# ANÁLISIS MATEMATICO TEMA 1

## ESPACIOS NORMADOS (Siempre en $\mathbb{R}$)

### PRODUCTOS ESCALARES

Propiedades: Bilineal, simétrico, def. positivo.

$\langle x, y \rangle = x^t A y$ ($x, y$ vectores columna y $A$ simétrica def. pos.)

$A$ def. positiva $\equiv x^t A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

### NORMAS EUCLIDEAS

$v \in \mathbb{R}^n, \quad \|\cdot\|: \mathbb{V} \to \mathbb{R} \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0, \ = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{V}$

Además, $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

D.T: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

### HOMOGENEIDAD DE FUNCIONES

$f$ es homogenea de grado $K$ si $v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}, \lambda \neq 0 \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda^K f(v)$ $(K \in \mathbb{Z})$

$f$ es positivamente homogenea de grado $a$ si $v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}, \lambda > 0 \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda^a f(v)$ $(a \in \mathbb{R})$

$f$ positivamente homogenea de grado $1 \Rightarrow$ Su grafo es un cono (unión de semirectas que salen del origen).

$f$ homogenea de grado $1 \Rightarrow$ Su grafo es un cono simétrico respecto del origen (unión de rectas que pasan por el $(0,0)$.

### NORMAS EN GENERAL

Cumplen: $\|0\| = 0$ y $\|v\| > 0$ si $v \neq 0$. Positivamente homogenea de grado 1. Función par ($\|-v\| = \|v\|$). Desigualdad triangular.

Espacio normado $\equiv (\mathbb{V}, \|\cdot\|)$

## BOLAS Y CONJUNTOS ACOTADOS

$(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ e. normado.

$r>0 \quad B(0,r)=\{v\in\mathbb{V} \,\|\, \|v\|<r\}$

$r\geq 0 \quad \overline{B}(0,r)=\{v\in\mathbb{V} \,\|\, \|v\|\leq r\}$

Bola unidad $r=1$ (abierta o cerrada)

En la cerrada, su "cáscara" son los vectores de $\|v\|=1$.

$E\subset\mathbb{V}$ ACOTADO $\Leftrightarrow E\subseteq\overline{B}(0,r),\ r\geq 0.$

## DESCOMPOSICIÓN POLAR

$N: B\longrightarrow\mathbb{R} \,\|\,$ N cumple N1 y N2.1

$\forall v\in\mathbb{V}\setminus\{0\} \quad v=aw \begin{cases} a\in\mathbb{R},\ a>0 \\ w \text{ "unitario" } N(w)=1 \end{cases}$

FACTORIZACIÓN ÚNICA (descomposición polar)

- $N(\cdot)$ está completamente determinada por su bola unidad $(\overline{B}=\{x \,\|\, N(x)\leq 1\})$
- $N(\cdot)$ es la única función positivamente homogenea de grado 1 con $x\in\overline{B}\Leftrightarrow N(x)\leq 1$

## NORMAS EUCLÍDEAS Y NO EUCLÍDEAS

$E\subseteq\mathbb{V}$ elipsoide centrado en $x_0$ si $\exists \underbrace{Q:\mathbb{V}\to\mathbb{R}}_{\text{forma cuadrática.}}$ def positiva y $c>0 \,\|$

$$E=\{y\in\mathbb{V} \,\|\, Q(y-x_0)=c\}=x_0+\{x\in\mathbb{V} \,\|\, Q(x)=c\}$$

elipsoide sólido centrado en $x_0$ $\boxed{\text{igual pero } \leq c}$.

Si $\|x\|$ es euclidea, sus bolas cerradas $(\overline{B}_{(0,r)}=\{x\in\mathbb{V} \,\|\, \langle x,x\rangle\leq r^2\})$ son elipsoides centrados en 0 porque $Q(x)=\langle x,x\rangle$ es una forma Q def. positiva.

