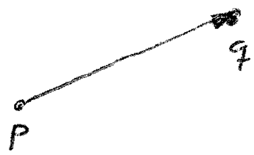
TEMA 4. GEOMETRÍA EUCLÍDEA. MOVIMIENTOS

4.1. ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO. ORTOGONALIDAD DE VARIEDADES LINEALES

Def 4.1.1. Un espacio afín (A, E) se dice que es un <u>espacio afín euclídeo</u> si $(E, <\,,\,>)$ es un espacio euclídeo.

Como ahora tenemos un producto escalar en E podemos medir distancias entre puntos: dados $p, q \in A$

$$d(p,q) = \|\vec{pq}\| = \sqrt{<\vec{pq}, \vec{pq}>}$$



se llama <u>distancia</u> de p a q.

De las propiedades de la norma $\| \ \|$ en un espacio euclídeo se deducen las siguientes propiedades de la distancia: si $p, q, r \in A$

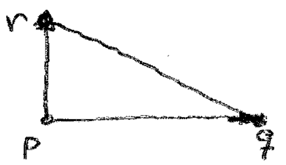
i) $d(p,q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

ii) $d(p,q) = d(q,p)$

iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ (desigualdad triangular)

<u>Teorema de Pitágoras</u> (4.1.2) Sean p, q, r tres puntos de un espacio euclídeo $(A, E, <\,,\,>)$.
Si $<\vec{pq}, \vec{pr}> = 0$ se cumple

$$d(r,q)^2 = d(p,q)^2 + d(p,r)^2$$



D/ $d(r,q)^2 = \|\vec{rq}\|^2 = \|\vec{rp} + \vec{pq}\|^2 = \|\vec{rp}\|^2 + 2<\vec{rp}, \vec{pq}> + \|\vec{pq}\|^2$

$$= \|\vec{rp}\|^2 + \|\vec{pq}\|^2 = d(p,r)^2 + d(p,q)^2. \quad \blacksquare$$

Sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales de un espacio afín euclídeo $(A, E, <\,,\,>)$. L_1 y L_2 se <u>dicen</u> <u>ortogonales</u> si $V_1 \subset V_2^{\perp}$ (esto es $<v_1, v_2> = 0 \ \forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2$).

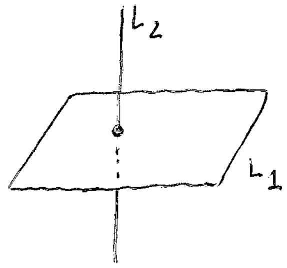
En este caso

$$\dim(V_1) \leq \dim(V_2^{\perp}) = n - \dim(V_2) \Rightarrow \dim(V_1) + \dim(V_2) \leq n.$$

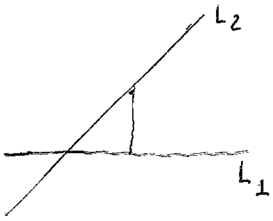
Si $\dim(V_1)+\dim(V_2)>n$, diremos que L_1 es <u>ortogonal</u> a L_2 si $a_1+V_1^{\perp}$ es ortogonal a $a_2+V_2^{\perp}$, es decir $V_1^{\perp}\subset V_2$.

——— x ———

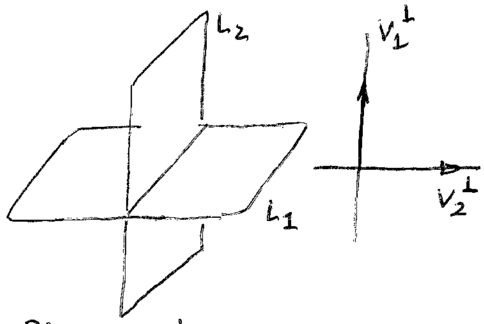
$\mathbb{R}^3$



Plano y recta ortogonales



Rectas ortogonales



Planos ortogonales

——— x ———

<u>EJEMPLO A</u>. Sea $R_c=\{p;\vec{e}_1,\vec{e}_2,e_3\}$ un sistema de referencia ortonormal, es decir, $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ es una base o.n. de $(E,\langle\ ,\ \rangle)$. Sean

$L_1=(0,0,0)+\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$, $L_2=(1,2,3)+\mathcal{L}\{(-1,0,1)\}$

