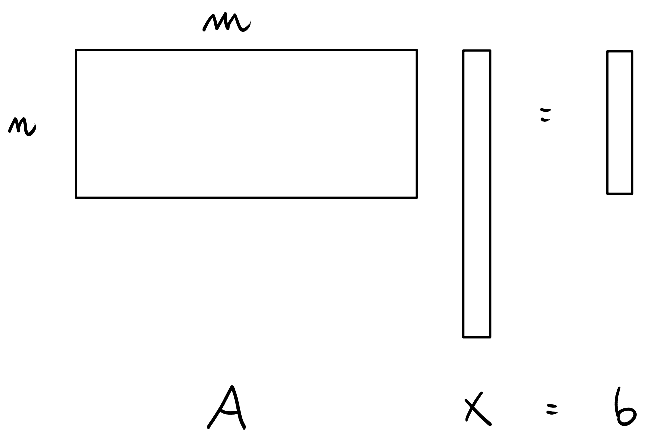
7.2 Problema II



$A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\mathrm{rg}(A) = n \leq m$

sistema subdeterminado (incompleto): más incógnitas que ecuaciones

∞ soluciones

(soluciones $\approx$ Ker(A))

<u>teorema</u>: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\mathrm{rg}(A) = n \leq m$

sea $b \in \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow \exists!\ x^b \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } \begin{cases} A x^b = b \\ \|x^b\|_2 \leq \|x\|_2 \quad \forall\ x : Ax = b \end{cases}$$

dada por $x^b = A^* (AA^*)^{-1} b$.

<u>observación</u>:

- AA^* es invertible (proposición de la clase anterior reemplazando $A \leftrightarrow A^*$)

- llamemos $M = A^* (AA^*)^{-1}$

  $\Rightarrow AM = I$: M inversa derecha de A

  ¿está relacionada con una pseudoinversa?

  sí: $M^* = (AA^*)^{-1} A = (A^*)^+$ M^* = pseudoinversa de A^*

demostración:

- $Ax^b = AA^*(AA^*)^{-1}b = b$: x^b es solución.
- todas las soluciones de $Ax=b$ son dadas por $x = x^b + v$, $v \in \mathrm{Ker}(A)$
- $\|x\|^2 = \langle x^b+v, x^b+v\rangle = \|x^b\|^2 + \|v\|^2 + \langle x^b, v\rangle + \langle v, x^b\rangle$

  donde $\langle x^b, v\rangle = \langle v, x^b\rangle = 0$

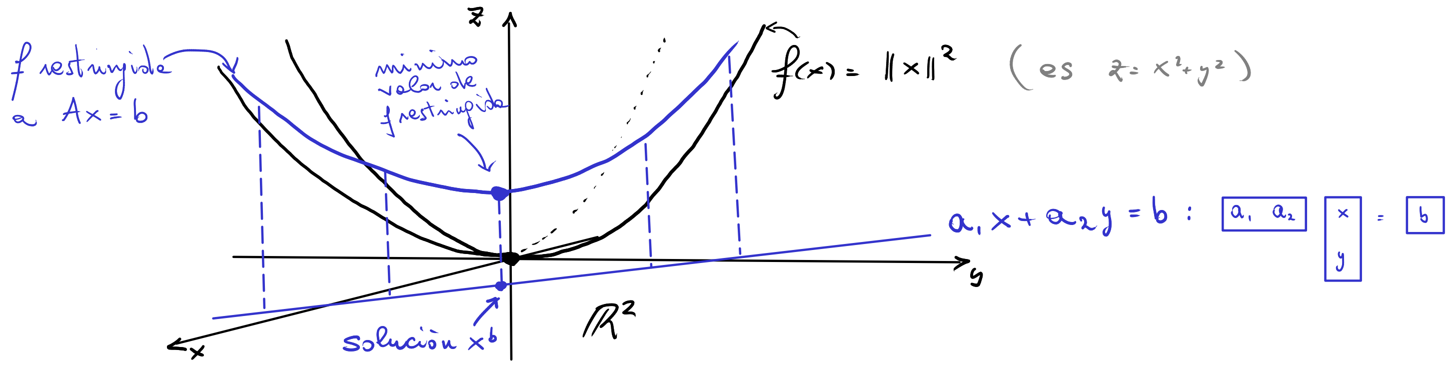
  porque $x^b = A^*(AA^*)^{-1}b \in \mathrm{Ran}(A^*) = (\mathrm{Ker}(A))^\perp$

