5.5. CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO (CUÁDRICAS)

Superficie de segundo grado (en $\mathbb{R}^3$):

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz+a_1x+a_2y+a_3z+a=0 \quad (1)$$

Queremos averiguar qué tipo de superficie representa la ecuación (1). Puede ser un plano $a_1x+a_2y+a_3z+a=0$, o dos planos $(a_1x+a_2y+a_3z+a)(b_1x+b_2y+b_3z+b)=0$, o un punto: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ es el punto $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. En general aparecerán superficies en $\mathbb{R}^3$ que se llaman <u>cuádricas</u>.

<u>NOTACIÓN 1</u> Con
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33}\end{pmatrix}$$

y $L(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, (1) se escribe

$$f(x,y,z) = \underbrace{(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\text{forma cuadrática}} + L(x,y,z)+a=0 \qquad (2)$$

<u>NOTACIÓN 2</u>. Con
$$\bar{A}=\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a_1/2 \\ a_2/2 \\ a_3/2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 \end{matrix} & a \end{array}\right)$$

podemos escribir

$$f(x,y,z)=(x,y,z,1)\,\bar{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

——————— x ———————

Como $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz$ es una forma cuadrática, sabemos (Tema 2) que en una base ortonormal $\beta_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ puede escribirse como

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2$$

donde $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ son los autovalores de A con $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ autovectores correspondientes. Observar que la matriz $C=(\vec{u}_1\,|\,\vec{u}_2\,|\,\vec{u}_3)$ del cambio de base es ortogonal. En esta nueva base (1) se reduce a

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b = 0. \qquad (4)$$

Pueden presentarse los casos:

I) Todos los λ_i son distintos de cero

II) Uno de los λ_i es cero (y solo uno)

III) Dos de los λ_i son cero (y solo dos)

—— x ——

<u>CASO I</u> Completar cuadrados en (4):

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z_1 + \frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2 = C$$

La traslación

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}, \quad z_2 = z_1 + \frac{b_3}{2\lambda_3}$$

permite escribir (4) como

$$\boxed{\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = C} \qquad (5)$$

Esta ecuación representa una superficie con centro en (0,0,0) (es decir es simétrica respecto al centro).

—— x ——

Para calcular C se puede recurrir a los invariantes de (1), como hicimos con las secciones cónicas.

Def 1. Un invariante de la superficie (1) es cualquier expresión de sus coeficientes que no varíe al hacer un cambio de sistema de referencia ortonormal en $\mathbb{R}^3$

Una demostración similar a ~~como~~ la demostración del Teorema 1 de la sección 5.4. produce los siguientes invariantes:

<u>Teorema 2</u>. Son invariantes de la superficie de segundo grado dada en (1) los siguientes:

$$\delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = |\bar{A}| = \left|\begin{array}{ccc|c} & A & & a_1/2 \\ & & & a_2/2 \\ & & & a_3/2 \\ \hline a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{array}\right|$$

NOTA: Puede probarse, usando el polinomio característico de A, que también son invariantes de (1) los siguientes:

$$\begin{cases} S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{traza}(A) \\ S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix} . \end{cases}$$

No los usaremos en esta presentación. Sirven para clasificar casos especiales de cuádricas.

——— x ———

Para calcular c' en (5) observamos:

$$\delta = |A| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

y

$$\Delta = |\bar{A}| = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -c' \end{array}\right| = -c'\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c'|A| = -c'\delta .$$

luego

$$\boxed{c' = -\frac{\Delta}{\delta}} \qquad (\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0) \qquad (6)$$

——— x ———

En (5) hay que distinguir dos casos

I.1) $c' \neq 0 \ (\Leftrightarrow \Delta \neq 0)$

I.2) $c' = 0 \ (\Leftrightarrow \Delta = 0)$

——— x ———

En el caso I.1 ($C' \neq 0$) se divide entre C' en (5):

$$\pm \frac{x_2^2}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} \pm \frac{z_2^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

con

$$a = \sqrt{\frac{|C'|}{|\lambda_1|}}, \quad b = \sqrt{\frac{|C'|}{|\lambda_2|}}, \quad d = \sqrt{\frac{|C'|}{|\lambda_3|}},$$

los "semiejes" de la superficie.

