Notas sobre los ejercicios de Probabilidad 1

Javier Cárcamo
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid (SPAIN)

17 de mayo de 2021

Resumen

En este fichero dejaré comentarios sobre los ejercicios de las relaciones de problemas del curso de Probabilidad 1 y responderé las dudas que os vayan surgiendo.

1. Hoja 3: Vectores aleatorios

1.1. Ejercicio 1

(Mixtura de distribuciones) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_1 y F_2, respectivamente e $Y \sim \mathrm{B}(1;p)$ variable independiente de las anteriores con distribución de Bernoulli de parámetro p. Mostrar que la variable $Z = Y X_1 + (1-Y) X_2$ tiene función de distribución $F = p F_1 + (1-p) F_2$.

Solución: La variable Y toma los valores 0 y 1, por tanto, podemos usar la partición natural $\Omega = \{Y=0\} \uplus \{Y=1\}$ para calcular F.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \mathrm{P}(Z \le z) \\
&= \mathrm{P}(Y X_1 + (1-Y) X_2 \le z) \\
&= \mathrm{P}(Y X_1 + (1-Y) X_2 \le z, Y=1) + \mathrm{P}(Y X_1 + (1-Y) X_2 \le z, Y=0) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \le z, Y=1) + \mathrm{P}(X_2 \le z, Y=0) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathrm{P}(X_1 \le z)\mathrm{P}(Y=1) + \mathrm{P}(X_2 \le z)\mathrm{P}(Y=0).
\end{aligned}$$

1.2. Ejercicio 9 (c), (d) y (e)

Sean X e Y variables independientes y con la misma distribución geométrica de parámetro p (es decir, $\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = pq^k$, $k = 0,1,\dots$), hallar: **(a)** $\mathrm{P}(X=k|X+Y=n)$ $(k,n = 0,1,2,\dots)$; **(b)** $\mathrm{P}(X=Y)$ y $\mathrm{P}(X \ge 2Y)$; **(c)** la distribución de $U = X - Y$; **(d)** la distribución de $V = \min(X,Y)$; **(e)** la distribución de $W = \max(X,Y)$; **(f)** la distribución conjunta del vector aleatorio (U,V) y comprobar que U y V son independientes.

Nota: En ejercicios relacionados con la distribución geométrica suele ser útil conocer las sumas geométricas:

$$\sum_{n=0}^{m} a^n = \frac{1-a^{m+1}}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{n=m}^{\infty} a^n = \frac{a^m}{1-a}, \quad \text{si } |a| < 1.$$

Solución apartado (c): La variable $U = X - Y$ toma valores en todos los enteros $\mathbb{Z}$. Para $u \in \mathbb{Z}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U = u) &= \mathrm{P}(X - Y = u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X - Y = u, Y = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = u + n, Y = n) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = u + n)\mathrm{P}(Y = n). \end{aligned}$$

Ahora conviene distinguir los casos $u \geq 0$ y $u < 0$. A partir de aquí creo que podéis seguir vosotros.

Solución apartado (d): La variable $V = \text{mín}(X, Y)$ toma valores en los enteros no negativos, $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Para $v \in S$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(V = v) &= \mathrm{P}(\text{mín}(X, Y) = v) \\ &= \mathrm{P}(\text{mín}(X, Y) = v, X \leq Y) + \mathrm{P}(\text{mín}(X, Y) = v, X > Y) \\ &= \mathrm{P}(X = v, Y \geq v) + \mathrm{P}(Y = v, X > v) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \mathrm{P}(X = v)\mathrm{P}(Y \geq v) + \mathrm{P}(Y = v)\mathrm{P}(X > v) \\ &= \mathrm{P}(X = v) \sum_{k=v}^{\infty} \mathrm{P}(Y = k) + \mathrm{P}(Y = v) \sum_{k=v+1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k). \end{aligned}$$

Solución apartado (d): La distribución de $W = \text{máx}(X, Y)$ se hace de forma similar.

