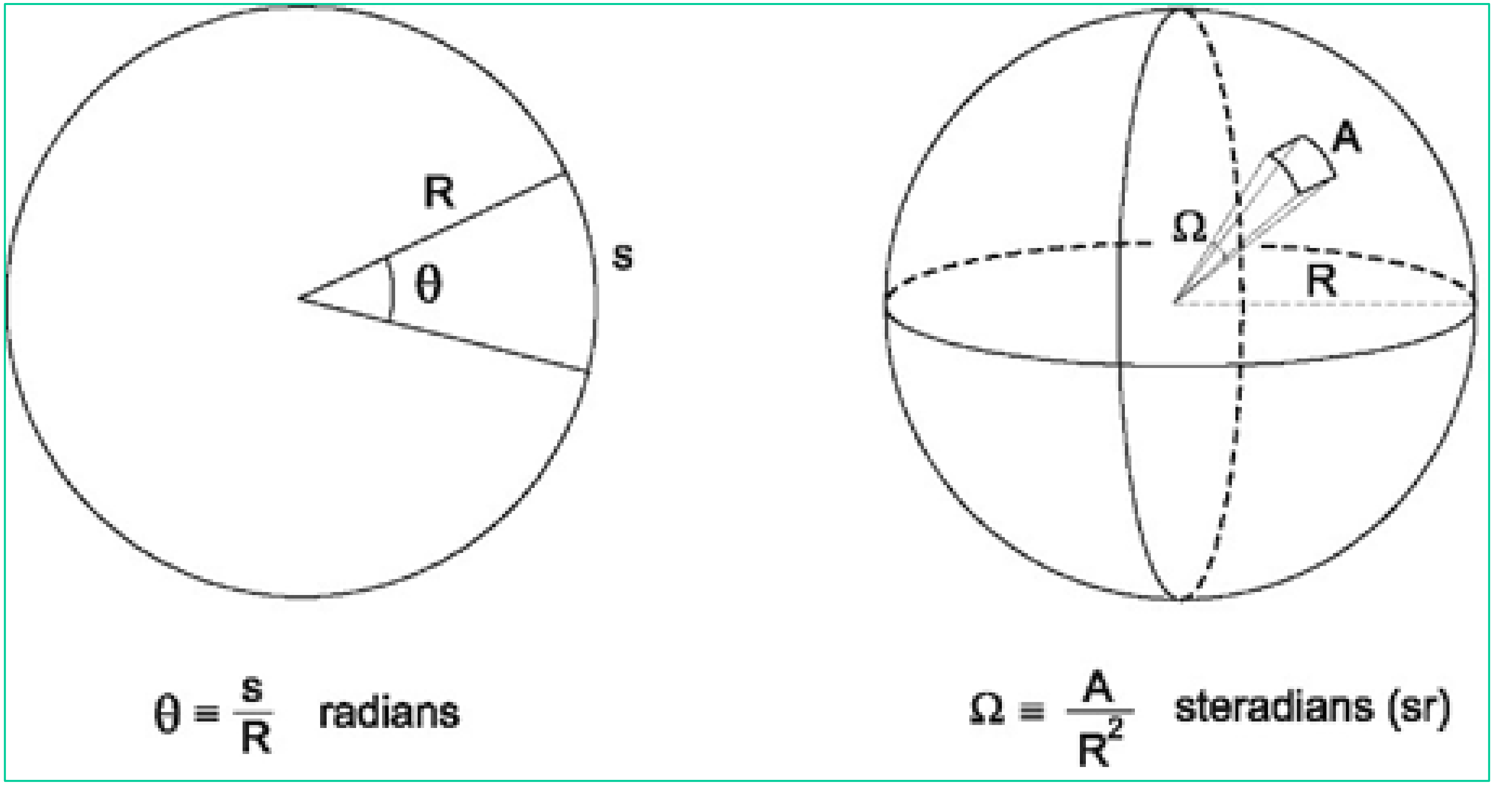
Ley de Gauss para el campo eléctrico

J.E. Prieto

Fuente principal de figuras:
“Physics for scientists and engineers” (5th edition),
P.A. Tipler, G. Mosca

Previo: concepto de *ángulo solido*



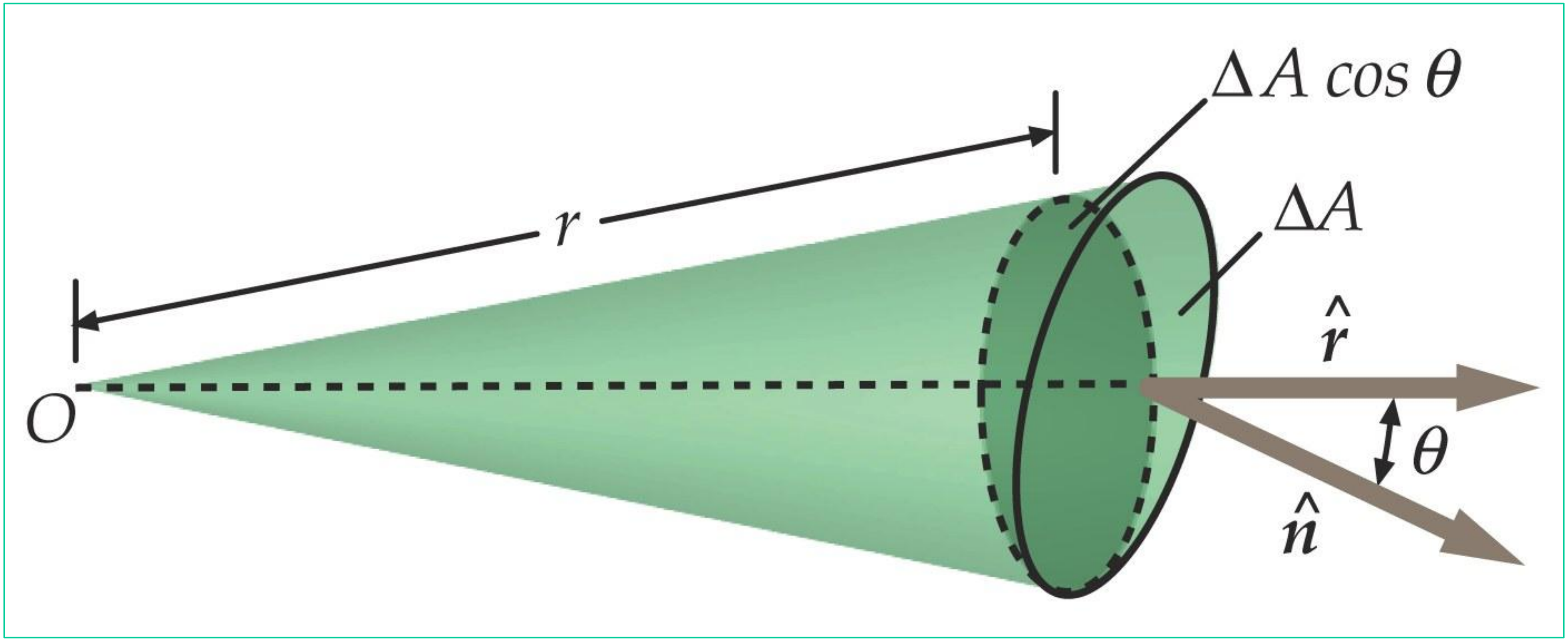
• Ángulo plano. Se mide en *radianes* (rad)

• Ángulo plano correspondiente a la *circunferencia completa* con $s = 2\pi R$: $\theta = 2\pi$ (rad)

• Ángulo sólido. Se mide en *estéreoradianes* (sr)

• Ángulo sólido correspondiente a la *esfera completa* con $S = 4\pi R^2$: $\Omega = 4\pi$ (sr)

