Geometría de curvas y superficies
Segundo de Matemáticas, UAM
Curso 2020-2021

Resumen sobre curvas

(elaborado por JLF/PFG, UAM, 10 de marzo de 2021)

Reunimos a continuación las nociones, notaciones y fórmulas sobre el material de curvas (planas y espaciales).

Una **curva regular** $\boldsymbol{\gamma}$ es una aplicación diferenciable de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\gamma}: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \end{array}$$

tal que el vector "velocidad"

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad \text{es distinto de } (0,0,0) \text{ para cada } t \in I,$$

donde $'$ significa derivada con respecto a t. Su **traza** es $\boldsymbol{\gamma}(I)$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que son imagen por $\boldsymbol{\gamma}$ del intervalo I. A t nos referimos como el **parámetro** de la curva.

Dado $t \in I$, la **longitud de arco** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ desde el punto $t_0 \in I$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\|\, du$$

Diremos que la curva está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = 1$ para cada $t \in I$ (en cuyo caso $s(t) = t$ salvo una constante).

NOTACIÓN: en lo que sigue,

- si la curva está parametrizada por longitud de arco, reservaremos el símbolo s para su parámetro, y para las derivadas con respecto a s utilizaremos $\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s)$, etc.;
- para parámetro t arbitrario, para las derivadas con respecto a t escribiremos $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, etc.

A. Curvas parametrizadas por longitud de arco

Como $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$ para todo s, los vectores $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ y $\boldsymbol{\gamma}''(s)$ son perpendiculares para todo s. En lo que sigue supondremos que la curva es **birregular**, es decir, $\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\| \neq 0$ para todo s.

- El **vector tangente** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s se define como

$$\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)\,.$$

- La **curvatura** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s será

$$\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|\,.$$

- El **vector normal** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s es

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\boldsymbol{\gamma}''(s)}{\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|} = \frac{\boldsymbol{\gamma}''(s)}{\kappa(s)}\,.$$

- El **vector binormal** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s es

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\,.$$

Los vectores $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ son perpendiculares entre sí y tienen longitud unidad. Forman un triedro (orientado positivamente), llamado el **triedro de Frenet** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s.

El plano definido por los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ y que pasa por el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ se conoce como el **plano osculador** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$. La ecuación de este plano es

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{b}(s) = 0\,.$$

Análogamente, se definen los planos **rectificante** (definido por $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$) y **normal** (definido por $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$). Las respectivas ecuaciones son:

$$\text{(rectificante)}: \quad (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{n}(s) = 0\,; \qquad \text{(normal)}: \quad (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{t}(s) = 0\,.$$

El vector que mide la variación del vector tangente es

$$(1) \qquad \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{n}(s)\,.$$

El vector $\mathbf{b}'(s)$ resulta ser paralelo a $\mathbf{n}(s)$, de manera que

$$(2) \qquad \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)\,,$$

donde la función $\tau(s)$ es la **torsión**[1] de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s. En términos de las derivadas de la curva,

$$\tau(s) = -\frac{(\boldsymbol{\gamma}'(s) \times \boldsymbol{\gamma}''(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'''(s)}{\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|^2}\,.$$

Por último,

$$(3) \qquad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\,\mathbf{t}(s) - \tau(s)\,\mathbf{b}(s)\,.$$

Las identidades (1)–(3) son las llamadas **fórmulas de Frenet**.

B. Curvas con parametrización arbitraria

Escribimos a continuación las fórmulas para todas las cantidades anteriores cuando el parámetro no es (necesariamente) la longitude de arco. Nótese que conviene calcular el triedro de Frenet en el orden $\mathbf{t}(t) \to \mathbf{b}(t) \to \mathbf{n}(t)$:

$$\begin{aligned} \text{curvatura:} \quad \kappa(t) &= \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^3}, \\ \text{torsión:} \quad \tau(t) &= -\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^2}, \end{aligned} \qquad \text{triedro de Frenet}: \begin{cases} \mathbf{t}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}, \\ \mathbf{b}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}, \\ \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t). \end{cases}$$

C. Curvas planas

En el caso de las curvas planas, podemos dar un signo a la curvatura. Digamos que la curva plana $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))\,.$$

Su vector velocidad es $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ y su vector tangente,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\,.$$

Definimos entonces el vector normal como el vector unitario y perpendicular (ángulo de $\pi/2$ *en sentido antihorario*) a $\mathbf{t}(t)$, esto es, como

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\,.$$

La curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$ resulta ser

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}\,,$$

una cantidad con signo (y cuyo módulo coincide, por supuesto, con la curvatura habitual).

[1] En algunos textos se define la torsión de manera que en la fórmula (2) aparece un signo menos.