Forma canónica de Jordan

El objetivo de esta presentación es ilustrar el siguiente resultado:

Si el polinomio mínimo de $f \in \mathrm{End}(E)$ descompone en factores lineales, existe una base de E en la cual la matriz de f es de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(a_1, k_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J(a_2, k_2)} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(a_s, k_s)} \end{pmatrix}.$$

La matriz J se llama la matriz canónica de Jordan de f. Sus cajas son de la forma:

$$J(a_j, k_j) = \begin{pmatrix} a_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_j \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo

Consideremos el endomormismo f de $\mathbb{R}^5$ con la siguiente matriz (en la base canónica):

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuentas

Con un *sencillo*[*] cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

[*] En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

Cuentas

Con un *sencillo** cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \mathrm{det}(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

*En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

Cuentas

Con un *sencillo** cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 (2-\lambda)$$

*En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

Cuentas

Con un *sencillo*[*] cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 (2-\lambda) = (2-\lambda)^5$$

[*] En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

Cuentas

Con un *sencillo*[*] cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 (2-\lambda) = (2-\lambda)^5$$

De esta manera, en la descomposición en irreducibles del polinomio mínimo, $m_f(x)$, solo puede aparecer el factor $(x-2)$

[*]En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

Cuentas

Con un *sencillo*[*] cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 (2-\lambda) = (2-\lambda)^5$$

De esta manera, en la descomposición en irreducibles del polinomio mínimo, $m_f(x)$, solo puede aparecer el factor $(x-2)$ y las únicas opciones, en este caso, para polinomio mínimo son:

$$(x-2)\,, \quad (x-2)^2\,, \quad (x-2)^3\,, \quad (x-2)^4 \text{ o } (x-2)^5.$$

[*] En este caso podemos calcular el determinante por cajas.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.
Probemos con el segundo.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.
Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.

Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.
Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas. Un sencillo cálculo nos lo verifica.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base canónica, luego, en esa base, la matriz de $(f-2\mathrm{Id})^2$ es:

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.

Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas. Un sencillo cálculo nos lo verifica.

Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base canónica, luego, en esa base, la matriz de $(f-2\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f-2\mathrm{Id})^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.

Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas. Un sencillo cálculo nos lo verifica.

Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base canónica, luego, en esa base, la matriz de $(f-2\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f - 2\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.

Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas. Un sencillo cálculo nos lo verifica.

Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base canónica, luego, en esa base, la matriz de $(f-2\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f - 2\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \big(0\big)$$

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-2)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la homotecia de razón 2.
Probemos con el segundo. De ser $(x-2)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-2\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas. Un sencillo cálculo nos lo verifica.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base canónica, luego, en esa base, la matriz de $(f-2\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f - 2\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \big(0\big)$$

Tenemos así que $m_f(x) = (x-2)^2$.

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^3\big) \subset \dots$$

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f - 2\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Nuc}\big((f - 2\mathrm{Id})^2\big) \subset \mathrm{Nuc}\big((f - 2\mathrm{Id})^3\big) \subset \dots$$

se *estabiliza* a partir del segundo paso; en otras palabras, basta considerar:

$$\mathrm{Nuc}((f - 2\mathrm{Id})) \subsetneq \mathrm{Nuc}\big((f - 2\mathrm{Id})^2\big)$$

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^3\big) \subset \dots$$

se *estabiliza* a partir del segundo paso; en otras palabras, basta considerar:

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})) \subsetneq \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big)$$

Adoptamos la siguiente notación:

$$E_1(2) = \mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})) \qquad E_2(2) = \mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})^2)$$

para estos espacios f-invariantes.

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss.

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado.

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado. En la base canónica se tiene, para el cálculo de $E_1(2)$, la matriz

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado. En la base canónica se tiene, para el cálculo de $E_1(2)$, la matriz

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notación: $\sim$ equivalente por filas.

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado. En la base canónica se tiene, para el cálculo de $E_1(2)$, la matriz

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notación: $\sim$ equivalente por filas.

De la escalonada reducida final nos quedamos con que

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado. En la base canónica se tiene, para el cálculo de $E_1(2)$, la matriz

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notación: $\sim$ equivalente por filas.

