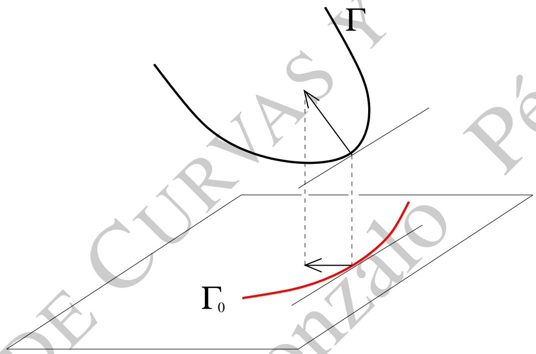
3 Curvas espaciales: derivadas segundas y terceras

A menudo tendremos una superficie y nos interesará estudiar las curvas contenidas en ella, pero en este capítulo estudiamos una curva flotando *desnuda* en el espacio $\mathbb{R}^3$: sin una superficie que la soporte. Una consecuencia de la ausencia de una superficie que soporte a la curva será la necesidad de utilizar derivadas de tercer orden.
En todo el capítulo 2 hemos supuesto que la curva era regular, para tener parametrizaciones por longitud de arco y poder definir el vector curvatura. A partir del apartado 3.2, suponemos en este capítulo que la curva espacial es *birregular,* una condición más fuerte que la regularidad y que, aunque no es imprescindible para el desarrollo de la teoría, simplifica mucho la exposición.

3.1 El teorema de proyección

Teorema 40. *Sea α una curva regular en $\mathbb{R}^3$, sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano afín paralelo a la recta tangente a α en $t = t_0$ y sea $\vec{P}$ el plano vectorial paralelo a P. La proyección ortogonal de α sobre P es una curva plana $\alpha_0 \subset P$, con las siguientes propiedades:*

1. *α_0 es regular en $t = t_0$.*
2. *El vector curvatura de α_0 en $t = t_0$ es la proyección ortogonal sobre $\vec{P}$ del vector curvatura de α en $t = t_0$.*



Demostración. Sea $\beta(s)$ una reparametrización de α por longitud de arco y $s = s_0$ el valor correspondiente a $t = t_0$. Sea $\mathbf{t}_0 = \beta'(s_0)$. Tenemos $\mathbf{t}_0 \in \vec{P}$ por hipótesis.
Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ la proyección ortogonal del espacio sobre el plano P y sea $\vec{\pi} : \mathbb{R}^3 \to \vec{P}$ la parte lineal de π. Entonces $\beta_0(s) \equiv \pi \circ \beta(s)$ es una reparametrización de α_0 y la aceleración $\beta_0''(s)$ es la proyectada $\vec{\pi}\big(\beta''(s)\big)$ de la aceleración de β. En vista de esto, el teorema sería una obviedad si no fuera porque $\beta_0(s)$ *ya no es parametrización por longitud de arco.*
Para calcular el vector curvatura de β_0 debemos hallar la parte de $\beta_0''/\|\beta_0'\|^2$ normal a β_0. Ahora bien, al ser el plano P paralelo al vector $\mathbf{t}_0$ tenemos $\beta_0'(s_0) = \vec{\pi}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{t}_0$. La primera consecuencia es que $\beta_0(s)$ es un camino regular en $s = s_0$ y ahí tiene rapidez 1. La segunda consecuencia es que $\beta_0''(s_0)/\|\beta_0'(s_0)\|^2 = \beta_0''(s_0) = \vec{\pi}\big(\beta''(s_0)\big)$ es ortogonal a $\mathbf{t}_0$, porque el vector $\beta''(s_0)$ es ortogonal a $\mathbf{t}_0$ y $\vec{\pi}\big(\beta''(s_0)\big) = \beta''(s_0) - \mathbf{v}$ siendo $\mathbf{v}$ un vector ortogonal a $\vec{P}$ y, en particular, ortogonal a $\mathbf{t}_0$. En definitiva $\mathbf{k}_{\beta_0}(s_0) = \beta_0''(s_0) = \vec{\pi}\big(\beta''(s_0)\big) = \vec{\pi}\big(\mathbf{k}_\beta(s_0)\big)$. □

