FORMAS CUADRÁTICAS

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, donde K es un cuerpo de característica distinta de 2.

Definición 1. Llamaremos forma cuadrática sobre V a toda aplicación $Q: V \longrightarrow K$ tal que:

i) $Q(\lambda \vec{v}) = \lambda^2 Q(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$, $\lambda \in K$.

ii) La aplicación $F_Q : V \times V \longrightarrow K$ definida por

$$F_Q(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \left[Q(\vec{u}+\vec{v}) - Q(\vec{u}) - Q(\vec{v}) \right] \quad , \vec{u}, \vec{v} \in V,$$

es una forma bilineal.

Es fácil ver que F_Q es una aplicación simétrica, y que además $Q(u) = F_Q(u,u)$. En consecuencia, si fijamos una base $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ en V la forma cuadrática Q admite una representación matricial mediante una matriz A que es simétrica. Es decir

$$(*) \qquad Q((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado un cambio de base, pongamos $\vec{x} = C \vec{x}'$ cambia la fórmula $(*)$ de la siguiente manera:

$$Q((x'_1, \dots x'_n)) = (x'_1, \dots, x'_n) B \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \boxed{B = C^t A C}$$

Definición 2. Sea $Q: V \longrightarrow K$ una forma cuadrática. Si existe una base β de V en la que $Q(x_1, \dots x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$ para unos ciertos $a_j \in K$, decimos que Q está escrita en forma canónica.

En el caso de que el cuerpo K sea $\mathbb{R}$ y tengamos definido en V un producto escalar, se verifica el siguiente resultado.

<u>Teorema</u> 1 Sea $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática con matriz simétrica A respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces existen una base ortonormal $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$Q(\vec{u}) = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2, \text{ donde } \vec{u} = x_1'\vec{u}_1 + \dots + x_n'\vec{u}_n.$$

<u>Demostración</u>.
Basta observar que $Q(\vec{u}) = \vec{u}^t A \vec{u} = \vec{u}^t \cdot I_n (A\vec{u}) = \langle \vec{u}, A\vec{u} \rangle$
La transformación $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es autoadjunta, y por tanto diagonaliza en una base ortonormal de autovectores $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. En consecuencia $A = U^t D U$ para $U \in O(n;\mathbb{R})$
Por esto, si $\vec{x} = U\vec{x}'$ es el cambio de base, entonces

$$Q(\vec{x}') = \vec{x}^t U^t D U \vec{x} = \vec{x}'^t D \vec{x}' = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

para $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

<u>NOTA</u>: Se deduce del teorema anterior la existencia de una forma canónica para las formas cuadráticas reales. Queda pendiente estudiar la unicidad de la expresión. Este resultado se conoce como "Ley de inercia de las formas cuadráticas".

Observa el siguiente ejemplo. Si consideramos la forma en $\mathbb{R}^3$ dada por $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3$, entonces $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$ donde $y_1 = x_1 - 2x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$
Además, si consideramos una base ortonormal de autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos que $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$.

Teorema 2. (Ley de inercia de las formas cuadráticas)
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, y $Q: V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Si en una base $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se escribe como

$$(1) \quad Q(\vec{x}) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_m x_m^2 \,, \quad a_j \in \mathbb{R}, \; a_j \neq 0,$$

y en otra base $\beta' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ se escribe como

$$(2) \quad Q(\vec{x}) = b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2 \,, \quad b_j \in \mathbb{R}, \; b_j \neq 0,$$

ENTONCES, se tiene que $\boxed{m = r = \text{rango}(Q) := \text{rang}(A)}$, y el número de coeficientes positivos y negativos en (1) y en (2) coinciden.

Demostración. Para demostrar el teorema comenzaremos reescribiendo (1) como

$$(1)' \quad Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \cdots - \alpha_m x_m^2 \,, \text{ con } \alpha_j > 0,$$

y también (2) como

$$(2)' \quad Q(\vec{x}) = \beta_1 y_1^2 + \cdots + \beta_p y_p^2 - \beta_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - \beta_r y_r^2 \,, \quad \text{con } \beta_j > 0.$$

Entonces tenemos que demostrar que $k = p$ y $m = r$.

