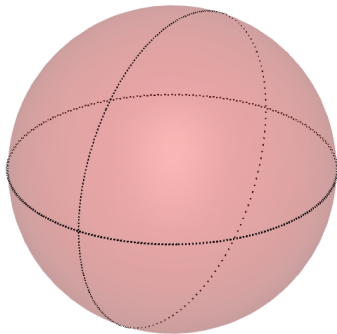


## II. Superficies

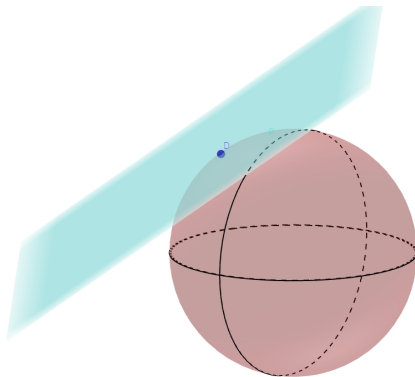
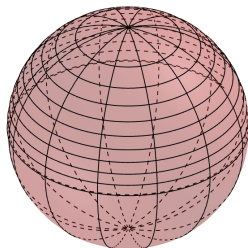
Geometría de curvas y superficies, 20-21

(José Luis Fernández/Pablo Fernández)

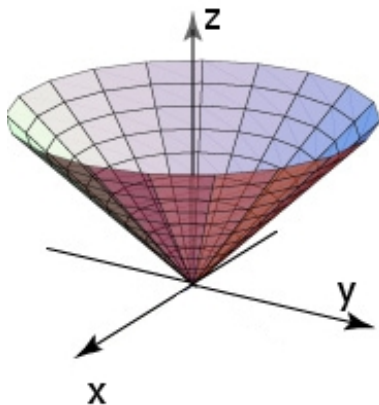
¿Qué es una superficie?



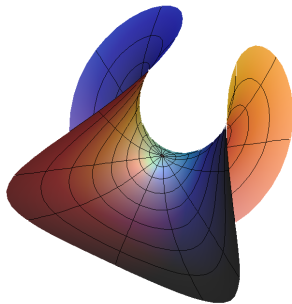
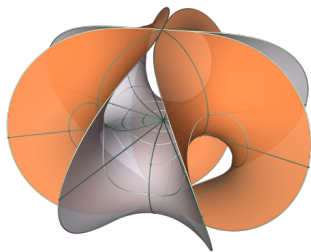
Debería serlo.



¿Y esto?



¿Y esto?



## 2.1 Superficies regulares

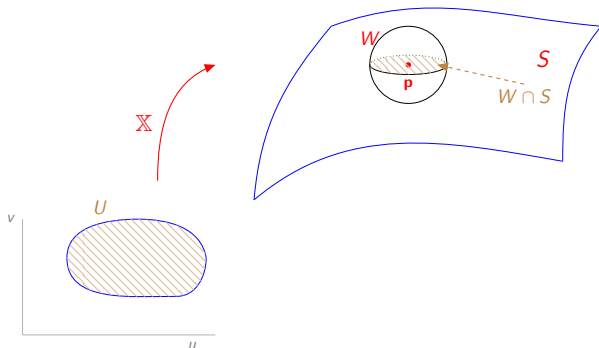
# 1. Noción de superficie regular

La noción de **superficie regular** es más complicada que la de curva regular.

Más adelante, tendremos una noción de **superficie parametrizada** que sí que es **análoga a la de curva** (forma de recorrer).

Una **superficie regular**  $S$  es un **conjunto de puntos**  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que **para todo**  $\mathbf{p} \in S$  existe

- un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,
- un abierto  $W \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbf{p} \in W$ ,
- una aplicación  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ ,





de manera que

- ① (diferenciabilidad)  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ ,
- ② (homeomorfismo)
  - 2a)  $\mathbb{X}$  es inyectiva,
  - 2b)  $\mathbb{X}^{-1} : W \cap S \rightarrow U$  es continua,
- ③ (regularidad)  $(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v)(u, v) \neq \mathbf{0}$  para todo  $(u, v) \in U$ .

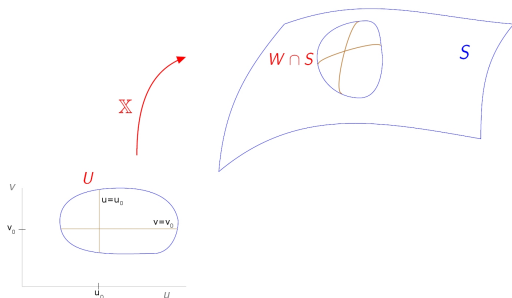
A tales  $\mathbb{X}$  se les llama **cartas**, o parametrizaciones, o mapas, o sistema (local) de coordenadas.

Si  $\mathbb{X}$  es carta de  $S$  y  $\mathbb{X}(U) = S$  (es decir, la carta  $\mathbb{X}$  cubre todo  $S$ ), se dice que  $\mathbb{X}$  es **carta global** o parametrización global.

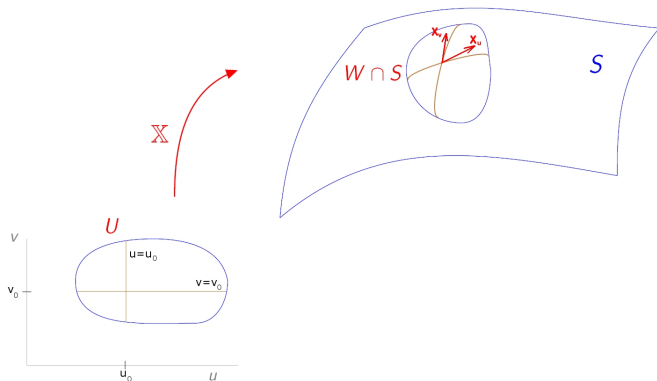
## Coordenadas y curvas coordenadas

Si  $\mathbf{q} \in \mathbb{X}(U)$ , entonces  $\mathbf{q}$  se escribe (de manera única)  $\mathbf{q} = \mathbb{X}(u_0, v_0)$  con  $(u_0, v_0) \in U$ . A  $(u_0, v_0)$  se les llama las  $\mathbb{X}$ -coordenadas de  $\mathbf{q}$ .

Las curvas que describe  $\mathbb{X}$  cuando  $v$  se deja constante y cuando  $u$  se deja constante son las **curvas coordenadas**: son  $u$ -curvas y  $v$ -curvas, respectivamente.



- $\mathbb{X}_u(u_0, v_0)$  es vector velocidad de la curva  $u \mapsto \mathbb{X}(u, v_0)$  en  $u_0$ .
- $\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  es vector velocidad de la curva  $v \mapsto \mathbb{X}(u_0, v)$  en  $v_0$ .



## Sobre las condiciones de superficie regular

Sobre la condición (1) de **diferenciabilidad**. Podemos escribir  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Las **funciones coordenadas de  $\mathbb{X}$** , es decir,  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  y  $z(u, v)$ , son funciones  $C^\infty$ .

Para muchos de los resultados que siguen, basta con que las funciones coordenadas sean  $C^2$  o  $C^3$ .

Se trata de geometría diferencial.

Sobre la condición (3) de **regularidad**. Escribiendo  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$  como vectores columnas:

$$d\mathbb{X}|_{(u,v)} = [\mathbb{X}_u(u,v) | \mathbb{X}_v(u,v)] = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix},$$

son equivalentes:

- la matriz  $d\mathbb{X}|_{(u,v)}$  es inyectiva para cada  $(u,v) \in U$ ,
- las columnas  $\mathbb{X}_u(u,v)$  y  $\mathbb{X}_v(u,v)$  son linealmente independientes para cada  $(u,v) \in U$ ,
- $\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$  para cada  $(u,v) \in U$ ,
- para cada  $(u,v) \in U$ , se cumple al menos una de:

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)(u,v) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)(u,v) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)(u,v) \neq 0$$

La condición 3) se corresponde en las curvas con su regularidad.