3.2 Plano osculador y triedro de Frenet

Definición 41. *Sea $\alpha(t)$ una curva paramétrica en $\mathbb{R}^3$. Decimos que α es* ***birregular*** *en el valor paramétrico $t = t_0$ si es regular en dicho valor y además $\mathbf{k}_\alpha(t_0) \neq \mathbf{0}$.*
Decimos que α es ***birregular*** *si es birregular en todo valor paramétrico.*

Para comprobar si una curva es birregular no es necesario hallar el vector curvatura, podemos hacerlo directamente en cualquier parámetro regular gracias al siguiente resultado.

Proposición 42. *Sea $\alpha_0(t)$ camino regular en $\mathbb{R}^3$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\alpha_0'(t)$ y $\alpha_0''(t)$ son linealmente independientes.*
2. *Toda reparametrización $\alpha(\bar{t})$ de α_0 tiene α' y α'' linealmente independientes.*
3. $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

Demostración. Fijemos $\gamma(s)$, $s \in J$, reparametrización por arco de α_0, y sean $\mathbf{t} \equiv \gamma'(s), \mathbf{k} \equiv \gamma''(s)$. Sean $s(t) : \bar{J} \to J$ un difeomorfismo cualquiera y $\alpha(t) \equiv \gamma\big(s(t)\big)$, $t \in \bar{J}$, la reparametrización correspondiente (la α_0 es una de éstas). Velocidad y aceleración vienen dadas por las siguientes fórmulas, vistas en el apartado 2.2:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &\equiv s'(t)\mathbf{t}(s)|_{s=s(t)} \,, \\ \alpha''(t) &\equiv \big(s''(t)\mathbf{t}(s) + s'(t)^2\mathbf{k}(s)\big)\big|_{s=s(t)} \,. \end{aligned}$$

Fijamos valores $s_0 \in J$ y t_0. Dados números *cualesquiera* a, b, con $a \neq 0$, existen $\bar{J} \ni t_0$ y difeomorfismos $s(t) : \bar{J} \to J$ tales que:

$$s(t_0) = s_0 \;\;,\;\; s'(t_0) = a \;\;,\;\; s''(t_0) = b \,,$$

y nos van dando reparametrizaciones $\alpha(t)$ de $\gamma(s)$ que al pasar por $t = t_0$ tienen:

$$\alpha'(t_0) \;=\; a\,\mathbf{t}(s_0) \quad , \quad \alpha''(t_0) \;=\; b\,\mathbf{t}(s_0) + a^2\,\mathbf{k}(s_0) \,.$$

Como $a \neq 0$, tenemos igualdad de los espacios vectoriales generados:

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha''(t_0) \rangle \;=\; \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{k}(s_0) \rangle \,,$$

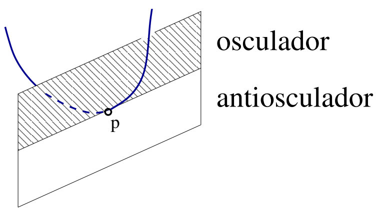
para todas las parejas a, b con $a \neq 0$. Cada una de las condiciones 1., 2. y 3. equivale a que este espacio vectorial tenga dimensión 2. □

Fíjate: las posibles aceleraciones, al pasar por el valor correspondiente a s_0, de todas las reparametrizaciones α de γ, forman un *semiplano:* $\{\, b\,\mathbf{t}(s_0) + c\,\mathbf{k}(s_0) \,:\, b \text{ cualquiera}\,,\; c > 0 \,\}$.