Excluyendo el caso de que todos los términos sean negativos en (6), que no producen soluciones, y reordenando, si es necesario, solo hay que considerar las siguientes posibilidades:

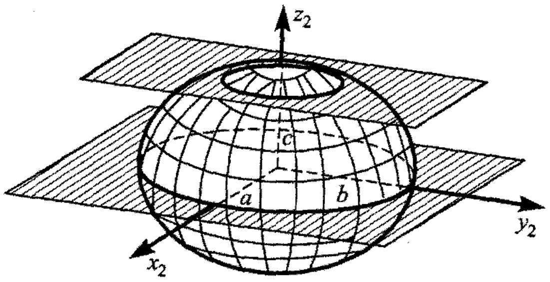
$$\text{I.1 a)} \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

$$\text{I.1 b)} \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

$$\text{I.1. c)} \quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1 .$$

I.1. a) $\quad \dfrac{x_2^3}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} + \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1 \qquad$ (Elipsoide)

- $z_2 = d \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1 - \dfrac{d^2}{c^2}$ elipses si $|d| < |c|$
- $y_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ elipse
- $x_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{y_2^2}{b^2} + \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ elipse

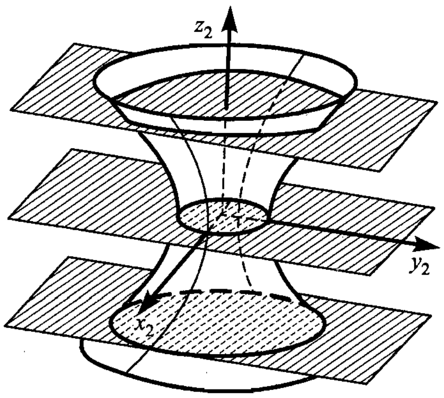


$$\boxed{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1}$$

Figura 13.1 Elipsoide.

I.1 b) $\dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} - \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ (Hiperboloide de una hoja)

- $z_2 = d \Rightarrow \dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1 + \dfrac{d^2}{c^2}$ elipses
- $y_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_2^2}{a^2} - \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ hipérbola
- $x_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{y_2^2}{b^2} - \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ hipérbola

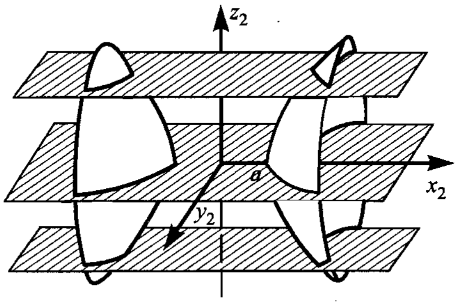


$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

Figura 13.2 Hiperboloide de una hoja.

I.1 c) $\dfrac{x_2^2}{a^2} - \dfrac{y_2^2}{b^2} - \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ (Hiperboloide de dos hojas)

- $z_2 = d \Rightarrow \dfrac{x_2^2}{a^2} - \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1 + \dfrac{d^2}{c^2}$ hipérbolas
- $y_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_2^2}{a^2} - \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1$ hipérbola
- $x_2 = d \Rightarrow \dfrac{y_2^2}{b^2} + \dfrac{z_2^2}{c^2} = \dfrac{d^2}{a^2} - 1$ elipses si $|d| > |a|$



$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

Figura 13.3 Hiperboloide de dos hojas.

En el caso I.2 $(C=0 \Leftrightarrow \Delta=0)$, la ecuación (5) se escribe

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = 0$$

Si todos los λ_i son positivos o todos son negativos se obtiene un punto. En el resto de los casos podemos suponer dos positivos y uno negativo p.e. $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ y $\lambda_3<0$. Dividiendo entre λ_3 se obtiene

$$\boxed{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = z_2^2} \quad (7) \quad \left(a^2 = \frac{|\lambda_3|}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{|\lambda_3|}{\lambda_2} \right)$$

(Un cono)

- $z_2 = d \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = d^2$ elipses (excepto para $d=0$ que es un punto)
- $x_2 = 0 \Rightarrow y_2^2 = b^2 z_2^2 \Leftrightarrow y_2 = \pm b z_2$ Dos rectas
- $y_2 = 0 \Rightarrow x_2^2 = a^2 z_2^2 \Leftrightarrow x_2 = \pm a z_2$ Dos rectas

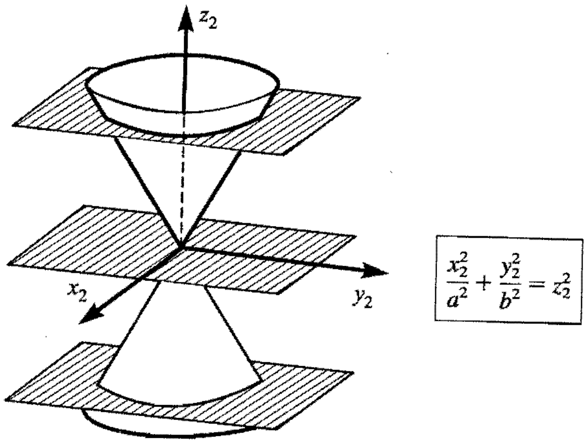


Figura 13.4 Cono.

