Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

Solución: $\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$. $\eta(t) = (1, -1) + (t + 1)\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$ o $2y = -3x + 1$. No.

Desarrollo: Como $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ tenemos

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \quad \text{y} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4 + 9t^2}$$

Para $t \neq 0$

$$\mathbb{t}(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{|t|\sqrt{4 + 9t^2}}, (2t, 3t^2)$$

Además $\gamma(t) = (t^2, t^3) = (1, -1)$ si y sólo si $t = -1$, es decir , $\gamma(-1) = (1, -1)$.

Por tanto $\mathbb{t}(-1) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$ y la ecuación en paramétricas de la recta tangente en $(-1, 1)$ es

$$\eta(t) = \gamma(-1) + (t + 1)\mathbb{t}(-1)$$

que nos queda : $\eta(t) = (1, -1) + (t + 1)\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$.

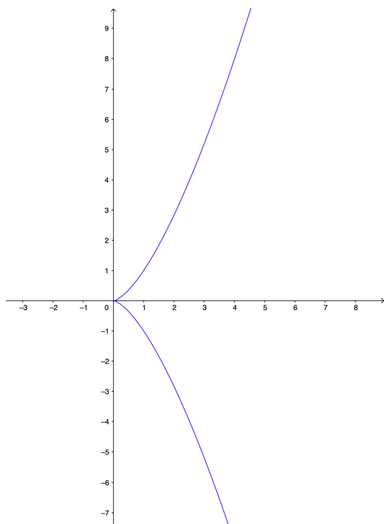
Como $x(t) = 1 + (t + 1)\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$ y $y(t) = -1 + (t + 1)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, igualando $(t + 1)/\sqrt{13}$ obtenemos

$$-\frac{(x - 1)}{2} = \frac{y + 1}{3}$$

o equivalentemente $2y = -3x + 1$. También directamente como $\gamma'(-1) = (-2, 3)$ la pendiente de la recta es $-3/2$ y pasa por $(1, -1)$, así que

$$\frac{y + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

En $\gamma(0) = (0, 0)$ no hay recta tangente, ver dibujo.



Como $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $x = t^2$ e $y = t^3$, por tanto $x \geq 0$ y $y^2 = x^3$, y el dibujo es $y = \pm|x|^{3/2}$ con $x \geq 0$.

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

$$(a)\ \gamma(t) = \left(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\right), \quad t = 2\pi. \qquad (b)\ \sigma(t) = \left(e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \cos(2t), e^{-2t}\right), \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Solución: (a) $\gamma'(t) = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t, -\cos t - \operatorname{sen} t)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$, $\gamma''(t) = 2e^{-t}(-\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\eta(t) = e^{-2\pi}(0,1) + (t-2\pi)e^{-2\pi}(1,-1)$ o $y = -x + e^{-2\pi}$.

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4\,s, s^2)$, $0 \leq s \leq 4$.

(b) $\sigma(u) = \left(e^{-u} \cos u, e^{-u} \operatorname{sen} u\right)$, $0 \leq u < +\infty$.

Solución: (b) $\sqrt{2}$

Desarrollo: (a) Derivando obtenemos $\sigma'(s) = (1, 4, 2s)$ y por tanto

$$\|\sigma'(s)\| = \sqrt{17 + (2s)^2} = \sqrt{17}\sqrt{1 + \left(\frac{2s}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

La longitud de la curva es

$$\text{longitud }(\sigma) = \int_0^4 \|\sigma'(s)\| ds = \sqrt{17}\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{2s}{\sqrt{17}}\right)^2} ds = \frac{17}{2}\int_0^{8/\sqrt{17}} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

Con el cambio $t = \operatorname{tg}\alpha$, recordar $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$, tenemos $\displaystyle\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \int \sec^3\alpha\, d\alpha$ que se puede resolver por integración por partes

$$\int \sec^3\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\left(\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \log|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha|\right) + c$$

y nos queda

$$\int_0^{8/\sqrt{17}} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \log|\sqrt{1+t^2} + t|\right)\Big|_0^{8/\sqrt{17}}$$