Definición 43. *Sea $\alpha(t)$ camino birregular en $\mathbb{R}^3$. El* ***plano osculador vectorial*** *de α en $t = t_0$ es $\langle \mathbf{t}_\alpha(t_0), \mathbf{k}_\alpha(t_0) \rangle$. Coincide con el generado por la velocidad y aceleración $\langle \alpha'(t_0), \alpha''(t_0) \rangle$. El* ***plano osculador afín*** *es el plano $\mathbf{p} + \langle \mathbf{t}_\alpha(t_0), \mathbf{k}_\alpha(t_0) \rangle$ que pasando por el punto $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$ es paralelo al osculador vectorial.*

Recuerda: el vector curvatura $\mathbf{k}$ no existe en los valores paramétricos no regulares. Del mismo modo, nuestra definición del plano osculador no es válida en los valores paramétricos no birregulares. Por ejemplo $\alpha(t) \equiv (t, t^3, t^4)$ es una curva regular pero no es birregular en $t = 0$. Quitado el punto $\alpha(0)$, los tramos de esta curva definidos por $t < 0$ y por $t > 0$ son birregulares.

La recta tangente es la frontera común de dos semiplanos abiertos dentro del plano osculador: uno conteniendo a $\mathbf{k}$, formado por todas las posibles aceleraciones de reparametrizaciones al pasar por $\mathbf{p}$, y otro no conteniendo ninguna de esas aceleraciones. Se les podría llamar **semiplano osculador** y **semiplano antiosculador,** respectivamente.



Definición 44. *Dada una curva espacial birregular, se define su* ***normal unitaria*** *como el campo de vectores a lo largo de la curva dado por* $\mathbf{n} \equiv \dfrac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$. *Se define la* ***curvatura escalar*** *de la curva como* $k \equiv \|\mathbf{k}\|$, *de modo que* $\mathbf{k} \equiv k\,\mathbf{n}$.

Observamos dos diferencias con el caso de curvas planas: para curvas espaciales la curvatura escalar es siempre positiva y necesitamos la derivada segunda para construir la normal unitaria.

Definición 45. *Un* ***triedro ortonormal directo*** *es una base ortonormal* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *que además cumple la condición* $\det[\,\mathbf{u}_1\,|\,\mathbf{u}_2\,|\,\mathbf{u}_3\,] = 1$.

Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ son ortonormales, entonces $\{\,\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\,,\,\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\,\}$ es un triedro ortonormal directo; de hecho es el único triedro ortonormal directo cuyos elementos primero y segundo son $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, respectivamente.

Definición 46. *Dada una curva espacial birregular, se define su* ***binormal*** *como el vector* $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, *que es una normal unitaria del plano osculador. Entonces* $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ *es un campo de triedros ortonormales directos a lo largo de la curva, y recibe el nombre de* ***triedro de Frenet.***

Cabe hacer la misma precisión que hicimos para el diedro de Frenet en el plano: la curva tiene dos triedros de Frenet, porque al invertir el sentido de recorrido los vectores $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ se multiplican ambos por -1. El vector $\mathbf{n}$ sólo depende de la forma de la curva, y no del sentido en que se la recorra.
Todo triedro ortonormal directo cumple las tres relaciones siguientes:

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \;=\; \mathbf{u}_3 \quad , \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 \;=\; \mathbf{u}_1 \quad , \quad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 \;=\; \mathbf{u}_2\,,$$

que se deducen unas de otras permutando *cíclicamente* los índices $1,2,3$. Por lo tanto el triedro de Frenet cumple las siguientes relaciones, a veces muy útiles:

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} \;=\; \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{n} \times \mathbf{b} \;=\; \mathbf{t} \quad , \quad \mathbf{b} \times \mathbf{t} \;=\; \mathbf{n}\,,$$

que se deducen unas de otras permutando cíclicamente la secuencia $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.
En cada punto de la curva hay otros dos planos más, cada uno con versión vectorial y con versión afín. El **plano rectificante** es el ortogonal a $\mathbf{n}$, sólo definido en los valores paramétricos birregulares. El **plano normal** es el ortogonal a $\mathbf{t}$; definido en los valores paramétricos regulares sin que se necesite la condición de birregular.

