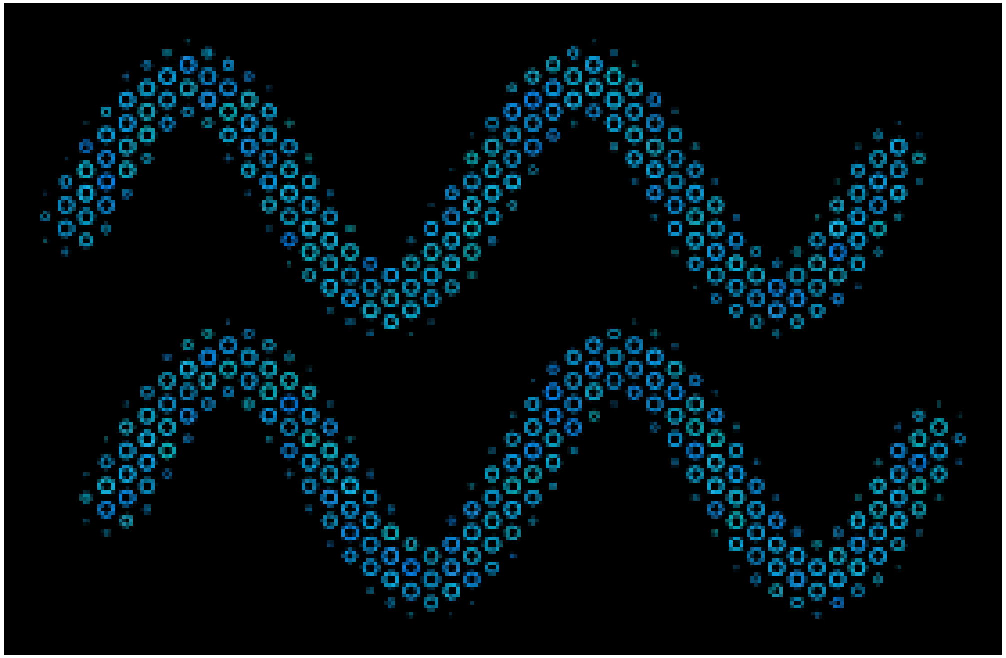
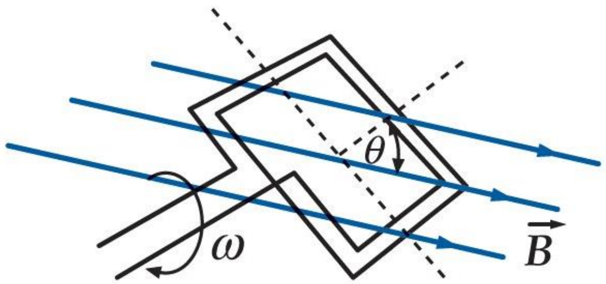
Circuitos de corriente alterna (AC)



Recordamos:
Producir Corriente alterna (AC) es relativamente facil



Fundamento:

- **F.e.m. inducida** en una espira que gira en campo B estático:

- Tensión **alterna (AC)** inducida.

$$\Phi_m = N B S \cos \omega t$$

$$\boxed{\epsilon = \omega N B S \sin \omega t}$$

$$\boxed{V(t) = V_0 \sin \omega t}$$

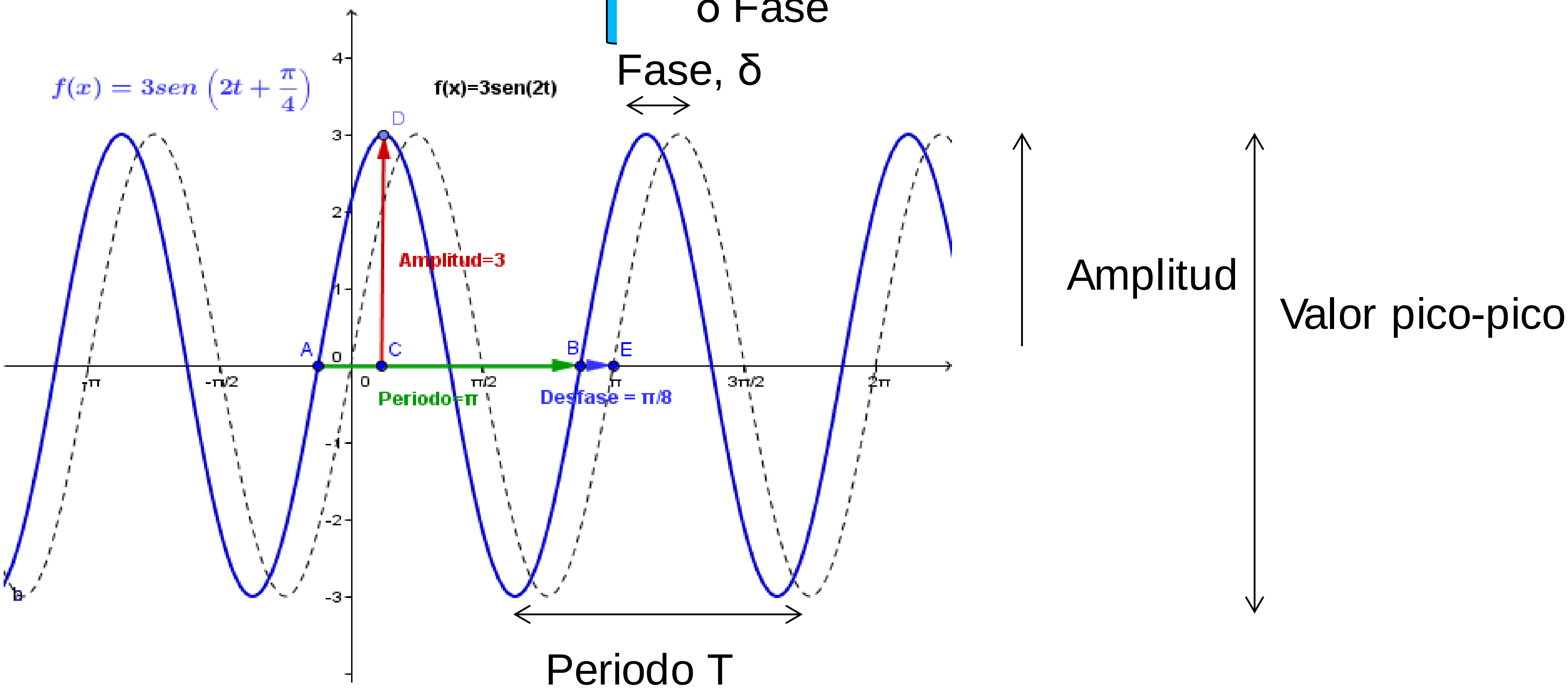
V en Alterna (AC)
ONDA SINUSOIDAL

Onda sinusoidal (AC)

$X(t)=X_o \operatorname{sen}(\omega t+\delta)$

$X(t)=X_o \cos(\omega t+\delta)$

- X_o Amplitud
- $\omega=2\pi/T$ Frecuencia angular
- Frecuencia $f=1/T$
- δ Fase



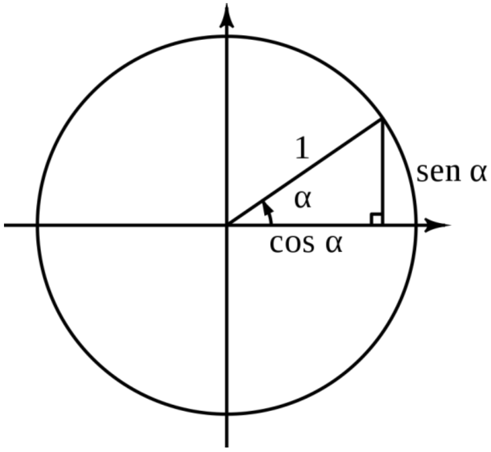
→ la mayoría de los dispositivos funcionan con corriente alterna,

