Obtención de la forma integral del resto [editar]

Debido a la continuidad absoluta de $f^{(k)}$ sobre el intervalo cerrado entre *a* y *x* su derivada $f^{(k+1)}$ existe como una función L^1, y se usa el teorema fundamental del cálculo y la integración por partes. Esta misma demostración se aplica para la integral de Riemann teniendo en cuenta que $f^{(k)}$ es continua sobre el intervalo cerrado y diferenciable sobre el intervalo abierto entre *a* y *x*, y esto permite llegar al mismo resultado que cuando se utilizó el teorema del valor medio.

El teorema fundamental del cálculo dice que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

A partir de aquí se usa la integración por partes y se usa una vez más el teorema fundamental del cálculo para ver que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \Big(xf'(x) - af'(a)\Big) - \int_a^x tf''(t)\,dt \\
&= f(a) + x\left(f'(a) + \int_a^x f''(t)\,dt\right) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt,
\end{aligned}$$

que es exactamente el teorema de Taylor con resto en la forma integral para el caso *k=1*. La enunciación general se demuestra usando la inducción. Suponiendo que

$$(*)\quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt.$$

Integrando el término del resto por partes se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt &= -\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)k!}(x-t)^{k+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)k!}(x-t)^{k+1}\,dt \\
&= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\,dt.
\end{aligned}$$

Substituyendo esto en la fórmula in (*) se muestra que si se tiene para el valor*k*, debe obtenerse también para el valor $k + 1$. Por lo tanto, ya que se tiene para $k = 1$, se tiene para cualquier valor entero positivo *k*.