Solución apartado (e): Para calcular la distribución conjunta del vector aleatorio (U, V) primeramente observamos que (U, V) toma valores en $\mathbb{Z} \times S$. Ahora si $(u, v) \in \mathbb{Z} \times S$ con $u \geq 0$ y $U = X - Y = u \geq 0$, tenemos que $V = \text{mín}\{X, Y\} = Y$. Por tanto, si $u \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U = u, V = v) &= \mathrm{P}(X - Y = u, \text{mín}(X, Y) = v) \\ &= \mathrm{P}(X - Y = u, Y = v) \\ &= \mathrm{P}(X = u + v, Y = v) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \mathrm{P}(X = u + v)\mathrm{P}(Y = v). \end{aligned}$$

Cuando $u < 0$, se puede hacer el cálculo análogo para determinar la distribución conjunta.

1.3. Ejercicio 10

(Distribución trinomial) Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución trinomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$, y $x, y \in (0, 1)$ $(x + y < 1)$, es decir, para $k = 0, 1, \dots, n$ y $l = 0, 1, \dots, n - k$,

$$\mathrm{P}(X = k, Y = l) = \binom{n}{k, l, n - k - l} x^k \, y^l \, (1 - x - y)^{n-k-l}.$$

Hallar las distribuciones marginales y la distribución de $X+Y$. ¿Son X e Y independientes?

Idea: Probabilísticamente, si X e Y cuentan el número de veces que ocurren los sucesos (disjuntos) A y B (con probabilidades x e y) en n pruebas independientes, entonces $X \sim \mathrm{B}(n,x)$, $Y \sim \mathrm{B}(n,y)$ y $X+Y \sim \mathrm{B}(n,x+y)$.

Solución: La variable X toma valores en $S = \{0,1,\dots,n\}$. Para $k \in S$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{l=0}^{n-k} \mathrm{P}(X=kY=l) \\ &= \frac{n!}{k!} x^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{l!(n-k-l)!} y^l (1-x-y)^{n-k-l} \\ &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Por tanto, $X \sim \mathrm{B}(n,x)$.

El resto de cálculos se hacen de forma similar.

1.4. Ejercicio 11

(Sumas aleatorias de variables aleatorias) Sean $N, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Se supone que N toma valores enteros no negativos y se define la variable:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \left(\text{es decir,} \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), \quad \text{para } \omega \in \Omega\right).$$

Hallar la distribución de la variable Y suponiendo que $N, X_1, X_2, \dots$ son independientes, que las X_i tienen la misma distribución de Bernoulli de parámetro p y que:

(a) N tiene distribución de Poisson de parámetro λ.

(b) N tiene distribución geométrica de parámetro p.

Sugerencia: $\{N=n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema completo de sucesos.

Idea: Llamemos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Esta es una suma (no aleatoria) de n variables aleatorias. Fijamos $B \subset \mathbb{R}$. Siguiendo la sugerencia, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \in B) &= \mathrm{P}\left(\{Y \in B\} \cap \biguplus_{n=0}^{\infty} \{N=n\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S_n \in B, N=n). \end{aligned}$$

Ahora, si $N, X_1, X_2, \dots$ son independientes, tenemos que

$$\mathrm{P}(Y \in B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S_n \in B)\mathrm{P}(N=n).$$

Esta expresión es muy útil para calcular las distribuciones de probabilidad en las preguntas de este ejercicio.

Observación: Las sumas aleatorias aparecen de forma natural en las matemáticas actuariales. Por ejemplo, supongamos que a lo largo de un año una compañía de seguros recibe un total de N reclamaciones, donde N es un número aleatorio. Si cada una de estas N reclamaciones conllevan un desembolso económico de $X_1, \dots, X_n$ euros (variables aleatorias), el montante que suponen para la compañía es justamente la suma aleatoria que aparece en este ejercicio. Quizá puedas imaginar algún otro ejemplo donde aparecen este tipo de variables de forma natural.

