Cálculo Numérico I

1. Sea A una matriz $n \times m$ de rango r, y sea $A = U\Sigma V^*$ su Singular Value Decomposition.

   a) Demostrar que las columnas $\{V^{(r+1)}, \dots, V^{(m)}\}$ de V son una base ortonormal de $\mathrm{Ker}(A)$, el núcleo de A.

   b) Demostrar que las columnas $\{U^{(1)}, \dots, U^{(r)}\}$ de U son una base ortonormal de $\mathrm{Ran}(A)$, la imagen de A.

   c) Si A es invertible, demostrar que $|||A^{-1}|||_2 = \dfrac{1}{\sigma_n}$.

   d) Sea $r = m \leq n$, y sea A^+ la pseudoinversa de A. Demostrar que $A^+ = VSU^*$, donde S es una matriz diagonal $m \times n$ cuyos valores diagonales son $1/\sigma_k$, siendo $\{\sigma_k\}_{k=1}^m$ los valores singulares de A.

2. Se consideran las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular la Singular Value Decomposition de A_1 y de A_2

   b) Calcular $\mathbb{P}_{\mathrm{Ran}(A_1)}$ y $\mathbb{P}_{\mathrm{Ker}(A_2)}$

3. Denotemos por $\epsilon = 2^{-52}$ el *epsilon-máquina*, y sea

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Comprobar que A es invertible y que una SVD de A es dada por las matrices

$$U = I\,, \; \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Usando esta SVD, escribir la solución al sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ cualquiera.

   c) Sea $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sea $\widehat{x(b)}$ la representación en floating point de la solución al sistema $Ax = b$ calculada como en el apartado anterior, y sea $\widehat{b}$ la representación en floating point de $A\,\widehat{x(b)}$. Comprobar que $\|\widehat{b} - b\|_2 = \dfrac{1}{2}$.

   d) Para el mismo vector b del apartado anterior, y para $\alpha > 0$, sea $x_\alpha(b)$ la solución regularizada de Tikhonov al sistema $Ax = b$, y sea $b_\alpha = Ax_\alpha(b)$.

      - Calcular el número de condición de A y el número de condición del problema regularizado con $\alpha > 0$.
      - Comprobar que la representación en floating point de $x_\alpha(b)$ concide con $\widehat{x(b)}$ para todo $\alpha < \epsilon^3$.
      - Comprobar que, para todo $\alpha > \epsilon$, tenemos $\|b_\alpha - b\|_2 > 1$.

4. Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Demostrar que

   - $|||QB|||_F = |||B|||_F$ y $|||QB|||_2 = |||B|||_2$ para toda matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria
   - $|||BP|||_F = |||B|||_F$ y $|||BP|||_2 = |||B|||_2$ para toda matriz $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria

   donde denotamos con $|||B|||_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |B_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norma de Frobenius.

   Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz de rango r, y sea $A = U\Sigma V^*$ su SVD. Usando las identidades anteriores, comprobar que $|||A|||_2 = \sigma_1$, y demostrar que

   $$|||A|||_F = \left(\sum_{k=1}^{r} \sigma_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz de rango r, y sea $A = U\Sigma V^*$ su SVD.

   a) Denotemos por $\{A^{(j)}\}_{j=1}^{m}$ los vectores columna de A. Demostrar que

   $$\langle A^{(j)}, U^{(k)}\rangle = \sigma_k \overline{V_{jk}}.$$

   b) Sea $\nu < r$ y sea $A_\nu \in \mathbb{C}^{n\times m}$ la matriz tal que, para todo $x \in \mathbb{C}^m$,

   $$A_\nu x = \sum_{k=1}^{\nu} \sigma_k \langle x, V^{(k)}\rangle U^{(k)}.$$

   Demostrar que, para toda matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ de rango $\leq \nu$,

   $$|||A - B|||_2 \leq |||A - A_\nu|||_2 = \sigma_{\nu+1}.$$

   (Pista: verificar que la misma demostración dada para la norma de Frobenius, con peqeños cambios, permite demostrar esta afirmación.)

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz invertible y sea $A = U\Sigma V^t$ su SVD. Sea $\mathcal{C} = \{x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ la circunferencia de radio 1, y sea $\mathcal{E} = \{y = \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2 : y = Ax, x \in \mathcal{C}\} = A\mathcal{C}$ la imagen de los puntos de $\mathcal{C}$ bajo la aplicación A. Demostrar que $\mathcal{E}$ es una elipse cuyo semieje mayor tiene longitud σ_1 y su dirección es dada por $U^{(1)}$.
   (Pista: usar la expresión dada por la SVD de $A^{-1}y$, y encontrar así los $y \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|A^{-1}y\|_2 = 1$.)