Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

Solución: $\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$. $\eta(t) = (1, -1) + (t+1)\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$ o $2y = -3x + 1$. No.

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

$$(a)\ \gamma(t) = \big(e^{-t}\,\operatorname{sen} t, e^{-t}\,\cos t\big), \quad t = 2\,\pi. \qquad (b)\ \sigma(t) = \big(e^{-2t}\operatorname{sen}(2\,t), e^{-2t}\,\cos(2\,t), e^{-2t}\big), \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Solución: (a) $\gamma'(t) = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t, -\cos t - \operatorname{sen} t)$, $\quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$, $\quad \gamma''(t) = 2e^{-t}(-\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$\eta(t) = e^{-2\pi}(0, 1) + (t - 2\pi)e^{-2\pi}(1, -1)$ o $y = -x + e^{-2\pi}$.

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4\,s, s^2)$, $0 \le s \le 4$.

(b) $\sigma(u) = \big(e^{-u}\,\cos u, e^{-u}\,\operatorname{sen} u\big)$, $0 \le u < +\infty$.

Solución: (b) $\sqrt{2}$

4.- Hallar la longitud del arco de cicloide descrito por $x = R\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R\,(1 - \cos t)$, con $0 \le t \le 2\pi$.
Solución: (b) $8R$

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.
Solución: $6a$

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3\,t\big) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3\,t\big) & \text{si} \quad \pi \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

Solución: $2\pi\sqrt{10}$

7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t\,\cos t$, $y = t\,\operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, calcúlese la integral $\displaystyle\int_\gamma z\,ds$;

Solución: $\frac{1}{3}\left[(2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$

8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen}\,t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\,ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

Solución: $\sqrt{2}\left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)$

9.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y) \cdot ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en sentido antihorario.

Solución: (a) $\frac{4}{3}$ $\quad$ (b) 0

10.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

Solución: $2a$

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy$, cuando Γ es la curva :

$$(a) \quad x^2 + y^2 = a\,x \qquad\qquad (b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

recorrida en el sentido antihorario.

12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en sentido antihorario.

Solución: 0

13.- Dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (0, -1)$ y $D = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, sea Γ el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, y los segmentos de recta BC, CD, y DA.

Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y \arctan y)\,dy$, con Γ orientada en sentido horario.

Solución: $2 + \dfrac{\pi}{2}$

14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x, y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x, y) = (3\,x^2 y, x^3)$ $\qquad$ (b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos x + x \cos y + y)$

(c) $F(x, y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$ $\qquad$ (d) $F(x, y) = (\operatorname{sen}(x\,y) + x\,y \cos(x\,y), x^2 \cos(x\,y))$.

Solución: (a) $f(x, y) = x^3 y$ (b) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (c) $f(x, y) = x^2 e^y + xy - y^2$ (d) $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy)$.

15.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido antihorario.

Solución: $\dfrac{3}{2}\pi$

16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2\,x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$.

17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en sentido antihorario. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\,dy - 4y\,dx$ en función de A.

Solución: $5A$