TEMA 5. CÓNICAS Y CUÁDRICAS

5.1. DEFINICIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LAS CÓNICAS

Una sección cónica o, simplemente, cónica es toda figura plana que se obtiene al cortar un doble cono recto con un plano. Según las distintas posiciones del plano se obtienen

a) Una circunferencia (o un punto)
b) Una elipse (o un punto)
c) Una parábola (o una recta)
d) Una hipérbola (o dos rectas que se cortan)

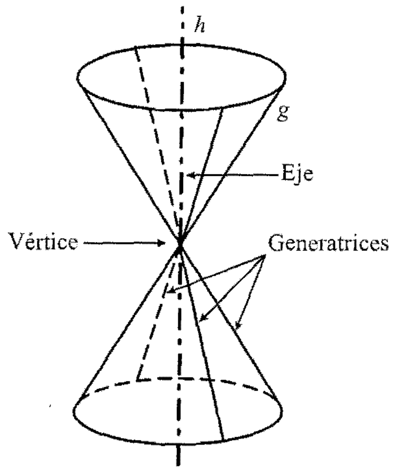


Figura 11.1

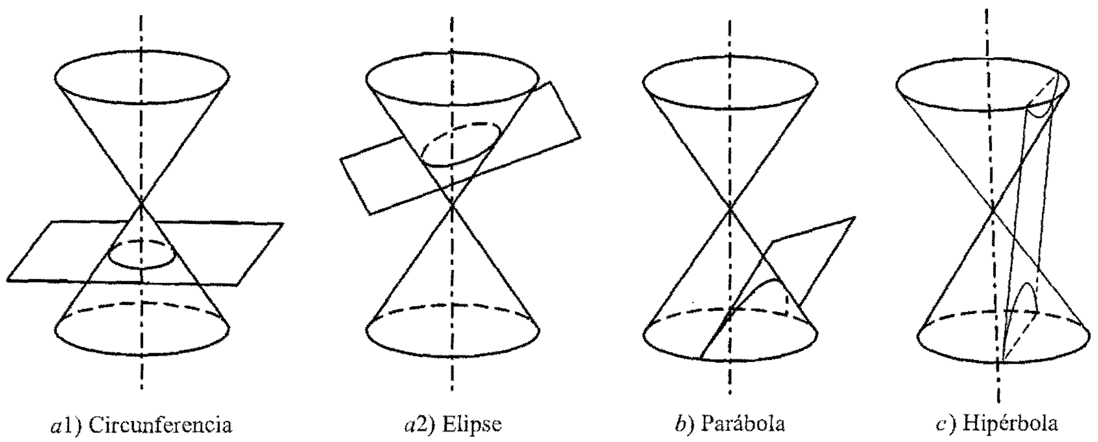
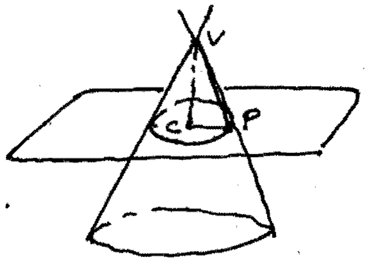


Figura 11.2

Proposición 5.1.1. La circunferencia es el conjunto de punto P de un plano cuya distancia a un punto fijo C, llamado centro, es constante. Esta constante es el radio de la circunferencia.

D/ Por el Teorema de Pitágoras

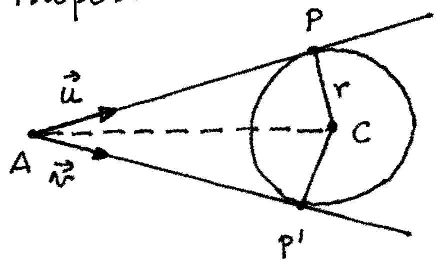


$$\|\vec{CP}\| = \sqrt{\|\vec{VP}\|^2 - \|\vec{CV}\|^2} \quad , \ P \in \text{Circunferencia},$$

y la expresión de la derecha no depende de P.

— x —

Proposición 5.1.2.



Los puntos de tangencia P y P' a una circunferencia desde un punto A exterior a la circunferencia satisfacen

$$\|\vec{AP}\| = \|\vec{AP'}\|$$

Además, $\vec{CP} \perp \vec{AP}$ y $\vec{CP'} \perp \vec{AP'}$.