→ En Europa, ω= (2π rd50Hz)= 100 π rd/s, V_0 = 220 V

→ En E.E.U.U. ω= (2π rd60Hz)= 120 π rd/s, V_0 = 110 V

Recordatorio relaciones trigonométricas

Son más sencillas de probar en la circunferencia trigonométrica o goniométrica (que tiene radio igual a 1):



$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha + 2\pi)$

$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi)$

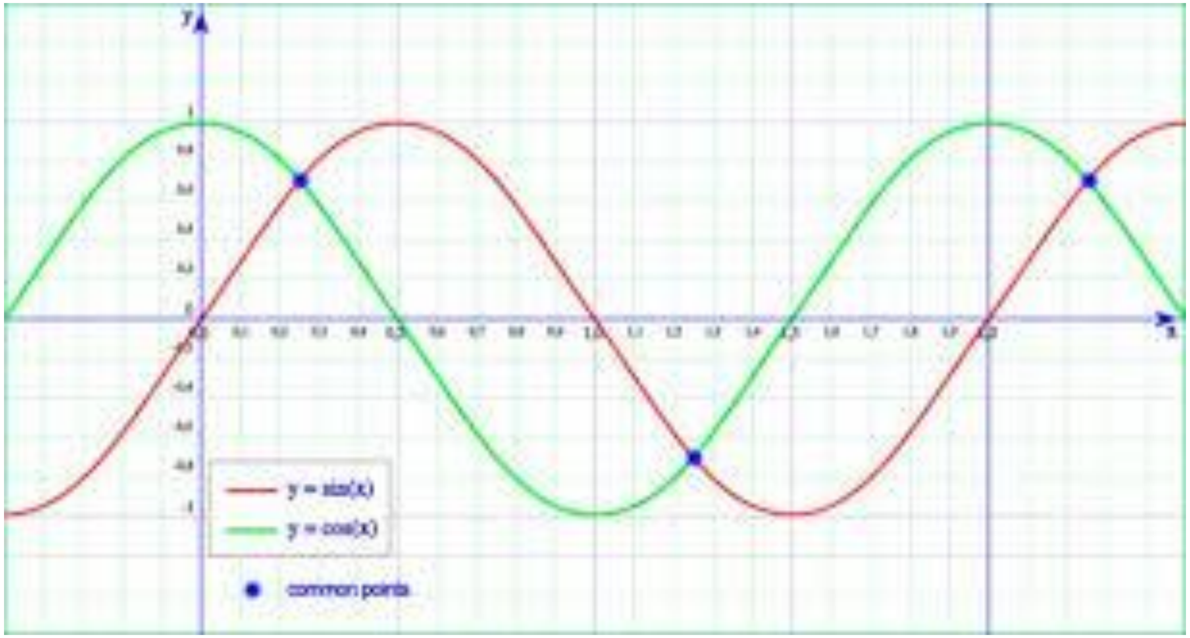
$\text{sen}\ (-\alpha) = \text{sen}\ (\alpha + \pi)$

$\cos (-\alpha) = - \cos (\alpha + \pi)$

$\text{sen}\ \alpha = \cos ((\pi/2) - \alpha)$

$\cos \alpha = \text{sen}\ ((\pi/2) - \alpha)$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



Onda sinusoidal (AC)

$X(t)=X_o\,\text{sen}\,(\omega t+\delta)$

$X(t)=X_o\cos\,(\omega t+\delta)$

X_o Amplitud

$\omega=2\pi/T$ Frecuencia angular

Frecuencia $f=1/T$

δ Fase

Valor eficaz, (valor cuadrático medio, RMS)

La definición de valor eficaz para cualquier función dependiente del tiempo es:

$$V_{eff}=\sqrt{\langle V^2\rangle} \qquad I_{eff}=\sqrt{\langle I^2\rangle}$$

El valor eficaz de una onda sinusoidal es:

$$V_{eff}={}^{V_0}\!/_{\sqrt{2}} \qquad I_{eff}={}^{I_0}\!/_{\sqrt{2}}$$

Definición: **Valor eficaz** I_{eff} de una corriente alterna $I(t)$: aquella *corriente continua* (DC) que disipa en una resistencia R **la misma potencia** que $I(t)$ **en promedio**.

Vamos a estudiar como responden los tres elementos por separado a un voltaje (o f.e.m. $\mathcal{E}$) sinusoidal (AC)

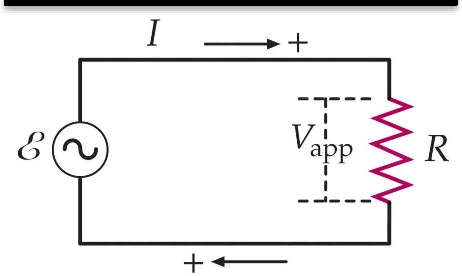
$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

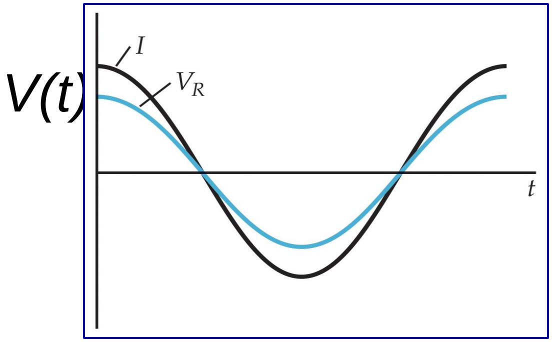
R
C
L

$$\boxed{I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)}$$

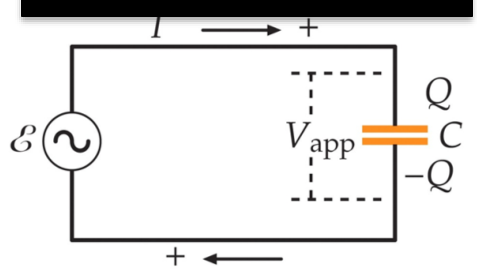
Problema: determinar
- Amplitud I_0
- Desfase δ

