HOJA DE EJERCICIOS 2
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

---

Sea $f : (X, d) \to (Z, \rho)$ una aplicación entre espacios métricos.
Decimos que $f$ es **Lipschitziana,** o simplemente **Lipschitz,** si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\rho\big(\, f(x)\,,\, f(y)\,\big) \;\leq\; M\, d(x,y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in X\ ,$$

y de un tal número $M$ decimos que es una **constante de Lipschitz para f**.

Decimos que $f$ es **localmente Lipschitziana,** o **localmente Lipschitz,** si para cada punto $x_0 \in X$ existen un entorno $U$ de $x_0$ en $X$ y un número $M_U \geq 0$ tales que

$$\rho\big(\, f(x)\,,\, f(y)\,\big) \;\leq\; M_U\, d(x,y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in U\ ,$$

es decir que la restricción $f|_U$ es Lipschitz.

---

**Problema 1.** Demuestra que toda aplicación localmente Lipschitz es continua.

Sea $x_0 \in X$; para $\varepsilon > 0$ elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{M_U}$; si $y \in U$ y $d(x_0, y) < \delta$ se tiene que

$$\rho(f(x_0), f(y)) \leq M_U\, d(x_0, y) \leq M_U\, \delta = \varepsilon.$$

Esto prueba que $f$ es continua en $x_0$.

**Problema 2.** Determina, para cada una de la siguientes funciones continuas:

1. si es localmente Lipschitz o no,
2. si es Lipschitz o no.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto x^2.$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \sqrt{1+x^2}.$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \arctan x.$
$(-1,1) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arc\,sen} x.$
$[-1,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arc\,sen} x.$
$(0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \log x.$

1. $f(x) = x^2$ ; $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x+y||x-y|$

Dado $M>0$, si $0>x,y>M$, $|f(x)-f(y)| > M|x-y|$

$\Rightarrow$ f no es L

(LL) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ toman $U = (x_0-1, x_0+1)$. Si $x, y \in U$, $|f(x)-f(y)| = |x+y||x-y| \le$

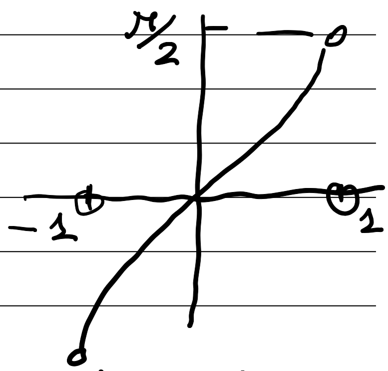
$\le (|x|+|y|)|x-y| \le \underbrace{2(x_0+1)}_{M_{x_0}}|x-y| \Rightarrow$ Es LL

b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ; TVM : $|f(x)-f(y)| = |f'(\alpha)||x-y|$ donde $\alpha \in (x,y)$. Como $|f'(\alpha)| = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \le 1 \Rightarrow$

$|f(x)-f(y)| \le 1|x-y| \Rightarrow$ f es L y también LL.

4. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ en $(-1,1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no acotada

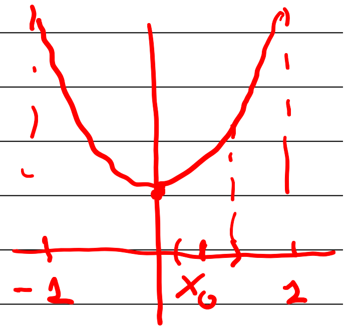



$|f(x)-f(y)| = |f'(\alpha)||x-y| \longrightarrow \infty$

cuando x, y cercanos a 1 o -1

No es L

LL $x_0 \in (0,1)$, tomar $U = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta$ pequeño t.q. $U \subset (0,1)$.




Como $f'$ es creciente en $(0,1)$ si $\alpha \in U$, $|f'(\alpha)| \leq |f'(x_0+\delta)| = \frac{1}{\sqrt{1-(x_0+\delta)^2}}$

$= M_{x_0}$. Entonces,

si $x, y \in U$,

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-(x_0+\delta)}}|x-y|$$

Es LL.

