HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Explica por qué el conjunto

$$X = \{ (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : 3x^2 + 5y^7 + v^2 - e^{uz} = 0 \},$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^5$. Dí, razonadamente, cuál es la dimensión geométrica de X.

S/ $0 = (0,0,0,0,0) \notin X$. Sea $U = \mathbb{R}^5$ abierto y

$F : \mathbb{R}^5 = U \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z,u,v) = 3x^2 + 5y^7 + v^2 - e^{uz}$.

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^5)$ y $DF(x,y,z,u,v) = (6x, 35y, -ue^{uz},$

$-ze^{uz}, 2v)$ tiene rango 1 salvo en el punto

0 que no pertenece a X: el rango de DF es 1 en X.

Además, $F^{-1}(\{0\}) = X = \mathbb{R}^5 \cap X$, luego X

es una C^∞-subvariedad de dimensión $5-1=4$.

Problema 2. Consideramos los dos cilindros siguientes en $\mathbb{R}^3$

$$C_1 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 = 1 \} \quad , \quad C_2 = \{ (x,y,z) : y^2 - 2y + z^2 = 0 \} .$$

Demuestra que la intersección $C_1 \cap C_2$ es un subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Dí, razonadamente, cuál es la dimensión geométrica de esta intersección.

S/ $F : U = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2-1 \ , \ y^2-2y+z^2)$$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2z \end{pmatrix}$

rango $DF(x,y,z) \geq 1$ en todo $\mathbb{R}^3$ y rango $DF(x,y,z) = 1$ si (x,y,z) es de la forma $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$, pero este punto no está en C_1. O bien $(x,1,0)$ con $x \in \mathbb{R}$, pero no está en C_2. Así que rango DF es 2 en todo punto de $C_1 \cap C_2$. Además,

$$F^{-1}(\{0\}) = C_1 \cap C_2 = (C_1 \cap C_2) \cap \mathbb{R}^3$$

luego $C_1 \cap C_2$ es una sub. dif. de dimensión $3-2=1$

Problema 3. Demuestra que el siguiente conjunto es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$, determinando su dimensión geométrica

$$X = \left\{ (x,y,z,u) : \begin{array}{rcl} x^2 + \cos x + e^z & = & 3 \\ u^2 + y^5 & = & 1 \end{array} \right\}.$$

S/ $F : U = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F(x,y,z,u) = (x^2 + \cos x + e^z - 3,\ u^2 + y^5 - 1)$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, $DF(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} 2x - \sin x & 0 & e^z & 0 \\ 0 & 5y^4 & 0 & 2u \end{pmatrix}$

rango $DF(x,y,z,u) \geq 1$ y rango $DF(x,y,z,u) = 1$ si $y=0$, $u=0$, pero $(x,0,z,0) \notin X$. Así que en X, rango $DF = 2$. Como $F^{-1}(\{(0,0)\}) = X = \mathbb{R}^4 \cap X$,

X es una subvariedad dif. de dim $4-2=2$.

Problema 4. Consideramos la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 + x_3^2 + 7x_2x_4 \\ e^{x_1}x_3 + 5e^{x_2} - \operatorname{sen} x_3 - x_1x_4^2 \end{pmatrix},$$

y los puntos $a = (0, 1, 0, 0)$ y $a' = (0, 0, 0, 1)$.

a) Queremos resolver el sistema de dos ecuaciones $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(a)$ cerca del punto a. Determina qué dos variables, entre las x_1, x_2, x_3, x_4, se puede asegurar que se despejan como funciones diferenciables de las otras dos.

b) Misma pregunta para el punto a'.

