Hoja 2: Espacios vectoriales. Independencia lineal y bases

Utilizaremos la notación $\mathbb{K}$ para indicar un cuerpo cualquiera.

1. Decide si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre los cuerpos especificados:

(a) El conjunto $\mathbb{K}[x]$ de los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, sobre $\mathbb{K}$.

(b) El conjunto $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ de los polinomios de orden menor o igual que n, sobre $\mathbb{K}$.

(c) Los reales $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.

(d) Los complejos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, y sobre $\mathbb{Q}$.

(e) El conjunto de funciones $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función continua}\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(f) El conjunto de funciones $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función derivable}\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(g) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(h) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) : \det(A) = 0\}$ sobre $\mathbb{Q}$.

(i) El conjunto de las sucesiones de Cauchy de números reales, sobre $\mathbb{R}$.

(j) El conjunto de funciones $\{\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, sobre $\mathbb{R}$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Hay una lista *de un solo vector* que es linealmente dependiente ¿cuál es?

(b) Dados $v_1, v_2 \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. La lista v_1, v_2 es linealmente dependiente.
2. Existe un escalar $a \in \mathbb{K}$ tal que $v_2 = av_1$.
3. Existe un escalar $b \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = bv_2$.

3. A continuación se dan dos listas formadas por un espacio vectorial V, varios vectores de V, y un vector más de V separado del resto de la lista por un punto y coma. Se pide:

(a) Determinar si los vectores separados por comas son linealmente independientes o no.

(b) Determinar si el último vector es o no combinación lineal de los otros. Caso de serlo, halla *todas* las combinaciones lineales de los otros que lo dan por resultado.

- $M_2(\mathbb{R})\ ,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$
- $M_2(\mathbb{R})\ ,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$
- $\mathbb{R}[x]\ ,\ x(x-1)\ ,\ x(x-2)\ ,\ (x-1)(x-2)\ ,\ x-1\ ;\ 3+2x^2\ .$

4. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2, -2, 3, 1)$ y $(-1, 4, -6, -2)$.

5. El **rango** de una matriz es el número de peldaños de una de sus matrices escalonadas. El rango de una matriz coincide con el mayor número de vectores columnas (o filas) de la matriz que son linealmente independientes. Para cada una de las siguientes matrices, haz lo que se pide usando el método de Gauss.

a) Halla el rango r de la matriz.

b) Halla una submatriz $r \times r$ que sea invertible.

c) Da una base del espacio columna.

d) Da una base del espacio fila.

e) Halla una base del espacio nulo (por la derecha).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & i-1 & i-2 & 3 & -1 \\ -1+i & -2 & -3-i & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i & -1 \end{bmatrix}.$$

6. a) Demuestra que en el espacio vectorial $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua } \}$ cada una de las siguientes parejas $\{f(t), g(t)\}$ es linealmente independiente: $\{e^t, e^{2t}\}$, $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$, $\{e^t, \log(1+|t|)\}$.

b) Demuestra que en el espacio vectorial $C([0, 2\pi])$ de las funciones continuas con valores reales definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ el conjunto $S = \{\cos nt \ : \ n = 1, 2, \dots\} \cup \{\operatorname{sen} mt \ : \ m = 1, 2, \dots\}$ es linealmente independiente.

7. Sean A una matriz $k \times n$ y B una matriz $n \times p$, con entradas en cualquier cuerpo.

a) Demuestra que las columnas de AB son combinaciones lineales de las de A. Demuestra que las filas de AB son combinaciones lineales de las de B. Deduce que $\operatorname{rango}(AB) \leq \min\big(\operatorname{rango}(A)\,,\ \operatorname{rango}(B)\big)$.

b) Deduce que una matriz **vertical** (con más filas que columnas) jamás tiene inversa por la derecha.

Halla todas las inversas por la izquierda de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Deduce que una matriz **apaisada** (con más columnas que filas) jamás tiene inversa por la izquierda.

Halla todas las inversas por la derecha de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

8.

a) Demostrar que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$:

$$B_1 = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1,0), \mathbf{v}_4 = (0,0,0,1)\},$$

$$B_2 = \{\mathbf{u}_1 = (1,2,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,2,-1), \mathbf{u}_3 = (1,-1,-1,-1), \mathbf{u}_4 = (0,1,1,0)\},$$

b) Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ con respecto a la base B_2.

9. Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{u}_n = \mathbf{e}_n$.

a) Demostrar que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

b) Expresar el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_n$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.