Ecuaciones-diferenciales-Final-2...

carlymb

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Ecuaciones Diferenciales, GRADO EN MATEMÁTICAS, UAM — Año 2020/2021

Examen final — 3 de junio de 2021

INSTRUCCIONES

- El examen consta de 5 preguntas y su duración es de tres horas.
- **Cada problema se debe contestar en una hoja diferente.** Pon tu nombre y tu número de DNI en todas las hojas.

---

1. (3 puntos) Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Las respuestas sin justificación no serán tenidas en cuenta.

(a) **(0,5 puntos)** Para que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas en $[0,1]$ sea una sucesión de Cauchy en L^∞ basta que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy para cada $x \in [0,1]$.

(b) **(0,75 puntos)** La sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

converge uniformemente en $0 \leq x < \infty$.

(c) **(0,75 puntos)** La ecuación

$$y^2 + 2xyy' + \operatorname{sen}(y)y' = 0.$$

admite un factor integrante que depende solo de la variable y.

(d) **(1 punto)** El sistema

$$\begin{cases} x' &= -xy^4, \\ y' &= yx^4 \end{cases}$$

tiene al menos un punto crítico estable.

---

2. (1,5 puntos) Se considera la ecuación autónoma $y' = f(y)$, de la que se sabe:

- $f \in C^1(\mathbb{R})$.
- f se anula exactamente en $-1, 0$ y 1.
- f es negativa en $(0,1)$ y no negativa en el resto de $\mathbb{R}$.
- f' se anula en $1/2$ y en $-1/2$.
- $$0 < \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{f(s)}ds < \infty, \quad \int_2^\infty \frac{1}{f(s)}ds = \infty.$$

(a) **(0,75 puntos)** Hacer una representación del diagrama de fases, especificando soluciones estacionarias y estabilidad.

(b) **(0,75 puntos)** Representar la gráfica de las soluciones correspondientes a los siguientes datos iniciales: $y(0) = -1/4$, $y(0) = 1/4$, $y(0) = 2$, indicando intervalos de crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad.

3. (2 puntos) Sea la ecuación

$$x'(t) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sqrt{x(t) - t^2}}{t}\right)$$

(a) **(0,75 puntos)** Determinar razonadamente los dominios donde es aplicable el teorema de existencia y unicidad de Cauchy-Picard.

(b) **(0,5 puntos)** Considerar el dato $(t_0, x_0) = (1, 3)$. Probar que en el intervalo de existencia, $I = [1, t_1)$, la solución verifica

$$3 \leq x(t) \leq 2 + t.$$

(c) **(0,75 puntos)** Estudiar razonadamente una estimación de t_1.

---

4. (2 puntos) Supongamos que $q, r \in \mathcal{C}^1$ cumplen que $q(x) < r(x) < 0$. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones no triviales de $y'' + q(x)y = 0$ e $y'' + r(x)y = 0$, respectivamente.

(a) **(0,75 puntos)** Probar que si y_1, y_2 son negativas en cierto intervalo I, entonces el wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

(b) **(0,5 puntos)** Probar que si una función $f \in \mathcal{C}^1$ es negativa para $a < x < b$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(a) \leq 0 \leq f'(b)$.

(c) **(0,75 puntos)** Deducir de los apartados anteriores que si y_1, y_2 son como en el enunciado, entonces y_2 se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de y_1.

---

5. (1,5 puntos) Estudiar en función de los valores del parámetro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ la estabilidad de los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' &= y + \alpha x(x^2 + y^2), \\ y' &= -x + \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$