$\Rightarrow$ para toda solución $x = x^b + v$ tenemos $\|x\|^2 = \|x^b\|^2 + \|v\|^2$

#

significado del problema:

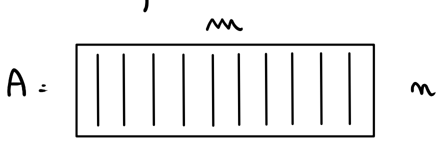
- estamos minimizando $f(x) = \|x\|_2$ bajo las restricciones $Ax = b$



- $Ax = \sum_i x_i A^{(i)}$

  Problema II: encontrar la c.l. que permite obtener b con mínima norma del vector de coeficientes

las columnas $A^{(i)}$ son más que una base



para un $b \in \mathbb{C}^n$ hay ∞ posibles combinaciones lineales de estas columnas

7.3 SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

teorema: sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

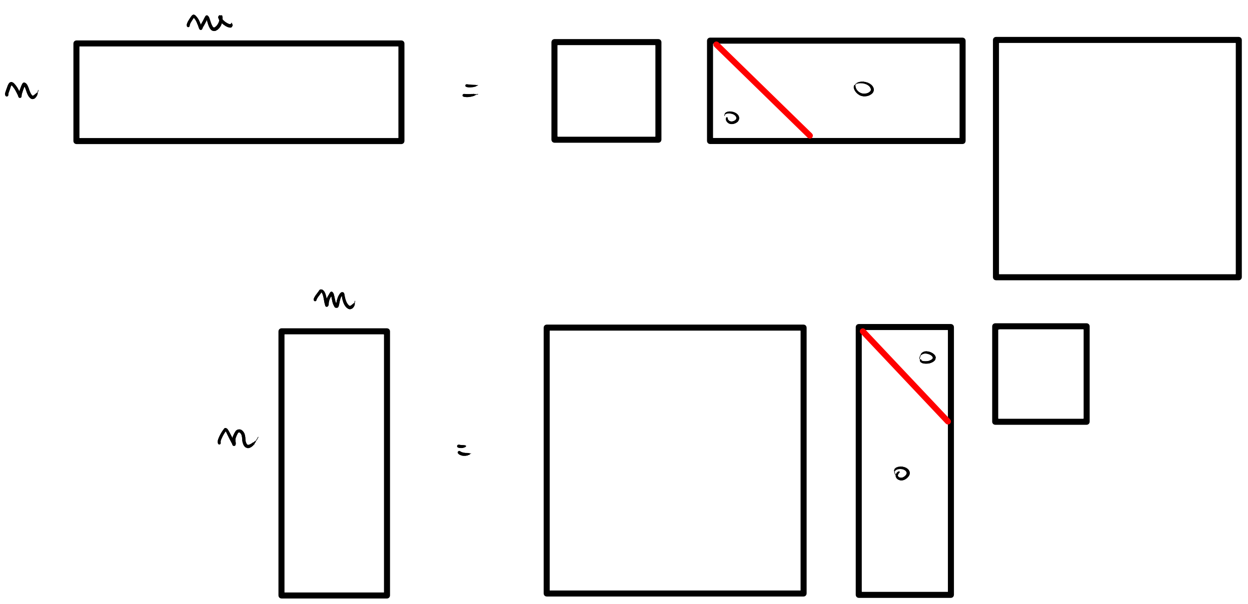
VALORES SINGULARES

$\Rightarrow \ \exists \ \Sigma \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ DIAGONAL, $\sigma_k \overset{def}{=} \Sigma_{kk} \geq 0$

elementos diagonales

$\exists \ U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ UNITARIAS

t.q. $A = U \Sigma V^*$, $\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$ $\forall \ k = 1 \ldots$



$A \quad = \quad U \quad \Sigma \quad V^*$

observación:

- si A es Hermítica y ≥ 0, esta es su diagonalización: $U = V$ matriz de autovectores normalizados y Σ matriz cuadrada y diagonal de autovalores
- la SVD se puede hacer con cualquier matriz

demostración :

- sea $\sigma_1 = |||A|||_2 = \max_{\|v\|_2=1} \|Av\|_2$,

sea $v_1 \in \mathbb{C}^m$: $\|v_1\|_2 = 1$, $\sigma_1 = \|Av_1\|_2$ — vector en el que se tiene el max

y sea $u_1 = \dfrac{Av_1}{\sigma_1}$ $\quad (u_1 \in \mathbb{C}^n, \ \|u_1\|_2 = 1)$

