Estructuras Algebraicas. Segundo examen parcial. 7 /12/ 2021

APELLIDOS: ______
NOMBRE: ______ DNI/NIE: ______ GRUPO: ______

Ejercicio 2. (5 puntos) Sea $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(i) **(1,5 puntos)** Prueba que $\mathbf{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$. ¿Es también un ideal de $\mathbb{C}$?

1) $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$

Sean $z = a+bi$, $z' = a' + b'i \in \mathbb{Z}[i]$. Entonces

2) $z + z' = (a+a') + (b+b')i \in \mathbb{Z}[i]$, y

3) $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \in \mathbb{Z}[i]$

- Luego $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$
- Sin embargo $\mathbb{Z}[i]$ no es un ideal de $\mathbb{C}$ pues, por ejemplo, $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$, y $1 \in \mathbb{Z}[i]$ pero $\sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}[i]$.

(ii) **(1,5 puntos)** Denotemos por $I = (2)$ el ideal principal generado por el elemento $2 \in \mathbf{Z}[i]$. ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $\mathbf{Z}[i]/I$? Escríbelos todos.

Escribamos $z = a+bi$ en la forma $z = (2m+a') + (2n+b')i$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $a', b' = 0$ ó 1. Entonces $z + I = (a'+b'i) + I$ con $a', b' = 0$ ó 1.

Luego $\mathbb{Z}[i]/I$ sólo tiene 4 elementos: $0+I$, $1+I$, $i+I$, $(1+i)+I$.

(iii) **(1 punto)** Decide qué elementos del anillo $\mathbf{Z}[i]/I$ del apartado anterior son unidades y qué elementos son divisores de cero.

Unidades: $1+I$ (obviamente) y $i+I$ pues $(i+I)^2 = -1+I = 1+I$

Divisores de cero: $(1+i)+I$ pues $((1+i)+I)^2 = (\cancel{1}-1+2i)+I = 0+I$

(iv) **(1 punto)** Deduce del apartado anterior si el ideal $I = (2)$ es primo o maximal, y si no es maximal encuentra un ideal principal $J \neq \mathbf{Z}[i]$ que lo contenga estrictamente.

Por (iii), $\mathbb{Z}[i]/I$ tiene divisores de cero $\Rightarrow$ I no es primo $\Rightarrow$ I no es maximal

Por otra parte tenemos $2 = (1+i)(1-i) \Rightarrow 2 \in (1-i) \Rightarrow (2) \subseteq (1-i)$

Tomamos $J = (1-i)$. Hemos visto que $(2) \subseteq J$, así que falta probar que:

1 $(2) \subsetneq J$ y 2 $J \subsetneq \mathbb{Z}[i]$.

1 $1-i \notin (2)$ pues $1-i \neq (a+bi)2 = 2a+2bi \quad \forall (a+bi) \in \mathbb{Z}[i]$

2 $1 \notin J$ pues $1 = (a+bi)(1-i)$, con $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = (a+b)+(b-a)i \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b=a \end{cases}$, imposible con $a, b \in \mathbb{Z}$