1.5. Ejercicio 13

Sean a, b y c tres números reales estrictamente positivos. Se eligen al azar dos subintervalos del intervalo $(0, a+b+c)$, uno de longitud a y el otro de longitud b. Hallar la probabilidad de que no se solapen (es decir, que su intersección sea vacía).

Solución: Elegir un intervalo de longitud a en el intervalo $(0, a+b+c)$ es equivalente a elegir un punto X con distribución uniforme en el intervalo $(0, b+c)$. Esto es debido a que el intervalo $I_X = (X, X+a)$ quedará fijado con el punto $X \in (0, b+c)$. De forma análoga, elegir un intervalo de longitud b en el intervalo $(0, a+b+c)$ es equivalente a elegir un punto Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, a+c)$. En este caso el intervalo será $J_Y = (Y, Y+b)$. Como ambos intervalos se eligen de forma independiente, tenemos un vector aleatorio (X, Y) con distribución uniforme en el rectángulo $(0, b+c) \times (0, a+c)$. Este vector tiene densidad constante en este rectángulo.

Ahora, llamamos V al suceso "los intervalos I_X y J_Y no se solapan". Es decir, $V = \{I_X \cap J_Y = \varnothing\}$. Es fácil ver que

$$V = \{X + a \le Y\} \uplus \{Y + b \le X\}.$$

La Figura 1 representa gráficamente los puntos del rectángulo en los que se verifica la condición.

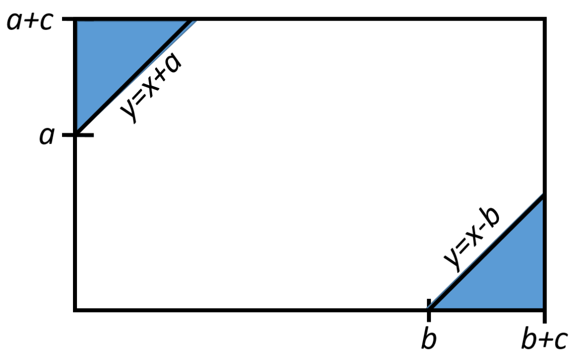

Figura 1: Región donde se verifica la condición dada por V.

1.6. Ejercicio 14

Se eligen al azar (e independientemente) tres puntos x, y, z del intervalo $(0,1)$. Hallar la probabilidad de que la ecuación de segundo grado (en u) $xu^2 + 2zu + y = 0$ no tenga raíces reales.

Idea: Este es un problema de probabilidad geométrica como el anterior. Tenemos un vector tridimensional (X,Y,Z) con distribución uniforme en el cubo unidad $[0,1]^2$. Por tanto, se trata de encontrar el volumen de la región de

$$\{(x,y,z) \in [0,1]^3 : xu^2 + 2zu + y = 0 \text{ no tiene raíces reales}\}.$$

Para que esto ocurra, el discriminante de esta forma cuadrática tiene que ser negativo, es decir, $z^2 < xy$.

1.7. Ejercicio 19 (a), (b) y (d)

Hallar la densidad de $X + Y$, si X e Y son variables aleatorias independientes y con distribuciones:

(a) Uniformes en $(0,1)$ y $(0,2)$, respectivamente.

(b) Gamma α_1, β y Gamma α_2, β (con densidades $f_i(x) = \beta^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1} e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha_i)$, para $x > 0$), respectivamente.

(d) Normales $\mathrm{N}(a,\sigma)$ y $\mathrm{N}(b,\tau)$, respectivamente.

Aclaración apartado (a): La densidad de X es $f_1(x) = 1$ en $(0,1)$ y la de Y es $f_2(y) = 1/2$ en $(0,2)$. Si son independientes, la conjunta es $f(x,y) = 1/2$ en el rectángulo $(0,1) \times (0,2)$. Por tanto, todas las cuentas las tienes que hacer con esa densidad conjunta. El problema es muy parecido al que hice con detalle en clase sólo que cambiando la densidad 1 por 1/2 y el cuadrado por el rectángulo.