(NORMA EUCLÍDEA $\Longleftrightarrow$ BOLA UNIDAD ES UN ELIPSOIDE SÓLIDO)

- NORMA EUCLIDEA $\Longleftrightarrow$ CUMPLE LA REGLA DEL PARALELOGRAMO

$$\left(2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)$$
$$\forall x,y \in V$$

## CONJUNTOS CONVEXOS

$x,y \in V$, segmento rectilíneo de extremos $x,y \equiv [x,y] \equiv \{(1-\lambda)x + \lambda y \,//\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$. $E \subset V$ convexo si $[x,y] \subseteq E \;\forall x,y \in E$.

## CONVEXIDAD DE FUNCIONES

$f$ convexa si $\quad f([x,y]) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

$f$ cóncava si $\quad f([x,y]) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

En $f$ de una variable $\begin{cases} \text{Convexa si las cuerdas quedan por encima} \\ \text{Cóncava si las cuerdas quedan por debajo} \end{cases}$

- $f$ derivable, si $f'$ monótona no decreciente $\Longrightarrow$ CONVEXA

si $f'$ monótona no creciente $\Longrightarrow$ CÓNCAVA

## TEORÍA DE MINKOWSKI

Si $N(\cdot)$ es una función que cumple los axiomas N1 y N2.1, cumple la DT (N3) $\Longleftrightarrow$ $\overline{B}=\{x \in V \,//\, N(x) \leq 1\}$ es convexo

## NORMAS P EN $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\| \text{ (desigualdad de minkowski)}$$

$p \geq 1 \Rightarrow g(t) \equiv |t|^p$ convexa $\Longrightarrow S(x_1,\dots,x_n)=|x_1|^p+\dots+|x_n|^p$ convexa $\Longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \,//\, S(x) \leq 1\}$ convexo $\Longrightarrow \|\cdot\|_p$ cumple DT.

$\|v_0\|_p$ decreciente según aumenta $p$. (Salvo si $v_0$ está en un eje coordenado, en cuyo caso se mantiene).

$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$ (SU BOLA UNIDAD ES $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$).

Si $p\in(0,1)$, $\|x\|_p$ no cumple la desigualdad triangular (su bola unidad no es convexa). P.e si $n=2$ y $p=1/2$ 

## YOUNG Y HOLDER

$1<p,q<\infty$ son exponentes conjugados si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

- DESIGUALDAD DE YOUNG: $a,b\geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ ($p,q$ conjugados)
- DESIGUALDAD DE HÖLDER: $x,y\in\mathbb{R}^n \Rightarrow |x\cdot y| \leq \|x\|_p\cdot\|y\|_q$

## NORMAS DE OPERADOR

$L:(V,\|\cdot\|_V)\longrightarrow(W,\|\cdot\|_W)$ lineal acotada, su NORMA DE OPERADOR

$$|||L||| \equiv \sup_{x\neq 0}\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|w\|_V=1}\|L(w)\|_W$$ (siempre se alcanza $\Rightarrow$ es un MÁXIMO)

$$\|L(v)\|\leq |||L|||\cdot\|v\| \;\forall v\in V$$ ($\nexists M<|||L|||$ // $\|L(v)\|\leq M\|v\|$)

menor de las cotas superiores (supremo)

$x_0\in V\setminus\{0\}$
- minimal para $L$ si $\phi(x)\leq\phi(x_0)\ \forall x\in V\setminus\{0\}$
- maximal para $L$ si $\phi(x)\geq\phi(x_0)\ \forall x\in V\setminus\{0\}$

$$\phi(x)=\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

¡ $|||AB|||\leq|||A|||\cdot|||B|||$ !

## NORMA DUAL DE LA NORMA P

$v\in\mathbb{R}^n$, $V^*$ (dual de $V$) es: {formas lineales: $V\to\mathbb{R}$}

$v^b:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $v^b(x)=v^t x$. Si $l:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ y $v\in\mathbb{R}^n$ es el único vector $\parallel \ell \equiv v^b \Rightarrow |||v^b||| = ||v||_q$ ($q$ es el conjugado de $p$)

## ELIPSOIDES Y NORMA DE OPERADOR

$A: (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$, si $A$ invertible $\Rightarrow$ imagen $A \cdot \overline{B}(0,1)$ es un elipsoide sólido centrado en el origen.

$|||A|||$ es el mínimo radio $M \parallel \overline{B}(0,M)$ contiene a $A \cdot \overline{B}(0,1)$, coincide con el valor del semieje principal máximo de $A \cdot \overline{B}(0,1)$.

