2 Curvas: segundas derivadas

Ante todo, observa que todos los conceptos discutidos en el capítulo 1 requieren únicamente primeras derivadas: regularidad de una parametrización, concepto de difeomorfismo, recta o plano tangente, etc. En cambio, algunas de las nociones que vamos a introducir ahora requieren derivadas de orden más alto.

Atención: Un **campo de vectores** a lo largo de una curva $\alpha(t)$ es un vector $\mathbf{v}(t)$ que es *función del parámetro.* Si la curva es regular y bicontinua, entonces podemos reescribir este vector como una función del punto de la curva. Igual definimos un **campo de objetos,** de cualquier tipo, a lo largo de la curva: un objeto que depende de t. Por ejemplo, las rectas tangentes forman un campo de rectas a lo largo de la curva.

2.1 Curvatura de una curva

Definición 24. *Dada una curva regular en $\mathbb{R}^n$, el campo de los* ***vectores curvatura*** *de la misma es el formado por la derivada segunda $\beta''(s)$ de una parametrización respecto de longitud de arco de dicha curva. Denotaremos este campo por* $\mathbf{k}$.

Por lo dicho en el apartado 1.5, esta noción sólo está definida para curvas regulares pues éstas son las únicas que se pueden reparametrizar por longitud de arco. También señalamos que es una **construcción local:** el vector curvatura en el valor paramétrico $s = s_0$ está determinado por un arco arbitrariamente corto $\beta\big((s_0-\varepsilon\,,\,s_0+\varepsilon)\big)$ conteniendo ese valor.
Nos apresuramos a demostrar que el vector curvatura *no depende de la reparametrización respecto al arco que hayamos elegido.* Tal como vimos en el apartado 1.5, si $\beta(s)$ y $\gamma(\bar{s})$ son dos reparametrizaciones de una misma curva regular, por sendas longitudes de arco, entonces se verifica una identidad:

$$\beta(s) \;\equiv\; \gamma(\mathrm{cte}+\varepsilon s) \quad , \quad \varepsilon \text{ una constante igual a } 1 \text{ o } -1\,.$$

Dados valores correspondientes s_0 y $\bar{s}_0 = \mathrm{cte}+\varepsilon s_0$, tenemos la siguiente identidad entre derivadas primeras:

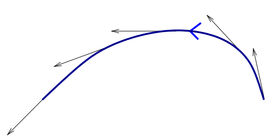
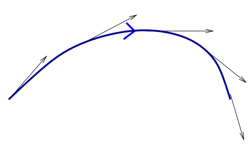
$$\beta'(s) \;\equiv\; \varepsilon\gamma'(\bar{s})_{\bar{s}=\mathrm{cte}+\varepsilon s}\,,$$

que, vuelta a derivar en $s = s_0$, da el siguiente resultado:

$$\beta''(s_0) \;=\; \varepsilon^2\gamma''(\bar{s}_0) \;=\; \gamma''(\bar{s}_0) \quad , \quad \big(\text{pues } \varepsilon^2 = (\pm 1)^2 = 1\big)\,.$$

Definición 25. *Dada una parametrización regular $\alpha(t)$, la* ***tangente unitaria*** *correspondiente a esa parametrización es el campo $\mathbf{t}(t) \equiv \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$. En el caso particular de una parametrización $\beta(s)$ por longitud de arco, es $\mathbf{t}(s) \equiv \beta'(s)$.*

Cada curva regular tiene *dos* campos tangentes unitarios, pues una parametrización $\gamma(\bar{t})$ que recorra la misma curva en sentido opuesto al de $\alpha(t)$ define el campo opuesto como tangente unitaria.


o bien


Pese a esto, para *toda* parametrización por arco $\alpha(s)$ la derivada $\mathbf{t}'(s)$ da el mismo resultado:

$$\boxed{\mathbf{k}(s) \;\equiv\; \alpha''(s) \;\equiv\; \mathbf{t}'(s)} \qquad (1)$$

Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es una curva buena, podemos poner $\mathbf{k}$ como función suave del punto $\mathbf{k} : \Gamma \to \mathbb{R}^2$.

Veamos un ejemplo en el plano. El camino:

$$\alpha(s) \;\equiv\; \left(e^{-s}, \int_0^s \sqrt{1-e^{-2s}}\,ds\right) \quad , \quad s>0\,,$$

es una parametrización por longitud de arco de la **tractriz,** y para esta curva calculamos:

$$\mathbf{t}_\alpha(s) \equiv \alpha'(s) \equiv \big(-e^{-s}, \sqrt{1-e^{-2s}}\big) \quad , \quad \mathbf{k}_\alpha(s) \equiv \left(e^{-s}, \frac{e^{-2s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right) .$$

La primera propiedad que enunciamos para el vector curvatura es:

Dada una curva regular en $\mathbb{R}^n$, su vector curvatura es normal a la curva en todo punto.

Para demostrarla, empezamos por expresar la identidad $\|\mathbf{t}(s)\| \equiv 1$ de la manera siguiente

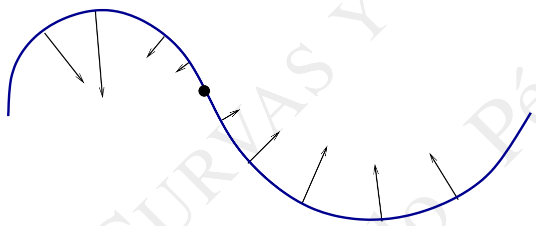
$$1 \equiv \|\mathbf{t}(s)\|^2 \equiv \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s) ,$$

y, derivando esa identidad:

$$0 \equiv \frac{d1}{ds} \equiv \frac{d}{ds}\big(\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s)\big) \equiv \mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{t}(s)+\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}'(s) \equiv 2\,\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}'(s) ,$$

es decir $\mathbf{t}\cdot\mathbf{k}\equiv 0$, que expresa la propiedad enunciada.