Sobre la condición (2) de **homeomorfismo**.

**2a.** La inyectividad de  $\mathbb{X}$  es conveniente: permite ubicar sin ambigüedad los puntos de  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$  cercanos a  $\mathbf{p}$  con parámetros  $(u, v)$ .

**2b.** Esta condición es a veces laboriosa de verificar.

Requiere comprobar, cuando ya sabemos que  $\mathbb{X}$  es inyectiva, que si  $\mathbb{X}(u_n, v_n) \rightarrow \mathbb{X}(u_0, v_0)$ , entonces  $u_n \rightarrow u_0$  y  $v_n \rightarrow v_0$ .

Pero **si ya sabemos que  $S$  es una superficie regular** y tenemos un candidato a carta  $\mathbb{X}$  que cumple las condiciones 1), 3) y la 2a), entonces **la condición 2b) es automática**.

Cada carta  $\mathbb{X}$  es un **homeomorfismo** del abierto  $U$  sobre el abierto  $W \cap S$  de  $S$ .

- Las condiciones de diferenciabilidad y de regularidad son análogas a las de curva regular.
- La condición de regularidad garantiza(-rá) la existencia de plano tangente.
- La condición de homeomorfismo es más específica.
- Otra diferencia con la noción de curvas es que tenemos múltiples cartas, y no sólo una parametrización como en el caso de curvas.
- Si no se exige la condición de homeomorfismo y sólo se tiene una carta, hablamos de superficie parametrizada, noción que tratamos más adelante.

## 2. Ejemplos de superficies regulares

**Ejemplo 1.** El plano que pasa por el punto  $\mathbf{p}$  y está generado por los vectores  $\alpha$  y  $\beta$ , que son linealmente independientes:  $\alpha \times \beta \neq \mathbf{0}$ . Admite carta global:

$$\mathbb{X}(u, v) = \mathbf{p} + u\alpha + v\beta, \quad \text{para } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

La aplicación  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ , inyectiva y regular:  $\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v \equiv \alpha \times \beta \neq \mathbf{0}$ .



¿Homeomorfismo? Si  $\mathbb{X}(u_n, v_n) \rightarrow \mathbb{X}(u_0, v_0)$ , entonces

$$u_n \alpha + v_n \beta \rightarrow u_0 \alpha + v_0 \beta,$$

de donde

$$u_n(\alpha \times \beta) \rightarrow u_0(\alpha \times \beta)$$

y, por tanto,

$$\|u_n(\alpha \times \beta) - u_0(\alpha \times \beta)\| \rightarrow 0,$$

y por tanto  $u_n \rightarrow u_0$ . Análogamente,  $v_n \rightarrow v_0$ .

**Ejemplo 2.** Cilindro definido por  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Tomamos

$$\mathbb{X}(\theta, t) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$$

definida en

$$U = \{(\theta, t) : \theta \in (-\pi/2, \pi/2), t \in \mathbb{R}\}.$$

Tomamos

$$W = \{(x, y, z) : x > 0\}.$$

La aplicación  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ , inyectiva y  $\mathbb{X}(U) = W \cap \mathcal{C}$  (la mitad “de delante”, sin bordes, del cilindro).

Regularidad: Cálculos:

$$\mathbb{X}_\theta(\theta, t) = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0),$$

$$\mathbb{X}_t(\theta, t) = (0, 0, 1),$$

$$(\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_t)(\theta, t) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0).$$

Se tiene  $\|\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_t\| \equiv 1$ .

Homeomorfismo: Si

$$(x_n, y_n, z_n) = (\cos \theta_n, \sin \theta_n, t_n) \rightarrow (\cos \theta_0, \sin \theta_0, t_0) \in W \cap \mathcal{C},$$

entonces

$$(\cos \theta_n - \cos \theta_0)^2 + (\sin \theta_n - \sin \theta_0)^2 + (t_n - t_0)^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto nos da inmediatamente que  $t_n \rightarrow t_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $x_n, x_0 > 0$ ,

$$\theta_n = \arctan(y_n/x_n) \rightarrow \arctan(y_0/x_0) = \theta_0.$$

Así que  $\mathbb{X}^{-1}$  es continua desde  $W \cap \mathcal{C}$  a  $U$ .

Con cuatro cartas análogas (izquierda, derecha y detrás), se cubre todo el cilindro  $\mathcal{C}$ .

Las curvas  $\theta = \text{constante}$  son **meridianos**, las curvas  $t = \text{constante}$  son **paralelos**.

**Ejercicio.** Podemos cubrir el cilindro  $\mathcal{C}$  con **una sola carta (global)**.

Tomamos  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y definimos

$$\mathbb{X}(u, v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \ln \sqrt{u^2 + v^2} \right).$$

Verificación de que  $\mathbb{X}$  es carta. Curvas coordenadas.

**Ejemplo 3. Gráficas:** si  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$ , la gráfica de  $f$  es el conjunto de puntos

$$G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Para  $(u, v) \in U$ , tomamos

$$\mathbb{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

En este caso  $\mathbb{X}(U) = G(f)$ , así que es carta global.

La aplicación  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$  e inyectiva.

**Homeomorfismo:**  $\mathbb{X}^{-1} : G(f) \rightarrow U$  viene dada por

$$\mathbb{X}^{-1}(x, y, z) = (x, y),$$

que es continua.

**Regularidad:** se tiene que

$$\mathbb{X}_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)),$$

$$\mathbb{X}_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)).$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned}(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v)(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \times (0, 1, f_v(u, v)) \\ &= (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1),\end{aligned}$$

que es no nulo sea cual sea  $(u, v)$ .

**Ejemplo 4.** La **esfera unidad**,  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

Podemos cubrir  $S$  con **seis** cartas que son gráficas de funciones.

Tomemos  $U = \{u^2 + v^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ .

Sea

$$\mathbb{X}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

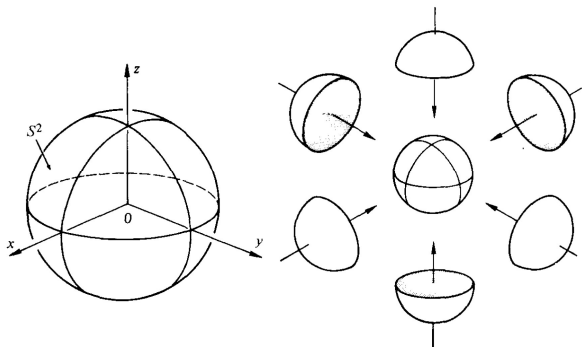
que es la carta definida por la gráfica de  $(u, v) \mapsto \sqrt{1 - u^2 - v^2}$  y es tal que  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ .

Esta carta cubre el hemisferio superior de la esfera sin el ecuador.



Otra carta es  $\mathbb{Y}(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ , que cubre el hemisferio inferior. Cambiando el papel de  $z$  por  $x$  y por  $y$ , se tienen cuatro cartas adicionales.

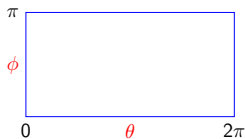
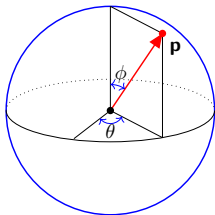
Las (trazas de las) seis cartas definidas cubren la esfera unidad. La siguiente ilustración está extraída del texto de Do Carmo.



Consideremos la carta  $\mathbb{X}$  de coordenadas esféricas dada por

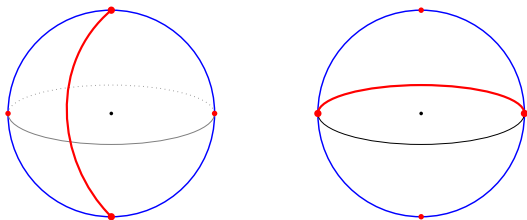
$$\mathbb{X}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi), \text{ con } \theta \in (0, 2\pi) \text{ y } \phi \in (0, \pi).$$

$\theta$  es longitud y  $\phi$  es colatitud.