$L_3=(0,0,0)+\mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$

$L_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y-z=1\}$

Prueba que $L_1\perp L_2$, $L_1\perp L_3$ y $L_3\perp L_4$ ($\langle\ ,\ \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$)

S/ i) $\langle(1,1,1),(-1,0,1)\rangle=-1+1=0 \therefore L_1\perp L_2$

ii) $\langle(1,1,1),(1,-1,0)\rangle=1-1=0$ y $\langle(1,1,1),(1,0,-1)\rangle=1-1=0$

$\therefore L_1\perp L_3$

iii) En este caso $\dim(L_3)+\dim(L_4)=4\geqslant 3$. Tenemos que estudiar $V_3^{\perp}$ y $V_4^{\perp}$; $V_3^{\perp}=\mathcal{L}\{(1,+1,1)\}$ y $V_4^{\perp}=\mathcal{L}\{(0,1,-1)\}$

Como $\langle(1,1,1),(0,1,-1)\rangle=1-1=0$, se deduce $L_3\perp L_4$.

——— x ———

4.2. DISTANCIA ENTRE VARIEDADES LINEALES

Def 4.2.1. Sea $(A, E, <,>)$ un espacio afín euclídeo. La distancia de un punto $p \in A$ a un conjunto $S \neq \emptyset$, $S \subset A$, se define como el número real

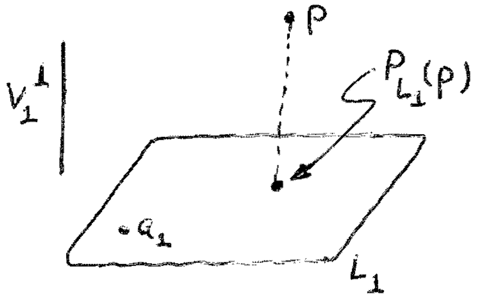
$$d(a, S) = \inf\{d(p,q) : q \in S\}.$$

Si S_1 y S_2 son dos conjuntos no vacíos de A, la distancia entre ellos es el número real

$$d(S_1, S_2) = \inf\{d(p,q) : p \in S_1, b \in S_2\}.$$

Sea $L_1 = a_1 + V_1$ una variedad lineal. Denotaremos por $P_{V_1} : E \to V_1$ a la proyección ortogonal sobre V_1 estudiada en el tema 1.

Como $V_1 \oplus V_1^{\perp} = E$ podemos considerar la proyección sobre L_1 en la dirección de $V_1^{\perp}$ estudiada en la sección 3.10, que llamaremos proyección ortogonal sobre L_1. Recuerda que



$$P_{L_1}(p) = a_1 + P_{V_1}(\overrightarrow{a_1 p})$$

Prop 4.2.2 (Distancia de un punto a una variedad lineal)

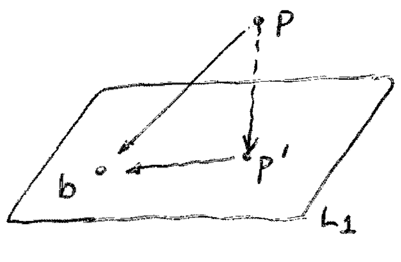
Sea $L_1 = a_1 + V_1$ una variedad lineal de un espacio afín euclídeo $(A, E, <,>)$ y $p \in A$. Se tiene

$$d(p, L_1) = d(p, P_{L_1}(p))$$

y $P_{L_1}(p)$ es el único punto de L_1 que cumple esta igualdad.

D/ Sea $p' = P_{L_1}(p)$. Para cualquier $b \in L_1$, $\overrightarrow{pb} = \overrightarrow{pp'} + \overrightarrow{p'b}$. Como $\overrightarrow{pp'} \in V_1^{\perp}$ y $\overrightarrow{p'b} \in V_1$ se tiene

$$<\overrightarrow{pp'}, \overrightarrow{p'b}> = 0.$$



Por el Teorema de Pitágoras

$$d(p,b)^2 = d(p,p')^2 + d(p',b)^2 > d(p,p')$$

cuando $b \in L_1$ y $b \neq p'$ y sólo se cumple la igualdad si $b = p'$. ∎

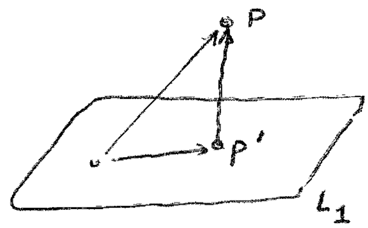
—— x ——

Corolario 4.2.3. Sea $L_1 = a_1 + V_1$ una variedad lineal de un espacio afín euclídeo $(A, E, <,>)$ y $p \in A$. Se tiene