- elegimos $V_1 = \left(v_1 \ \vdots \ \tilde{V}_1 \right) \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$U_1 = \left(u_1 \ \vdots \ \tilde{U}_1 \right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\boxed{\text{donde } \tilde{V}_1, \tilde{U}_1 \text{ son obtenidos por compleción de base ortonormal}}$

$$\Rightarrow AV_1 = \left(\sigma_1 u_1 \ \vdots \ \cdots \right), \quad U_1^* A V_1 = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 & -w- \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

decimos w, A_2 los términos que quedan allí

- demostramos que $w = 0$: elegimos $B = U_1^* A V_1$

$$\left\| B \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \hline w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \|w\|^2 \\ \hline A_2 w \end{pmatrix} \right\|_2$$

← esto norma es seguramente más grande del valor (absoluto) de la primera componente

$$\geq \sigma_1^2 + \|w\|^2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|^2} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \hline w \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$\Rightarrow |||B|||_2 \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|^2} .$$

por otro lado $|||B|||_2 = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|U_1^* A V_1 x\|_2}{\|x\|_2}$

donde $\|U_1^* A V_1 x\|_2 = \|AV_1 x\|_2$, y $\|x\|_2 = \|V_1 x\|_2$: unitarias

$$\Rightarrow |||B|||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|AV_1 x\|_2}{\|V_1 x\|_2} = \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = |||A|||_2 = \sigma_1$$

- $\Rightarrow$ tenemos $U_1^* A V_1 = \left(\begin{array}{c:c} \sigma_1 & - 0 - \\ \hdashline | & \\ 0 & A_2 \\ | & \end{array}\right)$

sobre A_2 podemos hacer lo mismo:
construir $V_2 \in \mathbb{C}^{m-1 \times m-1}$, $U_2 \in \mathbb{C}^{m-1 \times m-1}$
tales que $U_2^* A_2 V_2 = \left(\begin{array}{c:c} \sigma_2 & - 0 - \\ \hdashline | & \\ 0 & A_3 \\ | & \end{array}\right)$

$$\hookrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c:c} 1 & - 0 - \\ \hdashline | & \\ 0 & U_2^* \\ | & \end{array}\right) U_1^*}_{\text{matriz unitaria: producto de unitarias}} A \underbrace{V_1^* \left(\begin{array}{c:c} 1 & - 0 - \\ \hdashline | & \\ 0 & V_2 \\ | & \end{array}\right)}_{\text{matriz unitaria: producto de unitarias}} = \left(\begin{array}{cc:c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ \hdashline & 0 & A_3 \end{array}\right)$$

- de esta manera podemos seguir hasta obtener $U A V^* =$ matriz diagonal con elementos diagonales ≥ 0 y decrecientes #

observación:

- $AA^* = U \Sigma V^* V \Sigma^* U^* = U \Sigma \Sigma^* U^*$

  $\Rightarrow U$ es la matriz que diagonaliza AA^*,

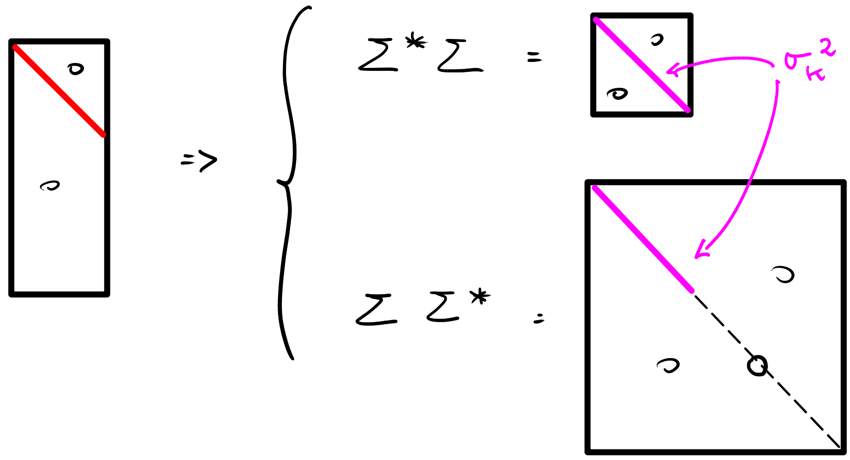
  $\{U^{(i)}\}$ BON de autovectores de AA^*

- $A^*A = V \Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V \Sigma^* \Sigma V^*$

  $\Rightarrow V$ es la matriz que diagonaliza A^*A

  $\{V^{(i)}\}$ BON de autovectores de A^*A

- si $\Sigma =$



- si $\Sigma =$