Las curvas  $\phi = \text{constante}$  son paralelos.

Las curvas  $\theta = \text{constante}$  son meridianos.



- La carta  $\mathbb{X}$  cubre todo  $S$  salvo el meridiano (incluidos los polos) que pasa por  $(1, 0, 0)$ .
- Con un carta análoga que cubre  $S$  salvo la mitad del ecuador que va desde  $(0, 1, 0)$  hasta  $(0, -1, 0)$  pasando por  $(-1, 0, 0)$ , tenemos que con dos cartas se cubre todo  $S$ .

Nota: no hay  $\mathbb{X}$  carta global de la esfera, pues tal  $\mathbb{X}$  sería homeomorfismo de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  (que no es compacto) sobre  $S$ , que es compacto.

La  $\mathbb{X}$  de las coordenadas esféricas es  $C^\infty$  e inyectiva.

**Regularidad:** Cálculos:

$$\mathbb{X}_\theta(\theta, \phi) = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$\mathbb{X}_\phi(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi)$$

$$(\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_\phi)(\theta, \phi) = (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

de manera que

$$\|(\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_\phi)(\theta, \phi)\|^2 = \sin^2 \phi > 0.$$

**Homeomorfismo:** si  $\mathbb{X}(\theta_n, \phi_n) \rightarrow \mathbb{X}(\theta_0, \phi_0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , es decir, si

$$(\cos \theta_n \sin \phi_n, \sin \theta_n \sin \phi_n, \cos \phi_n) \rightarrow (\cos \theta_0 \sin \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \phi_0)$$

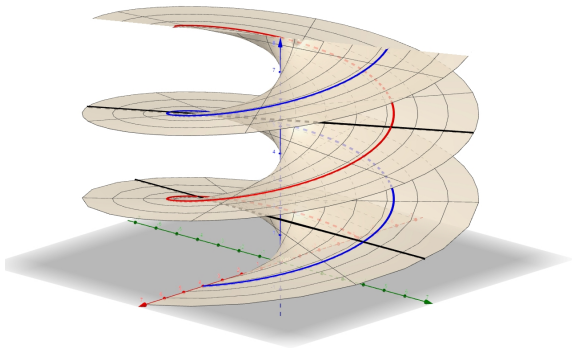
cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

- entonces  $\cos \phi_n \rightarrow \cos \phi_0$ , y como los ángulos  $\phi \in (0, \pi)$ , se tiene que  $\phi_n \rightarrow \phi_0$ .
- Por tanto,  $\sin \phi_n \rightarrow \sin \phi_0$ .
- De donde, como  $\sin \phi_0 > 0$ , se deduce que  $\cos \theta_n \rightarrow \cos \theta_0$  y  $\sin \theta_n \rightarrow \sin \theta_0$ . Por tanto,  $\theta_n \rightarrow \theta_0$ .

**Ejemplo 5.** El **helicoides**  $\mathcal{H}$  (rampa, escalera de caracol).

**Atención:** Aquí no se da la superficie regular como lugar de puntos de  $\mathbb{R}^3$ , sino como la traza de una **carta global**. Sea

$$\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, \theta), \quad \text{con } U = \{(u, \theta) : u \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$



Las curvas coordenadas  $\theta = \text{constante}$  son **rectas**.

Las curvas coordenadas  $u = \text{constante}$  son **hélices**, salvo  $u = 0$ , que es el eje  $OZ$ .

La aplicación  $\mathbb{X}$  es inyectiva y  $C^\infty$  y  $\mathcal{H} = \mathbb{X}(U)$  es el helicoides.

**Homeomorfismo:** si  $\mathbb{X}(u_n, \theta_n) \rightarrow \mathbb{X}(u_0, \theta_0)$ , entonces  $\theta_n \rightarrow \theta_0$ , y como las funciones  $\cos$  y  $\sin$  no se anulan simultáneamente, se tiene que  $u_n \rightarrow u_0$ .

**Regularidad.** Cálculos:

$$\mathbb{X}_u(u, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$\mathbb{X}_\theta(u, \theta) = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 1),$$

$$(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_\theta)(u, \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, u),$$

$$\|(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_\theta)(u, \theta)\| = \sqrt{1 + u^2} \neq 0.$$



## Recordatorio: Teorema de la función implícita

Sean

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$ ,
- $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ ,
- y  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ , con  $G(\mathbf{p}) = a \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que

$$\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0.$$

Entonces podemos despejar  $z$  en función de  $x$  e  $y$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

Es decir, existe una función  $g(x, y)$  de manera que

$$G(x, y, z) = a \quad \text{si y solo si} \quad z = g(x, y)$$

Pero el teorema de la función implícita es **local**, cerca de  $\mathbf{p}$ .

En términos precisos,

- 1 existe un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  con  $(x_0, y_0) \in U$ ,
- 2 existe un abierto  $W \subset \mathbb{R}^3$ ,
- 3 existe una función  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  que es  $C^\infty$ ,

de manera que

$$\text{Gráfica de } g = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in U\} = W \cap \{G(x, y, z) = a\}.$$

En particular,

$$G(x, y, g(x, y)) = a, \quad \text{para todo } (x, y) \in U.$$

## Más ejemplos de superficies regulares

### Ejemplo 6. Superficies de nivel.

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $F$  una función  $C^\infty$  definida en  $\Omega$ .

- Un punto  $(x, y, z) \in \Omega$  se dice **punto crítico** de  $F$  si  $\nabla F(x, y, z) = \mathbf{0}$ .
- Un valor  $a \in \mathbb{R}$  se dice **valor regular** de  $F$  si
  - ▶  $F^{-1}(a) \neq \emptyset$  y
  - ▶  $F^{-1}(a)$  no contiene ningún punto crítico, es decir,  $\nabla F(x, y, z) \neq \mathbf{0}$  si  $F(x, y, z) = a$ .

El teorema de la función implícita, combinado con que las gráficas de funciones  $C^\infty$  son superficies regulares, nos dice que si  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  y si  $a$  es valor regular de  $F$ , entonces **la superficie de nivel**

$F^{-1}(a)$  es superficie regular.

Sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ , y sea  $a$  un valor regular de  $F$ . Llamamos

$$S_a = F^{-1}(a) = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = a\}.$$

Dado  $\mathbf{p} \in S_a$  (es decir, tal que  $F(\mathbf{p}) = a$ ), se tiene que  $\nabla F(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ . Es decir, alguno de  $F_x(\mathbf{p})$ ,  $F_y(\mathbf{p})$  o  $F_z(\mathbf{p})$  es no nulo. Supongamos que  $F_z(\mathbf{p}) \neq 0$ . Entonces el teorema de la función implícita nos dice que existen abiertos  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $W \subset \mathbb{R}^3$  (con  $\mathbf{p} \in W$ ) y una función  $f : U \rightarrow W$  que es  $C^\infty$  de manera que

$$S_a \cap W = \{(x, y, z) \in W : F(x, y, z) = a\}$$

coincide con

$$\text{gráfica de } f = \{(x, y, z) : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

La carta para el punto  $\mathbf{p}$  sería  $\mathbb{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . La comprobación termina recordando que las gráficas de funciones  $C^\infty$  son superficies regulares.

- Sea

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Como

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

el único punto crítico es  $(0, 0, 0)$ .

Para  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$F^{-1}(a) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a\}.$$

Los valores regulares son los  $a > 0$ .

En particular, la esfera unidad,  $F^{-1}(1) = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , es superficie regular.

- Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Tomamos

$$F(x, y, z) = z - f(x, y),$$

definida en  $\Omega = U \times \mathbb{R}$ .

Como

$$\nabla F(x, y, z) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1),$$

la función  $F$  no tiene puntos críticos.