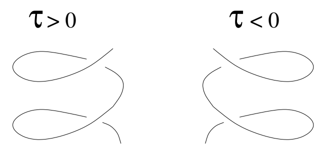
3.3 Torsión y ecuaciones de Frenet-Serret

Sea $\alpha(s)$ una parametrización birregular por longitud de arco. La igualdad $\mathbf{k} \equiv k\mathbf{n}$ puede reescribirse $\mathbf{t}'(s) = k\mathbf{n}$. Examinemos la derivadas, respecto de s, de los otros dos elementos del triedro de Frenet.
Puesto que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \equiv 1$, derivando obtenemos $\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ y $\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{b} \equiv 0$.
De $\mathbf{n}'(s) \perp \mathbf{n}$ deducimos que existen dos funciones $a(s), \tau(s)$ tales que $\mathbf{n}'(s) \equiv a\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$. Además, de $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ obtenemos al derivar $0 \equiv \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}'(s) \equiv k + a$, luego en realidad $a(s) \equiv -k(s)$, y así $\mathbf{n}'(s) \equiv -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$.
Por el mismo método se deduce que $\mathbf{b}'(s) \equiv -\tau\mathbf{n}$. Así, pues, el triedro de Frenet satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\boxed{\left.\begin{array}{rcccc} \mathbf{t}'(s) & = & & k\mathbf{n} & \\ \mathbf{n}'(s) & = & -k\mathbf{t} & + & \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}'(s) & = & & -\tau\mathbf{n} & \end{array}\right\}} \tag{10}$$

que se llaman **ecuaciones de Frenet** o **fórmulas de Frenet-Serret.**

La función escalar τ se llama **torsión** de la curva. Puede ser positiva o negativa, y puede cambiar de signo a lo largo de la curva. Sólo depende de la forma de la curva y no cambia al cambiar el sentido de recorrido. Una **hélice derecha** tiene torsión positiva, mientras que una **hélice izquierda** tiene torsión negativa



Advertencia. M. P. Do Carmo utiliza el convenio opuesto para la torsión : $\mathbf{b}'(s) = \tau_{\mathrm{DC}}\,\mathbf{n}$ (página 18 de la edición inglesa, página 32 de la edición española), con lo cual la "torsión de Do Carmo" τ_{DC} de una hélice derecha es negativa y la de una hélice izquierda es positiva.

Cualitativamente, la torsión nos da una medida de lo "no plana" que es la curva:

Teorema 47. *Una curva birregular es plana si y sólo si tiene torsión idénticamente nula.*

Demostración. Si la curva yace en un plano afín P, entonces este P es el plano osculador afín en todos los puntos de la curva y por lo tanto la normal $\mathbf{b}$ al plano osculador es constante. Entonces $\mathbf{0} \equiv \mathbf{b}'(s) \equiv -\tau\mathbf{n}$ obliga a τ a ser idénticamente nula.
Si una curva birregular tiene $\tau \equiv 0$, entonces $\mathbf{b}$ es un vector constante $\mathbf{b}_0$ y

$$0 \;\equiv\; \mathbf{b}\cdot\mathbf{t} \;\equiv\; \mathbf{b}_0\cdot\alpha'(s) \;\equiv\; \frac{d\big(\mathbf{b}_0\cdot\alpha(s)\big)}{ds}$$

nos da $\mathbf{b}_0\cdot\alpha(s) \equiv c$, con c una constante escalar, y la curva entera está contenida en el plano afín $\{\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \;:\; \mathbf{b}_0\cdot\mathbf{x} = c\,\}$. □

Cuantitativamente, la torsión mide la **velocidad de basculamiento del plano osculador,** igual a la velocidad de cambio de dirección de la normal a dicho plano: $\mathbf{b}'(s) = -\tau\,\mathbf{n}$. Pero veamos otro significado cuantitativo, visualmente más sencillo, de la torsión. Dado un punto birregular $\alpha(s_0) = \mathbf{p}$ de una curva, rotemos y traslademos la curva de modo que $\mathbf{p}$ vaya al origen $(0,0,0)$ y la nueva curva $\beta(s)$ tenga $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{e}_2$, con lo cual forzosamente $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{e}_3$. Pongamos $\beta(s) \equiv \big(x(s), y(s), z(s)\big)$. Al ser $\beta'(s_0) = \mathbf{e}_1$, se tiene $x'(s_0) = 1$ y podemos reparametrizar un trocito de la curva cercano a este punto utilizando x como parámetro, con lo cual resulta una **parametrización grafo:**

$$\gamma(x) \;\equiv\; \big(x\,,\,h_1(x)\,,\,h_2(x)\big) \;\;,\;\; -\varepsilon < x < \varepsilon\,.$$

