Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra Lineal **Examen del 18 de octubre de 2019**

Apellidos, Nombre: ______________________________

1. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre K de dimensiones n y m respectivamente. Sean $v_1, \cdots, v_k \in V$ vectores linealmente independientes (luego distintos dos a dos).

a) **(1 punto).** Explica por qué tiene que ser $k \leq n$.

b) **(1 punto).** Si $f(v_1), \cdots, f(v_k) \in W$ también son linealmente independientes ¿es entonces cierto que f ha de ser necesariamente inyectiva? ¿Y si $k = n$? Razona la respuesta.

2. Consideremos la aplicación lineal $F : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \big(z \, , \, -x-y+4t \, , \, x+y+3z-4t \, , \, x+y+2z-4t \big) \, .$$

a) **(1,5 puntos).** Halla la matriz A de F respecto de la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{de } \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

y la base

$$\mathcal{B}_2 = \big\{ (1,0,0,0) \, , \, (1,1,0,0) \, , \, (0,0,1,1) \, , \, (0,0,1,0) \big\} \quad \text{de } \mathbb{R}^4 \, .$$

b) **(2 puntos).** Utiliza A para hallar una base de $\ker F$ y una base de $\operatorname{Im} F$.

c) **(0,5 puntos).** Calcula las coordenadas lineales en la base $\mathcal{B}_2$ del vector $F\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ y $W_2 =< \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$, con

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,2), \; \mathbf{v}_2 = (-1,4,2,-4), \; \mathbf{v}_3 = (1,-2,-1,3), \; \mathbf{v}_4 = (3,-2,-3,1), \; \mathbf{v}_5 = (1,-6,-5,-1) \, .$$

a) **(2 puntos).** Para cada uno de los siguientes espacios determina la dimensión y, si es no nula, halla una base: W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

b) **(2 puntos).** Mismas cuestiones cambiando $\mathbf{v}_5$ por $\mathbf{v}_5' = (1,-6,-5,0)$.