En particular, como

$$F^{-1}(0) = \{(x, y, z) : z - f(x, y) = 0\} = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\},$$

la gráfica de  $f$  es una superficie regular.

- Sea

$$F(x, y, z) = (x - y)^2 + z^2.$$

Como

$$\nabla F(x, y, z) = (2(x - y), -2(x - y), 2z),$$

los puntos críticos son aquellos con  $x = y$  y  $z = 0$  (simultáneamente).

Para  $a \in \mathbb{R}$ ,

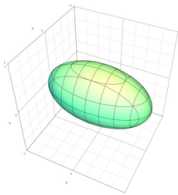
$$F^{-1}(a) = \{(x, y, z) : (x - y)^2 + z^2 = a\}.$$

Los valores regulares son los  $a > 0$ .

En particular,  $(x - y)^2 + z^2 = 1$  es superficie regular.

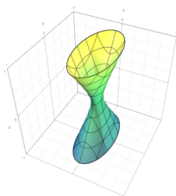
elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



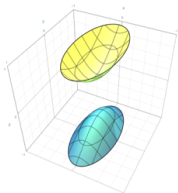
hiperboloide de una hoja

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



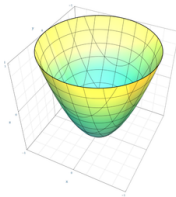
hiperboloide de dos hojas

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$



paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

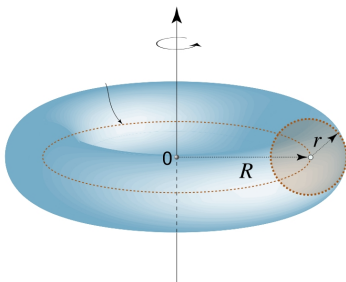




**Ejemplo 7.** El **toro** de parámetros  $R > r > 0$ .

Rotación de la circunferencia  $(y - R)^2 + z^2 = r^2$  situada en el semiplano derecho del plano  $YZ$ ,

- de centro  $(R, 0)$ ,
  - y con radio  $r$ ,
- alrededor del eje  $OZ$ .



Ecuación del toro:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Sea  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ .

Sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $C^\infty$  dada por

$$F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2.$$

## Puntos y valores críticos de $F$ .

$$\nabla F(x, y, z) = \left( \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - R)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - R)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Puntos críticos de  $F$  en  $\Omega$ : los  $(x, y, z)$  tales que  $x^2 + y^2 = R^2$  y  $z = 0$ .

Como

$$F^{-1}(a) = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = a\},$$

los valores regulares de  $F$  son  $a > 0$ .

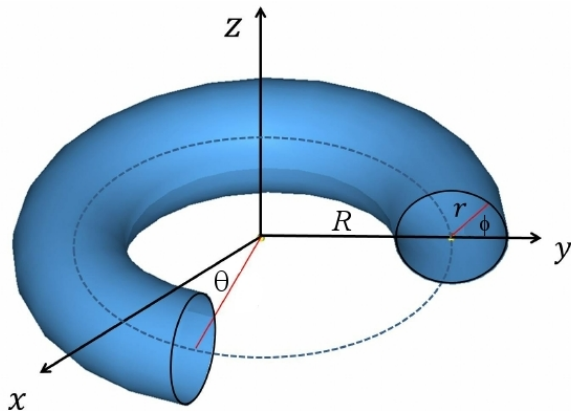
Así que el toro:

$$\{(x, y, z) : F(x, y, z) = r^2\}$$

es superficie regular.

Carta usual del toro: para  $\theta \in (0, 2\pi)$  y  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,

$$\mathbb{X}(\theta, \phi) = (\cos \theta (R + r \cos \phi), \sin \theta (R + r \cos \phi), r \sin \phi).$$



Regularidad: Cálculos:

$$\mathbb{X}_\theta(\theta, \phi) = (-\sin \theta (R + r \cos \phi), \cos \theta (R + r \cos \phi), 0),$$

$$\mathbb{X}_\phi(\theta, \phi) = (-r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi),$$

$$(\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_\phi)(\theta, \phi) = r(R + r \cos \phi) (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi).$$

Así que

$$\|(\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_\phi)(\theta, \phi)\| = r(R + r \cos \phi) > 0.$$

¿Cuántas cartas, análogas a esta, son necesarias para cubrir todo el toro?

### 3. Superficies parametrizadas

La noción de superficie parametrizada es más general que la que hemos manejado de superficie regular.

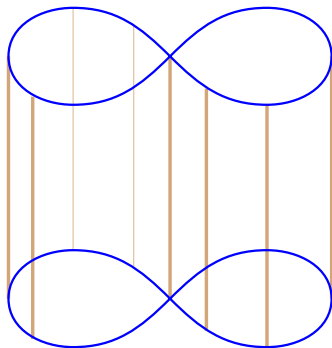
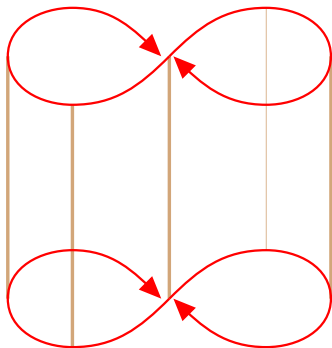
Es extensión directa de la noción de curva regular. Deberíamos quizás adjetivar superficie parametrizada *regular*, pero no.

Una **superficie parametrizada** viene dada por un dominio  $U$  en  $\mathbb{R}^2$  y una aplicación  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

- $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ ,
- $\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ , para cada  $(u, v) \in U$ .

La traza de esta superficie parametrizada es  $\mathbb{X}(U)$ .

- Sólo hay una carta.
- De  $\mathbb{X}$  no se exige que sea inyectiva, ni que  $\mathbb{X}^{-1}$  sea continua.



## Superficies generadas por curvas

a) **Cilindros.** Supongamos que  $\alpha(t) = (a(t), b(t))$  es una curva en  $\mathbb{R}^2$  definida en un intervalo  $I$ .

Definimos un **cilindro parametrizado** mediante

$$\mathbb{X}(t, u) = (a(t), b(t), u)$$

para  $t \in I$  and  $u \in \mathbb{R}$ .

La aplicación  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ .

Cálculos:

$$\mathbb{X}_t(t, u) = (\dot{a}(t), \dot{b}(t), 0),$$

$$\mathbb{X}_u(t, u) = (0, 0, 1),$$

$$\mathbb{X}_t(t, u) \times \mathbb{X}_u(t, u) = (\dot{b}(t), -\dot{a}(t), 0).$$



Por tanto,

$$\|\mathbb{X}_u(t, u) \times \mathbb{X}_v(t, u)\|^2 = \dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|^2.$$

De manera que  $\mathbb{X}$  es superficie parametrizada si y sólo si la curva  $\alpha$  es curva regular.

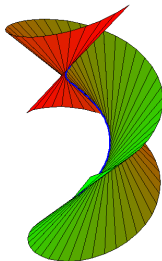
## b) Superficie de tangentes

Sea  $\gamma(s)$  una curva regular parametrizada por longitud de arco, con  $s \in I$ .

Sea  $\mathbb{X}(s, u)$  dada por

$$\mathbb{X}(s, u) = \gamma(s) + u\gamma''(s) \quad \text{con } s \in I, u > 0.$$

Las curvas  $s = \text{constante}$  son (semi-)rectas tangentes a  $\gamma$ .



Cálculos:

$$\mathbb{X}_s(s, u) = \gamma'(s) + u \gamma''(s),$$

$$\mathbb{X}_u(s, u) = \gamma'(s),$$

de manera que

$$\mathbb{X}_s(s, u) \times \mathbb{X}_u(s, u) = u (\gamma''(s) \times \gamma'(s)),$$

y por tanto,

$$\|\mathbb{X}_s(s, u) \times \mathbb{X}_u(s, u)\| = u \|\gamma''(s) \times \gamma'(s)\| = u \kappa(s).$$

Si la curva  $\gamma(s)$  es birregular, entonces  $\mathbb{X}(s, u)$  es superficie parametrizada.