Una cuádrica $f(x,y,z)=0$ tiene centro $C = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ si

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(-x+\alpha, -y+\beta, -z+\gamma) = 0,$$

es decir, si un punto es de la superficie, su simétrico respecto a C también lo es.

Si una cuádrica tiene centro $C = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, cuando se hace la traslación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

el nuevo centro es $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, en las nuevas coordenadas

$$f(x', y', z') = 0 \iff f(-x', -y', -z') = 0$$

Escribiendo $f(x', y', z') = (x', y', z')A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + L(x', y', z') + a'$, la equivalencia anterior produce

$$0 = (-x', -y', -z')A'\begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} + L(-x', -y', -z') + a' = (x', y', z')A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + L(-x', -y', -z') + a'$$

y restando ambas expresiones se obtiene

$$L(x', y', z') = L(-x', -y', -z')$$

Como $L(x', y', z') = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z'$ se deduce

$$2b_1 x' + 2b_2 y' + 2b_3 z' = 0.$$

Todos los puntos de una cónica con centro C_0 satisfacen esta ecuación de un plano. Como las cónicas del caso I no son planos, se ha de tener

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0,$$

es decir, la parte lineal de $f(x', y', z') = 0$ debe tener coeficientes nulos.

Usando el polinomio de Taylor tenemos, con $C = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$0 = f(x, y, z) = f(x' + \alpha, y' + \beta, z' + \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), \frac{\partial f}{\partial z}(C)\right)}_{\nabla f(C)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (x', y', z')A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (7)$$

y por tanto el gradiente de f en C debe ser nulo. Así pues,

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \right\}$$

es un sistema que tiene C como solución. Esta solución es única porque el sistema lineal anterior tiene como matriz de coeficientes $2A$ y $|2A| = 8|A| = 8\delta \neq 0$ para las ~~cónicas de~~ cuádricas de Tipo I.

EJEMPLO A Probar que la superficie de segundo grado

$$x^2+y^2+z^2-4xz-4y+2=0$$

es un hiperboloide de una hoja y hallar su centro y sus ejes.

S/
$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix};\ \delta=|A|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&-3\end{vmatrix}=-3$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-2\\0&1-\lambda&0\\-2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-4(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right]=(1-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda-3\right]$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\boxed{\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&-2\\-2&0&1&0\\0&-2&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&-2&0\\1&0&-2\\-2&0&2\end{vmatrix}=$$

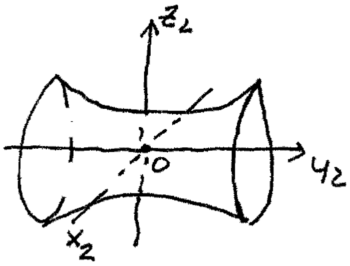
$$=(2-4)\quad -2\times 2\begin{vmatrix}1&-2\\-2&2\end{vmatrix}=-2-4(2-4)=6\neq 0$$

luego una forma canónica es

$$x_2^2-y_2^2+3z_2^2=-\frac{6}{-3}=2$$

$$\frac{x_2^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}+\frac{z_2^2}{2/3}=1$$

$\boxed{\text{Hiperboloide de una hoja}}$



Su centro es la solución de

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x-4z=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2y-4=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=2z-4x=0\end{aligned}\right\}\iff C=(0,2,0)$$

los ejes del hiperboloide de una hoja tienen las direcciones de los autovectores, siendo Oy_2 el principal.

Eje principal (corresponde a $\lambda_2=-1$) : $\vec{u}_2=(1,0,1)$

$\lambda_1=1$: $\vec{u}_1=(0,1,0)$; $\lambda_3=3$: $\vec{u}_3=(1,0,-1)$

Eje principal : $(0,2,0)+t(1,0,1)=(x,y,z)$

$$r\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2 \\ 1 & z \end{pmatrix}=1 \iff \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=z \end{array}\right\} (\ell_2)$$

Eje ℓ_1 corresp. a $\lambda_1=1$:

$$r\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y-2 \\ 0 & z \end{pmatrix}=1 \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} (\ell_1)$$