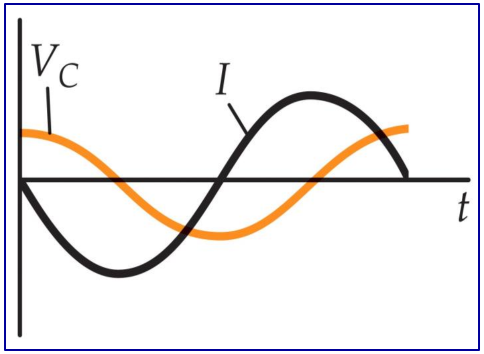
Resistencia *R*



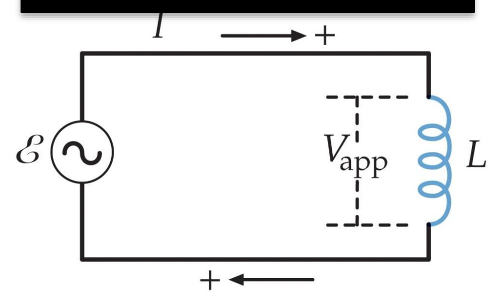


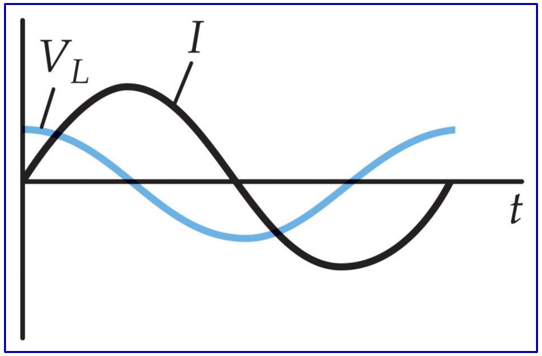
Condensador *C*





Inductancia L

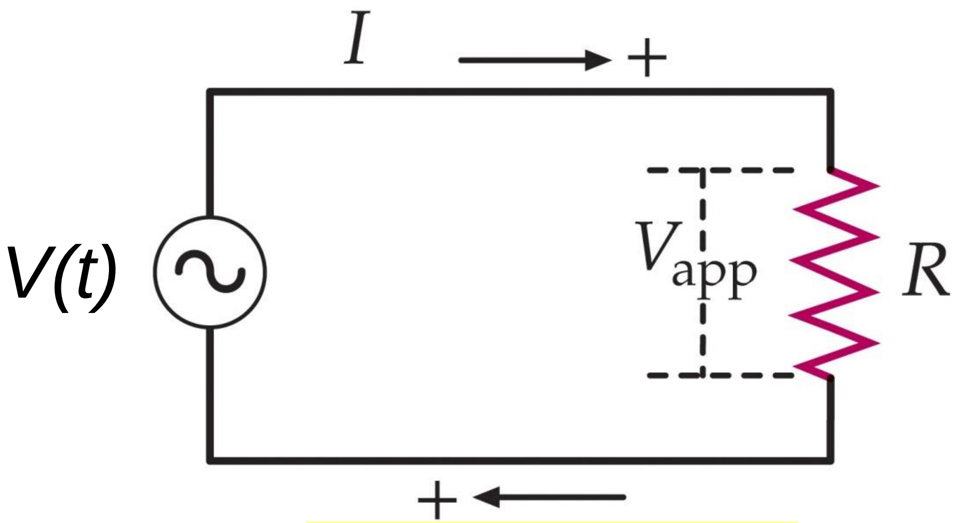




Comportamiento de una resistencia *R* en corriente alterna.

Resistencia *R* en corriente alterna

- Circuito con resistencia *R* y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω. Queremos calcular *I(t)*:



$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

- Ley de Kirchhoff:

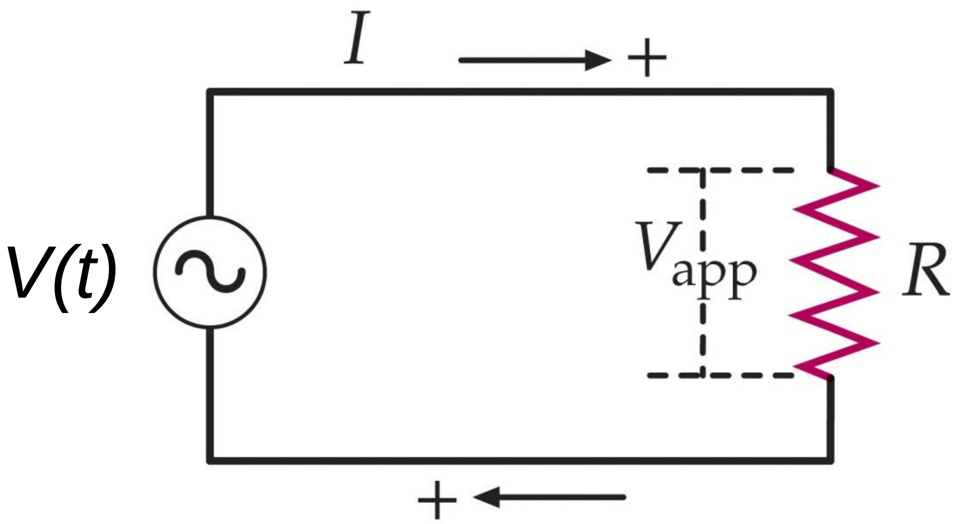
$$V(t)-V_R=0$$

con $V_R = IR$

$$\rightarrow I(t) = \frac{V(t)}{R} \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t}$$

Resistencia *R* en corriente alterna

• Circuito con resistencia *R* y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω:



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

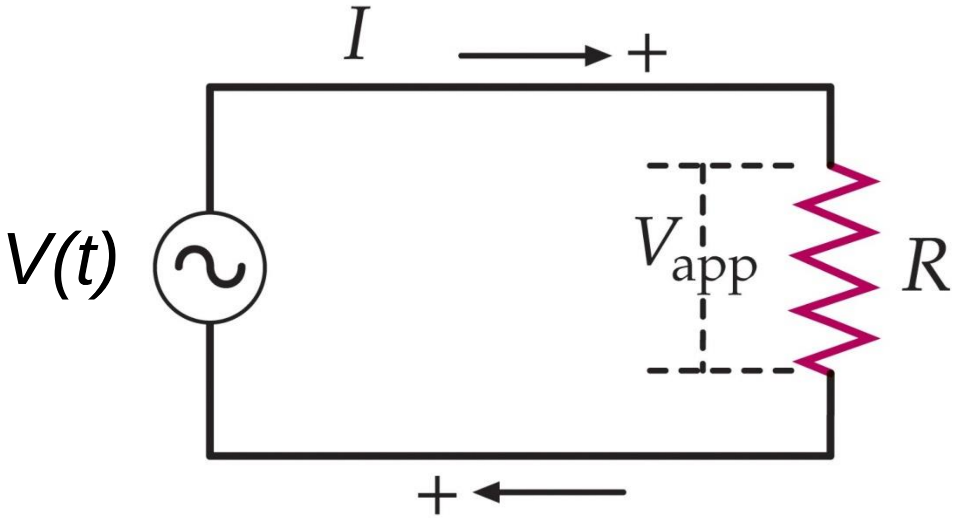
$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

→ En una resistencia *R* en AC: la corriente *I(t)* está **en fase** con la tensión *V(t)* (diferencia de fase = 0)

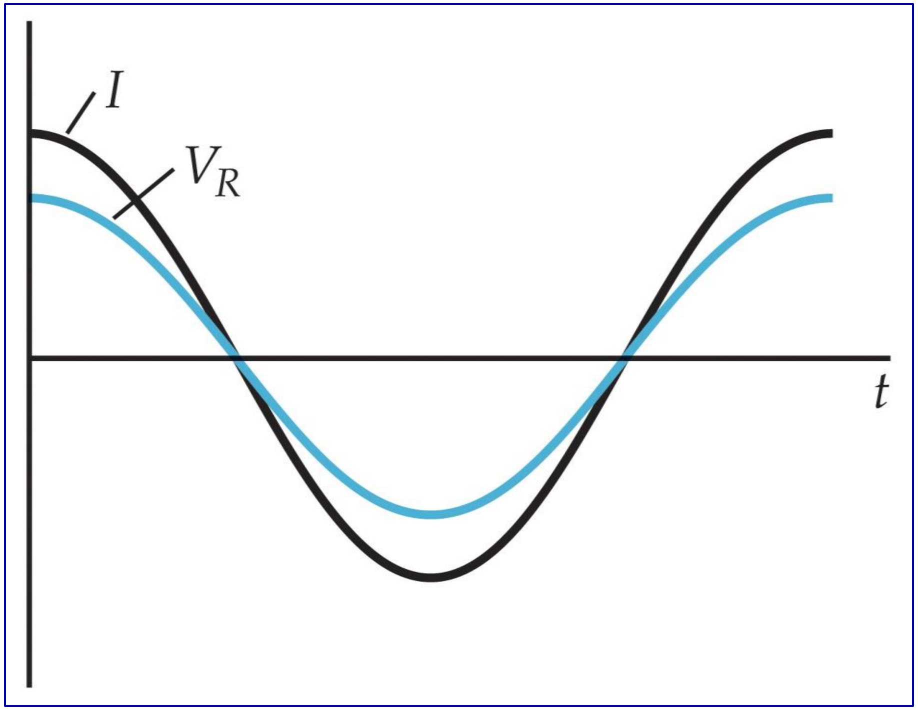
Resistencia *R* en corriente alterna

→ En una resistencia *R* en AC: la corriente *I(t)* está **en fase** con la tensión *V(t)* (diferencia de fase = 0)



