Tema 3. Aplicaciones lineales

3.1

$\boxed{\text{Def. } A: V \to W \text{ (e.v.) se dice lineal si } \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V,\ a \in \mathbb{K} \quad (1)\ A(a\vec{v_1}) = a\,A(\vec{v_1}),\ (2)\ A(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = A(\vec{v_1}) + A(\vec{v_2})}$

Prop 1.1. $A: V \to W$ lineal $\Rightarrow$ $A(\vec{0}) = \vec{0}$, $A(-\vec{v}) = -A(\vec{v})$

Def $A: V \to W$ op. lineal, $Ker(A) := \{\vec{v} \in V : A(\vec{v}) = 0\}$ (núcleo de A)

$Img(A) = A(V) := \{\vec{w} \in W : \exists \vec{v} \in V \text{ tq. } A(\vec{v}) = \vec{w}\}$

Prop 1.2 $A: V \to W$ lineal $\Rightarrow$ (i) $Ker(A)$ s.v. de V,
(ii) Si V_1 s.v. de V, $A(V_1)$ s.v. de W.
(iii) $Img(A)$ s.v. de W.

Prop 1.3 $A: V \to W$ o.l. si V_1 s.v. de V $\Rightarrow$ $\dim(A(V_1)) \leq \dim(V_1)$.

Prop 1.4 V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ b. de V, $\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n}\}$ vectores de W
$\exists A$ op lineal $: A: V \to W$ con $A(\vec{e_j}) = \vec{w_j}$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

3.2 Matriz de una op. lineal

$\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ base de V, $\overline{\beta} = \{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}\}$ base de W.

$$W \ni A(\vec{e_i}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{f_j} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad \to \begin{cases} A(\vec{e_1}) = a_{11}\vec{f_1} + \dots + a_{m1}\vec{f_m} \\ \vdots \\ A(\vec{e_n}) = a_{1n}\vec{f_1} + \dots + a_{mn}\vec{f_m} \end{cases}$$

$$\to A = M(A) = \begin{array}{c} \begin{matrix} A(\vec{e_1}) & \dots & A(\vec{e_n}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \end{array} = M_{\beta}^{\overline{\beta}}(A)$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\vec{x}) = \underset{m\times n}{M(A)} \cdot \underset{n\times 1}{(\vec{x})}} \quad \vec{x} \text{ en la base } \beta.$$

Prop 2.1 B, A op. lineales $\Rightarrow$ $B \circ A$ op. lineal

Prop 2.2 V, W, X, ev sobre $\mathbb{K}$ de dim finita. $A: V \to W$, $B: W \to X$
$M(A), M(B), M(B\circ A)$ matrices de $A, B, B\circ A$ en bases fijadas $\Rightarrow$ $\underline{M(B\circ A) = M(B)\cdot M(A)}$.

3.3 Cambio de base para op. lineales

$A: V \to W$, V, W dim finito. $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ b. de V, $\overline{\beta} = \{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}\}$ b. de W

$M(A)$ matriz en estas bases. $\beta' = \{\vec{e_i}'\}_{1\le i\le n}$ b. de V, $\overline{\beta}' = \{\vec{f_i}'\}_{1\le i \le m}$

$M'(A)$ matriz en estas bases

$$\left\{\begin{array}{l} I_V: (V, \beta') \to (V, \beta) \quad \text{identidad} \\ \qquad \vec{v} \mapsto \vec{v} \quad \text{(cambio de base)} \\ C \text{ matriz de } I_V \text{ (vectores de } \beta' \text{ en base } \beta) \\ I_W: (W, \overline{\beta}') \to (W, \overline{\beta}) \quad \text{identidad} \\ D \text{ matriz de } I_W \text{ (vectores de } \overline{\beta}' \text{ en base } \overline{\beta}) \\ D^{-1} \text{ matriz de } I_W^{-1} \text{ (vectores de } \overline{\beta} \text{ en } \overline{\beta}') \end{array}\right.$$