Eje ℓ_3 corresp a $\lambda_3=3$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2 \\ -1 & z \end{pmatrix}=1 \iff \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=-z \end{array}\right\} (\ell_3)$$

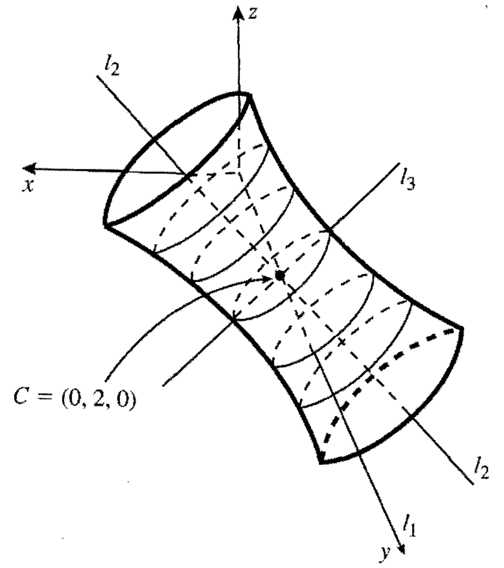


Figura 13.12

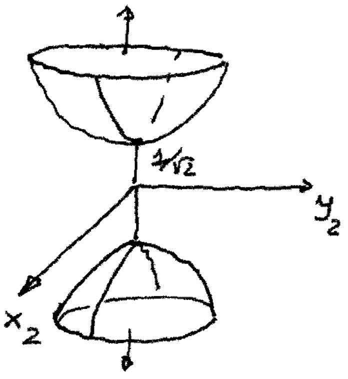
<u>EJEMPLO B</u> Indicar qué superficie representa la cuádrica $y^2+4xz+1=0$ y calcular su centro y sus ejes

S/ $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\delta=|A|=-4\neq 0$; $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

Autovalores de A

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[\lambda^2-4\right] = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2 \ , \ \lambda_3 = -2$$



Forma canónica

$$x_2^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 = -\frac{-4}{-4} = -1$$

$$-x_2^2 - \frac{y_2^2}{2} + \frac{z_2^2}{1/2} = 1$$

Hiperboloide de dos hojas con eje principal en la dirección del $\ker(A-\lambda_3 I)$

Centro

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 4x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad C = (0,0,0)$$

$$\ker(A-I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} = \ell_1$$

$$\ker(A-2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array} \right\} = \ell_2$$

$$\ker(A+2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array} \right\} = \ell_3 \quad \text{(eje principal)}$$

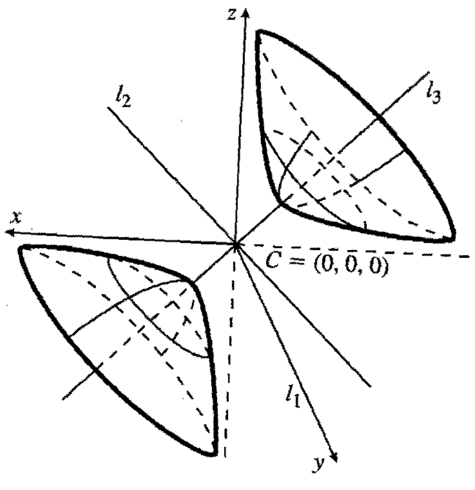


Figura 13.13

<u>CASO II : Uno solo de los λ_i es cero. Tomemos $\lambda_3 = 0$</u>

Completando cuadrados en (4) se obtiene

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_1+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)+b_3 z_1 = c$$

La traslación

$$x_2 = x_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\ ,\quad y_2 = y_1+\frac{b_2}{2\lambda_2}\ ,\quad z_2 = z_1$$

permite escribir (4) como

$$\boxed{\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+b_3 z_2 = c'} \qquad (8)$$

Para calcular b_3 en (8) observamos :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3/2 \\ 0 & 0 & b_3/2 & -c \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2\frac{b_3^2}{4} \Rightarrow b_3^2 = -\frac{4\Delta}{\lambda_1\lambda_2}$$

——— x ———

En (8) se presentan dos casos

II. 1) $b_3 \neq 0$ ($\Leftrightarrow \Delta \neq 0$)

II. 2) $b_3 = 0$ ($\Leftrightarrow \Delta = 0$)

——— x ———

II. 1). Como $b_3 \neq 0$, la traslación $x_3 = x_2$, $y_3 = y_2$, $z_3 = -z_2+\frac{c'}{b_3}$ transforma (8) en

$$\lambda_1 x_3^2+\lambda_2 y_3^2 = b_3 z_3$$

o bien

$$\pm\frac{x_3^2}{a^2}\pm\frac{y_3^2}{b^2} = z_3 \qquad \left(a=\sqrt{\frac{|b_3|}{|\lambda_1|}}\ ,\ b=\sqrt{\frac{|b_3|}{|\lambda_2|}}\right)$$