$$d(p, L_1) = \| P_{V_1^\perp}(\vec{ap}) \| \quad , \forall a \in L_1 .$$

D/ Sea $p' = P_{L_1}(p)$. $\forall a \in L_1$; $\vec{ap} = \vec{ap'} + \vec{p'p}$ con $\vec{ap'} \in V_1$ y $\vec{p'p} \in V_1^\perp$. Entonces

$$P_{V_1^\perp}(\vec{ap}) = \vec{p'p}$$



y por la Prop 4.2.2

$$d(p, L_1) = d(p, p') = \| \vec{pp'} \| = \| P_{V_1^\perp}(\vec{ap}) \| .$$ ∎

—— x ——

<u>REPASO</u> (Cálculo de proyecciones ortogonales)

Para calcular $d(a, L_1)$ es necesario calcular $P_{V_1}(\vec{v})$, que se estudió en el Tema 1. Varias formas:

1. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ base de V_1 y $\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ base de $V_1^\perp$. Se escribe

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r + \lambda_{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

y se resuelve el sistema que se obtiene, que es de n ecuaciones y n incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. La solución es

$$P_{V_1}(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$$

2. Se usa el producto escalar de E. Se escribe $P_{V_1}(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ y como $\vec{v} - P_{V_1}(\vec{v}) \in V_1^\perp$ se ha de tener

$<\vec{v}-P_{V_1}(\vec{v}), \vec{u}_1> = 0, \ldots, <\vec{v}-P_{V_1}(\vec{v}), \vec{u}_r> = 0.$ (1)

Este es un sistema de r ecuaciones con r incógnitas, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, cuya solución nos da el resultado.

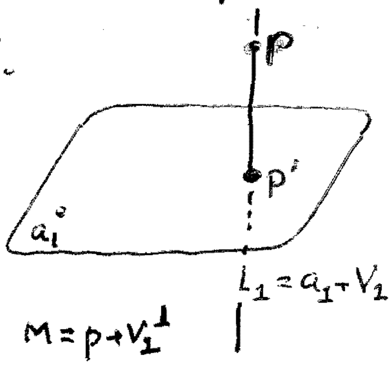
3. Si hemos elegido $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base ortonormal de V_1, el sistema de ecuaciones (1) se simplifica. Sabemos que, en este caso, $\lambda_j = <\vec{v}, \vec{u}_j>$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

NO OLVIDAR QUE LOS VECTORES $\vec{u}_j$ DEBEN TENER NORMA 1

ESTE REPASO NO ES NECESARIO HACERLO SE PUEDE REPASAR AL HACER EJERCICIOS

x

1. $P_{L_1}(p)$ puede calcularse como sigue: sea $M = p + V_1^{\perp}$ la variedad lineal que pasa por el punto p y tiene a $V_1^{\perp}$ como sub. vectorial director. Como $V_1 + V_1^{\perp} = E$ el vector $\vec{pa} \in V_1 + V_1^{\perp}$ y por la Proposición 3.4.1, $M \cap L_1 \neq \emptyset$.
Como $\dim(L_1 \cap M) = \dim(V_1 \cap V_1^{\perp}) = 0$, L y M se cortan en un punto p'. Este punto p' es la proyección de P sobre L_1.



2. Hay casos en los que resulta sencillo calcular las ecuaciones de $M = p + V_1^{\perp}$.

2a) Si $L_1 = a_1 + V_1$ es un hiperplano: su ecuación implícita es de la forma

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = b$$

en un sistema de referencia $R = \{0; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Si R es un s. de r. ortogonal, como $V_1 = \{b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0\}$ el vector $\vec{v} = (b_1, \ldots, b_n)_R$ es ortogonal a cualquier $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)_R$ con $\vec{x} \in V_1$. Entonces $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\{\vec{v}\}$ y $M = p + \mathcal{L}\{\vec{v}\}$.

