HOJA DE EJERCICIOS 8
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Considérense las subvariedades unidimensionales $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ dadas por

$$C_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad C_2 \begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son subvariedades de dimensión 1.

c) Hallar la recta tangente a C_1 en el punto $(1, 2, -3)/\sqrt{14}$.

d) Hallar la ecuación del plano normal a C_2 en el punto $(2, 3/2, -5/2)$.

---

b) Para C_1, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1,\ x+y+z)$

$C_1 = F^{-1}\{(0,0)\}$

$DF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rango $DF(x,y,z) = 1 \iff$

$\left\{ \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} \iff \{x=y,\ x=z\}$

Cuando $x=y=z$ en $x+y+z=0 \Rightarrow x=0=y=z$, que no satisface $x^2+y^2+z^2=1$.

Rango $DF(x,y,z)=2$ en C_1. Luego C_1 es una subvariedad de dimensión $3-2=1$.

Para C_2: $G(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2,\ x+y+z-1)$

$DG(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango $DG(x,y,z)=1 \iff \{x=y,\ x+z=0\} \Rightarrow$ $\{x=-z,\ x=y\}$ Como $z^2+z^2-z^2=0$, $z=0$, $x=y=0$ que no está en C_2.

c) $a = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3) \in C_1$. El espacio tangente

$$T_a(C_1) = \ker DF(a)$$

$$DF(a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}}, & \frac{4}{\sqrt{14}}, & \frac{-6}{\sqrt{14}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{14}} & -\frac{6}{\sqrt{14}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 2x+4y-6z=0 \\ x+y+z=0 \end{Bmatrix}$$

$z = t$ ...... $\{y = 4t,\ x = -5t\}$

$$T_a(C_1) = \{(x,y,z) = t(-5,4,1);\ t \in \mathbb{R}\}$$

La recta tangente a C_1 en a es

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right) + t(-5,4,1).$$

c) $b = \left(2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) \in C_2$. Espacio tangente

$$T_b(C_2) = \ker DG(b)$$

$$DG(b) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 4x+3y+5z=0 \\ x+y+z=0 \end{Bmatrix}$$

Con $z=t$, $x=-2t$, $y=t$

$$\ker DG(b) = \langle (-2,1,1) \rangle$$

Espacio normal : $-2x+y+z=0$

Plano normal : $-2x+y+z = -4+\frac{3}{2}-\frac{5}{2} = -5$

Problema 3. *a)* Hallar el hiperplano tangente a la gráfica $G \subset \mathbb{R}^4$ de la función

$$f(x, y, z) \equiv e^y \cos z + e^z \cos x + e^x \cos y$$

en el punto de G correspondiente a $x = y = z = 0$.

b) Estudiar si

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 3 \}$$

define, cerca del punto $p = (0, 0, 0)$, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar el plano tangente a M en p. Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

---

a) $G = \{ (x,y,z,t) : t = f(x,y,z) \} \subset \mathbb{R}^4$. Tenemos $f(0,0,0)=3$

$F(x,y,z,t) = f(x,y,z) - t \; : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$DF(x,y,z,t) = (-e^z \operatorname{sen} x + e^x \cos y,\; e^y \cos z - e^x \operatorname{sen} y,$
$-e^y \operatorname{sen} z + e^z \cos x,\; -1)$

El espacio tangente en $a = (0,0,0,3)$ es $T_a(G) = \ker DF(a)$

$DF(a) = (1, 1, 1, -1)$; $\quad x+y+z-t=0$

Hiperplano tangente: $x+y+z-t = -3$ (pasa por a)

b) $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=3 \}$, $p=(0,0,0)$

$H(x,y,z) = f(x,y,z) - 3$. $\quad M = H^{-1}(\{0\})$

$$DH(0,0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(0,0,0)} = (1, 1, 1)$$

$T_p(M) = \ker DH(0,0,0) = \{ x+y+z=0 \}$.

Problema 6. *(a)* Halla el máximo y el mínimo de $f(x,y,z) \equiv x - 2y + 2z$ en la esfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$.