$A$ cuadrada e invertible, $|||A|||_{2\to 2} = \sqrt{\lambda_1}$ $\quad \lambda_1 = \max\{\lambda \parallel \lambda$ autovalor de $A^tA$ ò $AA^t\}$

$\sqrt{\lambda_1} \equiv$ longitud semieje principal máximo.

$\sqrt{\lambda_n} \equiv$ longitud semieje principal mínimo. $(||Ax||_2 \geq \sqrt{\lambda_n}\,||x|| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n)$

# ESPACIOS MÉTRICOS Y TOPOLOGÍA

## FUNCIONES DISTANCIA

$\boxed{|\text{distancias}| >>>>>>> |\text{normas}|}$

$d: X \times X \to \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto d(x,y)$

es una distancia si $\forall x,y,z$:
1) $d(x,y) \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

espacio métrico $\equiv (X,d)$
$X \neq \emptyset$ y $d$ distancia

NORMA $\Rightarrow$ DISTANCIA : $(V, ||\cdot||)$ y $v,w \in V$ $\quad d(v,w) = ||v-w||$

## BOLAS MÉTRICAS Y CONJUNTOS ACOTADOS

$(X,d)$ e.m, $x_0 \in X$

- Bola abierta $\equiv B_d(x_0,r) = \{x \in X \parallel d(x,x_0) < r\}$
  $r > 0$ centro $x_0$
- Bola cerrada $\equiv \overline{B_d}(x_0,r) = \{x \in X \parallel d(x,x_0) \leq r\}$
  $r \geq 0$ centro $x_0$

$E \subseteq X$ acotado $\Leftrightarrow E \subseteq \overline{B}(x_0,r)$

# CONVERGENCIA DE SUCESIONES

$\{x_n\} \subset E \Rightarrow x_n \in E \ \forall n$. Cola de sucesión $\equiv x_K, x_{K+1}, \ldots = \{x_n\} \setminus$ K-1 primeros términos (K fijo).

CONVERGENCIA $\{x_n\} \rightarrow x_0$ si $\forall r > 0 \ \exists K$ (depende de r y de la sucesión) // si $m \geq K \Rightarrow x_m \in B(x_0, r)$. ($x_0$ es ÚNICO) $\equiv$ límite de la sucesión

$\{x_n\}$ convergente es necesario
1. ACOTADA
2. de Cauchy ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon$ // $m, n \geq K \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$)

# ABIERTOS, CERRADOS Y TOPOLOGÍA

$(X, d)$ e.m

Abierto $\equiv U \subseteq X$ abierto $\Leftrightarrow \forall x \in U \ \exists r > 0$ // $B(x, r) \subseteq U$ ó $U = \emptyset$

Un entorno de $x_0 \in X$ es $U$ abierto // $x_0 \in U$

Un entorno de $E \subseteq X$ es un abierto $U$ // $E \subseteq U$

Abierto $\equiv$ "cómodo" (puedo moverme hacia cualquier lado y sigo cómodo)

Cerrado $\equiv E \subseteq X$ cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E$ que converjan a $x_0$, $x_0 \in E$ ó $E = \emptyset$

$C \subseteq X$ cerrado $\Leftrightarrow X \setminus C$ abierto

# CONTINUIDAD

$f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ continua en $x_0$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ // $\delta(\varepsilon, f)$

$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ ($\forall B'$ centrada en $f(x_0) \ \exists B$ centrada en $x_0$ // $f(B) \subseteq B'$)

$f$ continua si $f$ continua $\forall x_0 \in X$.

$X \xrightarrow{f} X'' \xrightarrow{g} X'''$ $f$ cont. en $x_0$ y $g$ cont. en $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ cont. en $x_0$.

