HOJA DE EJERCICIOS 12
Análisis Matemático. (Grupo 130)
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Comprueba directamente que $\phi^* d\omega = d(\phi^*\omega)$:

$$\phi(u,v,w) \;\equiv\; \big(\, e^u \,,\, u^3 v \,,\, w \,\big) \quad , \quad \omega \;=\; z\,dx\wedge dy + xy\,dz\wedge dx + (y-z)\,dy\wedge dz \;.$$

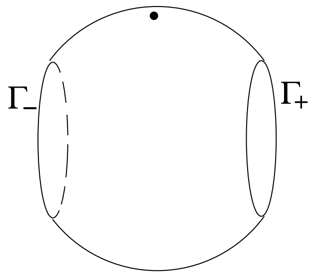
Problema 2. Determina el valor de la constante a para el que ω es cerrada. Para ese valor de a, halla una forma de Pfaff μ tal que $d\mu = \omega$. ¿Existe μ para otros valores de a?

$$\omega \;=\; \big(\, 1 + a\,z\,e^{yz} \,\big)\,dx\wedge dy + \big(\, 1 - y\,e^{yz} \,\big)\,dx\wedge dz + (2y + z + \operatorname{sen} z)\,dy\wedge dz \;.$$

Problema 3. (Examen de enero 2020). Consideramos la siguiente superficie:

$$S \;=\; \big\{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1 \,,\; |y|\le 1/2 \,\big\}\;,$$

orientada por la normal N cuyo valor en el punto $p=(0,0,1)$ (señalado en el dibujo) es $N(p) = (0,0,1)$.



a) Determina las curvas Γ_+, Γ_- que forman el borde de S: su posición, forma y tamaño.

b) En cada curva del borde, elige un punto en el que sea fácil determinar una conormal exterior a la superficie. Utiliza el resultado para calcular la orientación inducida en el borde ∂S por la orientación de la superficie definida por N.

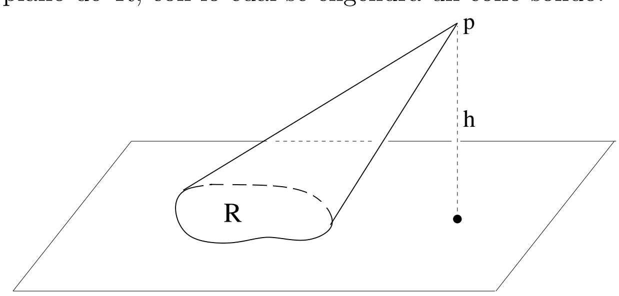
c) Para cada función $h(x,y,z)$, de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$, sea ω_h la siguiente forma de Pfaff:

$$\omega_h \;=\; (2y+3)\,z\,dx + h(x,y,z)\,dy + 3x(4y^2-1)\,dz \;.$$

Calcula la diferencial exterior $d\omega_h$ (dejando indicada su dependencia de h).

d) Demuestra que el valor de $\displaystyle\int_S d\omega_h$ es independiente de h y calcula explícitamente dicho valor.

Problema 4. Cada punto de una región plana R lo unimos, con un segmento rectilíneo, a un punto fijado p que está a altura h sobre el plano de R, con lo cual se engendra un cono sólido.



Utiliza un campo de velocidades adecuado, y la divergencia, para calcular el volumen del cono en términos de h y el área de R.

Problema 5. Sea F un campo de vectores en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Demuestra la fórmula:

$$\mathbf{rot}\, F \;=\; \Big(\operatorname{div}(F \times \mathbf{e}_1)\,,\, \operatorname{div}(F \times \mathbf{e}_2)\,,\, \operatorname{div}(F \times \mathbf{e}_3)\Big)\,.$$

Utilízala para demostrar que $\operatorname{div}(F \times \mathbf{c}) = (\mathbf{rot}\, F) \cdot \mathbf{c}$ para todo vector constante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

Problema 6. Un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **estrellado** si existe un punto $p \in U$ tal que para todo $q \in U$ el segmento de recta que une p con q está contenido en U.

1. Demuestra que si U es estrellado entonces toda forma de Pfaff cerrada en U es exacta en U.
2. Demuestra que el dominio plano $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty) \times \{0\})$ es estrellado. ¿Es convexo?
3. Haciendo un poco de trigonometría, demuestra que la siguiente aplicación es biyectiva
$$\varphi : (0,+\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow U_2 \quad , \quad \varphi(r,\theta) \;=\; \big(\, r\cos\theta\,,\, r \operatorname{sen}\theta\,\big)\,,$$
y demuestra que su inversa es suave.
4. Dada $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, calcula $\varphi^*\omega$ y utiliza las propiedades del pullback para describir una función $h : U_2 \to \mathbb{R}$ tal que $dh = \omega$ en U_2.
5. Utiliza esa h, y la proposición 142 de los apuntes (página 100) para demostrar que ω no es exacta en el plano perforado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Problema 7. Recordemos que, dado $F = (F_1, F_2, F_3)$, la 2-forma "efe becuadro" en $\mathbb{R}^3$ esta dada por

$$(F^\natural)_p\,(v,w) \;=\; \det\big[\; F(p) \;\big|\; v \;\big|\; w \;\big]\,,$$

o de manera equivalente

$$F^\natural \;=\; F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy\,.$$

1. Sea $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ el radio esférico. Demuestra que para cualquier esfera S, centrada en el origen y orientada por la normal exterior, se tiene $\displaystyle\int_S \left(\frac{\nabla\rho}{\rho^2}\right)^{\natural} = 4\pi$.
2. Consideramos ahora los puntos $p = (1,0,0)\,,\, q = (-1,0,0)$, los radios esféricos respectivos
$$\rho_1 \;=\; \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \quad , \quad \rho_2 \;=\; \sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}\,,$$
y la 2-forma $\Omega \;=\; 5\left(\dfrac{\nabla\rho_1}{\rho_1^2}\right)^{\natural} - 2\left(\dfrac{\nabla\rho_2}{\rho_2^2}\right)^{\natural}$ definida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{p,q\}$.
Si $R \subset \mathbb{R}^3$ es una región sólida, cuyo borde ∂R no toca a p ni a q y está orientado por la normal exterior, dí razonadamente qué valores puede tener $\displaystyle\int_{\partial R} \Omega$.

Problema 8. Vamos a demostrar el teorema fundamental del Álgebra. Consideramos un polinomio

$$p(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad p(z) \;\equiv\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\,,$$

con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$.

1. Demuestra que para r grande el lazo
$$\alpha_r(\theta) \;\equiv\; p\,\big(\, r\cos\theta\,,\, r\operatorname{sen}\theta\,\big) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$
se pede deformar suavemente al lazo
$$\beta_r(\theta) \;\equiv\; a_n \cdot \big(\, r^n\cos(n\theta)\,,\, r^n\operatorname{sen}(n\theta)\,\big) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$
mediante un deformación de lazos que jamás toca el punto $0 \in \mathbb{C}$. Determina el número $I = \displaystyle\int_{\alpha_r} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ para esos valores grandes de r.
2. Ahora procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que hubiese un polinomio no constante $p(z)$ que no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$. Deduce que entonces el lazo α_r se podría deformar suavemente, a través de lazos que nunca tocan el punto 0, a un lazo constante ¿cuál tendría que ser entonces el valor de I?