Consideraremos dos subespacios especiales de V:

$$V_1 := L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \quad , \quad V_2 := L(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n) \,.$$

Si $k > p$, entonces, por la fórmula de las dimensiones, tenemos que:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = k + (n-p) = n + (k-p) > n = \dim V.$$

En consecuencia $V_1 \cap V_2 \neq \{\vec{0}\}$. Sea $\vec{z} \in V_1 \cap V_2$, $\vec{z} \neq \vec{0}$.
El vector $\vec{z}$ se expresa en ambas bases como

$$\vec{z} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k = \mu_{p+1} \vec{u}_{p+1} + \cdots + \mu_n \vec{u}_n \,,$$

y entonces

$$Q(\vec{z}) = \alpha_1 \lambda_1^2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k^2 = -\beta_{p+1} \mu_{p+1}^2 - \cdots - \beta_r \mu_r^2 \,,$$

y por tanto k no puede ser estrictamente mayor que p.

Análogamente, se demuestra que p no puede ser mayor que k (ejercicio), por lo que $p=k$.

La igualdad $m = r = \text{rango}(A)$, con A la matriz de Q, se deduce de que el rango de una forma cuadrática es invariante por cambio de base (ejercicio). $\boxtimes$

<u>Definición 3</u>. Sea $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática real. Si Q está dada en una base β por la expresión

$$(**) \qquad Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_p x_p^2 - \beta_1 x_{p+1}^2 - \dots - \beta_q x_{p+q}^2$$

con $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, se definen los siguientes invariantes:

$p :=$ índice de inercia positivo de Q

$q :=$ índice de inercia negativo de Q

$s := |p-q| =$ signatura de Q

Observa que se da la igualdad $\text{rango}(Q) = r = p+q$.

<u>Nota</u>. Observa que si Q está dada como en $(**)$, podemos hacer el siguiente cambio de base:

$$\begin{cases} y_j := \sqrt{\alpha_j}\, x_j, & 1 \leq j \leq p \\ y_{j+p} := \sqrt{\beta_j}\, x_{j+p}, & 1 \leq j \leq q \\ y_j := x_j, & j > p+q = r \end{cases}$$

y así reescribimos Q como:

$$Q(\vec{x}) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 .$$

Esta expresión recibe el nombre de <u>forma normal de la forma cuadrática Q</u>.

FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS. CRITERIOS DE SYLVESTER.

Sea V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n.

Definición. Sea $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

(a) Q se dice definida positiva si $Q(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Si $Q(\vec{x}) \geq 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces Q se dice semidefinida positiva.

(b) Q se dice definida negativa si $Q(\vec{x}) < 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Si $Q(\vec{x}) \leq 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces Q se dice semidefinida negativa.

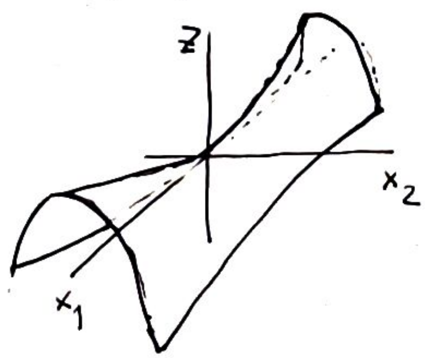
Ejemplos:

1) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es definida positiva

2) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2$ es semidefinida negativa.

3) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ no es ni definida positiva ni negativa

observa que su gráfica es:



En esta sección demostraremos un criterio efectivo que nos permitirá identificar las formas cuadráticas definidas tanto positivas como negativas. Son los llamados criterios de Sylvester para formas cuadráticas.

Teorema (Criterio de Sylvester para formas cuadráticas def. positivas) Sea $Q: V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$ con A una matriz simétrica, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Si los menores principales de A son positivos, es decir:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \dots, \ \Delta_n = \det(A) > 0,$$

entonces la forma Q es definida positiva

Demostración Se hará por inducción en $n = \dim V$, $V = L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Si $n=1$, entonces $Q(\vec{x}) = a_{11} x_1^2 > 0$ para $x_1 \neq 0$.
Si $n=2$, entonces $Q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$. Supongamos que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, entonces podemos reescribir Q como

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2\right)^2 + \left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}\right) x_2^2 = \Delta_1\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^2\right) + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 > 0.$$

