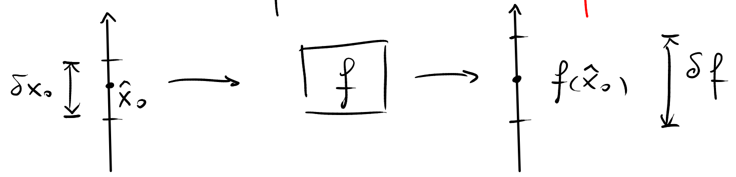
4.3 NÚMERO DE CONDICIÓN DE UNA MATRIZ (condicionamiento numérico)

- para problemas de evaluación de una $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ que se conoce con un error hemos visto que $E_{rel}(f(\hat{x}_0)) \lesssim c(x_0)\, E_{rel}(\hat{x}_0)$ $(*)$
  - utilidad: medida de la propagación del error sobre x_0 debido a f. equivalentemente: medida de la pérdida de precisión con f



si $E_{rel}(\hat{x}_0) = 0.01$ y $\hat{x}_0 = 12.74$ $\Rightarrow$ $\delta x \simeq 0.12$

dígito no significativo

si $c(x_0) = 10$ y $f(\hat{x}_0) = 27.53$ $\Rightarrow$ $\delta f \simeq 10 \cdot 0.01 \cdot 27.53 \simeq 2.7$

dígitos no significativos

  - problema: en general $c(x_0)$ depende de los valores de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, x_0: podría ser necesaria una información adicional sobre x_0 para evaluar $c(x_0)$ $\rightsquigarrow$ ver ej. 1 hoja 1

- para problemas $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ <u>lineales</u> es posible obtener una cota análoga a $(*)$ pero uniforme en x_0 y óptima en el sentido que se pueden encontrar puntos x_0 y perturbaciones δx para los que se tiene el error máximo

def: sea $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x_0, \delta x_0 \in \mathbb{K}^n$

sea $\hat{x}_0 = x_0 + \delta x_0$ y $\delta f = f(\hat{x}_0) - f(x_0)$

y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{K}^n$

decimos $E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}_0) = \dfrac{\|\delta x_0\|}{\|x_0\|}$, $E_{rel_{\|\cdot\|}}(f(\hat{x}_0)) = \dfrac{\|\delta f\|}{\|f(x_0)\|}$

observación: aunque si todas las normas en $\mathbb{K}^n$ son equivalentes, $E_{rel_{\|\cdot\|}}$ en general no es el mismo al cambiar de norma.

def: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible, $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dada por $f(x) = Ax$

y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{K}^n$

decimos $\boxed{K_{\|\cdot\|}(A) = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||}$ NÚMERO DE CONDICIÓN DE A

proposición: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible y $f(x) = Ax$

sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{K}^n$ y sea $\hat{x}_0 = x_0 + \delta x_0$

$$\Rightarrow E_{rel_{\|\cdot\|}}(f(\hat{x}_0)) \leq \underbrace{K_{\|\cdot\|}(A)}_{\text{uniforme en } x_0} E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}_0).$$

demostración:

$A(x_0+\delta x_0) - Ax_0 = A\,\delta x_0$

$$\frac{E_{rel_{\|\cdot\|}}(f(\hat{x}_0))}{E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}_0)} = \frac{\|\delta f\| / \|f(x_0)\|}{\|\delta x_0\| / \|x_0\|} = \frac{\|\delta f\|}{\|\delta x_0\|} \cdot \frac{1}{\frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}}$$

$$= \frac{\|A\,\delta x_0\|}{\|\delta x_0\|} \cdot \frac{1}{\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}} \leq |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \quad \#$$

observación: si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible es simétrica$^{\mathbb{R}}$ / hermítica$^{\mathbb{C}}$: $A = A^*$

$$\Rightarrow K_2(A) = \frac{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}}{\min\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}} = \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}$$

$K_2(A)$: número de condición en norma $\|\cdot\|_2$ (Euclídea)

