SUPERFICIES CUADRÁTICAS EN $\mathbb{R}^3$

Consideremos el espacio afín usual $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ con la estructura euclídea usual. Una superficie de segundo grado o cuádrica en $\mathbb{A}$ es el lugar de ceros de un polinomio de grado (total) 2 en las variables x, y, z. Pongamos

$$(1) \quad f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a.$$

Nuestro objetivo será clasificar los conjuntos $\{f=0\}$ mediante isometrías de $\mathbb{R}^3$. Para esto estudiaremos los invariantes de la superficie.

Definición. Un invariante de la superficie $S = \{f=0\}$ es cualquier expresión algebraica de los coeficientes de f que no varíe al hacer un cambio de sistema de referencia ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

Notación: Dado un polinomio cuadrático como en (1) pondremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad L(x,y,z) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Luego, (1) se reescribe como:

$$(2) \quad f(x,y,z) = (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + L(x,y,z) + a$$

Además, denotaremos por $\bar{A}$ a la matriz:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \begin{matrix} a_1/2 \\ a_2/2 \\ a_3/2 \end{matrix} \\ \hline a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{array}\right) , \quad b = \begin{pmatrix} a_1/2 \\ a_2/2 \\ a_3/2 \end{pmatrix} ,$$

y con estas notaciones la superficie S tiene por ecuación

$$(3) \qquad f(x,y,z) = (x,y,z,1)\,\bar{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Teorema 1

Son invariantes de la superficie S dada en (3) las siguientes expresiones:

$$\delta := \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix} , \quad \Delta := \det(\bar{A}) = \left|\begin{array}{ccc|c} & A & & \begin{matrix} a_1/2 \\ a_2/2 \\ a_3/2 \end{matrix} \\ \hline a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{array}\right|$$

Demostración. Consideremos un cambio de referencia ortonormal

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & C & & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } C \in O(3;\mathbb{R}) , \; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} .$$

Entonces, la ecuación (3) se reescribe en las nuevas coordenadas como

$$(x',y',z',1) \left(\begin{array}{c|c} C^t & \underline{0} \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

en consecuencia tenemos:

$$(x',y',z',1)\left(\begin{array}{c|c} C^tAC & C^tAp+C^tb \\ \hline p^tAC+b^tC & p^tAp+b^tp+p^tb+a \end{array}\right)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}=0$$

Si $A'=C^tAC$, $b'=C^tAp+C^tb$, $a'=p^tAp+b^tp+p^tb+a$, entonces, como $C\in O(3;\mathbb{R})$, se tiene:

$$\delta=\det(A)=\det(A'),$$

$$\Delta=\det(\bar{A})=\det\left(\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1\end{array}\right)\bar{A}\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)\right)=\det(\bar{A'}),$$

lo que demuestra el enunciado.

§2 Clasificación de las cuádricas de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos una superficie cuadrática S dada por la ecuación (1). Asociada a S se tiene la forma cuadrática Q en $E=\mathbb{R}^3$ definida por la matriz simétrica A, es decir

$$Q(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Sea $\beta=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ en la que Q diagonaliza. Si (x_1,y_1,z_1) son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en esta nueva base, entonces

$$Q(x_1,y_1,z_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2$$

donde $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ son los autovalores de A y $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ son autovectores unitarios correspondientes a $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, resp.

La matriz $C = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)$ es ortogonal, y en $\mathcal{R}_1 = \{\theta; \beta\}$ la cuádrica S tiene por ecuación:

$$(1)' \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b = 0$$

Para clasificar $(1)'$ distinguiremos tres casos, que analizaremos por separado:

<u>Caso I</u>: Todos los λ_i son distintos de cero.
<u>Caso II</u>: Uno y sólo uno de los λ_i es cero.
<u>Caso III</u>: Dos y sólo dos de los λ_i son cero.

(1.1) <u>Caso I</u>.