Solo hay, esencialmente, dos casos:

II.1 a) $\dfrac{x_3^2}{a^2} + \dfrac{y_3^2}{b^2} = z_3$

II.1 b) $\dfrac{x_3^2}{a^2} - \dfrac{y_3^2}{b^2} = z_3$

(El caso de ambos signos negativos es equivalente a a) haciendo la simetría $z_3 = -z_3$; el caso $-, +$ es equivalente a b) haciendo la misma simetría)

II.1a) $\dfrac{x_3^2}{a^2} + \dfrac{y_3^2}{b^2} = z_3$ (Paraboloide elíptico)

- $z_3 = d \Rightarrow \dfrac{x_3^2}{a^2} + \dfrac{y_3^2}{b^2} = d$
  elipses si $d>0$ y un punto si $d=0$
- $y_3 = 0 \Rightarrow x_3^2 = a^2 z_3$
  parábola
- $x_3 = 0 \Rightarrow y_3^2 = b^2 z_3$
  parábola

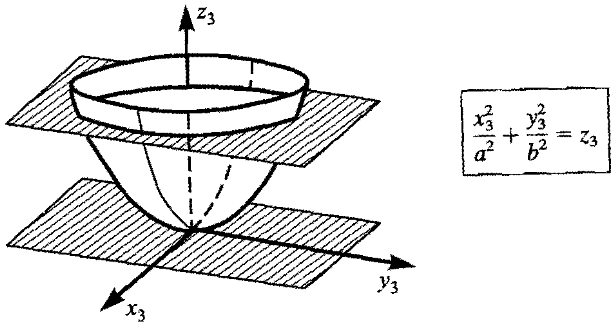


Figura 13.5 Paraboloide elíptico.

II.1 b) $\dfrac{x_3^2}{a^2} - \dfrac{y_3^2}{b^2} = z_3$ (Paraboloide hiperbólico)

- $z_3 = d \Rightarrow \dfrac{x_3^2}{a^2} - \dfrac{y_3^2}{b^2} = d$
  hipérbolas si $d \neq 0$ que cambian de eje principal cuando $d>0$ y $d<0$.
  Si $d=0$, son dos rectas
- $y_3 = 0 \Rightarrow x_3^2 = -a^2 z_3$
  parábola $\cap$
- $x_3 = 0 \Rightarrow y_3^2 = -b^2 z_3$
  parábola $\cap$

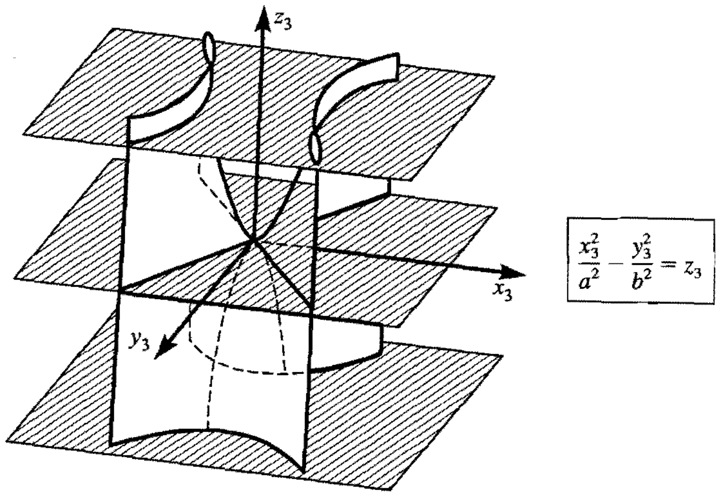


Figura 13.6 Paraboloide hiperbólico.

———— x ————

Supongamos que estamos en el caso II.1, es decir $f(x,y,z)=0$ es un paraboloide (elíptico o hiperbólico). Como sus ejes tienen la dirección de los autovalores, para conocer los ejes solo nos hace falta conocer su <u>vértice</u>.

