Fracciones continuas

1. Las fracciones continuas aparecen al dividir

Para entender qué objeto es eso que llamamos una *fracción continua*, examinemos un ejemplo sencillo.

Al aplicar el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de 55 y 43, obtenemos como pasos intermedios las expresiones

$$\begin{aligned} 55 &= 1\cdot 43+12,\\ 43 &= 3\cdot 12+7,\\ 12 &= 1\cdot 7+5,\\ 7 &= 1\cdot 5+2,\\ 5 &= 2\cdot 2+1,\\ 2 &= 2\cdot 1+0. \end{aligned}$$

Los números 1, 3, 1, 1, 2, 2 son los cocientes parciales del algoritmo. Utilizando esta información podemos escribir el número racional $\dfrac{55}{43}$ de una forma curiosa:

$$\tfrac{55}{43}=1+\tfrac{12}{43}=1+\tfrac{1}{\frac{43}{12}}=1+\tfrac{1}{3+\frac{7}{12}}=1+\tfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{5}{7}}}=1+\tfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}}=1+\tfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}.$$

La expresión de más a la derecha de esta cadena de igualdades es lo que se conoce como una fracción continua (simple) finita. Para describirla de una forma más compacta, utilizaremos la siguiente notación:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}} =: [1;3,1,1,2,2].$$

Por supuesto, no hay nada de especial en los números 55 y 43. Podemos seguir el mismo procedimiento con dos enteros cualesquiera, a, b con $a\neq 0$ para escribir el número racional b/a como una fracción continua finita.

Observación. Es fácil convencerse de que

$$(*)\quad [a_0;a_1,\dots,a_{n-1},1]=[a_0;a_1,\dots,a_{n-1}+1],$$

de modo que dos fracciones continuas finitas distintas pueden producir el mismo número racional. Sin embargo $(*)$ es la única ambigüedad posible, de modo que si convenimos imponer que toda fracción continua finita $[a_0;a_1,\dots,a_m]$ tenga $a_m>1$, la representación de un número racional $x>1$ como fracción continua es única.

2. Las fracciones continuas aparecen al resolver ecuaciones

Consideremos la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuya única solución positiva es la llamada *razón áurea*, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observa que podemos reescribir la identidad

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

como

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Sustituyendo en esta identidad la Φ del denominador por $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ se obtiene

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}.$$

Repitiendo este proceso de sustitución "hasta el infinito", podemos escribir

$$\text{“}\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}\text{”}$$

El lado derecho de esta expresión es un ejemplo de una *fracción continua infinita*. ¿Por qué hemos puesto la igualdad entre comillas? Porque tenemos que dar sentido al lado derecho de la expresión, a la fracción continua infinita.

3. Fracciones continuas infinitas. Convergentes

Supongamos ahora que a_0 es un entero arbitrario (positivo, negativo o cero), y que $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera de enteros positivos. Llamamos n-ésimo convergente de la fracción continua infinita (simple) $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ a la fracción continua finita $c_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Nótese que c_n está bien definido, y que es un número racional. Si el límite $\lim_{n\to\infty} c_n$ existe, decimos que la fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ converge, y denotamos $[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n\to\infty} c_n$.

Un sencillo argumento de inducción permite demostrar que los convergentes $c_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ pueden describirse como

$$c_n = \frac{p_n}{q_n},$$

donde las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ vienen dadas por las *relaciones de recurrencia de Wallis-Euler*:

$$\boxed{\begin{array}{llll} p_0 = a_0, & p_1 = a_0 a_1 + 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{para} \quad n \geq 2 \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{para} \quad n \geq 2 \end{array}}$$

No es difícil demostrar a partir de aquí que se cumple

$$\left.\begin{array}{r} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \\ p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n \end{array}\right\} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Como consecuencia inmediata se obtiene que p_n y q_n son coprimos. Además, aplicando sucesivas veces estas identidades se obtiene que

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \qquad c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Por otra parte, $q_n < q_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, y además $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$, por lo que concluimos que las fracciones continuas infinitas (simples) siempre convergen a un cierto $\alpha = \lim_{n\to\infty} c_n$, y que los convergentes satisfacen

$$c_0 < c_2 < c_4 < \cdots < c_{2_n} < \cdots < \alpha < \cdots < c_{2n-1} < \cdots < c_5 < c_3 < c_1.$$

Se tiene además la estimación

$$|\alpha - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

válida para todos los valores de n, lo que implica que α no puede ser racional. Así pues, **una fracción continua (simple) es racional si y sólo si es finita**.

