ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Problemas. 30 de Noviembre.

Ejercicio 8. Hoja 5. Demuestra que un cuerpo no tiene divisores de cero.

Solución:

Supongamos que $a \in K$ es un divisor de cero, no nulo, entonces existe $b \in K$ no nulo tal que $a \cdot b = 0$. Como $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Por tanto, se tiene que

$$0 = a \cdot b \implies 0 = a^{-1} \cdot a \cdot b \implies b = 0\,,$$

dando lugar a una contradicción.

Ejercicio 9. Hoja 5. Sea A un anillo finito y sea $0 \neq a \in A$. Demuestra que la aplicación $f_a : A \to A$ definida por $f_a(x) = ax$ es biyectiva si y sólo si a no es un divisor de cero. Deduce que en un anillo finito todo elemento no nulo es o bien una unidad o bien un divisor de cero. Observa, en particular, que un anillo finito es un dominio si y solo si es un cuerpo.

Solución:

($\implies$) Supongamos que f_a es una aplicación biyectiva. Entonces $f_a(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por tanto, $ax \neq 0$, para todo $x \in A \backslash \{0\}$, es decir, a no es un divisor de cero.

($\impliedby$) Supongamos que a no es un divisor de cero. Veamos que f_a es una aplicación biyectiva:

- Sean $x, y \in A$ tales que $f_a(x) = f_a(y)$, entonces

  $$ax = ay \Rightarrow ax - ay = 0 \Rightarrow a(x-y) = 0.$$

  Como a no es divisor de cero, necesariamente se tiene $x - y = 0$, es decir, $x = y$. Por lo que, f_a es inyectiva.

- Como f_a es una aplicación inyectiva entre conjuntos finitos del mismo cardinal, necesariamente f_a es sobreyectiva.

Deducimos que en un anillo finito, todo elemento no nulo es una unidad o un divisor de cero. Supongamos que a no es un divisor de cero, entonces f_a es biyectiva. Por tanto, existe $x \in A$ tal que $f_a(x) = 1$, es decir, tal que $ax = 1$. Por tanto, a es una unidad.

Un anillo A es un dominio si y solo si ningún elemento no nulo es divisor de cero. Por lo que hemos visto antes, esto es equivalente a que todos los elementos no nulos de A sean unidades, es decir, A es un cuerpo.

Ejercicio 10. Hoja 5. Sea A un anillo. demuestra que el conjunto $U(A) = A^*$ de sus unidades es un grupo respecto de la multiplicación. Comprueba que este hecho es coherente con los resultados que has obtenido en el ejercicio 4.

Solución:

(G0) El producto de dos unidades es una unidad. Sean $a, b \in A^*$

$$b^{-1}a^{-1} \in A \quad \text{y} \quad (ab)(b^{-1}a^{-1}) = aa^{-1} = 1\,.$$

(G1) El producto es asociativo en A, por lo que, también lo es en A^*.

(G2) El elemento identidad es una unidad en A.

(G3) El elemento inverso de $a \in A^*$ pertenece a A^*, puesto que $a^{-1}a = 1$.

Ejercicio 11. Hoja 5. Demuestra que si A es un dominio, entonces $A[X]$ también lo es.

Solución:

Sean $p(X), q(X) \in A[X]$ con $p(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, $q(X) = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m$. Supongamos que $p(X)$ y $q(X)$ son elementos no nulos de grado n y m respectivamente, es decir, $a_n, b_m \neq 0$. El término de grado $m+n$ del polinomio $p(X) \cdot q(X)$ es $a_nb_mX^{n+m}$. Como A es un dominio, tenemos que $a_nb_m \neq 0$, por lo que, $a_nb_mX^{n+m} \neq 0$ y en consecuencia, $p(X) \cdot q(X) \neq 0$. Por tanto, no existen divisores de cero en $A[X]$ y concluimos que $A[X]$ es un dominio.

Ejercicio 12. Hoja 5. Si R_1 y R_2 son dos anillos demuestra que $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.