2b) Si $L_1 = p_1 + V_1$ es una recta: también en un s. de r. ortonormal, si $V_1 = \mathcal{L}\{\vec{v}\}$ con $\vec{v} \in E$, el subespacio $V_1^{\perp}$ es un hiperplano, de ecuaciones

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$$

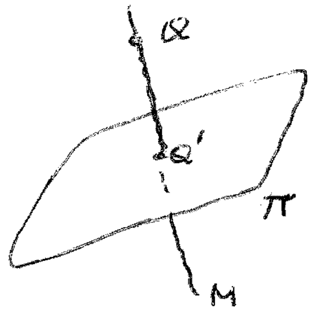
donde $\vec{v} = (b_1, \dots, b_n)_{\mathcal{R}}$. La ecuación implícita de $M = p + V_1^{\perp}$ es

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = b$$

donde $p = b_1p_1 + \dots + b_np_n$ con $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{R}$.

——— x ———

EJEMPLO A. Halla la distancia del punto $Q = (1,0,1)$ al plano $\Pi = \{x + 2y - z = 2\}$ en $\mathbb{R}^3$ (las coordenadas están dadas en el sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual)



S/ Un vector perpendicular a Π es

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

La variedad $M = Q + \mathcal{L}(\vec{v})$ (recta) es

$$(x, y, z) = (1,0,1) + t(1,2,-1)$$

Hallamos $\{Q'\} = \Pi \cap M$:

$$(1+t) + 2(2t) - (1-t) = 2 \iff 6t = 2 \iff t = \frac{1}{3}$$

$$Q' = (1,0,1) + \frac{1}{3}(1,2,-1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

luego

$$d(Q, \Pi) = d(Q, Q') = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

——— x ———

Hay una fórmula sencilla para calcular la distancia de un punto $a = (a_1, .., a_n)_{R_0}$ a un ~~plano~~ hiperplano

$$L_1 = \{ \lambda_1 x_1 + .. + \lambda_n x_n = b \}$$

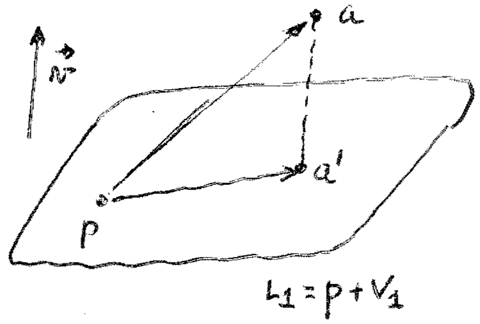
cuando las coordenadas están dadas en un s. de r. ortonormal con respecto al producto escalar dado.

Prop 4.2.4 (Distancia de un punto a un hiperplano)

Si a y L_1 son como en el párrafo anterior

$$d(a, L_1) = \frac{|\lambda_1 a_1 + .. + \lambda_n a_n - b|}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + .. + \lambda_n^2}}.$$

D/ Sabemos que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e_1} + . + \lambda_n \vec{e_n}$ es un vector director de $V_1^{\perp}$. Entonces $\overrightarrow{aa'} = k\vec{v}$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Observa que



$$d(a, L_1) = d(a, a') = \|\overrightarrow{aa'}\| = |k| \, \|\vec{v}\|. \quad (2)$$

Por otro lado $\vec{pa} = \vec{pa'} + \overrightarrow{a'a} = \vec{pa'} - k\vec{v}$ y $\vec{pa'} \perp \vec{v}$. luego

$$<\vec{pa}, \vec{v}> = <\vec{pa'}, \vec{v}> - <k\vec{v}, \vec{v}> = -k \|\vec{v}\|^2.$$

Entonces $k = -\dfrac{<\vec{pa}, \vec{v}>}{\|\vec{v}\|^2}$ y usando (2), $d(a, L_1) = \dfrac{|<\vec{pa}, \vec{v}>|}{\|\vec{v}\|}$

Pero como $p \in L_1$, si $p = (p_1, -, p_n)_{R_0}$, $\lambda_1 p_1 + .. + \lambda_n p_n = b$ y

$$<\vec{ap}, \vec{v}> = \sum_{j=1}^{n} (a_j - p_j)\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_n - \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j =$$

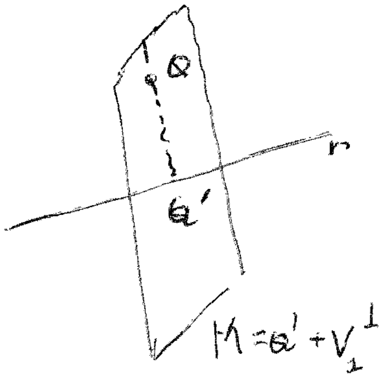
$$= a_1\lambda_1 + .. + a_n \lambda_n - b$$

y $\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + .. + a_n^2}$, lo que prueba el resultado.

