Universidad Autónoma de Madrid

Análisis Matemático. Soluciones al examen Parcial del 15 de Octubre de 2021.

1.1 Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto **con más de un elemento**, que satisface la siguiente condición:

Si $x, y \in A$, entonces $(x+y)/2 \in A$.

a) Dado un punto cualquiera $x_* \in A$, encontrar una sucesión $\{x_n\}$ (no constante) contenida en A, tal que $\{x\}_n \to x_*$.

b) Dar un ejemplo de conjunto **abierto y acotado** A que cumpla la condición del enunciado.

c) Escribir la caracterización de conjunto cerrado en términos de sucesiones. Explicar por qué la propiedad demostrada en el apartado (a) no es suficiente para que A sea cerrado.

Solución.
a) Elegimos un punto $p \in A$ distinto de x_* y definimos:

$$x_1 = \frac{x_* + p}{2} \ , \ x_2 = \frac{x_* + x_1}{2} \ , \ \dots \ , \ x_j = \frac{x_* + x_{j-1}}{2} \ , \ \dots$$

Resulta una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en A. Además

$$|x_* - x_n| = \left| x_* - \frac{x_* + x_{n-1}}{2} \right| = \frac{1}{2} |x_* - x_{n-1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |x_* - x_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^n} |x_* - p| \ ,$$

y es evidente que $|x_* - x_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Los x_n son distintos dos a dos porque, al ser $|x_* - p| > 0$, las distancias de los x_n al punto x_* son distintas entre sí.

b) El conjunto $A = (0, 1)$ es abierto y acotado. Cumple la condición del enunciado porque es convexo.

c) Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si toda sucesión contenida en E y convergente en $\mathbb{R}$ tiene su límite en E.
La propiedad demostrada en a) (de existencia de una sucesión en A convergente a x_*) no es suficiente para que A sea cerrado porque, además de las sucesiones construidas en a), hay que considerar muchas otras.

1.2 Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Halla, razonadamente, la norma $|||A|||$ de A como operador $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$.

Solución. Calculamos:

$$\left\| M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \end{pmatrix} \right\|_2 ,$$

de donde

$$|||A||| = \sup_{\|(x,y)\|_\infty \le 1} \left\| \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sup_{|x|,|y| \le 1} \left\| \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \end{pmatrix} \right\|_2 \le \sqrt{1 + 2^2 + (1+2)^2} .$$

Ya tenemos $|||A||| \le \sqrt{14}$.

Por otra parte:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1 \qquad \text{y} \qquad \left\| M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{14}\,,$$

luego $|||A||| \geq \sqrt{14}$. Juntando esto con el resultado anterior, llegamos a $|||A||| = \sqrt{14}$.

2. En este problema $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ y $\|\ \|$ su norma asociada.
(a) Sean $x_1 = (0,1), x_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ tres elementos de $\mathbb{R}^2$. Prueba que para todo $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|\langle v, x_1\rangle|^2 + |\langle v, x_2\rangle|^2 + |\langle v, x_3\rangle|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2\,.$$

Solución. Hacemos el siguiente cálculo, teniendo en cuenta que los términos en xy se cancelan:

$$y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}\right)^2 = y^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}\,\|(x,y)\|^2\,.$$

(b) Dado $v \in \mathbb{R}^n$, sea $T_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el operador lineal dado por $T_v(y) = \langle v, y\rangle$. Prueba que la norma de T_v como operador de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es

$$|||T_v||| = \|v\|.$$

Solución:

$$|||T_v||| = \sup_{\|y\|=1} |\langle v, y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} \|v\|\,\|y\|\,\big|\cos\angle(v,y)\big| = \|v\|\cdot 1 \cdot \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\cos\theta| = \|v\|\cdot 1 = \|v\|\,.$$

(c) Sean $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ para los que existe $B \in (0,\infty)$ tal que

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle v, x_n\rangle|^2 \leq B\|v\|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n\,.$$

Para $v \in \mathbb{R}^n$ y $N \in \mathbb{N}$ definir $v_N = \sum_{n=1}^N \langle v, x_n\rangle x_n$.
Probar que $\{v_N\}_{N=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$.
Sugerencia: tener en cuenta que, según el apartado (b) *anterior, podemos escribir* $\|v_N - v_M\| = |||T_{v_N - v_M}|||$, *con* $T_{v_N-v_M}(y) =< v_N - v_M\,,\, y >$.

