HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Denotamos por $||x||$ la norma euclídea asociada al producto escalar en $\mathbb{R}^N$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Prueba las dos identidades siguientes, y da una interpretación geométrica:
1) *Identidad del Paralelogramo:* $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$.
2) *Identidad de Polarización:* $4 < x, y >= ||x+y||^2 - ||x-y||^2$.

Problema 2. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante 1×1 formado por la esquina superior izquierda es positivo. El determinante 1×1 formado por la esquina inferior derecha es positivo. El determinante 2×2 es positivo.
Comprueba que, sin embargo, existen vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} < 0$.
¿Contradice esto al criterio de Sylvester?

Problema 3. Sea E un espacio vectorial real dotado de una norma $||\cdot||$ que satisface la *Identidad del paralelogramo* (ver ej.1). Definimos

$$B(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - ||x-y||^2 \right).$$

Demuestra que $B(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en E.

Problema 4. Dadas las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

$$A(x,y) = \max\left\{2|x|\,,\, \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

$$B(x,y) = \max\left\{|y|\,,\, |x-y|\right\},$$

a) Demuestra que son normas en $\mathbb{R}^2$.
b) Dibuja la bola unidad en cada una de ellas.
c) Comprueba que para $A(x,y)$ la desigualdad triangular puede ser una igualdad, incluso para vectores linealmente independientes.

Problema 5. a) Comprueba que $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$ define una distancia en $\mathbb{R}$, y que los abiertos asociados a d son los mismos que los asociados a la distancia usual $|\cdot|$.
b) Demuestra que la distancia d anterior no tiene asociada ninguna norma.
c) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ sobre el que está definida una distancia d. Demuestra que son equivalentes:

- Existe una norma $\|\cdot\|$ en E tal que $d(x,y) = \|x-y\|$.
- La función d satisface:
$$\begin{cases} d(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| d(x,y), \\ d(x+z, y+z) &= d(x,y) \end{cases}$$

d) Repite los apartados a) y b) con la función $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x,y) = |x-y| + \Big|\, |x| - |y| \,\Big|.$$

Problema 6. (Este ejemplo se suele conocer por *French railway metric*. Dada la estructura de su red de ferrocarriles, los franceses suelen bromear diciendo que la mejor manera de ir de la ciudad A a la ciudad B es siempre pasar por París y hacer transbordo. La métrica siguiente reproduce esta idea.)
Definimos en $\mathbb{R}^2$:

$$d(x,y) = ||x-y||_2, \text{ si } y = tx \text{ para algún } t > 0,$$

$$d(x,y) = ||x||_2 + ||y||_2, \text{ en cualquier otro caso.}$$

a) Comprobar que d es una métrica en $\mathbb{R}^2$.
b) Representar gráficamente la bola $B(x,r)$ asociada a esa métrica, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ y para cada $r > 0$.

Problema 7. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^N$ tal que para todo k,

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq r||x_k - x_{k-1}||,$$

para algún $r \in (0,1)$. Demuestra que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Problema 8. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

donde $1 \leq p < +\infty$.
a) Dados $1 \leq p < q < +\infty$, demuestra que si $||x||_p \leq 1$ entonces $||x||_q \leq 1$.
b) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica $||x||_q \leq ||x||_p$.
c) Sea $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface:

$$\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

Indicaciones. *Dividiendo por la norma infinito en los dos miembros, podemos asumir que* $||x||_\infty = 1$. *Separa las componentes con* $|x_i| = 1$ *de las componentes con* $|x_i| < 1$. *Usa (después de demostrarla) la desigualdad* $|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a - b|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 9. Sea $D : X \times X \to [0, \infty)$ cumpliendo las dos condiciones siguientes:

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad , \quad D(x, y) \leq D(z, x) + D(z, y) \quad \text{para cualesquiera } x, y, z.$$

Demuestra que D es una distancia en X.

Problema 10. Sea $\overline{A}$ el cierre de un conjunto (es decir, la unión de A con sus puntos de acumulación). Demuestra las siguientes propiedades:
1) $x \in \overline{A} \iff$ para todo entorno abierto V_x del punto x, se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$.
2) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Problema 11. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:
1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} [-1, \frac{1}{k})$ en $\mathbb{R}$.
2) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq y\}$ en $\mathbb{R}^2$.
4) $H = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x_1 = 0\}$ en $\mathbb{R}^N$.
5) $\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$ en $\mathbb{R}^N$.
6) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ en $\mathbb{R}$.
Determinar el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

Problema 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra las propiedades siguientes, válidas para cualesquiera $a, b, c \in X$,y $r, s > 0$:
a) $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.
b) Si $a, b \in B(c, r)$, entonces $d(a, b) < 2r$.
c) Si $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$, entonces $d(a, b) < r + s$.

Problema 13. Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. Se define la **distancia de x a A** por

$$d(x, A) \;=\; \text{ínf}\{||x - y|| \,:\, y \in A\}.$$

a) Demuestra que para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq ||x - y||$$

b) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, d(x, A) < \epsilon\}$. Prueba que A_ϵ es abierto.
c) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, d(x, A) \leq \epsilon\}$, prueba que es cerrado.
d) Prueba que A es cerrado si y sólo si $A = \displaystyle\bigcap_{\epsilon>0} A^\epsilon$.

Problema 14. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto infinito. Demuestra que A es compacto si y sólo si cualquier subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación que pertenece a A.

Problema 15. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x|+|y|<1\} \;,\; B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x|+|y|=1\} \;,\; C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x|+|y|\geq 1\}$$

Problema 16. Sea $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$. Sea $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}$ una función continua. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
1) $f(S^{N-1})$ es acotado.
2) $f(S^{N-1})$ es un abierto.
Si además se sabe que $f(S^{N-1}) \subset \mathbb{Q}$, estudiar qué se puede decir de f.

Problema 17. Demuestra que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es continua.

Problema 18. Dada una transformación lineal entre dos espacios métricos $T : X \to Y$, definimos su norma

$$|||T||| \;=\; \max_{||x||_X=1} ||Tx||_Y.$$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Halla sus normas como operadores lineales en los siguientes casos:
a) $A : (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.
b) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$.
c) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.
d) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$.
e) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
Ejercicio optativo adicional: conjeturar la fórmula que debe obtenerse para una matriz genérica de dimensión $N \times M$ en los casos d) y e) anteriores.

Problema 19. Sea $A = \Big(a_{ij}\Big)_{\substack{1\leq i\leq N \\ 1\leq j\leq M}}$ una matriz $N \times M$.
Interpretando $A : (\mathbb{R}^M, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^N, ||\cdot||_2)$, demuestra que $|||A||| = \sqrt{\lambda^*}$, donde λ^* es el mayor de los autovalores de $A^T A$.
Indicación: *la matriz $A^T A$ es simétrica, y por lo tanto diagonalizable en la base adecuada.*

Problema 20. (**Atención:** es muy instructivo comparar este ejercicio con el anterior. NO es lo mismo.) Consideramos las matrices

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix},$$

como operadores $A : (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.
a) Demuestra que $|||A(a)||| \geq \sqrt{1+a^2}$.
b) Calcula los autovalores de $A(a)$. Demuestra que no se puede estimar la norma $|||A(a)|||$ a partir de los autovalores obtenidos.
c) Usa el resultado del ejercicio anterior para calcular el valor exacto de $|||A(a)|||$.