(b) Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) \equiv 2x^2+y^2+z^2-xy$ sobre el conjunto

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1 \right\}.$$

---

a) $f(x,y,z) = x-2y+2z$, Max y Min en $x^2+y^2+z^2=1$

$$F(x,y,z,\lambda) = x-2y+2z - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1-2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2-2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2-2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+z^2-1=0 \end{aligned}\right\}$$

Observa que $\lambda \neq 0$

$x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $z = \frac{1}{\lambda}$

En la última ecuación

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}$$

$\boxed{\lambda = +\frac{3}{2}}$ $\quad x = \frac{1}{2(3/2)} = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$

$$A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$\boxed{\lambda = -3/2}$ $\quad x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$

$$B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$f(A) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$ Máximo

$f(B) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3$ Mínimo

b) $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2-xy$,

$$K = \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1 \right\}$$

En $\mathring{K}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0$

$z = 0$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 4x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \quad A_1 = (0,0,0) \in \mathring{K}$

En ∂K resolver un problema de multiplicadores:

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy - \lambda\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x - y - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - \frac{\lambda y}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda \frac{z}{4} = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow z\left(2 - \frac{\lambda}{4}\right) = 0 \\ \Rightarrow z = 0 \text{ ó } \lambda = 8 \end{array}$$

$\boxed{\lambda = 8}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} -4x - y = 0 \\ -2y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = 0$

En la última ecuación: $\frac{z^2}{8} = 1 \Rightarrow z = \pm 2\sqrt{2}$

$$A_2 = (0,0,2\sqrt{2}), \quad A_3 = (0,0,-2\sqrt{2})$$

$\boxed{z = 0}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} (4-\lambda)x - y = 0 \\ -x + (2 - \frac{\lambda}{2})y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (4-\lambda)x - y = 0 \\ -2x + (4-\lambda)y = 0 \end{array}\right\}$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 2 \Rightarrow (4-\lambda)^2 = 2$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{2}$$

Con $\lambda = 4 + \sqrt{2}$, $\quad -\sqrt{2}x - y = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}x$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{2x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

$A_4 = (1, -\sqrt{2}, 0)$ $\qquad$ $A_5 = (-1, +\sqrt{2}, 0)$

Con $\lambda = 4-\sqrt{2}$ salen

$A_6 = (1, \sqrt{2}, 0)$, $A_7 = (-1, -\sqrt{2}, 0)$

Máximo es $f(A_2) = f(A_3) = 8$

Mínimo es $f(A_1) = 0$

Problema 8. Demuestra la desigualdad aritmético-geométrica:

$$\text{para } a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0, \quad \text{se tiene} \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Indicación: Escribe $a_i = x_i^2$ y considera sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

S/ Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ y considerar

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2 .$$

Queremos hallar el máximo de f sobre $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$

Lagrange: $F(x, \lambda) = \prod_{j=1}^{n} x_j^2 - \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1 \right)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} x_j^2 - 2x_i \lambda = 0 \\ &\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas}$$

Podemos suponer $x_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

En las n primeras ecuaciones: $\prod_{j=1}^{n} x_j^2 = x_i^2 \lambda \quad , i = 1, \ldots, n \quad (1)$

Sustituyendo en la última ecuación

$$n \prod_{j=1}^{n} x_j^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda$$

Sustituyendo en (1) $\quad \prod_{j=1}^{n} x_j^2 \neq 0$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^2 = x_i^2 \cdot n \prod_{j=1}^{n} x_j^2 \Rightarrow x_i^2 = \frac{1}{n} , i = 1, \ldots n$$

Los puntos críticos son $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}, \pm \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = x_0$

En todos ellos $f(x_0) = \prod_{j=1}^{n} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n^n}$

Por tanto el máx de f sobre $\|x\|=1$ es $1/n^n$

e.d. si $\|x\|=1$,

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \frac{1}{n^n} \qquad (2)$$

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tomar $y = \frac{1}{\|x\|}(x_1, \dots, x_n)$

que tiene norma 1. Por (2)

$$f(y) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\|x\|^2} \leq \frac{1}{n^n}$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \frac{\|x\|^{2n}}{n^n} = \frac{\left(\sum x_i^2\right)^n}{n^n} \qquad (3)$$

Poniendo $a_j = x_j^2$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \leq \frac{\left(\sum a_j\right)^n}{n^n}$$

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n} = MA$$