def: (bolas en espacios vectoriales)

sea V espacio vectorial, $\|\cdot\|$ norma en V

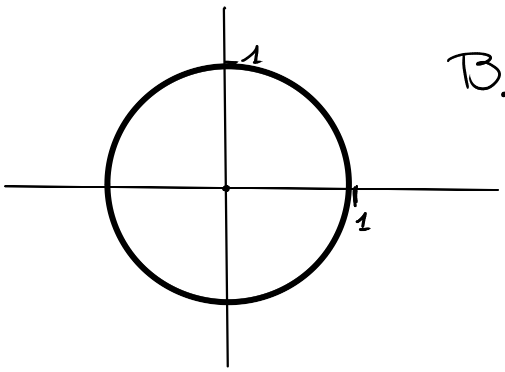
sea $c \in V$, $r > 0$, decimos

$$B_{\|\cdot\|}(c,r) = \{ x \in V : \|x - c\| \leq r \}$$

observación: para una norma fija, toda bola es una traslación (por c) y una dilatación (por r) de $B_{\|\cdot\|}(0,1)$

ejemplos: bolas de las normas p en $\mathbb{R}^2$

$p = 2$

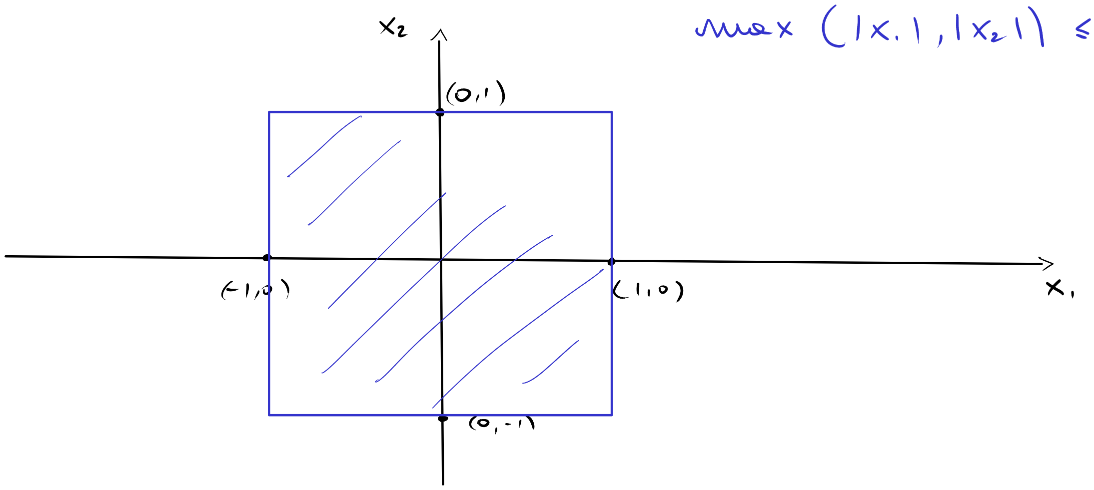


$$B_2(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1 \}$$

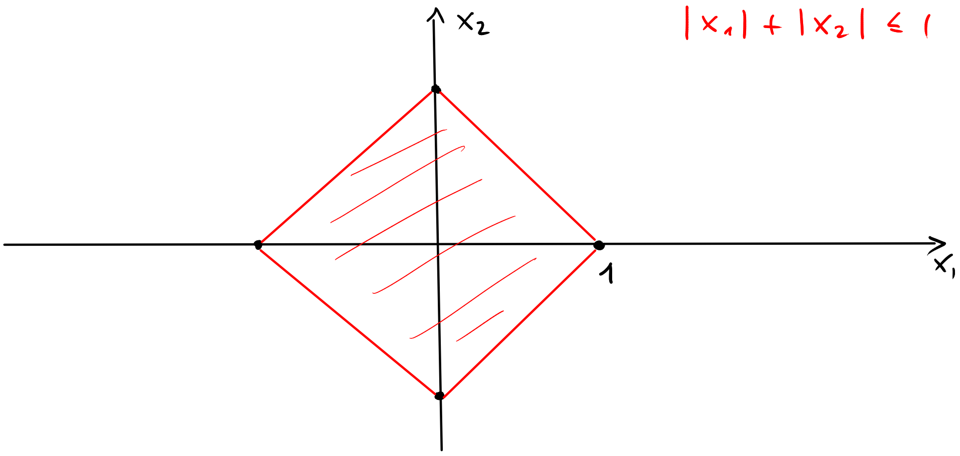
$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$$

$p = \infty$

$$B_\infty(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|x\|_\infty \leq 1}_{\max(|x_1|,|x_2|) \leq 1} \}$$