De la escalonada reducida final nos quedamos con que

1. $E_1(2) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tales que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_4 + x_5 = 0\,\}$$

Y esta es la manera más sencilla de describirlo.

Generadores de los núcleos

Para calcular $E_1(2)$ utilizamos el algoritmo de Gauss. Basta considerar la matriz del sistema homogéneo asociado. En la base canónica se tiene, para el cálculo de $E_1(2)$, la matriz

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notación: $\sim$ equivalente por filas.

De la escalonada reducida final nos quedamos con que

1. $E_1(2) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tales que
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_4 + x_5 = 0\}$$
Y esta es la manera más sencilla de describirlo.
2. $\dim(E_1(2)) = 5 - 2 = 3$ Tres generadores independientes son, por ejemplo: $(1, -1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, -1)$, pero posiblemente no utilicemos estos.

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

En el *piso* inferior se tiene una base para $E_1(2)$.

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

En el *piso* inferior se tiene una base para $E_1(2)$. En el inmediatamente superior, se tienen 2 vectores independientes más

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

En el *piso* inferior se tiene una base para $E_1(2)$. En el inmediatamente superior, se tienen 2 vectores independientes más, tantos como se necesitan para completar la base de $E_1(2)$ a una base de $E_2(2)$:

$$\dim(E_2(2)) - \dim(E_1(2)) = 5 - 3 = 2\,.$$

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

En el *piso* inferior se tiene una base para $E_1(2)$. En el inmediatamente superior, se tienen 2 vectores independientes más, tantos como se necesitan para completar la base de $E_1(2)$ a una base de $E_2(2)$:

$$\dim(E_2(2)) - \dim(E_1(2)) = 5 - 3 = 2\,.$$

Además, en el piso superior $E_2(2)$, los vectores se van a elegir de manera que

Base de Jordan para f

Una manera esquemática de presentar 5 vectores de una base de $\mathbb{R}^5$ en que la matriz del endomorfimo dado f quedará en su forma canónica de Jordan es la siguiente:

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

En el *piso* inferior se tiene una base para $E_1(2)$. En el inmediatamente superior, se tienen 2 vectores independientes más, tantos como se necesitan para completar la base de $E_1(2)$ a una base de $E_2(2)$:

$$\dim(E_2(2)) - \dim(E_1(2)) = 5 - 3 = 2\,.$$

Además, en el piso superior $E_2(2)$, los vectores se van a elegir de manera que

$$(f - 2\mathrm{id})(v_{2,1}) = v_{1,1} \in E_1(2) \quad \text{y} \quad (f - 2\mathrm{id})(v_{2,2}) = v_{1,2} \in E_1(2)$$

De arriba hacia abajo

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

$$
\begin{aligned}
v_{1,1} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) \\
v_{1,2} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2})
\end{aligned}
$$

De arriba hacia abajo

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

$$v_{1,1} = (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1})$$
$$v_{1,2} = (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2})$$

Una manera eficiente de encontrar unos tales $v_{2,1}$ y $v_{2,2}$ es considerar en $E_2(2)$ la relación de equivalencia módulo el subespacio $E_1(2)$, de manera que $\{[v_{2,1}], [v_{2,2}]\}$ será una base del espacio cociente $E_2(2)/E_1(2)$.

De arriba hacia abajo

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) \\ v_{1,2} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2}) \end{aligned}$$

Una manera eficiente de encontrar unos tales $v_{2,1}$ y $v_{2,2}$ es considerar en $E_2(2)$ la relación de equivalencia módulo el subespacio $E_1(2)$, de manera que $\{[v_{2,1}], [v_{2,2}]\}$ será una base del espacio cociente $E_2(2)/E_1(2)$.
De otra manera, buscamos,

De arriba hacia abajo

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) \\ v_{1,2} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2}) \end{aligned}$$

Una manera eficiente de encontrar unos tales $v_{2,1}$ y $v_{2,2}$ es considerar en $E_2(2)$ la relación de equivalencia módulo el subespacio $E_1(2)$, de manera que $\{[v_{2,1}], [v_{2,2}]\}$ será una base del espacio cociente $E_2(2)/E_1(2)$.
De otra manera, buscamos,

