ANÁLISIS MATEMÁTICO - PARCIAL 2 - SOLUCIONES

1 a) La función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Su diferencial en $(0,0)$ es

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} e^{x+2} & -\operatorname{sen} y \\ -\frac{x}{(1+x^2)^2} & 3+5y^4 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\det Df(0,0) = 3e^2 \neq 0$, el teorema de la función inversa nos asegura que f es invertible en un entorno de $f(0,0)$.

b) Si g es la función inversa de f en un entorno de $f(0,0)$,

$$Dg(f(0,0)) = [Df(0,0)]^{-1} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

c) Para estimar el radio R de una bola centrada en $f(0,0)$ en la cual la inversa g de f está definida es necesario usar el teorema 115 de las notas de Jesús Gonzalo Pérez.

Sea $(x,y) \in \overline{B((0,0),1)}$. Con $v=(a,b)^t$

$$(a,b)\,Df(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a,b)\begin{pmatrix} e^{x+2} & -\operatorname{sen} y \\ -\frac{x}{(1+x^2)^2} & 3+5y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= a^2e^{x+2} - \frac{abx}{(1+x^2)^2} - ab\operatorname{sen} y + b^2(3+5y^2).$$

Tenemos que si $(x,y) \in \overline{B((0,0),1)}$, e.d. $\|(x,y)\| \leq 1$

(1) $e^{x+2} \geq e^{-1+2} = e$; (2) $(3+5y^4) \geq 3$ (3) $-1 \leq \operatorname{sen} y \leq 1$

(4) $-1 \leq \frac{x}{(1+x^2)^2} \leq 1$ (desigualdad trivial)

Con estas desigualdades, si $\|(x,y)\| \leq 1$

$$(a,b)\,Df(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq ea^2 - ab - ab + 3b^2 \geq ea^2 - (a^2+b^2) + 3b^2$$

$$= (e-1)a^2 + (3-1)b^2 \geq (e-1)[a^2+b^2] = (e-1)\,\|(a,b)\|^2.$$

Como $e-1 \geq 2'71 - 1 = 1'71$, por el teorema 115 anteriormente mencionado, hay una inversa local de f definida en $B(f(0,0), 1'7)$ y que toma valores en $B((0,0),1)$.

2. a) Sea $F(x,y,u,v) = (x^2-y^2+2uv-4,\ 2xy+u^2-v^2)$. Se tiene que $M = F^{-1}(\{(0,0)\})$. Calculamos $DF(x,y,u,v)$:

$$DF(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2v & 2u \\ 2y & 2x & 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Probaremos que rango $DF(x,y,u,v) = 2$ en todos los puntos de M. Si este rango fuera cero, debería ser $(x,y,u,v)=(0,0,0,0)$ que no satisface la primera ecuación de M. Si este rango fuera 1,

$$\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 0 \iff 4x^2+4y^2=0 \iff x=0,\ y=0$$

$$\begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = 0 \iff -4v^2-4u^2=0 \iff u=v=0$$

Pero el punto $(x,y,u,v)=(0,0,0,0)$ no está en M. Por tanto, M es una subvariedad de dimensión 2 y codimensión 2.

El espacio vectorial $T_{(\sqrt{2},0,1,1)}M$ es $\ker DF(\sqrt{2},0,1,1)$. Como

$$DF(\sqrt{2},0,1,1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 & -2 \end{pmatrix},$$ su núcleo es el conjunto de vectores $\vec{t}=(x,y,u,v)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{2}x+2u+2v=0 \\ 2\sqrt{2}y+2u-2v=0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}x+u+v=0 \\ \sqrt{2}y+u-v=0 \end{array}\right\}.$$

Con $u=1, v=0$ se obtiene $\vec{t}_1 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1, 0)$. Con $u=0, v=1$ se obtiene $\vec{t}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 1)$. Una base de $T_{(\sqrt{2},0,1,1)}M$ es $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$.