Solución:

$$\begin{aligned}(a,b) \in (R_1 \times R_2)^* &\Leftrightarrow \exists (a',b') \in (R_1, R_2)\,:\,(a,b)(a',b') = (1_{R_1}, 1_{R_2})\\ &\Leftrightarrow \exists a' \in R_1,\, b' \in R_2\,:\,aa' = 1_{R_1}\,,\, bb' = 1_{R_2}\\ &\Leftrightarrow a \in R_1^*,\, b \in R_2^*\end{aligned}$$

Ejercicio 13. Hoja 5. Calcula el número de unidades del anillo finito $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, e indica cuántos divisores de cero tiene.

Solución:

Por el ejercicio 12, sabemos que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$. Por tanto, hay

$$\varphi(8)\varphi(10) = \varphi(2^3)\varphi(2)\varphi(5) = 2^{3-1}(2-1)(2-1)(5-1) = 16\text{unidades}\,.$$

Por el ejercicio 9, sabemos que todo elemento no nulo es una unidad o un divisor de cero. Como el anillo tiene $(8 \cdot 10) - 1 = 80 - 1 = 79$ elementos no nulos y 16 unidades, existen $79 - 16 = 63$ divisores de cero.

Ejercicio 14. Hoja 5. Sea R un anillo e I un ideal de R. Demuestra que los siguientes subconjuntos de R son ideales de R.

1. $Rad(I) := \{a \in R : a^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$ (el radical de I). (¿Quién es $Rad(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (X^3) \subset \mathbb{R}[X]$?)
2. $Ann(I) := \{a \in R : ax = 0$ para todo $x \in I\}$ (el anulador de I). (¿Quién es $Ann(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (\overline{2}) \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?)

Solución:

(i) Comprobamos que $\mathrm{Rad}(I)$ es cerrado para la suma. Para todo $a, b \in \mathrm{Rad}(I)$, con $a^n, b^m \in I$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+m} &= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} a^i b^{n+m-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+m}{i} a^i b^{n+m-i} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{i} a^i b^{n+m-i} \\ &= b^m \sum_{i=0}^{n} \binom{n+m}{i} a^i b^{n-i} + a^n \sum_{i=n}^{n+m} \binom{n+m}{i} a^{n-i} b^{n+m-i} \in I.\end{aligned}$$

Usando en la inclusión que $a^n, b^m \in I$. Por tanto, $a + b \in \mathrm{Rad}(I)$. Por ser I un ideal, se tiene que $0 \in I$, por lo que, $0 \in \mathrm{Rad}(I)$. Finalmente, comprobamos que se cumple la propiedad de absorción. Para todo $r \in R$ y $a \in \mathrm{Rad}(I)$, con $a^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(ar)^n = a^n r^n \in I,$$

es decir, $ar \in \mathrm{Rad}(I)$. Por tanto, $\mathrm{Rad}(I)$ es un ideal de R.

El ideal $I = (4) \subseteq \mathbb{Z}$ está formado por todos los múltiplos enteros de 4. Un elemento $a \in \mathbb{Z}$ pertenece a $\mathrm{Rad}(I)$ si $a^n \in (4)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, si alguna potencia de a es múltiplo entero de 4. Esto ocurre si y solo si $a = 0$ o el primo 2 aparece en la descomposición en primos de a, es decir, si 2 divide a a. Por tanto, $\mathrm{Rad}(I) = (2)$.

El ideal $I = (X^3) \subseteq \mathbb{R}[X]$ está formado por todos los múltiplos de X^3 en $\mathbb{R}[X]$. Un polinomio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ pertenece a $\mathrm{Rad}(I)$ si $(p(X))^n \in (X^3)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, si alguna potencia de $p(X)$ es múltiplo de X^3. Esto ocurre si y solo si $p(X) = 0$ o el monomio X aparece en la descomposición en factores irreducibles de $p(X)$ en $\mathbb{R}[X]$, es decir, si X divide a $p(X)$. Por tanto, $\mathrm{Rad}(I) = (X)$.