El vector curvatura $\mathbf{k}$ sólo depende de la forma de la curva y no del sentido en que se la recorra. Para una curva plana, sus vectores de curvatura forman un campo normal a la curva, que siempre apunta “hacia el lado cóncavo” de la curva, y que se anula en los **puntos de inflexión.**



Discutiremos visualmente el valor exacto de la longitud de $\mathbf{k}$ en el apartado 2.7.

La segunda propiedad que queremos enunciar es:

Una curva regular en $\mathbb{R}^n$ es un trozo de recta afín si y sólo si tiene $\mathbf{k}\equiv\mathbf{0}$.

Pueso que $\mathbf{k}\equiv\mathbf{t}'(s)$, la condición $\mathbf{k}\equiv\mathbf{0}$ equivale a que $\mathbf{t}(s)$ sea un vector constante, es decir $\beta'(s)\equiv\mathbf{t}(s)\equiv\mathbf{v}_0$ siendo $\mathbf{v}_0\in\mathbb{R}^n$ un vector (unitario) constante. Integrando eso respecto de s, una condición equivalente es la identidad:

$$\beta(s) \equiv \mathbf{p}_0 + s\,\mathbf{v}_0 ,$$

siendo $\mathbf{p}_0\in\mathbb{R}^n$ un punto constante. Pero esas son las parametrizaciones respecto de longitud de arco de trozos de rectas afines.
Esta propiedad nos da un primer indicio de lo que significa la curvatura:

La curvatura es una medida cuantitativa de lo que la curva difiere de las rectas.

2.2 Cálculo en cualquier parámetro regular

Importante: también el contenido de este apartado es válido para curvas en cualquier $\mathbb{R}^n$.

Dada una parametrización regular $\alpha(t)$, no necesariamente por longitud de arco, podemos expresar la tangente unitaria y el vector curvatura como funciones $\mathbf{t}(t),\mathbf{k}(t)$ del parámetro t. Sea $s=s(t)\equiv\int\|\alpha'(t)\|dt$ un parámetro arco con $s'(t)>0$ (es decir que s recorre la curva en el mismo sentido que t), sea $t=t(s)$ el difeomorfismo inverso y sea $\beta(s)\equiv\alpha\big(t(s)\big)$ la correspondiente reparametrización por longitud de arco.

Entonces el cálculo implícito de derivadas nos permite expresar las *derivadas nuevas en términos de las viejas:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(t) &\equiv \beta'(s)|_{s=s(t)} \equiv \frac{1}{s'(t)}\alpha'(t) \equiv \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\
\mathbf{k}(t) &\stackrel{\text{def}}{\equiv} \beta''(s)|_{s=s(t)} \equiv \frac{1}{s'(t)}\mathbf{t}'(t) \equiv \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}\right) .
\end{aligned}
$$

Observa que resultan dos fórmulas en t que no requieren ni calcular la integral indefinida $s(t)$ ni tampoco su inversa $t(s)$. La fórmula para $\mathbf{k}(t)$ se puede desarrollar aún más hasta eliminar completamente las raíces cuadradas. Ponemos $\|\alpha'(t)\| \equiv \sqrt{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}$ y desarrollamos:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha'(t)}{\sqrt{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}}\right) \equiv \frac{\alpha''(t)}{\sqrt{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}} + \frac{-1}{2}\,\frac{2\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)}{\big(\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)\big)^{3/2}}\alpha'(t) \equiv \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|} - \frac{\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}\alpha'(t)\,,
$$

y ahora dividimos por la rapidez $\|\alpha'(t)\|$, para obtener:

$$
\mathbf{k}(t) \equiv \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^4}\,\alpha'(t) \equiv \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)} - \frac{\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)}{\big(\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)\big)^2}\,\alpha'(t)\,,
$$

fórmula en la que ya no hay raíces cuadradas. El significado geométrico de esta última fórmula se aclara si la reescribimos de la manera siguiente:

$$
\mathbf{k} \equiv \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \left(\mathbf{t}\cdot\frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}\right)\mathbf{t}\,, \tag{2}
$$

que muestra $\mathbf{k}$ como el resultado de quitarle al vector $\alpha''(t)/\|\alpha'(t)\|^2$ su componente en la dirección de $\mathbf{t}$, es decir que $\mathbf{k}$ *es la componente de* $\alpha''(t)/\|\alpha'(t)\|^2$ *ortogonal a* $\mathbf{t}$, o sea la componente de $\alpha''(t)/\|\alpha'(t)\|^2$ normal a la curva.
Dado un par de vectores $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, la **ortogonalización de Gram-Schmidt** lo pasa a un par ortogonal $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2\}$. Para ello se plantea $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \lambda\mathbf{v}_1$ y se despeja el valor de λ que cumple $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_2 = 0$. Dicho valor es $\lambda = (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)/(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)$ (fracción con denominador positivo), con lo cual:

$$
\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\cdot\mathbf{v}_2\right)\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}_2)\,\mathbf{u}_1\,,
$$

siendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}_1$. Luego $\mathbf{w}_2$ es el resultado que quitarle a $\mathbf{v}_2$ su componente en la dirección de $\mathbf{v}_1$, o sea que $\mathbf{w}_2$ es la componente de $\mathbf{v}_2$ ortogonal a $\mathbf{v}_1$. El cálculo que acabamos de ver para $\mathbf{k}(t)$ es, pues, un proceso de Gram-Schmidt aplicado al par $\{\,\alpha'(t)\,,\,\alpha''(t)/\|\alpha'(t)\|^2\,\}$.

