TEMA 4. DETERMINANTES

En este tema vamos a asociar a cada matriz cuadrada y a cada endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita un número, que se llamará determinante y servirá para decidir cuando una matriz es invertible y para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

4.1. PERMUTACIONES

Dado un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con n elementos, una permutación de A es una aplicación biyectiva $\sigma : A \to A$

De las propiedades conocidas sobre la composición de aplicaciones se deducen las siguientes propiedades de las permutaciones:

- La composición de dos permutaciones es otra permutación

1) Asociativa: si σ, ρ, τ son permutaciones

$$\sigma \circ (\rho \circ \tau) = (\sigma \circ \rho) \circ \tau$$

2) Existe una permutación $I : A \to A$ tal que $\sigma \circ I = \sigma = I \circ \sigma$ para toda permutación σ: I es la permutación identidad, $I(a) = a \quad \forall a \in A$

3) Para toda permutación σ existe una permutación σ^{-1} tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = I = \sigma^{-1} \circ \sigma$: la permutación σ^{-1} es la inversa de σ.

Llamemos $S(A)$ al conjunto de todas las permutaciones del conjunto A. Como la composición en $S(A)$ cumple las propiedades anteriores, se dice que $(S(A), \circ)$ es un grupo.

Para simplificar la notación, tomaremos $A=\{1,2,\dots,n\}$ y escribiremos S_n en lugar de $S(A)$. Un elemento $\sigma\in S_n$ queda determinado si se conocen las imágenes de los elementos $1,2,\dots,n$, y puede escribirse de la forma

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

En ocasiones, la composición $\sigma\circ\rho$ de $\rho,\sigma\in S_n$ se escribirá $\sigma\rho$ sin escribir $\circ$.

Ej 1.1. Escribe todos los elementos del grupo S_2

S/ $\quad I=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

Ej 1.2. Escribe todos los elementos del grupo S_3

S/

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \sigma'=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \rho'=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix},\quad \rho''=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}.$$

NOTA: El conjunto S_n tiene $n!$ elementos. En efecto, $\sigma(1)$ puede tomar cualquiera de los n números $1,2,\dots,n$. Fijado $\sigma(1)$ solo quedan $(n-1)$ números para $\sigma(2)$. Fijados $\sigma(1)$ y $\sigma(2)$ solo quedan $(n-2)$ números para $\sigma(3)$. Por tanto $|S_n|=$ $=n(n-1)(n-2)\times\dots\times 2\times 1=n!$.

Ej 1.3. Prueba que para $n\geq 3$, S_n no es conmutativo

8/ Para $n=3$ tomas $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ y $\rho=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. Tenemos

$$\sigma\rho=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad y$$

$$\rho\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\neq\sigma\rho.$$

Para $n>3$ considerar

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n\\3&2&1&4&\dots&n\end{pmatrix}, \quad \rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n\\1&3&2&4&\dots&n\end{pmatrix}$$

y comprobar que $\sigma\rho\neq\rho\sigma$.

La notación que hemos usado es redundante puesto que la fila superior se repite siempre. Expondremos una nueva notación, que llamaremos <u>CÍCLICA</u>. Comencemos con un ejemplo. Sea

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&2&7&5&1&8&6&3\end{pmatrix}\in S_8$$

Escribimos las imágenes sucesivas de 1 en una fila hasta que volvamos al 1: $\sigma_1=(1\,4\,5)$.

Elegimos ahora el menor número que no esté en σ_1 y repetimos el procedimiento: $\sigma_2=(2)$.

Repetimos el procedimiento con el menor elemento que no esté ni en σ_1 ni en σ_2: $\sigma_3=(3\;7\;6\;8)$.

Se tiene que $\sigma=\sigma_3\circ\sigma_2\circ\sigma_1$:

$$\sigma_3\circ\sigma_2\circ\sigma_1=(3\,7\,6\,8)(2)(1\,4\,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&2&7&5&1&8&6&3\end{pmatrix}=\sigma$$

Cada una de las permutaciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ se llama un <u>ciclo</u> y $\sigma_3\circ\sigma_2\circ\sigma_1$ se dice que es la descomposición cíclica de σ.