EJEMPLO B. El ejemplo B es ahora una línea

$$d(Q, \Pi) = \frac{|1 + 0 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

EJEMPLO C. Dados con respecto al sistema de r. canónico en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, sean $r: (1,1,0)+t(2,0,1)$ una recta y $Q=(1,1,-1)$ un punto. Halla la distancia de Q a r.



S/ La ecuación del plano ortogonal a r que pasa por Q es

$$2x+z=b \quad \text{con} \quad b=2-1=1.$$

Tenemos

$$M = \{2x+z=1\}$$

Hallemos $\{Q'\} = r \cap M$:

$$r: \; x=1+2t, \; y=1, \; z=t$$

$$2(1+2t)+t=1 \iff 5t=-1 \iff t=-\tfrac{1}{5}$$

Luego $Q' = \left(1-\frac{1}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)$

$$d(Q,r) = d(Q,Q') = \|\vec{QQ'}\| = \left\|\left(\tfrac{4}{5}-1, 0, -\tfrac{1}{5}-1\right)\right\| = \left\|\left(-\tfrac{1}{5}, 0, -\tfrac{6}{5}\right)\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{37}}{5}.$$

x

EJEMPLO D. En $\mathbb{R}^4$, halla la distancia del punto $Q=(1,1,-1,1)$ al plano $\Pi = \{x_1-x_2=1, \; x_3+x_4=-2\}$

S/ Las ecuaciones ~~implícitas~~ paramétricas de Π son

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,0,-2,0)+t(1,1,0,0)+s(0,0,-1,1) = p+V_1$$

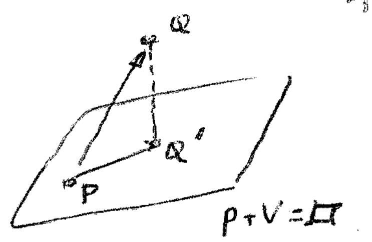
Sean $\vec{u}_1=(1,1,0,0)$ y $\vec{u}_2=(0,0,-1,1)$ y $V=\mathcal{L}\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ el subespacio director de Π.

Podríamos hallar $M = Q+V^{\perp}$, para lo que tenemos que hallar dos vectores l.i. y ortogonales a V. Se tendría entonces $\Pi \cap M = \{Q'\}$ y

$$d(Q,\Pi) = d(Q,Q').$$

Otra forma: Sabemos que $Q' = P_\pi(Q)$

$= p + P_V(\vec{pQ})$ con $p = (1,0,-2,0)$.



Tenemos $P_V(\vec{pQ}) = \vec{PQ'} = \mu_1 \vec{u_1} + \mu_2 \vec{u_2}$

con $\vec{PQ} = \vec{PQ'} + \vec{QQ'}$ y $\vec{QQ'} \perp V$.

Entonces

$$<\vec{PQ}, \vec{u_1}> = <\vec{PQ'}, \vec{u_1}> = \mu_1 \|\vec{u_1}\|^2 + \mu_2 <\vec{u_2}, \vec{u_1}> = 2\mu_1 + 0$$

$$<PQ, \vec{u_2}> = <\vec{PQ'}, \vec{u_2}> = \mu_1 <\vec{u_1}, \vec{u_2}> + \mu_2 <\vec{u_2}, \vec{u_2}> = 0 + 2\mu_2$$

Luego $\mu_1 = \frac{1}{2} <\vec{PQ}, \vec{u_1}> = <(0, 1, 1, 1), (1,1,0,0)> = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\mu_1 = \frac{1}{2}}$

y

$\mu_2 = \frac{1}{2} <PQ, \vec{u_2}> = <(0, 1, 1, 1), (0,0,-1, 1)> = 0. \Rightarrow \boxed{\mu_2 = 0}$

Tenemos

$$Q' = P_\pi(Q) = p + \frac{1}{2}\vec{u_1} \quad = (1,0,-2,0) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -2, 0).$$

Por tanto,

$$d(Q, Q') = \|(\tfrac{3}{2}-1, \tfrac{1}{2}-1, -2+1, -1)\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

——————— x ———————

NOTA: ~~El~~ subespacio $V^\perp$ está generado por $\vec{v_1} = (1,-1,1,1)$ y $\vec{v_2} = (-1,1,1,1)$. Las ecuaciones implícitas de $M = Q + V^\perp$ son $x_1 + x_2 = 2$, $x_4 - x_3 = 2$.