D/ Sea $\vec{u}$ unitario en la dirección de $\vec{AP}$ y escribe $\lambda = \|\vec{AP}\|$:

$$r^2 = \|\vec{CP}\|^2 = \|\vec{CA} + \vec{AP}\|^2 = \|\vec{CA} + \lambda\vec{u}\|^2 = \lambda^2 + 2\lambda\langle\vec{CA}, \vec{u}\rangle + \|\vec{CA}\|^2$$

Esta ecuación solo tiene la solución $\lambda = \|\vec{AP}\|$, por lo que su discriminante es nulo:

$$\langle\vec{CA}, \vec{u}\rangle^2 = \|\vec{CA}\|^2 - r^2 \qquad (1)$$

y la solución es

$$\|\vec{AP}\| = \lambda = -\langle\vec{CA}, \vec{u}\rangle \qquad (2)$$

Si $\vec{v}$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{AP'}$, el mismo razonamiento anterior produce

$$\langle\vec{CA}, \vec{v}\rangle^2 = \|\vec{CA}\|^2 - r^2 \qquad (3)$$

y

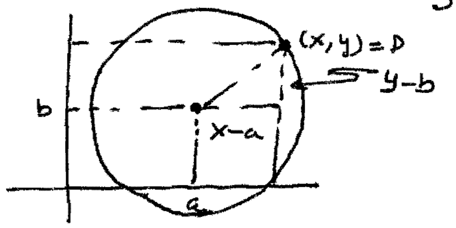
$$\|\vec{AP'}\| = -\langle\vec{CA}, \vec{v}\rangle \qquad (4)$$

De estas cuatro igualdades se deduce $\|\vec{AP}\| = \|\vec{AP'}\|$. Además, de (1) y (2) se deduce que $\|\vec{AP}\|^2 = \|\vec{CA}\|^2 - \|\vec{CP}\|^2$, por lo que el triángulo $\overset{\triangle}{APC}$ es rectángulo (Pitágoras) con ángulo recto en P. Igual se hace para el ángulo en P' con (3) y (4).

— x —

En un s. de r. cartesiano en $\mathbb{R}^2$, la ecuación de una circunferencia de centro $C=(a,b)$ y radio r es

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



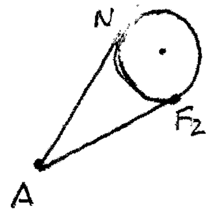
x

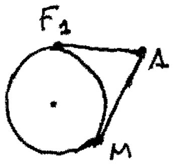
Proposición 5.1.3. Una elipse es el lugar geométrico de los puntos A de un plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos distintos, llamados focos, F_1 y F_2, es constante:

$$\|\vec{AF_1}\| + \|\vec{AF_2}\| = \text{constante}$$

D/ En la figura de la derecha F_1 y F_2 son los puntos de tangencia del plano π con las esferas tangentes al cono y al plano.

Con A cualquier punto de la elipse y M y N los puntos de tangencia de la generatriz del cono que pasa por A con las esferas se tiene





$\|\vec{AF_2}\| = \|\vec{AN}\|$ $\quad$ $\|\vec{AF_1}\| = \|\vec{AM}\|$

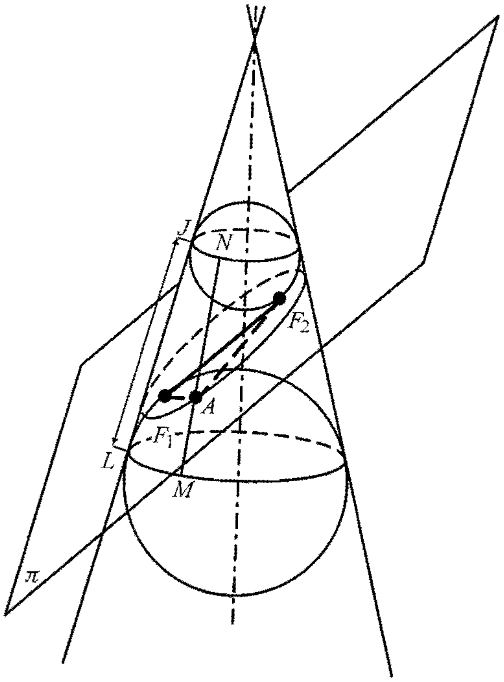
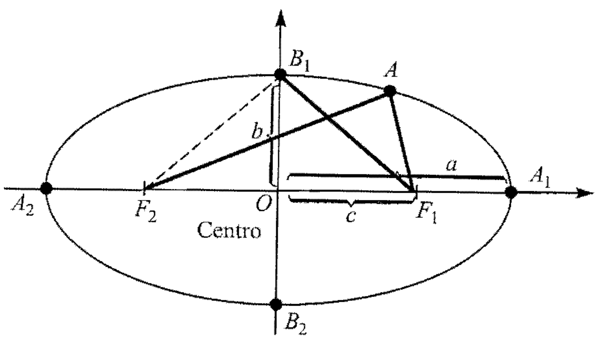