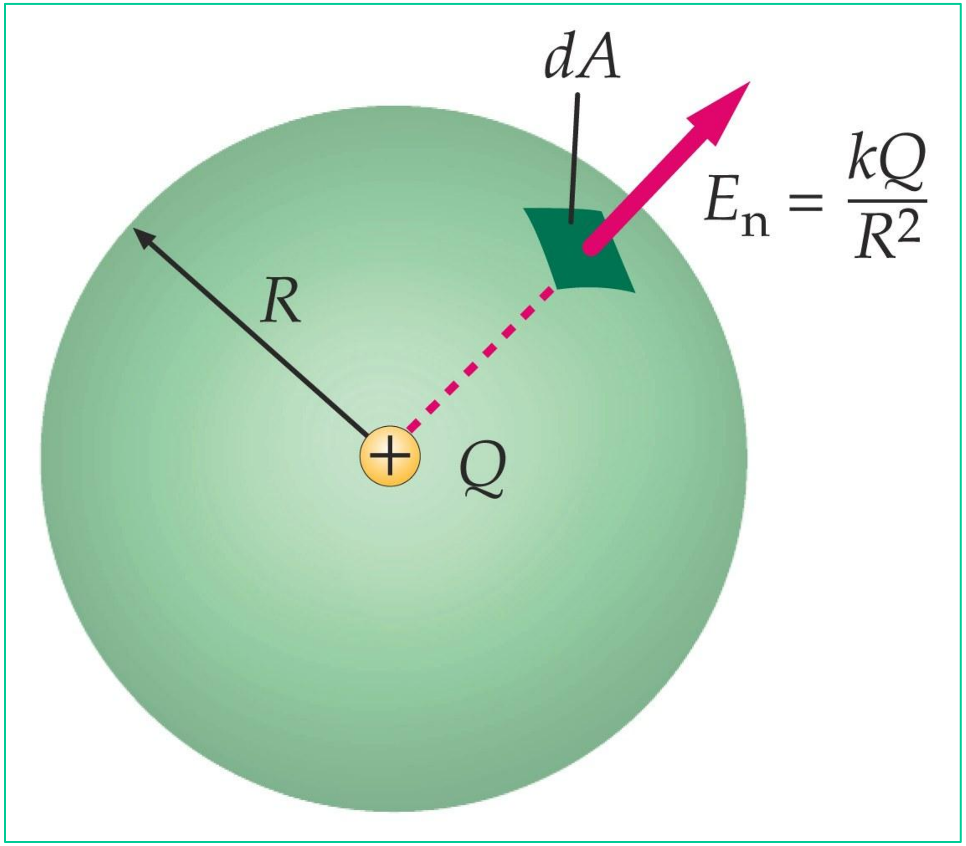
Previo: concepto de *ángulo solido*



- *Si* la superficie ΔA *no es perpendicular* a ***r***, (esto es, si Δ***A*** *no* es paralelo a ***r***) hay que tomar la *proyección sobre la dirección radial* (esto es, hay que multiplicar por cos θ)

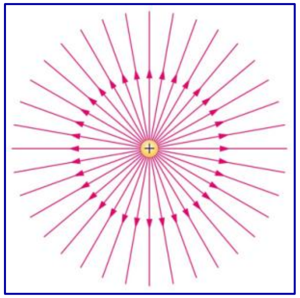
$$\boxed{\Delta\Omega = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2}}$$

Flujo del campo eléctrico de una carga puntual a través de una esfera



- Flujo de ***E*** a través de una esfera de radio *R* centrada en *Q*

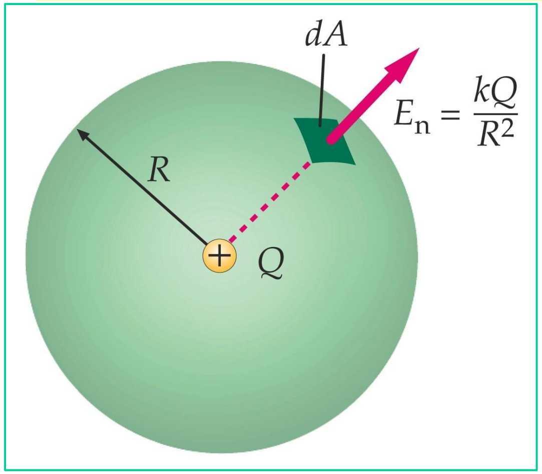
- *Muy fácil* de calcular debido a la *gran simetría* (esférica) del problema:



$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}_r}$$

- ***E*** es *constante* en los puntos de la esfera ($r = R$) y es siempre *paralelo* a $d\boldsymbol{A}$.

Flujo del campo eléctrico de una carga puntual a través de una esfera



$$\Phi_{\boldsymbol{E}} = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \oint E\, dS$$

$$\Phi_{\boldsymbol{E}} = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, dS$$

$$\Phi_{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} S$$

Superficie de una esfera de radio *R*:

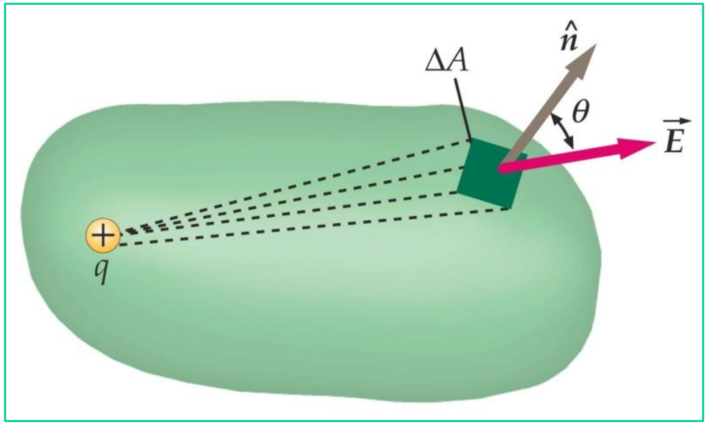
$$S = 4\pi R^2$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\Phi_{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Flujo de ***E*** es igual a la carga *Q* dividida por ε_0

Flujo del campo eléctrico a través de una *superficie arbitraria* (cerrada)



$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint E \cos\theta \, dS$$

$$\Phi_E = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \, dS$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\cos\theta \, dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega$$

Ley de Gauss

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Flujo de ***E*** es igual a la carga *Q encerrada* dividida por ε_0

Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

• **Gauss**: Ley *completamente general*: *el flujo de* ***E*** *a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga Q encerrada dividida por* ε_0

• Si no hay cargas dentro, $\Phi = 0$.

• Origen físico de la Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}$$

¡ Ley de Coulomb !

$$\boxed{E \sim \frac{Q}{r^2}}$$

$$S \sim r^2$$

Superficie crece con r^2

Gauss $\leftrightarrow$ Coulomb

Leyes del campo ***E*** *electrostático* en forma integral

- **Ley de Gauss**:

$$\boxed{\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

- El campo electrostático es ***conservativo*:**

$$\boxed{\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r} = 0}$$

Ley de Gauss

- Completamente general

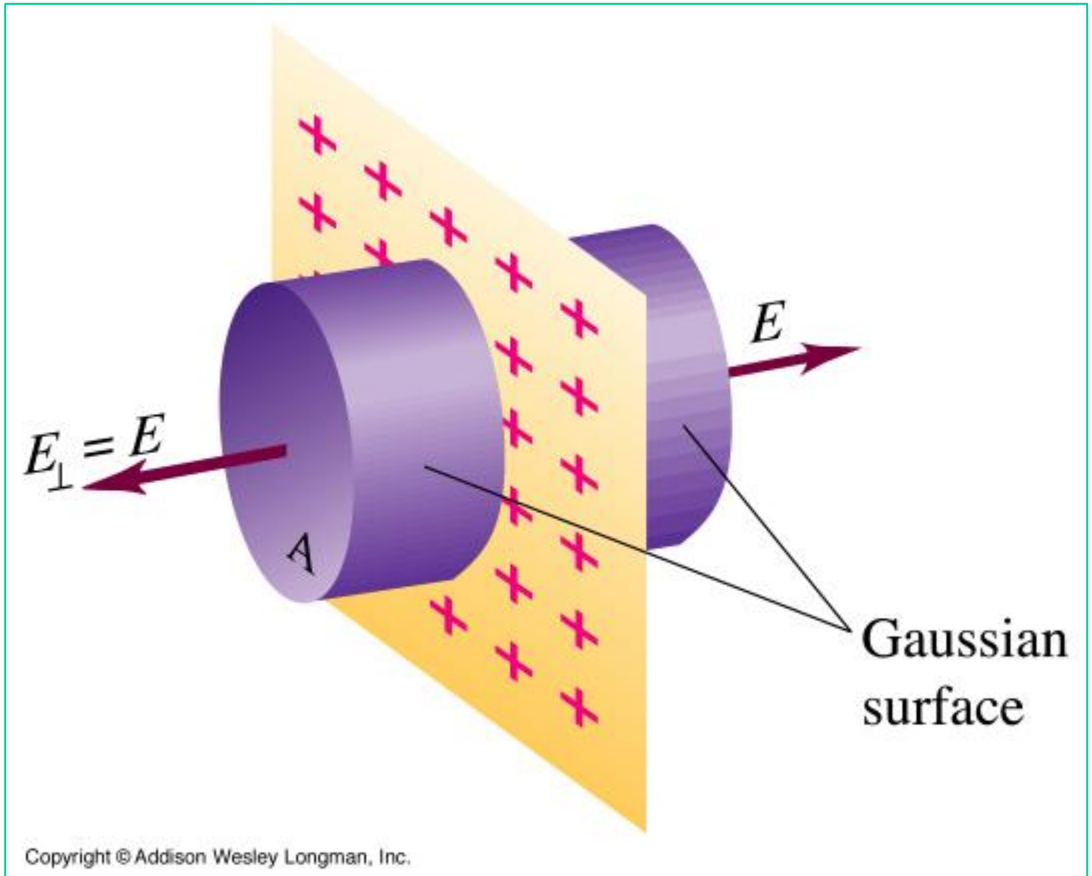
$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Importantísima desde el punto de vista *"teórico"*:
  - es una de las **ecuaciones de Maxwell**
  - es equivalente a la **Ley de Coulomb**

- Muy útil también desde el punto de vista *práctico*:
  - Permite calcular ***E*** fácilmente *en situaciones de gran simetría*. Lo vemos a continuación en varios ejemplos.