Una vez que hemos entendido la fórmula (2), como una descomposición de $\alpha''/\|\alpha'\|^2$ en partes ortogonales, veamos cómo la podíamos haber demostrado de manera más limpia. Expresamos las *derivadas viejas en términos de las nuevas:*

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &\equiv s'(t)\,\beta'(s)_{s=s(t)} \equiv s'(t)\,\mathbf{t}(s)_{s=s(t)}\,, \\
\alpha''(t) &\equiv s''(t)\,\mathbf{t}(s)_{s=s(t)} + s'(t)\big(s'(t)\,\mathbf{t}'(s)_{s=s(t)}\big) \equiv s''(t)\,\mathbf{t}(t) + s'(t)^2\,\mathbf{k}(t)\,,
\end{aligned} \tag{3}
$$

y vemos claramente que:

$$
\frac{\alpha''(t)}{s'(t)^2} \equiv \mathbf{k}(t) + (\text{un vector tangente})\,.
$$

Identidad que dice lo mismo que (2), pero más geométricamente.

Este cálculo es válido para curvas regulares en cualquier $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo $\alpha(t) \equiv \left(t\,,\,\frac{t^2}{2}\,,\,\frac{t^3}{3}\right)$ da con la fórmula (2) el siguiente resultado:

$$
\mathbf{k}(t) \equiv \frac{1}{1+t^2+t^4}\left[(0,1,2t) - \frac{t+2t^3}{1+t^2+t^4}\,(1,t,t^2)\right] \equiv \frac{(\,-t-2t^3\,,\,1-t^4\,,\,2t+t^3\,)}{(1+t^2+t^4)^2}\,,
$$

y se comprueba que $\alpha'(t)\cdot\mathbf{k}(t) \equiv 0$ (si esto no se cumpliera, habríamos hecho el cálculo mal).

2.3 Caso de curvas en el plano

Supongamos que el camino regular $\alpha(t)$ está en $\mathbb{R}^2$. Para cada valor paramétrico t, el espacio vectorial $\{\alpha'(t)\}^\perp$ *tiene ahora dimensión 1* y recibe el nombre de **recta normal vectorial de α en el valor paramétrico** t; a ella pertenece el vector $\mathbf{k}(t)$.
Llamamos asimismo **recta normal afín de α en ese valor** t a la recta afín que pasa por el punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$ y es ortogonal a $\alpha'(t)$, es decir $\mathbf{p} + \{\alpha'(t)\}^\perp$.
Como la normal vectorial está determinanda por la derivada primera, queremos tener un vector normal no nulo, también determinado por la derivada primera, y describir como múltiplo escalar suyo el vector $\mathbf{k}(t)$. O sea, describir $\mathbf{k}(t)$ con una sola coordenada lineal en vez de dos. Hay algo que sólo se puede hacer en dimensión 2: construir ese vector normal a la curva *girando el vector tangente.*

Dado un número $c \in \mathbb{R}$, el **giro a la izquierda (en sentido antihorario) de c radianes con centro en el origen** es la aplicación *lineal* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuyo efecto sobre la base canónica es el siguiente:

$$\mathbf{e}_1 \longmapsto \cos c\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} c\, \mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{e}_2 \longmapsto -\operatorname{sen} c\, \mathbf{e}_1 + \cos c\, \mathbf{e}_2 \,.$$

También se la puede describir por la identidad $L(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{M}_c\, \mathbf{x}$, siendo:

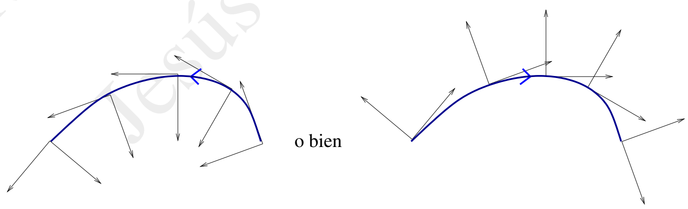
$$\mathbf{M}_c = [L(\mathbf{e}_1)\,|\,L(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos c & -\operatorname{sen} c \\ \operatorname{sen} c & \cos c \end{bmatrix}.$$

El valor $c = \pi/2$ corresponde al **giro a la izquierda de** 90^{o}, cuyo efecto sobre la base canónica es $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_1$. Por lo tanto tiene matriz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ y el **girado** 90^{o} de un vector $\mathbf{v} = (a,b)$ es el vector $\mathbf{w} = (-b,a)$, que también puede definirse como el único vector $\mathbf{w}$ tal que:

$$\det[\mathbf{v}\,|\,\mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \quad , \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 .$$

Definición 26. *Dada una curva regular $\alpha(t)$ en $\mathbb{R}^2$, la correspondiente **normal unitaria** o **normal de Frenet** es el vector $\mathbf{n}(t)$ girado 90^{o} de la tangente unitaria.*
Si $\mathbf{t}(t) \equiv \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$, entonces $\mathbf{n}(t) \equiv \big(-y'(t)\,, x'(t)\big)/\|\alpha'(t)\|$ queda así definido en términos de la primera derivada del camino.

El par ortonormal $\{\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ se llama a veces **diedro de Frenet.** Este diedro gira 180^{o} (o sea, $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ se multiplican ambos por -1) al cambiar el sentido de recorrido de la curva, por lo que en realidad cada curva tiene *dos* diedros de Frenet: uno para cada sentido de recorrido.



Ahora podemos describir $\mathbf{k}_\alpha(t)$ como un múltiplo escalar de $\mathbf{n}(t)$, es decir $\mathbf{k}_\alpha(t) \equiv k(t)\,\mathbf{n}(t)$ para una función escalar $k(t)$ dada por $k(t) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \equiv \det[\mathbf{t}\,|\,\mathbf{k}]$. La función $k(t)$ recibe el nombre de **curvatura escalar** de la curva.
Una vez elegido el sentido de recorrido de la curva, y con él el diedro de Frenet, el escalar k nos da la misma información que el vector $\mathbf{k}$.
Atención: al no depender el vector $\mathbf{k}$ del sentido de recorrido, pero $\mathbf{n}$ sí, la curvatura escalar k se multiplica por -1 al cambiar el sentido de recorrido de la curva.
El signo de la curvatura escalar tiene el siguiente significado visual:

> Supón que estás de pie sobre el plano y que caminas a lo largo de la curva en el sentido de la parametrización. Donde el escalar k es positivo, la curva se dobla hacia tu izquierda. Donde k es negativo, la curva se dobla hacia tu derecha. Además k se anula en los puntos de inflexión.

