Hoja 7

Cambio de variables.

1.- Dibujar la región Ω y expresar la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, donde $a > 0$.

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v\,, \\ y = v - u^2\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen D mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_D (x - y + 1)^2\,dx\,dy$ directamente, y haciendo un cambio de variables para llevarla a la región T.

3.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_\Omega (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy\,,$$

donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi,0), (2\pi,\pi), (\pi,2\pi), (0,\pi)$.

Solución: $\frac{1}{3}\pi^4$

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2\,, \\ y = 2\,uv\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Determinar la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R cuyos vértices son $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω.

Solución: (a) $J(u,v) = 4(u^2 + v^2)$ (c) $160/3$

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\int_D f(xy)\,dx\,dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du\,,$$

siendo D la región del primer cuadrante limitada por las líneas $xy = 1$, $xy = 2$, $\dfrac{y}{x} = 1$, $\dfrac{y}{x} = 4$.

6.- Para cada $R > 0$ considérese $I(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,dt$.

(a) Demostrar que

$$I(R)^2 = \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$

siendo Q el cuadrado $Q = [-R,R] \times [-R,R]$.

(b) Sean D_R y D_{2R} los discos de centro el origen y radios R y $2R$, respectivamente. Demostrar que

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < I(R)^2 < \int_{D_{R2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que $I(R) \to \sqrt{\pi}$ cuando $R \to +\infty$. Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p,R) = \int_{D_R} \frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

sobre el disco $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq R^2\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p,R)$ tiene límite cuando $R \to +\infty$.

8.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\displaystyle\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2 = 2\,z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2+y^2$ y $x^2+y^2 = 1$.

Solución: (a) $\frac{16}{3}\pi$ (b) $\frac{1}{8}\pi$

9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\displaystyle\int_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (b) $\frac{124}{5}\pi a^5$

10.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = z\big\}$.

Solución: $\frac{\pi}{10}$

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Solución: $\frac{4\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2+y^2 = 4\,z$.

(b) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} \leq 1\}$.

Solución: (a) $\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)$ (b) 1

13.- Demostrar que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi\,a\,b$. Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

14.- Sea T el toro sólido en $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar el círculo $(y-a)^2+z^2 = b^2$ del plano $x = 0$ alrededor del eje Z. Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de T es $2\,\pi^2\,a\,b^2$.