1) Ley de Gauss: plano infinito cargado

• Cálculo del campo eléctrico creado por un plano infinito uniformemente cargado

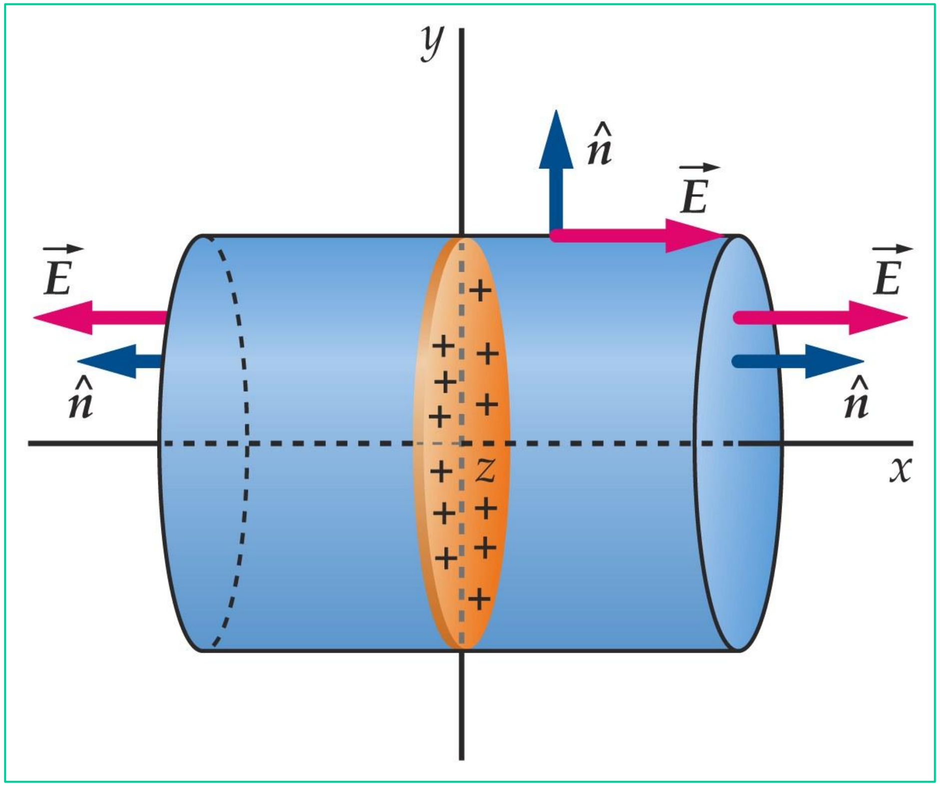


- Simetría: por *simetría*, esperamos que el campo ***E*** dependa sólo de x y tenga sólo componente E_x:

- Elegimos "superficie Gaussiana" para calcular Φ_E

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

1) Ley de Gauss: plano infinito cargado



$$\boxed{\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

- Sólo contribuyen al flujo las "tapas" del cilindro:

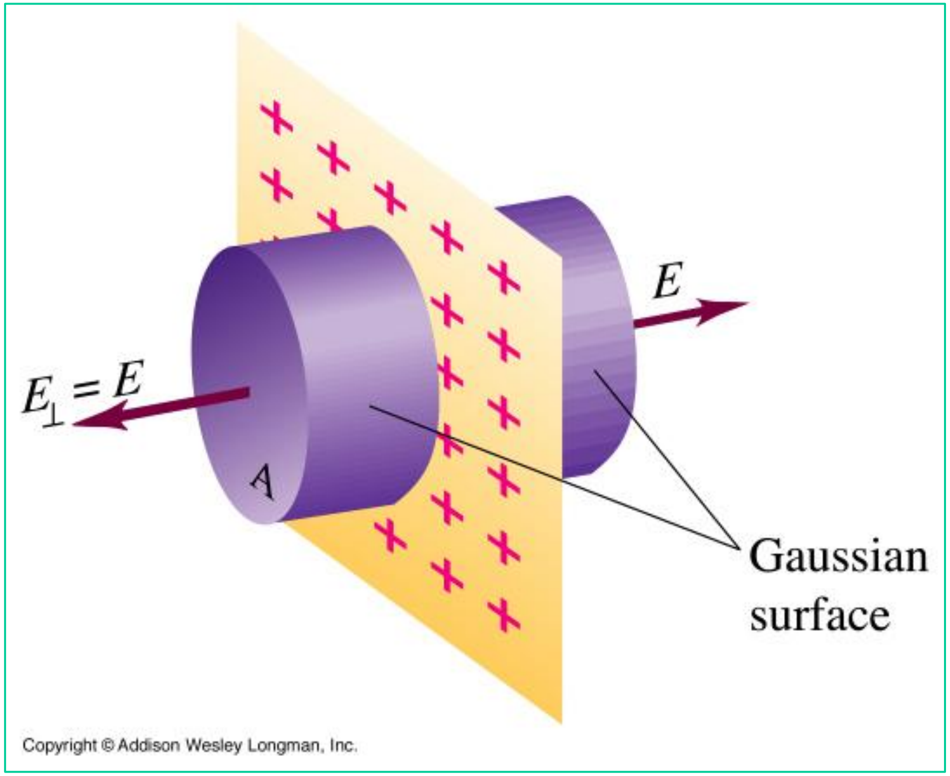
$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 2ES$$

- Carga encerrada:

$$Q = \sigma S$$

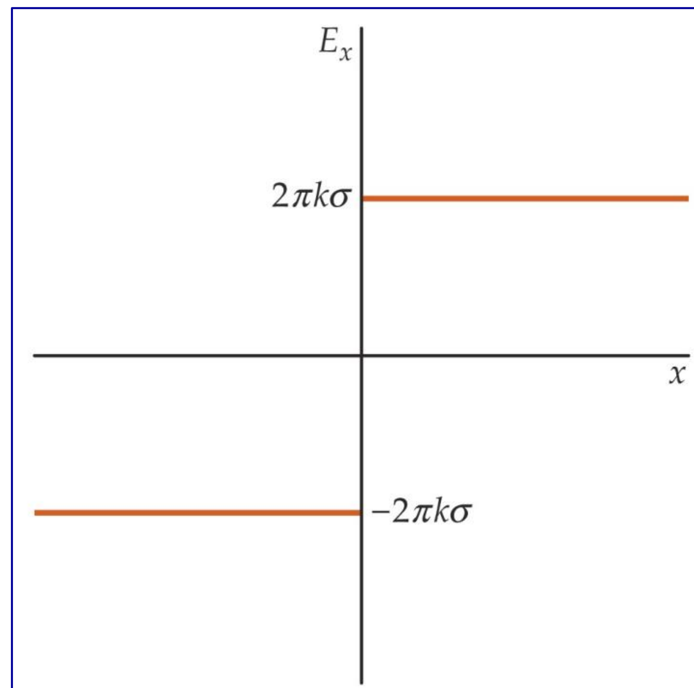
$$\rightarrow \quad 2ES = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S \quad \rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

1) Ley de Gauss: plano infinito cargado



$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x>0$$

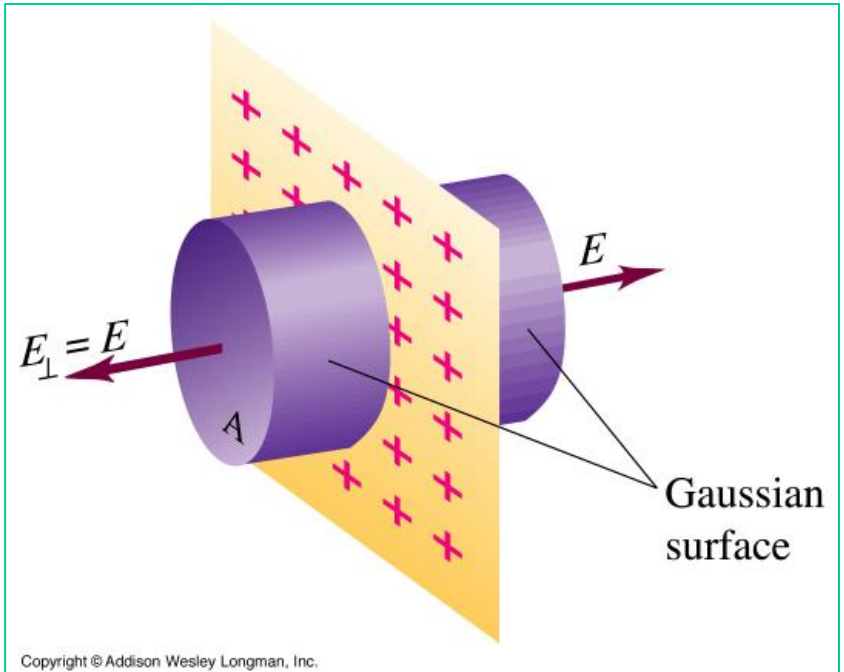
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x<0$$