- $v_{2,1}, v_{2,2} \in E_2(2)$, independientes y tales que

De arriba hacia abajo

$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	
$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) \\ v_{1,2} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2}) \end{aligned}$$

Una manera eficiente de encontrar unos tales $v_{2,1}$ y $v_{2,2}$ es considerar en $E_2(2)$ la relación de equivalencia módulo el subespacio $E_1(2)$, de manera que $\{[v_{2,1}], [v_{2,2}]\}$ será una base del espacio cociente $E_2(2)/E_1(2)$.
De otra manera, buscamos,

- $v_{2,1}, v_{2,2} \in E_2(2)$, independientes y tales que
- $(f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1})$ y $(f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2})$ sean independientes en $E_1(2)$.

Cálculo final

Puesto que $E_2(2)$ es $\mathbb{R}^5$ y conocemos las ecuaciones de $E_1(2)$, el final es sencillo.

Cálculo final

Puesto que $E_2(2)$ es $\mathbb{R}^5$ y conocemos las ecuaciones de $E_1(2)$, el final es sencillo. Tomemos dos vectores de la base canónica cuyas imágenes por $f - 2\mathrm{Id}$

Cálculo final

Puesto que $E_2(2)$ es $\mathbb{R}^5$ y conocemos las ecuaciones de $E_1(2)$, el final es sencillo. Tomemos dos vectores de la base canónica cuyas imágenes por $f - 2\mathrm{Id}$, a la vista en las columnas de

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Cálculo final

Puesto que $E_2(2)$ es $\mathbb{R}^5$ y conocemos las ecuaciones de $E_1(2)$, el final es sencillo. Tomemos dos vectores de la base canónica cuyas imágenes por $f - 2\mathrm{Id}$, a la vista en las columnas de

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

sean independientes, por ejemplo:

$$v_{2,1} = (1,0,0,0,0) \quad \text{y} \quad v_{2,2} = (0,0,0,1,0)$$

Cálculo final

Puesto que $E_2(2)$ es $\mathbb{R}^5$ y conocemos las ecuaciones de $E_1(2)$, el final es sencillo. Tomemos dos vectores de la base canónica cuyas imágenes por $f - 2\mathrm{Id}$, a la vista en las columnas de

$$A_f - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

sean independientes, por ejemplo:

$$v_{2,1} = (1,0,0,0,0) \quad \text{y} \quad v_{2,2} = (0,0,0,1,0)$$

Nota: recuérdese que las relaciones de dependencia lineal en las columnas de una matriz se mantienen en cualquier otra equivalente por filas con ella. Así, esta elección de columnas independientes se puede ver, mejor, en la escalonada reducida equivalente.

Cálculo final

Ya tenemos el piso superior

$$v_{2,1} = (1, 0, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad v_{2,2} = (0, 0, 0, 1, 0)$$

Cálculo final

Ya tenemos el piso superior

$$v_{2,1} = (1,0,0,0,0) \quad \text{y} \quad v_{2,2} = (0,0,0,1,0)$$

Finalmente, completamos la base con,

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) = (-1,1,0,0,0) \\ v_{1,2} &= (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2}) = (-1,1,0,-1,1) \end{aligned}$$

Cálculo final

Ya tenemos el piso superior

$$v_{2,1} = (1, 0, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad v_{2,2} = (0, 0, 0, 1, 0)$$

Finalmente, completamos la base con,

$$v_{1,1} = (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,1}) = (-1, 1, 0, 0, 0)$$
$$v_{1,2} = (f - 2\mathrm{Id})(v_{2,2}) = (-1, 1, 0, -1, 1)$$

y $v_{1,3} \in E_1(2)$ independiente de $v_{1,1}$ y $v_{1,2}$, por ejemplo:

$$v_{1,3} = (-1, 0, 1, 0, 0)\,.$$

Finalmente, la matriz de f en la base

$$\{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{1,3}\}$$

es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

Finalmente, la matriz de f en la base

$$\{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{1,3}\}$$

es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $J = P^{-1}A_f P$, equivalentemente $A_f = PJP^{-1}$, con

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y, por tanto,} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$