Para hallar $\pi \cap M$ se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\} \text{ cuya solución es } Q' = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, -2, 0)$$

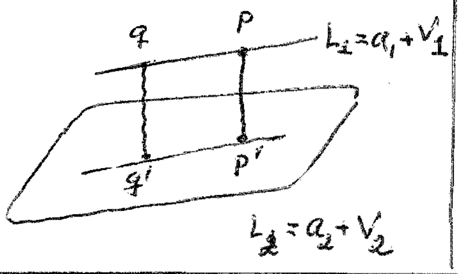
que es el mismo resultado obtenido antes.

——————— x ———————

Prop 4.2.5 (Distancia entre variedades paralelas)

Sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades paralelas en un espacio afín con $V_1 < V_2$.
Entonces,

$$d(L_1, L_2) = d(p, L_2) \quad \forall p \in L_1.$$



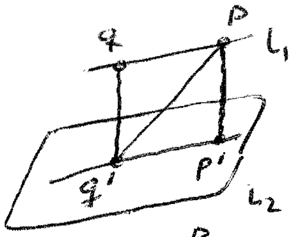
NOTA: La prop 4.2.5 dice que puede usarse cualquier punto de L_1 para calcular $d(L_1, L_2)$ y la distancia de cualquier punto p a L_1 se ha dicho como se calcula en la Prop 4.2.3.

Cuidado: usar L_1 y no L_2 en esta proposición.

D/ Basta probar que si $p, q \in L_1$, $p \neq q$ y $p' = P_{L_2}(p)$, $q' = P_{L_2}(q)$ se tiene

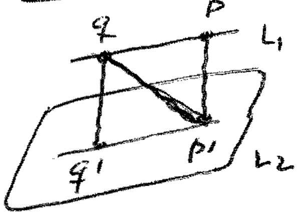
$$d(p, p') = d(q, q')$$

Usando el Teorema de Pitágoras en la figura de la derecha se obtiene



$$d(p,q)^2 + d(q,q')^2 = d(p,q')^2 = d(p,p')^2 + d(p',q')^2$$

Análogamente, con la otra figura se tiene



$$d(p,q)^2 + d(p,p')^2 = d(q,p') = d(q,q')^2 + d(q',p')^2$$

Restando estas igualdades se obtiene

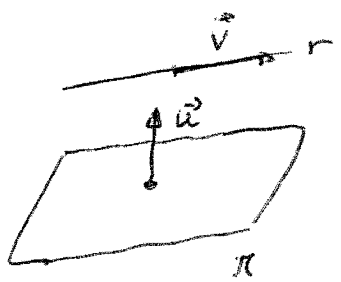
$$d(q,q')^2 - d(p,p')^2 = d(p,p')^2 - d(q,q')^2,$$

de donde se deduce el resultado deseado. ∎

— x —

EJEMPLO E. Halla la distancia en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual entre la recta $r: (1,-1,3)+t(1,-2,1)$ y el plano $\pi = \{2x+y=5\}$

S/



Las variedades son paralelas porque un vector perpendicular a π es $\vec{u}=(2,1,0)$ y un vector director de r es $\vec{v}=(1,-2,1)$ y se tiene $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2-2=0$.

Además, $r \cap \pi = \emptyset$ pq. $p=(1,-1,3) \notin \pi$

Tomar $p=(1,-1,3) \in r$. Por 4.2.5. y 4.2.4

$$d(r,\pi) = d(p,\pi) = \frac{|2\cdot 1 - 1 + 0 - 5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

x

NOTA: Observa que si L_1 y L_2 se cortan ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$) entonces $d(L_1, L_2) = 0$.

x

Vamos a ocuparnos de dar una forma de calcular la distancia entre dos variedades lineales cualesquiera. Necesitamos el siguiente:

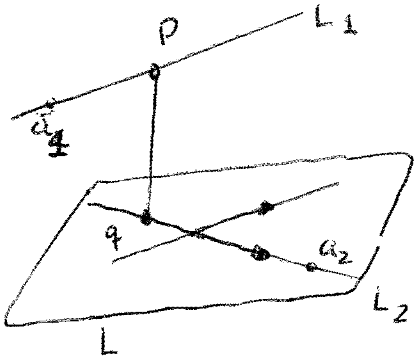
LEMA (4.2.6) Sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales en un espacio afín euclídeo $(A, E, \langle , \rangle)$. Si $L = a_2 + V$ con $V = V_1 + V_2$, exist $p \in L_1$ tal que $q \equiv P_L(p) \in L_2$.