En este caso, considerando la traslación:

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}, \quad z_2 = z_1 + \frac{b_3}{2\lambda_3},$$

obtenemos:

$$(1)'' \quad f(x_2, y_2, z_2) = \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 - G = 0$$

Observa que en esta nueva referencia se tiene que

$$f(x_2, y_2, z_2) = f(-x_2, -y_2, -z_2),$$

es decir el $(0,0,0)$ de esta referencia es un centro de simetría de S, por esto estas cuádricas se llaman cuádricas con centro y al punto $P_0 = (0,0,0)$ en esta referencia se le dice el centro de S.

<u>Cálculo de G en $(1)''$</u>: Usando el Teorema 1 se tiene que

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \Delta = -G\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \text{ luego } \boxed{G = -\frac{\Delta}{\delta}}$$

Ahora hay dos situaciones geométricas muy diferentes según $G_1 \neq 0$ ó $G_1 = 0$.

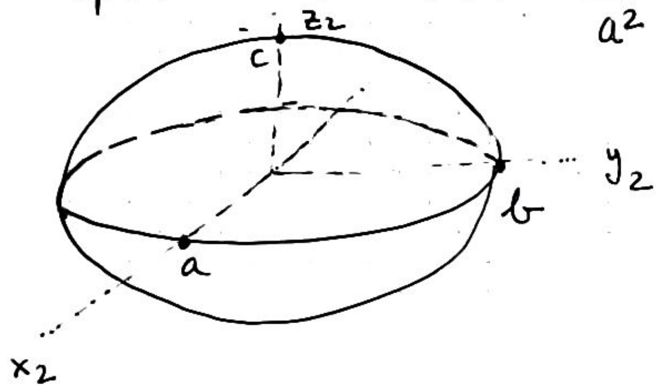
$\boxed{(I.1)\ G_1 \neq 0\ (\Leftrightarrow \Delta \neq 0)}$. En este caso reescribimos (1)'' como

$$(2.1)\quad \pm \frac{x_2^2}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} \pm \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

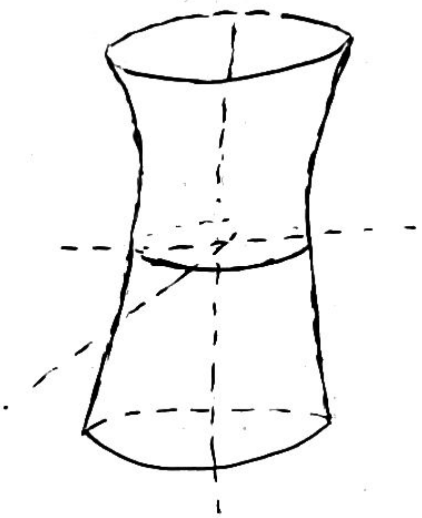
donde $a = \sqrt{\frac{|G_1|}{|\lambda_1|}}$, $b = \sqrt{\frac{|G_1|}{|\lambda_2|}}$, $c = \sqrt{\frac{|G_1|}{|\lambda_3|}}$, llamados <u>los semiejes de S</u>.

Tenemos los siguientes modelos reales de S:

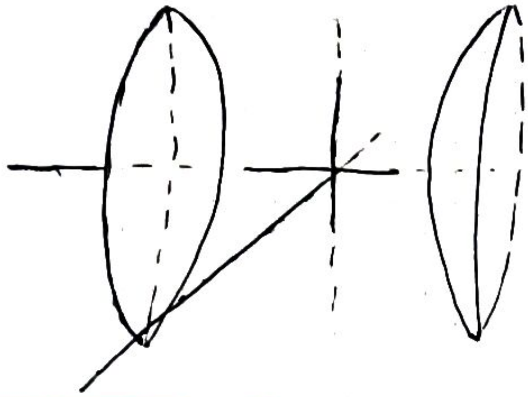
(I.1.1) El elipsoide de ecuación $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1$.



(I.1.2) El hiperboloide de una hoja: $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1$.



(I.1.3) El hiperboloide de dos hojas: $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} = 1$.