(ii) Comprobamos que $\mathrm{Ann}(I)$ es cerrado para la suma. Para todo $a, b \in \mathrm{Ann}(I)$ y para todo $x \in I$, se tiene que

$$(a+b)(x) = ax + bx = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $a + b \in \mathrm{Ann}(I)$. Es claro que $0 \cdot x = 0$, para todo $x \in I$, por lo que, $0 \in \mathrm{Ann}(I)$. Finalmente, comprobamos que se cumple la propiedad de absorción. Para todo $r \in R$, $a \in \mathrm{Ann}(I)$ y $x \in I$, se tiene que

$$(ar) \cdot x = arx = r \cdot ax = r \cdot 0 = 0,$$

es decir, $ar \in \mathrm{Ann}(I)$. Por tanto, $\mathrm{Ann}(I)$ es un ideal de R.

El ideal $I = (4) \subseteq \mathbb{Z}$ está formado por todos los múltiplos enteros de 4. Un elemento $a \in \mathbb{Z}$ pertenece a $\mathrm{Ann}(I)$ si $a \cdot x = 0$ para todo $x \in (4)$, es decir, si todos los múltiplos enteros de 4 se anulan al multiplicarlos por a. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad, puesto que $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Por tanto, $\mathrm{Ann}(I) = (0)$.

El ideal $I = (\bar{2}) \subseteq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ está formado por las clases módulo 6 de todos los múltiplos enteros de 2. Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ pertenece a $\mathrm{Ann}(I)$ si $\bar{a} \cdot \bar{k} = \bar{0}$, para todo $\bar{k} \in I$, es decir, si el producto de a por cada múltiplo entero de 2 es un múltiplo de 6. Esto ocurre si y solo si a es un múltiplo entero de 3. Por tanto, $\mathrm{Ann}(I) = (\bar{3})$.

Ejercicio 15. Hoja 5. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Demuestra lo siguiente:

(a) Si I es un ideal de R entonces, $I = R \leftrightarrow$ existe una unidad de R en I.

(b) R es un cuerpo $\leftrightarrow \{0\}$ es el único ideal propio de R.

Solución:

(a) ($\Leftarrow$) Supongamos que $I = R$, entonces 1 es una unidad que pertenece a R.

($\Rightarrow$) Sea $a \in I$ una unidad. Entonces $aa^{-1} = 1 \in I$. Por tanto, todo $r = r \cdot 1 \in I$, es decir, $I = R$.

(b) ($\Leftarrow$) Supongamos que R es un cuerpo, entonces todo elemento no nulo es una unidad. Por tanto, todo ideal no trivial contiene alguna unidad. En consecuencia, el ideal es el anillo. Concluimos que el único ideal propio del anillo es el trivial.

($\Rightarrow$) Supongamos que R no es un cuerpo, entonces existe un elemento no nulo $x \in R$ que no tiene inverso. Consideramos el ideal generado por este elemento, $(x) = \{r \cdot x \colon r \in R\}$. Como $x \neq 0$, el ideal (x) no es trivial. Si el ideal coincidiera con el anillo, entonces existiría $r \in R$ tal que $x \cdot r = 1$, dando lugar a una contradicción.

Ejercicio 16. Hoja 5. Sean los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$ con $i = 1, 2$. Para $i = 1, 2$, se pide:

(a) Escribe todos los elementos de R_i;

(b) Decide si los anillos R_i son dominios o cuerpos, y si los ideales $2A_i$ son primos o maximales.

Solución:

(a) ($i = 1$) Recordamos que $\overline{a + b\sqrt{3}} = \overline{c + d\sqrt{3}}$ si y sólo si $(a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in 2A_1$, es decir, si $a - c, b - d \in 2\mathbb{Z}$, equivalentemente, $[a - c]_2 = [0]_2$ y $[b - d]_2 = [0]_2$. Por tanto, se tiene que

$$\overline{a + b\sqrt{3}} = \overline{c + d\sqrt{3}} \iff [a]_2 = [c]_2, \quad [b]_2 = [d]_2$$

Existen dos clases de equivalencia módulo 2, por lo que, tenemos cuatro elementos en R_1:

$$\overline{0} = \overline{a + b\sqrt{3}} \quad \text{con } [a]_2 = [b]_2 = [0]_2 \qquad \overline{1} = \overline{a + b\sqrt{3}} \quad \text{con } [a]_2 = [1]_2,\ [b]_2 = [0]_2,$$

$$\overline{\sqrt{3}} = \overline{a + b\sqrt{3}} \quad \text{con } [a]_2 = [0]_2,\ [b]_2 = [1]_2, \qquad \overline{1 + \sqrt{3}} = \overline{a + b\sqrt{3}} \quad \text{con } [a]_2 = [b]_2 = [1]_2.$$