Figura 11.5

$$\|\vec{AF_1}\|+\|\vec{AF_2}\| = \|\vec{NA}\|+\|\vec{AM}\| = \|\vec{NM}\|$$

y esta última distancia es cte.

x



A_1, A_2, B_1, B_2 son vértices

Figura 11.6

Nomenclatura:

Eje principal: contiene a F_1 y F_2 (focos)

Eje secundario

Vértices

Centro

a = semieje mayor

b = semieje menor

$2c$ = distancia focal

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ excentricidad $(\varepsilon < 1)$

Aplicando la definición de elipse a A_1 (vértice) y A_2 (vértice)

$$\|\vec{A_1F_1}\| + \|\vec{A_1F_2}\| = cte = \|\vec{A_2F_1}\| + \|\vec{A_2F_2}\|$$

$$\|\vec{A_1F_1}\| + \|\vec{A_1F_1}\| + \|\vec{F_1F_2}\| = \|\vec{A_2F_2}\| + \|\vec{F_2F_1}\| + \|\vec{A_2F_2}\|$$

$$\|\vec{A_1F_1}\| = \|\vec{A_2F_2}\|$$

Por tanto, para todo A de la elipse

$$\|\vec{AF_1}\| + \|\vec{AF_2}\| = \|\vec{A_1F_1}\| + \|\vec{A_1F_2}\| = \|\vec{A_2F_2}\| + \|\vec{A_1F_2}\| = 2a$$

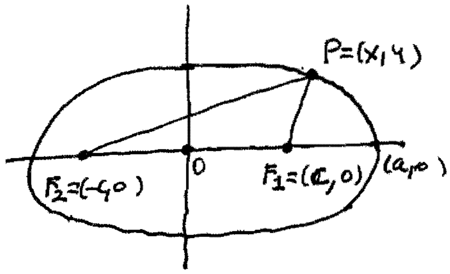
Para el vértice B_1 se tiene

$$2\|\vec{B_1F_1}\| = \|\vec{B_1F_1}\| + \|\vec{B_2F_2}\| = 2a \Rightarrow \|\vec{B_1F_1}\| = a$$

El Teorema de Pitágoras aplicado a $B_1\overset{\triangle}{O}F_1$ produce

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

—— x ——



Si una elipse tiene sus focos en un s. de r. cartesiano en los puntos

$$F_1 = (c,0) \quad y \quad F_2 = (-c,0)$$

todo punto $P=(x,y)$ de la elipse satisface

$$2a = \|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$4a^2 + x^2 + 2xc + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$a^2 + xc = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

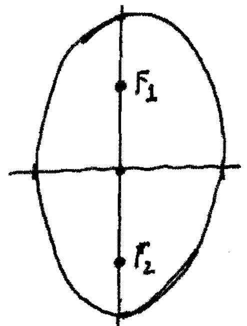
$$a^4 + 2cxa^2 + x^2c^2 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$(b^2 = a^2 - c^2)$

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

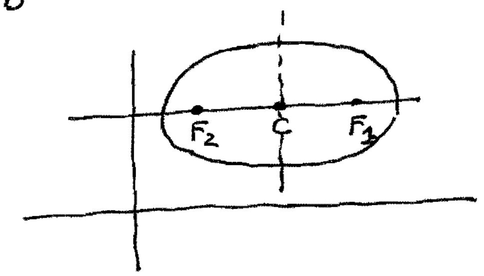
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

forma canónica de una elipse



Si los focos están en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$ la ecuación de la elipse es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$



Si ~~el~~ centro $C = (c_1, c_2)$ y los focos están en los puntos

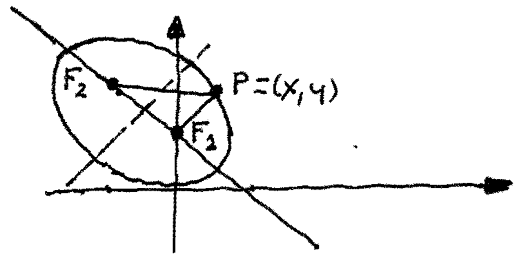
$$F_1 = (c_1 + c, c_1), \quad F_2 = (c_1 - c, c_2)$$

la ecuacion es

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1.$$

———————— x ————————

EJEMPLO A. Halla la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F_1 = (0, 1)$ y $F_2 = (-1, 2)$ y semieje mayor $a = \sqrt{2}$



S/

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

Elevando al cuadrado ...

$$8 + 2x - 4y + 5 - 4\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = -2y + 1$$

$$x - y + 6 = 2\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 + y^2 + 36 - 2xy + 12x - 12y = 8(x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5)$$

Simplificando

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 4x - 20y - 4 = 0$$

———————— x ————————

Proposición 5.1.4. Todos los puntos P de una hipérbola satisfacen

$$\left| \|\overrightarrow{PF_1}\| - \|PF_2\| \right| = cte$$

donde F_1 y F_2 son dos puntos fijos, llamados focos.