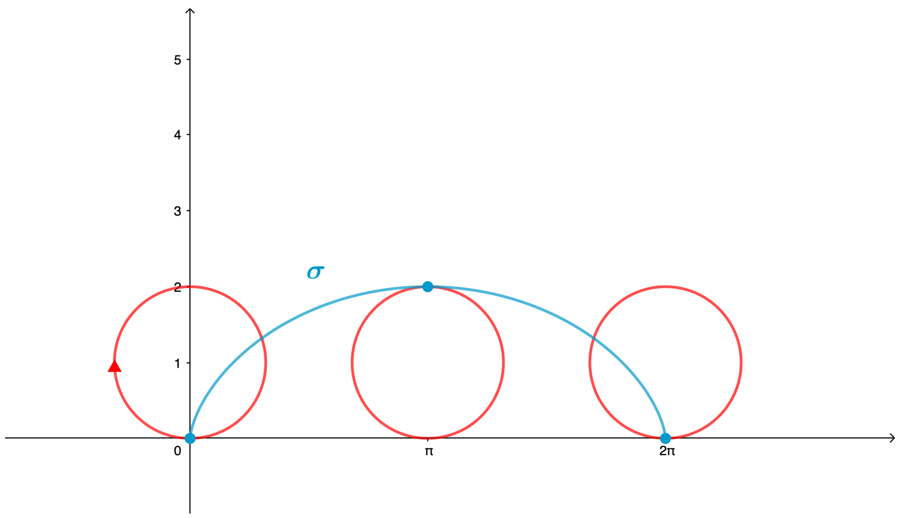
Por tanto

$$\text{longitud }(\sigma) = \frac{17}{4}\left(\frac{8}{\sqrt{17}}\sqrt{1+\frac{64}{17}} + \log\left|\sqrt{1+\frac{64}{17}} + \frac{8}{\sqrt{17}}\right|\right)$$

4.- Hallar la longitud del arco de cicloide descrito por $x = R\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R\,(1 - \cos t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución: $8R$

Desarrollo: El cicloide es la curva descrita por el movimiento de un punto que está en el borde de un círculo (circunferencia roja) que rueda sobre el eje.



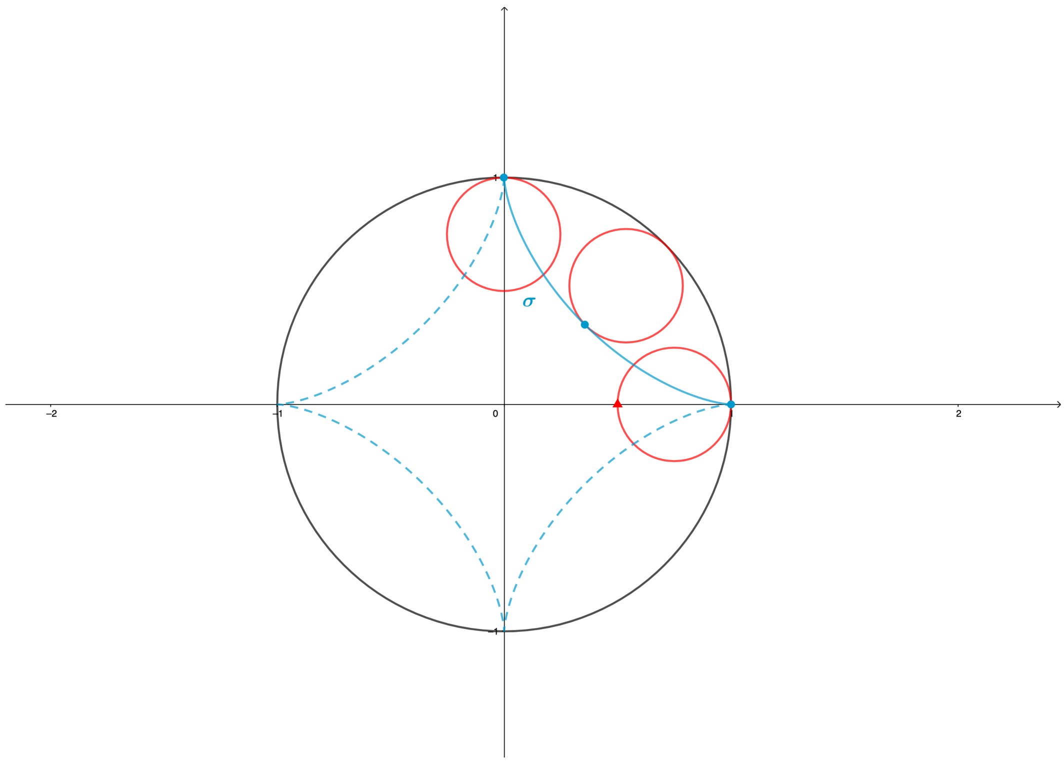
Tenemos $\sigma'(t) = R(1-\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos t}$ y la longitud es

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos t}\; dt = 2R\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4R\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8R$$

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Solución: $\frac{3}{2}$

Desarrollo: El hipocicloide es la curva descrita por el movimiento de un punto que está en el borde de un círculo (circunferencia roja) que rueda en el interior de un círculo fijo (el negro) de radio 4 veces mayor.



