ex-ordinariaCyS-20-21-consols.pdf

FOURKLEIN

Geometría de Curvas y Superficies

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Geometría de curvas y superficies
Segundo del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021
Examen final de la convocatoria ordinaria, 31 de mayo de 2021

Ejercicio 1. Dada una curva plana birregular $\boldsymbol{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^2$, definimos su evoluta $\mathbf{e}\colon I \to \mathbb{R}^2$ como

$$\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(t)}\,\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(t),$$

donde $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ y $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ son la curvatura y el vector normal de $\boldsymbol{\gamma}(t)$ respectivamente.

Prueba que si $\boldsymbol{\gamma}$ está parametrizada por longitud de arco y $\kappa'_{\boldsymbol{\gamma}}(s) < 0$ para todo $s \in I$, entonces la longitud de la evoluta entre los puntos $a, b \in I$ (con $a < b$) es igual a

$$\frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(b)} - \frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(a)}\,.$$

SOLUCIÓN. Derivando y usando Frenet,

$$\mathbf{e}'(t) = -\frac{\kappa'_{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\kappa^2_{\boldsymbol{\gamma}}(t)}\,\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(t).$$

Por tanto usando que $\kappa'(s) < 0$,

$$\int_a^b \|e'(t)\| dt = \int_a^b \frac{|\kappa'_{\boldsymbol{\gamma}}(t)|}{\kappa^2_{\boldsymbol{\gamma}}(t)} dt = -\int_a^b \frac{\kappa'_{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\kappa^2_{\boldsymbol{\gamma}}(t)} dt = \frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(t)}\Big|_a^b = \frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(b)} - \frac{1}{\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(a)}.$$

Atención al valor absoluto y el signo.

Ejercicio 2. Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco cuya traza está contenida en la superficie de una esfera de radio $R > 0$. Demuestra que $\boldsymbol{\gamma}$ es birregular.

SOLUCIÓN. Como para cierto $\mathbf{p}$, $\|\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p}\|^2 = R^2$, tenemos que

$$(\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{p})\cdot(\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{p}) = R^2 \implies (\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{p})\cdot\boldsymbol{\gamma}' = 0 \implies (\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{p})\cdot\boldsymbol{\gamma}'' + \underbrace{\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\gamma}'}_{=1} = 0 \implies (\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{p})\cdot\boldsymbol{\gamma}'' = -1.$$

Así que $\boldsymbol{\gamma}''$ no puede ser el vector 0.

Argumento alternativo (usando curva en esfera). Toda curva en la esfera tiene curvatura normal $k_{\mathrm{n}} = \pm 1/R$ (en función del normal elegido). Y se tiene que $\kappa = \sqrt{k_{\mathrm{n}}^2 + k_{\mathrm{g}}^2}$. Así que la curvatura de la curva es $\geq 1/R$, y por tanto, nunca es cero.

Ejercicio 3. Sean $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. La función f no se anula en I, mientras que la derivada de la función g tampoco se anula en I. Consideramos ahora la superficie de revolución S con carta

$$\mathbb{X}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \qquad u \in I, v \in (0, 2\pi).$$

Comprueba que, para todo (u,v), la recta que pasa por el punto $\mathbb{X}(u,v)$ y que es perpendicular a S en ese punto corta siempre al eje vertical.

SOLUCIÓN. Como

$$\mathbb{X}_u = (f'\cos, f'\sin, g') \qquad \text{y} \qquad \mathbb{X}_v = (-f\sin, f\cos, 0),$$

se tiene que

$$\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v = (-fg'\cos, -fg'\sin, ff').$$

Este vector no se anula (usando las propiedades de f y g). La recta perpendicular es

$$(f\cos, f\sin, g) + t(-fg'\cos, -fg'\sin, ff') = \big(f\cos\cdot(1-tg'), f\sin\cdot(1-tg'), g - tff'\big),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Sea cual sea el par (u,v), hay un t (en concreto, $t = 1/g'(v)$) para el que las dos primeras coordenadas se anulan simultáneamente. Usamos aquí que g' no se anula en I.

Ejercicio 4. Consideramos la catenoide, que parametrizamos mediante

$$\mathbb{X}(t,\theta) = (\cosh(t)\cos(\theta), \cosh(t)\sin(\theta), t)\,, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R} \text{ y } \theta \in (0, 2\pi).$$

Sea la curva $\boldsymbol{\alpha}$ sobre la catenoide que, en coordenadas, viene dada por $t = \theta$, donde $0 < \theta < \pi$.

Sea A el área de la porción de catenoide comprendida entre la curva $\boldsymbol{\alpha}$, el meridiano $\theta = \pi$ y el paralelo $t = 0$. Prueba que $A \geq \pi^2/2$.