D/ Sea $M = a_2 + V_2 + V^{\perp}$. Como

$V_1 + (V_2 + V^{\perp}) = (V_1+V_2) + (V_1+V_2)^{\perp} = E$,

$\overrightarrow{a_1a_2} \in V_1 + (V_2 + V^{\perp})$ y por la Prop 3.4.1. $L_1 \cap M \neq \emptyset$.

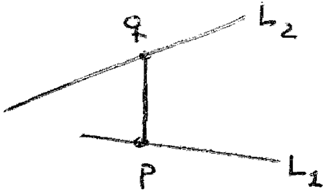
Sea $p \in L_1 \cap M$ y tomar $q \equiv P_L(p)$. Como $p \in M$, tenemos



$p = a_2 + \vec{v_2} + \vec{w}$ con $\vec{v_2} \in V_2$ y $\vec{w} \in V^{\perp}$. Entonces $\overrightarrow{a_2p} = \vec{v_2} + \vec{w}$ y

$q = P_L(p) = a_2 + P_V(\overrightarrow{a_2p}) = a_2 + P_V(\vec{v_2} + \vec{w}) = a_2 + P_V(\vec{v_2}) = a_2 + \vec{v_2} \in L_2$ ya que $\vec{v_2} \in V_2 \subset V_1 + V_2 = V$. ∎

NOTA 1. El vector $\vec{pq}$ del lema anterior satisface $\vec{pq} = -\vec{w} \in V^{\perp} = (V_1 + V_2)^{\perp}$ y es por tanto ortogonal a V_1 y a V_2.



2. Para el caso de dos rectas L_1 y L_2 que se cruzan en $\mathbb{R}^3$, p y q son únicos ya que

$$\dim(L_1 \cap M) = \dim(L_1) + \dim(M) - \dim(L_1 + M) =$$
$$= 1 + 2 - \dim(\mathbb{R}^3) = 0.$$

———— x ————

Teorema 4.2.7 (Distancia entre dos variedades lineales)

Sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales en un espacio afín $(A, E, \langle\,,\,\rangle)$. Sea $V = V_1 + V_2$ y $L = a_2 + V$. Se tiene

a) $d(L_1, L_2) = d(p_1, L) \quad \forall\, p_1 \in L_1$

b) $d(L_1, L_2) = \| P_{V^{\perp}}(\overrightarrow{p_1p_2}) \| \quad \forall\, p_1 \in L_1, \forall\, p_2 \in L_2$

donde $P_{V^{\perp}}$ es la proyección ortogonal sobre $V^{\perp}$.

D/ a) Como $L_2 = a_2 + V_2 \subset a_1 + (V_1 + V_2) = a_1 + V = L$, se tiene que

$$d(L_1, L) \leq d(L_1, L_2).$$

Por el lema 4.2.6, existen $p \in L_1$ y $q \in L_2$ tal que $q = P_L(p)$. Entonces

$$d(L_1, L_2) \leq d(p, q) = d(p, P_L(p)) \overset{\text{Prop } 4.2.2}{=\!=} d(p, L) \leq d(L_1, L).$$

Por tanto $d(L_1, L_2) = d(L_1, L)$. Como $L_1 \parallel L$ con $V_1 \subset V_1 + V_2 = V$, la proposición 4.2.5 termina la prueba de a).

b) Si $p_1 \in L_1$ y $p_2 \in L_2 \subset L$ se tiene

$$d(L_1, L_2) \overset{a)}{=} d(p_1, L) \overset{\text{Cor } 4.2.3}{=\!=\!=} \| P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_2 p_1}) \| = \| P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_1 p_2}) \|,$$

ya que el corolario 4.2.3 es válido para todo punto de L y en particular para $p_2 \in L_2 \subset L$.

EJEMPLO F. Halla la distancia en $\mathbb{R}^4$ entre los planos

$$\Pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{array} \right\} \quad y \quad \Pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

que se cruzan.