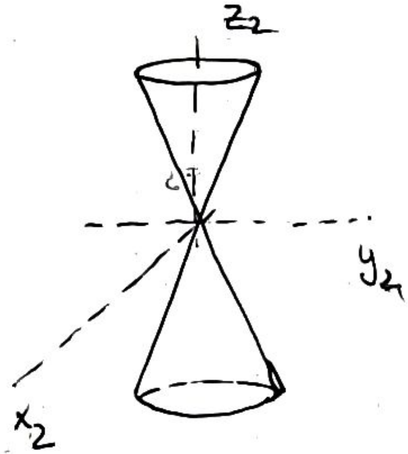


$\boxed{\text{(I.2)} \quad C = 0 \quad (\Leftrightarrow \Delta = 0)}$. En este caso reescribimos (1)'' como

(2.2) $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = 0$.

Si $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$, se obtiene un punto; lo mismo pasa si $\lambda_i < 0$, $1 \leq i \leq 3$. En el resto de los casos podemos suponer que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$. Luego se obtiene la ecuación general de un cono:

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = z_2^2 \quad , \text{ con } a^2 = \frac{|\lambda_3|}{\lambda_1} \, , \; b^2 = \frac{|\lambda_3|}{\lambda_1} .$$



(1.2) <u>Caso II</u>. Uno y sólo uno de los $\lambda_i = 0$. Tomemos $\lambda_3 = 0$.
La traslación

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}, \quad z_2 = z_1$$

en la ecuación (1)' da la ecuación

$$(1)''' \quad \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_3 z_3 - G = 0$$

Del Teorema 1 deducimos que $\Delta = -\lambda_1\lambda_2 \frac{b_3^2}{4}$, luego $b_3^2 = -4\Delta/(\lambda_1\lambda_2)$. Las situaciones geométricas son diferentes según b_3 sea 0 o no. Distinguimos los casos $b_3 \neq 0$ y $b_3 = 0$.

(II.1) $b_3 \neq 0$ ($\Leftrightarrow \Delta \neq 0$). En este caso (1)''', considerando la traslación

$$x_3 = x_2, \quad y_3 = y_2, \quad z_3 = -z_2 + \frac{G}{b_3},$$

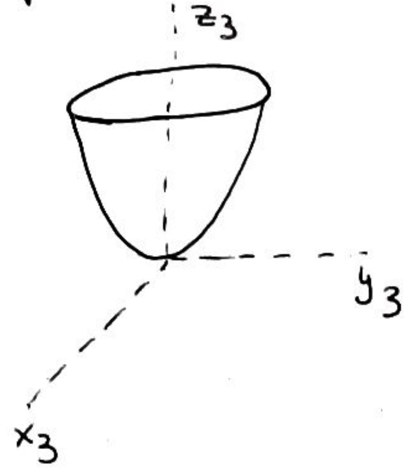
da $\lambda_1 x_3^2 + \lambda_2 y_3^2 = b_3 z_3$, o bien

$$(3.1) \quad \pm\frac{x_3^2}{a^2} \pm \frac{y_3^2}{b^2} = z_3, \quad \text{con } a = \sqrt{\frac{|b_3|}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{|b_3|}{\lambda_2}}.$$

Tenemos los siguientes modelos reales de S (esencialmente):