Ejemplo. En particular, la fracción continua $\Phi := [1; 1, 1, 1, \dots]$ converge. ¿A qué converge? Nótese que si denotamos por x su valor, tenemos

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x},$$

así que x es un número positivo que verifica la identidad $x^2 - x - 1$, de modo que $x = \Phi$.

También podemos obtener esta misma conclusión a partir de los convergentes. En efecto, el n-ésimo convergente de esa fracción continua es

$$c_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}} = 1 + \frac{1}{c_{n-1}}.$$

Por lo tanto, si denotamos $y = \lim_{n\to\infty} c_n$, que sabemos que existe, tomando $n \to \infty$ en ambos miembros de la identidad $c_n = 1 + \dfrac{1}{c_{n-1}}$ obtenemos que $y = 1 + \frac{1}{y}$. Concluimos que y es la única solución positiva de $y^2 - y - 1 = 0$, es decir, $y = \Phi$.

4. Algoritmo canónico para obtener la fracción continua de un número irracional

¿Cómo construir la expansión en fracciones continuas de un número real? Ya sabemos cómo hacerlo para números racionales; el mismo método, interpretado adecuadamente, funcionará para irracionales, de manera que vamos a revisarlo.

Consideremos el número $\dfrac{157}{68} = [2; 3, 4, 5]$. Veamos de nuevo cómo se obtiene su expansión en fracciones continuas.

En primer lugar escribimos $\xi_0 := \dfrac{157}{68}$ como

$$\xi_0 = 2 + \frac{1}{\xi_1}, \qquad \text{donde } \xi_1 = \frac{68}{21} > 1.$$

En particular, $a_0 = 2 = \lfloor \xi_0 \rfloor$ donde, para cada número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que x. Ahora escribimos $\xi_1 = \dfrac{68}{21}$ como

$$\xi_1 = 3 + \frac{1}{\xi_2}, \qquad \text{donde } \xi_2 = \frac{21}{5} > 1.$$

En particular $a_1 = 3 = \lfloor \xi_1 \rfloor$. En tercer lugar, escribimos

$$\xi_2 = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{\xi_3}, \qquad \text{donde } \xi_3 = 5 > 1.$$

En particular $a_2 = 4 = \lfloor \xi_2 \rfloor$. Finalmente, $a_3 = \lfloor \xi_3 \rfloor = \xi_3$ no se puede descomponer más, de manera que *paramos* aquí. Por consiguiente,

$$\frac{157}{68} = \xi_0 = 2 + \frac{1}{\xi_1} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi_2}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\xi_3}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}$$

Acabamos de encontrar la fracción continua canónica (simple) de 157/68. Nótese que acabamos con el número 5, que es mayor que 1; este será siempre el caso cuando apliquemos el procedimiento a un número racional no entero.

¡Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento para los números irracionales! Sea ξ un número irracional. Hacemos $\xi_0 = \xi$ y definimos $a_0 := \lfloor \xi_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$. Entonces, $0 < \xi_0 - a_0 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}, \qquad \text{donde } \xi_1 := \frac{1}{\xi_0 - a_0} > 1.$$

Nótese que ξ_1 es irracional. En segundo lugar, definimos $a_1 := \lfloor \xi_1 \rfloor \in \mathbb{N}$. Entonces $0 < \xi_1 - a_1 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \qquad \text{donde } \xi_2 := \frac{1}{\xi_1 - a_1} > 1.$$

Nótese que ξ_2 es irracional. En tercer lugar, definimos $a_2 := \lfloor \xi_1 \rfloor \in \mathbb{N}$. Entonces $0 < \xi_2 - a_2 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3}, \qquad \text{donde } \xi_3 := \frac{1}{\xi_2 - a_2} > 1.$$

Nótese que ξ_3 es irracional. Podemos continuar este procedimiento "hasta el infinito", creando una sucesión de números reales $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales con $\xi_n > 0$ para $n \geq 1$ llamada la *sucesión de cocientes completos* de ξ, y una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de enteros con $a_n > 0$ para $n \geq 1$ llamada la *sucesión de cocientes parciales* de ξ, tales que

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Por consiguiente,

$$\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = \xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\xi_2}} = \cdots \text{``} = \text{''} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}.$$

No es en principio obvio que la fracción continua infinita de la derecha coincida con el propio ξ (de ahí las comillas), pero es algo que puede demostrarse, así que esa igualdad es cierta.

En resumen, $\xi = [a_0; a_1, \ldots]$, donde la forma de obtener los coeficientes es

$$\boxed{\xi_0 = \xi, \quad a_n = \lfloor \xi_n \rfloor \text{ para } n \geq 0, \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}}$$