Conviene advertir que, excepcionalmente, k puede anularse en puntos que no sean de inflexión. Así ocurre, por ejemplo, para el valor $t=0$ en $\alpha(t)\equiv(t,t^4)$: esta curva *rebota* en $t=0$ contra la tangente en vez de atravesarla, pero se tiene $\alpha''(0)=(0,0)$ y por lo tanto $\mathbf{k}_\alpha(0)=(0,0)$. También se anula k en los *tramos rectilíneos* de la curva, si los hubiere.

Veamos una fórmula general para la curvatura escalar de un camino regular $\alpha(t)\equiv\big(x(t),y(t)\big)$ en el plano. Puesto que $\alpha''(t)\equiv(\text{un escalar})\mathbf{t}+s'(t)^2\mathbf{k}$ y $\det[\mathbf{t}\,|\,\mathbf{t}]\equiv 0$, tenemos:

$$\det\big[\,\alpha'(t)\,|\,\alpha''(t)\,\big] \;\equiv\; \det\left[\, s'(t)\,\mathbf{t} \;\middle|\; s'(t)^2\,\mathbf{k}\,\right] \;\equiv\; s'(t)^3\,k(t)\,,$$

luego:

$$k(t)\;\equiv\;\frac{\det[\;\alpha'(t)\;|\;\alpha''(t)\;]}{s'(t)^3}\;\equiv\;\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\big(x'(t)^2+y'(t)^2\big)^{3/2}}\,. \tag{4}$$

Entre muchos otros usos, la fórmula (4) nos permite demostrar el siguiente hecho.

Teorema 27. *Sean $\alpha(t)$ una curva regular en el plano y $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un movimiento rígido. Consideramos la curva movida $\beta(t)\equiv h\circ\alpha(t)$. Si h es directo, entonces $k_\beta(t)\equiv k_\alpha(t)$. Si h es inverso, entonces $k_\beta(t)\equiv -k_\alpha(t)$.*
En particular la curvatura escalar, como función del arco, es invariante por traslaciones y por rotaciones de la curva.

Demostración. Tenemos $h(\mathbf{x})\equiv\mathbf{c}+\mathbf{M}\mathbf{x}$, con $\mathbf{c}$ vector constante y $\mathbf{M}$ matriz ortogonal constante. Se calcula:

$$\beta(t)\;\equiv\;\mathbf{c}+\mathbf{M}\,\alpha(t)\quad,\quad\beta'(t)\;\equiv\;\mathbf{M}\alpha'(t)\quad,\quad\beta''(t)\;\equiv\;\mathbf{M}\alpha''(t)\,,$$

y también:

$$\|\beta'(t)\|\;\equiv\|\alpha'(t)\|\quad,\quad\det[\;\beta'(t)\;|\;\beta''(t)\;]\;\equiv\;\det[\;\mathbf{M}\,\alpha'(t)\;|\;\mathbf{M}\,\alpha''(t)\;]\;\equiv\;(\det\mathbf{M})\det[\;\alpha'(t)\;|\;\alpha''(t)\;]\,,$$

y se deduce $k_\beta(t)\;\equiv\;(\det\mathbf{M})\,k_\alpha(t)$, de donde se sigue lo afirmado. □

Hemos podido describir el vector $\mathbf{k}$ con un sólo escalar k gracias a la obsevación de que hay una recta vectorial, determinada por la primera derivada, que contiene a $\mathbf{k}$. Observemos ahora que, al movernos por la curva, la tangente unitaria $\mathbf{t}$ recorre un espacio unidimensional (aunque curvilíneo) definido a priori: la circunferencia unidad con centro el origen. Cada punto $\mathbf{u}$ de esta circunferencia se describe con un solo número: el ángulo φ tal que $\mathbf{u}=(\cos\varphi,\operatorname{sen}\varphi)$.
Dada una curva plana $\alpha(s)$ parametrizada con respecto al arco, existe una función suave $\varphi(s)$ verificando la identidad

$$\mathbf{t}(s)\;\equiv\;\big(\,\cos\varphi(s)\,,\,\operatorname{sen}\varphi(s)\,\big)\,.$$

Esta función da, para cada s, una determinación del **ángulo que forma la tangente unitaria con el eje de abscisas.** Es inmediato calcular $\mathbf{n}(s)\equiv\big(-\operatorname{sen}\varphi(s)\,,\cos\varphi(s)\big)$ y también:

$$\mathbf{k}(s)\;\equiv\;\mathbf{t}'(s)\;\equiv\;\varphi'(s)\big(-\operatorname{sen}\varphi(s)\,,\cos\varphi(s)\big)\;\equiv\;\varphi'(s)\,\mathbf{n}(s)\,,$$

de donde:

$$\boxed{k(s)\equiv\varphi'(s)} \tag{5}$$

De hecho se deduce $\begin{cases}\mathbf{t}'(s)=k\,\mathbf{n}\\ \mathbf{n}'(s)=-k\mathbf{t}\end{cases}$ que se llaman **ecuaciones de Frenet en el plano.**
Enunciamos ya el **teorema fundamental para curvas en el plano:**

Teorema 28. *Dados una función escalar $k(s):J\to\mathbb{R}$, un punto $\mathbf{p}$ del plano, un vector unitario $\mathbf{u}$ y un valor $s_0\in J$, existe una única parametrización por longitud de arco $\alpha(s)$, $s\in J$, que satisfaga $k_\alpha(s)\equiv k(s)$ y los **datos iniciales** $\alpha(s_0)=\mathbf{p}$ y $\alpha'(s_0)=\mathbf{u}$.*
Por lo tanto, a partir de la expresión $k(s)$ se determina la curva plana con unicidad salvo traslaciones y rotaciones en el plano.