($i = 2$) Recordamos que $\overline{a + b\sqrt{2}} = \overline{c + d\sqrt{2}}$ si y sólo si $(a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in 2A_2$, es decir, si $a - c, b - d \in 2\mathbb{Z}$, equivalentemente, $[a - c]_2 = [0]_2$ y $[b - d]_2 = [0]_2$. Por tanto, se tiene que

$$\overline{a + b\sqrt{2}} = \overline{c + d\sqrt{2}} \iff [a]_2 = [c]_2, \quad [b]_2 = [d]_2$$

Existen dos clases de equivalencia módulo 2, por lo que, tenemos cuatro elementos en R_2:

$$\overline{0} = \overline{a + b\sqrt{2}} \quad \text{con } [a]_2 = [b]_2 = [0]_2 \qquad \overline{1} = \overline{a + b\sqrt{2}} \quad \text{con } [a]_2 = [1]_2,\ [b]_2 = [0]_2,$$

$$\overline{\sqrt{2}} = \overline{a + b\sqrt{2}} \quad \text{con } [a]_2 = [0]_2,\ [b]_2 = [1]_2, \qquad \overline{1 + \sqrt{2}} = \overline{a + b\sqrt{2}} \quad \text{con } [a]_2 = [b]_2 = [1]_2.$$

(b) ($i = 1$) Sabemos que todo ideal de R_1 es, a su vez, un subgrupo. Con la estructura de grupo, todos los elementos no triviales de R_1 tienen orden 2. Por lo que, R_1 es isomorfo como grupo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entonces los subgrupos de R_1 son

$$H_0 = \{\overline{0}\}, \quad H_1 = \langle \overline{1} \rangle = \{\overline{0}, \overline{1}\}, \quad H_2 = \langle \overline{\sqrt{3}} \rangle = \{\overline{0}, \overline{\sqrt{3}}\}, \quad H_3 = \langle \overline{1 + \sqrt{3}} \rangle = \{\overline{0}, \overline{1 + \sqrt{3}}\}, \quad H_4 = R_1.$$

Sabemos que los subgrupos H_0 y H_4 son los ideales trivial y total respectivamente. Observamos que H_1 y H_2 no son ideales, puesto que

$$\overline{\sqrt{3}} \cdot \overline{1} = \overline{\sqrt{3}} \notin H_1 \quad \text{y} \quad \overline{\sqrt{3}} \cdot \overline{\sqrt{3}} = \overline{3} = \overline{1} \notin H_2.$$

Sin embargo, H_3 sí es un ideal de R_1, puesto que

$$\overline{0} \cdot \overline{1 + \sqrt{3}} = \overline{1 + \sqrt{3}} \cdot \overline{1 + \sqrt{3}} = \overline{0} \in H_3 \qquad \overline{1} \cdot \overline{1 + \sqrt{3}} = \overline{\sqrt{3}} \cdot \overline{1 + \sqrt{3}} = \overline{1 + \sqrt{3}} \in H_3.$$

Por tanto, los ideales de R_1 son $\{\overline{0}\}$, $H_3 = \langle \overline{1 + \sqrt{3}} \rangle$ y R_1. Como tiene un ideal propio no trivial, R_1 no es un cuerpo. Además, hemos visto que $\overline{1 + \sqrt{3}}$ es un divisor de cero, por lo que, R_1 no es un dominio. De hecho, para lo que pide el ejercicio, basta con observar eso. De esta forma, concluimos que $2A_1$ no es primo ni maximal.

