proposición : sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\Rightarrow \quad |||A|||_2 = \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ autovalor de } A^*A\}}$$

$A^* = A^T$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
$A^* = \overline{A^T}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

observación :

- A^*A es simétrica$^{\mathbb{R}}$ / hermítica$^{\mathbb{C}}$
- todos los autovalores de A^*A son ≥ 0

si $A^*A v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle A^*A v_\lambda, v_\lambda\rangle}{\|v_\lambda\|_2^2} = \dfrac{\|Av_\lambda\|_2^2}{\|v_\lambda\|_2^2} \geq 0$

demostración :

- sea $\{v_j\}_{j=1}^n$ BON $\mathbb{K}^n$ de autovectores de A^*A
  y sean $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ los correspondientes autovalores
- $\forall x \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{j=1}^n c_j v_j \quad , \quad c_j \in \mathbb{K}$
  observar que $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{1/2}$, porque $\{v_j\}$ BON
- $\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle \overset{\circledast}{=} \langle A^*Ax, x\rangle$
  donde $A^*Ax = A^*A \sum_{j=1}^n c_j v_j \overset{\circledast}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j v_j$
  y, por ortonormalidad $\langle A^*Ax, x\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2$
  $\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \lambda_{MAX}(A^*A) \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \lambda_{MAX}(A^*A)\|x\|_2^2$

$\circledast$ $\langle v, Aw\rangle = \langle A^*v, w\rangle$ $\qquad$ $\circledast$ $A^*A \sum_{j=1}^n c_j v_j = \sum_{j=1}^n c_j A^*A v_j$

- ahora, si $x = v_{\lambda_{MAX}}(A^*A) \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \lambda_{MAX}(A^*A)\|x\|_2^2$

#

proposición: toda norma inducida satisface $|||A||| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

es lo que hemos encontrado en las pruebas para $|||\cdot|||_p$, $p=1,2,\infty$

idea de la demostración:

- $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

- la función $f_A(x) = Ax$ es continua (en $\mathbb{K}^n$)

en $x_0 \in \mathbb{K}^n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ si $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$

$\underbrace{\|f_A(x) - f_A(x_0)\|}_{<\varepsilon} = \|A(x-x_0)\| \leq |||A||| \underbrace{\|x-x_0\|}_{\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|||A|||}}$

- el conjunto $\{x : \|x\| = 1\}$ satisface las propiedades necesarias para que sea válido el teorema de Weierstrass: toda f continua sobre ese conjunto tiene máximo y mínimo.

#

---

observaciones sobre la continuidad de $f(x) = Ax$

- como todas las normas son equivalentes (en $\mathbb{K}^n$), no es necesario especificar una para esta definición de continuidad
- lo que se muestra es que f es más que continua: la condición de $\exists L > 0 : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|$ es llamada de Lipschitz

proposición: si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible

$$\Rightarrow |||A^{-1}||| = \frac{1}{\inf\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \frac{1}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

demostración:

- para la segunda identidad vale el mismo argumento de la proposición anterior

- $$|||A^{-1}||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{1}{\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$$

lema: sea Ω un conjunto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función t.q.

$\inf\limits_{x} f(x) > 0$, $\sup\limits_{x} \frac{1}{f(x)} > 0$. $\Rightarrow \sup\limits_{x} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\inf\limits_{x} f(x)}$.

demostración:

sean $S = \sup\limits_{x} \frac{1}{f(x)}$, $I = \inf\limits_{x} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \frac{1}{f(x)} \leq S \ \forall x \iff f(x) \geq \frac{1}{S} \ \forall x, \text{ así que } I \geq \frac{1}{S} \\ \cdot\ f(x) \geq I \ \forall x \iff \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{I} \ \forall x, \text{ así que } S \leq \frac{1}{I} \end{array}\right\} \Rightarrow S = I$$

#

- para terminar la demostración, veamos que se cumplen las condiciones del lema:

- $|||A^{-1}||| > 0$, porque si así no fuera tendríamos $A^{-1} = 0$
- como A es invertible $\Rightarrow \inf\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0$

porque, si no fuera así, tendríamos un $x_0 : Ax_0 = 0$

$\not\equiv$

---

aplicación: $$|||A^{-1}|||_2 = \frac{1}{\sqrt{\min\{\lambda : \lambda \text{ autovalor de } A^*A\}}}$$

ejercicio: demostrar ↑