5. SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES CON MÉTODOS ITERATIVOS

idea: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible, $b \in \mathbb{K}^n$

queremos encontrar $\underline{x} \in \mathbb{K}^n : A\underline{x} = b$

con el procedimiento iterativo

$$\begin{cases} \boxed{x_{k+1} = g(x_k)}, & \text{con } g: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ función afín} \\ x_0 \text{ punto inicial} & \boxed{g(x) = Bx + \phi}, \ B \in \mathbb{K}^{n\times n}, \ \phi \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

pregunta: ¿ cómo tiene que ser g para $\boxed{x_k \to \underline{x}}$?

I. si $x_k \xrightarrow{k\to\infty} c \in \mathbb{K}^n \Rightarrow c = g(c)$ Ejercicio.

II. queremos $c = \underline{x} : \underline{x} = g(\underline{x})$

$$B\underline{x} + \phi = \underline{x} \iff \phi = (I-B)\underline{x} = (I-B)A^{-1}b$$

III. la matriz B es la que determina la convergencia:

sea $E_{k+1} = x_{k+1} - \underline{x}$ (vector de error al paso $k+1$)

$$E_{k+1} = g(x_k) - \underline{x} = Bx_k + \phi - \underline{x} = Bx_k + \underline{x} - B\underline{x} - \underline{x}$$

$$= B(x_k - \underline{x}) = BE_k = B^2 E_{k-1} = \dots = B^{k+1}E_0$$

$\Rightarrow x_k - \underline{x} = B^k(x_0 - \underline{x})$, donde x_0 es el punto inicial

↳ si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{K}^n$, tenemos

$$\|x_k - \underline{x}\| \leq |||B^k||| \cdot \|x_0 - \underline{x}\| \leq |||B|||^k \|x_0 - \underline{x}\|$$

condición <u>suficiente</u> para la convergencia es

$|||B||| < 1$ en una norma inducida cualquiera.

5.1 CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS

<u>def</u>: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos RADIO ESPECTRAL de A

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$$

<u>proposición</u>: $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\forall \|\cdot\|$ norma de $\mathbb{K}^n$

$$\rho(A) \leq |||A|||.$$

<u>demostración</u>: sea v el autovector de A con autovalor λ : $|\lambda| = \rho(A)$

$$\Rightarrow \quad \rho(A)\|v\| = |\lambda|\,\|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq |||A|||\cdot\|v\|.$$

#

<u>teorema</u>: (formula de Gelfand)

sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $|||\cdot|||$ una norma inducida

$$\Rightarrow \quad \rho(A) = \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}.$$

<u>corolario</u>: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $\boxed{A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1}$

<u>demostración</u> (corolario):

- por la formula de Gelfand tenemos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon > 0$:

$$(\rho(A)-\varepsilon)^k \leq |||A^k||| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k \qquad \forall k > k_\varepsilon.$$

- por la proposición $|||A^k||| \geq \rho(A^k) = \rho(A)^k$

$\rho(A)$ es el modulo de un autovalor!

$$\rho(A)^k \leq |||A^k||| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k \qquad \forall k > k_\varepsilon$$

$\Rightarrow$) si $|||A^k||| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \rho(A)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$

$\Leftarrow$) si $\rho(A) < 1$, sea $\varepsilon > 0$: $\rho(A) + \varepsilon < 1$. $(\rho(A)+\varepsilon)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow |||A^k||| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

observar que, como todas las normas de $\mathbb{K}^{n\times n}$ son equivalentes, $A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ en el sentido que todas sus componentes $\to 0$ $\iff \|A^k\| \to 0$ en una norma cualquiera.

#

demostración (de la fórmula de Gelfand):

> la demostración presentada se basa en el teorema (Householder):
> $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ norma inducida $|||\cdot|||_{A,\varepsilon}$ t.q. $|||A|||_{A,\varepsilon} < \rho(A)+\varepsilon$

- $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq |||A^k||| \Rightarrow \rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k} \quad \forall k > 0$
- sea $\varepsilon > 0$ y sea $|||\cdot|||_{A,\varepsilon}$ la norma de Householder

como todas las normas son equivalentes, $\exists\, c = c(A,\varepsilon)$ t.q. $|||B||| \leq c\, |||B|||_{A,\varepsilon} \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\Rightarrow |||A^k||| \leq c\, |||A^k|||_{A,\varepsilon} \leq c\, |||A|||_{A,\varepsilon}^k \leq c\,(\rho(A)+\varepsilon)^k$$

norma de matriz — Householder

$$\hookrightarrow |||A^k|||^{1/k} \leq c^{1/k}\,(\rho(A)+\varepsilon)$$

- $\rho(A) \leq \liminf_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k} \quad \left(= \lim_{M\to\infty} \inf_{k\geq M} |||A^k|||^{1/k}\right)$
- $\rho(A)+\varepsilon \geq \limsup_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k} \quad \left(= \lim_{M\to\infty} \sup_{k\geq M} |||A^k|||^{1/k}\right) \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \rho(A) \leq \liminf_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A)$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$ existe y es igual a $\rho(A)$ #

Nota sobre lim inf y lim sup. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión real se dicen $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{M\to\infty} \inf \{a_n\}_M^{\infty}$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{M\to\infty} \sup\{a_n\}_{n=M}^{\infty}$

- estos dos límites existen siempre, aunque si $\{a_n\}$ no converge
- para toda sucesión $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
- $\{a_n\}$ tiene límite para $n\to\infty$ si y solo si $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

por estas razones, cuando no se sabe si una sucesión converge, puede ser útil estudiar liminf/limsup, que existen siempre.