Tenemos $\sigma'(t) = (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t\cos t)$,

$$\|\sigma'(t)\|^2 = 9\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = \left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t)\right)^2$$

y la longitud del arco es

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t)\; dt = \frac{3}{4}(-\cos(2t))\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}$$

La longitud (total) de los 4 arcos es 6.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3\,t\big) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t+\pi, 3\,t\big) & \text{si} \quad \pi \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

Solución: $2\pi\sqrt{10}$

Desarrollo:

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \big(-\operatorname{sen} t, \cos t, 3\big) & \text{si} \quad 0 < t < \pi, \\ \big(0, -1, 3\big) & \text{si} \quad \pi < t < 2\,\pi. \end{cases}$$

y $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{10}$ para $t \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$. Por tanto

$$\text{longitud } (\sigma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{10}\, dt = 2\pi\sqrt{10}$$

7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, calcúlese la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, ds$;

Solución: $\frac{1}{3}\left[(2+4\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$

Desarrollo: Si quereis hacer un dibujo aproximado, observad que $x^2+y^2 = z^2$, es decir la curva está sobre un cono. Como $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$,

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t\cos t, 1) \quad \text{y} \quad \|\gamma'(t)\|^2 = (\cos t - t\operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + t\cos t)^2 + 1 = 2 + t^2$$

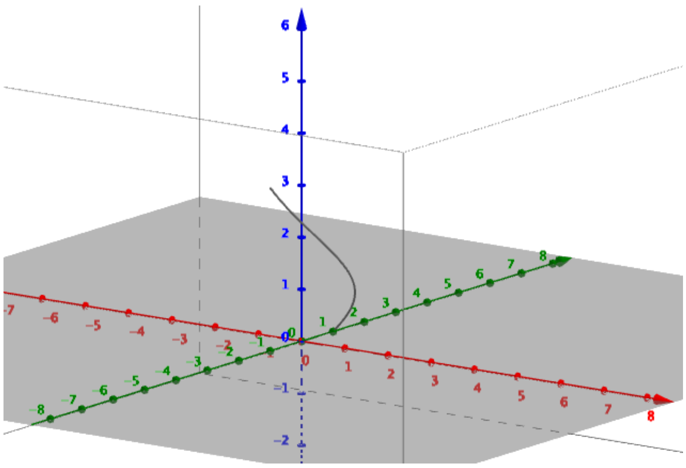
Por tanto

$$\int_\gamma z\, ds = \int_0^{2\pi} t\|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left.\frac{(2+t^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[(2+4\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$$

8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x,y,z) = x+y+z$.

Solución: $\sqrt{2}\left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)$

Desarrollo: Primero que todo dibujamos la curva



Ahora pasemos a calcular la integral. Como $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, entonces

$$\sigma'(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1) \quad \text{y} \quad \|\sigma'(t)\|^2 = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}.$$

Así

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\sigma x+y+z\, ds = \int_0^\pi (\sin(t) + \cos(t) + t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left(-\cos(t) + \sin(t) + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^\pi\right) = \sqrt{2}\left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right).$$

9.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x,y)\cdot ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(*a*) $F(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1-x|$ desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

(*b*) $F(x,y) = (x+y, x-y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en sentido antihorario.

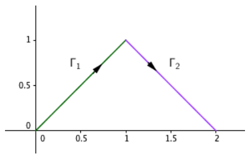
Solución: (a) $\frac{4}{3}$ (b) 0

Desarrollo:

(*a*) Primero observemos que

$$y = \begin{cases} x & \text{si } |x| \le 1 \\ 2-x & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Por tanto, vamos a dividir nuestra curva en dos, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.



