ESTADÍSTICA I **Curso 2021/2022**
Grado en Matemáticas

Relación 5b de problemas

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una v.a. exponencial con parámetro θ. Se desea contrastar, al nivel de significación $\alpha = 0.01$, $H_0 : \theta = 5$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$ (siendo $\theta_1 > 5$ un valor prefijado).

a) Obtener la región crítica del test UMP.

b) Calcular la probabilidad de error de tipo II en este test.

c) Supongamos que para una determinada muestra, se obtiene $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5$. ¿Qué decisión habría que adoptar si se utiliza el test construido en (a)?

2. En una piscifactoría se desea contrastar la hipótesis nula de que el porcentaje de peces adultos que miden menos de 20 cm es como máximo del 10 %. Para ello, se toma una muestra de 6 peces y se rechaza H_0 si se encuentra más de uno con longitud inferior a 20 cm.

a) ¿Cuál es el nivel de significación de este contraste?

b) Calcula la potencia del contraste si en realidad hay un 20 % de peces que miden menos de 20 cm.

3. Se dispone de una muestra de v.a.i.i.d. de una población normal con desviación típica conocida $\sigma = 2$. Se desea contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 5$ frente a $H_1 : \mu = 6$ con una probabilidad de error de tipo I igual a 0.05 y una probabilidad de error de tipo II igual a 0.363. Si se utiliza el contraste uniformemente más potente que da el lema de Neyman–Pearson, ¿cuál es el tamaño muestral necesario?

4. Sea $X_1, \ldots, X_{16}$ una muestra de tamaño 16 de una población normal de esperanza μ y varianza $\sigma^2 = 1$. Se desea contrastar $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu \neq 0$.

a) Calcula la región crítica del contraste de razón de verosimilitudes de nivel $\alpha = 0.05$. ¿Qué decisión se toma a nivel $\alpha = 0.05$ si con 16 datos se ha obtenido una media muestral $\bar{x} = 1$?

b) Para el contraste anterior, ¿cuál es el valor de la función de potencia evaluada en $\mu = 0.75$?

5. Consideramos una muestra $X_1, \ldots, X_n$ de v.a.i.i.d. de una población con función de densidad $f(x; \theta) = \theta(1 - x)^{\theta-1}$, para $0 \leq x \leq 1$ y $\theta > 0$. Se desea contrastar $H_0 : \theta = 2$ frente a $H_1 : \theta \neq 2$. Si $n = 60$ y $\prod_{i=1}^{60}(1 - x_i) = 0.0003$, ¿cuál es la decisión que hay que adoptar si se utiliza el comportamiento asintótico del contraste de razón de verosimilitudes?

6. Se desea contrastar la hipótesis nula de que una muestra aleatoria simple de tamaño n procede de una distribución uniforme en el intervalo [0,1] frente a la hipótesis alternativa de que procede de una distribución con función de densidad $f(x) = 2x$, si $0 \leq x \leq 1$.

a) Si $n = 1$, es decir, se dispone de una única observación, calcula la región crítica del contraste uniformemente más potente de nivel 0.05.

b) ¿Cuál es la probabilidad de error de tipo II de este contraste?

c) Si $n = 12$ y $\sum_{i=1}^{12} \log x_i = -4.5$, ¿qué decisión hay que tomar de acuerdo con el contraste uniformemente más potente de nivel $\alpha = 0.05$?

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. de una población con función de densidad $f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}$, si $x \geq \theta$ (y 0 en caso contrario). Escribe la región crítica del contraste de razón de verosimilitudes de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una distribución F_θ tal que $F_\theta(x) = F(x-\theta)$, donde F es continua, estrictamente creciente y $F(0) = 1/2$ (es decir, F tiene mediana 0 y θ es la mediana de F_θ). Queremos contrastar $H_0 : \theta \leq 0$ frente a $H_0 : \theta > 0$. Para ello utilizamos el contraste definido por la región crítica $R = \{T_n > c\}$, donde $T_n = \#\{i : X_i > 0\}$ es el número de observaciones positivas en la muestra.

a) ¿Cuál es la distribución de T_n? ¿Cuánto valen, en función de θ, $\mathbb{E}(T_n)$ y $\mathbb{V}(T_n)$?

b) Determina cuánto debe valer el valor crítico c para que el contraste tenga nivel de significación α aproximadamente.

c) Supongamos que la muestra es de tamaño $n = 36$ y procede de una distribución normal de media θ y varianza 1. Calcula la función de potencia del contraste anterior si $\alpha = 0.05$.

9. A partir de una única observación X con distribución exponencial de parámetro θ se quiere contrastar la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ frente a la alternativa $H_1 : \theta = 2$.

(a) Escribe la región crítica del contraste uniformemente más potente de tamaño $\alpha = 0.2$.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de error de tipo II del contraste?

(c) Una vez observado el valor de X resultó $x = 0.1$. ¿Cuál es el p-valor del contraste correspondiente a este valor?

Observación: La densidad de una exponencial de parámetro $\theta > 0$ es $f(x) = \theta\, e^{-\theta x}$ si $x \geq 0$.

10. Una v.a. positiva tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{(\theta + x)^2}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Consideramos el contraste de hipótesis $H_0 : \theta = 2$ frente a $H_1 : \theta = 3$. Supongamos que sólo tenemos una observación x en la muestra (de tamaño $n = 1$). Dar la expresión explícita de la región de rechazo (región crítica) del test uniformemente más potente de nivel $\alpha = 0.05$.