S/ $a = (0,1,0,0)$ $\quad F(a) = (1, 5e)$; $F = (f_1, f_2)$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -x_2 \operatorname{sen} x_1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \cos x_1 + 7x_4 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) = 1$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2x_3 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 7x_2 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(a) = 7$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_3 e^{x_1} - x_4^2 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) = 0$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 5e^{x_2} \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) = 5e$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = e^{x_1} - \cos x_3 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) = 0$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -2x_1x_4 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(a) = 0$

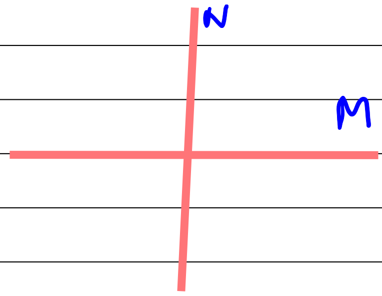
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5e & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5e & 0 \end{vmatrix} = -35e \neq 0$$

Se pueden despejar x_2 y x_4 en función de x_1 y x_3

Problema 5. ¿Es la unión de dos subvariedades siempre una subvariedad? ¿puede serlo alguna vez? Examina estas preguntas mediante ejemplos en el plano.

S/ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$



M es subv. de dim 1 con

$F(x,y) = y$

N es sub. de dim. 1 con $G(x,y) = x$

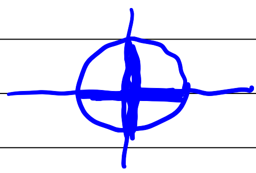
Pero $M \cup N$ no es una subv. La dif. está en $(0,0)=0$

Si lo fuera, $\exists\, F : U \to \mathbb{R}$ dif con rango $DF = 1$ en $M \cup N$ y $F^{-1}(\{0\}) = M \cup N$. Como

$$DF(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

en $(0,0) \in M \cup N$ debería tener rango 1.

- Si $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$, TF Implícita, $x = f(y)$ con f dif. y $F(f(y), y) = 0$



Pero f no es una función porque $f(0)$ debería tomar infinitos valores

- De manera similar se descarta $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

• Si $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$ y

$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$

$M \cup N$ es una subvariedad.

Nota: ¿Como se parametriza M? $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t) = (t, 1)$

$D\varphi(t) = (1, 0)$ tiene rango 1

¿Como se parametriza N? $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t) = (1, t)$

$D\varphi(t) = (0, 1)$ tiene rango 1.

Problema 6. Comprueba que las siguientes son subvariedades de $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x,y,z) : z = xy\} \quad , \quad Y = \{(x,y,z) : z = 0\}.$$

¿Es $X \cap Y$ una subvariedad? Razona tu respuesta.

• X es una subvariedad:

$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(x,y,z) = xy - z$, $\quad F^{-1}(\{0\}) = X$

$DF(x,y,z) = (y, x, -1)$ tiene rango 1 siempre

X es una subv. de dim $3-1=2$

• Y es una subvariedad

$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad G(x,y,z) = z$, $\quad G^{-1}(\{0\}) = Y$

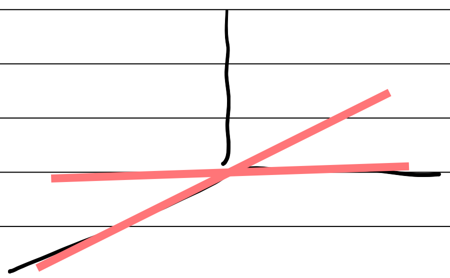
$DG(x,y,z) = (0,0,1)$ tiene rango 1 siempre.

X es una subvariedad de dim $3-1=2$

· X es un paraboloide hiperbólico (silla de montar)

e Y es un plano

$X \cap Y : \ xy = 0 = z \iff \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix}$ ó $\begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix}$



$X \cap Y$ no es subvariedad.

Problema 7. ¿Es necesario que un camino $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^N$ sea inyectivo para que su imagen sea una subvariedad? Examina el caso de $\alpha(t) \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $I = \mathbb{R}$.

S/ $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$ es una parametrización de la subv. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, pero α no es inyectiva en $\mathbb{R}$ ya que $\alpha(t+2\pi) = \alpha(t)$