Ahora parametrizamos las dos curvas

$$\begin{array}{lll} c_1(t) : [0,1], \to \Gamma_1 & c_1(t) = (t,t) & (c_1'(t) = (1,1)) \\ c_2(t) : [0,1], \to \Gamma_2 & c_2(t) = (t, 2-t) & (c_2'(t) = (1,-1)) \,. \end{array}$$

Así ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(x,y) \cdot ds &= \int_{\Gamma_1} F(x,y) \cdot ds + \int_{\Gamma_2} F(x,y) \cdot ds \\ &= \int_0^1 (2t^2, 0) \cdot (1,1)\, dt + \int_0^1 \left(t^2 + (2-t)^2, t^2 - (2-t)^2\right) \cdot (1,-1)\, dt \\ &= \int_0^1 2t^2\, dt + \int_0^1 2(1-t)^2\, dt \\ &= 4 \int_0^1 t^2\, dt \quad \text{(Hemos usado el cambio } (1-t) = s \text{ en la segunda integral)} \\ &= 4/3. \end{aligned}$$

(b) Primero parametrizamos la elipse

$$c(t) : [0, 2\pi], \to \Gamma, \quad c(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \quad (c'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)))$$

Así ya podemos calcular la integral

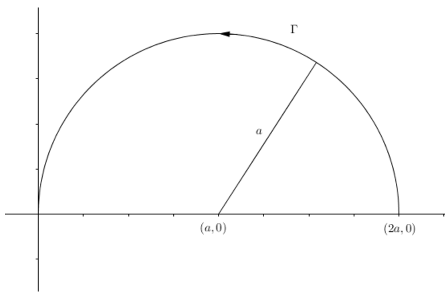
$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(x,y) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (a\cos(t) + b\sin(t), a\cos(t) - b\sin(t)) \cdot (-a\sin(t), b\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(a^2+b^2)\cos(t)\sin(t) + ab(\cos^2(t) - \sin^2(t))\, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nota: Si aplicáis el Teorema de Green aquí el resultado es inmediato. ($P = x+y$, $Q = x-y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$)

10.- Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x,y)$ el vector unitario que apunta desde (x,y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a,0)$ hasta $(0,0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Solución: $2a$

Desarrollo: Dado un punto genérico (x,y) el vector unitario que apunta al origen es simplemente el vector $\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Cuando nos pide calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una particula entre dos puntos a lo largo de una curva, simplemente nos está pidiendo que calculemos la integral del campo a lo largo de la curva correspondiente.



Primero parametrizamos la curva Γ_ϵ para $\epsilon > 0$

$$c_\epsilon(t) : [0, \pi - \epsilon], \to \Gamma_\epsilon, \quad c_\epsilon(t) = (a + a\cos(t), a\sin(t)) \quad (c'_\epsilon(t) = (-a\sin(t), a\cos(t)))$$

Así ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\epsilon} F(x,y)\cdot ds &= \int_0^{\pi-\epsilon} \left(\frac{-a - a\cos(t)}{\sqrt{(a+a\cos(t))^2 + a^2\sin^2(t)}}, \frac{-a\sin(t)}{\sqrt{(a+a\cos(t))^2 + a^2\sin^2(t)}} \right) \cdot (-a\sin(t), a\cos(t))\, dt \\
&= \int_0^{\pi-\epsilon} \frac{a^2\sin(t)}{\sqrt{(a+a\cos(t))^2 + a^2\sin^2(t)}}\, dt \\
&= \int_0^{\pi-\epsilon} a\sin(t)\,(2+2\cos(t))^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= -a\,(2+2\cos(t))^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi-\epsilon} \longrightarrow 2a \qquad \text{cuando } \epsilon \to 0^+
\end{aligned}$$

También se puede comprobar que $F(x,y) = \nabla f(x,y)$ con $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\epsilon} F(x,y)\cdot ds &= \int_{\Gamma_\epsilon} \nabla f(x,y)\cdot ds = f(c_\epsilon(\pi-\epsilon)) - f(c_\epsilon(0)) \\
&= f(a + a\cos(\pi-\epsilon), a\sin(\pi-\epsilon)) - f(2a,0) \longrightarrow f(0,0) - f(2a,0) = 2a \quad \text{cuando } \epsilon \to 0^+
\end{aligned}$$

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy$, cuando Γ es la curva :

$$(a) \quad x^2 + y^2 = a\,x \qquad\qquad (b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

recorrida en el sentido antihorario.

Desarrollo: (**Nota:** Este ejercicio también se puede hacer usando el Teorema de Green, aquí lo haremos directo, porque no es más corto al aplicar el teorema.)