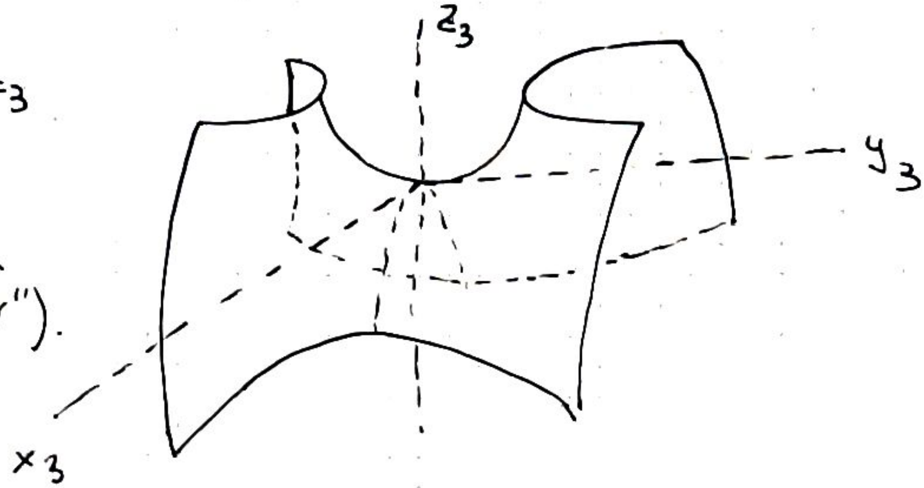
(II.1.1) El paraboloide elíptico de ecuación:

$$\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = z_3$$



(II.1.2) El paraboloide hiperbólico de ecuación

$$\frac{x_3^2}{a^2} - \frac{y_3^2}{b^2} = z_3$$

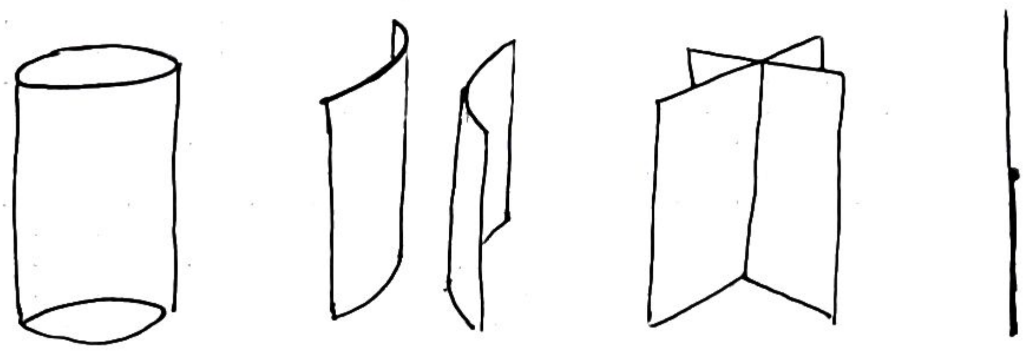


(También se llama "silla de montar").

(II.2) $b_3 = 0$ ($\Leftrightarrow \Delta = 0$) La ecuación $(1)'''$ se escribe en este caso como

$$(3.2) \qquad \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c$$

Estas superficies son cilindros, y su nombre varía según su sección cónica correspondiente: cilindro elíptico, cilindro hiperbólico, si $c \neq 0$; y dos planos secantes, o una recta, si $c = 0$.



cilindro elíptico — cilindro hiperbólico — planos secantes — recta (doble)

(III) Dos de los λ_i son cero. Supongamos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
En este caso la ecuación $(1)'$ se escribe como:

$$(1)' \qquad \lambda_1 x_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b = 0$$

La traslación $x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$ la reduce a

$$(1)^{IV} \qquad \lambda_1 x_2^2 + b_2 y_2 + b_3 z_2 + b' = 0.$$

En consecuencia se tienen las siguientes situaciones geométricas para S:

(a) Si $b_1 = b_2 = 0$, la superficie S está formada por dos planos paralelos.

(b) Si $b_2 \cdot b_3 \neq 0$, realizando la transformación ortogonal

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{b_2^2+b_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

podemos reescribir $(1)^{IV}$ como:

$$(3) \quad \lambda_1 x_3^2 + \sqrt{b_2^2+b_3^2}\, y_3 + b' = 0,$$

lo que, una vez hecha la traslación $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3 + \frac{b'}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}$, $z_4 = z_3$ produce la ecuación de S:

$$(3)' \qquad \lambda_1 x_4^2 = B y_4 \quad \text{con} \quad B = -\sqrt{b_2^2+b_3^2},$$

que representa un cilindro parabólico: