Estructuras Algebraicas

Hoja 5. Anillos.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 5

1. Demuestra que el conjunto $(\mathcal{C}([0,1]),+,\cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con las operaciones
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \quad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para } x \in [0,1]$$
es un anillo. Especialmente señala los elemntos neutros respecto de las dos operaciones y el inverso de un elemento dado respecto de la primera. ¿Es conmutativo?

2. Demuestra que $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, \,|\, a,b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi, \,|\, a,b \in \mathbb{Q}\}$ son subanillos de $\mathbb{C}$. ¿Es alguno de ellos un cuerpo? Discute las mismas cuestiones para $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.

3. Sea $d \in \mathbb{Z}$, $1 \neq d \neq e^2$ con $e \in \mathbb{Z}$, consideramos el subconjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d} : \, a,b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

   Definimos la aplicación $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ como $N(a+b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$. Demuestra que:

   $N(x) = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

   $N(xy) = N(x)N(y)$.

   x es una unidad de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$) si, y solo si, $N(x) = \pm 1$.

   Sugerencia: nota que $N(a+b\sqrt{d}) = (a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d})$.

4. Halla las unidades de los siguientes anillos $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $M_2(\mathbb{Q})$ y $M_2(\mathbb{Z})$.

5. Para cada elemento no nulo $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ decide si x es una unidad o un divisor de cero.

6. Demuestra que $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subanillo conmutativo del anillo no conmutativo $M_2(\mathbb{R})$. Decide si R es un cuerpo y si la respuesta es afirmativa intenta establecer un isomorfismo con algún cuerpo que conozcas.

7. Considera $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \ : \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$.

   Demuestra que $\mathbb{H}$ es un subanillo de $M_2(\mathbb{C})$.

   Demuestra que todo elemento de $\mathbb{H}^*$ tiene inverso; i.e. que $\mathbb{H}$ es un cuerpo (o un anillo de división) no conmutativo.

   Demuestra que, a su vez, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son (isomorfos a) subcuerpos de $\mathbb{H}$.

   Encuentra una base $\{\mathbf{1},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{H}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de forma que los 8 elementos $\pm\{\mathbf{1},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ forman un subgrupo de $\mathbb{H}^*$ isomorfo al grupo de los cuaternios Q_8.

   (Este cuerpo $\mathbb{H}$ se conoce como cuerpo de los cuaterniones, o de Hamilton; y, aparte de $\mathbb{C}$, es el único cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$ de forma que el espacio vectorial real subyacente tiene dimensión finita).

En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, todos los anillos serán conmutativos (y, por supuesto, con $1 \neq 0$).

8. Demuestra que un cuerpo no tiene divisores de cero.

9. Sea A un anillo finito y sea $0 \neq a \in A$. Demuestra que la aplicación $f_a : A \to A$ definida por $f_a(x) = ax$ es biyectiva si y sólo si a no es un divisor de cero. Deduce que en un anillo finito todo elemento no nulo es o bien una unidad o bien un divisor de cero. Observa, en particular, que un anillo finito es un dominio si y solo si es un cuerpo.

10. Sea A un anillo. demuestra que el conjunto $U(A) = A^*$ de sus unidades es un grupo respecto de la multiplicación. Comprueba que este hecho es coherente con los resultados que has obtenido en el ejercicio 4.

11. Demuestra que si A es un dominio, entonces $A[X]$ también lo es.

12. Si R_1 y R_2 son dos anillos demuestra que $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.

13. Calcula el número de unidades del anillo finito $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, e indica cuántos divisores de cero tiene.

14. Sea R un anillo e I un ideal de R. Demuestra que los siguientes subconjuntos de R son ideales de R.

    (a) $Rad(I) := \{a \in R : a^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$ (el radical de I). (¿Quién es $Rad(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (X^3) \subset \mathbb{R}[X]$?)

    (b) $Ann(I) := \{a \in R : ax = 0$ para todo $x \in I\}$ (el anulador de I). (¿Quién es $Ann(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (\overline{2}) \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?)

15. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Demuestra lo siguiente:

    (a) Si I es un ideal de R entonces, $I = R \iff$ existe una unidad de R en I.

    (b) R es un cuerpo $\iff \{0\}$ es el único ideal propio de R.

16. Sean A_1 y A_2 los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3}|a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$ con $i = 1, 2$. Para $i = 1, 2$, se pide:

    (a) Escribe todos los elementos de R_i;

    (b) Decide si los anillos R_i son dominios o cuerpos, y si los ideales $2A_i$ son primos o maximales.

17. Sea $r \in \mathbb{R}$. Decide si el conjunto $M_r = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \,|\, f(r) = 0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0, 1])$.

18. Sea $f : A \to A'$ un homomorfismo de anillos y sean I e I' ideales de A y A' respectivamente. Se pide:

    (a) Probar que $f(A)$ es un subanillo de A'.

    (b) Probar que $f^{-1}(I')$ es un ideal de A.

    (c) Probar que $f(I)$ es un ideal de A' si f es suprayectivo.

    (d) Dar un ejemplo de un homomorfismo de anillos $f : A \to A'$ y de un ideal I de A tal que $f(I)$ no sea un ideal.

19. Consideremos el caso particular del ejercicio anterior en el que el homomorfismo es la aplicación cociente $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(a) = a + I = \overline{a}$.

    (a) Demuestra que la aplicación
    $$M \longrightarrow \pi^{-1}(M)$$
    establece una aplicación biyectiva entre los conjuntos $\{$ideales de $A/I\}$ e $\{$ideales de A que contienen a $I\}$ que tiene como inversa la aplicación
    $$J \longrightarrow \pi(J) = J/I$$

    (b) Demuestra que en esta correspondencia ideales primos corresponden a ideales primos e ideales maximales a ideales maximales.

    (c) Usa este resultado para encontrar todos los ideales en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y señala entre ellos a los maximales.

20. Indica cuántos ideales primos tiene el anillo $\mathbb{R}[X]/I$ si $I = ((X^2 - 1)^5)$.

21. Demuestra que $\{(3a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $\{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal primo pero no maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Intenta hacerlo estableciendo un isomorfismo entre el cociente del anillo por el primero (respectivamente del segundo) y un cuerpo (respectivamente un dominio que no sea un cuerpo).

22. Sea F un cuerpo y $a \in F$. Demuestra que el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_a\colon F[X] \to F$ es un ideal maximal de $F[X]$. Señala un generador.

23. Sea R un dominio. Halla el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_0\colon R[X] \to R\colon f(X) \mapsto f(0)$.

24. Demuestra la existencia de los siguientes isomorfismos dando el isomorfismo explicitamente:

    (a) $\mathbb{Z}[X]/I \cong \mathbb{Z}$, donde $I = \{p(X) \in \mathbb{Z}[X] \,|\, p(2) = 0\}$;

    (b) $\mathbb{Q}[X]/I \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donde $I = (X^2 - 2)$.