Demostración. En vista de la fórmula (5), tiene que ser $\alpha'(s) \equiv \mathbf{t}(s) \equiv \big(\cos\varphi(s)\,,\,\mathrm{sen}\,\varphi(s)\big)$ donde $\varphi(s) : J \to \mathbb{R}$ es una función cumpliendo $\varphi'(s) \equiv k(s)$, es decir que $\varphi(s)$ es una integral indefinida $\int k(s)\,ds$ de la función $k(s)$. Fijada una tal integral indefinida $\varphi_0(s)$, cualquier otra es de la forma $c_0 + \varphi_0(s)$ con c_0 constante. Luego la tangente unitaria más general posible es:

$$\mathbf{t}(s) \;\equiv\; \begin{pmatrix} \cos\big(c_0+\varphi_0(s)\big) \\ \mathrm{sen}\,\big(c_0+\varphi_0(s)\big) \end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbf{M}_{c_0} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_0(s) \\ \mathrm{sen}\,\varphi_0(s) \end{pmatrix},$$

y entonces las posibles parametrizaciones $\alpha(s)$ por longitud de arco y con $k_\alpha(s) \equiv k(s)$ son las integrales indefinidas, respecto de la variable s, de esas tangentes unitarias:

$$\alpha(s) \;\equiv\; \int \mathbf{t}(s)\,ds \;\equiv\; \int \mathbf{M}_{c_0} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_0(s) \\ \mathrm{sen}\,\varphi_0(s) \end{pmatrix} ds\,.$$

Fijada una integral indefinida $\alpha_0(s)$ de $\begin{pmatrix} \cos\varphi_0(s) \\ \mathrm{sen}\,\varphi_0(s) \end{pmatrix}$, la rotada $\mathbf{M}_{c_0} \cdot \alpha_0(s)$ es una integral indefinida *particular* de $\mathbf{M}_{c_0} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_0(s) \\ \mathrm{sen}\,\varphi_0(s) \end{pmatrix}$ y la *general* para el mismo integrando es:

$$\alpha(s) \;\equiv\; \mathbf{c} + \mathbf{M}_{c_0} \cdot \alpha_0(s)\,, \tag{6}$$

con $\mathbf{c}$ vector constante cualquiera. La curva general con arco s y curvatura escalar $k(s)$ es, pues, el resultado de aplicar a $\alpha_0(s)$ cualquier rotación y después cualquier traslación. También podemos poner:

$$\alpha(s) \;\equiv\; \mathbf{M}_{c_0}\big(\,\mathbf{c}' + \alpha_0(s)\,\big)\;,\;\text{ con }\; \mathbf{c}' = \mathbf{M}_{-c_0}(\mathbf{c})\,,$$

que nos describe la curva general, con arco s y curvatura escalar $k(s)$, como el resultado de aplicar a $\alpha_0(s)$ cualquier traslación y después cualquier rotación.
En la fórmula (6) tenemos una ambigüedad: el número c_0 produce el mismo camino $\alpha(s)$ que cualquier número $c_0 + 2\pi m$ con $m \in \mathbb{Z}$. Evitamos este problema reescribiendo la fórmula como:

$$\alpha(s) \;\equiv\; \mathbf{c} + \mathbf{M}\,\alpha_0(s)\,, \tag{7}$$

siendo $\mathbf{M}$ cualquier **matriz especial ortogonal,** es decir de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a^2+b^2 = 1$. Fijamos ahora un valor $s_0 \in J$ y consideramos las condiciones iniciales $\alpha(s_0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(s_0) = \mathbf{u}$. La segunda condición inicial, llevada a (7), impone $\mathbf{M}\,\alpha_0'(s_0) = \mathbf{u}$, es decir que $\mathbf{M}$ tiene que ser la matriz de la *única* rotación que lleva $\alpha_0'(s_0)$ a $\mathbf{u}$. Dada esta única $\mathbf{M}$, la primera condición inicial equivale mediante (7) a $\mathbf{c} + \mathbf{M}\,\alpha_0(s_0) = \mathbf{p}$, lo que sólo se cumple para $\mathbf{c} = \mathbf{p} - \mathbf{M}\,\alpha_0(s_0)$. Al estar $\mathbf{M}, \mathbf{c}$ determinados de manera única por $\mathbf{p}, \mathbf{u}$, queda demostrada la unicidad del camino $\alpha(s)$ satisfaciendo $k_\alpha(s) \equiv k(s)$ y los datos iniciales. □

2.4 El caso de una circunferencia

Sean $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$ y $r_0 > 0$ un número positivo. La circunferencia de centro $\mathbf{p}_0$ y radio r_0 admite la parametrización regular $\alpha(t) \equiv \big(x(t), y(t)\big) \equiv (x_0, y_0) + (\,r_0 \cos t\,,\, r_0\,\mathrm{sen}\,t\,)$ que la recorre en sentido antihorario. Calculamos:

$$\alpha'(t) \;\equiv\; r_0 \cdot (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t) \quad , \quad \alpha''(t) \;\equiv\; r_0 \cdot (-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t) \;\equiv\; \mathbf{p}_0 - \alpha(t)\,.$$

Entonces $\mathbf{t} \equiv (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t)$ y $\mathbf{n} \equiv (-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t)$. La rapidez es la constante r_0 y $\alpha''(t)/r_0^2 \equiv (1/r_0)\,\mathbf{n}$ ya es normal a la circunferencia, luego $\mathbf{k}_\alpha \equiv (1/r_0)\,\mathbf{n}$ y $k_\alpha \equiv 1/r_0$.