($i = 2$) Sabemos que todo ideal de R_2 es, a su vez, un subgrupo. Con la estructura de grupo, todos los elementos no triviales de R_2 tienen orden 2. Por lo que, R_2 es isomorfo como grupo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entonces los subgrupos de R_2 son

$$H_0 = \{\overline{0}\}, \quad H_1 = \langle \overline{1} \rangle = \{\overline{0}, \overline{1}\}, \quad H_2 = \langle \overline{\sqrt{2}} \rangle = \{\overline{0}, \overline{\sqrt{2}}\}, \quad H_3 = \langle \overline{1 + \sqrt{2}} \rangle = \{\overline{0}, \overline{1 + \sqrt{2}}\}, \quad H_4 = R_2.$$

Sabemos que los subgrupos H_0 y H_4 son los ideales trivial y total respectivamente. Observamos que H_1 y H_3 no son ideales, puesto que

$$\overline{\sqrt{2}} \cdot \overline{1} = \overline{\sqrt{2}} \notin H_1 \quad \text{y} \quad \overline{\sqrt{2}} \cdot \overline{1 + \sqrt{2}} = \overline{\sqrt{2}} \notin H_3.$$

Sin embargo, H_2 sí es un ideal de R_2, puesto que

$$\overline{0} \cdot \overline{\sqrt{2}} = \overline{0} \in H_2 \qquad \overline{1} \cdot \overline{\sqrt{2}} = \overline{\sqrt{2}} \in H_2 \qquad \overline{\sqrt{2}} \cdot \overline{\sqrt{2}} = \overline{2} = \overline{0} \in H_2 \qquad \overline{\sqrt{2}} \cdot \overline{1 + \sqrt{2}} = \overline{\sqrt{2}} \in H_2.$$

Por tanto, los ideales de R_2 son $\{\overline{0}\}$, $H_2 = \langle \overline{\sqrt{2}} \rangle$ y R_2. Como tiene un ideal propio no trivial, R_2 no es un cuerpo. Además, hemos visto que $\overline{\sqrt{2}}$ es un divisor de cero, por lo que, R_2 no es un dominio. De hecho, para lo que pide el ejercicio, basta con observar eso. De esta forma, concluimos que $2A_2$ no es primo ni maximal.

Ejercicio 17. Hoja 5. Sea $r \in \mathbb{R}$. Decide si el conjunto $M_r = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(r) = 0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

Solución:

Comprobamos que M_r es un subgrupo de $(\mathcal{C}([0,1]), +)$. Para todo $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, tenemos

$$(f + (-g))(r) = f(r) + (-g)(r) = f(r) - g(r) = 0 - 0 = 0 \implies (f + (-g)) \in M_r\,.$$

Comprobamos que se cumple la propiedad de absorción. Para todo $f \in \mathcal{C}([0,1])$ y $g \in M_r$, tenemos

$$(fg)(r) = f(r)g(r) = f(r) \cdot 0 = 0 \implies fg \in M_r\,.$$

Por tanto, M_r es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

Ejercicio 19. Hoja 5. Consideremos el caso particular del ejercicio 18 en el que el homomorfismo es la aplicación cociente $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(a) = a + I = \overline{a}$.

1. Demuestra que la aplicación $M \longrightarrow \pi^{-1}(M)$ establece una aplicación biyectiva entre los conjuntos {ideales de A/I} e {ideales de A que contienen a I} que tiene como inversa la aplicación $J \longrightarrow \pi(J) = J/I$

2. Demuestra que en esta correspondencia ideales primos corresponden a ideales primos e ideales maximales a ideales maximales.

3. Usa este resultado para encontrar todos los ideales en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y señala entre ellos a los maximales.

Solución:

(a) Sea f : {ideales de A/I} $\to$ {ideales de A que contienen a I} la aplicación dada por $f(M) = \pi^{-1}(M)$. Por el Ejercicio 18 (b), sabemos que $\pi^{-1}(M)$ es un ideal de A, que contiene a I, puesto que $\bar{I} \in M$ por ser M un ideal de A/I. Por tanto, f está bien definida. Queremos definir una inversa para f. Sea g : {ideales de A que contienen a I} $\to$ {ideales de A/I} la aplicación dada por $\pi(J) = J/I$. Por el Ejercicio 18 (c), sabemos que $\pi(J)$ es un ideal de A/I. Por lo que, g está bien definida.