Solución. Basta considerar el caso $N > M$. Entonces

$$v_N - v_M = \sum_{n=M+1}^N \langle v, x_n\rangle\, x_n\,.$$

Siguiendo la sugerencia, razonamos así:

$$\|v_N - v_M\| = |||T_{v_N-v_M}||| = \sup_{\|y\|=1} \left|T_{v_N-v_M}(y)\right| =$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{n=M+1}^N \langle v, x_n\rangle\,\langle x_n, y\rangle \right|\,.$$

Ahora utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, de la siguiente manera:

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle \right| \leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle y, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} ,$$

y deducimos:

$$\begin{aligned} \|v_N - v_M\| &\leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \cdot \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle y, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \cdot \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \cdot \sqrt{B} \cdot 1 . \end{aligned}$$

Fijado el vector v, tenemos una serie convergente de términos positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, x_n \rangle^2 \leq B \|v\|^2 ,$$

luego la **cola de esa serie** tiende a cero

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \langle v, x_n \rangle^2 \to 0 \quad \text{cuando } M \to \infty ,$$

y también

$$\sqrt{B} \cdot \left(\sum_{n=M+1}^{\infty} \langle v, x_n \rangle^2 \right)^{1/2} \to 0 \quad \text{cuando } M \to \infty ,$$

que, con lo probado anteriormente, nos da:

$$\|v_N - v_M\| \to 0 \quad \text{cuando } N > M \to \infty ,$$

fórmula que expresa la propiedad de que $\{v_N\}_{N=1}^{\infty}$ sea una sucesión de Cauchy.

3.1 Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciable en todo punto, desarrolla la siguiente expresión utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(f(x,y) \, , \, 5x - y \big) .$$

Solución. Para evitar confusiones, elegimos otras dos letras (distintas de las letras x, y) para designar a las variables independientes de la función f: $f(u,v)$, y entonces escribimos:

$$f\big(f(x,y) \, , \, 5x - y \big) = f(u,v) \Big|_{\substack{u=f(x,y) \\ v=5x-2y}} ,$$

y calculamos así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{\substack{u=f(x,y) \\ v=5x-2y}} \cdot f_x(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{\substack{u=f(x,y) \\ v=5x-2y}} \cdot 5 = \\ &= f_x\big(f(x,y) \, , \, 5x - 2y \big) \cdot f_x(x,y) + f_y\big(f(x,y) \, , \, 5x - 2y \big) \cdot 5 . \end{aligned}$$

3.2 Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ en un entorno de $(0,0)$.
Sabiendo que su polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3, \text{ se pide:}$$

a) Determinar razonadamente cuánto valen $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$.

b) Definimos $g(x) = F(x, x^2)$. Determinar razonadamente el polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x = 0$ para la función $g(x)$.

Solución.
a) Una de las definiciones del polinomio de Taylor de orden 3 es: el único de grado ≤ 3 que tiene las misma derivadas que f, de órdenes entre cero y 3, en el punto donde está centrado. En particular:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(0,0)} \big(2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3 \big) = 0 \,, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(0,0) = \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} \big(2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3 \big) = \frac{\partial^2 \,(4xy)}{\partial x \partial y}(0,0) = 4 \,, \\
\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}(0,0) &= \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = \left.\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(0,0)} \big(2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3 \big) = \frac{\partial^3 \,(2x^2y)}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 4 \,.
\end{aligned}$$

b) Escribamos $Q(x)$ para designar al polinomio de orden 3 de $g(x)$ centrado en $x = 0$. Tenemos otra definición de este polinomio: el único de grado ≤ 3 tal que $g(x) - Q(x) = \mathrm{o}(|x-0|^3) = \mathrm{o}(|x|^3)$.
Más aún, sabemos que, por ser $g(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, esa condición es equivalente a $g(x) - Q(x) = \mathrm{O}(x^4)$ y análogamente para funciones de dos variables, como es el caso de $F(x,y)$:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &\equiv 2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3 + \mathrm{O}\big(\|(x,y) - (0,0)\|^4\big) \equiv \\
&\equiv 2 + 3x + 4xy - y^2 + 2x^2y + x^3 + \mathrm{O}\big(\|(x,y)\|^4\big) \,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo y por x^2 en esta última identidad, obtenemos

$$\begin{aligned}
g(x) &\equiv F(x,x^2) \equiv 2 + 3x + 4xx^2 - (x^2)^2 + 2x^2x^2 + x^3 + \mathrm{O}\big(\|(x,x^2)\|^4\big) \equiv \\
&\equiv 2 + 3x + 4x^3 + x^3 + \big(-x^4 + 2x^4 + \mathrm{O}(x^4) \big) \equiv \\
&\equiv 2 + 3x + 5x^3 + \mathrm{O}(x^4) \,,
\end{aligned}$$

luego $Q(x) \equiv 2 + 3x + 5x^3$.