S/ Solución 1 (Usamos b) del Teorema 4.2.7)

$$V_1 = \mathcal{L}\{ \vec{u}_1 = (1,0,0,0),\ \vec{u}_2 = (0,1,0,0) \}$$
$$V_2 = \mathcal{L}\{ \vec{v}_1 = (1,1,0,0),\ \vec{v}_2 = (0,0,1,-1) \}.$$

Comprueba que $r(\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{v}_1 | \vec{v}_2) = 3$. Claramente $\vec{v}_1$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ por lo que

$$V = V_1 + V_2 = \mathcal{L}\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2 \}.$$

Un vector $\vec{w} = (a,b,c,d) \in V^\perp$ debe satisfacer $a=0$, $b=0$ $c-d=0$. Tomar $\vec{w} = (0,0,1,1)$. Entonces $V^\perp = \mathcal{L}(\vec{w})$.

Sean $p_1 = (0,0,1,1) \in \Pi_1$ y $p_2 = (0,0,0,0) \in \Pi_2$. Se tiene

$P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_1 p_2}) = \lambda \vec{w}$ con $\overrightarrow{p_1 p_2} - \lambda \vec{w} \perp \vec{w}$ e. d.

$$0 = \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, \vec{w} \rangle - \lambda \| \vec{w} \|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{p_1 p_2}, \vec{w} \rangle}{\| \vec{w} \|^2} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

Por tanto

$$d(\Pi_1, \Pi_2) \overset{b)}{=} \| P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_1 p_2}) \| = |\lambda| \| \vec{w} \| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Solución 2 (Usamos a) del Teorema 4.2.7)

Las ecuaciones implícitas de $L = p_2 + V$ con $p_2 = (0,0,0,0)$ son

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \iff x_4 + x_3 = 0.$$

Por la Prop. 4.2.4 (distancia de un punto a un hiperplano) con $p_1 = (0,0,1,1) \in L_1$

$$d(L_1, L_2) = d(p_1 L) = \frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

———— x ————

Hay varias formas de hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan en $\mathbb{R}^3$

EJEMPLO 6. Halla la distancia en $\mathbb{R}^3$ entre las rectas $r_1 = (1,1,0) + t(2,0,1)$ y $r_2 = (0,0,-2) + s(1,-1,3)$ que se cruzan

Solución 1 (Usando a) del Teorema 2.4.7)

$$V_1 = \mathcal{L}\{\vec{u}_1 = (2,0,1)\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\{\vec{u}_2 = (1,-1,3)\} \implies$$

$$L = (0,0,-2) + V = (0,0,-2) + \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Las ecuaciones implícitas de L son

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 5y - 2z = 4$$

Tomar $p_1 = (1,1,0) \in r_1$. Según a) y la Prop. 4.2.4

$$d(r_1, r_2) = d(p_1, L) = \frac{|1-5+0-4|}{\sqrt{1^2+5^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{30}}.$$

Solución 2 (Usando b) del Teorema 2.4.7)

Con $p_1 = (1,1,0)$ y $p_2 = (0,0,-2)$ la parte b) del Teorema 4.2.7 dice

$$d(r_1, r_2) = \| P_{V^\perp}(\vec{p_1 p_2}) \|$$

Como $V = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tiene dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$, $V^\perp = \mathcal{L}(\vec{n})$.

Si $\vec{w}=(a,b,c)$ se ha de tener $<\vec{w},\vec{u}_1>=0$ y $<\vec{w},\vec{u}_2>=0$,

e.d.

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+c=0 \\ a-b+3c=0 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$a=-\frac{1}{2}c$, $b=\frac{5}{2}c$. Tomar $\vec{w}=(-1,5,2)$.

$P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_1p_2})=\lambda\vec{w}$ con $\overrightarrow{p_1p_2}-\lambda\vec{w}\perp\vec{w}$ e.d. $\lambda=\dfrac{<\overrightarrow{p_1p_2},\vec{w}>}{\|\vec{w}\|^2}$

$$=\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}<(\cancel{+}1,-1,-2),(-1,5,2)>=\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}(1-5-4)=-\frac{8}{\|\vec{w}\|^2}.$$

Por tanto,

$$d(r_1,r_2)=\|P_{V^\perp}(\overrightarrow{p_1p_2})\|=\|\lambda\vec{w}\|=\frac{8}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|=\frac{8}{\|\vec{w}\|}=\frac{8}{\sqrt{30}}.$$

———— x ————