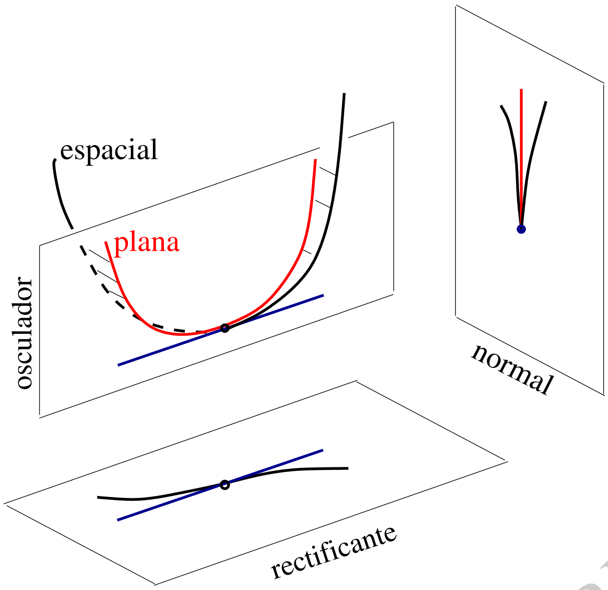
No es difícil demostrar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&h_1'(0) = h_2'(0) = 0\,,\\
&h_1''(0) = k_{s=s_0} \quad , \quad h_2''(0) = 0\,,\\
&h_1'''(0) = k'(s)_{s=s_0} \quad , \quad h_2'''(0) = (k\tau)_{s=s_0}\,.
\end{aligned}$$

Abreviamos $k_{s=s_0}$, $k'(s)_{s=s_0}$, $\tau_{s=s_0}$ por k_0, k_0', τ_0, respectivamente, y tenemos el siguiente desarrollo de Taylor:

$$\gamma(x) \;\equiv\; \left(\; x \;,\; \frac{k_0}{2}x^2 + \frac{k_0'}{6}x^3 + \mathrm{O}(x^4) \;,\; \frac{k_0\tau_0}{6}x^3 + \mathrm{O}(x^4) \;\right).$$

La curva se proyecta al plano osculador como una curva plana $\big(x\,,\,(k_0/2)x^2 + \mathrm{O}(x^3)\big)$ que, tal como predice el teorema de proyección 40, tiene en el punto $\mathbf{0}$ el mismo vector curvatura $(0, k_0, 0)$ que la curva espacial.



La proyección $\big(x\ ,\ (k_0\tau_0/6)x^3 + \mathrm{O}(x^4)\big)$ sobre el plano rectificante tiene curvatura nula en $\mathbf{0}$, que es punto regular suyo. En esta proyección *el plano osculador lo vemos de perfil,* como la recta tangente en el punto de curvatura nula, y vemos que la curva se separa del plano osculador por una **cuña cúbica** que es como $(k_0\tau_0/6)x^3$. También vemos que si $\tau_0 \neq 0$ entonces $\mathbf{0}$ es punto de inflexión de la proyección sobre el plano rectificante, luego la curva espacial *atraviesa tangentemente* a su plano afín osculador en los puntos con $\tau_0 \neq 0$.
Si $\tau_0 \neq 0$ entonces la proyección sobre el plano normal $\big((k_0/2)x^2 + \mathrm{O}(x^3)\ ,\ (k_0\tau_0/6)x^3 + \mathrm{O}(x^4)\big)$ tiene un *retroceso queratoide* en $\mathbf{0}$.

Mientras que k_0 mide la cuña cuadrática que hay entre la curva y su recta tangente, el producto $k_0\tau_0$ mide la cuña cúbica que separa la curva de su plano osculador.