### c) Superficies de revolución

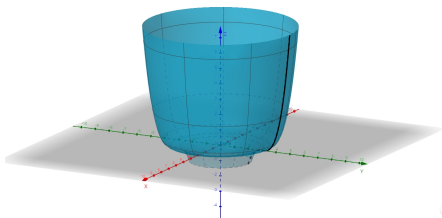
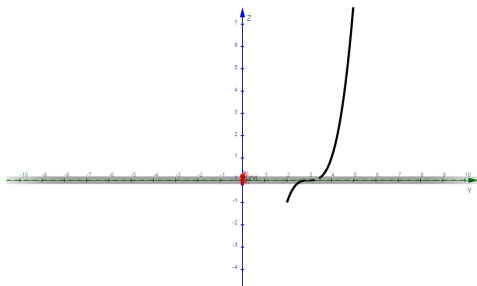
Tenemos una curva en el semiplano derecho del plano  $YZ$ :

$$(0, a(t), b(t)), \quad \text{para } t \in I,$$

con  $a(t) > 0$ , para  $t \in I$ .

Definimos

$$\mathbb{X}(\theta, t) = (a(t) \cos \theta, a(t) \operatorname{sen} \theta, b(t)), \quad \text{para } t \in I \text{ y } \theta \in \mathbb{R}.$$



Cálculos:

$$\mathbb{X}_t = (\dot{a}(t) \cos \theta, \dot{a}(t) \operatorname{sen} \theta, \dot{b}(t))$$

$$\mathbb{X}_\theta = (-a(t) \operatorname{sen} \theta, a(t) \cos \theta, 0)$$

$$\mathbb{X}_t \times \mathbb{X}_\theta = (-a(t)\dot{b}(t) \cos \theta, b(t)\dot{a}(t) \operatorname{sen} \theta, a(t)\dot{a}(t))$$

Por tanto,

$$\|\mathbb{X}_t(\theta, t) \times \mathbb{X}_\theta(\theta, t)\|^2 = a^2(t)(\dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t)) = a^2(t)\|\dot{\alpha}(t)\|^2.$$

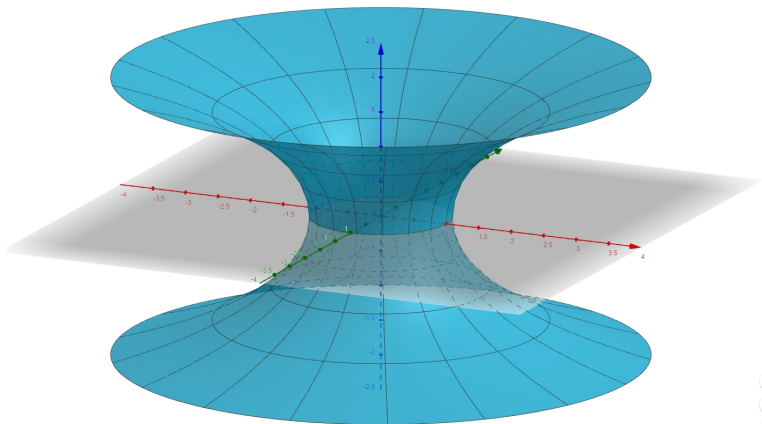
De manera que,  $\mathbb{X}$  es superficie parametrizada si y sólo si la curva  $\alpha$  es curva regular.

**Toro:** En este caso  $(0, a(t), b(t)) = (0, R + r \cos t, r \sin t)$  que es curva regular.

$$X(\theta, t) = (\cos \theta (R + r \cos t), \sin \theta (R + r \cos t), r \sin t)$$

**Catenoide:** En este caso  $(0, a(t), b(t)) = (0, \cosh t, t)$  que es curva regular.

$$X(\theta, t) = (\cos \theta \cosh t, \sin \theta \cosh t, t)$$





# Complementos

# 1. Las superficies regulares son localmente gráficas

Sea  $S$  una superficie regular y sea  $\mathbf{p}$  un punto de  $S$ .

Entonces existe un abierto  $W$  de  $\mathbf{p}$  en  $\mathbb{R}^3$  de manera que  $W \cap S$  es la gráfica de una función  $C^\infty$  de una de las tres formas siguientes:

$$z = g(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = g(y, z).$$

Por ejemplo, en cualquier punto de la esfera unidad, salvo en aquellos seis puntos con alguna coordenada  $\pm 1$ , se puede despejar cualquier variable; en los polos Norte y Sur, se puede despejar  $z$  en términos de  $x$  e  $y$ , pero no se puede despejar  $x$  en términos de  $y$  y  $z$ ; o  $y$  en términos de  $x$  y  $z$ .

### Ejemplo 8. El caso del cono.

Consideremos el cono recto

$$\mathcal{N} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = +\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Y el cono recto sin el vértice  $(0, 0, 0)$ , que denotamos por  $\mathcal{N}_0$ :

$$\mathcal{N}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = +\sqrt{x^2 + y^2}, z > 0\}.$$

Vamos a comprobar que el cono  $\mathcal{N}$  **no** es superficie regular, mientras que al quitarle el vértice, se tiene que  $\mathcal{N}_0$  **sí** es superficie regular.

- El cono  $\mathcal{N}$  **no** es superficie regular.

Si lo fuera, en el entorno del punto  $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$  habría una carta  $\mathbb{X}$  que es una gráfica.

Esa gráfica no puede ser ni  $x$  despejada, ni  $y$  despejada, pues no sería inyectiva.

La carta  $\mathbb{X}$  habría de ser  $\mathbb{X}(u, v) = (u, v, +\sqrt{u^2 + v^2})$ , con  $(u, v) \in U$ , donde  $U$  es un entorno de  $(0, 0)$ .

Pero esta  $\mathbb{X}$  no es  $C^\infty$ ; no es siquiera  $C^1$ , pues las derivadas parciales  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$  no son continuas en  $(0, 0)$ .

- El cono  $\mathcal{N}_0$  **sí** es superficie regular.

Sea  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}^3\}$ . Y sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la función

$$F(x, y, z) = +\sqrt{x^2 + y^2} - z, \quad \text{para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

La función  $F$  es  $C^\infty$  y no tiene puntos críticos, pues  $\partial F / \partial z \equiv 1$ . Por tanto, todo  $a \in \mathbb{R}$  es valor regular de  $F$ .

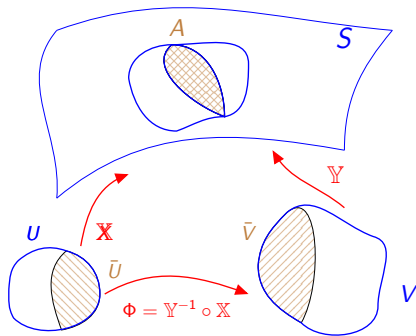
De manera que  $\mathcal{N}_0 = F^{-1}(0)$  es superficie regular.

En resumen, el **cono completo**  $\{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2\}$  no es superficie regular, pero si le quitamos el vértice  $(0, 0, 0)$  sí lo es, con dos componentes conexas.

## 2. Los cambios de carta son difeomorfismos

Sean  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{Y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  cartas en un punto  $\mathbf{p}$  de una superficie regular  $S$ .

Denotemos  $A = \mathbb{X}(U) \cap \mathbb{Y}(V)$  y sean  $\bar{U} = \mathbb{X}^{-1}(A)$  y  $\bar{V} = \mathbb{Y}^{-1}(A)$ .



Los puntos de  $A$  tienen  $\mathbb{X}$ -coordenadas en  $\bar{U}$  e  $\mathbb{Y}$ -coordenadas en  $\bar{V}$ .

