4. NORMAS DE MATRICES

4.1 NORMAS EN ESPACIOS VECTORIALES

def: sea V espacio vectorial (sobre $\underbrace{\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}}_{\mathbb{K}}$)

una NORMA es una función

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad t.q.$$

positiva I. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad \forall x \in V$

homogénea de grado 1 II. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\quad \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

desigualdad triangular III. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad \forall x, y \in V$.

observación: $\|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \quad \forall x, y \in V$

definición: (normas p) sea $V = \mathbb{K}^n$, $x \in V$

$$1 \leq p < \infty \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

si $p=2$ esta es la norma Euclídea

$$p = \infty \qquad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1..n\}} |x_i|$$

observación: $\forall \; 1 \leq p \leq \infty$ las funciones $\|\cdot\|_p$ cumplen las propiedades I. y II. de las normas.

demostración: ejercicio

↳ para ver que son normas, tenemos que demostrar que cumplen también III. ↓

teorema: sea $V = \mathbb{K}^n$ y sea $1 \leq p \leq \infty$

decimos p' : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \; p' = \frac{p}{p-1} \\ \cdot \; p=1 \Rightarrow p' = \infty, \quad p=2 \Rightarrow p'=2 \end{array} \right.$

desigualdad de Hölder i. $|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_{p'}$

desigualdad triangular ii. $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

para todos $x, y \in V$.

demostración

i. la primera desigualdad es la desigualdad triangular en $\mathbb{K}$:

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i\bar{y}_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i|$$

para la segunda desigualdad:

. los casos $p=1$ y $p=\infty$ son sencillos: $p=1 \Rightarrow p'=\infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\le}\,|y_i| \le \max_{i\in\{1..n\}} |x_i| \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1$$

$\max_i |x_i|$, que no depende de i $\Rightarrow$ sale del sumatorio

. si $\boxed{1<p<\infty}$ llamemos $\xi_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$, $\eta_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}}$ $\rightarrow$

cuidado: esto lo hacemos si $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_p \neq 0$ ¿qué pasa si una de las dos es cero?

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}} \le \frac{\|x\|_p\,\|y\|_{p'}}{\|x\|_p\,\|y\|_{p'}} \iff \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i \le 1$$

observación: para demostrar . podemos suponer que $\xi_i > 0$ y $\eta_i > 0$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ "sin pérdida de generalidad"

si hay $i_0\in\{1..n\}$ t.q. $\xi_{i_0}=0$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i = \sum_{i=1,\, i\neq i_0}^{n} \xi_i\eta_i$$

· en general podría pasar que $\xi_i, \eta_i = 0$

· pero para la prueba da igual

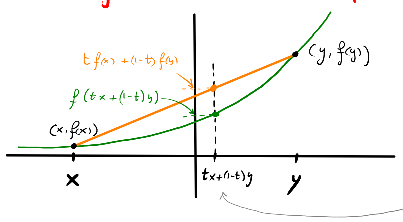
$\Rightarrow$ demostramos $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i \le 1$ para el caso $\xi_i>0$, $\eta_i>0$ $\forall i=1..n$

en este caso podemos definir $a_i = p\log\xi_i$, $b_i = p'\log\eta_i$:

$$\xi_i\eta_i = e^{\frac{a_i}{p}+\frac{b_i}{p'}} = \exp\left(\frac{1}{p}a_i + \frac{1}{p'}b_i\right) \le \frac{1}{p}e^{a_i} + \frac{1}{p'}e^{b_i} = \frac{1}{p}\xi_i^{p} + \frac{1}{p'}\eta_i^{p'}.$$

tenemos $1<p<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, así que si decimos $t=\frac{1}{p}$, entonces $t\in(0,1)$ y $\frac{1}{p'}=1-t$

la función exponencial es convexa



$$f(\underbrace{tx+(1-t)y}) \le \underbrace{tf(x)+(1-t)f(y)} \quad \forall t\in[0,1]$$

abscisa en el intervalo $[x,y]$ ordenada en el segmento $[f(x),f(y)]$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i \le \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{p}}_{=1} + \frac{1}{p'}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{p'}}_{=1} = \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{1}{\|x\|_p^p}\cdot\|x\|_p^p = 1$$

ii. los casos $p=1$ y $p=\infty$ son sencillos:

$$p=1 \qquad \|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{m}\left(|x_i|+|y_i|\right) = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$p=\infty \qquad \|x+y\|_\infty = \max_{i\in\{1..m\}} |x_i+y_i| \leq \max_{i\in\{1..m\}}\left(|x_i|+|y_i|\right)$$

$$\leq \max_{i\in\{1..m\}} |x_i| + \max_{j\in\{1..m\}} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

para $1<p<\infty$ usamos el punto i. (Hölder):

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{m} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |x_i|\, |x_i+y_i|^{p-1}}_{} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |y_i|\, |x_i+y_i|^{p-1}}_{}$$

$\overset{\text{i.}}{\wedge\!\!\wedge}$ $\|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$ como para el otro término

$\overset{\text{i.}}{\wedge\!\!\wedge}$

$$\|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{m}\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}\frac{(p-1)}{(p-1)}} = \|x\|_p\, \|x+y\|_p^{p-1}$$

$p'(p-1)=p$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\|^{\cancel{p}} \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \cancel{\|x+y\|_p^{p-1}} \qquad \#$$

observación: si $p=2$, la desigualdad de Hölder es la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la norma Euclídea:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \iff \left|\sum_{i=1}^{m} x_i \bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^2\right)^{1/2}.$$

también, si $p=2$, la desigualdad $\xi\eta \leq \frac{1}{p}\xi^p + \frac{1}{p'}\eta^{p'}$ $\left(\text{válida } \forall\, \xi,\eta>0 \text{ y } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$

es la usual $\xi^2+\eta^2 \geq 2\xi\eta$.

$$0 \leq (\xi-\eta)^2 = \xi^2+\eta^2-2\xi\eta$$