Aclaración apartado (b): En este ejercicio es muy fácil comprobar (usando la convolución de las densidades gamma) que $X + Y$ tiene densidad Gamma de parámetros $\alpha_1 + \alpha_2$, β.

Aclaración apartado (d): Como ya comenté en clase, este ejercicio es un poco pesado. En las diapositivas del tema 3 (página 46) podéis ver que se hace paso a paso: primero se supone que $a = b = 0$ y luego se va subiendo. La idea es completar el cuadrado que aparece en la exponencial. No es difícil, pero son cuentas engorrosas. Veremos este resultado mucho más fácilmente usando funciones características en Probabilidad II. Por tanto, si veis que os liáis mucho, dejadlo corred.

2. Hoja 4: Esperanza y momentos

2.1. Ejercicio 4

Lanzamos una p-moneda y consideramos X_n la variable que cuenta el número total de tiradas hasta obtener una racha de n caras seguidas. Halla el valor esperado de X_n.

SUGERENCIA: Calcula directamente la esperanza condicionando *sucesivamente* sobre el resultado obtenido en los n-primeros lanzamientos. (RESPUESTA: $(1-p^n)/(p^n(1-p))$)

Solución: Consideramos el suceso

$$C_i \equiv \text{sacar cara en el } i\text{-ésimo lanzamiento.}$$

Usando la regla de la doble esperanza, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_n &= \mathrm{P}(C_1)\mathrm{E}(X_n|C_1) + \mathrm{P}(C_1^c)\mathrm{E}(X_n|C_1^c) \\ &= p\mathrm{E}(X_n|C_1) + q(\mathrm{E}(X_n) + 1). \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado la relación

$$\mathrm{E}X_n = p\mathrm{E}(X_n|C_1) + q(\mathrm{E}(X_n) + 1). \tag{1}$$

Podemos repetir el argumento con $\mathrm{E}(X_n|C_1)$ condicionando ahora sobre la partición $\{C_2, C_2^c\}$. Tenemos,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n|C_1) &= \mathrm{P}(C_2)\mathrm{E}(X_n|C_1C_2) + \mathrm{P}(C_2^c)\mathrm{E}(X_n|C_1C_2^c) \\ &= p\mathrm{E}(X_n|C_1C_2) + q(\mathrm{E}(X_n) + 2). \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado la relación

$$\mathrm{E}(X_n|C_1) = p\mathrm{E}(X_n|C_1C_2) + q(\mathrm{E}(X_n) + 2),$$

que podemos enchufar en la ecuación (1) para obtener

$$\mathrm{E}X_n = p^2\mathrm{E}(X_n|C_1C_2) + pq(\mathrm{E}(X_n) + 2) + q(\mathrm{E}(X_n) + 1).$$

Repitiendo esta operación n veces (usando inducción matemática, por ejemplo), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n) =& p^n\mathrm{E}(X_n|C_1\cdots C_n) + p^{n-1}q(\mathrm{E}(X_n) + n) + p^{n-2}q(E(X_n) + n - 1) \\ &+ \cdots + pq(\mathrm{E}(X_n) + 2) + q(\mathrm{E}(X_n) + 1) \\ =& np^n + q\left(1 + 2p + 3p^2 + \cdots + (n-1)p^{n-2} + np^{n-1}\right) + \mathrm{E}(X_n)q\left(1 + p + p2 + \cdots + p^{n-1}\right). \end{aligned}$$

De esta última identidad y calculando las sumas geométricas es fácil obtener el resultado del ejercicio.

2.2. Ejercicio 9

Se elige al azar una biyección de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo. Sea X el número de elementos que quedan fijos. Hallar $\mathrm{E}X$.