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

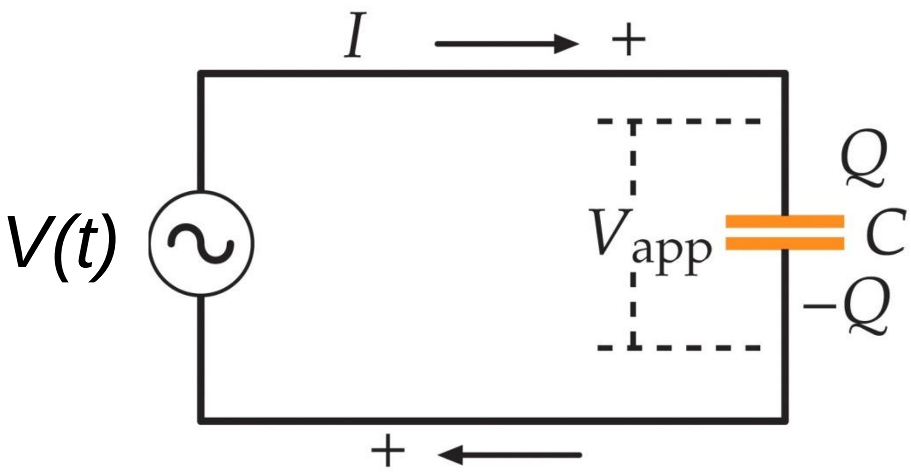
$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$



Comportamiento de un condensador *C* en corriente alterna.

Condensador C en corriente alterna

- Circuito con y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω. Queremos calcular $I(t)$:



$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

- Ley de Kirchhoff:

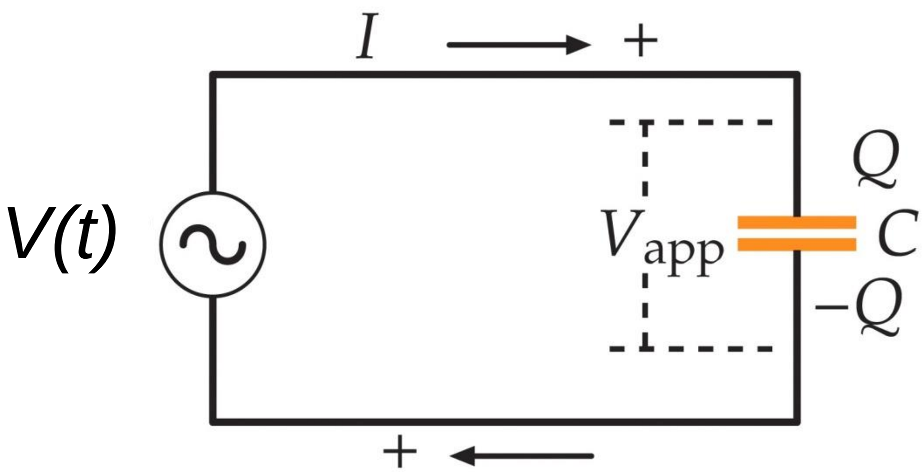
$$V(t) - V_C = 0$$

con $V_C = \dfrac{Q}{C}$ $\qquad V(t) = Q/C \qquad I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$

$$\rightarrow \boxed{I(t) = C\frac{dV(t)}{dt} = -\omega C V_0 \sin \omega t}$$

Condensador C en corriente alterna

• Circuito con capacitancia *C* y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω:



$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$

$$I(t) = -I_0 \sin\omega t$$

$$I_0 = V_0\,\omega C$$

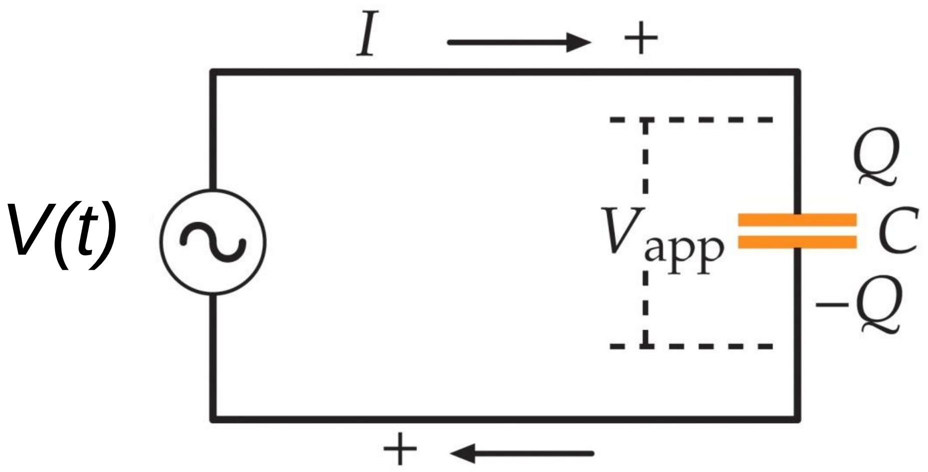
$$X_C \equiv \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

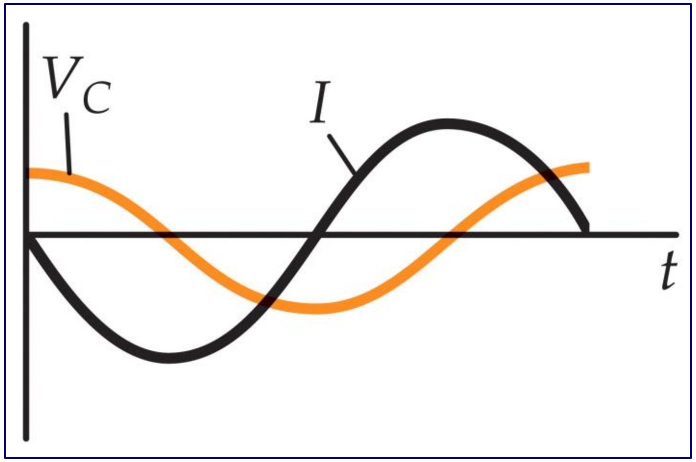
Reactancia capacitiva X_C:
Análogo a "resistencia":
Relación entre *amplitudes* V_0 e I_0, pero ¡**ojo**! :

En un condensador *C* en AC: la corriente *I(t)* va 90º ($\pi/2$) **por delante en la fase** respecto a la tensión *V(t)* (desfase: $-\pi/2$)

Condensador C en corriente alterna

→ En un condensador C en AC: la corriente ***I(t)*** va 90º (π/2) **por delante en la fase** respecto a la tensión ***V_C(t)*** (desfase: -π/2)