$f(x) = \arcsin x$ en $[-1,1]$ no es lipschitz ni LL porque no se puede encontrar el $M_U$ para $x_0 = 1$ o $x_0 = -1$ ya que $|f'(\pm 1)| = \infty$

**Problema 5.** Sea $1 < p < \infty$. Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n\,\|v\|_\infty .$$

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\|v\|_\infty = \max_i |v_i| \Rightarrow$

$\exists\, i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $\|v\|_\infty = |v_{i_0}|$

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p} \geq \left(|v_{i_0}|^p\right)^{1/p} = |v_{i_0}| = \|v\|_\infty$$

La segunda desigualdad está en el problema 8 de la hoja 1

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|v\|_\infty = n\,\|v\|_\infty$$

**Problema 7.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Definimos la **distancia a A** como la siguiente función

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{dist}(x, A) \;=\; \text{ínf}\,\{\, d(x,y) \;:\; y \in A \,\}\,.$$

1. Demuesta que $\operatorname{dist}(\cdot, A)$ es una función Lipschitz en $(X, d)$ ¿con qué constate de Lipschitz?
2. Si además $A$ es compacto, demuestra que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$; es decir, un **punto más cercano a x** entre los puntos de $A$.

1. Al igual que en el ejercicio 13 (a) de la hoja 1

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x - y\|$$

Esto prueba que la función $d(\cdot, A)$ es L con constante 1.

2. Con $\varepsilon = 1/n$, $\exists\, a_n \in A$ tal que


$d(x,A) \leq d(x, a_n) \leq d(x,A) + \frac{1}{n}$

Como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ y A es compacto, $\exists\, \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in A$. Como $d(\cdot, y)$ es continua

$$d(x,A) \leq \lim_{k\to\infty} d(x, a_{n_k}) = d(x, a)$$

$$\lim_{k\to\infty} d(x, a_{n_k}) \leq d(x,A) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}$$

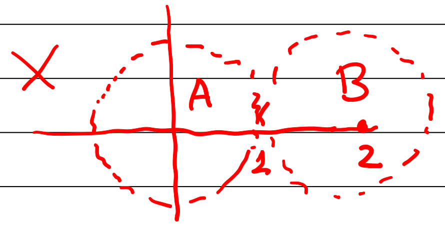
$$= d(x, A)$$

**Problema 8.** Fijamos $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ el primer vector de la base estándar. Demuestra que:

1. Los subconjuntos $B(0,1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1)$ y $\overline{B}(0,1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1)$ no son conexos por caminos.
2. Los subconjuntos $B(0,1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1) \cup \{\mathbf{e}_1\}$ y $\overline{B}(0,1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1) \cup \{t\mathbf{e}_1 : 1 < t < 2\}$ son conexos por caminos.

$X$ es no conexo si $\exists\, A, B$ abiertos t.q. $X \subset A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, $A \cap X \neq \emptyset$ y $B \cap X \neq \emptyset$

1.

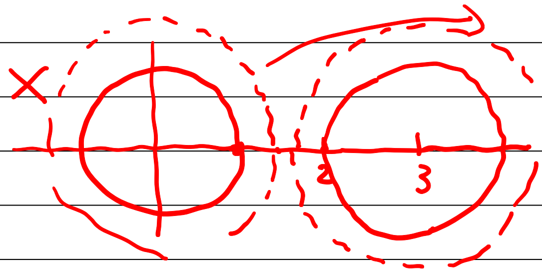



No es conexo pq. con $A = B(0,1)$ y $B = B(2e_1, 1)$

$A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$

ni conexo por caminos

2.



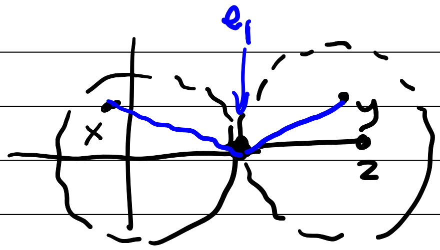

$A = B(0, \tfrac{3}{2})$

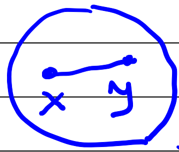
$B = B(3e_1, \tfrac{3}{2})$

$X \subset A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$

no es conexo y por tanto no es conexo por caminos

3.



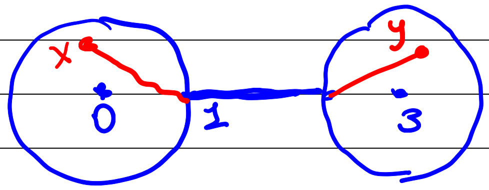

$\gamma : [0,1] \to X$

$\gamma(t) = (1-t)x + ty$

$$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-2t)x + 2te_1 & 0 \le t < \tfrac{1}{2} \\ e_1 & \text{si } t = \tfrac{1}{2} \\ (2-2t)e_1 + (2t-1)y & \tfrac{1}{2} < t \le 1 \end{array} \right\} \text{continuo}$$

$0 \le t \le 1$

Es conexo por caminos




$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)x + t e_1 & , 0 \le t \le 1 \\ t e_1, \quad \text{si } 1 \le t \le 2 \\ (3-t)e_1 + (t-2)y & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

$0 \le t \le 3$