SUGERENCIA: Se puede (y es un buen ejercicio) calcular la distribución de X (recordar el problema EMPAREJAMIENTO ALEATORIO). Sin embargo, resulta más conveniente expresar X como suma de n variables más sencillas. (RESPUESTA: 1)

Solución: Llamamos X_i a la variable que cuenta si el i-ésimo elemento ha quedado fijo, es decir,

$$X_i \equiv \begin{cases} 1, & \text{si el elemento } i\text{-ésimo queda fijo,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que las variables $X_i \sim \mathrm{B}(1, p = 1/n)$ (pero no son independientes) y $X = X_1 + \cdots + X_n$, luego

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}X_1 + \cdots + \mathrm{E}X_n = n\mathrm{E}X_1 = 1.$$

2.3. Ejercicio 12

Calcular $\mathrm{E}\,\text{mín}\{X_1,\dots,X_n\}$, siendo $X_1,\dots,X_n$ variables independientes con la misma distribución geométrica de parámetro p (es decir, $\mathrm{P}(X_i = k) = pq^k$, $k = 0,1,\dots$). (RESPUESTA: $q^n/(1-q^n)$)

Solución: Llamemos $Y = \text{mín}\{X_1,\dots,X_n\}$. Del ejercicio 5 sabemos que

$$\mathrm{E}Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(Y \geq k).$$

Ahora bien,

$$\mathrm{P}(Y \geq k) = \mathrm{P}(X_1 \geq k,\dots,X_n \geq k) \overset{\text{ind}}{=} \mathrm{P}(X_1 \geq k)\cdots\mathrm{P}(X_n \geq k) \overset{\text{equi}}{=} \mathrm{P}(X_1 \geq k)^n.$$

Esta última probabilidad es muy fácil de calcular (suma geométrica).

2.4. Ejercicio 15

El tiempo de vida de un determinado tipo de bombillas es una variable aleatoria exponencial de media $\mu > 0$ horas. Una compañía compra n de ellas. Calcula el tiempo esperado en el que fallará la primera de ellas. (RESPUESTA: μ/n)

Solución 1: Sea F y f las funciones de distribución y densidad de la variable T que representa el tiempo de vida de las bombillas. Llamemos $M = \text{mín}(T_1,\dots,T_n)$, donde $T_1,\dots,T_n$ son variables i.i.d. como T. La f.d. de M es $F_M(t) = 1 - F(t)^n$ y la densidad $f_M(t) = -nF(t)^{n-1}f(t)$. De aquí se puede calcular la esperanza fácilmente.

Solución 2: Usar el ejercicio siguiente y la identidad

$$\mathrm{E}M = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(M > t)\,\mathrm{d}t.$$

2.5. Ejercicio 17

(¿CUÁNTO ESPERAMOS QUE DURE UNA BUENA RACHA?) Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias continuas, independientes y con igual distribución. Consideramos la variable N que cuenta la duración de la primera racha, es decir, N es el primer índice tal que ($X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_{N-1}$ y) $X_{N-1} > X_N$.

(a) Para $n = 1,2,\dots$, comprueba que $\mathrm{P}(N > n) = 1/n!$.

(b) Para $n = 2,3,\dots$, calcula $\mathrm{P}(N = n)$ y $\mathrm{E}N$. (RESPUESTA: $\mathrm{E}N = e$)

Solución (a): Tenemos que comprobar que

$$\mathrm{P}(N > n) = \mathrm{P}(X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_{n-1} \leq X_n) = 1/n!.$$

Esto se puede hacer de varias formas:

Opción 1: Primeramente, observamos que podemos suponer que la distribución común de las X_i es $\mathrm{U}(0,1)$ (uniforme en el intervalo unidad). Esto se debe a que las variables son continuas con función de distribución común F (que es continua y no decreciente), luego

$$\{X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_{n-1} \le X_n\} = \{F(X_1) \le F(X_2) \le \cdots \le F(X_n)\} = \{U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n\},$$

donde $U_j = F(X_j) \sim \mathrm{U}(0,1)$ e independientes (recordar el ejercicio 7 de la relación 2 que prueba este resultado). Concluimos que

$$\mathrm{P}(N > n) = \mathrm{P}(U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n).$$

Finalmente, la función de densidad de $(U_1, \ldots, U_n)$ es 1 en el (hiper)cubo unidad $[0,1]^n$, luego

$$\mathrm{P}(U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n) = \int_0^1 \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}.$$

(Esta identidad se puede obtener por inducción, por ejemplo.)