1) Ley de Gauss: plano infinito cargado

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x>0$$

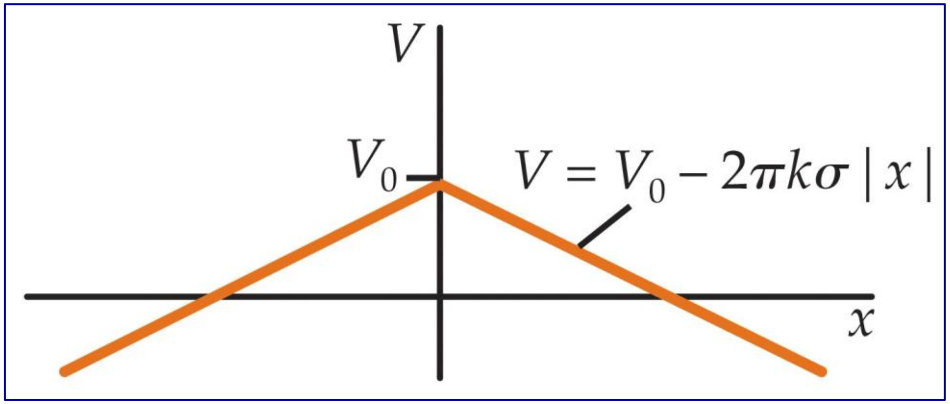
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x<0$$



Potencial *V*: Integrando *E* (constante):

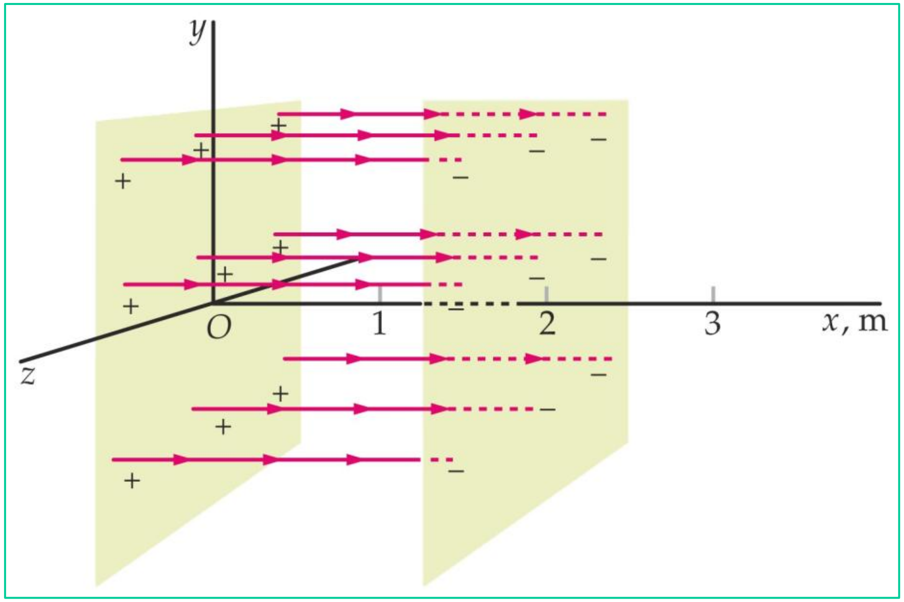
$$\boxed{V(x) = -E\,|x| + cte.}$$

$$\boxed{V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|x| + V_0}$$



2) Condensador plano - paralelo

• Cálculo del campo eléctrico entre dos planos infinitos uniformemente cargados con signos opuestos (*condensador plano-paralelo*)



• Un plano: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

• Condensador: *el doble* del resultado anterior:

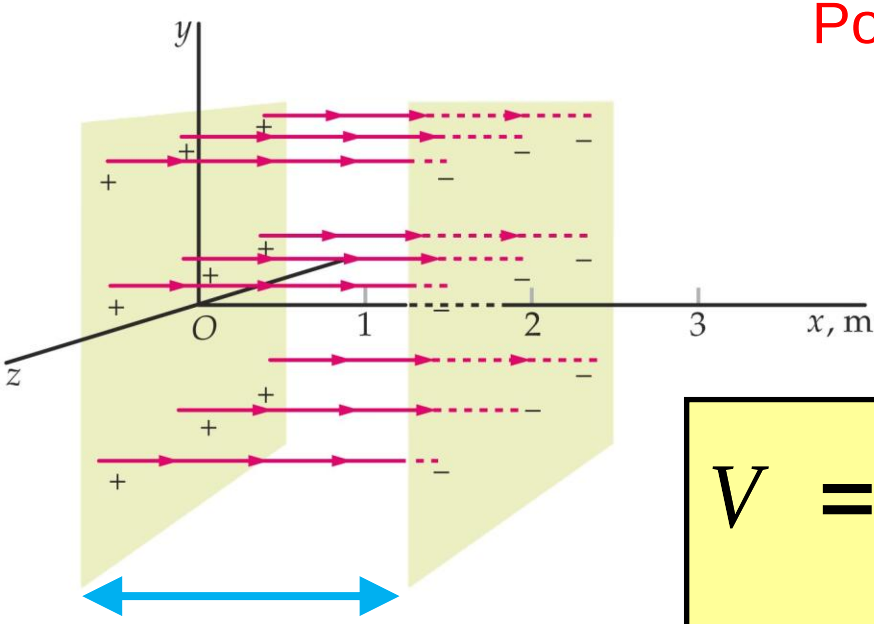
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

• Entre los planos: campo uniforme (constante en dirección y módulo:

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x}$$

2) Condensador plano - paralelo

• Cálculo del campo eléctrico entre dos planos infinitos uniformemente cargados con signos opuestos (*condensador plano-paralelo*)



d: separación

Potencial *V*: Integrando E (constante)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

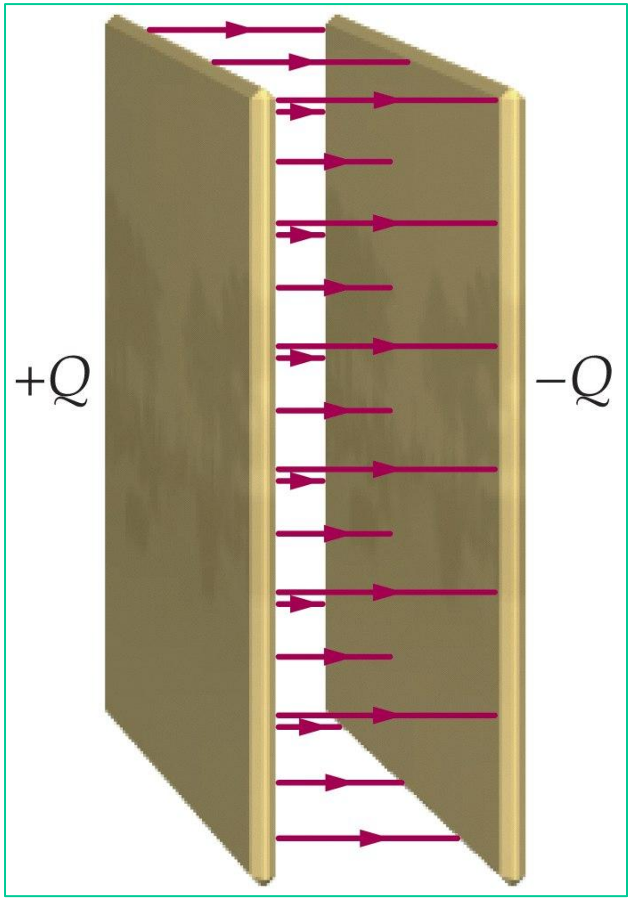
$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x + cte. = -Ex + cte.$$