Veamos un ejemplo de punto con $\tau = 0$. Sea $\alpha(t) \equiv (t, t^2, t^4 + t^5)$. En $t = 0$ esta curva tiene $k = 2$, $\tau = 0$ (ver apartado 3.4) y plano osculador afín $\{z = 0\}$. Pero α no atraviesa este plano, sino que "rebota tangencialmente contra él" en $t = 0$. La proyección sobre el plano normal $\{x = 0\}$ tiene un *retroceso ranfoide* en $t = 0$. La proyección sobre el plano rectificante $\{y = 0\}$ muestra en $t = 0$ un rebote contra la recta tangente: ahí se anulan las derivadas segunda y tercera; la cuña entre la curva y el plano osculador en $t = 0$ es cuártica.

3.4 Cálculo en cualquier parámetro

La mejor manera de determinar k y τ es por las relaciones lineales existentes entre el triedro de Frenet y su derivada con respecto al arco. Esto suele ser lo más útil para demostrar teoremas, pero a veces necesitamos hallar k y τ como funciones de un parámetro que no sea la longitud de arco. Dada cualquier parametrización birregular $\alpha(t)$, se tiene:

$$k \equiv \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad , \quad \tau \equiv \frac{\det[\,\alpha' \,|\, \alpha'' \,|\, \alpha'''\,]}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}\,. \tag{11}$$

En el apartado 2.5 vimos que la curvatura de una curva en el plano puede verse como una derivada segunda "corregida" con ayuda de la derivada primera para que sea invariante por rotaciones del plano. La segunda de las fórmulas (11) nos permite ver la torsión como una derivada tercera corregida con ayuda de las derivadas primera y segunda para que sea invariante por rotaciones espaciales. Esta invariancia se demuestra en el apartado 3.5.

En cuanto a la demostración de (11), es fácil probar las siguientes identidades:

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(t) & \equiv & s'(t)\,\mathbf{t}\,, \\ \alpha''(t) & \equiv & s''(t)\,\mathbf{t}+s'(t)^2\,k\,\mathbf{n}\,, \\ \alpha'''(t) & \equiv & \big(s'''(t)-s'(t)^3\,k^2\big)\,\mathbf{t}+\big(3s''(t)\,s'(t)\,k+s'(t)^3\,k'(s)\big)\,\mathbf{n}+s'(t)^3\,k\,\tau\,\mathbf{b}\,, \end{array}$$

que implican estas otras:

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(t)\times\alpha''(t) & \equiv & s'(t)^3\,k\,\mathbf{b}\,, \\ \det[\,\alpha'\,|\,\alpha''\,|\,\alpha'''\,] & \equiv & s'(t)^6\,k^2\,\tau\,, \end{array}$$

y se deducen de inmediato las fórmulas (11).
Para la curva $\alpha(t)\equiv(\,t\,,t^2\,,t^4+t^5\,)$, mencionada al final del apartado 3.3, las fórmulas (11) nos dan $\tau_\alpha(t)\equiv 24t\,(2+5t)/\|\alpha'\times\alpha''\|^2$.

3.5 Invariancia por traslaciones y rotaciones espaciales

Teorema 48. *Al rotar una curva en el espacio, su triedro de Frenet rota con ella y eso conserva longitud de arco, curvatura y torsión. También las traslaciones conservan longitud de arco, curvatura y torsión.*