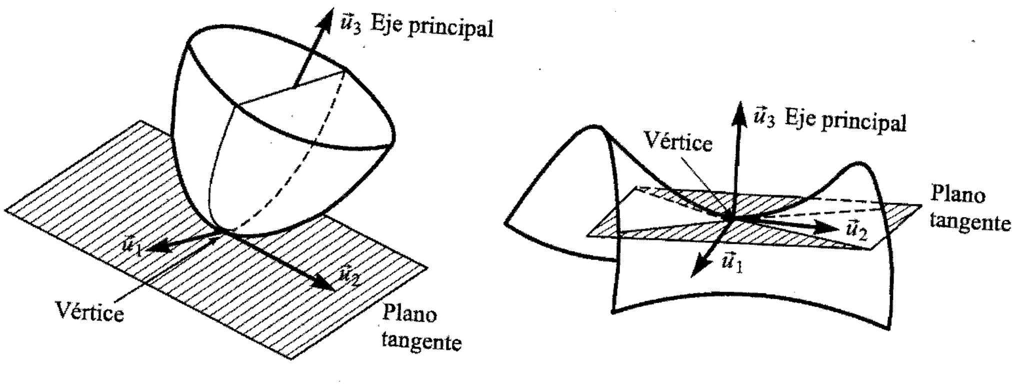


Figura 13.14

El eje principal del paraboloide tiene la dirección de un autovector $\vec{u}_3$ correspondiente al autovalor $\lambda_3 = 0$. Los autovectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 determinan el plano tangente al paraboloide en el vértice.

Si $V=(\alpha,\beta,\gamma)$ es el vértice, el plano tangente a $f(x,y,z)=0$ en V es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(V)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(V)(y-\beta) + \frac{\partial f}{\partial z}(V)(z-\gamma) = 0$$

luego $\nabla f(V) \parallel \vec{u}_3$ y por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f \times \vec{u}_3 = \vec{0} \\ f(x,y,z) = 0 \end{array} \right\}$$

son las ecuaciones que nos permiten calcular el vértice.

—— x ——

EJEMPLO C. Describe la cuádrica $x^2+2y^2+4xy+4z+3=0$ indicando el tipo, una forma canónica, el eje principal, el vértice y el plano tangente en el vértice.

S/ $\delta = \begin{vmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0$; $\Delta = \begin{vmatrix}1&2&0&0\\2&2&0&0\\0&0&0&2\\0&0&2&3\end{vmatrix} = 8 \neq 0$

Paraboloide (falta identificar el tipo)

Autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&2-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-4\right] = -\lambda\left[\lambda^2-3\lambda-2\right]=0$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_3 = 0$$

Observa $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$; luego es un paraboloide hiperbólico o silla de montar

~~Resum.~~

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2}x_2^2 + \frac{3-\sqrt{17}}{2}y_2^2 - b_3 z_2 = 0$$

con $b_3^2 = -\frac{4\Delta}{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{4\times(+8)}{-2} = 16$; $b_3 = \pm 4$ (elegir $b_3=4$)

Forma canónica

$$\frac{X_2^2}{\frac{2}{4(3+\sqrt{17})}} - \frac{Y_2^2}{\frac{2}{4(\sqrt{17}-3)}} = 1.$$

Dirección del eje : ker $(A - 0I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \quad ; \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x+4y,\ 4y+4x,\ 4)$$

$$\nabla f \times \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x+4y & 4y+4x & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4y+4x,\ -2x-4y,\ 0) = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} y+x=0 \\ x+2y=0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$$

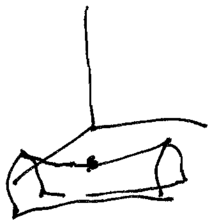
Por tanto $V = (0,0,\gamma)$ con $f(0,0,\gamma) = 0 \iff 4\gamma + 3 = 0 \iff \gamma = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{V = (0, 0, -3/4)}$$

Eje principal : $\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

Plano tangente : $z = d$ y como pasa por V, $z = -3/4$

—————— x ——————



II.2 Como $b_3 = 0$ ($\Leftrightarrow \Delta = 0$) la ecuación (8) se escribe

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = C'. \qquad (9)$$

Esta es una superficie de tipo cilíndrico que tiene como intersección con $z = d$ la cónica $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = C$, y puede ser

$\mathbb{R}^2$		
elipse	$\longrightarrow$	cilindro elíptico
hipérbola	$\longrightarrow$	cilindro hiperbólico
dos rectas que se cortan }	$\longrightarrow$	Dos planos secantes
Un punto	$\longrightarrow$	Una recta

(Ver figuras 13.7 y 13.8)

