\alpha'(t)\big)$.

Ejemplo 1. La superficie es el plano $\mathbb{R}^2_{xy}$, la métrica es $Q \equiv (1+x^2+y^2)\,(dx)^2+(dy)^2$ y la curva es $\alpha(t) \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Tenemos:

$$Q_x \equiv 2x\,(dx)^2 \;,\; Q_y \equiv 2y\,(dx)^2 \;,\; \alpha'(t) \equiv (-\operatorname{sen} t, \cos t) \;,\; Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) \equiv 1+\operatorname{sen}^2 t\,,$$

$$[Q]_{(x,y)=\alpha(t)} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; \frac{d}{dt}\left([Q]\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}\right) \equiv \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} -2\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -2\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix},$$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_x\big(\alpha'(t)\big) \\ Q_y\big(\alpha'(t)\big) \end{bmatrix} \equiv -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2x\,(-\operatorname{sen} t)^2 \\ 2y\,(-\operatorname{sen} t)^2 \end{bmatrix}_{(x,y)=\alpha(t)} \equiv \begin{bmatrix} -\cos t\,\operatorname{sen}^2 t \\ -\operatorname{sen}^3 t \end{bmatrix}.$$

La función no elemental $s(t) \equiv \int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$ permite dar dos expresiones para $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$:

$$\frac{s''(t)}{s'(t)}\,\alpha'(t)+s'(t)^2\,\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -2\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\cos t\,\operatorname{sen}^2 t \\ -\operatorname{sen}^3 t \end{bmatrix}\right),$$

es decir:

$$\frac{\operatorname{sen} t\,\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}+s'(t)^2\,\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv \begin{bmatrix} -\cos t\,\big(1+(1/2)\operatorname{sen}^2 t\big) \\ -\operatorname{sen} t\,\big(1+\operatorname{sen}^2 t\big) \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por $s'(t)^2 \equiv 1+\operatorname{sen}^2 t$ quitamos denominadores. Al operar queda:

$$s'(t)^4\,\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv \left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^4 t\right)\begin{bmatrix} -\cos t \\ -2\operatorname{sen} t \end{bmatrix},$$

y despejamos $\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv h(t)\cdot(-\cos t\,,\,-2\operatorname{sen} t)$ con $h(t)$ una función escalar explícita. Es trivial comprobar que este campo vectorial a lo largo de α es conormal, o sea Q-ortogonal a $\alpha'(t)$.

Ejemplo 2. La superficie viene dada por una parametrización $\Phi(u,v)$, la métrica es:

$$Q \equiv (u^2+2e^{-u})\,(du)^2+2\,du\,dv+e^u\,(dv)^2\,,$$

y la curva es $\alpha(t) \equiv \Phi\big(u(t),v(t)\big) \equiv \Phi(t,e^{-t})$. Calculamos:

$$Q_u \equiv (2u-2e^{-u})\,(du)^2+e^u\,(dv)^2 \;,\; Q_v \equiv 0 \;,\; \alpha'(t) \equiv \Phi_u-e^{-t}\,\Phi_v \;,\; Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) \equiv t^2+e^{-t},$$

$$[Q]_{(u,v)=\big(u(t),v(t)\big)} \equiv \begin{bmatrix} t^2+2e^{-t} & 1 \\ 1 & e^t \end{bmatrix},\; \frac{d}{dt}\left([Q]\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}\right) \equiv \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} t^2+e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2t-e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_u\big(\alpha'(t)\big) \\ Q_v\big(\alpha'(t)\big) \end{bmatrix} \equiv -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (2u-2e^{-u})\cdot 1^2+e^u\,(-e^{-t})^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{(u,v)=\big(u(t),v(t)\big)} \equiv \begin{bmatrix} -t+\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$[Q]^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2t-e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -t+\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \equiv [Q]^{-1}\begin{bmatrix} t-\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\det\,[\mathrm{Q}]}\begin{bmatrix} e^t & -1 \\ -1 & t^2+2e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t-\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \frac{t-\frac{e^{-t}}{2}}{e^t\,t^2+1}\begin{bmatrix} e^t \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \frac{t-\frac{e^{-t}}{2}}{t^2+e^{-t}}\begin{bmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

El vector:

$$\alpha''(t)_Q = \frac{t-\frac{e^{-t}}{2}}{t^2+e^{-t}}\,\big(\Phi_u-e^{-t}\,\Phi_v\big) = \frac{t-\frac{e^{-t}}{2}}{t^2+e^{-t}}\,\alpha'(t)\,,$$

ha resultado ser tangente a α, por lo tanto la componente conormal del cociente $\alpha''(t)_Q/Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big)$ es nula, es decir $\mathbf{k}_{g,\alpha,Q} \equiv \mathbf{0}$.
El camino $\alpha(t)$ *traza una línea geodésica de Q*. Pero $\alpha(t)$ no es una parametrización por un múltiplo constante de la longitud Riemanniana de arco, porque su rapidez Riemanniana $\sqrt{t^2+e^{-t}}$ es variable.