proposición: sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $p = \min\{n, m\}$ y sea $A = U\Sigma V^*$

1) $r = rg(A) = \max\{ k \in \{1..p\} : \sigma_k \neq 0\}$

2) $Ax = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x, V^{(k)}\rangle U^{(k)} \quad \forall x \in \mathbb{C}^m$

equivalentemente: $A = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k U^{(k)} \otimes V^{(k)} = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k U^{(k)} (\overline{V^{(k)}})^t$

3) $\sigma_k = \max\left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : x \neq 0,\ x \perp V^{(j)}\ \forall j \in \{1..k-1\}\right\}, \quad k > 1$

4) si $n = m = r$ (A invertible) $\Rightarrow K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ NÚMERO DE CONDICIÓN EN LA NORMA $|||\cdot|||_2$

demostración:

1) $rg(A) = rg(U\Sigma V^*) = rg(\Sigma)$ y Σ es diagonal

2) $Ax = \underbrace{U\underbrace{\Sigma \underbrace{V^* x}_{y}}_{w}}$ $\quad y_i = (V^* x)_i = \langle x, V^{(i)}\rangle$

$w_k = (\Sigma y)_k = \begin{cases} \sigma_k y_k & k \in \{1..\cancel{p}\ r\} \\ 0 & k > \cancel{p}\ r \end{cases}$ por 1)

$\Rightarrow Uw = \sum_{k=1}^{n} w_k U^{(k)} = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x, V^{(k)}\rangle U^{(k)} = Ax$

3) si $x \perp V^{(1)} \Rightarrow Ax = \sum_{k=2}^{r} \sigma_k \langle x, V^{(k)}\rangle U^{(k)}$ ortonormales

$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=2}^{r} \sigma_k^2 |\langle x, V^{(k)}\rangle|^2 \leq \sigma_2^2 \sum_{k=2}^{r} |\langle x, V^{(k)}\rangle|^2$

$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x, V^{(k)}\rangle|^2 \quad \left(x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, V^{(k)}\rangle V^{(k)} : \text{BON de } \mathbb{C}^m \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \|Ax\|_2 \leq \sigma_2 \|x\|_2 & \forall x \in \mathbb{C}^m \\ \|A V^{(2)}\|_2 = \sigma_2 \|V^{(2)}\| \end{cases} ; \quad \sigma_2 = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp V^{(1)}}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

y con el mismo argumento tenemos todos los σ_k, $k > 1$

4) $A^* A = V \Sigma^t \Sigma V^*$, $\quad \Sigma^t \Sigma = \Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$

la prueba sigue de la definición de K_2 #

corolario (del punto 2))

i. $\{ V^{(r+1)} \dots V^{(m)} \}$ BON de $Ker(A)$

↳ equivalentemente: i'. $\{ V^{(1)} \dots V^{(r)} \}$ BON de $Ker(A)^{\perp}$

ii. $\{ U^{(1)} \dots U^{(r)} \}$ BON de $Ran(A)$

↳ equivalentemente: ii'. $\mathbb{P}_{Ran(A)} = \begin{pmatrix} | & & | \\ U^{(1)} & \dots & U^{(r)} \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & \overline{U}^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & \overline{U}^{(r)} & — \end{pmatrix}$

o $\mathbb{P}_{Ran(A)} b = \sum_{k=1}^{r} \langle b, U^{(k)} \rangle U^{(k)}$

demostración: ejercicio

teorema: sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A = U\Sigma V^*$

sea $r = rg(A)$ y sea $b \in \mathbb{C}^m$

$$\Rightarrow \boxed{x(b) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k} \langle b, U^{(k)} \rangle V^{(k)}}$$ es la única solución al problema $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados I y II.

demostración:

$$A\,x(b) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x(b), V^{(k)} \rangle U^{(k)}$$ (por la proposición, 2))

$$= \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \left\langle \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{\sigma_l} \langle b, U^{(l)} \rangle V^{(l)}, V^{(k)} \right\rangle U^{(k)}$$

linealidad del producto escalar

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \frac{\sigma_k}{\sigma_l} \langle b, U^{(l)} \rangle \underbrace{\langle V^{(l)}, V^{(k)} \rangle}_{\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}} U^{(k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \langle b, U^{(k)} \rangle U^{(k)} = \mathbb{P}_{Ran(A)}\, b$$ (por el corolario ii!)

. si $b \in Ran(A) \rightarrow A\,x(b) = b$

- si $Ker(A) = \{0\}$: $x(b)$ única solución del sistema
- si $Ker(A) \neq \{0\}$: $x = x(b) + w$ es solución $\forall\, w \in Ker(A)$

pero $\|x\|_2^2 = \|x(b)\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \langle x(b), w \rangle + \langle w, x(b) \rangle$

donde $\langle x(b), w \rangle = 0$ porque $x(b) \in (Ker\, A)^{\perp}$

por el corolario i! : $x(b) \in \mathcal{L}(\{V^{(1)} \dots V^{(r)}\})$

$\Rightarrow$ $x(b)$ sol. mínimos cuadrados II

- si $b \notin \operatorname{Ran}(A) \Rightarrow A\,x(b) = \mathbb{P}_{\operatorname{Ran}(A)} b$
  - si $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$: A tiene rg max
    y $x(b)$ es la única sol. mínimos cuadrados I
  - si $\operatorname{Ker}(A) \neq \{0\}$: $\underline{x} = x(b) + w$, $w \in \operatorname{Ker}(A)$
    cumple $\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|A x' - b\|_2 \quad \forall x' \in \mathbb{C}^m$:
    el problema mínimos cuadrados I tiene ∞ sol.

    pero tiene 1 sola de mínima $\|x\|_2$:

$$\|\underline{x}\|_2^2 = \|x(b)\|_2^2 + \|w\|_2^2 \quad \text{como antes : } \begin{cases} x(b) \perp \operatorname{Ker}(A) \\ w \in \operatorname{Ker}(A) \end{cases}$$

problema mixto I y II

$$\Rightarrow x(b) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{entre todos los argmin de } \|Ax-b\|_2 \text{ probl. I}}}{\operatorname{argmin}} \|x\|_2 \quad \text{probl. II}$$

#

resumen / comentarios:

- el problema mixto I y II, resuelto por $x(b)$ de este teorema usando SVD, es el de
  buscar $x \in \mathbb{C}^m$ que tiene mínima norma $\|x\|_2$
  entre todos los $x \in \mathbb{C}^m$ que minimizan $\|Ax - b\|_2$
- si el minimizador (argmin) de $\|Ax-b\|_2$
  es único $\Rightarrow x(b)$ es la única sol. del problema I
  $\hookrightarrow \boxed{\operatorname{Ker}(A) = \{0\}}$
- si existe solución de $Ax = b \Rightarrow x(b)$ es la única
  sol. del problema II $\quad \hookrightarrow \boxed{b \in \operatorname{Ran}(A)}$
- si $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ y $b \in \operatorname{Ran}(A)$ (por ejemplo si A es invertible)
  $\Rightarrow x(b)$ es la única solución del sistema $Ax = b$.