Veamos que $f \circ g = \text{id}$. Para todo ideal $J \subseteq A$ que contiene a I, se tiene

$$(f \circ g)(J) = f(\pi(J)) = \{a \in A \colon a + I \in \pi(J)\} = \{a \in A : a + I = b + I \text{ para algún } b \in J\}.$$

Es claro que $J \subseteq (f \circ g)(J)$. Por otro lado, tenemos que $a \in b + I$ con $b \in J$ implica $a - b \in I \subseteq J$. Como $b \in J$, concluimos que $a \in J$. Por tanto, $(f \circ g)(J) = J$.

Así mismo, veamos que $g \circ f = \text{id}$. Para todo ideal $M \subseteq A/I$, tenemos que

$$(g \circ f)(M) = g(\pi^{-1}(M)) = \{a + I \colon a \in \pi^{-1}(M)\} = \{a + I \colon a + I \in M\} = M.$$

Por tanto, f y g son inversas una de la otra y tenemos una biyección entre el conjunto de ideales de A/I y el conjunto de ideales de A que contienen a I.

(b) Supongamos que J es un ideal primo de A que contiene a I. Sean K/I y L/I ideales de R/I tales que $(K/I)(L/I) \subseteq J/I$. Por el apartado (a), K/I se corresponde con el ideal K de A que contiene a I y el ideal L/I se corresponde con L. Entonces $(K/I)(L/I) = (KL)/I \subseteq J/I$. Por la correspondencia que probamos en (a), tenemos $KL \subseteq J$, por lo que $K \subseteq J$ o $L \subseteq J$. Por tanto, $K/I \subseteq J/I$ o $L/I \subseteq J/I$. Probando así que J/I es un ideal primo. Recíprocamente, si J/I es un ideal primo y K y L son ideales tales que $KL \subseteq J$, entonces $K + I$ y $L + I$ son ideales que contienen a I, tales que $(K + I)(L + I) = KL + KI + IL + I^2 \subseteq KL + I \subseteq KL + J = J$. Por lo que, $(K + I)/I$ y $(L + I)/I$ son ideales de R/I cuyo producto está contenido en J/I. Entonces $K + I \subseteq J$ o $L + I \subseteq J$. Pero $K \subseteq K + I$ y $L \subseteq L + I$, por lo que, $K \subseteq J$ o $L \subseteq J$. Es decir, J es primo.

Supongamos que J es un ideal maximal de A que contiene a I, es decir, no existe ningún ideal propio K tal que $J \subsetneq K$. Por contradicción, supongamos que J/I no es maximal, entonces existe un ideal K/I tal que $J/I \subsetneq K/I$. Entonces $J + I \subsetneq K + I$. Pero $I \subseteq J \subseteq K$, por lo que $J \subsetneq K$, dando lugar a una contradicción. Por tanto, J/I es maximal. Recíprocamente, si J/I es un ideal maximal de A/I, no existe ningún ideal propio K/I tal que $J/I \subsetneq K/I$. Por contradicción, si J no fuera maximal, existiría un ideal propio K tal que $J \subsetneq K$. Lo que implicaría que $J/I \subsetneq K/I$, siendo K/I un ideal propio. Esto es una contradicción. Por tanto, J es maximal.

(c) Los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$, para cualquier entero m. Por el apartado anterior, los ideales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se corresponden con los ideales $m\mathbb{Z}$ que contienen a $n\mathbb{Z}$. Observamos que $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ equivale a que todo múltiplo entero de n se pueda expresar como múltiplo entero de m, o lo que es lo mismo, m divide a n. Por tanto, los ideales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son de la forma $(\bar{m})$, con m un entero que divide a n.

Usando la correspondencia del apartado anterior, podemos comprobar que los ideales maximales de A/I se corresponden biyectivamente con los ideales maximales de A que contienen a I. Sabemos que los ideales maximales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $p\mathbb{Z}$, para cualquier primo p. Por tanto, los maximales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son de la forma $(\bar{p})$, con p cualquier primo que divide a n.

El conjunto de ideales de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ es $\{(\bar{0}), (\bar{4}), (\bar{2}), \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$, de ellos, el único maximal es $(\bar{2})$. Mientras que el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ es $\{(\bar{0}), (\bar{5}), (\bar{2}), \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\}$, de ellos, son maximales $(\bar{2})$ y $(\bar{5})$.