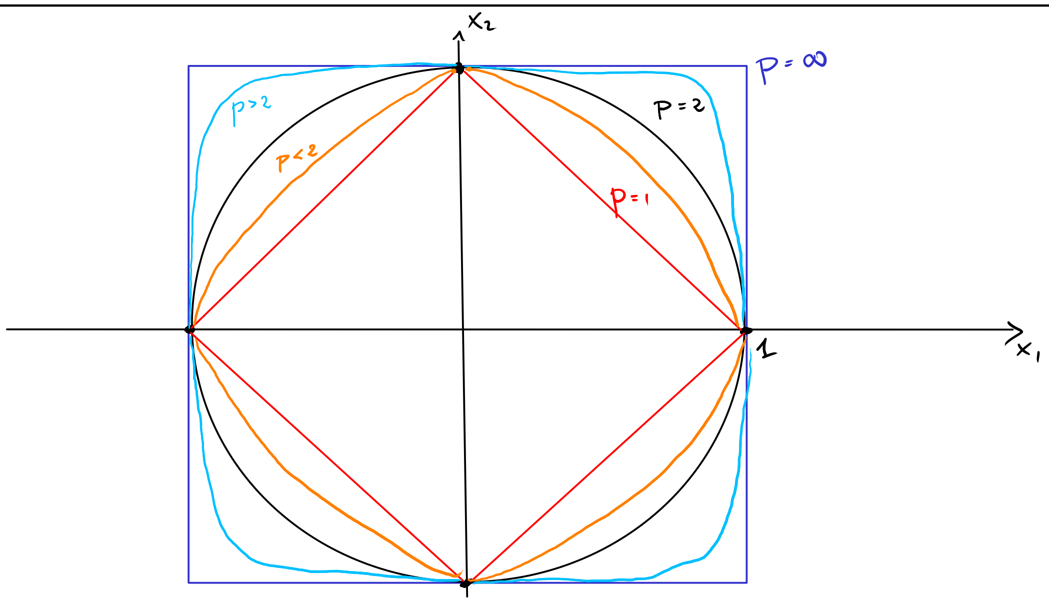


$p = 1 \qquad B_1(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|x\|_1 \le 1}_{|x_1| + |x_2| \le 1} \}$

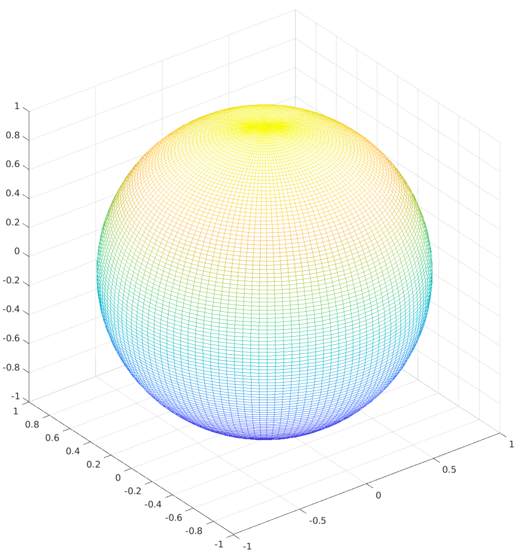


Boles de les normes p en $\mathbb{R}^2$

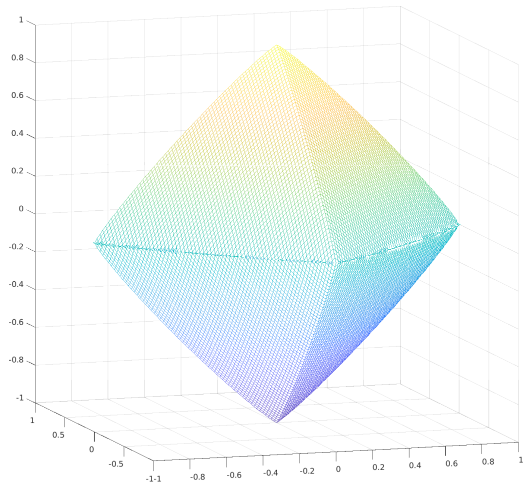
$1 \le p \le \infty$



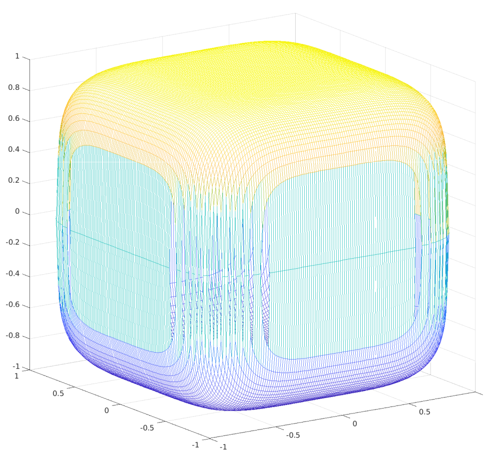
Boles de les normes p en $\mathbb{R}^3$:



$p = 2$



$p = 1.1$



$p = 5$

definición: sea V espacio vectorial

dos normas en V $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ son equivalentes si $\exists\ c_1, c_2 > 0$ t.q.