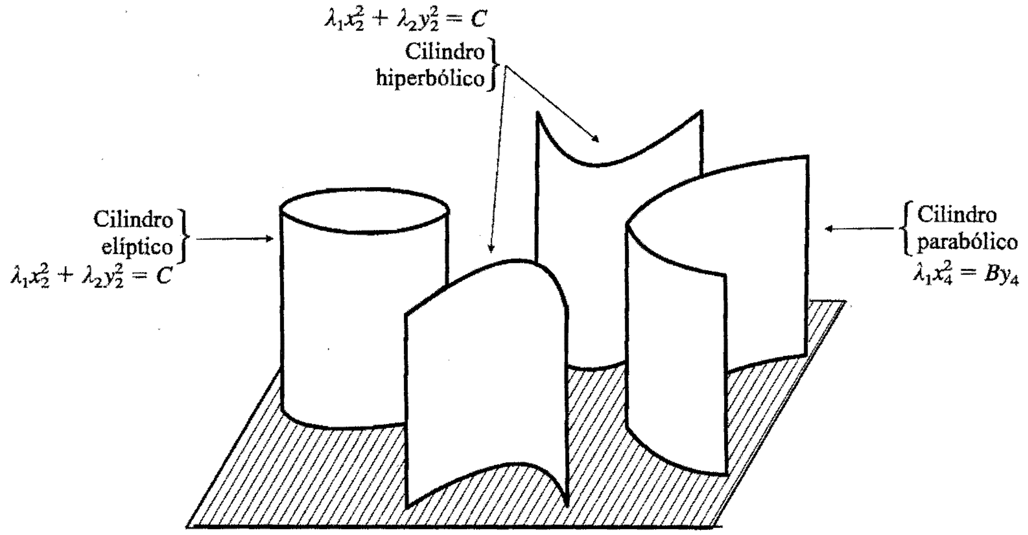


Figura 13.7

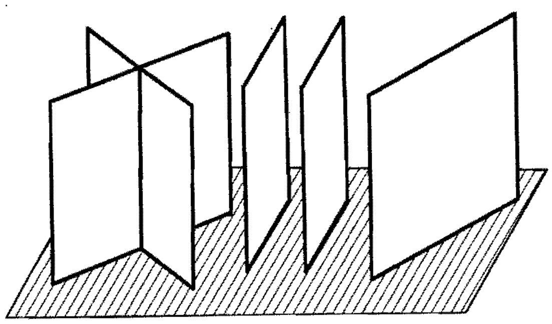


Figura 13.8

Podríamos hallar G' si conociéramos otros invariantes de la superficie. Otra forma de calcular G' es hallar (con los autovectores y completando cuadrado) el movimiento que eleva (1) en (9).

Vamos a descubrir otro método: observar que todas estas superficies tienen un eje de centros de simetría.

Sabemos (ver como se obtiene el centro para las cuádricas del tipo I) que estos centros satisfacen las ecuaciones lineales

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \right\} \qquad (10)$$

Observa que el determinante de este sistema lineal es $|2A| = 8|A| = 0$ y que $r(2A) = r(A) = r\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, por lo que tiene una recta de soluciones, que es el eje del "cilindro".

Para estas superficies de tipo II.2 hagamos una traslación en primer lugar de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ cualquier centro de simetría (satisface (10)). Por la fórmula (7) (pg 5.37) la superficie se reduce a

$$0 = f(\alpha,\beta,\gamma) + (x', y', z') A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(es decir, no tiene parte "lineal"). Hagamos ahora la transformación ortogonal que reduce A a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; la superficie se reduce a

$$0 = f(\alpha,\beta,\gamma) + (x_2, y_2, z_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f(\alpha,\beta,\gamma)$$

Si comparamos con (9) deducimos

$$\boxed{G' = -f(\alpha,\beta,\gamma)} \qquad (11)$$

que nos permite calcular G' (observa que este procedimiento es válido también para las superficies de tipo I.)

EJEMPLO D Clasifica la superficie de segundo grado

$$y^2 + xy - xz - yz - y + z = 0$$

S/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$- \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1-\lambda & -1/2 \end{vmatrix} = -\lambda \left[(1-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-\lambda) \right]$$

$$= \lambda^2(1-\lambda) + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda = \lambda^2(1-\lambda) + \frac{3\lambda}{4} =$$

$$= \lambda \left[-\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{4} \right] = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3/2}, \quad \boxed{\lambda_2 = -1/2}, \quad \boxed{\lambda_3 = 0}$$

La superficie es del tipo II.

$$\delta = |A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ La superficie es <u>del tipo cilíndrico</u>.

Su forma canónica será de la forma $\frac{3}{2} x_2^2 - \frac{1}{2} y_2^2 = c'$.

