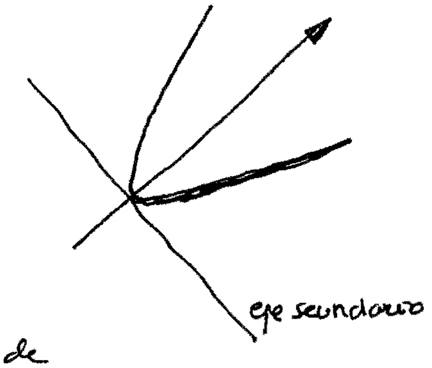
Tambien se puede determinar el vértice y el eje de una parábola sin necesidad de conocer el giro y la traslación que la reducen a su forma canónica.

Supongamos que la ecuación

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

determina una parábola. Sabemos que el eje de la parábola tiene como vector director cualquier autovector con autovalor $\lambda_1 = 0$. Si k_1 es la pendiente de este eje, la pendiente del eje secundario es $-\frac{1}{k_1}$. El eje secundario es tangente a la parábola en el vértice.



Derivando implícitamente en (1) con resp a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0$$

Como $y' = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$ en el vértice se ha de cumplir

$$\frac{1}{k_1} = \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \qquad (2)$$

La ecuación (2) junto con $f(x,y) = 0$ nos permite calcular el vértice.

<u>EJEMPLO C</u>. Determina la forma canónica, el vértice y el eje de la parábola

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$$

S/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta = |A| = 0$ (Tipo parabólico)

Autovalores: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}, \boxed{\lambda_2 = 2}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Forma canónica: $2y_2^2 = +b\, x_2$. Como $|\bar{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -b/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

se tiene $1 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$ (Elegir $b = +\sqrt{2}$ para que salga)

<u>Forma canónica</u> $y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2$

Un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 0$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \ ; \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \text{ pendiente } k_1 = 1$$

Derivando

$$1 = \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = \frac{2x-2y+4}{-2x+2y-6} \Leftrightarrow -2x+2y-6 = 2x-2y+4$$

El sistema

$$\left.\begin{array}{r} 4x-4y+10=0 \\ f(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

nos da el vértice. Como $x = y - \frac{5}{2}$ sustituyendo en $f(x,y)=0$ se obtiene

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(y-\frac{5}{2}\right)y + y^2 + 4\left(y-\frac{5}{2}\right) - 6y + 2 = 0$$

De aquí se deduce

$$y = -\frac{11}{8}, \quad x = -\frac{31}{8}$$

El vértice es el punto $\left(-\frac{31}{8}, -\frac{11}{8}\right) = V$ y el eje pasa por V con pendiente 1, luego su ecuación es

$$y + \frac{11}{8} = 1\left(x + \frac{31}{8}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{5}{2}$$

———— x ————