Cálculo Numérico I

CURSO 2020-2021 | Hoja de Problemas 2 | 1º MAT./2º D.G.

1) Se consideran las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 14 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -12 & 3 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar la descomposición $A = LU$ para la matrices A_1 y A_2.

b) Encontrar la descomposición LU con pivotaje $PA = LU$ para la matrices A_3 y A_4.

2) Encontrar la descomposición LU con pivotaje $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{6} & 1 & -\frac{6}{29} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{29}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{6} & -\frac{29}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Encontrar la descomposición LU con pivotaje $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & -4 \\ -2 & -3 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{25}{48} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & 7 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{4} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Calcular la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Demostrar lo siguiente:

a) Una matriz triangular es invertible si y sólo si los elementos en su diagonal son todos distintos de 0.

b) Si A y B son triangulares inferiores entonces también lo es AB.

c) Si A es triangular inferior e invertible entonces también lo es A^{-1}.

d) Lo anterior también es cierto para:

- matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal
- matrices triangulares superiores
- matrices triangulares superiores con 1's en la diagonal

Comentario: suponiendo que ya lo hemos demostrado para las inferiores, hay una "forma rápida" de probarlo para las superiores. ¿Cuál?

6) Probar que si la descomposición LU de una matriz existe entonces es única.

7) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 12+\alpha & 22 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular L y U de la factorización $A = LU$ sin pivoting
2. Si estamos utilizando un sistéma numérico que opera en floating point a 64 bits según el estándard IEEE 754, escribir las representaciones numericas $\hat{L}$ de L y $\hat{U}$ de U cuando $|\alpha| < 2^{-51}$.
3. Calcular en esta última situación el error relativo de la factorización en norma 1:

   $$E = \frac{\|A - \hat{L}\hat{U}\|_1}{\|A\|_1}.$$

   Recordar que la norma 1 de una matriz A es dada por

   $$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right).$$