Estructuras Algebraicas

Primer examen parcial. Martes, 5 de octubre de 2021

APELLIDOS: ______________________
NOMBRE: ______________________ DNI/NIE: ______________________ GRUPO: ______________________

Ejercicio 1. (5 puntos) Sean A y B grupos, considera $G = A \times B$. Dado un homomorfismo de grupos

$$\varphi \colon A \to B$$

definimos $D_\varphi = \{(a, \varphi(a)) \mid a \in A\} \subseteq G$.

a) (1,5 puntos) Demuestra que $D_\varphi \leq G$.

b) (1,5 puntos) Si A es abeliano y $\varphi(A) \subseteq \mathbf{Z}(B) = \{x \in B \mid xy = yx \text{ para todo } y \in B\}$, prueba que $D_\varphi \triangleleft G$.

c) (2 puntos) Escogiendo $A = B = \mathbb{Z}$ y $\varphi = id_{\mathbb{Z}}$, demuestra que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/D_\varphi \cong \mathbb{Z}$.

Solución.

a) Por la caracterización de subgrupos bastará comprobar que D_φ es no vacío y que para cada $(a, \varphi(a)), (b, \varphi(b)) \in D_\varphi$ se tiene que $(a, \varphi(a))(b, \varphi(b))^{-1} \in D_\varphi$.

Empezamos notando que el elemento $(1_A, \varphi(1_A)) = (1_A, 1_B) \in D_\varphi \neq \emptyset$. Como $(b, \varphi(b)) \in A \times B$ y φ es un homomorfismo tenemos que $(b, \varphi(b))^{-1} = (b^{-1}, \varphi(b)^{-1}) = (b^{-1}, \varphi(b^{-1}))$ de modo que

$$(a, \varphi(a))(b, \varphi(b))^{-1} = a, \varphi(a))b^{-1}, \varphi(b^{-1})) = (ab^{-1}, \varphi(a)\varphi(b^{-1})) = (ab^{-1}, \varphi(ab^{-1})) \in D_\varphi$$

usando de nuevo que φ es un homomorfismo y que $ab^{-1} \in A$.

b) Queremos probar que para cada $(a, b) \in G$ y para cada $(x, \varphi(x)) \in D_\varphi$ se tiene que $(a, b)^{-1}(x, \varphi(x))(a, b) \in D_\varphi$. Esto implica que $D_\varphi(a, b) = (a, b)D_\varphi$ para todo $(a, b) \in G$ y, por tanto, que $D_\varphi \triangleleft G$.

$$(a, b)^{-1}(x, \varphi(x))(a, b) = (a^{-1}xa, b^{-1}\varphi(x)b) = (x, \varphi(x))$$

usando que $a^{-1}xa = x$ por ser A abeliano y que $\varphi(x)$ conmuta con todo elemento de B por ser $\varphi(A) \subseteq \mathbf{Z}(B)$. De hecho, hemos probado que $D_\varphi \subseteq \mathbf{Z}(G)$.

c) Por el (primer) Teorema de Isomorfía bastará con definir un homomorfismo $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de modo que $\mathrm{Ker}(f) = D_\varphi$. Como $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ tenemos que $D_\varphi = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Definimos $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f((a, b)) = a - b$. Tenemos que f es un homomorfismo ya que $f((a, b) + (c, d)) = a + c - (b + d) = f((a, b) + f(c, d))$ para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; f es un epimorfismo, pues para cada $x \in \mathbb{Z}$ tenemos que $f((x, 0)) = x$ y $\mathrm{Ker}(f) = D_\varphi$.

Alternativamente, analizando el cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/D_\varphi$ vemos que $(a, b) + D_\varphi = (c, d) + D_\varphi$ si, y solo si, $a - c = b - d$ si, y solo si, $0 = a - c - (b - d) = a - b - (c - d)$ si, y solo si, $a - b = c - d$. De modo que $(a, b) + D_\varphi = (a - b, 0) + D_\varphi$ y $\{(x, 0) + D_\varphi \;:\; x \in \mathbb{Z}\}$ forma un sistema completo de representantes de las clases módulo D_φ. Podemos definir, por tanto, un isomorfismo $g \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/D_\varphi \to \mathbb{Z}$ como $g((a, b) + D_\varphi) = a - b$. El análisis previo prueba que g está bien definido. Se trata de probar rutinariamente que es un homomorfismo biyectivo.