D/ Similar al caso de la elipse usando la Figura 11.7 ∎

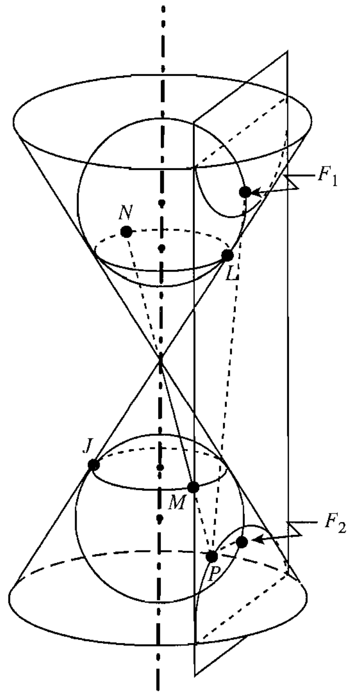


Figura 11.7

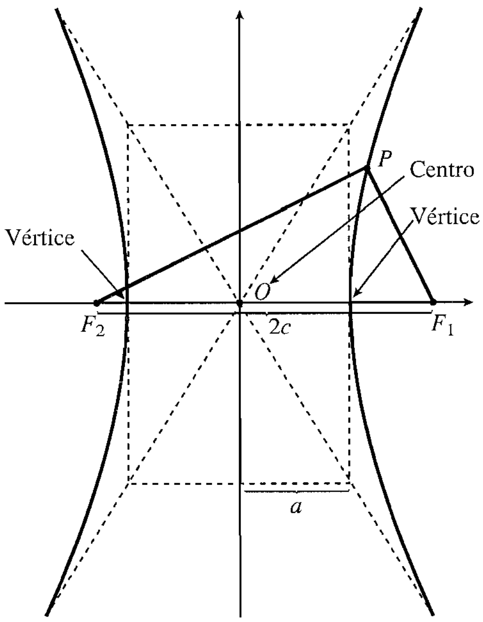


Figura 11.8

• Nomenclatura (Ver Figura 11.8)

Eje principal: contiene a F_1 y F_2 (focos)

Eje secundario

Vértices

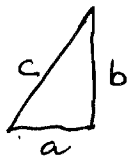
Centro

a = semieje mayor

$2c$ = distancia focal

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ (excentricidad) ($\varepsilon > 1$)

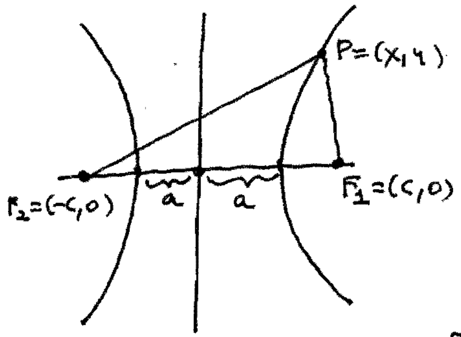
Definimos: $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{\varepsilon^2 a^2 - a^2} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$



Como en el caso de la elipse puede demostrarse que para una hipérbola

$$\left| \, \|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| \, \right| = 2a .$$

———— x ————



Si una hipérbola tiene sus focos en un s.d.r. cartesiano en los puntos

$F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$

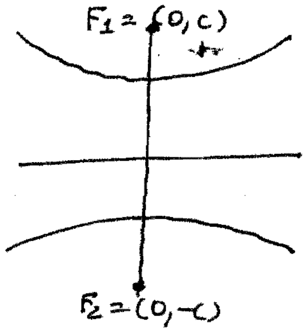
todo punto $P=(x,y)$ de la hipérbola satisface

$$\pm 2a = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Procediendo como en el caso de la elipse se obtiene

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Forma canónica de una hipérbola

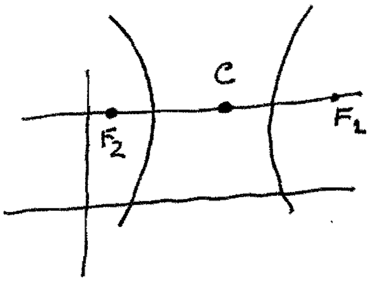


Si los focos están en los puntos

$F_1=(0,c)$ y $F_2=(0,-c)$

la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 .$$



Si el centro es el punto $C=(c_1,c_2)$

y $F_1=(c_1+c,\, c_1)$, $F_2=(c_1-c,\, c_2)$

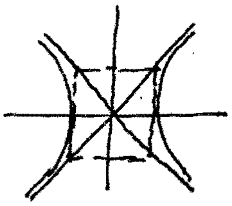
la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1 .$$

———— x ————

Proposición 5.1.5.