$\frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}$: notación

¿porqué? por lo visto sobre $|||\cdot|||_2$ sabemos que

$$K_2(A) = \frac{\sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ autovalor de } A^*A\}}}{\sqrt{\min\{\lambda : \lambda \text{ autovalor de } A^*A\}}}$$

pero ahora $A = A^*$: sean $\{v_j\}_{j=1}^n$ BON autovectores de A con autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$

$$\Rightarrow A^*A v_j = A^* \lambda_j v_j = \lambda_j A^* v_j = \lambda_j A v_j = \lambda_j^2 v_j$$

así que $\{v_j\}_{j=1}^n$ son también BON de autovectores de A^*A, con autovalores $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^n$: estos son TODOS los autovalores de A^*A

Ejercicio: terminar el argumento que permite ver que $K_2(A) = \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}$ para $A = A^*$

---

usando esta observación podemos encontrar, para $A = A^*$, un $x_0 \in \mathbb{K}^n$ y una dirección de perturbación $\delta x_0 \in \mathbb{K}^n$ tales que $E_{rel_2}(A\hat{x}_0) = K_2(A)\, E_{rel_2}(\hat{x}_0)$:

- sean v_M, v_m autovectores de A con autovalores λ_M, λ_m
- escojemos $x_0 = v_m$, $\delta x_0 = \varepsilon v_M$ para un $\varepsilon > 0$
- $A\hat{x}_0 - Ax_0 = A\delta x_0 = A\varepsilon v_M = \varepsilon \lambda_M v_M$, $Ax_0 = \lambda_m v_m$

$$\Rightarrow \frac{\|A\hat{x}_0 - Ax_0\|_2}{\|Ax_0\|_2} \cdot \frac{\|x_0\|_2}{\|\hat{x}_0 - x_0\|_2} = \frac{\|\varepsilon \lambda_M v_M\|}{\|\lambda_m v_m\|} \cdot \frac{\|v_m\|}{\|\varepsilon v_M\|} = \varepsilon \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|} .$$

teorema (condicionamiento numérico de los "problemas $Ax = b$")

I. si conocemos A exactamente y x con un error
$\Rightarrow$ el error relativo sobre $\hat{b} = A\hat{x}$ satisface

$$E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{b}) \leq K_{\|\cdot\|}(A)\, E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x})$$

II. si conocemos A exactamente y b con un error
$\Rightarrow$ el error relativo sobre la solución x del sistema $Ax=b$ satisface

$$E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}) \leq K_{\|\cdot\|}(A)\, E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{b})$$

III. si conocemos A con un error y b exactamente
$\Rightarrow$ el error relativo sobre la solución x del sistema $Ax=b$ satisface

$$E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}) \lesssim K_{\|\cdot\|}(A)\, \underline{E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{A})}\ .$$

$\hookrightarrow$ si $\hat{A} = A + \delta A$, por $\delta A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ decimos $E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{A}) = \dfrac{|||\delta A|||}{|||A|||}$

demostración:

I. es la proposición anterior

II. la solución x al sistema $Ax=b$ es $x = A^{-1}b$
$\Rightarrow$ por la proposición anterior $E_{rel_{\|\cdot\|}}(\hat{x}) \leq K_{\|\cdot\|}(A^{-1})\, E_{rel_{\|\cdot\|}}(b)$
pero, por definición, $K_{\|\cdot\|}(A^{-1}) = K_{\|\cdot\|}(A)$

III. si conocemos A con un error δA, solo podemos calcular $\hat{x} = (A+\delta A)^{-1} b = x + \delta x$, con $\underline{x = A^{-1}b}$

$$\Rightarrow \quad \underline{b} = (A+\delta A)(x+\delta x) = \underline{Ax} + \delta A x + A\delta x + \boxed{\delta A \delta x}$$

"pequeño de orden 2"

$$\Rightarrow \quad A\delta x \simeq -\delta A x \quad : \quad \delta x \simeq -A^{-1}\delta A x$$

$$\hookrightarrow \quad \|\delta x\| \lesssim |||A^{-1}|||\, |||\delta A|||\, \|x\| \iff \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \lesssim |||A^{-1}|||\, |||A|||\, \frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \quad \#$$

norma inducida