Definición 29. *Decimos que dos vectores no nulos* $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, *son* ***inversos el uno del otro*** *si son proporcionales mediante factores positivos y tienen longitudes inversas:* $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| = 1$.
Podemos hallar uno a partir del otro así: $\mathbf{w} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2 \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|^2$.

La noción de vectores inversos nos permite enunciar lo siguiente.

Proposición 30. *En cualquier punto* $\mathbf{p}$ *de una circunferencia, el vector de curvatura y el vector que va del punto al centro de la circunferencia son inversos mutuos. Por ejemplo, si la circunferencia está recorrida en sentido antihorario se tiene:*

$$\mathbf{k}(\mathbf{p}) = \frac{1}{r_0}\,\mathbf{n}(\mathbf{p}) \quad , \quad \mathbf{p}_0 - \mathbf{p} = r_0\,\mathbf{n}(\mathbf{p}) \, ,$$

También deducimos:

Proposición 31. *Una curva plana regular es un trozo de circunferencia, o recta, si y sólo si tiene curvatura escalar constante.*

Demostración. Llamemos $\mathscr{C}$ a la curva. Si $k_{\mathscr{C}} \equiv 0$, ya hemos visto que $\mathscr{C}$ es rectilínea. Si $k_{\mathscr{C}}$ es una constante no nula k_0, entonces $\mathscr{C}$ tiene la misma curvatura escalar que la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r_0 = 1/|k_0|$ (recorrida en sentido antihorario si $k_0 > 0$, y en sentido horario si $k_0 < 0$). Luego, por el teorema 28, la curva $\mathscr{C}$ es parte de una trasladada de dicha circunferencia. Pero la trasladada es otra circunferencia también de radio $1/|k_0|$. □

2.5 Caso de grafos: comparación de curvaturas

Aplicamos la fórmula (4) a una **parametrización grafo** $\alpha(x) \equiv \big(x\,,h(x)\big)$, que recorre el grafo $\{y = h(x)\}$ en el sentido de las abscisas crecientes, y obtenemos:

$$\alpha(x) \;\equiv\; \big(x\,,h(x)\big) \;\text{ tiene }\; \boxed{k(x) \;\equiv\; \frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}} \;\equiv\; \frac{d}{dx}\,\frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}} \tag{8}$$

Al rotar un grafo podemos obtener el grafo de una función muy distinta. Tomemos, por ejemplo, el grafo $\Gamma = \{y = e^x\}$ y sea $\widetilde{h}(x)$ la función cuyo grafo $\widetilde{\Gamma}$ es el resultado de rotar Γ un ángulo de $-\pi/4$ radianes, es decir $\widetilde{\Gamma} = \{\big((x+e^x)/\sqrt{2}, (-x+e^x)/\sqrt{2}\big) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$. Si definimos $\varphi(x) \equiv (x+e^x)/\sqrt{2}$ podemos dar $\widetilde{h}$ por la fórmula $\widetilde{h}(x) \equiv \big(-\varphi^{-1}(x) + \exp\varphi^{-1}(x)\big)/\sqrt{2}$, que se convierte en $\widetilde{h}(x) \equiv x - \sqrt{2}\,\varphi^{-1}(x)$ y vemos que $\widetilde{h}$ no es función elemental porque φ^{-1} no lo es.

Mientras que la función y su derivada segunda cambian mucho al rotar el grafo, la curvatura del grafo no cambia. Esto quiere decir que la magnitud $k = h''/\big(1+h'^2\big)^{3/2}$ es como una "derivada segunda a la que se le han hecho correcciones", con ayuda de la derivada primera, para que sea invariante por rotación del grafo.

Ahora enunciamos y demostramos un resultado de **comparación:** qué le sucede a dos grafos que se tocan tangentemente en un punto, con curvaturas relacionadas por una desigualdad.

Lema 32. *Sean* $h_1(x), h_2(x)$ *dos funciones suaves con* $h_1(x_0) = h_2(x_0)$ *y* $h_1'(x_0) = h_2'(x_0)$. *Sean* $k_1(x), k_2(x)$ *las curvaturas escalares respectivas de los grafos* $\Gamma_1 = \{y = h_1(x)\}$ *y* $\Gamma_2 = \{y = h_2(x)\}$, *recorridos en el sentido creciente de la abscisa. Si* $k_1 \leq k_2$ *entonces* $h_1 \leq h_2$.

Demostración. Para $i = 1,2$, sea $\theta_i(x) \equiv \arctan h_i'(x)$ el ángulo que hace la tangente a Γ_i con el eje de abscisas. La fórmula (8) nos dice que $\boxed{k_i(x) \equiv \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\theta_i(x)}$. Además tenemos $\theta_1(x_0) = \theta_2(x_0)$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_1(x) &\geq \operatorname{sen}\theta_2(x) \quad \text{para} \quad x \leq x_0 \, , \\ \operatorname{sen}\theta_1(x) &\leq \operatorname{sen}\theta_2(x) \quad \text{para} \quad x \geq x_0 \, , \end{aligned}$$

y entonces las mismas desigualdades cumplen los ángulos y las tangentes trigonométricas, porque seno y tangente son funciones estrictamente crecientes del ángulo (entre $-\pi/2$ y $\pi/2$), es decir:

$$\begin{aligned} h_1(x)' &\geq h_2'(x) \quad \text{para} \quad x \leq x_0 \, , \\ h_1'(x) &\leq h_2'(x) \quad \text{para} \quad x \geq x_0 \, . \end{aligned}$$

Como $h_1(x_0) = h_2(x_0)$, integrando las derivadas desde $x = x_0$ se obtiene $h_1 \leq h_2$. □