Las asíntotas de una hipérbola son las rectas que pasan por su centro y tienen pendiente $\pm \frac{b}{a}$ (para hipérbolas con ejes paralelos a los ejes cartesianos elegidos)



D/ Después de hacer ~~un giro y~~ una traslación (que no cambian las distancias) podemos suponer que el centro de la hipérbola es $C=(0,0)$ y su ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tiene dos ~~ramas~~ partes cuyas ecuaciones son

$$(1) \quad y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \quad , \quad (2) \quad y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

Para la ~~rama~~ parte (1) ~~una~~ asíntota es la recta $y = mx+p$ con

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{x} = \lim_{x\to \infty} \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}$$

y

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \mp \frac{b}{a}x \right) =$$

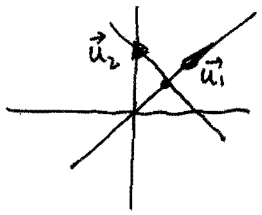
$$= \lim_{x\to\infty} \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) - \frac{b^2}{a^2}x^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} + \frac{b}{a}x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-b^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} + \frac{b}{a}x} = 0$$

De manera similar se obtienen las asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$ para la parte (2)

———— x ————

NOTA:

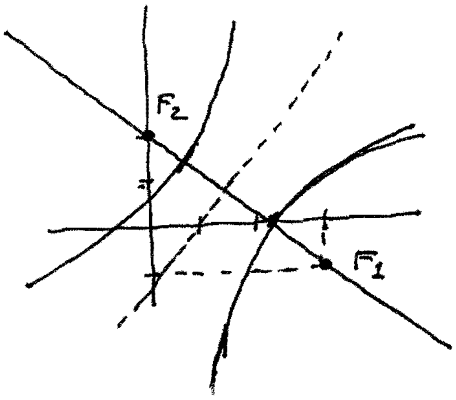


Para una hipérbola de centro $C=(c_1,c_2)$ y ejes $C+\langle\vec{u}_1\rangle$, $C+\langle\vec{u}_2\rangle$ con $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ base o.n. orientada, las asíntotas son

$$C+\langle a\vec{u}_1+b\vec{u}_2\rangle \quad , \quad C+\langle a\vec{u}_1-b\vec{u}_2\rangle$$

en el sistema de referencia cartesiano.

EJEMPLO B. Halla la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $F_1=(3,-1)$ y $F_2=(0,2)$ y semieje mayor $a=\sqrt{2}$



S/
$$\pm 2\sqrt{2} = \sqrt{(x-3)+(y+1)^2} - \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$x^2+y^2-4y+4+8 \pm 4\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$= x^2-6x+9+y^2+2y+1$$

$$\pm 4\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-2)^2} = -6x+6y-2$$

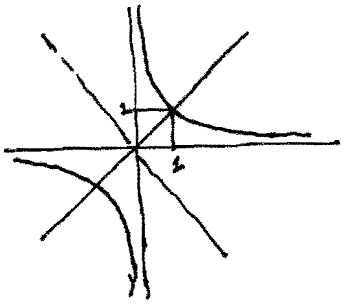
$$32(x^2+y^2-4y+4) = 36x^2+36y^2+4-72xy+24x-24y$$

$$4x^2+4y^2-72xy+24x+104y-124=0$$

$$x^2+y^2-18xy+6x+26y-31=0$$

———x ———x ———

EJEMPLO C. Halla la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $F_1=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y $F_2=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y semieje mayor $a=\sqrt{2}$



S/ $$\pm 2\sqrt{2} = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}$$

$$8 \pm 4\sqrt{2}\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} + x^2+2\sqrt{2}x+2$$

$$+y^2+2\sqrt{2}y+2 = x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-2\sqrt{2}y+2$$

$$\pm 4\sqrt{2}\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} = -4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y-8$$

$$x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2 = x^2+y^2+2+2xy+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y$$

$$\boxed{xy=1}$$

———x ———x ———

Las parábolas satisfacen una propiedad diferente de las de las de las elipses y las hipérbolas, aunque también compartida por éstas

