Ejercicios

ej. 1, hoja 1

- $x_0 = e$, $\hat{x}_0 = 2.7183$

  $\to$ 2.7182818...

  este es el valor de e con más precisión

  $\delta = |x_0 - \hat{x}_0| \simeq 0.00002$

  $2 \cdot 10^{-5}$

- $\hat{y} = \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_0 \Rightarrow E_{rel}(\hat{y}) \lesssim 3\, E_{rel}(\hat{x}_0) = 3\,\frac{\delta}{e} = \boxed{\frac{3}{e}}\, 2 \cdot 10^{-5}$

  $E_{abs}(\hat{y}) \lesssim |y| \cdot E_{rel}(\hat{y}) = 3 \cdot e^2 \cdot 10^{-5}$

  ? e^3

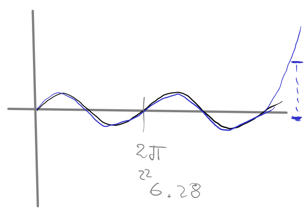
- $\hat{y} = \hat{x}_0^{\hat{x}_0} = f(\hat{x}_0)$, $f(x) = x^x$, $x_0 = e$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} e^{x \ln x} = (1 + \ln x)\, f(x) \Rightarrow c(x) = \left| \frac{x\, f'(x)}{f(x)} \right| = x(1 + \ln x)$$

$$\Rightarrow E_{rel}(\hat{y}) \lesssim c(x_0)\, E_{rel}(\hat{x}_0) = 2e\,\frac{\delta}{e} = 2\delta = \boxed{2} \cdot 2 \cdot 10^{-5}$$

ej. 2, hoja 1

$$\sin(x_0) = x_0 - \frac{x_0^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x_0^{2n+1}}{2n+1} + R(x_0)$$



$$|R(x_0)| = \frac{c^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad , \quad c \in (0, x_0)$$

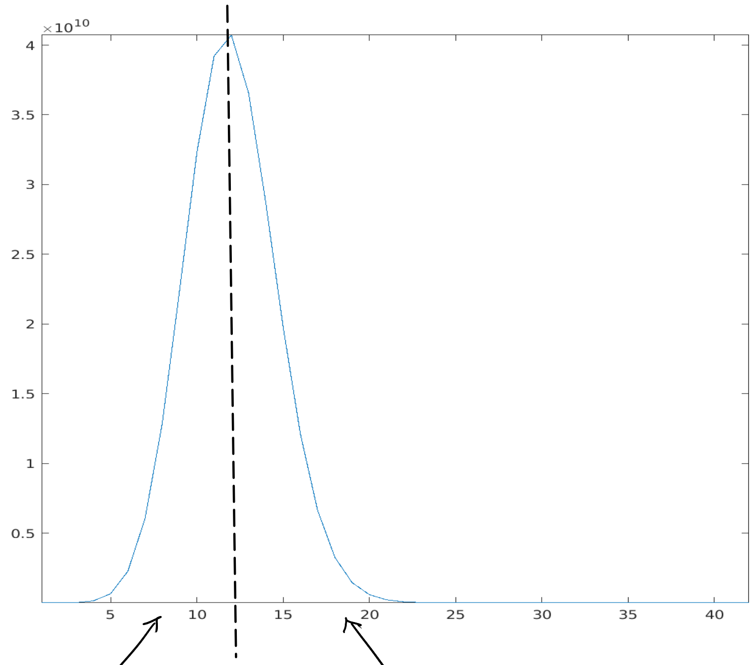
estamos usando el desarrollo en 0

error : en el caso peor $\frac{x_0^{2n+3}}{(2n+3)!}$

$\hookrightarrow$ la pregunta a) es : para qué $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$F(n) = \frac{27^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-5}$? $\to$ tenemos que calcular $F(n)$ en $n = 1, 2, 3, \dots$

```
>> F = @(n) (27.^(2*n+3))./factorial(2*n+3);
>> plot(1:42,F(1:42))
```



$F(39) > 10^{-5}$

$F(40) < 10^{-5}$

la potencia 27^{2n+3} es más grande del factorial $(2n+3)!$

a partir de cierto n, tenemos $(2n+3)! > 27^{2n+3}$ $\left(\frac{x^k}{k!} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right)$

b) como mejorar (bajar) el n de manera sencilla?

$$\operatorname{sen}(\underbrace{x + 2\pi m}) = \operatorname{sen}(x)$$

: $\boxed{\text{manteniendo la misma expresión en Taylor}}$

$$x + 2\pi m = 27 \qquad (m = 4 : \; 27 = 8\pi + \underline{1.867})$$

nuevo x_0

$$F(n) = \frac{(1.867)^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-5}$$

en este caso $n = 5$

otra posibilidad: encontrar un punto cerca de 27 en el que sabéis calcular sin, cos

$$\Rightarrow \left| \sin(27) - \left(1.867 - \frac{(1.867)^3}{3!} + \frac{(1.867)^5}{5!} \right) \right| < 10^{-5}.$$

• ej. 7 hoja 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2+\alpha & 22 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\alpha| < 2^{-51}$$

no es 1 en fl. p.

observación $2+\alpha \overset{\alpha=2^{-51}}{\simeq} 2(1+2^{-52})$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & 16 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pivot pequeño

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & 16 \\ 0 & 0 & 2-\frac{16}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$2-16\alpha^{-1}$ es suma de un numero pequeño y uno grande

$$= -16\alpha^{-1}\underbrace{\left(1-\frac{\alpha}{8}\right)}_{1 \text{ en floating point}}, \quad \left|\frac{\alpha}{8}\right| < 2^{-54}$$

$$\Rightarrow \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & 16 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{L}\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2+\alpha & 22 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow A - \hat{L}\hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para medir este error se necesita una norma adecuada

todo el error está en este término