Universidad Autónoma de Madrid Curso 2021-22

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

Estructuras Algebraicas

Convocatoria ordinaria, 19 de enero de 2022

DURACIÓN DEL EXAMEN: 2 HORAS Y 30 MINUTOS

APELLIDOS: ______________________

NOMBRE: ______________________ DNI/NIE: ______________________ GRUPO: 130 / 726

Ejercicio 1. (3 puntos) Recordamos que la acción de un grupo G sobre un conjunto Ω se dice transitiva. si ésta define una única órbita.

a) Encuentra el número $|\mathrm{Syl}_5(\mathrm{S}_5)|$ de 5-subgrupos de Sylow del grupo simétrico S_5.

$|S_5| = 5! = 24 \cdot 5$

$\left.\begin{array}{l} |Syl_5(S_5)| \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow |Syl_5(S_5)| = 1 \text{ ó } 6 \text{ ó } 11 \text{ ó } 16 \ldots \\ |Syl_5(S_5)| \text{ divide a } 24 \end{array}\right\} \Rightarrow |Syl_5(S_5)| = \underline{1 \text{ ó } 6}$

Como $P_1 = \langle (1,2,3,4,5) \rangle$ y $P_2 = \langle (2,1,3,4,5) \rangle$ son dos 5-subgrupos distintos, deducimos que $\underline{|Syl_5(S_5)| = 6}$.

b) Define una acción de S_5 en $Syl_5(S_5)$ que sea transitiva y describe el núcleo de esa acción.

$$S_5 \times Syl_5(S_5) \longmapsto Syl_5(S_5)$$
$$(\sigma, P) \longmapsto \sigma \bullet P := \sigma P \sigma^{-1}$$

• Es realmente una acción

a) $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) \bullet P = \sigma_1 \sigma_2 P (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} = \sigma_1 (\sigma_2 P \sigma_2^{-1}) \sigma_1^{-1} = \sigma_1 (\sigma_2 \bullet P) \sigma_1^{-1} =$
$= \sigma_1 \bullet (\sigma_2 \bullet P)$

b) $1 \bullet P = 1 \cdot P \cdot 1 = P$

• Es transitiva porque los p-grupos de Sylow son todos conjugados.

• Núcleo de la acción $\quad \rho : S_5 \longmapsto Biy(Syl_5) \cong S_6$
$$\sigma \longmapsto \rho_\sigma ; \; \rho_\sigma(P) = \sigma P \sigma^{-1}$$

$$\operatorname{Ker} \rho = \{\sigma \in S_5 \,/\, \rho_\sigma = id\} = \{\sigma \in S_5 \,/\, \sigma P \sigma^{-1} = P \;\; \forall P \in Syl_5\} =$$
$$= \{\sigma \in S_5 \,/\, \sigma \in N_{S_5}(P), \forall P \in Syl_5\} = \bigcap_{P \in Syl_5(S_5)} N_{S_5}(P).$$

OBSERVACIONES:

1) Aunque no se requiere esto para alcanzar la máxima nota, de hecho $\operatorname{Ker}\rho = \{1\}$, porque $\operatorname{Ker}\rho \trianglelefteq S_5 \Rightarrow \operatorname{Ker}\rho = \begin{cases} \{1\} \\ A_5 \text{(grupo alt.)} \\ S_5 \end{cases}$

• $\operatorname{Ker}\rho = S_5 \Rightarrow N_{S_5}(P) = S_5 \;\forall P \in Syl \Rightarrow P \trianglelefteq S_5 \;\forall P \in Syl$, lo cual es obviamente falso.

• $\operatorname{Ker}\rho = A_5 \Rightarrow A_5 \leq N_{S_5}(P)$. Imposible pues $|A_5| = 60$ y $|N_{S_5}(P)| = 20$ (ver parte c).

2) Alternativamente, la acción puede definirse como:
$$(\sigma, P) \longmapsto P^\sigma = \sigma^{-1} \cdot P \cdot \sigma$$

c) Dado $P \in \mathrm{Syl}_5(\mathrm{S}_5)$, demuestra que $\mathbf{N}_{\mathrm{S}_5}(P) = PH$ con $H \leq \mathrm{S}_5$ tal que $P \cap H = 1$.

1) Empezamos calculando $|N_{S_5}(P)|$ usando el hecho de que la acción tiene sólo 1 órbita. La formula de clases da:

$$6 = |Syl_5(P)| = |\mathcal{O}(P)| = \frac{|S_5|}{|Stab_P|} = \frac{5!}{|Stab_P|} \Rightarrow |Stab_P| = \frac{5!}{6} = 20 = 5 \cdot 2^2$$

Claramente, $Stab_P = \{\sigma \in S_5 / \sigma P \sigma^{-1} = P\} = N_{S_5}(P) \Rightarrow \underline{|N_{S_5}(P)| = 5 \cdot 2^2}$

2) Ahora calculamos el número n_5 de 5-subg. de Sylow de $N_{S_5}(P)$.

$$\left.\begin{array}{l} n_5 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow n_5 = 1, 6, \ldots \\ n_5 / 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{n_5 = 1}$$

3) Claramente $P < N_{S_5}(P) \Rightarrow P$ es el único 5-grupo de Sylow de $N_{S_5}(P) \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{P \triangleleft N_{S_5}(P)}$ (i.e. es un subgrupo normal)

4) Sea H un 2-subg. de Sylow de $N_{S_5}(P)$, entonces $|H| = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{P \cap H = 1}$ (pues $|P \cap H|$ divide a $|P| = 5$ y a $|H| = 4$).

5) Finalmente, como $P \triangleleft N_{S_5}(P)$ y $P \cap H = 1 \Rightarrow PH$ es un subgrupo de $N_{S_5}(H)$ de orden $5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow \underline{PH = N_{S_5}(P)}$

Ejercicio 2. (2 puntos) Razona si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero o falso, aportando una prueba o un contraejemplo según corresponda.

a) Todo grupo de orden 45 es cíclico.

b) En un dominio de ideales principales un elemento irreducible genera un ideal primo.

a) Falso. $G = C_3 \times C_3 \times C_5$ es de orden 45 pero no es cíclico, pues el máximo orden que un elemento de G puede alcanzar es $3 \cdot 5 = 15 \neq 45$.

b) Sea A un anillo principal y $p \in A$ un elemento irreducible.
Tenemos que ver que $xy \in (p) \Rightarrow x \in (p)$ ó $y \in (p)$.

Supongamos que $x \notin (p)$ y consideremos el ideal $I = (x, p)$.
Como A es principal, $I = (x,p) = (d)$, para algún $d \in A$. $\Rightarrow p \in (d) \Rightarrow$

$\Rightarrow p = sd$, para algún $s \in A \Rightarrow \begin{cases} i)\ s \in A^* = \mathcal{U}(A), \text{ (i.e. } s \text{ es unidad)} \\ \text{ó} \\ ii)\ d \in A^* = \mathcal{U}(A), \text{ ('' } d \text{ '' '')} \end{cases}$

→ Si ocurre i) $\Rightarrow I = (x,p) = (d) = (s^{-1}s \cdot d) = (sd) = (p) \Rightarrow x \in (p)$. Contradicción.

→ Si ocurre ii) $\Rightarrow 1 = d^{-1} d \in (d) = I = (x,p) \Rightarrow 1 = \alpha x + \beta p;\ \alpha, \beta \in A, \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\alpha xy}_{\in (p)} + \underbrace{\beta y p}_{\in (p)} \Rightarrow y \in (p).$$

Hemos probado que si $x \notin (p)$ entonces $y \in (p)$. C.Q.D