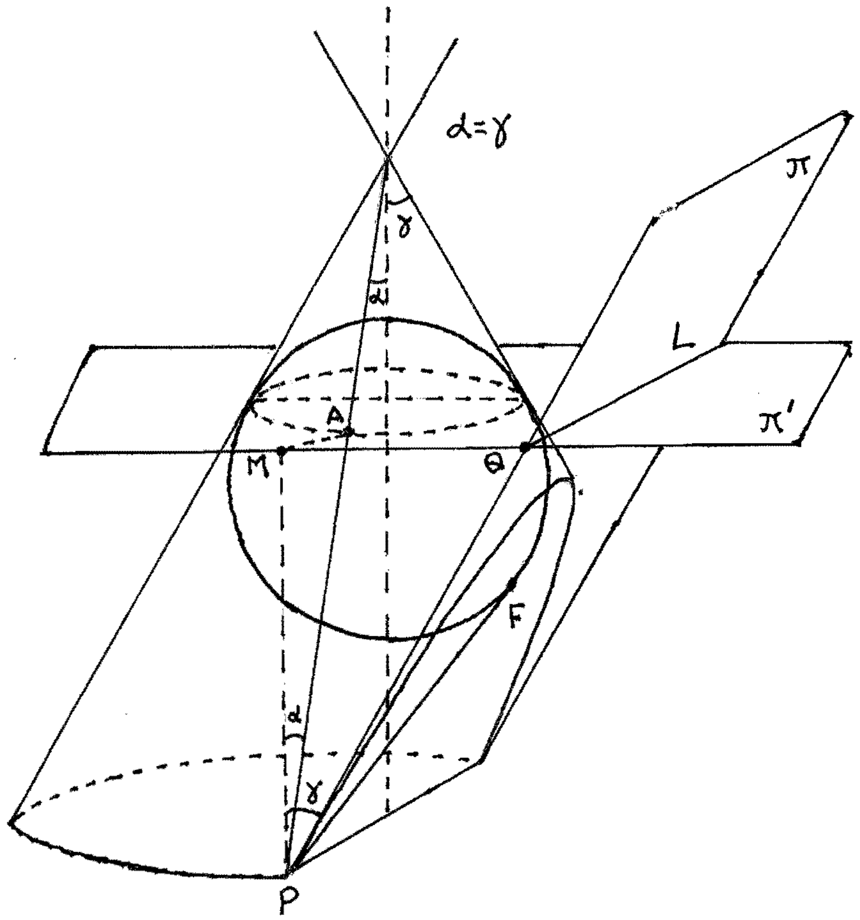
Proposición 5.1.6.

Dada una cónica no degenerada existe un punto F, llamado <u>foco</u>, una recta L, lamada <u>directriz</u> (ambos en el plano de la cónica) y un número $\varepsilon > 0$, llamado <u>excentricidad</u>, tal que todo punto P de la cónica satisface

$$\|\overline{PF}\| = \varepsilon\, d(P, L)$$

Si $\varepsilon < 1$ se tiene una <u>elipse</u>, si $\varepsilon > 1$ es una <u>hipérbola</u> y si $\varepsilon = 1$ es una <u>parábola</u>

D/ (Para la parábola)



Sea π el plano de la cónica. Dibujar la esfera inscrita en el cono y tangente a π como en la figura. El foco, F, es el punto de tangencia de la esfera y el plano π. Sea π' el plano que

contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera.
La directriz, L, es la recta intersección de los planos π y π'.
Con la notación de la figura

$$\|\overline{PF}\| = \|\overline{PA}\|$$

por la prop 5.1.2. Sea $Q \in L$ tal que $d(P,Q) = d(P,L)$. En el triángulo rectángulo $P\hat{M}A$, $\cos\alpha = \dfrac{\|PM\|}{\|PA\|}$. En el triángulo rectángulo $P\hat{M}Q$, $\cos\gamma = \dfrac{\|\overline{PM}\|}{\|\overline{PQ}\|}$. Como $\alpha = \gamma$, ya que ambos son el ángulo que forma el eje del cono con cualquiera de sus generatrices,

$$\|\vec{PF}\| = \|\overline{PA}\| = \frac{\|\overline{PM}\|}{\cos\alpha} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\|\overline{PQ}\| = d(P,Q) = d(P,L). \quad \blacksquare$$

