1. (2 puntos). Para el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, calcula $f^{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Buscamos valores y vectores propios.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1 \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 2 \\ -4 & 5-1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sol}: y = x \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio}$$

Vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1-3 & 2 \\ -4 & 5-3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sol}: y = 2x \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio}$$

Coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\{v_1, v_2\}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2$$

Luego:

$$f^{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f^{10}(2v_1 - v_2) = 2 f^{10}(v_1) - f^{10}(v_2) = 2v_1 - 3^{10} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3^{10} \\ 3^{10} \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} \\ 2 - 2 \cdot 3^{10} \end{pmatrix}.$$

2. (4 puntos). Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $g_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $g_a(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

(a) Determina el valor de a para que g_a sea diagonalizable.

(b) Para ese valor de a, halla una base de $\mathbb{R}^3$ en la que g_a tenga matriz diagonal y determina, justificadamente, la correspondiente matriz diagonal.

(a). Valores propios

$$P_a(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 7 \\ 2 & 6-\lambda & a \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+20) = (4-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-4) = -(\lambda-5)(\lambda-4)^2$$

Sabemos que el espacio de vectores propios $Ker(g_a - 5\,id)$ sólo puede tener dimensión 1, luego g_a diagonalizará $\Leftrightarrow \dim N(g_a - 4\,id) = 2$

$$g_a - 4\,id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & -1 & 7 \\ 2 & 6-4 & a \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & a+14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Vemos que

$$\dim N(g_a - 4\,id) = 2 \Leftrightarrow \dim Im(g_a - 4\,id) = 1 \Leftrightarrow a+14=7 \Leftrightarrow \underline{a=-14}$$

(b)

Para $a=-14$, $N(g_a - 4\,id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ 7z = x+y \right\} \Rightarrow$ Una base es $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nos falta encontrar una base de $N(g_{-14} - 5\,id)$

$$(g_{-14} - 5\,id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 & -1 & 7 \\ 2 & 6-5 & -14 \\ 0 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $Ker(g_{-14} - 5\,id)$

Finalmente $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de vectores propios de g_{-14} y en ella su matriz es

$$J = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

3. (2 puntos). Sean $E = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $F \subset E$ el subespacio definido por

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \ : \ \begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{array} \right\}.$$

(a) Comprueba que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F \, , \, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F \right\}$ es una base de E/F.

(b) Calcula las cordenadas de los siguientes vectores

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + F \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + F$$

en la base de E/F dada en el apartado anterior.

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \,\middle|\, \begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ -2t=0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \,\middle|\, \begin{array}{c} t=0 \\ z=-x-y \end{array} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x-y & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Vemos que los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ forman una base de F.

• El determinante de la matriz de las coordenadas de estos dos vectores y de los representantes de las dos clases dadas respecto a la base canónica es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $E \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F \right\}$ es base de E/F

(b) Empezamos calculando las coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a la base de E anterior:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cancel{0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \cancel{0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + F = 2\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + F} - 1\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + F = 3\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F\right) + 1\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F\right). \end{cases}$$

Luego las coordenadas pedidas son $(0,0)$ y $(3,1)$ respectivamente.

4. (2 puntos). Sean V un espacio vectorial y $h : V \to V$ un endomorfismo.

(a) Prueba que $\ker h \subseteq \ker h^2$ y construye un ejemplo en el que sea $\ker h \neq \ker h^2$.

(b) Prueba que si $\ker h = \ker h^2$ entonces $\ker h^2 = \ker h^3$.

(a) $v \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow h(v) = \vec{0} \Rightarrow h(h(v)) = h(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow h^2(v) = \vec{0} \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} h^2$.

Sea $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces $h^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} h^2 = \mathbb{R}^2$

Sin embargo $\operatorname{Ker} h \neq \mathbb{R}^2$, pues $h\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Ker} h^2$

(b)

$\subseteq$) $v \in \operatorname{Ker} h^2 \Rightarrow h^2(v) = \vec{0} \Rightarrow h^3(v) = h(h^2(v)) = h(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} h^3$

$\supseteq$) $v \in \operatorname{Ker} h^3 \Rightarrow h^3(v) = \vec{0} \Rightarrow h^2(h(v)) = \vec{0} \Rightarrow h(v) \in \operatorname{Ker} h^2 = \operatorname{Ker} h \Rightarrow$

$\Rightarrow h(h(v)) = \vec{0} \Rightarrow h^2(v) = \vec{0} \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} h^2$.