La función  $\Phi$  definida en  $\bar{U}$  y con valores en  $\bar{V}$  dada por

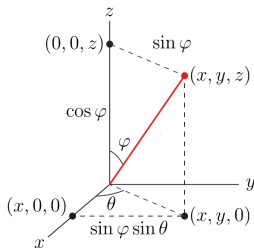
$$\Phi = \mathbb{Y}^{-1} \circ \mathbb{X} : \bar{U} \longrightarrow \bar{V}$$

es un **difeomorfismo**, y lleva  $\mathbb{X}$ -coordenadas en  $\mathbb{Y}$ -coordenadas.

La función  $\Phi$  es el **cambio de carta**: de  $\mathbb{X}$  coordenadas a  $\mathbb{Y}$ -coordenadas.

Si  $(a, b) \in \bar{U}$  son las  $\mathbb{X}$ -coordenadas de un punto  $\mathbf{q} \in A$ , entonces  $(c, d) = \Phi(a, b)$  son las  $\mathbb{Y}$ -coordenadas de  $\mathbf{q}$ .

**Ejemplo.** Cambio de coordenadas en la **esfera unidad**. Supongamos, por comodidad, que el punto **p** de interés está en el octante positivo de la esfera.



Carta con ángulos:

$$\mathbb{X}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi).$$

Carta como gráfica de función:

$$\mathbb{Y}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$



Cambio de coordenadas (de ángulos  $(\theta, \phi)$  a cartesianas  $(x, y)$ ):

$$\begin{aligned}\Phi(\theta, \phi) &= \mathbb{Y}^{-1}(\mathbb{X}(\theta, \phi)) = \mathbb{Y}^{-1}(\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi) \\ &= \left( \underbrace{\cos \theta \operatorname{sen} \phi}_{=x(\theta, \phi)}, \underbrace{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}_{=y(\theta, \phi)} \right),\end{aligned}$$

pues  $\mathbb{Y}^{-1}$  es proyección (sobre las primeras coordenadas). Véase el dibujo del comienzo del ejemplo.

Cambio de coordenadas (de cartesianas  $(x, y)$  a ángulos  $(\theta, \phi)$ ):

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(x, y) &= \mathbb{X}^{-1}(\mathbb{Y}(x, y)) = \mathbb{X}^{-1}(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \\ &= (\underbrace{\arctan(y/x)}_{=\theta(x,y)}, \underbrace{\arccos(\sqrt{1 - x^2 - y^2})}_{=\phi(x,y)})\end{aligned}$$

pues  $\mathbb{X}^{-1}(a, b, c) = (\arctan(b/a), \arccos(c))$  (véase el dibujo del comienzo del ejemplo).

**Ejercicio (numérico).** Calcular las  $\mathbb{Y}$ -coordenadas de los puntos de  $\mathbb{X}$ -coordenadas  $(\pi/4, \pi/4)$  o  $(\pi/3, \pi/8)$ .

Calcular las  $\mathbb{X}$ -coordenadas de los puntos de  $\mathbb{Y}$ -coordenadas  $(1/2, 1/2)$  o  $(1/3, 1/8)$ .

### 3. Sobre la condición $\mathbb{X}^{-1}$ continua

Supongamos que  $S$  es superficie regular.

Sea  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ . Pongamos que

$$\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \text{para } (u, v) \in U.$$

Supongamos que  $\mathbb{X}$

- cumple la condición de **diferenciabilidad**: la aplicación  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ ,
- cumple la condición de **regularidad**,
- y además que  $\mathbb{X}$  es inyectiva.

La conclusión es que  $\mathbb{X}$  es carta (**no es necesario** comprobar la condición de que  $\mathbb{X}^{-1}$  sea continua).

## 4. Superficies parametrizadas y superficies regulares

Supongamos que  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie parametrizada, y sea  $(u_0, v_0) \in U$ .

Entonces se puede tomar  $V$  entorno de  $(u_0, v_0)$  tal que

$$(u_0, v_0) \in V \subset U,$$

y de manera que

$$S \triangleq \mathbb{X}(V) \text{ es superficie regular.}$$

Es más,  $\mathbb{X} : V \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  es parametrización global de  $S$ .

En otras palabras, se puede escoger  $V$  de tal manera que  $\mathbb{X}$  sea inyectiva y además que  $\mathbb{X}^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  sea continua.

## Recordatorio: Teorema de la función inversa

Sean

- $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ,
- $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función  $C^\infty$ ,
- y  $\mathbf{q} \in U$ .

Si el jacobiano de  $G$  en  $\mathbf{q}$  es no nulo, entonces

- existe un entorno  $\bar{U} \subset U$  de  $\mathbf{q}$  y
- existe un entorno  $\bar{V}$  de  $G(\mathbf{q})$

tal que

$G$  es difeomorfismo de  $\bar{U}$  sobre  $\bar{V}$ .

## Demostración de que las superficies regulares son, localmente, gráficas de funciones

Sea  $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  carta de  $S$  en  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ , y sea  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ , donde  $W$  es abierto de  $\mathbb{R}^3$ .

Pongamos que  $\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

La condición de regularidad nos da que al menos uno de los tres jacobianos que siguen, evaluados en  $(u_0, v_0)$ , es no nulo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}.$$

Supongamos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Consideremos la función  $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , definida en  $U$  y  $C^\infty$ .

Por el teorema de la función inversa, obtenemos un entorno de  $\bar{U}$  de  $(u_0, v_0)$  y un entorno  $\bar{V}$  de  $(x_0, y_0)$ , de manera que  $G$  es un difeomorfismo de  $\bar{U}$  sobre  $\bar{V}$ .

Denotemos  $G^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  para  $(x, y) \in \bar{V}$ .

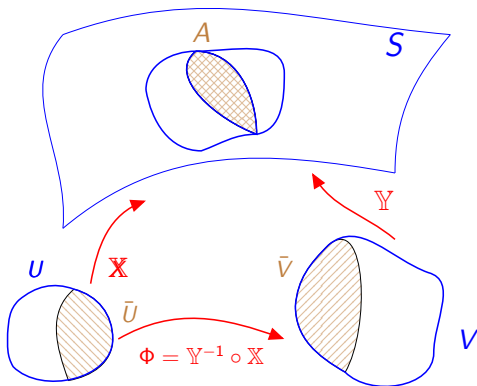
De que  $\mathbb{X}$  es homeomorfismo, se obtiene que  $\mathbb{X}(\bar{U}) = \bar{W} \cap S$ , donde  $\bar{W}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\mathbf{p}$ .

Como  $(\mathbb{X} \circ G^{-1})(x, y) = (x, y, z(u(x, y), v(x, y))) \triangleq (x, y, g(x, y))$ , para cada  $(x, y) \in \bar{V}$  y como  $(\mathbb{X} \circ G^{-1})(\bar{V}) = \mathbb{X}(\bar{U}) = \bar{W} \cap S$ , tenemos, como queríamos, que  $\bar{W} \cap S$  es la gráfica de la función  $g$  en  $\bar{U}$ .

## Demostración de que los cambios de cara son difeomorfismos

Sean  $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{Y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  cartas en un punto  $\mathbf{p}$  de una superficie  $S$ .

Denotemos  $A = \mathbb{X}(U) \cap \mathbb{Y}(V)$  y sean  $\bar{U} = \mathbb{X}^{-1}(A)$  y  $\bar{V} = \mathbb{Y}^{-1}(A)$ .





El cambio de cartas  $\Phi = \mathbb{Y}^{-1} \circ \mathbb{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  es homeomorfismo (casi por definición).

Basta comprobar que  $\Phi$  es  $C^\infty$ . Intercambiando los papeles de  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  se tendría que  $\Phi^{-1}$  es  $C^\infty$ .

Comprobamos que  $\Phi$  es  $C^\infty$ , solamente en el caso en que  $\mathbb{Y}$  es gráfica de una función, digamos  $g$ :

$$\mathbb{Y}(r, s) = (r, s, g(r, s)), \quad \text{para } (r, s) \in V.$$

Si  $\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , entonces

$$\Phi(u, v) = (\mathbb{Y}^{-1} \circ \mathbb{X})(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad \text{para } (u, v) \in \bar{U},$$

de manera que  $\Phi$  es  $C^\infty$ .