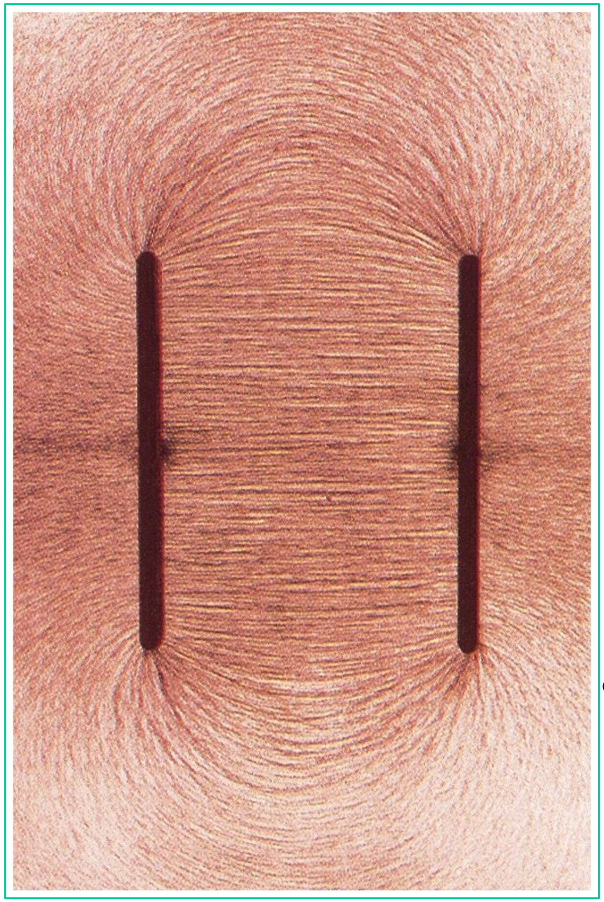
• Diferencia de potencial entre las placas:

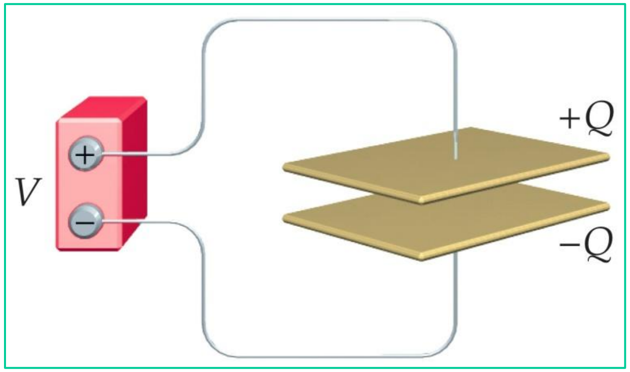
$$\boxed{\Delta V = Ed}$$

2) Condensador plano - paralelo

- Condensador plano-paralelo: líneas de campo ***E***





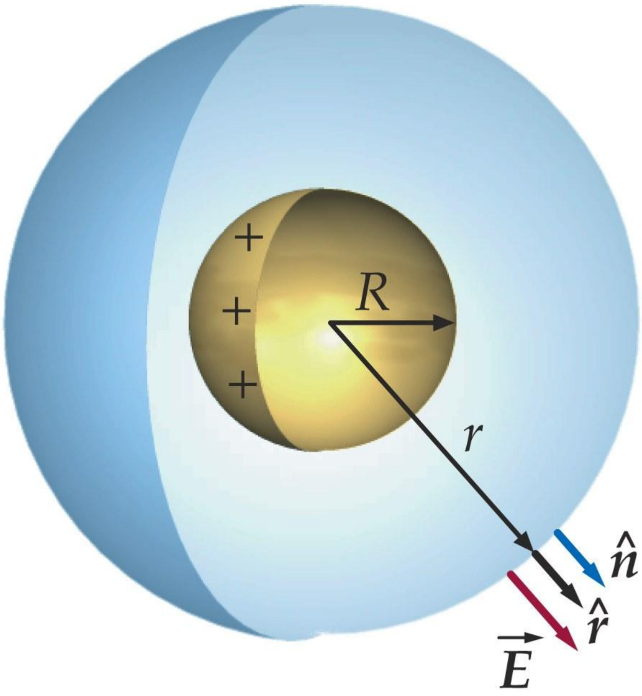


- Diferencia de potencial:

$$\boxed{\Delta V = E d}$$

3) Corteza esférica cargada

• Cálculo del campo eléctrico creado por una *corteza esférica* de carga



• Simetría: *en principio*, esperamos que el campo ***E*** dependa sólo de *r* y tenga sólo componente E_r:

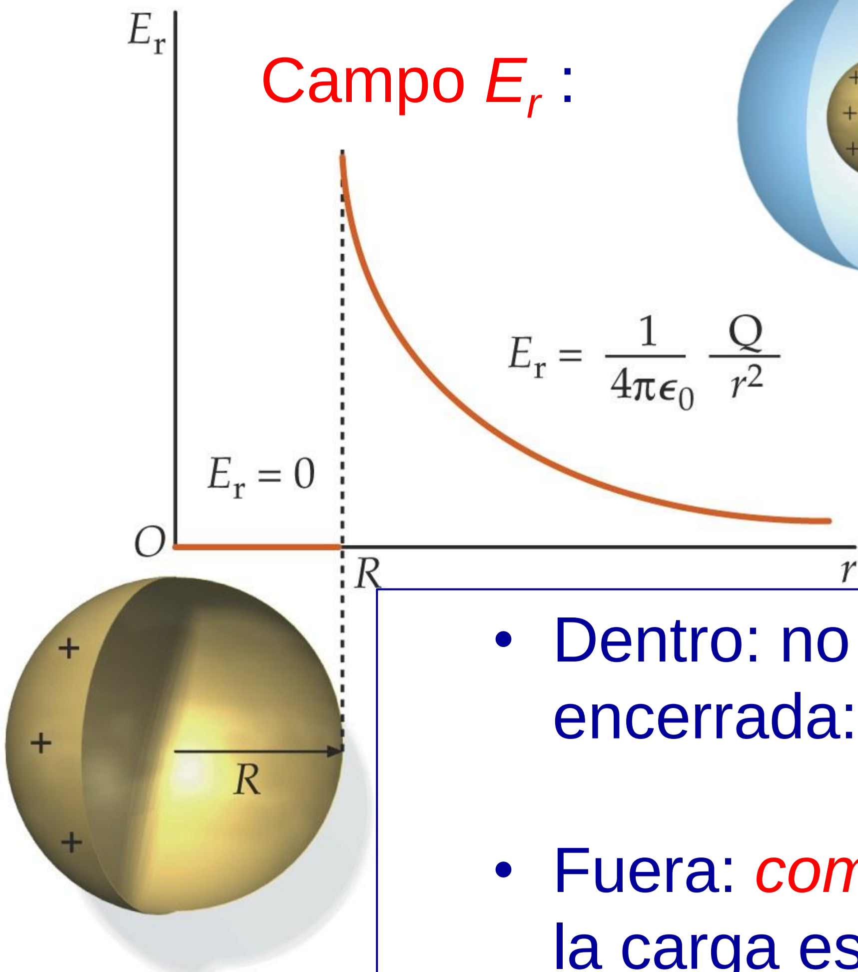
• Elegimos "superficie Gaussiana" para calcular Φ_E

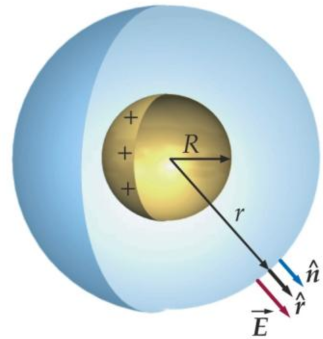
$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

3) Corteza esférica cargada

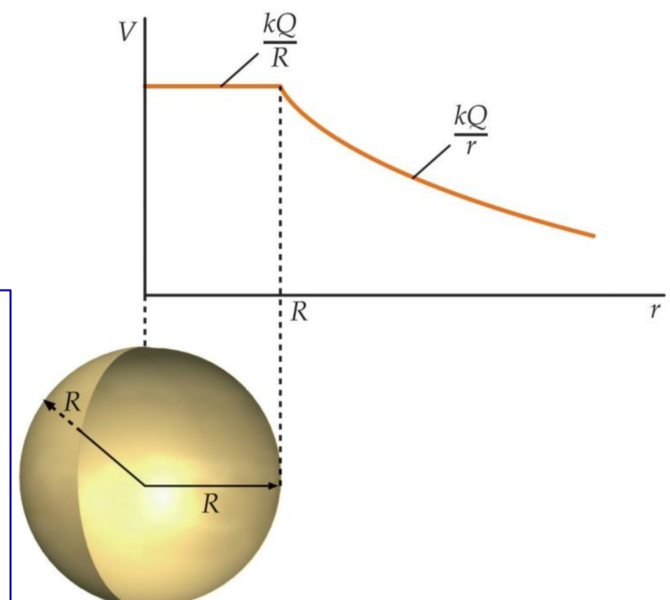
- Cálculo del campo eléctrico creado por una corteza esférica de carga

Campo E_r :





Potencial V : integrando el campo E_r e *imponiendo continuidad* en $r = R$:

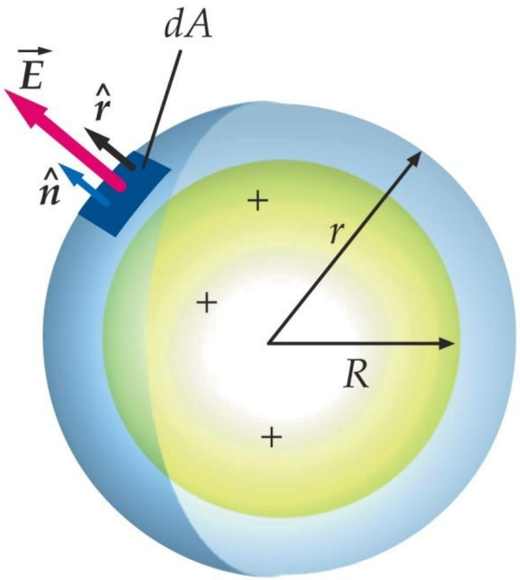


- Dentro: no hay carga encerrada: $E_r = 0$

- Fuera: *como si* toda la carga estuviera en el centro (Coulomb)

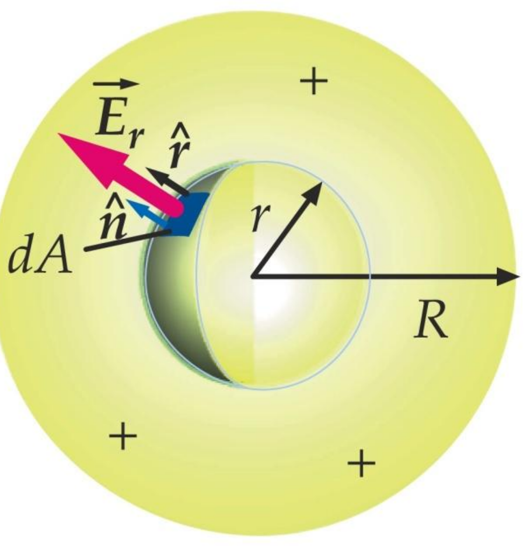
4) Esfera homogéneamente cargada

• Cálculo del campo eléctrico creado por una esfera homogéneamente cargada



- Simetría: *en principio*, esperamos que el campo ***E*** dependa sólo de *r* y tenga sólo componente E_r:

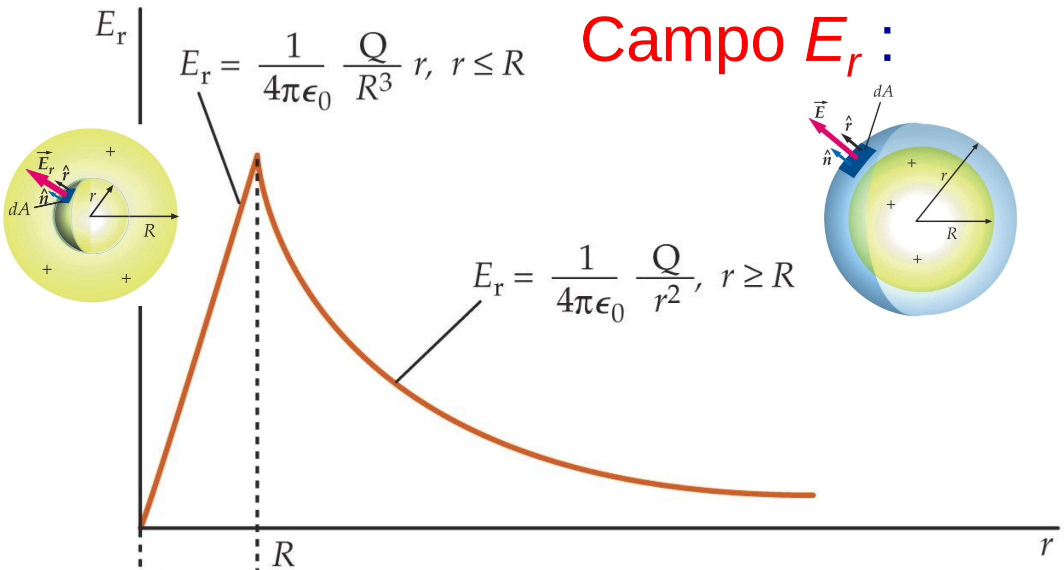
- Elegimos "superficie Gaussiana" para calcular Φ_E

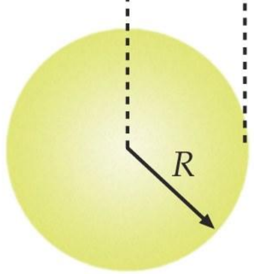


$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Ley de Gauss: esfera homogéneamente cargada

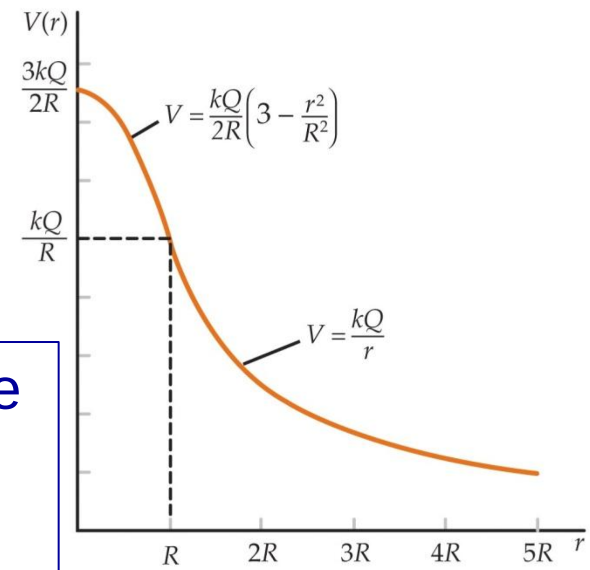
• Cálculo del campo eléctrico creado por una esfera homogéneamente cargada





Campo E_r :

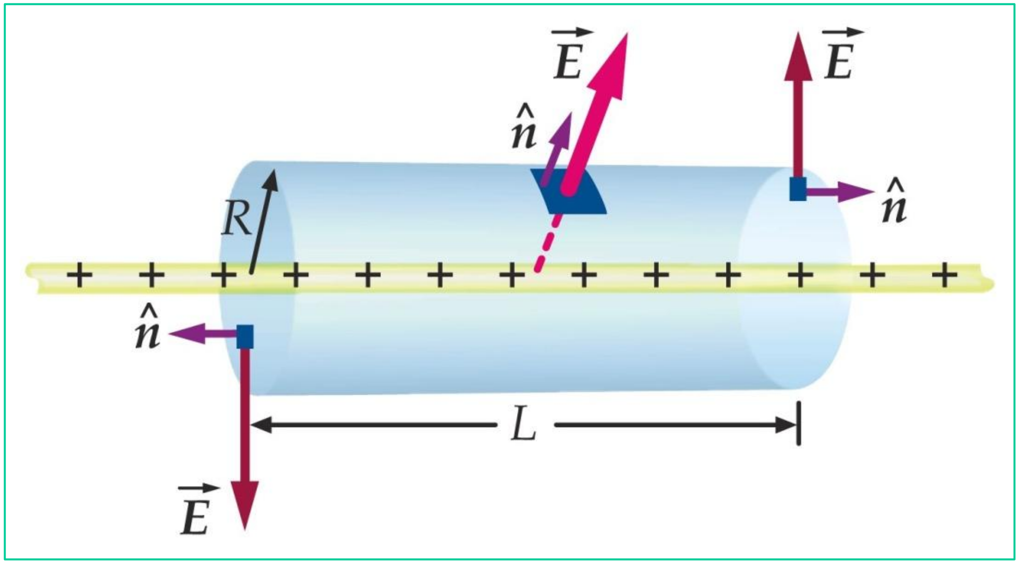
Potencial V : integrando el campo E_r e *imponiendo continuidad* en $r = R$:



- Dentro: campo crece linealmente con r : $E_r \sim r$
- Fuera: *como si* toda la carga estuviera en el centro (Coulomb)

5) Hilo infinito cargado

- Cálculo del campo eléctrico creado por un hilo infinito uniformemente cargado

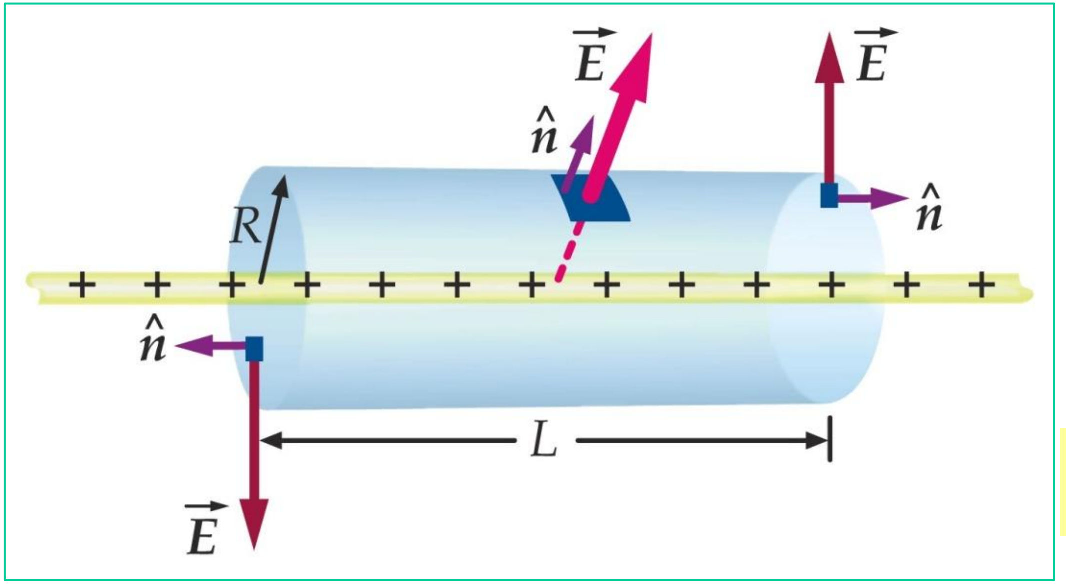


- Simetría: *en principio*, esperamos que el campo ***E*** dependa sólo de *R* y tenga sólo componente E_R

- Elegimos "superficie Gaussiana" para calcular Φ_E

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

5) Hilo infinito cargado



$$\boxed{\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

- Sólo contribuye al flujo el “manto” del cilindro:

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = E\ 2\pi R L$$

- Carga encerrada:

$$Q = \lambda L$$

$$\rightarrow \quad E\ 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(R) + cte.}$$

Resumen: Ley de Gauss (1)

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

• **Gauss**: Ley *completamente general*: *el flujo de **E** a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga Q encerrada dividida por ε_0*

• Si no hay cargas dentro, $\Phi = 0$.

• Origen físico de la Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}$$

¡ Ley de Coulomb !

$$\boxed{E \sim \frac{Q}{r^2}}$$

$$S \sim r^2$$

Superficie crece con r^2

Gauss $\leftrightarrow$ Coulomb

Resumen: Ley de Gauss (2)

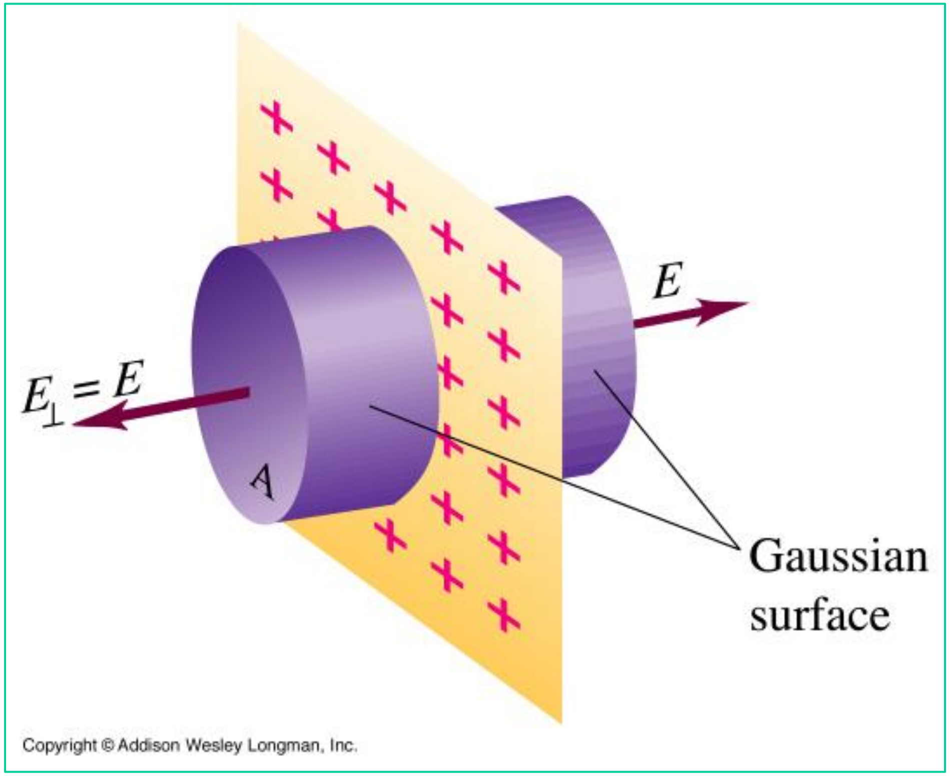
- Completamente general

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Importantísima desde el punto de vista "*teórico*":
  - es una de las **ecuaciones de Maxwell**
  - es equivalente a la **Ley de Coulomb**

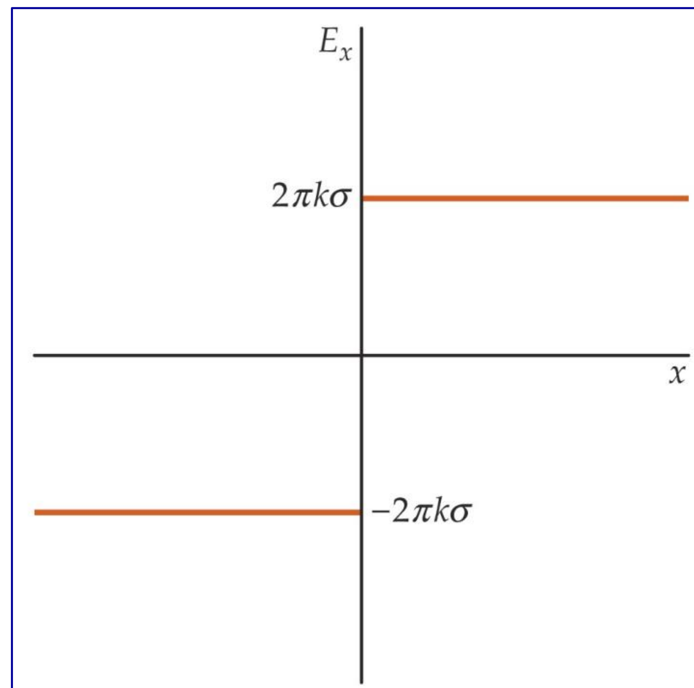
- Muy útil también desde el punto de vista *práctico*:
  - Permite calcular ***E*** fácilmente *en situaciones de gran simetría*. Lo vemos a continuación en varios ejemplos.

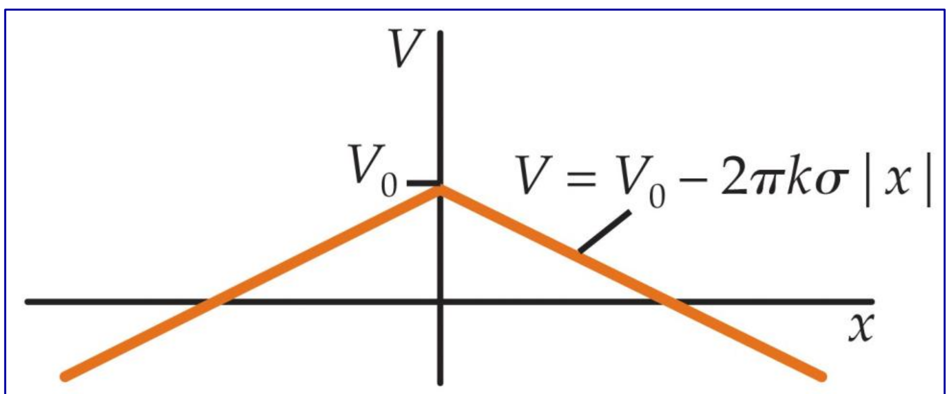
Resumen: Plano infinito cargado



$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x > 0$$

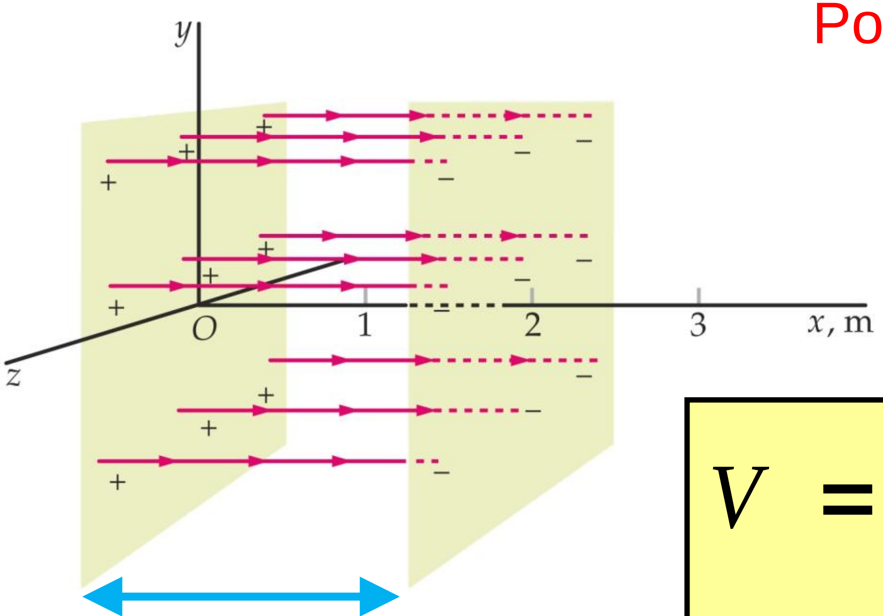
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{u}_x, \quad x < 0$$