$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = -\omega C V_0 \sin \omega t$$

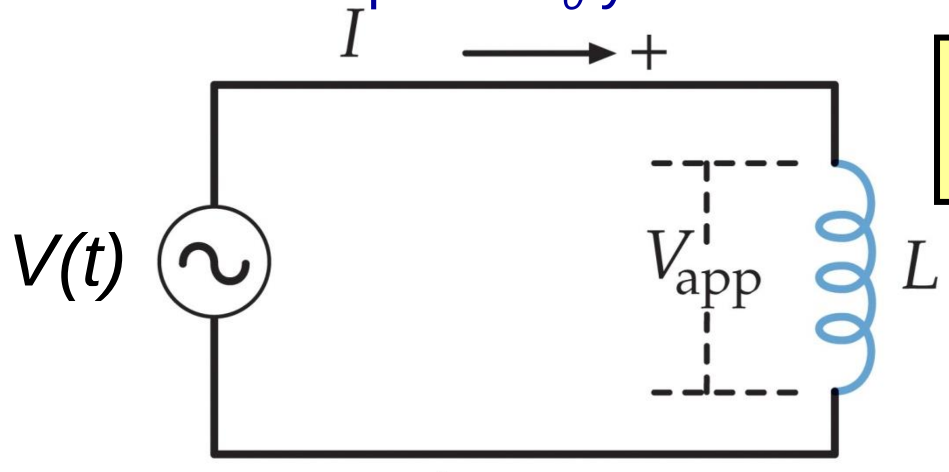
$$I(t) = \frac{V_0}{\chi_C} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$X_C \equiv \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

Comportamiento de una autoinductancia *L* en corriente alterna.

Autoinductancia L en corriente alterna

• Circuito con autoinductancia L y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω. Queremos calcular $I(t)$:



$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t}$$

• Ley de Kirchhoff:

$$V(t) - V_L = 0$$

con $V_L = -L \dfrac{dI}{dt}$, $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{V(t)}{L}$

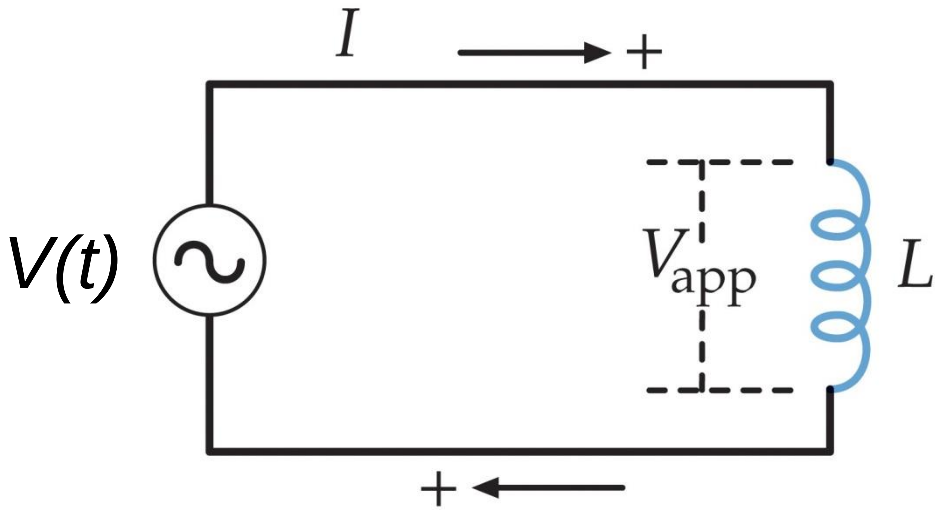
$$\rightarrow \boxed{I(t) = \frac{1}{L} \int V(t)\,dt = \frac{1}{\omega L} V_0 \sin \omega t}$$

Autoinductancia L en corriente alterna

• Circuito con autoinductancia L y una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 y frecuencia ω:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$



$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

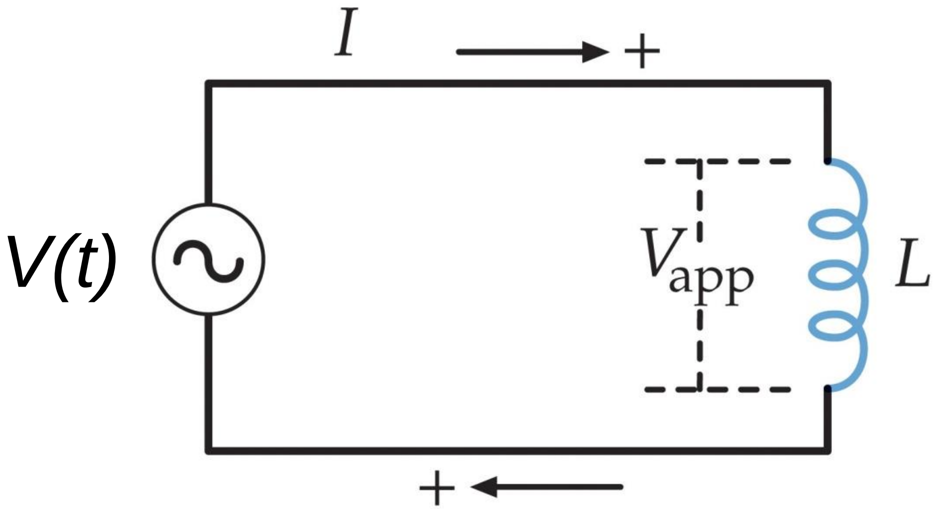
$$X_L \equiv \frac{V_0}{I_0} = \omega L$$

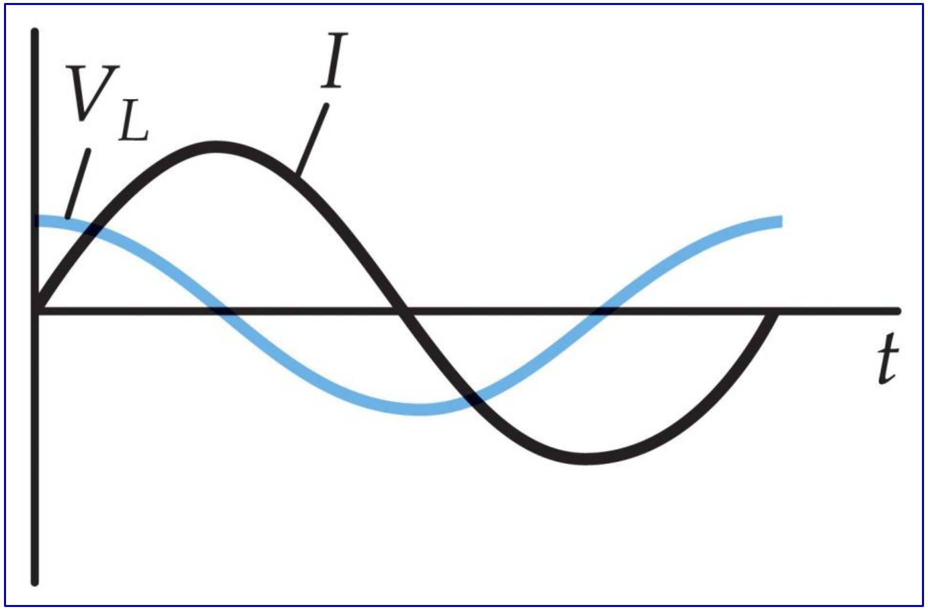
Reactancia inductiva X_L:
Análogo a la "resistencia":
Relación entre *amplitudes* V_0 e I_0, pero ¡**ojo**! :

En una autoinductancia L en AC: la corriente $I(t)$ va 90º ($\pi/2$) **por detrás en la fase** respecto a la tensión $V(t)$ (desfase: + $\pi/2$)

Autoinductancia *L* en corriente alterna

→ En una autoinductancia *L* en AC: la corriente ***I(t)*** va 90º ($\pi/2$) **por detrás en la fase** respecto a la tensión ***$V_L(t)$*** (desfase: + $\pi/2$)





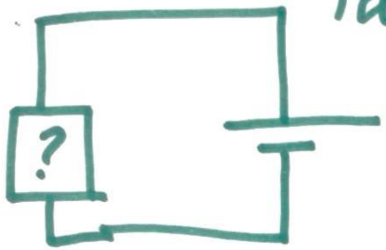
$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = \frac{1}{\omega L} V_0 \sin \omega t$$

$$I(t) = \frac{V_0}{\chi_L} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Resumen: Elementos *R*, *C*, *L* en AC

Para un elemento en A.C.



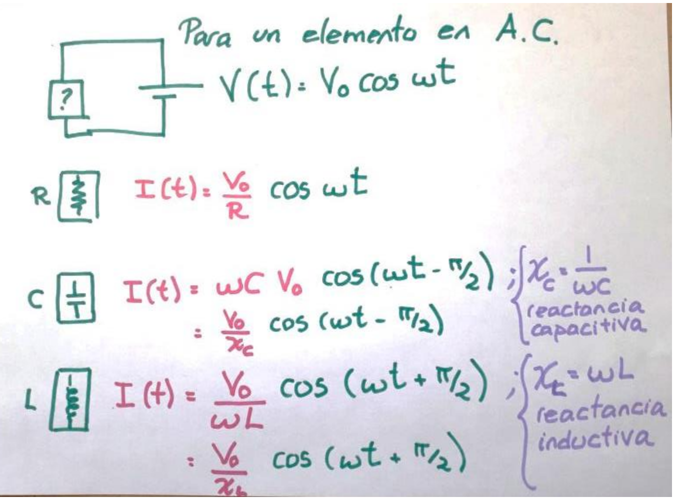
$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

R $\quad I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$

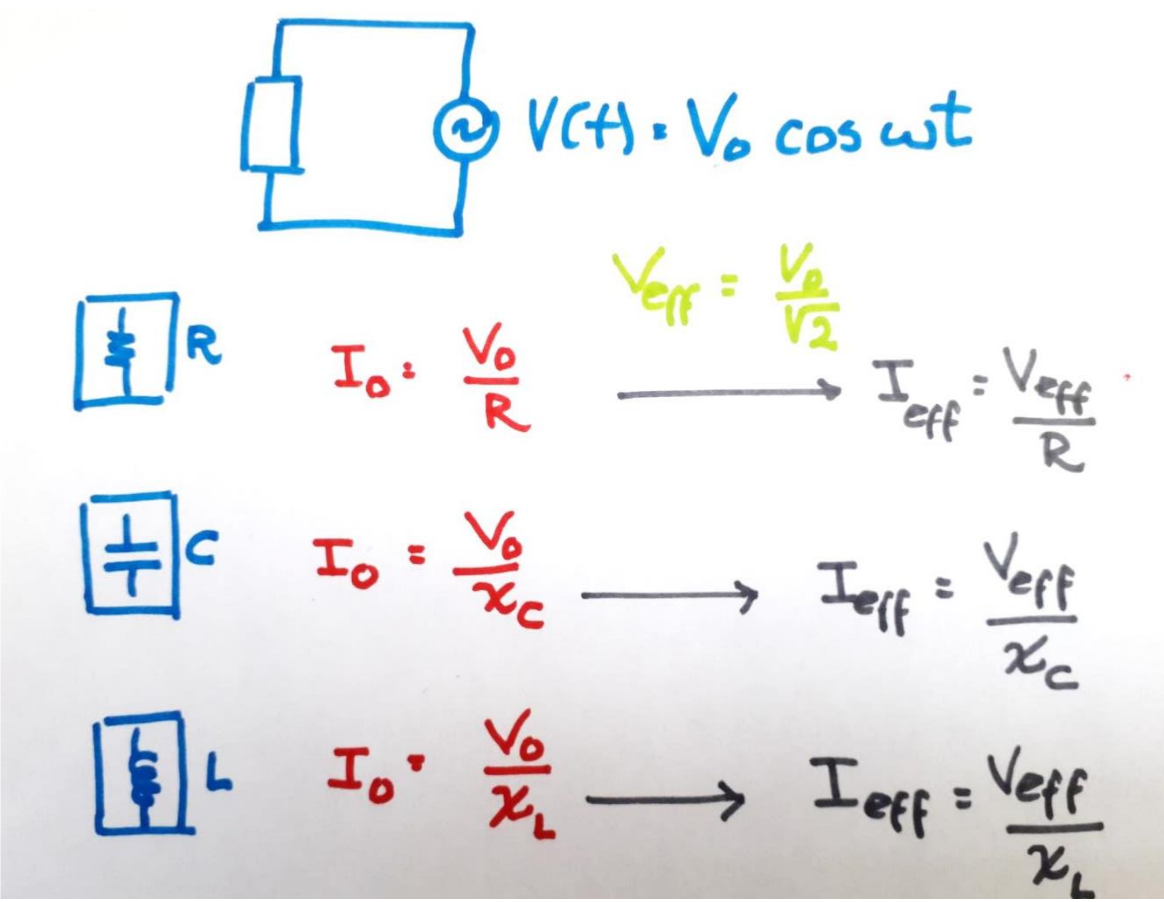
C $\quad I(t) = \omega C V_0 \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_0}{X_C} \cos(\omega t - \pi/2)$; $X_C = \frac{1}{\omega C}$ reactancia capacitiva

L $\quad I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t + \pi/2) = \frac{V_0}{X_L} \cos(\omega t + \pi/2)$; $X_L = \omega L$ reactancia inductiva

Resumen: Elementos *R*, *C*, *L* en AC



Las mismas relaciones para valores eficaces

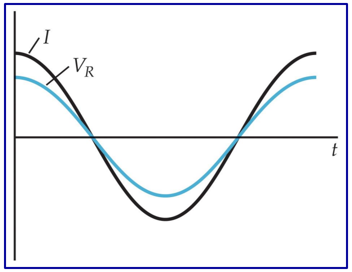


Resumen: Elementos *R*, *C*, *L* en AC

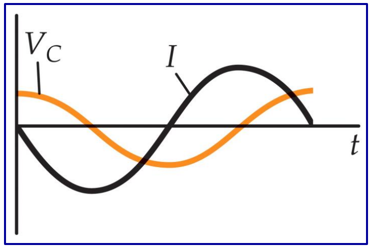
$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

