Ejercicios

$\boxed{\text{ej. 1, hoja 3}}$

a) $|||A|||_{p_1\to p_2} = 0 \Rightarrow A = 0 \quad : \quad \|Ax\| = 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow Ax = 0 \ \forall x \Leftrightarrow A = 0$

$|||\alpha A|||_{p_1\to p_2} = |\alpha| \, |||A|||_{p_1\to p_2} \quad : \quad \|\alpha A x\| = |\alpha| \, \|Ax\|$

$|||A+B|||_{p_1\to p_2} \leq |||A|||_{p_1\to p_2} + |||B|||_{p_1\to p_2} \quad : \quad \|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$

b)

- $$\sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_{p_2}}{\|x\|_{p_1}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_q}{\|x\|_{p_1}} \frac{\|A\overbrace{Bx}^{=y}\|_{p_2}}{\|\underbrace{Bx}_{=y}\|_q}$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_q}{\|x\|_{p_1}} \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_q}{\|y\|_{p_1}}$$

- $\|ABx\|_{p_2} \leq \|A\|_{q\to p_2} \|Bx\|_q \leq \|A\|_{q\to p_2} \|B\|_{p_1\to q} \|x\|_{p_1}$

d) $$\|Ax\|_\infty = \max_i \Big|\sum_j A_{ij} x_j\Big| \underset{\text{Cauchy Schwartz}}{\leq} \max_i \Big(\sum_j A_{ij}^2\Big)^{1/2} \|x\|_2$$

$$\Rightarrow |||A|||_{2\to\infty} \leq \max_i \Big(\sum_j A_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

$$\Big|\sum_j A_{ij} x_j\Big| \leq \Big(\sum_j A_{ij}^2\Big)^{1/2} \|x\|_2$$

es = si $x_j = \alpha A_{ij} \quad \forall j$

qué índice i elegimos?

$$K = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \Big(\sum_j A_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

ej. 4.b) hoja 3

para resolver a) hay que calcular A^*A :

$$A^*A = \begin{pmatrix} 7/18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 224 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}$$

tiene una forma especial!

• es diagonal

$\Rightarrow$ las columnas de A son ortogonales entre ellas

• no es la identidad

$\Rightarrow$ las columnas no son ortonormales

↳ normalizando las columnas de A se obtiene una matriz ortogonal H :

$$\begin{array}{ccc} A^* & A & \\ \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \|v_1\|_2^2 & & \cdots \\ & \|v_2\|_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & \|v_n\|_2^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$H = A\,(A^*A)^{-1/2}$ es tal que $H^{-1} = H^*$: su inversa es fácil

esto normaliza los vectores columna de A :

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1\|_2} & & 0 \\ & \frac{1}{\|v_2\|_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\|v_n\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \frac{v_1}{\|v_1\|_2} & \frac{v_2}{\|v_2\|_2} & \cdots & \frac{v_n}{\|v_n\|_2} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = (A^*A)^{1/2} A^{-1} = H^* = (A^*A)^{-1/2} A^* \Rightarrow A^{-1} = (A^*A)^{-1} A^*$$

la inversa de A es fácil !

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/224 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix} A^*$$

$\Rightarrow$ podemos calcular explícitamente y rápido A^{-1} y lo mismo vale por $K_p(A) = |||A|||_p \cdot |||A^{-1}|||_p$, $p = 1, \infty$

ej. 3.c) hoja 3. $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $|||A|||_\infty = 11$

como en clase

$\|Av\|_\infty = |||A|||_\infty \|v\|_\infty \Leftarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} K = \operatorname{argmax}_i \sum_j |A_{ij}| \\ v_j = \begin{cases} \frac{A_{Kj}}{|A_{Kj}|}, & A_{Kj} \neq 0 \\ 0, & A_{Kj} = 0 \end{cases} \end{array}}$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(para este v tenemos $Av = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\|Av\|_\infty = 11$, $\|v\|_\infty = 1$)

¿ CUALES SON TODOS LOS VECTORES QUE DAN = ?

- si para un v se tiene $\|Av\|_\infty = |||A|||_\infty \|v\|_\infty$, entonces esta identidad vale para todo vector αv, $\alpha \in \mathbb{R}$ → subespacio lineal generado por v

  por la homogeneidad de la norma: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$, $\|A\alpha v\| = |\alpha| \, \|Av\|$

- pregunta: ¿ existe un vector $w \in \mathbb{R}^2$ que no pertenece a este subespacio para el que se cumple la identidad?