Teorema: $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$

$f$ continua $\Leftrightarrow \underset{\text{abierto}}{V \subseteq X'}$, $f^{-1}(V)$ abierto de $X \Leftrightarrow$ "con cerrados" $\Leftrightarrow$
$\{x_n\} \subset X$ y $x_0 \subset X \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$ (con $\{x_n\} \rightarrow x_0$)

$f_1, \dots, f_K : (X, d) \to \mathbb{R}$ y $f : (X, d) \to (\mathbb{R}^K, \|\cdot\|_\infty)$,

$$x \to (f_1(x), \dots, f_K(x))$$

$f$ es continua $\iff f_j$ continua $\forall j \in \{1, \dots, K\}$

## COMPACIDAD

__Recubrimiento:__ $K \subseteq X$, recubrimientos de $K$ son $\{A_i\}_{i \in I}$ ($A_i \subseteq X \ \forall i$),
$\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq K$.

Son equivalentes (con $(X, d)$ e.m y $K \subseteq X$):

- Bolzano - Weierstrass: Toda sucesión $\{x_n\} \subset K$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente en $K$.
- Heine-Borel: Todo recubrimiento de $K$ por abiertos tiene un sobrecubrimiento finito.

$K \subseteq X$ COMPACTO $\iff$ cumple lo anterior.

En __dimensión finita:__ $K \subseteq X$ COMPACTO $\iff K$ cerrado y acotado

$$\Downarrow$$

$E \subseteq K$ cerrado es COMPACTO

- Si $K \subseteq X$ COMPACTO y $f : X \to Y$ continua $\implies f(K) \subseteq Y$ COMPACTO.
- Si $K \subseteq X$ COMPACTO y $f : K \to \mathbb{R}$ continua $\implies f$ alcanza sus máximo y mínimo en $K$.

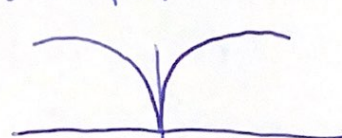
## FUNCIONES LIPSCHITZIANAS

$f$ es Lipschitz si: $(f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2))$ $M$ fijo.

$\forall p, q \in X_1 \quad d_2(f(p), f(q)) \leq M \cdot d_1(p, q)$ (Sus cuerdas no tienen demasiada pendiente)

$f$ LIPSCHITZ $\implies f$ continua !!!

Ejemplo:
$f(x) = \sqrt{|x|}$



CONTINUA PERO NO LIPSCHITZ

Toda norma es Lipschitz de $M = 1$ con respecto a sí misma:

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v - w\|$$

## NORMAS EQUIVALENTES

En dimensión finita todas las normas son equivalentes entre sí.

$\forall p, q \quad c\|\cdot\|_p \leq \|q\| \leq C\cdot\|\cdot\|_p$ (Abierto en $\|\cdot\|_p$ <=> Abierto en $\|\cdot\|_q$ $\forall p,q \in \{1,\dots,\infty\}$)

- Unión de abiertos ⟹ ABIERTO
- Intersección de cerrados ⟹ CERRADO
- Intersección finita de abiertos ABIERTO y unión infinita de cerrados CERRADO

## CONEXIÓN

Un camino es una aplicación continua $\alpha: I \to X$
$t \in I \to \alpha(t) \in X$.

$E \subset X$ es conexo por caminos si $\forall p, q \ \exists \alpha(t): [0,1] \to E$, $(\alpha \in E)$
$\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.

- Si $U$ abierto conexo por caminos, $\nexists \overbrace{U_1, U_2}^{\text{no vacíos}}$ // $U_1 \uplus U_2 = U$

Componentes conexas por caminos $\equiv p \in E$, $\{q \in E$, $\exists \alpha(t)$ // $\alpha(0) = q$ y $\alpha(1) = p\}$ con $\alpha(t) \in E$. $E$ se puede particionar en estos conjuntos.

$\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\exists!$ partición de abiertos conexos por caminos (finita o numerable)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{CONVEXO} \Rightarrow \text{CONEXO} \\ \not\Leftarrow\end{array}}$$

## CONCEPTOS ADICIONALES $X$ e.m y $E \subseteq X$

- $x \in X$ $\in$ int$(E) \iff \exists r > 0$ // $B(x,r) \subseteq E$
(int $E$ es el abierto más grande contenido en $E$)
- $\overline{E}$ (cierre de $E$) $= \{p$ // $p = \lim\{x_k\}$ para algún $\{x_k\} \subset E$ y convergentes$\}$.
(Si $E$ cerrado, $\iff E = \overline{E}$)