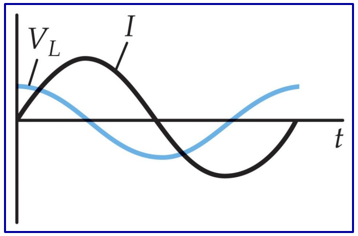
$$I_0 = \frac{V_0}{X}$$



- *R*: *I(t)* va en fase con $V_R(t)$ $X_R = R$, $\delta = 0$

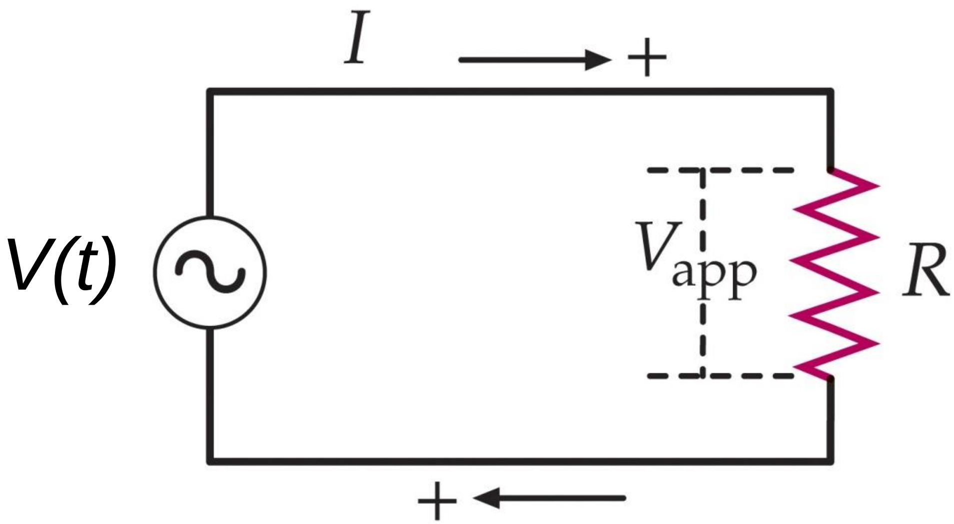


- *C*: *I(t)* va 90º por delante de $V_C(t)$, $X_C = (\omega C)^{-1}$, $\delta = -\pi/2$



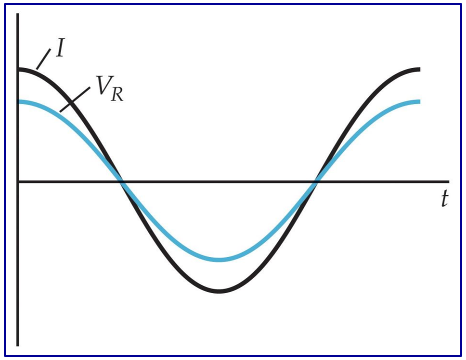
- *L*: *I(t)* va 90º por detrás de $V_L(t)$, $X_L = \omega L$, $\delta = \pi/2$

Potencia disipada en *R* en AC



$$\boxed{V(t) = V_0 \cos\omega t}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{V_0}{R} \cos\omega t}$$



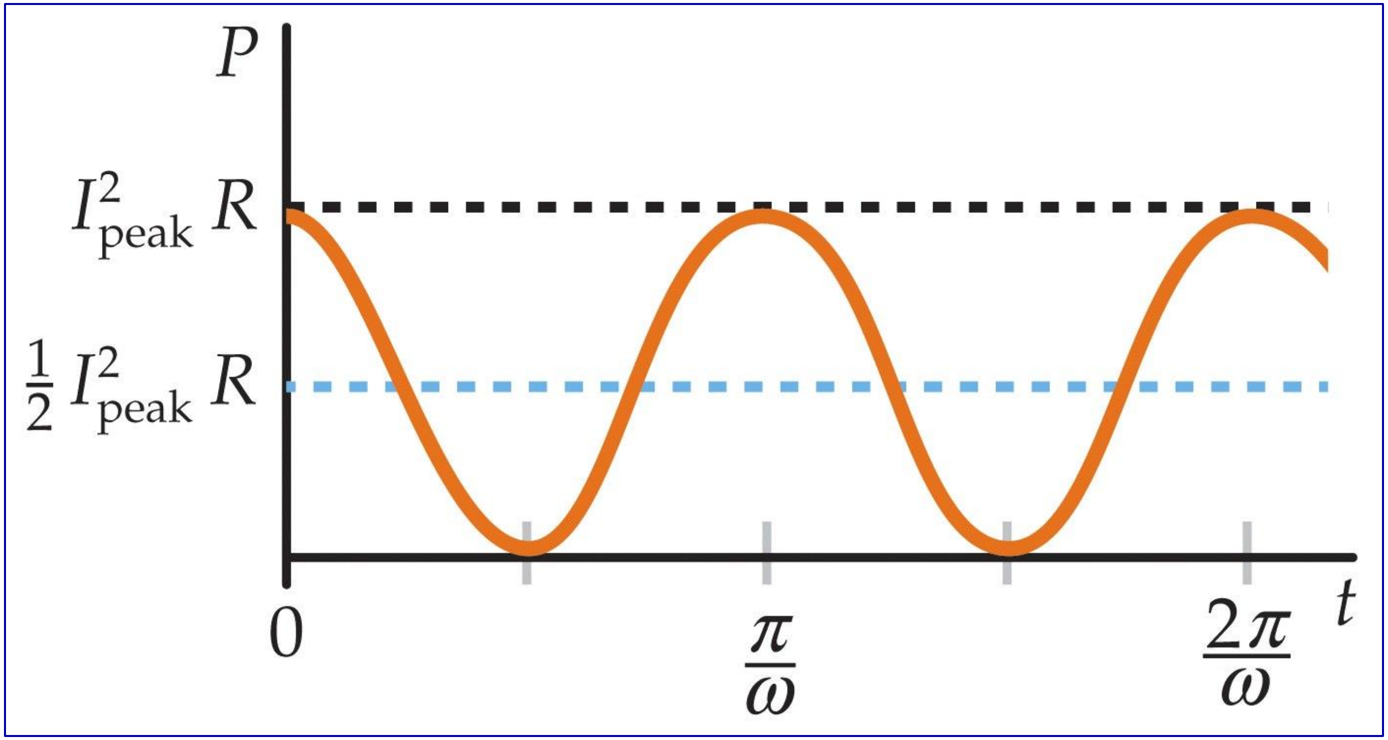
Potencia instantánea *P(t)*:

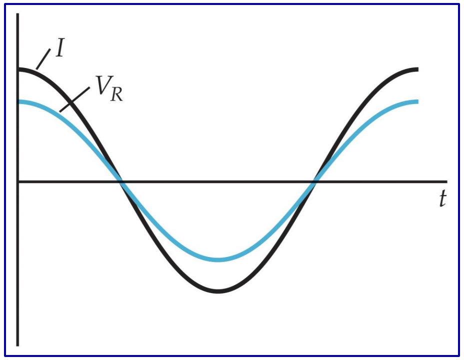
$$P(t) = V(t)\, I(t)$$

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t = I_0^2 R \cos^2 \omega t$$