2.6 Curvas planas: círculo osculador

Definición 33. *Sea $\alpha(t)$ una curva regular en el plano. El* ***círculo osculador de α en el valor paramétrico*** *t es la circunferencia en el plano que pasa por el punto $\alpha(t)$ con la misma recta tangente que α y con el mismo vector de curvatura que α. Si la curvatura de α se anula en el valor t, lo definimos como la recta afín tangente (vista como una circunferencia de radio infinito).*
El ***vector radio de curvatura de α en el valor paramétrico*** *t es el vector que empieza en $\alpha(t)$ y termina en el centro del círculo osculador; su longitud se llama* ***radio de curvatura.***

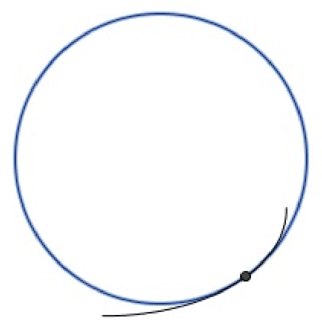
La proposición 30 nos permite obtener el vector radio de curvatura como el inverso de $\mathbf{k}_\alpha(t)$:

$$\text{(vector radio de curvatura de } \alpha \text{ en } t) = \frac{\mathbf{k}_\alpha(t)}{\|\mathbf{k}_\alpha(t)\|^2} = \frac{1}{k_\alpha(t)}\,\mathbf{n}_\alpha(t)\,.$$

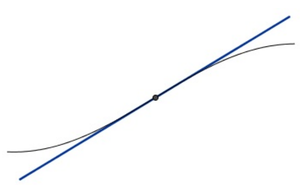
Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es una curva buena, entonces todos estos elementos geométricos (círculo, centro y radio de curvatura) los podemos poner como funciones suaves del punto en Γ.

Proposición 34. *Si la curvatura escalar $k_\alpha(t)$ es* ***estrictamente monótona*** *en un intervalo que rodea al valor t_0, entonces la curva $\alpha(t)$ y su círculo osculador en t_0 se atraviesan tangentemente en el punto común $\alpha(t_0)$.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $k_0 = k_\alpha(t_0)$ es positiva y que $k_\alpha(t)$ es estrictamente creciente para valores de t cercanos a t_0. Denotemos por C_0 el círculo osculador en $t = t_0$. Tomando un arco corto $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big)$, otro tanto para C_0 y girando la figura si hace falta, podemos suponer que dichos arcos son grafos donde y es función suave de x.
Mientras que C_0 tiene curvatura constante k_0, la curva α tiene curvatura menor que k_0 cuando $t < t_0$ y mayor que k_0 cuando $t > t_0$. El lema 32 nos dice entonces que el arco $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0)\big)$ está *fuera* del disco limitado por C_0 y el arco $\alpha\big((t_0, t_0+\varepsilon)\big)$ está *dentro* de ese disco. Luego el arco $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big)$ atraviesa C_0 en $t = t_0$.



Consideremos un caso más. Supongamos que $k_\alpha(t_0) = 0$ y que $k_\alpha(t)$ es estrictamente decreciente para t cercano a t_0, de modo que es positiva en $t < t_0$ y negativa en $t > t_0$ (valores de t cercanos a t_0). Ahora el círculo osculador en $t = t_0$ es la recta afín tangente a α en $t = t_0$. De nuevo tomamos arcos cortos y giramos la figura para que esos arcos sean grafos en los que y es función suave de x. El arco $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big)$ pasa por el punto $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ y es el grafo $\{y = h(x)\}$ de una función $h(x)$ que es **convexa** en $x < x_0$ y **cóncava** en $x > x_0$. O sea que h tiene un punto de inflexión en $x = x_0$ y por lo tanto su grafo (el arco de α) atraviesa tangentemente a la recta afín tangente, que es el círculo osculador en este caso. $\square$

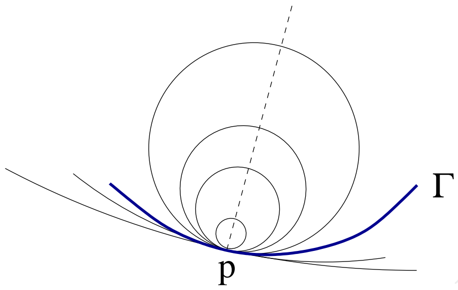


Un razonamiento similar a la demostración precedente permite probar las siguientes afirmaciones:

– Si $k_\alpha(t)$ tiene un máximo local en $t = t_0$, entonces un arco corto $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big)$ está fuera del disco limitado por C_0.

– Si $k_\alpha(t)$ tiene un mínimo local en $t = t_0$, entonces un arco corto $\alpha\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big)$ está dentro de ese disco.

Sea Γ una curva regular en el plano y $\mathbf{p} \in \Gamma$ un punto de la misma. Sea cual sea la naturaleza de la curvatura de Γ cerca de $\mathbf{p}$, se verifica que cada círculo tangente a Γ en $\mathbf{p}$, pero *distinto del osculador,* o bien contiene todo un arco de Γ cerca de $\mathbf{p}$ o bien deja afuera un tal arco.



2.7 Evoluta e involutas

Definición 35. *La* ***evoluta*** *de una curva regular plana $\alpha(t)$ es, como subconjunto, el lugar geométrico de los centros de curvatura de α. Como curva paramétrica, la evoluta es el camino descrito por el centro de curvatura a medida que varía el parámetro t.*

Si por ejemplo denotamos el centro de curvatura por $\gamma(t)$, entonces $t \mapsto \gamma(t)$ es una nueva curva paramétrica para la que tenemos las siguientes fórmulas:

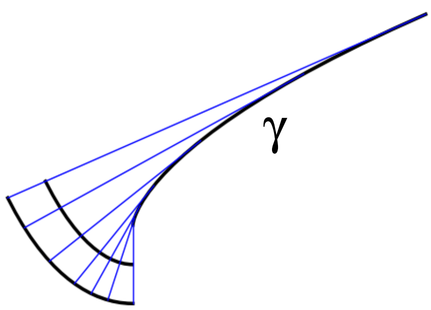
$$\gamma(t) \;\equiv\; \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t) \;\equiv\; \alpha(t) + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\det[\,\alpha'(t)\,|\,\alpha''(t)\,]}\big(-y'(t), x'(t)\big)\,, \tag{9}$$

que son fórmulas para la evoluta.
Lo interesante es que no hace falta conocer los valores de los radios de curvatura para ver la evoluta, pues es la única curva tangente a las normales afines de la curva Γ:

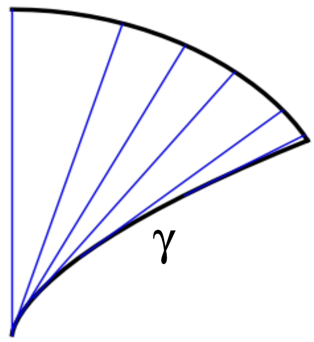
La evoluta de Γ es la **envolvente** de las normales afines de Γ.