Resumen: Condensador plano-paralelo

- Cálculo del campo eléctrico entre dos planos infinitos uniformemente cargados con signos opuestos (*condensador plano-paralelo*)



d: separación

Potencial *V*: Integrando E (constante)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + cte. = -E x + cte.$$

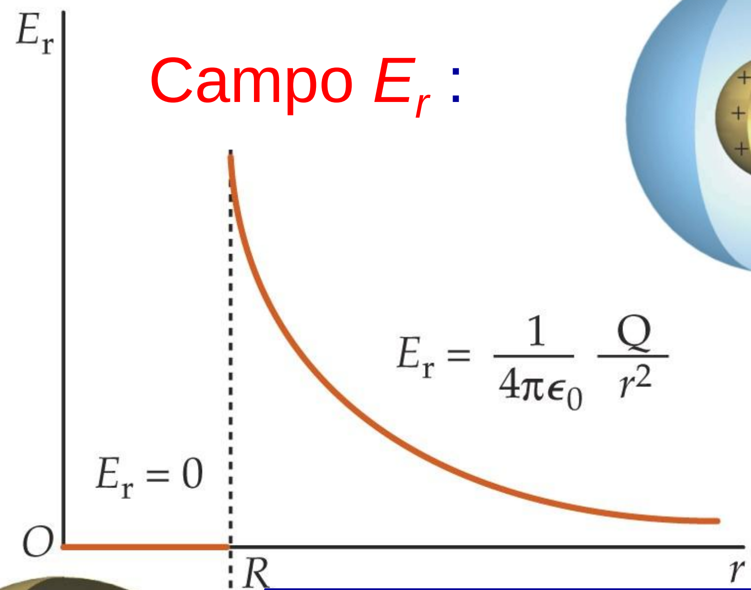
- Diferencia de potencial entre las placas:

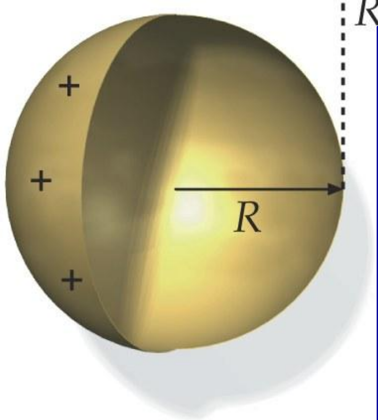
$$\Delta V = E d$$

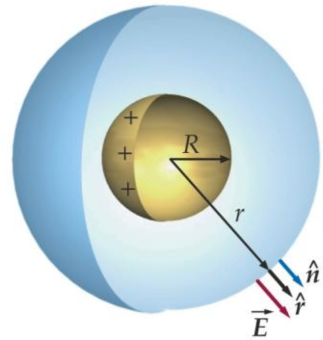
Resumen: Corteza esférica cargada

• Cálculo del campo eléctrico creado por una corteza esférica de carga

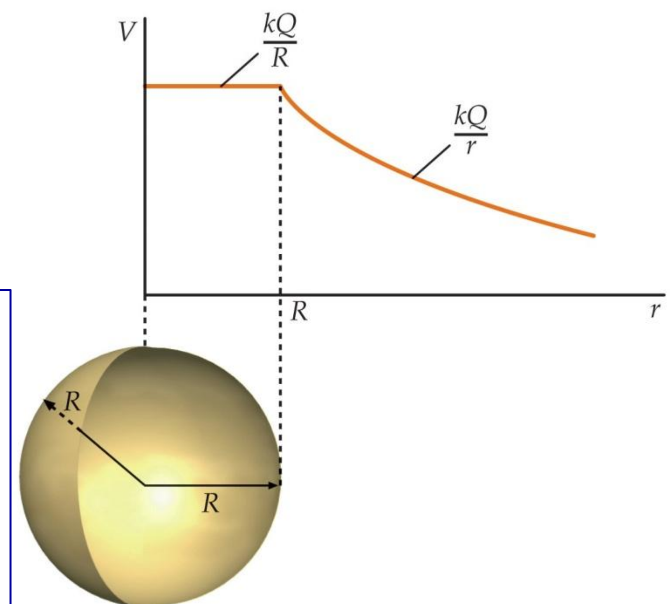
Campo E_r :







Potencial V : integrando el campo E_r e imponiendo continuidad en $r = R$:



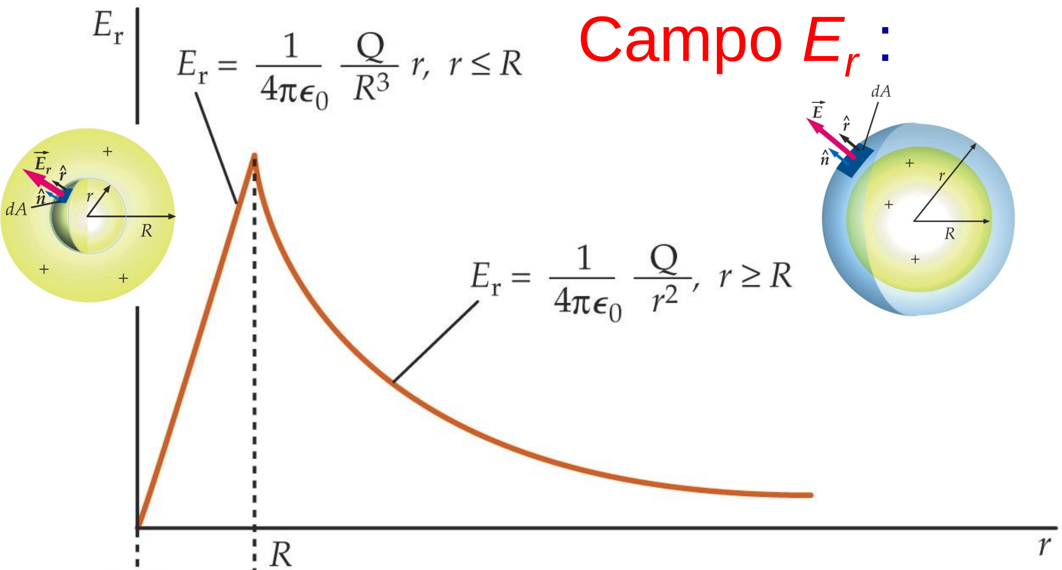
- Dentro: no hay carga encerrada: $E_r = 0$

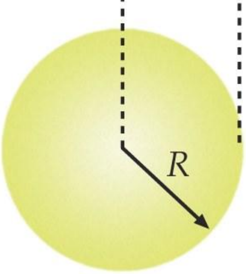
- Fuera: *como si* toda la carga estuviera en el centro (Coulomb)

Resumen: Esfera homogéneamente cargada

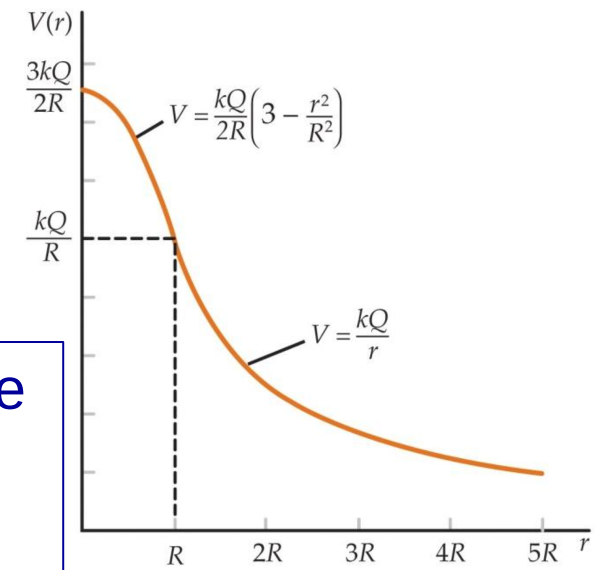
- Cálculo del campo eléctrico creado por una esfera homogéneamente cargada

Campo E_r :





Potencial V : integrando el campo E_r e imponiendo continuidad en $r = R$:



- Dentro: campo crece linealmente con r : $E_r \sim r$
- Fuera: *como si* toda la carga estuviera en el centro (Coulomb)