Opción 2: Consideramos Σ_n, el grupo de las permutaciones de $(1, 2, \ldots, n)$, que tiene $n!$ elementos. Como las variables $X_1, \ldots, X_n$ tienen la misma distribución y son independientes, para $\sigma \in \Sigma_n$, la distribución del vector $(X_1, \ldots, X_n)$ es igual a la distribución de $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$. Además,

$$\Omega = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} \{X_{\sigma(1)} \le \cdots \le X_{\sigma(n)}\}$$

ya que de alguna de las $n!$ posibilidades se ordenarán los n números $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} \{X_{\sigma(1)} \le \cdots \le X_{\sigma(n)}\} \right) \\ &\overset{\text{cont}}{=} \mathrm{P}\left(\biguplus_{\sigma \in \Sigma_n} \{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{P}(X_{\sigma(1)} \le \cdots \le X_{\sigma(n)}) \\ &\overset{\text{equi}}{=} n!\, \mathrm{P}(X_1 < \cdots < X_n). \end{aligned}$$

(Observar que en el caso en el que las variables X_i sean discretas la segunda igualdad de arriba no es cierta en general, ya que puede haber empates con probabilidad positiva.) Por tanto, hemos demostrado que $\mathrm{P}(N > n) = 1/n!$.

Observación: Este resultado es bastante ASOMBROSO. Esto se debe a que el valor de esta probabilidad *no* depende de la distribución subyacente. Basta con que la distribución sea continua para obtener el resultado. A los que os haya llamado la atención este ejercicio, os dejo en el Moodle un artículo muy breve y sencillo sobre este tema que quizá os interese.

Solución (b): Usando (a), tenemos que para $n \ge 2$,

$$\mathrm{P}(N = n) = \mathrm{P}(N > n-1) - \mathrm{P}(N > n) \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}N &= \sum_{n=2}^{\infty} n\mathrm{P}(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.\end{aligned}$$

Concluimos que el tiempo esperado de la racha es exactamente el número e, independientemente de cuál sea la distribución generadora de los números.

2.6. Ejercicio 20 (b) y (c)

Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Calcula:

(a) $\mathrm{E}Z$, donde $Z = 2X^2/(X^2+y^2)$. (Respuesta: 1)

(b) $\mathrm{E}(V/U)$, donde $U = \max\{|X|,|Y|\}$ y $V = \min\{|X|,|Y|\}$ (Respuesta: $2\log(2)/\pi$)

(c) $\mathrm{E}|T|^r$ $(r \geq 0)$, donde $T = \sqrt{X^2+Y^2}$. (Respuesta: $2^{r/2}\Gamma(1+r/2)$)

Solución (b): La densidad conjunta del vector (X,Y) es

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tenemos que calcular

$$\mathrm{E}(V/U) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\min\{|x|,|y|\}}{\max\{|x|,|y|\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Por simetría, tenemos que la anterior integral será 8 veces la integral sobre la región $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ y } 0 \leq y \leq x\}$. Luego,

$$\mathrm{E}(V/U) = 8\int_T \frac{y}{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Haciendo el cambio a polares, tenemos que

$$\mathrm{E}(V/U) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\infty} \tan(\theta) r e^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\log(2)/\pi.$$

Solución (c): Este apartado se hace de forma muy parecida usando el cambio a polares y la definición de la función Gamma de Euler. Lo dejo como ejercicio.

2.7. Ejercicio 21

Sean X, Y variables independientes con distribución normal estándar. Hallar la densidad conjunta del vector (U,V), donde $U = X+Y$ y $V = X-Y$. ¿Son U y V independientes?