Una posible *descripción visual de la curvatura escalar* es la siguiente: El radio de curvatura $\rho(\mathbf{p})$ es la distancia de $\mathbf{p}$ al correspondiente punto en la envolvente de las normales afines; finalmente el escalar $\|\mathbf{k}(\mathbf{p})\|$ es el valor inverso $1/\rho(\mathbf{p})$.

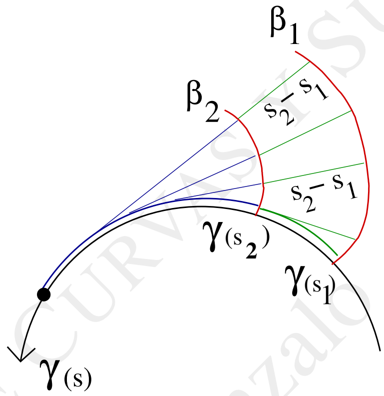
Dada una curva γ, nos fijamos en un tramo suyo en el que la curvatura no cambia de signo. Entonces las tangentes afines a γ yacen del lado convexo de γ. Si elegimos un sentido de recorrido, entonces las semirrectas tangentes afines "hacia adelante" recubren ese lado de γ sin cortarse, y las **trayectorias ortogonales** a esas semirrectas son *curvas que tienen a γ por evoluta.* Se las llama **involutas** de γ



Igual sucede con las trayectorias ortogonales a las semirrectas tangentes afines “hacia atrás”, que forman otra familia de involutas de la misma curva γ



Dada una curva $\gamma(s)$ en el plano, parametrizada por arco, para construir visualmente una de sus involutas arrollamos sobre γ un trozo de hilo tenso (por ejemplo, terminando en $\gamma(s_2)$) y después lo despegamos de la curva manteniendo tirante el extremo libre del hilo. Este extremo libre traza entonces una involuta β_2 de γ. Si utilizamos un hilo un poco más largo (por ejemplo, terminando en $\gamma(s_1)$), obtenemos otra involuta β_1 de γ distinta a la anterior.



La porción del hilo que iba de $\gamma(s_2)$ a $\gamma(s_1)$ permanece recta una vez tensada, y nos da una familia de segmentos rectilíneos, todos de la misma longitud $d = s_2 - s_1$, que van de β_2 a β_1 y son ortogonales a ambas involutas.

> Dos involutas hacia adelante de una curva fijada están separadas por segmentos rectilíneos de longitud constante ortogonales a ambas. Igual ocurre con dos involutas hacia atrás.

Veamos aquí la demostración de que la construcción con un hilo tenso da correctamente una involuta. Utilizamos para ello el diedro de Frenet de la evoluta γ. Para cada $s > s_2$, la figura anterior nos muestra un punto $\beta_2(s)$ que se construye a partir del punto $\gamma(s)$ y la tangente unitaria de la manera siguiente:

$$\beta_2(s) \;=\; \gamma(s) + (s - s_2) \cdot \big(-\mathbf{t}_\gamma(s) \big) \, ,$$

y falta ver que la parametrización $\beta_2(s)$ así definida es una trayectoria ortogonal a las rectas afines tangentes a γ. Calculamos la velocidad:

$$\beta_2'(s) \;=\; \gamma'(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) + (s - s_2)(-k_\gamma)\mathbf{n}_\gamma(s) \;= \mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) + \text{escalar} \cdot \mathbf{n}_\gamma(s) \, ,$$

que claramente da un vector ortogonal a $\mathbf{t}_\gamma(s)$, como se quería demostrar. Así, pues, las curvas β_2, β_1 de la figura anterior son ambas ortogonales a las tangentes afines de γ y están conectadas por segmentos de recta ortogonales a las dos y de longitud constante $s_2 - s_1$.

2.8 Resultados globales 2

La siguiente propiedad es claramente local: ser una curva plana con $k > 0$. Sin embargo, unida a la propiedad global de "ser curva cerrada y simple" nos da un resultado global:

Teorema 36. *Una curva regular plana cerrada y simple, con $k > 0$, limita un **dominio convexo** del plano.*

Segundo ejemplo de resultado global:

Teorema 37. *Sea Γ una curva regular plana y cerrada, contenida en un disco cerrado de radio r. Existen puntos en Γ en los cuales $|k| \geq 1/r$.*

Dos ejemplos más:

Teorema 38. ("Umlaufsatz", o teorema de rotación de la tangente). *Si Γ es una curva regular, cerrada y simple en el plano, entonces $\int_\Gamma k\, ds = \pm 2\pi$.*

Teorema 39. (P. G. Tait 1896, A. Kneser 1912). *Sea $\alpha(t)$ una curva regular plana. Si la curvatura $k_\alpha(t)$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente), entonces los círculos osculadores de α son disjuntos dos a dos y rellenan una corona circular (posiblemente excéntrica). A fortiori, la parametrización $\alpha(t)$ es inyectiva y la curva carece de autointersecciones.*
En tal situación, la curva es una envolvente de tipo atravesado (ver apartado 1.13) de sus círculos osculadores.