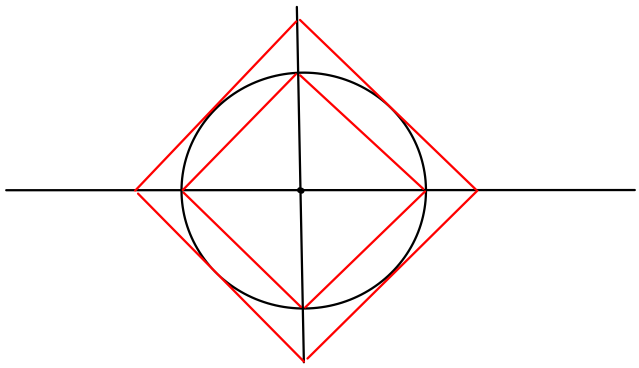
$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a \qquad \forall\ x \in V$$

↳ esto es equivalente a decir que $\exists\ r_1, r_2 > 0$ t.q.

$$B_a(0,r_1) \subset B_b(0,1) \subset B_a(0,r_2)$$

ejercicio

ejemplo: $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_2$



teorema (en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes)

sea $V = \mathbb{K}^n$ y sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera

$\Rightarrow$ $\exists\ c_1, c_2 > 0$ t.q.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_1 \qquad \forall\ x \in V.$$

demostración

$\leq$) sea $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ base canónica de V

todo $x \in V$ es $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $x_k \in \mathbb{K}$ $\forall k \in \{1..n\}$

$$\|x\| = \Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desig. tr.}}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, \|e_k\|$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| \leq \underbrace{\max_{k\in\{1..n\}} \|e_k\|}_{c_2} \; \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k|}_{\|x\|_1}$$, que demuestra $\leq$)

$\leq$) por contradicción : supongamos que $\forall c_1 > 0 \ \exists x \in V$ t.q. $c_1 \|x\|_1 > \|x\|$ $\left(\frac{\|x\|_1}{\|x\|} > \frac{1}{c_1} \right)$

esto quiere decir que $\sup_{x \in V} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = +\infty$

$\Rightarrow \ \exists \ \underbrace{\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V}$: $\frac{\|x_j\|}{\|x_j\|_1} \longrightarrow 0$: sea $y_j = \frac{x_j}{\|x_j\|_1} \in V$

SUCESIÓN EN V: $x_j \in V$, no es la componente j

a) observemos que $\underbrace{\{y_j\}_{j=1}^{\infty}}_{\text{SUCESIÓN EN V}}$ es t.q. $\|y_j\|_1 = 1 \ \forall j$, $\|y_j\| \xrightarrow{j \to \infty} 0$ } fuente de la contradicción

b) $\|y_j\|_1 = 1$: $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada en $\|\cdot\|_1$ $\Rightarrow$ por Bolzano Weierstrass
$\exists \ \{y_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión convergente a un punto $\boxed{y \in V}$
en la norma $\|\cdot\|_1$: $\|y_{j_k} - y\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$

por la desigualdad $\leq$) demostrada al inicio
esto implica que $y_{j_k} \longrightarrow y$ también en la norma $\|\cdot\|$:

$$\|y_{j_k} - y\| \leq c_2 \|y_{j_k} - y\|_1 \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ por la unicidad del límite $\boxed{y = 0}$

c) usando la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_1$

$$\Big| \underset{1}{\underset{\parallel}{\|y_{j_k}\|_1}} - \underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ 0}}{\|y - y_{j_k}\|_1} \Big| \leq \underset{\|(y - y_{j_k}) + y_{j_k}\|}{\underset{\parallel}{\|y\|_1}} \leq \underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ 0}}{\|y - y_{j_k}\|_1} + \underset{1}{\underset{\parallel}{\|y_{j_k}\|_1}}$$

ya que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$: $\|y - y_{j_k}\|_1 < \varepsilon \ \forall k > M$

tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ $1 - \varepsilon \leq \|y\|_1 \leq 1 + \varepsilon$

es decir $\|y\|_1 = 1$. $\Rightarrow$ $\boxed{y \neq 0}$ porque $\|\cdot\|_1$ es una norma #
(propiedad I)