Solución: Las densidades (marginales) de X e Y son $f_1(x)$ y $f_2(y)$, respectivamente, donde

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Como X e Y son independientes, la densidad conjunta del vector (X, Y) es

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Consideramos ahora la transformación

$$T(X, Y) = (U = X + Y, V = X - Y)$$

cuya inversa es

$$T^{-1}(U, V) = \left(X = \frac{U+V}{2}, Y = \frac{U-V}{2}\right).$$

El Jacobiano del cambio será

$$J_{T^{-1}}(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, usando el Teorema del cambio de variables (diapositiva 44 del Tema 3), tenemos que (U, V) tiene densidad conjunta

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|J_{T^{-1}}| = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$g(u, v) = \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2\right].$$

Concluimos que $U \sim \mathrm{N}(\mu = 0; \sigma = \sqrt{2})$, $V \sim \mathrm{N}(\mu = 0; \sigma = \sqrt{2})$ y además U y V son variables independientes.

Observación: La distribución de las marginales U y V ya sabíamos que era normal de media 0 y varianza 2 debido a los resultados de la diapositiva 46. Sin embargo, este problema nos dice que $U = X + Y$ y $V = X - Y$ son independientes. Si lo pensáis un poco, este resultado es ASOMBROSO. Tanto U como V están definidas a partir de las mismas variables X e Y. Por tanto, es de esperar que sean *muy* dependientes. Sin embargo, acabamos de probar que son independientes.

De hecho, se puede demostrar usando funciones características que si dos variables independientes X e Y de media 0 y varianza 1 verifican que $U = X + Y$ y $V = X - Y$ son independientes, entonces X e Y son normales. Es decir, este resultado se verifica si y sólo si las variables son normales. Esta es una más de las muchas caracterizaciones que hay de normalidad, y que hacen que esta distribución juegue un papel central en la teoría de la probabilidad.

2.8. Ejercicio 30

Dos jugadores A y B juegan una serie de partidas independientes. En cada partida, la probabilidad de que gane A es p^2, la de que gane B es q^2 y la probabilidad de empate es $2pq$ $(p+q=1)$. El ganador de cada partida se anota 2 puntos, el perdedor ninguno y, en caso de empate, cada jugador se anota un punto. Sea X (resp. Y) el total de puntos del jugador A (resp. B) al cabo de n partidas. Calcular $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

SUGERENCIA: El problema anterior puede ser de utilidad. (RESPUESTA: $-2npq$)

Solución: Llamemos X_i (respectivamente Y_i) a la puntuación obtenida por el jugador A (respectivamente B) en la partida i-ésima $(1 \le i \le n)$. Tenemos que $X = X_1 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$ y además, X_i e Y_j son independientes (y por tanto incorreladas) si $i \neq j$. Por tanto, podemos usar el ejercicio anterior para concluir que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i) \overset{\text{equi}}{=} n\,\mathrm{Cov}(X_1, Y_1).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1, Y_1) &= \mathrm{E}(X_1 Y_1) - \mathrm{E}X_1 \mathrm{E}Y_1 \\ &= 2pq - (2p^2 + 2pq)(2q^2 + 2pq) \\ &= -2pq. \end{aligned}$$

2.9. Ejercicio 31

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables incorrelacionadas dos a dos y con igual media y varianza y $Z = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Hallar el coeficiente de correlación de: **(a)** X_i y Z; **(b)** $X_i - Z$ y Z.

(RESPUESTA: **(a)** $1/\sqrt{n}$; **(b)** 0)

Solución (a): Llamemos $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, Z) &= \frac{1}{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &\overset{\text{inco}}{=} \frac{1}{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) \\ &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Finalmente, como las variables son incorreladas, tenemos que $\mathrm{Var}(S_n) = \sigma^2/n$ y

$$\mathrm{Corr}(X_i, Z) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Idea: Cuando n va aumentando, $\mathrm{Corr}(X_i, Z) \to 0$. Esto se debe a que la contribución de una variable individual a la media va siendo cada vez más pequeña según aumentamos el número de sumandos.

Solución (b): Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i - Z, Z) &= \mathrm{Cov}(X_i, Z) - \mathrm{Cov}(Z, Z)\\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \mathrm{Var}(Z)\\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Concluimos que $\mathrm{Corr}(X_i - Z, Z) = 0$.