Las rotaciones del espacio se modelizan muy bien utilizando el **grupo ortogonal.** Una matriz cuadrada $\mathbf{M}$ es ortogonal si $\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}^t$, lo que equivale a la identidad $(\mathbf{vM})\cdot(\mathbf{wM})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ para cualesquiera $\mathbf{v},\mathbf{w}$ filas $1\times n$. El conjunto $\mathrm{O}(n)$ de las matrices ortogonales $n\times n$ es un grupo con la multiplicación de matrices, lo llamamos grupo ortogonal. Dentro de este grupo, las $\mathbf{M}$ con $\det\mathbf{M}=1$ forman un subgrupo $\mathrm{SO}(n)$ que se llama **grupo especial ortogonal.** Las $\mathbf{M}\in\mathrm{SO}(2)$ definen mediante $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{xM}$ las **rotaciones del plano** con centro el origen. Del mismo modo las $\mathbf{M}\in\mathrm{SO}(3)$ definen mediante $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{xM}$ las **rotaciones del espacio** cuyos ejes pasan por el origen.
Por añadidura, el grupo especial ortogonal también modeliza triedros como el de Frenet: una terna $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ es un triedro ortonormal directo si y sólo si sus elementos son las filas de una matriz especial ortogonal. Si $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ es ortonormal directo, el rotado $\{\mathbf{u}_1\mathbf{M},\mathbf{u}_2\mathbf{M},\mathbf{u}_3\mathbf{M}\}$ por cualquier $\mathbf{M}\in\mathrm{SO}(3)$ es también ortonormal directo.

Demostración del teorema 48. Dada una curva birregular $\alpha(s)$, con arco s y triedro de Frenet $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$, la curva rotada y trasladada $\beta(s)\equiv\mathbf{c}+\alpha(s)\mathbf{M}$ tiene $\beta'(s)=\alpha'(s)\mathbf{M}$ y $\beta''(s)=\alpha''(s)\mathbf{M}$. Luego β tiene arco s, tangente unitaria $\mathbf{tM}$ y vector curvatura $\mathbf{k}_\alpha\mathbf{M}$. Entonces la curvatura escalar de β es $\|\mathbf{k}_\alpha\mathbf{M}\|=\|\mathbf{k}_\alpha\|=k_\alpha(s)$ y la normal unitaria de β es $(1/k_\alpha)\mathbf{k}_\alpha\mathbf{M}=\mathbf{nM}$. Por lo tanto el triedro de Frenet de β es $\{\mathbf{tM},\mathbf{nM},\mathbf{bM}\}$, pues es el único triedro ortonormal directo que empieza por $\mathbf{tM},\mathbf{nM}$. Como este último triedro satisface las ecuaciones de Frenet con las mismas $k(s),\tau(s)$ que el triedro de α, deducimos que $k_\alpha(s)\equiv k_\beta(s)$ y $\tau_\alpha(s)\equiv\tau_\beta(s)$. □

3.6 Teorema fundamental

El teorema 48 dice que las expresiones $k(s),\tau(s)$, de curvatura y torsión como funciones de la longitud de arco, dependen sólo de la forma de la curva, no de su posición en el espacio. De hecho codifican completamente la forma de la curva:

Teorema 49. *Dada una pareja de funciones $k(s),\tau(s)$, definidas en el mismo intervalo, existe una curva espacial que tiene arco s, curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$. Además, dicha curva es única salvo traslaciones y rotaciones en el espacio.*

Para demostrarlo utilizaremos el siguiente resultado, que tiene interés en sí mismo.

Lema 50. *Sea dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}(t)_{n\times n}$ que depende de una variable t. Sea dada también una matriz especial ortogonal $\mathbf{M}_0$. Consideramos la solución $\mathbf{M}(t)$ (que existe y es única) del siguiente problema de dato inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{M}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t_0) & = & \mathbf{M}_0 \end{array}\right.$$

Entonces:

$$\mathbf{M}(t) \text{ es especial ortogonal para todo } t \iff \mathbf{A}(t) \text{ es antisimétrica para todo } t\,.$$

Demostración. Basta probar el lema para "ortogonal" en lugar de "especial ortogonal", porque el determinante de una matriz ortogonal sólo puede valer 1 o -1 y si $\det \mathbf{M}_0 = 1$ entonces por continuidad tiene que ser $\det \mathbf{M}(t) = 1$ para todo t.
De las dos caracterizaciones de la ortogonalidad: $\mathbf{M}\mathbf{M}^t = I$ o $\mathbf{M}^t\mathbf{M} = I$, aquí nos conviene más la segunda que, al derivarla, da: $(\mathbf{M}^t\mathbf{M})'(t) \equiv (\mathbf{A}\mathbf{M})^t\mathbf{M} + \mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^t(\mathbf{A}^t + \mathbf{A})\mathbf{M}$.
Como $\mathbf{M}_0^t\mathbf{M}_0 = I$, las $\mathbf{M}(t)$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ es constante, lo que equivale a $\mathbf{M}^t(\mathbf{A}^t + \mathbf{A})\mathbf{M} \equiv 0$ y por lo tanto a $\mathbf{A}^t + \mathbf{A} \equiv 0$. $\square$