SOLUCIÓN. Calculamos

$$\mathbb{X}_t = (\sinh(t)\cos\theta, \sinh(t)\sin\theta, 1), \quad \mathbb{X}_\theta = (-\cosh(t)\sin(\theta), \cosh(t)\cos(\theta), 0)\,,$$

así que

$$E = \cosh(t)^2, \quad F = 0, \quad G = \cosh(t)^2,$$

y por tanto

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\cosh(t)^4} = \cosh(t)^2.$$

La curva $\boldsymbol{\alpha}$ se puede parametrizar mediante $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(t,t)$, con $t \in (0,\pi)$.

El recinto de integración es el triángulo encerrado entre $t = 0$, $\theta = \pi$ y $t = \theta$. El área es entonces

$$\text{área} = \int_0^\pi \int_t^\pi \cosh(t)^2\, d\theta\, dt \geq \int_0^\pi \int_t^\pi d\theta\, dt = \int_0^\pi (\pi - t)\, dt = \cdots = \frac{\pi^2}{2}\cdot$$

O directamente: $\pi^2/2$ es el área del triángulo en el plano de coordenadas y $\cosh^2(t) \geq 1$.

Ejercicio 5. Demuestra el siguiente enunciado:

Una curva birregular parametrizada por longitud de arco es una curva asintótica en cierta superficie si y solo si, en cada punto de la curva, su vector binormal es paralelo al vector normal de la superficie.

SOLUCIÓN.

$$k_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}' \perp N \Leftrightarrow \kappa\mathbf{n} \perp N \Leftrightarrow \mathbf{n} \perp N \Leftrightarrow \mathbf{b} \| N.$$

Las equivalencias se justifican apelando repetidamente a las fórmulas para el triedro de Frenet y el de Darboux.

Ejercicio 6. Consideramos una curva $\boldsymbol{\gamma}: I \to \mathbb{R}^3$ birregular y parametrizada por longitud de arco. Consideramos la superficie S dada por la parametrización

$$\mathbb{X}(s,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \qquad \text{con } s \in I \text{ y } \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

¿Es la curva $\boldsymbol{\gamma}$ una geodésica de la superficie S?

SOLUCIÓN. Calculamos el normal a la superficie:

$$\mathbb{X}_s = \mathbf{t} + \lambda\,\tau\,\mathbf{n}, \qquad \mathbb{X}_\lambda = \mathbf{b}$$

y por tanto

$$\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_\lambda = (\mathbf{t} + \lambda\,\tau\,\mathbf{n}) \times \mathbf{b} = \mathbf{n} - \lambda\,\tau\,\mathbf{t}$$

Pero sobre la curva $\boldsymbol{\gamma}$, que es $\lambda = 0$, el normal a la superficie va en la dirección de $\mathbf{n}$. Y claro, $\boldsymbol{\gamma}''$ también va en la dirección de $\mathbf{n}$. Así que es geodésica.

Ejercicio 7. Considera las superficies regulares descritas por un cono y un cilindro

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}, \qquad \bar{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Estas dos superficies tienen curvatura gaussiana 0 en cada punto.

Consideremos la aplicación $f: S \to \bar{S}$ dada por

$$f(x,y,z) = \Big(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \ln(z)\Big).$$

Demuestra que f *no* es una isometría entre S y $\bar{S}$.

SOLUCIÓN. Un argumento muy directo: los paralelos del cono van a paralelos del cilindro mediante f. Y sus longitudes no son iguales.

Otra manera: parametrizas el cono, por ejemplo $\mathbb{X}(z,\theta) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, obtienes la correspondiente carta del cilindro $\bar{\mathbb{X}}(z,\theta) = f(\mathbb{X}(z,\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta, \ln z)$, y compruebas que en puntos con iguales coordenadas no coincide la primera forma fundamental. Si parametrizas el cono como gráfica de función, las cuentas salen bastante más complicadas.

Ejercicio 8. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares, y sea $f: S_1 \to S_2$ una isometría local.

a) Prueba que si $\mathbf{p} \in S_1$ es un punto planar o parabólico, entonces $f(\mathbf{p}) \in S_2$ es también un punto planar o parabólico.

b) Da un ejemplo explícito de superficies S_1 y S_2 y de isometría $f: S_1 \to S_2$ para el que ocurra que hay puntos $\mathbf{p} \in S_1$ planos tales que $f(\mathbf{p}) \in S_2$ no es punto plano.

SOLUCIÓN. a) es teorema egregio. Para b), por ejemplo, plano/cilindro.