$$\begin{tikzcd} (V, \beta) \arrow[r, "A", "M(A)"'] & (W, \overline{\beta}) \\ (V, \beta') \arrow[u, "I_V", "C"'] \arrow[r, "M'(A)", "A"'] & (W, \overline{\beta}') \arrow[u, "I_W"'] \end{tikzcd} \quad ⊛$$

$$A(\vec{v}) = I_W^{-1}(A(I_V(\vec{v})))$$

$$\longrightarrow A = I_W^{-1} \circ A \circ I_V \quad ⊛$$

$$\Rightarrow \underbrace{M'(A) = D^{-1} \cdot M(A) \cdot C} = M_{\overline{\beta}}^{\overline{\beta}'}(I_W^{-1}) \cdot M_{\beta}^{\overline{\beta}}(A) \cdot M_{\beta'}^{\beta}(I_V) = M_{\beta'}^{\overline{\beta}'}(A)$$

Si $A: V \to V$ $\longrightarrow$ $M_{\beta'}^{\beta'}(A) = M_{\beta}^{\beta'}(I) \cdot M_{\beta}^{\beta}(A) \cdot M_{\beta'}^{\beta}(I) = C^{-1} A C$

$I: V_{\beta'} \to V_{\beta}$
$\hookrightarrow C$

3.4 Ap. lineales inyectivas y supreyectivas

$A: V \to W$ lineal

- A es inyectiva $\iff \{A(\vec{x}) = A(\vec{y}) \Rightarrow \vec{y} = \vec{x}\}\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
- A es sobreyectiva $\iff \forall \vec{w} \in W\ \exists \vec{v} \in V$ .. $A(\vec{v}) = \vec{w}$.

(A biyectiva $\iff$ A inyectiva y sobrey.)

- Ap. lineal $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Homomorfismo}}$
- Ap. lineal de V en V $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Endomorfismo}}$
- Ap. l. inyectiva $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Monomorfismo}}$,
- Ap. lineal supreyectiva $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Epimorfismo}}$
- Ap. l. biyectiva de V en V $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Automorfismo.}}$
- Ap. l. biyectiva de V en W $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Isomorfismo}}$

Prop 4.1. $A: V \to W$ ap lineal inyectiva $\iff \operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$.

Prop 4.2. $A: V \to W$ ap lineal, β base de V, $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \Rightarrow \{A(\vec{e}_1), \dots, A(\vec{e}_n)\}$ base de $A(V)$

Tma 4.3. $A: V \to W$ ap. lineal entre ev de dim finita, $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Img}(A)) = \dim(V)$

Dm. $\beta_1 = \{\vec{e}_1, \dots; \vec{e}_k\}$ base de $\operatorname{Ker}(A)$, le completamos: $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots \vec{e}_n\}$ base de V

Basta probar que $\bar{\beta} = \{A(\vec{e}_{k+1}), \dots, A(\vec{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Img}(A)$.

· s.g: Sea $\vec{w} \in \operatorname{Img}(A) \Rightarrow \exists \vec{v} \in V$ con $A(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i A(\vec{e}_i) \underset{\beta \in \operatorname{Ker}(A)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} a_i A(\vec{e}_i)$ ✓

· l.i: $\sum_{i=k+1}^{n} a_i A(\vec{e}_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i A(\vec{e}_i) \in \operatorname{Ker}(A) \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i A(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i A(\vec{e}_i) \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_i} \in \{k+1, \dots, n\}$. $\square$

Def. $\operatorname{Rango}(A) := \dim(\operatorname{Img} A)$, A lineal

$M(A)$ matriz de $A: V \to W$ $(\beta, \bar{\beta}) \to \operatorname{Ker}(A)$ se calcula resolviendo: $M(A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ SELH.