Un vector $\vec{r}=(x,y,u,v)$ pertenece a $(T_{(\sqrt{2},0,1,1)}M)^\perp$ si

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \langle \vec{t}_1, \vec{r}\rangle = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + u \\ 0 = \langle \vec{t}_2, \vec{r}\rangle = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + v \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x+y-\sqrt{2}u=0 \\ x-y-\sqrt{2}v=0 \end{array}\right\}$$

Con $x=1, y=0$ se obtiene $\vec{r}_1 = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Con $x=0, y=1$ se obtiene $\vec{r}_2 = (0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Una base de $(T_{(\sqrt{2},0,1,1)}M)^\perp = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$

b) Sea $a = (\sqrt{2}, 0, 1, 1)$. Calculamos $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(a)$:

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(a) = \begin{pmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(a) = -4 \neq 0$, el resultado se deduce del teorema de la función implícita.

c) Sea $(u,v) = g(x,y)$ la función obtenida en el apartado b), que satisface $F(x,y,g(x,y)) = 0$ en un entorno de a. Por la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{pmatrix}_a Dg(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} Dg(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$Dg(\sqrt{2},0) = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Como $Dg(\sqrt{2},0) = -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} = -1 \neq 0$, el teorema de la función inversa nos permite concluir que g tiene una inversa local en un entorno de $g(\sqrt{2},0)$. Finalmente,

$$Dg^{-1}(1,1) = [Dg(\sqrt{2},0)]^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Formamos la función auxiliar de Lagrange

$$G(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+xy+2bz-\lambda(x^2+y^2+z^2-3).$$

Los puntos críticos de F sobre la esfera dada se encuentran entre los puntos críticos de G:

$$\left.\begin{array}{l} 0=\frac{\partial F}{\partial x} = 2x+y-2\lambda x \\ 0=\frac{\partial F}{\partial y} = 2y+x-2\lambda y \\ 0=\frac{\partial F}{\partial z} = 2b-2\lambda z \\ 0=\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2(1-\lambda)x+y=0 & (1) \\ x+2(1-\lambda)y=0 & (2) \\ b=\lambda z & (3) \\ x^2+y^2+z^2=3 & (4) \end{array}\right.$$

Para que $p=(1,1,1)$ sea solución de este sistema se ha de cumplir la ecuación (1): $2(1-\lambda)1+1=0 \Rightarrow \lambda=3/2$. Estos valores también cumplen (2) ya que $1+2(1-3/2)\cdot 1=0$. De (3) se deduce $b=3/2$.

(b) Consideramos el sistema del apartado (a) con $b=3/2$.

$$\left.\begin{array}{ll} 2(1-\lambda)x+y=0 & (1) \\ x+2(1-\lambda)y=0 & (2) \\ 3/2=\lambda z & (3) \\ x^2+y^2+z^2=3 & (4) \end{array}\right\}$$

(1) y (2) tienen solución no trivial si y solo si

$$\begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & 1 \\ 1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = 4(1-\lambda)^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$4(1-\lambda)^2=1 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2=1/4 \Leftrightarrow 1-\lambda=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2} \text{ ó } \lambda=\frac{1}{2}$$

Si (1) y (2) tuvieran la solución trivial $(x,y)=(0,0)$, de (4) se obtendría $z=\pm\sqrt{3}$. Hemos encontrado las soluciones

$$A_1=(0,0,\sqrt{3}), \quad A_2=(0,0,-\sqrt{3}).$$

Si $\lambda=3/2$, de (3) se deduce $z=1$. De (1) obtenemos $-x+y=0$ $\Leftrightarrow x=y$. Sustituyendo en (4), $2x^2+1=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$$A_3=(1,1,1), \quad A_4=(-1,-1,1).$$

Si $\lambda = 1/2$, de (3) se deduce $z = 3$, que es imposible por (4).

Tenemos

$$F(A_1) = F(0,0,\sqrt{3}) = 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$F(A_2) = F(0,0,-\sqrt{3}) = 2 \cdot \frac{3}{2}(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$$

$$F(A_3) = F(1,1,1) = 3 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 6$$

$$F(A_4) = F(1,-1,1) = 3 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 6$$

El máximo absoluto de F sobre la superficie esférica dada es 6 y se alcanza en los puntos A_3 y A_4. Su mínimo absoluto es $-3\sqrt{3}$ y se alcanza en A_2.