Supongamos que se da el criterio para dimensión $\leq n-1$, y consideremos la forma cuadrática definida por la submatriz de A dada por

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

es decir consideramos $G(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j$. Por inducción G es definida positiva y por tanto en una base ortonormal β de $L(e_1, \dots, e_{n-1})$ diagonaliza, es decir $G(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2$, con $y_1, \dots, y_{n-1}$ coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$. En consecuencia Q en la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{e}_n\}$ tiene la expresión

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2 + (b_{1n} y_1 y_n + \cdots + b_{n-1,n} y_{n-1} y_n) + a_{nn} y_n^2$$

donde $y_n = x_n$. En consecuencia, completando cuadrados obtenemos:

$\vdots$

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_{1n}}{2\lambda_1} y_n \right)^2 + \cdots + \lambda_{n-1} \left(y_{n-1} + \frac{b_{n-1,n}}{2\lambda_{n-1}} y_n \right)^2 + b y_n^2$$

donde $b = a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{4\lambda_1^2} - \cdots - \frac{b_{n-1,n}}{4\lambda_{n-1}^2}$. En consecuencia, en las variables:

$$z_j := y_j + \frac{b_{j,n}}{2\lambda_j} y_n \ , \ 1 \leq j \leq n-1 \ ; \ z_n = y_n \ ,$$

se obtiene que $Q(\vec{x}) = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} z_{n-1}^2 + b z_n^2$. Observa que $\lambda_j > 0$, luego sólo falta demostrar que $b > 0$ para obtener el resultado.

Si C es el cambio de base de $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(z_1, \ldots, z_n)$ sabemos que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & b \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} C \quad , \text{ con } \det C = 1$$

Tomando determinantes vemos que $\left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \cdot b = \det(C)^2 \Delta_n > 0$. Luego, $b > 0$.

<u>Proposición</u>. Si $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$, con A matriz simétrica y definida positiva, entonces los menores principales de A son todos positivos.

<u>Demostración</u>. En la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ tenemos que Q es definida positiva. Sea $E_k = L(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Sea $Q_k(\vec{x}) := \sum_{1 \leq i,j \leq k} a_{ij} x_i x_j$. Entonces Q_k es definida positiva en E_k. Luego:

$$Q_k(\vec{x}) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_k y_k^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{pmatrix} = C_k^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} C_k \ ,$$

en una base β_k adecuada. Por tanto

$$0 < a_1 \cdot \ldots \cdot a_k = |C_k|^2 \Delta_k \quad \Rightarrow \quad \Delta_k > 0 \ . \quad \boxtimes$$

Teorema (Criterio de Sylvester para formas cuadráticas definidas negativas).
Sea Q una forma cuadrática dada por la matriz simétrica $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ en una cierta base $\mathcal{C}$. Entonces, son equivalentes

(a) Q es definida negativa
(b) Los menores principales de A van alternando el signo comenzando con $\Delta_1<0$.

Demostración Pongamos $Q(\vec{x})=\vec{x}^t A\vec{x}$ sea $B=-A$. Entonces $H(\vec{x}):=\vec{x}^t B\vec{x}$ es una forma cuadrática definida positiva. Por el criterio de Sylvester para formas cuadráticas definidas positiva se tiene que los menores principales de B son >0. En consecuencia

$$\tilde{\Delta}_1=-a_{11}>0,\ \tilde{\Delta}_2=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{12} & -a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \tilde{\Delta}_n=\det B>0$$

lo que implica el enunciado $\boxtimes$

EJERCICIO. Halla los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

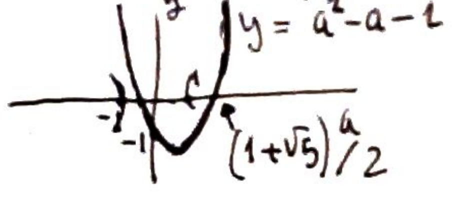
$$Q(\vec{x})=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Sol. Basta usar el criterio de Sylvester para obtener las siguientes desigualdades:

$$a>0,\ \begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}>0,$$

es decir, $a>0$, $a^2-1>0$, $a^2-a-1>0$. Por otro lado, se



deduce que $Q>0$ si $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.