$r(M(A)) = p \to \dim(\operatorname{Ker} A) = \dim(V) - p$ (tma 4.3).

Corolario 4.4 V, W dim finito, $A: V \to W$ lineal $\to$ A inyectiva $\iff r(A) = \dim V$
A sobreyectiva $\iff r(A) = \dim W$.

Prop 4.5. V, W e.v. de dim igual, n $A: V \to W$ lineal $\Rightarrow$ Son equivalentes:
$\{$ A biyectiva $\iff$ A inyectiva $\iff$ A sobreyectiva $\iff \operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\} \iff r(A) = n$ $\}$.

3.5 Isomorfismos entre espacios vectoriales

Prop. 5.1. Si A es un isomorfismo (lineal y biyectiva), A^{-1} también lo es.

Prop. 5.2. $A: V \to W$ e.v. de dim finita

a) $A: V \to W$ isomorfismo $\Rightarrow$ $\dim V = \dim W$

b) $\dim V = \dim W$ $\Rightarrow$ $\exists A: V \to W$ isomorfismo.

Def. V y W se dicen ISOMORFOS si $\exists A: V \to W$ un isomorfismo, $V \approx W$

Teorema (5.3) del isomorfismo $A: V \to W$ lineal entre e.v.

$$\begin{aligned} \pi : V &\to V/\operatorname{Ker} A \\ \vec{v} &\overset{\pi}{\mapsto} [\vec{v}] \end{aligned} \quad , \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{A} : V/_{\operatorname{Ker}(A)} &\longrightarrow \operatorname{Img}(A) \\ [\vec{v}] &\overset{\tilde{A}}{\longmapsto} A(\vec{v}) \end{aligned}$$

bien def y es un isomorf.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Img}(A) \\ V/\operatorname{Ker} A \arrow[ur, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Dm - bien def: Sean $[\vec{v_1}] = [\vec{v_2}] \Leftrightarrow \vec{v_1} - \vec{v_2} \in \operatorname{Ker}(A)$

$\Rightarrow A(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = 0 \Rightarrow A(\vec{v_1}) = A(\vec{v_2})$ ✓

- lineal. $\tilde{A}([\vec{v_1}] \cdot a + b[\vec{v_2}]) = \tilde{A}([a\vec{v_1} + b\vec{v_2}]) =$

$= A(a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = aA(\vec{v_1}) + bA(\vec{v_2}) = a\tilde{A}([\vec{v_1}]) + b\tilde{A}([\vec{v_2}])$ ✓

- $\tilde{A}$ inyectiva. $\tilde{A}([\vec{0}]) = A(\vec{0}) = 0 \to \vec{0} \in \operatorname{Ker} \tilde{A}$

Sea $[\vec{x}] \in \operatorname{Ker} \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A}([\vec{x}]) = A(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow [\vec{x}] = [\vec{0}] \Rightarrow \operatorname{Ker} \tilde{A} = \{[\vec{0}]\}$ ✓

$$\left.\begin{aligned} \dim(\operatorname{Img} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) &= \dim V \\ \dim(V/\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) &= \dim V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Img} A) = \dim(V/\operatorname{Ker} A).$$

por tma 4.3, $\tilde{A}$ biyectiva □

Corolario 5.4. V_1, V_2 s.v. de V: Entonces $V_1+V_2/V_1 \approx V_2/V_1 \cap V_2$

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & (V_1+V_2/V_1) \\ (V_2/V_1 \cap V_2) \arrow[ur, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

D/ Sea $A: V_2 \longrightarrow V_1+V_2/V_1$, $A(\vec{v_2}) = [\vec{v_2}]$ $(\vec{v_2} \in V_2)$

- $\operatorname{Img} A = V_1+V_2/V_1$, sea $[\vec{v}] \in V_2+V_1/V_1$, $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, $\vec{v_1} \in V_1, \vec{v_2} \in V_2$

$\Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{v_2}] \Rightarrow \exists \vec{v_2} \in V_2$ tq $A(\vec{v_2}) = [\vec{v}]$.