Demostración del teorema fundamental. **Existencia.** Con las funciones $k(s), \tau(s)$ planteamos las ecuaciones de Frenet, con dato inicial en $s = s_0$ la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Denotando por $\mathbf{M}_1(s)$ la matriz cuyas filas son los vectores del triedro solución, el dato inicial se escribe ahora $\mathbf{M}_1(s_0) = I_3$. Como la matriz del sistema de Frenet es antisimétrica:

$$\frac{d}{ds}\left[\begin{array}{c} \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{n} \\ \hline \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{n} \\ \hline \mathbf{b} \end{array}\right],$$

sabemos por el lema 50 que la solución $\mathbf{M}_1(s)$ es especial ortogonal para todo valor s. Luego las filas de $\mathbf{M}_1(s)$ forman un triedro ortonormal directo $\{\mathbf{t}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s)\}$. Fijamos una integral indefinida $\alpha_1(s) \equiv \int \mathbf{t}_1(s)\,ds$ y esta curva tiene arco s y tangente unitaria $\mathbf{t}_1(s)$, de donde se deduce que tiene triedro de Frenet $\{\mathbf{t}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s)\}$, curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$.

Unicidad. Dado cualquier otro dato inicial $\mathbf{M}_0 \in \mathrm{SO}(3)$, la función $\mathbf{M}(s) \equiv \mathbf{M}_1(s)\mathbf{M}_0$ es la solución con $\mathbf{M}(s_0) = \mathbf{M}_0$. Es decir que el triedro solución con dato inicial las filas de $\mathbf{M}_0$ es el resultado $\{\,\mathbf{t}_1(s)\mathbf{M}_0\,, \mathbf{n}_1(s)\mathbf{M}_0\,, \mathbf{b}_1(s)\mathbf{M}_0\,\}$ de aplicar la rotación constante $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{M}_0$ a los vectores del primer triedro que obtuvimos $\{\mathbf{t}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s)\}$. Las curvas que corresponden al nuevo triedro son:

$$\alpha(s) \equiv \int \mathbf{t}_1(s)\mathbf{M}_0\,ds \equiv \mathbf{c} + \alpha_1(s)\mathbf{M}_0\,,$$

con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vector constante arbitrario. Luego toda solución se obtiene a partir de α_1 por una rotación constante seguida de una traslación constante. Tomando $\mathbf{c}' = \mathbf{c}\mathbf{M}_0^{-1}$, tenemos la expresión alternativa $\alpha(s) \equiv \big(\mathbf{c}' + \alpha_1(s)\big)\mathbf{M}_0$ y vemos que toda solución también se obtiene a partir de α_1 por una traslación constante seguida de una rotación constante. $\square$

Aviso. Las ecuaciones de Frenet en el plano las hemos resuelto por una simple cuadratura $\varphi(s) \equiv \int k(s)ds$, pero las ecuaciones de Frenet espaciales pocas veces se resuelven por cuadraturas.

Un corolario inmediato del teorema fundamental es que no basta la curvatura $k(s)$ para determinar la forma de una curva espacial: dada una $k(s)$, hay infinitas torsiones posibles $\tau(s)$ que darán, junto con $k(s)$, curvas *con infinitas formas distintas.* Como hemos visto en el apartado 3.4 que la torsión depende de derivadas terceras, concluimos que para determinar la forma que tiene una curva *desnuda* en el espacio es necesario hacer intervenir a las derivadas terceras.

Si fijamos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ podemos determinar la forma de las curvas contenidas en S mediante una magnitud llamada **curvatura geodésica escalar en** S, que se describe en el apartado 8.6 y sólo depende de derivadas primeras y segundas.