Potencia disipada en *R* en AC

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t = I_0^2 R\cos^2\omega t$$



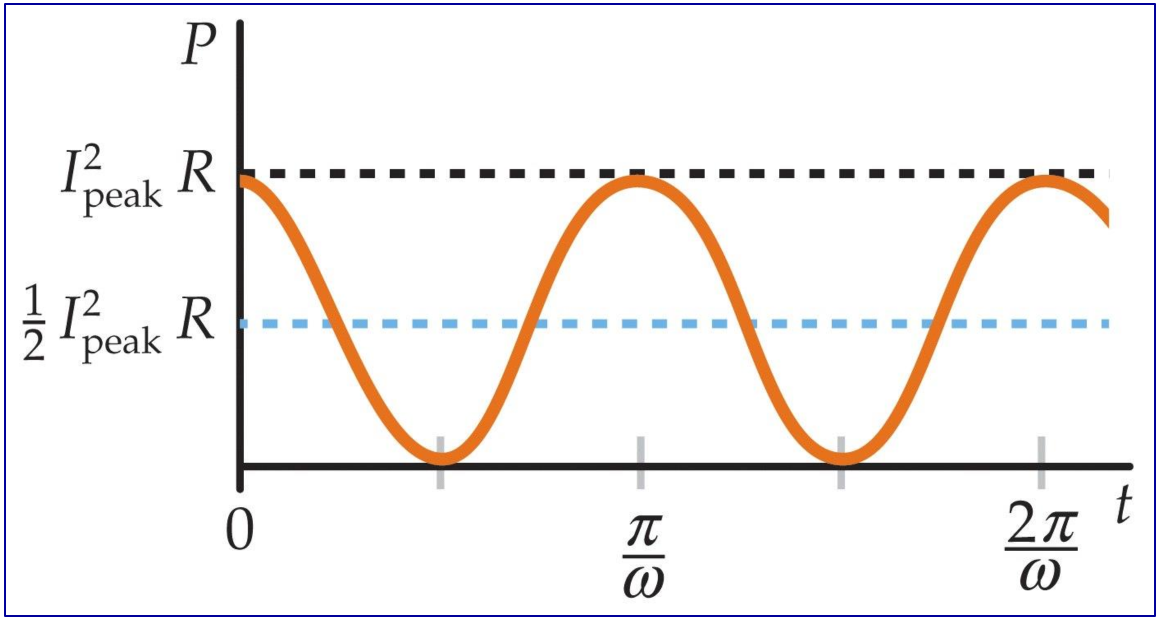


Potencia *promedio* disipada en *R* en AC

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t = I_0^2 R\cos^2\omega t$$

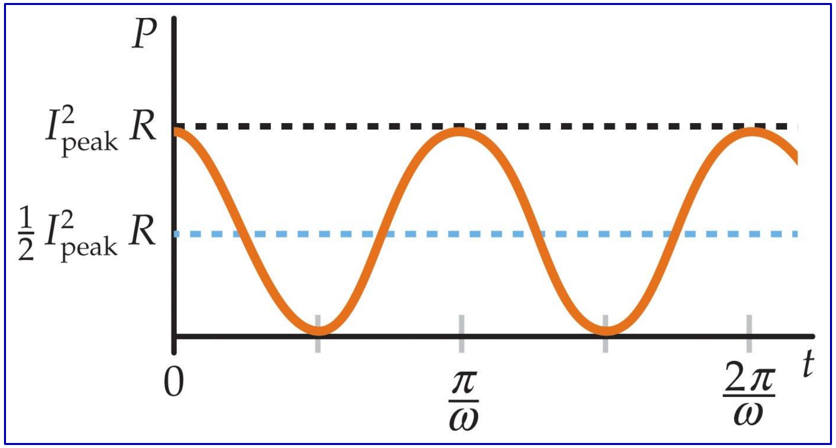
Potencia promedio <*P*>:

$$\langle P\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$



Potencia *promedio* disipada en *R* en AC

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2}{R} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{V_0^2}{R} \frac{1}{2}$$



$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{1}{2} I_0^2 R}$$

Alternativamente…

$$P = VI/2 = I_{eff} V_{eff}$$

Los Condensadores y las Inductancias no disipan potencia

Haced vosotros mismos la demostración matemática…

Hacemos unos ejemplos muy sencillos… para practicar…

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 6000 Hz.

PLANTEAMIENTO La reactancia capacitiva es $X_C = 1/(\omega C)$ y el máximo de corriente es $I_{\text{máx}} = V_{C,\text{máx}}/X_C$.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la reactancia capacitiva a 60 Hz y a 6000 Hz:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(60{,}0\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{133\ \Omega}$$

$$I_{1\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C1}} = \frac{100\ \text{V}}{133\ \Omega} = \boxed{0{,}752\ \text{A}}$$

(*b*) Calcular la reactancia o impedancia capacitiva (capacitancia) a 6000 Hz y utilizar este valor para calcular la corriente máxima a 6000 Hz:

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(6000\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{1{,}33\ \Omega}$$

$$I_{2\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C2}} = \frac{100\ \text{V}}{1{,}33\ \Omega} = \boxed{75{,}2\ \text{A}}$$

Hacemos unos ejemplos muy sencillos… para practicar…

La caida de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con caída de potencial eficaz de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 2000 Hz.

PLANTEAMIENTO Calculamos la reactancia inductiva para cada frecuencia y utilizamos la ecuación 29.20 para determinar la corriente máxima.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La corriente eficaz es igual a la caída de potencial eficaz dividida por la reactancia inductiva. La caída de potencial es igual a la fem:

$$I_{ef} = \frac{V_{L\,ef}}{X_L}$$

2. Calcular la reactancia inductiva a 60 Hz:

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60{,}0\ \text{Hz})(40{,}0 \times 10^{-3}\ \text{H}) = \boxed{15{,}1\ \Omega}$$

3. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 60 Hz:

$$I_{1\,ef} = \frac{120\ \text{V}}{15{,}1\ \Omega} = \boxed{7{,}95\ \text{A}}$$

(*b*) 1. Calcular la reactancia inductiva a 2000 Hz:

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000\ \text{Hz})(40{,}0 \times 10^{-3}\ \text{H}) = \boxed{503\ \Omega}$$

2. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 2000 Hz:

$$I_{2\,ef} = \frac{120\ \text{V}}{503\ \Omega} = \boxed{0{,}239\ \text{A}}$$

Hacemos unos ejemplos muy sencillos… para practicar…

Una línea de transmisión de energía eléctrica tiene una resistencia de 0,02 Ω/km. Calcular la pérdida de potencia I^2R si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquélla a (*a*) 240 V y (*b*) 4,4 kV.

PLANTEAMIENTO En primer lugar, observemos que la resistencia total de 10 km de alambre es $R = (0{,}02\ \Omega/\text{km})(10\ \text{km}) = 0{,}2\ \Omega$. La corriente necesaria para transmitir 200 kW se calcula a partir de $P = IV$ y la pérdida de potencia mediante I^2R. En la solución, los voltajes y corrientes son valores eficaces y la potencia valor medio.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 240 V:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{240\ \text{V}} = 833\ \text{A}$$

2. Calcular la pérdida de potencia:

$$I^2R = (833\ \text{A})^2(0{,}20\ \Omega) = \boxed{1{,}4 \times 10^2\ \text{kW}}$$

(*b*) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 4,4 kV:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{4{,}4\ \text{kV}} = 45{,}4\ \text{A}$$

2. Calcular la pérdida de potencia:

$$I^2R = (45{,}4\ \text{A})^2(0{,}20\ \Omega) = \boxed{0{,}41\ \text{kW}}$$

COMPROBACIÓN La pérdida de potencia con 4 kV supone menos del 1% de la correspondiente a 240 V. Este resultado es consistente con el hecho de aumentar la tensión para realizar la transmisión eléctrica.

OBSERVACIÓN Es preciso hacer notar que en una línea de transmisión de 240 V, casi el 70% de la potencia se pierde en calor de forma irreversible y la caída de tensión IR en dicha transmisión es de 167 V, de forma que la potencia por la línea se transmite a 73 V. Por el contrario, con una transmisión a 4,4 kV, solamente alrededor del 0,2% de la potencia se pierde en la transmisión, y la caída de potencial IR a través de la misma es solamente de 9 V, con una caída de potencial en la potencia transmitida del 0,2%. Todo esto ilustra las ventajas de la transmisión de potencia eléctrica con alto voltaje.

Resumen: Elementos *R*, *C*, *L* en AC

Los Condensadores y las Inductancias en AC se comportan como “Resistencias que varían con la frecuencia del voltaje aplicado….
Para