El eje del cilindro satisface

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y - z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + x - z - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -x - y + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x + z &= 1 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ <u>eje del "cilindro"</u>

Usando (11) con $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,0)\in$ Eje se tiene

$$c=-f(1,0,0)=0$$

luego su forma canónica es

$$\frac{3}{2}x_2^2-\frac{1}{2}y_2^2=0 \iff 3x_2^2=y_2^2 \iff y_2=\pm\sqrt{3}\,x_2 .$$ (Dos rectas en un plano)

Se trata, por tanto, de dos planos secantes.

Para hallar estos planos "despejamos" y:

$$y^2+(x-z-1)y+(z-xz)=0$$

$$y=\frac{-(x-z-1)\pm\sqrt{(x-z-1)^2-4z+4xz}}{2}=$$

$$2y=(-x+z+1)\pm\sqrt{x^2+z^2+1+2xz-2x-2z}$$

$$2y=(-x+z+1)\pm\sqrt{(x+z-1)^2}=(-x+z+1)\pm(x+z-1)$$

$$2y=2z \iff \boxed{y-z=0}$$

$$2y=-2x+2 \iff \boxed{y+x-1=0}$$

$$\boxed{(x+y-1)(y-z)=0}$$

NOTA 1 Tambien puede despejarse x: $(y-z)x=-y^2+yz+y-z$

$$(y-z)(-y)+(y-z)=(y-z)(1-y) \iff (y-z)(x+y-1)=0$$

NOTA 2 El cambio de base ortogonal esta dado por una matriz de autovectores, que en este caso puede ser $C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Con este cambio la superficie se transforma en

$$0=\frac{3}{2}x_1^2-\frac{1}{2}y_1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1\right)-\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1\right)=$$

$$=\frac{3}{2}x_1^2-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{3}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1=\frac{3}{2}\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0,$$

lo que también muestra que esta superficie son dos planos secantes.

—//—

CASO III: Dos de los λ_i son cero. Supongamos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

La superficie (1) se transforma en (ver (4)) con un cambio de base ortonormal:

$$\lambda_1 x_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b = 0$$

La traslación $x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$ la reduce a

$$\lambda_1 x_2^2 + b_2 y_2 + b_3 z_2 + b' = 0 \qquad (12)$$

Si $b_1 = b_2 = 0$, se obtienen dos planos paralelos distintos, o un solo plano (si $b' = 0$), o el conjunto vacío dependiendo de los valores y los signos de λ_1 y b'.

Si al menos uno de b_2 ó b_3 es no nulo, realizamos la transformación

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= \frac{b_2 y_3 + b_3 z_3}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \\ z_2 &= \frac{b_3 y_3 - b_2 z_3}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \end{aligned} \right\} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{b_2^2+b_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_3 & -b_2 \end{pmatrix}}_{\text{Ortogonal}}$$

que es una transformación ortogonal, (12) se escribe como

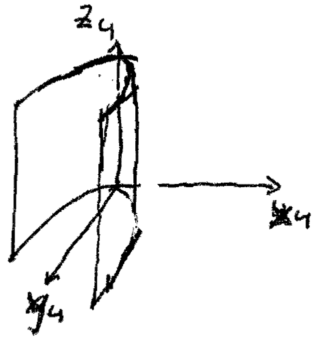
$$\lambda_1 x_3^2 + \sqrt{b_2^2 + b_3^2}\, y_3 + b' = 0$$

La traslación

$$x_4 = x_3, \quad y_4 = y_3 + \frac{b'}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}, \quad z_4 = z_3$$

produce

$$\lambda_1 x_4^2 = B y_4 \qquad \left(B = -\sqrt{b_2^2 + b_3^2} \right)$$



que representa un cilindro parabólico.

EJEMPLO D. Prueba que la superficie

$$x^2+y^2-2xy-3x-z+3=0$$

representa un cilindro parabólico

S/ $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-2)=0$

$$\boxed{\lambda_1=2},\ \boxed{\lambda_2=\lambda_3=0} \qquad \text{Tipo III}$$

$\boxed{\lambda_2=\lambda_3=0}$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff x+y=0\ ; \quad \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{u}_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2=2}$ $\qquad \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

El cambio ortogonal $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$ produce

$$2x_1^2-3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)-z_1+3=0$$

$$2\left(x_1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{3}{\sqrt{2}}y_1-z_1-6=0$$

Como $b_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$, $b_3=-1$ son no nulos, es un cilindro parabólico.