———— x ————

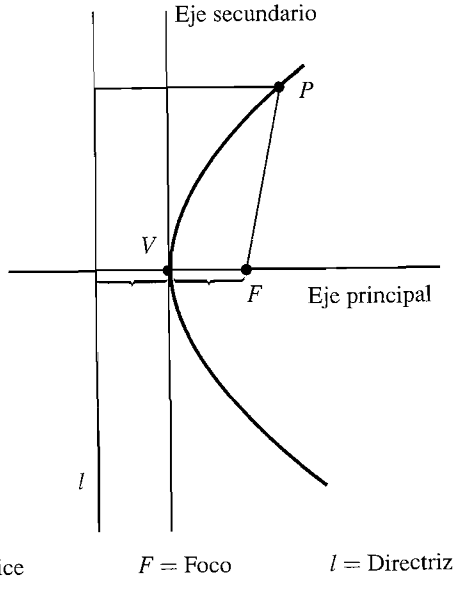


Figura 11.13

Nomenclatura

Eje principal: recta perpendicular a la directriz L que pasa por el foco F

Vértice(V): intersección del eje principal con la parábola

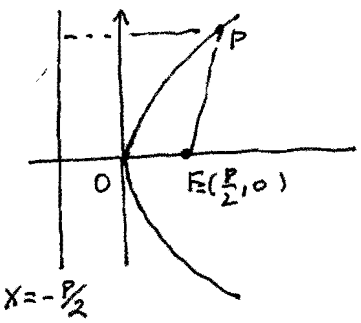
Eje secundario: recta perpendicular al eje principal que pasa por el vértice V.

———— x ————

Sea $p = d(F, L)$ en una parábola. Como el vértice V está en la parábola, $d(F,V) = d(V,L)$ y por tanto

$$d(F,V) = d(V,L) = p/2$$

x



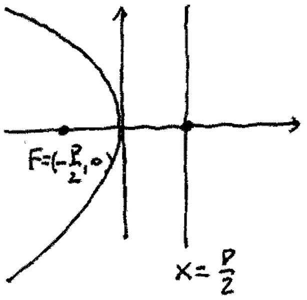
La ecuación de una parábola con foco en $F=(\frac{p}{2},0)$ y directriz $x=-p/2$ es

$$d(P,F)=\sqrt{(x-\tfrac{p}{2})^2+y^2} = d(P,L) = x+\frac{p}{2}$$

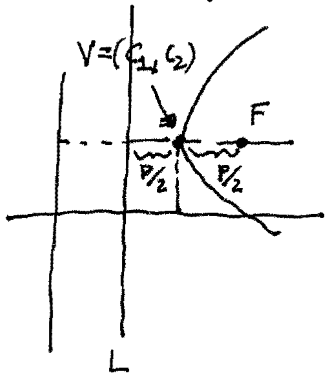
Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$y^2 = 2px$$

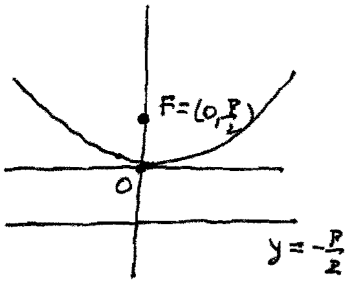
Otros casos sencillos:



$$y^2 = -2px$$



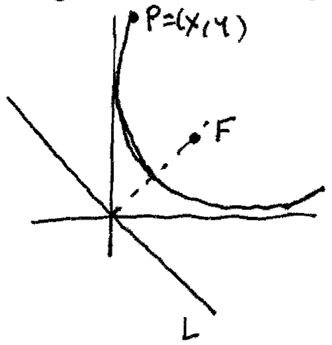
$$(y-c_2)^2 = 2p(x-c_1)$$



$$x^2 = 2py$$

x

EJEMPLO D. Halla la ecuación de la parábola de foco $F=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y directriz $y=-x$



S/ $d(P,F)=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} = d(P,L) = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-2\sqrt{2}y+2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy)$$

$$x^2+y^2-2xy-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y+8=0$$

x

5.2. PROPIEDADES DE REFLEXIÓN DE LAS CÓNICAS

Proposición 5.2.1. La tangente y la normal a una elipse E en un punto $P \in E$ son las bisectrices de las rectas que unen P con los focos

