

# Capítulo 5. Integrales sobre superficies

- 5.1. Superficies parametrizadas. Plano tangente a una superficie parametrizada.
- 5.2. Área de una superficie parametrizada.
- 5.3. Integrales de funciones escalares sobre superficies parametrizadas.
- 5.4. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.
- 5.5. Teorema de Stokes, Teorema de Gauss.

## 5.1. Superficies parametrizadas

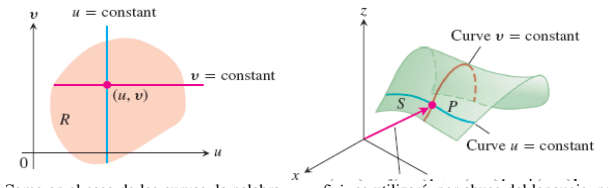
Las curvas que hemos visto son funciones de un sólo parámetro  $t$ .

Ahora vamos a generalizar el estudio a superficies bidimensionales en  $\mathbb{R}^3$ , que dependen de *dos* parámetros.

### Definición (Superficie parametrizada)

Una **superficie parametrizada** es una aplicación continua  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  que puede escribirse como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$



## 5.1. Superficies parametrizadas

- Se suele identificar una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con su imagen  $S = \Phi(D) \subset \mathbb{R}^3$ , que es la idea “intuitiva” que se tiene de una “superficie”.
- La región  $D$  será a menudo un conjunto compacto, o bien de la forma  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2\}$  donde los  $u_i, v_i$  pueden ser infinitos.
- Diremos que la **superficie** es **diferenciable** si la aplicación  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable.

## 5.1. Superficies parametrizadas - ejemplos

- **Planos en  $\mathbb{R}^3$ :** plano que pasa por el punto  $P \in \mathbb{R}^3$  y tiene vectores directores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = P + u\vec{a} + v\vec{b}$$

- **Gráfica de una función en  $\mathbb{R}^2$ :** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La grafica de  $f$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido como

$$\text{Gráf}(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ y } z = f(x, y) \}$$

que puede parametrizarse como

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x, y) = (u, v, f(u, v)),$$

con  $(u, v) \in D$ .

## 5.1. Superficies parametrizadas - ejemplos

- **Superficie cilíndrica alrededor del eje  $OZ$  y de radio  $R$ :**

Es el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  definido como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\},$$

que puede parametrizarse como

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\theta, \phi) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta), z)$$

- **Superficie esférica de centro  $(0, 0, 0)$  y radio  $R$ :** Este es el conjunto de puntos a distancia  $R$  del origen, esto es,

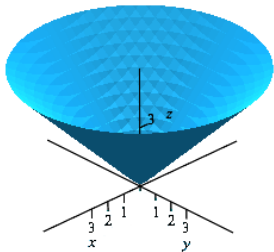
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

que se puede parametrizar como  $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi(\theta, \phi) = (R \sin(\phi)\cos(\theta), R \sin(\phi)\sin(\theta), R \cos(\phi))$$

## 5.1. Superficies parametrizadas

Ejemplo: sea  $\Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$ ,  $u \geq 0$ . La superficie correspondiente es la gráfica de la función  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Observamos que en  $(0,0,0)$  esta superficie tiene un punto de tipo diferente de los demás puntos. Para precisar esto debemos definir la noción de *vectores tangentes* a una superficie.

Para definir los vectores tangentes, usamos las derivadas parciales.

### Definición (Vectores tangentes a una superficie)

Sea una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  definida por  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

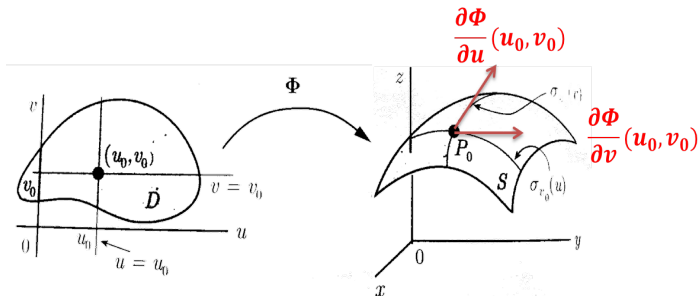
Los **vectores tangentes** a  $S$  en un punto  $\phi(u, v)$  se denotan por  $T_u, T_v$ , y se definen por las fórmulas  $T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ,  $T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ .

# Vectores tangentes a una superficie

Por lo tanto, dada una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  definida por  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , **los vectores tangentes** a  $S$  en un punto  $\Phi(u_0, v_0)$  son

$$T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$



## 5.1. Superficies parametrizadas

Recordamos: el producto vectorial de  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ , denotado por  $\vec{v} \times \vec{w}$ , se define por la fórmula  $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ .

Con estas nociones, podemos ahora dar una definición que permite distinguir si una superficie tiene o no tiene puntos “problemáticos” como en el ejemplo anterior.

### Definición (Superficie suave)

Decimos que una superficie  $S$  dada por  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es **suave (o regular)** en un punto  $\phi(u, v)$  si  $T_u \times T_v \neq \vec{0}$ .

Si una superficie  $S$  es suave en  $\phi(u, v)$ , entonces el vector  $T_u \times T_v$  define un vector ortogonal a  $S$  en el punto  $\phi(u, v)$ . Más precisamente, podemos usar  $T_u \times T_v$  para definir un *plano tangente* a la superficie en ese punto, tomando  $T_u \times T_v$  como vector normal a este plano.



## 5.1. Superficies parametrizadas

Recogemos las últimas nociones en una definición.

### Definición (Plano tangente y normal unitaria)

Sea  $S$  una superficie  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y sea  $(u, v) \in D$  tal que la superficie es regular en  $\phi(u, v)$ .

- El **plano tangente** a la superficie en el punto  $\phi(u, v)$  es el plano con vector normal (ortogonal)  $T_u \times T_v$  y que contiene  $\phi(u, v)$ .
- El **vector normal unitario** a la superficie en  $\phi(u, v)$  es el vector 
$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}.$$

Si la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es regular en un punto  $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , con  $(u_0, v_0) \in D$ , la **fórmula del plano tangente a  $S$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$**  es

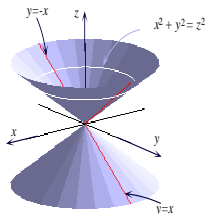
$$\langle T_u \times T_v |_{(u_0, v_0)}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \rangle$$

Más adelante veremos que usando el vector  $T_u \times T_v$  se puede calcular el área de la superficie.

# Superficies parametrizadas - ejemplo

**Ejemplo:** Dada la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$

1. Da un par de parametrizaciones de  $S$ .
2. Comprueba que  $S$  no es regular en  $(0, 0, 0)$  pero sí en  $(0, 1, 1)$ .
3. Hallar la ecuación del plano tangente a  $S$  en  $(0, 1, 1)$ .



1) Una superficie se puede parametrizar por diferentes aplicaciones. En este caso podemos usar tanto una parametrización que involucre las coordenadas polares,  $\Phi_1$ , como otra que utilice la gráfica de una función,  $\Phi_2$ :

$$\Phi_1(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi], z \geq 0$$

$$\Phi_2(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ con } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

# Superficies parametrizadas - ejemplo

2) Para estudiar la regularidad de  $S$  empezamos hallando los vectores tangentes. Para ello, elegimos una de las dos parametrizaciones anteriores, por ejemplo

$\Phi_1(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$ :

$$T_\theta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = (-z \sin \theta, z \cos \theta, 0)$$

$$T_z = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$\vec{N}(\theta, z) = T_\theta \times T_z = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{pmatrix} = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z)$$

Ahora veamos qué valores de  $\theta$  y  $z$  corresponden al punto  $(0, 0, 0)$ :

$$\begin{cases} z \cos \theta = 0 \\ z \sin \theta = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \text{ y cualquier } \theta \in [0, 2\pi]$$

Como  $\vec{N}(\theta, 0) = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z)|_{(\theta, 0)} = (0, 0, 0)$ ,  $S$  no es regular en  $(0, 0, 0)$ .