### Sobre la condición $\mathbb{X}^{-1}$ continua

Sea  $\mathbf{p} \in W \cap S = \mathbb{X}(U)$ . Digamos que  $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Vamos a ver que  $\mathbb{X}^{-1}$  es continua en un entorno de  $\mathbf{p}$ .

La condición de regularidad nos da que al menos uno de los tres jacobianos que siguen evaluados en  $(u_0, v_0)$  es no nulo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}.$$

Supongamos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Denotemos  $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ . Como el jacobiano de  $G$  en  $(u_0, v_0)$  es no nulo, el **teorema de la función inversa** nos da entornos  $\bar{U}$  de  $(u_0, v_0)$  y  $\bar{V}$  de  $(x_0, y_0) = G(u_0, v_0)$  de manera que  $G$  es difeomorfismo de  $\bar{U}$  sobre  $\bar{V}$ .

Denotemos por  $\Pi$  a la proyección de  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Pi(x, y, z) = (x, y).$$

Sea  $(x, y, z) = \mathbb{X}(u, v) \in \mathbb{X}(\bar{U})$ , de manera que  $(u, v) = \mathbb{X}^{-1}(x, y, z)$  y  $(x, y) = G(u, v)$ .

Entonces,  $(u, v) = (G^{-1} \circ \Pi)(x, y, z)$ .

Por tanto,

$$\mathbb{X}^{-1} = G^{-1} \circ \Pi, \quad \text{en } \mathbb{X}(\bar{U}),$$

y, en particular,

$$\mathbb{X}^{-1} \text{ es continua en } \mathbb{X}(\bar{U}).$$

## 2.2 Vectores y plano tangente

# Vector tangente

Tenemos una superficie regular  $S$  y un punto  $\mathbf{p} \in S$ .

Decimos que  $\mathbf{v}$  es **vector tangente** a  $S$  en el punto  $\mathbf{p}$  si existe una curva  $\alpha$  definida en un intervalo  $I$  que contiene a  $0$  tal que

- $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ,
- la traza de  $\alpha$  está contenida en  $S$ .
- y  $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$ .

Es decir, el que  $\mathbf{v}$  sea un vector tangente a la superficie regular  $S$  en el punto  $\mathbf{p}$  significa que  $\mathbf{v}$  es vector tangente (velocidad) a una curva por  $\mathbf{p}$  con traza en  $S$ .

## Vector tangente en coordenadas

Tomemos una carta  $\mathbb{X} : U \rightarrow S$ , tal que  $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ .

Sea  $\mathbf{v}$  un vector tangente a  $S$  en  $\mathbf{p}$ , y sea  $\alpha$  una curva con traza contenida en  $S$ , que en tiempo  $t = 0$  pasa por  $\mathbf{p}$ , es decir,  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ , y es tal que  $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$ .

Podemos escribir

$$\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$$

con  $u(0) = u_0$  y  $v(0) = v_0$ . Entonces

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{u}(0) \mathbb{X}_u(u_0, v_0) + \dot{v}(0) \mathbb{X}_v(u_0, v_0).$$

Así que  $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$  es combinación lineal de  $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ .

Recíprocamente, dada una combinación lineal de  $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ ,

$$\mathbf{v} = a \mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b \mathbb{X}_v(u_0, v_0),$$

consideramos la curva  $\alpha$  dada por

$$\alpha(t) = \mathbb{X}(u_0 + ta, v_0 + tb),$$

para la que

$$\dot{\alpha}(t) = a \mathbb{X}_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + b \mathbb{X}_v(u_0 + ta, v_0 + tb).$$

Así que

$$\dot{\alpha}(0) = a \mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b \mathbb{X}_v(u_0, v_0) = \mathbf{v}.$$

# Plano tangente

Los vectores tangentes (a  $\mathbf{p}$  en  $S$ ) conforman un plano que llamamos **plano tangente de  $S$  en  $\mathbf{p}$** , y denotamos por  $T_{\mathbf{p}}S$ .

Para cada carta  $\mathbb{X}$  en  $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ , los vectores  $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$  son una base del plano tangente de  $S$  en  $\mathbf{p}$ .

- $\mathbb{X}_u(u_0, v_0)$  es el vector velocidad de la curva coordenada  $t \rightarrow \mathbb{X}(t + u_0, v_0)$  en  $t = 0$ .
- $\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  es el vector velocidad de la curva coordenada  $t \rightarrow \mathbb{X}(u_0, t + v_0)$  en  $t = 0$ .



## Vector normal a $T_{\mathbf{p}}S$

El vector

$$\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)$$

es no nulo y es perpendicular a  $T_{\mathbf{p}}S$ .

Así que  $T_{\mathbf{p}}S$  es el plano que pasa por  $\mathbf{p}$  y tiene como **vector normal** a

$$\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0).$$

El vector

$$\frac{\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\|} = \mathbf{N}$$

es **vector normal unitario** (a la superficie  $S$  en el punto  $\mathbf{p}$ ).

¿Cómo describir  $T_{\mathbf{p}}S$ ?

Si disponemos de una carta  $\mathbb{X}(u, v)$  en  $\mathbf{p}$ , de manera que  $(u_0, v_0)$  son las  $\mathbb{X}$ -coordenadas de  $\mathbf{p}$ , entonces

- los vectores  $\mathbb{X}_u(u_0, v_0)$  y  $\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  forman una base de  $T_{\mathbf{p}}S$ .
- Si se prefiere escribir en forma de ecuación, entonces se calcula  $\hat{\mathbf{N}} = \mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  (aunque no sea el normal unitario), y los  $\mathbf{x}$  que pertenecen a  $T_{\mathbf{p}}S$  son aquellos que cumplen que

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

# Ejemplos de planos tangente

**Ejemplo 1.** Consideremos el **helicoides** con carta

$$\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, \theta).$$

Cálculos:

$$\mathbb{X}_u(u, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$\mathbb{X}_\theta(u, \theta) = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 1),$$

$$(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_\theta)(u, \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, u).$$

El plano tangente al helicoides en

$$\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, \theta_0) = (u_0 \cos \theta_0, u_0 \sin \theta_0, \theta_0)$$

tiene como base a

$$\mathbb{X}_u(u_0, \theta_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{X}_\theta(u_0, \theta_0) = (-u_0 \sin \theta_0, u_0 \cos \theta_0, 1);$$

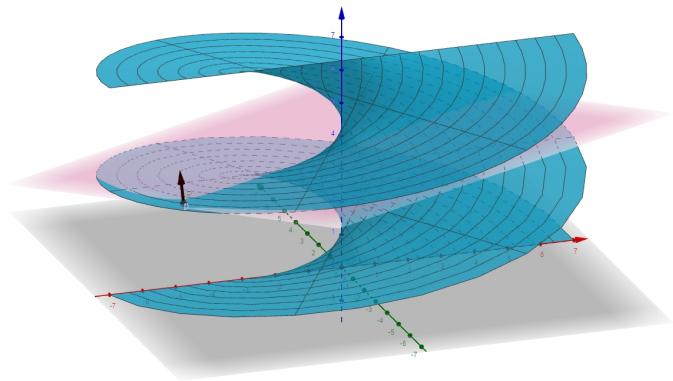
y su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbb{X}(u_0, \theta_0)) \cdot (\sin \theta_0, -\cos \theta_0, u_0) = 0$$

$$\iff (x - u_0 \cos \theta_0) \sin \theta_0 - (y - u_0 \sin \theta_0) \cos \theta_0 + (z - \theta_0) u_0 = 0,$$

es decir,

$$x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0 + (z - \theta_0) u_0 = 0.$$



**Ejemplo 2.** Para la **gráfica** de la función  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene la carta global

$$\mathbb{X}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cálculos:

$$\mathbb{X}_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y)),$$

$$\mathbb{X}_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y)),$$

$$(\mathbb{X}_x \times \mathbb{X}_y)(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1).$$

Digamos que el punto de interés  $\mathbf{p}$  tiene  $\mathbb{X}$ -coordenadas  $(x_0, y_0)$ . Así que

$$\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0), \quad \text{donde } z_0 = f(x_0, y_0).$$

- Los vectores

$$\mathbb{X}_x(x_0, y_0) = (1, 0, f_x(x_0, y_0)) \quad \text{y} \quad \mathbb{X}_y(x_0, y_0) = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$$

son una base de  $T_{\mathbf{p}}S$ .