(a) Primero fijémonos que la curva Γ es la circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$

$$x^2 + y^2 = a\,x \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Por tanto, parametrizamos Γ (recordemos, sentido antihorario)

$$c(t) : [0, 2\pi], \to \Gamma, \quad c(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t), \frac{a}{2}\sin(t)\right) \quad \left(c'(t) = \left(-\frac{a}{2}\sin(t), \frac{a}{2}\cos(t)\right)\right)$$

Así ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}\sin(t), \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t)\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\sin(t), \frac{a}{2}\cos(t)\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{a^2}{4}\sin^2(t)\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{8}(1+\cos(t))^2\cos(t)\, dt \\
&= -\frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^3\pi}{4} \\
&= \frac{a^2\pi}{4}(a-1).
\end{aligned}$$

(b) En primer lugar parametrizamos la elipse

$$c(t) : [0, 2\pi], \to \Gamma, \quad c(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \quad (c'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)))$$

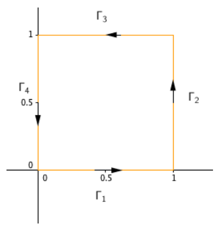
Así ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy &= \int_0^{2\pi} \big(b\sin(t), a^2\cos^2(t)\big)\cdot(-a\sin(t), b\cos(t))\ dt \\
&= -ab\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt + a^2 b\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\,dt \\
&= -ab\pi + 0 \\
&= -ab\pi.
\end{aligned}$$

12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x,y) = (y^2+x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en sentido antihorario.

Solución: 0

Desarrollo: Primero dividiremos el contorno del cuadrado en sus cuatro segmentos



A continuación los parametrizamos adecuadamente

$$\begin{array}{lll}
c_1(t):[0,1], \to \Gamma_1 & c_1(t) = (t,0) & (c_1'(t) = (1,0)) \\
c_2(t):[0,1], \to \Gamma_2 & c_2(t) = (1,t) & (c_2'(t) = (0,1)) \\
c_3(t):[0,1], \to \Gamma_3 & c_3(t) = (1-t,1) & (c_3'(t) = (-1,0)) \\
c_4(t):[0,1], \to \Gamma_4 & c_4(t) = (0,1-t) & (c_4'(t) = (0,-1))\,.
\end{array}$$

Así ya podemos calcular la integral

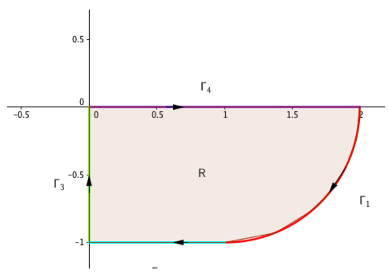
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F(x,y)\cdot ds &= \int_{\Gamma_1} F(x,y)\cdot ds + \int_{\Gamma_2} F(x,y)\cdot ds + \int_{\Gamma_3} F(x,y)\cdot ds + \int_{\Gamma_4} F(x,y)\cdot ds \\
&= \int_0^1 t^3\,dt + \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 1 + (1-t)^3\,dt - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

13.- Dados los puntos $A = (2,0)$, $B = (1,-1)$, $C = (0,-1)$ y $D = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$, sea Γ el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos de recta BC, CD, y DA.

Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy$, con Γ orientada en sentido horario.

Solución: $-2-\dfrac{\pi}{2}$

Desarrollo: En este ejercicio aplicaremos el Teorema de Green, (podéis intentar hacerlo directamente para ver como usar el Teorema de Green aquí nos simplifica muchísimo las cosas). Primero que todo fijarse que la curva está orientada en sentido horario y para aplicar el teorema necesitamos sentido antihorario. Pero esto solo implica añadir un signo menos. Dibujamos la región, R encerrada por la curva (la orientamos en sentido horario)



Ahora ya podemos calcular la integral, por no liar notación notemos Γ' como la curva Γ pero orientada en sentido antihorario , ($P = x^4 - x^3e^x - y$, $Q = x - y\arctan y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2$)

$$\int_{\Gamma'} (x^4 - x^3e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy = \int\int_R 2\,dx\,dy = 2\text{Área}(R).$$

Y como R es simplemente un cuadrado de lado 1 unión un cuarto de circulo de radio 1, su área es igual a $1 + \frac{\pi}{4}$. Por tanto, por lo de antes y recordando el "menos" por el cambio de sentido tenemos que

$$\int_{\Gamma} (x^4 - x^3e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy = -2 - \frac{\pi}{2}.$$

14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x, y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x, y) = (3\,x^2y, x^3)$	(b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} y - y\ \operatorname{sen} x + x, \cos x + x\ \cos y + y)$
(c) $F(x, y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$	(d) $F(x, y) = (\operatorname{sen}(x\,y) + x\,y\ \cos(x\,y), x^2\cos(x\,y))$.

