Problemas autónomos en $\mathbb{R}^n$

En los siguientes problemas f es un campo de vectores C^1 en $\mathbb{R}^n$ y nos referiremos a la ecuación

$$(E) \qquad x' = f(x).$$

Se dice que f es COMPLETO si todas las curvas de campo, es decir las tangentes en cada punto a f, o bien, equivalentemente, las soluciones del problema (E), están definidas en $(-\infty, \infty)$. Una función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, es una integral primera de (E) si es constante a lo largo de soluciones de (E), es decir, si

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \equiv \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = 0.$$

1.- Demostrar que si V es una integral primera para (E) tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty,$$

entonces f es completo.

2.- Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty.$$

Sea $x = x(t)$ una solución de (E).

(a) Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le C.$$

Demostrar que $x(t)$ es indefinidamente prolongable.

(b) Demostrar que si

$$\left|\frac{d}{dt}V(x(t))\right| \equiv |\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle| < M,$$

entonces f es completo.

3.- Sea $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un potencial que verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = \infty.$$

(a) Demostrar que las ecuaciones de Newton

$$x'' + \nabla U(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

son completas.

(b) Demostrar lo mismo que en **(a)** cuando además se añade un término de rozamiento, es decir,

$$x'' + \nabla U(x) = -R(x'),$$

donde $R \in C^1(\mathbb{R}^3)$ verifica $\langle \xi, R(\xi) \rangle \ge 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.
Indicación: Multiplicar la ecuación por $x'(t)$ y estudiar la energía resultante.

Problemas autónomos en $\mathbb{R}^2$

4.- Consideramos los sistemas lineales

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7, \\ y' = -x - 2y + 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x - 2y + 3, \\ y' = 2x - y - 6. \end{cases}$$

(a) Determinar la naturaleza de sus puntos críticos y sus propiedades de estabilidad.
(b) En el caso en el que se obtiene un punto de silla, determinar las direcciones de sus ejes.

5.- Estudiar los puntos críticos de los siguientes problemas:

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ 4x - 3y + 7xy \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(4 - 2x - y) \\ y(3 - x - y) \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{pmatrix}.$

(e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} + y \\ y - x\,y \end{pmatrix}.$

6.- Describir el plano de fases para los sistemas:

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$.

7.- Discutir según los valores de μ la estabilidad del $(0,0)$ para el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - \mu(x^2-1)y \end{pmatrix},$$

que se conoce como *ecuación de Van der Pol*.

8.- Calcular una integral primera para los sistemas:

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2+1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+y) \\ -y(1+x) \end{pmatrix}$.

9.- Utilizar el cambio $y = x^2 u(t)$ para calcular una integral primera del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & xy - 3x^3, \\ y' & = & y^2 - 6x^2 y + x^4. \end{array} \right.$$

Dibujar el plano de fases.

10.- Hallar una integral primera para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & xy, \\ y' & = & \log x. \end{array} \right.$$

11.- Estudiar el tipo de estabilidad del $(0,0)$ en los siguientes sistemas utilizando el método directo de Liapunov:

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - \frac{1}{4}x^3 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 3x^3 \\ -x - 7y^3 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy^4 \\ yx^4 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - xy^4 \\ y - y^3x^2 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - x^3 \\ 3x - 4y^3 \end{pmatrix}$.

12.- En cada uno de los siguientes sistemas determinar la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ y sus propiedades de estabilidad:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y - 2\,\mathrm{sen}(xy), \\ y' = -2\,x + y + 3\,y^2. \end{array} \right.$ **(b)** $\left\{ \begin{array}{l} x' = -\,\mathrm{sen}(x+y) + 1 - e^{-x2}, \\ y' = -2\,x + 4\,y + y\,\mathrm{sen}(x+y). \end{array} \right.$

13.- Estudiar los puntos críticos del siguiente sistema autónomo y esbozar una posibilidad coherente con estos datos para las trayectorias del sistema en el primer cuadrante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\,(60 - 4\,x - 3\,y), \\ y' = y\,(42 - 3\,x - 2\,y). \end{array} \right.$$

14.- Consideramos el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x\,(x^2+y^2) \\ -x + y\,(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar qué tipo de punto crítico es $(0,0)$ en el sistema linealizado.

(b) Resolver el sistema no lineal empleando coordenadas polares y decidir la estabilidad de dicho punto crítico.

(c) Realizar un análisis análogo (sin calcular explícitamente las soluciones) en el caso del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - x\exp(x^2+y^2) \\ x + 3y - y\exp(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

15.- Transformar la ecuación del péndulo $x'' + \mathrm{sen}\,x = 0$ en un sistema autónomo con el procedimiento habitual (escribiendo $y = x'$).

(a) Calcular todos los puntos críticos.

(b) Hallar la ecuación de las trayectorias.

(c) Decidir la estabilidad y el carácter de todos los puntos críticos.

(d) ¿Qué función de Liapunov se podría emplear para probar la estabilidad en $(0,0)$?

16.- Comprobar que el sistema

$$\begin{cases} x' &= x(1-x^2-\dfrac{y^2}{2}), \\ y' &= y(1-\dfrac{x^2}{2}-y^2), \end{cases}$$

es un sistema conservativo, calcular un potencial para él y estudiar sus puntos críticos y plano de fases.

17.- Pruébese que el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1-x^2-y^2), \\ y' = x + y(1-x^2-y^2), \end{cases}$$

tiene al menos una solución periódica que rodea al origen. Estudiar la estabilidad de ese punto.
Indicación: Utilizar coordenadas polares.

18.- Determinar una función de Liapunov para

$$\begin{cases} x' = -2y - x^3, \\ y' = x/2 - 4y^3. \end{cases}$$

19.- Usando la función

$$V(x,y) = (x/a)^2 + (y/b)^2,$$

demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x' &= x(x-a), \\ y' &= y(y-b), \end{cases}$$

tiene en el origen un punto crítico asintóticamente estable. Comprobar que toda trayectoria que entre en la región

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

tiende a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$.

20.- Hallar una función de Liapunov de la forma $\alpha(2x+y)^2 + \beta(x+y)^2$ que pruebe la estabilidad en el origen del sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = -3x - 2y - (2x+y)^3 + (x+y)^3, \\ y' = 5x + 3y - 2(x+y)^3 + (2x+y)^3. \end{cases}$$

21.- Demostrar que la solución trivial $x(t) \equiv 0$ es asintóticamente estable en las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x'' + x' - \dfrac{(x')^3}{3} + x = 0.$
(b) $x'' + x' \operatorname{sen}(x')^2 + x = 0.$
(c) $x'' + (x')^3 + x^3 = 0.$