demostración: (teorema $PA = LU$)

sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$, y supongamos que podemos hacer todos los pasos de la iteración

$$\Rightarrow U = U^{(n-1)} = L_{n-1}^{-1} \overbrace{P_{n-1} U^{(n-2)}}^{\tilde{U}^{(n-2)}} = L_{n-1}^{-1} P_{n-1} L_{n-2}^{-1} P_{n-2} U^{(n-3)}$$

$$= \underbrace{L_{n-1}^{-1} P_{n-1} L_{n-2}^{-1} P_{n-2} L_{n-3}^{-1} P_{n-3} \dots L_1^{-1} P_1 A}$$

$$L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \dots L_1^{-1} \; \vdots \; P_{n-1} P_{n-2} \dots P_1$$

← · nos gustaría

· problema: $AB \neq BA$

$$P_{n-1} L_{n-2}^{-1} = M P_{n-1} \Leftrightarrow M = P_{n-1} L_{n-2}^{-1} P_{n-1}^{-1}$$

llamemos M la matriz que cumple esta identidad

$$\xrightarrow{\text{proposición}} = \tilde{L}_{n-2}^{-1} = I - P\ell^{(n-2)} \otimes e_{n-2}$$

$$\Rightarrow U = L_{n-1}^{-1} \tilde{L}_{n-2}^{-1} P_{n-1} P_{n-2} L_{n-3}^{-1} P_{n-3} \dots L_1^{-1} P_1 A$$

$$\| $$

$$M P_{n-1} P_{n-2} \Leftrightarrow M = P_{n-1} P_{n-2} L_{n-3}^{-1} P_{n-2}^{-1} P_{n-1}^{-1}$$

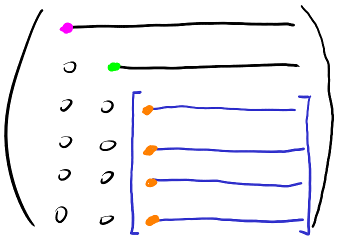
$$\xrightarrow{\text{proposición}} = \tilde{L}_{n-3}^{-1}$$

$$\dots \quad U = \underbrace{L_{n-1}^{-1} \tilde{L}_{n-2}^{-1} \dots \tilde{L}_1^{-1}}_{= L^{-1}} \underbrace{P_{n-1} P_{n-2} \dots P_1}_{= P} A$$

$P \to$ es una matriz de permutación

- por el mismo argumento del teorema $A = LU$ tenemos que U es triangular alta
- como los L_k se construyen a partir de los $\tilde{U}^{(k-1)}$ de la misma manera que en el teorema $A = LU$, y por la proposición, tenemos que L es triangular baja con 1 en la diagonal

solo nos queda ver que podemos hacer todos los pasos de la iteración. supongamos que no sea así:



es decir: supongamos que en algún paso k tenemos que el pivot es 0.

matriz cuadrada $\Rightarrow \det U^{(k)} = \cdot\ \cdot\ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\det} = 0$

$\Rightarrow$ A no sería invertible, porque $U^{(k)} = L_k^{-1} P_k \cdots L_1^{-1} P_1 A$

y $\det U^{(k)} = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\det(L_k^{-1})}\, \underset{\overset{\shortparallel}{\pm 1}}{\det(P_k)} \cdots \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\det(L_1^{-1})}\, \underset{\overset{\shortparallel}{\pm 1}}{\det(P_1)} \det(A) = \pm \det(A)$ #

Ejemplo de PA = LU

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1^{-1} P_1 A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 L_1^{-1} P_1 A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 10/3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1} P_2 L_1^{-1} P_1 A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 10/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: comprobar que salen así

Algoritmo $PA = LU$ (function [P, L, U] = plu (A))

outputs: P, L, U — input: A ($n \times n$)

$U = A$; $L = \underset{\text{eye(n)}}{I}$; $P = I$;

for $k = 1 : n-1$

$[M, j] = \max(\text{abs}(\underbrace{U(k:n, k)}_{v}))$;

2 outputs
M máximo
valor absoluto elemento por elemento
v vector de $n-k+1$ elementos
j argmax: índice (más pequeño) en el que se encuentra el valor máximo de v

Pivot

if $j \neq 1$

$r = j + k - 1$; ← posición real en U

$U(k, k:n) \leftrightarrow U(r, k:n)$;
$L(k, 1:k-1) \leftrightarrow L(r, 1:k-1)$;
$P(k, :) \leftrightarrow P(r, :)$;

se intercambian solo las columnas interesadas. pregunta: ¿cambia algo si intercambiamos toda la fila?

end

Alg. LU

for $i = k+1 : n$

$L(i, k) = U(i, k) / U(k, k)$;

for $j = k : n$

$U(i, j) = U(i, j) - L(i, k) * U(k, j)$;

end

end

end