Ej 1.4. a) Escribe $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ en notación cíclica

b) Sean $\sigma_1 = (1\,3\,5)$ y $\sigma_2 = (3\,5\,6)$ dos ciclos de S_6. Calcula $\sigma_2 \circ \sigma_1$ y $\sigma_1 \circ \sigma_2$ expresando el resultado en notación cíclica. ¿Son iguales?

S/ a) $\sigma = (1\,3\,4\,2)\,(5\,6)$

b) $\sigma_2 \circ \sigma_1 = (3\,5\,6)(1\,3\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (3\,6)(1\,5)$

$\sigma_1 \circ \sigma_2 = (1\,3\,5)(3\,5\,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5\,6)(1\,3)$

No son iguales.

NOTA: Los dos ciclos del Ej 1.4. b) no son disjuntos, es decir tienen elementos en común; a saber, 3 y 5. Puede probarse que si dos ciclos σ_1 y σ_2 son disjuntos, $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. En particular en las descomposiciones del Ej 1.4 b), $(3\,6)(1\,5) = (1\,5)(3\,6)$ y $(5\,6)(1\,3) = (1\,3)(5\,6)$

El procedimiento descrito para obtener la notación cíclica de una permutación puede formalizarse para obtener el resultado siguiente.

Proposición 1.1

Toda permutación $\sigma \in S_n$ puede descomponerse en ciclos disjuntos de manera única, salvo el orden de los ciclos y su primer elemento.

Los ciclos con dos elementos se llaman <u>trasposiciones</u>.

Si $(i,j) \in S_n$ es una trasposición, $(i,j)(i,j) = I = (j,i)(j,i)$.

Proposición 1.2

Todo ciclo puede escribirse como un producto de trasposiciones.

D/ $$(a_1 a_2 \dots a_m) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)\dots(a_{m-1} a_m). \quad \blacksquare$$

Ej 1.5. Escribe las permutaciones $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ y $\rho = (3\,4\,5)(1\,5\,2\,4) \in S_5$ como producto de trasposiciones. ¿Son únicas las descomposiciones?

S/ $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\,3\,4\,2)(5\,6) =$$
$$= (1\,3)(3\,4)(4,2)(5,6)$$

$$\rho = (3\,4\,5)(1\,5\,2\,4) = (3\,4)(4\,5)(1\,5)(5\,2)(2\,4)$$

y también
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,4)(2\,5) = (1\,3)(3\,4)(2\,5),$$
por lo que la descomposición de ρ en trasposiciones <u>no</u> es única.

NOTA: Observa que $I = (1\,2)(2\,1) = (1\,2)(2\,1)(3\,4)(4\,3)$, lo que muestra que la descomposición en trasposiciones no es única. En lo que sigue probaremos que el número de trasposiciones en tales descomposiciones tiene ~~la~~ misma paridad.

Proposición 1.3.

> La permutación identidad no se puede descomponer como producto de un numero impar de trasposiciones

D/ Sea $P := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$, que es un número positivo. Si $\sigma \in S_n$ escribimos $\sigma P := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))$. Consideremos la trasposición $\rho = (h, k)$ con $h < k$. ¿ Cuanto vale ρP ?

- Si i, j son diferentes de h, k, $\sigma(j) - \sigma(i) = j - i$
- Si $i < h < k$, el factor $h - i$ se cambia por $k - i$ en ρP y el factor $k - i$ se cambia por $h - i$ en ρP. Por tanto, solo hay un cambio en la posición de los factores
- Si $h < k < j$, el factor $j - h$ se cambia por $j - k$ en ρP y el factor $j - k$ se cambia por $j - h$ en ρP. Por tanto, solo hay un cambio en la posición de los factores
- Si $h < i < k$, el factor $i - h$ se cambia por $i - k$ en ρP (negativo) y el factor $k - i$ se cambia por $h - i$ en ρP (negativo). Como hay dos cambios de signo, el producto se queda igual.
- Si $i = h < k = j$, el factor $j - i = k - h$ pasa a ser $h - k = i - j$ (negativo) en ρP. Aquí hay un cambio de signo en el producto.

Por tanto,

$$\rho P = -P \quad (\rho \text{ trasposición}) \qquad (1.1)$$

Supongamos que $I = \rho_n \circ \cdots \circ \rho_2 \circ \rho_1$ se escribe como producto de trasposiciones. El objetivo es probar que n es par.

De (1.1) obtenemos $\rho_n \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1 P = (-1)^n P$. Como $I = \rho_n \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1$, también se tiene $\rho_n \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1 P = IP = P$. Por tanto $(-1)^n P = P$. Como $P > 0$, n ha de ser par. ■

Teorema 1.4

> Si $\sigma = \rho_p \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \tau_q \circ .. \circ \tau_2 \circ \tau_1$ son dos descomposiciones de $\sigma \in S_n$ como composición de trasposiciones, p y q tienen la misma paridad.

D/ Tenemos $\rho_p \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \tau_q \circ .. \circ \tau_2 \circ \tau_1$. Componiendo por la derecha con τ_1 y observando que $\tau_1 \circ \tau_1 = I$ se tiene $\rho_p \circ .. \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \tau_1 = \tau_q \circ .. \circ \tau_2$. Si componemos sucesivamente por la derecha con $\tau_2, .., \tau_q$ se tendrá

$$\rho_p \circ .. \circ \rho_1 \circ \tau_1 \circ .. \circ \tau_q = I$$

Por la proposición 1.3, $p+q$ debe ser par; por tanto p y q tienen la misma paridad. ■

Si $\sigma \in S_n$, el teorema 1.4 permite definir el SIGNO de σ mediante $sig(\sigma) = (-1)^m$, donde m es el nº de transposiciones en que hemos descompuesto σ. Este número está bien definido porque no depende del número de trasposiciones en que se descomponga σ.

Si $sig(\sigma)=1$ decimos que $\sigma\in S_n$ es una permutación <u>PAR</u> y si $sig(\sigma)=-1$, decimos que σ es <u>IMPAR</u>.

El signo se puede considerar como una aplicación $sig: S_n \to \{1,-1\}$. Tiene las siguientes propiedades:

a) $sig(I)=1$ pq I se descompone en un nº par de trasposiciones

b) Si $\sigma=(a_1,\dots,a_m)$ es un ciclo, $sig(\sigma)=m-1$ pq.

$(a_1,\dots,a_m)=(a_1\,a_2)(a_2\,a_3)\cdots(a_{m-1}\,a_m)$.

c) Si $\sigma,\rho\in S_n$, $sig(\rho\circ\sigma)=sig(\rho)\cdot sig(\sigma)$ pq. si ρ se ha escrito como producto de p trasposiciones y σ como producto de q trasposiciones, $\rho\circ\sigma$ se escribe como producto de $p+q$ trasposiciones y se tiene

$$sig(\rho\circ\sigma)=(-1)^{p+q}=(-1)^p(-1)^q=sig(\rho)\cdot sig(\sigma).$$

Ej 1.6. Halla el signo de todas las permutaciones de S_3

S/ $S_3=\{I,(12),(13),(23),(123),(132)\}$.

Se tiene

$sig(I)=sig(123)=sig(132)=1$

$sig(12)=sig(13)=sig(23)=-1$.

NOTA: Si $\sigma=\rho_n\circ\dots\circ\rho_1$ (producto de trasposiciones), $\sigma^{-1}=\rho_1\circ\dots\circ\rho_n$ y por tanto $sig(\sigma^{-1})=(-1)^n=sig(\sigma)$