D/

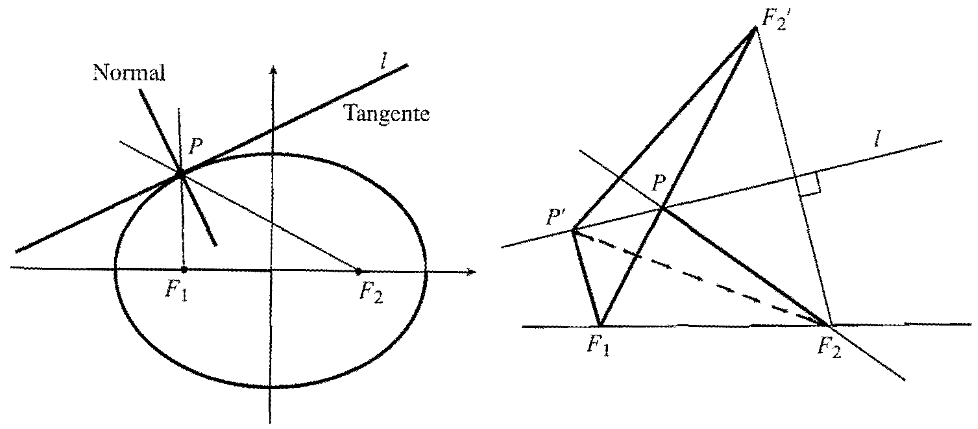


Figura 11.15

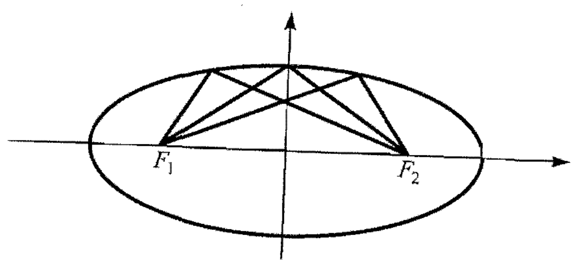
Dados los focos F_1 y F_2 sea l la bisectriz de PF_1 y PF_2 como indica la figura. Sea F_2' el simétrico de F_2 respecto a l. Basta demostrar que cualquier $P' \in E$ está en el exterior de la elipse E, ya que entonces L toca a E solo en el punto P y es, por tanto, la tangente. En la figura 11.15 tenemos

$$2a \le \|\overline{PF_1}\| + \|\overline{PF_2}\| = \|\overline{PF_1}\| + \|\overline{PF_2'}\| = \|\overline{F_1F_2'}\| < \|F_1P'\| + \|P'F_2'\|$$

$$= \|\overline{F_1P'}\| + \|\overline{P'F_2}\|$$

y se tiene la igualdad sólo si $P' = P$. La otra bisectriz es la normal a la elipse en P. ∎

x



"El secreto del salón ovalado" (Cuentos con Cuentas, Miguel de Guzmán, Ed. Nivola 2008)

Los rayos de luz que parten de un foco se reflejan en la elipse pasando por el otro foco.

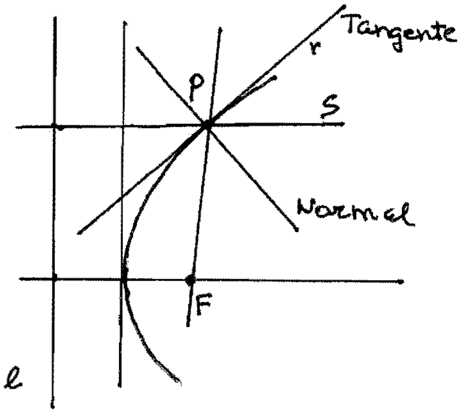
Para las hipérbolas hay un resultado semejante cuya demostración se deja como ejercicio.

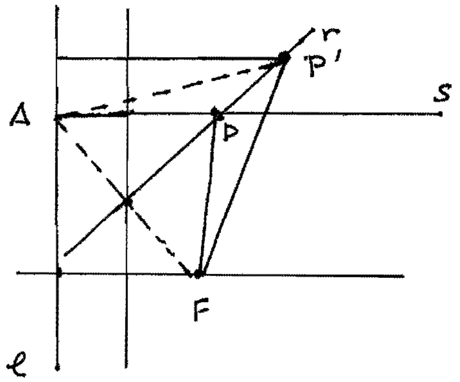
Proposición 5.2.2. La tangente y la normal a una hipérbola H en un punto $P \in H$ son las bisectrices de las rectas que unen P con los focos.

Para las parábolas:

Proposición 5.2.3. La tangente y la normal a una parábola en un punto P son las bisectrices de la normal a la directriz por P y la recta que une P con el foco.

D/





Sea s la recta paralela al eje de la parábola que pasa por P, r la bisectriz de s y $\overline{PF}$ y A el simétrico de F respecto a r. A es un punto de r porque $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PA}\|$. Para cualquier otro punto $P' \neq P$ de r se tiene

$$\|\overrightarrow{P'F}\| = \|\overrightarrow{P'A}\| > d(P', \ell).$$

Por tanto P' está en el exterior de la parábola. ■

x

Espejos parabólicos: los rayos de luz paralelos al eje de la parábola se reflejan en esta pasando por el foco.

x

Estas propiedades de las cónicas se usan en los telescopios