Solución: (a) $f(x, y) = x^3y$ (b) $f(x, y) = x\operatorname{sen} y + y\cos x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (c) $f(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$ (d) $f(x, y) = x\operatorname{sen}(xy)$.

Desarrollo: Haremos el apartado (b). Imaginemos que F es un gradiente de un potencial f entonces se tiene que cumplir que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(y) - y\sin(x) + x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x) + x\cos(y) + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x) + \dfrac{x^2}{2} + g(y) \\ f(x, y) = y\cos(x) + x\sin(y) + \dfrac{y^2}{2} + h(x) \end{cases}$$

donde g es una función que solo depende de y y h es una función que solo depende de x. De aquí vemos que $f(x, y) = y\cos(x) + x\sin(y) + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}$ cumple lo que queremos.

15.- Evaluar $\displaystyle\int_{\Gamma} (2\,x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido antihorario.

Solución: $\frac{3}{2}\pi$

Desarrollo: Lo haremos un poco más general para usar este ejercicio en el ejercicio siguiente, consideremos Γ la circunferencia de radio b. Primero parametrizamos Γ.

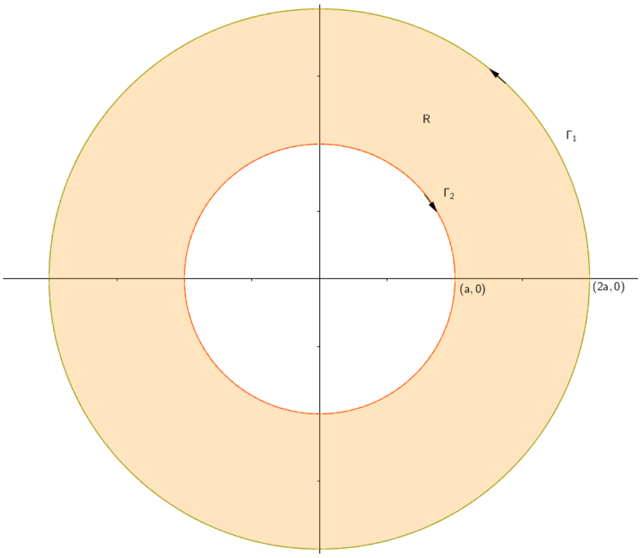
$$c(t) : [0, 2\pi], \to \Gamma, \quad c(t) = (b\cos(t), b\sin(t)) \quad (c'(t) = (-b\sin(t), b\cos(t)))$$

Así ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (2\,x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy &= \int_0^{2\pi} \left(2b^3\cos^3(t) - b^3\sin^3(t), b^3\cos^3(t) + b^3\sin^3(t)\right) \cdot (-b\sin(t), b\cos(t))\ dt \\ &= -2b^4\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\sin(t)\,dt + b^4\int_0^{2\pi} \sin^4(t) + \cos^4(t)\,dt + b^4\int_0^{2\pi} \sin^3(t)\cos(t)\,dt \\ &= 0 + \frac{3b^4\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{3b^4\pi}{2}.\end{aligned}$$

16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2\,x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \le x^2 + y^2 \le 4\,a^2$.

Desarrollo: Primero dibujamos la corona



Queremos comprobar que (Γ_2 tiene orientación horaria)

$$\int_{\Gamma_1} F(x,y)\cdot ds - \int_{\Gamma_2} F(x,y)\cdot ds = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

donde $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Por el ejercicio anterior la parte izquierda ya la tenemos calculada

$$\int_{\Gamma_1} F(x,y)\cdot ds - \int_{\Gamma_2} F(x,y)\cdot ds = \frac{3(2a)^4\pi}{2} - \frac{3a^4\pi}{2} = \frac{45a^4\pi}{2}$$

Calculemos ahora la parte derecha (usamos un cambio de variable a polares)

$$\begin{aligned}\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy &= 3\int\int_R \left(x^2+y^2\right) dx\, dy = 3\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} r^2\cdot r\, dr\, d\theta \\ &= 6\pi \frac{r^4}{4}\bigg|_a^{2a} = \frac{3\pi}{2}\left(16a^4 - a^4\right) \\ &= \frac{45a^4\pi}{2}.\end{aligned}$$

17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en sentido antihorario. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$ en función de A.

Solución: $5A$

Desarrollo: Si denotamos por R el recinto acotado por la curva γ, aplicando el teorema de Green obtenemos ($P = -4y$, $Q = x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 5$)

$$\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx = \int\int_R 5\, dx\, dy = 5A.$$