  - todo vector $w \in \mathbb{R}^2$ se escribe como $w = \alpha v + \beta v^\perp$, $v^\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

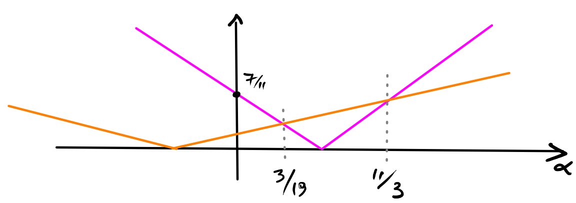
    ↪ pedimos $\beta \neq 0$ de manera de salir del subespacio generado por v
  - por el mismo argumento de antes, en w se tiene la identidad $\Leftrightarrow$ se tiene en todo vector paralelo a w

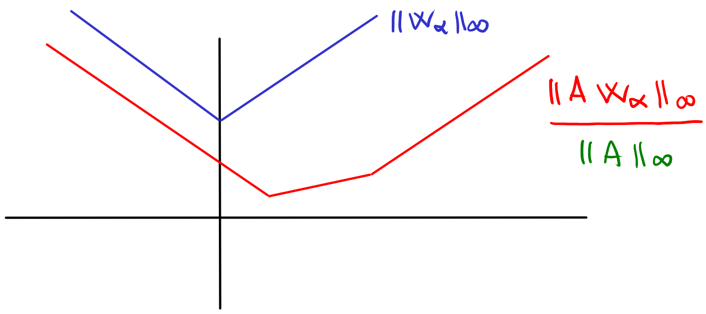
  $\Rightarrow$ es suficiente considerar los vectores w_α dados por

$$w_\alpha = \alpha v + v^\perp = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}. \quad \text{para estos,} \quad A w_\alpha = \begin{pmatrix} 11\alpha - 7 \\ 8\alpha + 4 \end{pmatrix}$$

- $\|w_\alpha\|_\infty = \max\{|\alpha - 1|, |\alpha + 1|\} = |\alpha| + 1$
- $\|Aw_\alpha\|_\infty = \max\{|11\alpha - 7|, |8\alpha + 4|\} = \overbrace{11}^{|||A|||_\infty} \max\left\{\left|\alpha - \frac{7}{11}\right|, \frac{8}{11}\left|\alpha + \frac{1}{2}\right|\right\}$

$$= 11 \begin{cases} |\alpha - 7/11|, & \alpha < 3/19 \text{ o } \alpha > 11/3 \\ \frac{8}{11}|\alpha + 1/2|, & \alpha \in [3/19, 11/3] \end{cases}$$





$\Rightarrow$ para todos estos w_α tenemos $\|Aw_\alpha\|_\infty < |||A|||_\infty \|w_\alpha\|_\infty$

$\boxed{\text{ej. 3 hoja 4}}$ $\quad M x_{n+1} = -N x_n + b$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$

la matriz de iteración es

$$B = -M^{-1}N = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta-\alpha & \gamma & 0 \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \rho(B) = \max\{|\alpha|, |\gamma|\}$

b) si $\alpha = \beta = \gamma = -1$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es tal que

$B^2 = -B \quad \Rightarrow \quad B^n = (-1)^{n+1} B$

si $E_k = x_k - \underline{x}$, por $A\underline{x} = b$, entonces

$$E_k = B^k E_0 = (-1)^{k+1} B E_0 \quad : \quad x_k = \underline{x} + (-1)^{k+1} B E_0$$

sucesión oscilante que no converge

c) si $\alpha = \gamma = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es tal que $B^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = B x_0 + M^{-1} b$$

$$x_2 = B x_1 + M^{-1} b = B^2 x_0 + B M^{-1} b + M^{-1} b$$

$$= (B M^{-1} + M^{-1})\, b$$

$$x_k = x_2 \quad \forall\, k \geq 2$$

$\Rightarrow x_2$ ya es la solución $\underline{x}$:

vale $B M^{-1} + M^{-1} = A^{-1}$

- se puede comprobar haciendo la cuenta
- tenemos un teorema que nos asegura que $x_k \longrightarrow \underline{x}$, lo que implica esa identidad

$\boxed{\text{ej. 1 hoja 4}}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$B_J = -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/3 \\ 7/4 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz de iteración de Jacobi

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 4/3 \\ 7/4 & \lambda & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 1/4\right) + 4/3\left(\tfrac{\lambda}{2} + 7/8\right) = \lambda^3 + \frac{5}{12}\lambda + 7/6$$

$f(x) = x^3 + \frac{5}{12}x + 7/6$, $f'(x) = 3x^2 + \frac{5}{12} > 0$ => solo 1 cero real

$f(1) = 1 + \frac{5}{12} + 7/6 > 0$, $f(-1) = -1 - \frac{5}{12} + \frac{7}{6} < 0$ => el único cero real está en $(-1, 1)$

esto NO implica que $\rho(B_J) < 1$ porque hay otros dos <u>ceros</u> <u>complejos</u> (conjugados) que podrían tener módulo > 1

¿ como encontrarlos? <u>solo hay 2 maneras</u>

a) formulas de Cardano para ecuaciones cúbicas

b) métodos numéricos, por ejemplo usando <u>Matlab</u> para encontrar los <u>autovalores</u> de B_J

comando eig

```
>> eig(BJ)

ans =

   0.4608 + 1.0265i
   0.4608 - 1.0265i
  -0.9216 + 0.0000i
```

autovalores complejos

autovalor real

$$\rho(B_J) \simeq \sqrt{0.4608^2 + 1.0265^2} \simeq 1.125 > 1$$