- El plano tangente  $T_{\mathbf{p}}S$  tiene ecuación

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) = 0$$

$$\iff (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) = z - f(x_0, y_0).$$

**Ejemplo 3. Superficie de nivel:** supongamos que  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  y que  $a$  es un valor regular de  $F$ .

Entonces  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = a\}$  es superficie regular.

Pero aquí, en general, no disponemos de una expresión explícita de una carta en un punto  $\mathbf{p} \in S$ .

Como  $a$  es valor regular,  $\nabla F(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{p} \in S$ .

**Clave:** Si  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva cuya traza está contenida en  $S$ , entonces

$$F(\alpha(t)) = a, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Digamos que  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Entonces

$$F((x(t), y(t), z(t))) = a, \quad \text{para todo } t \in I.$$



Así que, derivando con respecto a  $t$ , se obtiene que, para todo  $t \in I$ ,

$$F_x((x(t), y(t), z(t))) \dot{x}(t) + F_y((x(t), y(t), z(t))) \dot{y}(t) + F_z((x(t), y(t), z(t))) \dot{z}(t) = 0.$$

O de manera más compacta,

$$\nabla F(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0.$$

Por tanto, para cada  $\mathbf{p} \in S$ , se tiene que  $\nabla F(\mathbf{p}) \perp \mathbf{v}$ , para todo  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ .

El plano tangente a  $S$  en el punto  $\mathbf{p}$  es el plano que pasa por  $\mathbf{p}$  con vector normal  $\nabla F(\mathbf{p})$ ; es decir,

$$T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla F(\mathbf{p}) = 0\}.$$

Si  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ , la ecuación del plano tangente  $T_{\mathbf{p}}S$  es

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

**Ejemplo 4.** La **esfera unidad** es la superficie de nivel  $\{F(x, y, z) = 1\}$ , donde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Se tiene que  $\nabla F(x, y, z) = 2(x, y, z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Así que si  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  es de la esfera unidad (es decir, si se cumple que  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ ), el plano tangente a la esfera unidad en  $\mathbf{p}$  tiene ecuación

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0,$$

esto es,

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1.$$

**Ejercicio.** Calcular planos tangentes cuando el punto  $\mathbf{p}$  viene descrito en coordenadas esféricas, o como gráfica de función.

## Cambio de base en plano tangente

Sean  $\mathbb{X}(u, v)$  e  $\mathbb{Y}(r, s)$  dos cartas de  $S$  en  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbb{X}(u_0, v_0) = \mathbf{p} = \mathbb{Y}(r_0, s_0).$$

El cambio de coordenadas  $(u, v)$  a coordenadas  $(r, s)$  viene dado por

$$\Phi = \mathbb{Y}^{-1} \circ \mathbb{X},$$

y se escribirá como

$$\Phi(u, v) = (r(u, v), s(u, v)).$$

Es decir,

$$\mathbb{X} = \mathbb{Y} \circ \Phi.$$

o con más detalle,

$$(*) \quad \mathbb{X}(u, v) = \mathbb{Y}(\Phi(u, v)) = \mathbb{Y}(r(u, v), s(u, v)).$$

Tenemos dos bases para  $T_{\mathbf{p}}S$ :

$$\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\} \quad y \quad \{\mathbb{Y}_r(r_0, s_0), \mathbb{Y}_s(r_0, s_0)\}$$

Derivando en  $(*)$  se tiene que

$$\mathbb{X}_u = r_u \mathbb{Y}_r + s_u \mathbb{Y}_s,$$

$$\mathbb{X}_v = r_v \mathbb{Y}_r + s_v \mathbb{Y}_s.$$

En el punto  $\mathbf{p}$ ,

$$\mathbb{X}_u(u_0, v_0) = r_u(u_0, v_0) \mathbb{Y}_r(r_0, s_0) + s_u(u_0, v_0) \mathbb{Y}_s(r_0, s_0),$$

$$\mathbb{X}_v(u_0, v_0) = r_v(u_0, v_0) \mathbb{Y}_r(r_0, s_0) + s_v(u_0, v_0) \mathbb{Y}_s(r_0, s_0).$$

Aquí, hemos usado que  $r(u_0, v_0) = r_0$  y  $s(u_0, v_0) = s_0$ .

Supongamos que  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  tiene coordenadas  $(a, b)$  respecto de  $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ , esto es,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= a \mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b \mathbb{X}_v(u_0, v_0) \\ &= (a r_u(u_0, v_0) + b r_v(u_0, v_0)) \mathbb{Y}_r(r_0, s_0) \\ &\quad + (a s_u(u_0, v_0) + b s_v(u_0, v_0)) \mathbb{Y}_s(r_0, s_0).\end{aligned}$$

Si el vector  $\mathbf{v}$  tiene coordenadas  $(c, d)$  respecto de  $\{\mathbb{Y}_r(r_0, s_0), \mathbb{Y}_s(r_0, s_0)\}$ ,

$$\mathbf{v} = c \mathbb{Y}_r(r_0, s_0) + d \mathbb{Y}_s(r_0, s_0),$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_u(u_0, v_0) & r_v(u_0, v_0) \\ s_u(u_0, v_0) & s_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo. Esfera unidad.** Supongamos, por comodidad, que el punto  $\mathbf{p}$  de interés está en el octante positivo de la esfera.

Carta con ángulos:

$$\mathbb{X}(\theta, \phi) = (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi).$$

Carta como gráfica de función:

$$\mathbb{Y}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Cambio de coordenadas:

$$\Phi(\theta, \phi) = (\underbrace{\cos \theta \operatorname{sen} \phi}_{=x(\theta, \phi)}, \underbrace{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}_{=y(\theta, \phi)}).$$

Derivadas:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_\theta &= (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \mathbb{X}_\phi &= (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi).\end{aligned}$$

Derivadas:

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}_x &= \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \\ \mathbb{Y}_y &= \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right).\end{aligned}$$

Matriz de cambio:

$$\begin{pmatrix} \partial x / \partial \theta & \partial x / \partial \phi \\ \partial y / \partial \theta & \partial y / \partial \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}.$$



Nos fijamos en el punto  $\mathbf{p} = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$ , que tiene  $\mathbb{X}$ -coordenadas  $(\pi/4, \pi/4)$  e  $\mathbb{Y}$ -coordenadas  $(1/2, 1/2)$ .

Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_\theta(\pi/4, \pi/4) &= (-1/2, 1/2, 0), & \mathbb{Y}_x(1/2, 1/2) &= (1, 0, -\sqrt{2}/2), \\ \mathbb{X}_\phi(\pi/4, \pi/4) &= (1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2). & \mathbb{Y}_y(1/2, 1/2) &= (0, 1, -\sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

La matriz de cambio es:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{coords en } \mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\phi} = \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\text{coords en } \mathbb{Y}_x, \mathbb{Y}_y}.$$

Por ejemplo, el vector  $\mathbb{X}_\theta$  tiene coordenadas  $(1, 0)$  (en la base  $\{\mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\phi\}$ ).

Por lo tanto, tendrá coordenadas

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

en la base  $\{\mathbb{Y}_x, \mathbb{Y}_y\}$ . Efectivamente,  $\mathbb{X}_\theta = -\mathbb{Y}_x/2 + \mathbb{Y}_y/2$  (compruébese).