- $V_1 \cap V_2 = \operatorname{Ker} A$; $\to$ Sea $\vec{v_2} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow A(\vec{v_2}) = [\vec{0}] \Leftrightarrow \vec{v_2} \in V_1 \Leftrightarrow v_2 \in V_1 \cap V_2$ (Tma 5.3.)

Corolario 5.5 $V_1 \subset V_2$ s.v de V $\Rightarrow$ V_2/V_1 s.v. de V/V_1 y $(V/V_1)/(V_2/V_1) \approx V/V_2$

D/ $V/V_1 \xrightarrow{A} V/V_2$, $A(\vec{v} + V_1) = \vec{v} + V_2$ (lineal y supreyectiva)

$$\begin{tikzcd} V/V_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & V/V_2 \\ (V/V_1)/(V_2/V_1) \arrow[ur, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

- $\operatorname{Ker}(A) = V_2/V_1$ — (1) Sea $\vec{v} + V_1 \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \vec{v} + V_2 = \vec{0} + V_2 \Rightarrow \vec{v} \in V_2 \Rightarrow \vec{v} + V_1 \in V_2/V_1$

(2) Sea $\vec{v_2} + V_1 \in V_2/V_1 \Rightarrow A(\vec{v_2} + V_1) = \vec{v_2} + V_2 = \vec{0} + V_2 \Rightarrow \vec{v_2} + V_1 \in \operatorname{Ker} A$

$\hookrightarrow \vec{v_2} \in V_2$

Por tma del isomorfismo. □

3.6 El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Def V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{L}(V,W) = \{A : V \longrightarrow W \mid A \text{ lineal}\}$

- Suma: $A, B \in \mathcal{L}(V,W)$, $(A+B)(\vec{v}) = A(\vec{v}) + B(\vec{v})$.
- Prod. por escalares: $A \in \mathcal{L}(V,W)$, $a \in \mathbb{K}$, $(aA)(\vec{v}) = aA(\vec{v})$.

$\mathcal{L}(V,W)$ e.v. con estas op.

Prop 6.1 $\dim(\mathcal{L}(V,W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$

Dm. $\beta_1 = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ b. de V, $\beta_2 = \{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}\}$ b. de W.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, m\} : E_{ji}(\vec{e_k}) = \begin{cases} \vec{f_i} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} = \delta_{jk} \cdot \vec{f_i}$$

Extender E_{ji} a todo V por linealidad:

$$\vec{v} \in V, \quad E_{ji}(\vec{v}) = E_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{e_k}\right) = a_j \vec{f_i}.$$

Basta probar que $\mathcal{E} = \{E_{ji} : 1 \le j \le m, 1 \le i \le n\}$ base de $\mathcal{L}(V,W)$

- l.i. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} E_{ji} = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} E_{ji}(\vec{e_k}) = 0 \Rightarrow \forall k \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ki} \vec{f_i} = 0 \Rightarrow \forall k, \forall i \ a_{ki} = 0$$

pq β_2 base de W

- S.g. $A \in \mathcal{L}(V,W)$, $M(A)$ matriz de A con bases β_1, β_2

$$M(A) = (a_{ji})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad A(\vec{e_k}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} \vec{f_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} E_{ji}(\vec{e_k}) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} E_{ji}\right)(\vec{e_k}).$$

$\mathrm{End}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ endomorfismos de V.

Si $\dim(V) = n$, $\dim(\mathrm{End}(V)) = n^2$; $C, A, B \in \mathrm{End}(V)$,

- $B \circ A(\vec{v}) = B(A(\vec{v}))$
- $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$
- $A \circ I_V = I_V \circ A = A$
- Distributivas: $(A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C$
  $A \circ (B+C) = A \circ B + A \circ C$

Álgebra no conmutativa.