# Superficies parametrizadas - ejemplo

Ahora veamos qué valores de  $\theta$  y  $z$  corresponden al punto  $(0, 1, 1)$ :

$$\begin{cases} z \cos \theta &= 0 \\ z \sin \theta &= 1 \\ z &= 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 \text{ y } \theta = \pi/2$$

Como  $\vec{N}(\pi/2, 1) = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z)|_{(\pi/2, 1)} = (0, 1, -1) \neq \vec{0}$ ,  $S$  sí es regular en  $(0, 1, 1)$ .

3) En este caso, podemos usar tres métodos para calcular el plano tangente a  $S$  en el punto pedido.

*Primer método:* Usando la gráfica de una función  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  en  $(0, 1)$

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1).$$

$$z = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}|_{(0,1)}(x - 0) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}|_{(0,1)}(y - 1) \Rightarrow \boxed{z = y}$$

# Superficies parametrizadas - ejemplo

*Segundo método:* Viendo  $S$  como una superficie de nivel de la función  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$  en  $(0, 1, 1)$ :

$$\nabla F(0, 1, 1) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0,$$

esto es,

$$(0, 2, -2) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = y}$$

*Tercer método:* Viendo  $S$  como una superficie parametrizada en  $(0, 1, 1)$

$$\vec{N}(\pi/2, 0) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0,$$

que, sustituyendo, queda

$$(0, 1, -1) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = y}$$

## 5.2. Áreas y volúmenes

En esta sección aplicaremos las nociones vistas anteriormente para calcular varios volúmenes y áreas.

1) Áreas: distinguiremos entre áreas en  $\mathbb{R}^2$  y áreas en  $\mathbb{R}^3$ .

En el caso de  $\mathbb{R}^2$ , se trata de calcular doble integrales de tipo  $\iint_D 1 \, dx \, dy$ . Podremos evaluar estas integrales usando técnicas que ya hemos visto en este capítulo.

En el caso  $\mathbb{R}^3$ , se trata de calcular áreas de superficies en el espacio. Para ello, tomaremos una parametrización  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la superficie  $S$  que queremos estudiar. Entonces, el área de la superficie es igual a la integral siguiente:

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

Aquí, como vimos anteriormente,  $T_u, T_v$  son los vectores tangentes a la superficie en el punto correspondiente a los parámetros  $u, v$ . La norma  $\|T_u \times T_v\|$  es por tanto el área del paralelogramo definido por  $T_u, T_v$ . Integrando esta área para  $(u, v) \in D$  se obtiene esta fórmula para  $A(S)$ .

## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

Ejemplo: consideremos la región  $D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$ , sea  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r)$ , y sea  $S$  la superficie correspondiente (es un cono). Hallar el área de  $S$ .

Tenemos  $T_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$ ,  $T_\theta = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0)$ .

Tenemos pues

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (-r \cos(\theta), -r \sin(\theta), r).$$

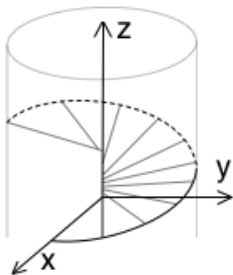
Por lo tanto  $\|T_r \times T_\theta\| = r\sqrt{2}$ . Deducimos que

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \|T_r \times T_\theta\| \, dr \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr = 2^{\frac{3}{2}} \pi \int_0^1 r \, dr \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \pi \left[ r^2/2 \right]_0^1 = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

Ejemplo: consideremos de nuevo la región  $D = \{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}$ .

Esta vez sea  $S$  la superficie dada por la parametrización  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \theta)$ . Superficies de este tipo se llaman *helicoides*.



Calculamos los vectores tangentes:

$$T_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0),$$

$$T_\theta = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 1). \text{ Luego}$$

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\sin(\theta), -\cos(\theta), r).$$

Tenemos pues  $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$ . Por lo tanto,

$$A(S) = \iint_D \|T_r \times T_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2} \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} \, dr.$$

Para calcular esta integral vamos a usar integración por partes.



## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

Si ponemos  $u(r) = \sqrt{1+r^2}$ , tenemos  $u' = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ . Poniendo  $v = r$ , tenemos entonces  $\int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr = \int_0^1 u v' \, dr$ . La fórmula de integración por partes nos dice que esto es igual a

$$[uv]_0^1 - \int_0^1 u' v \, dr = [r\sqrt{1+r^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} \, dr = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1+r^2}{\sqrt{1+r^2}} \, dr + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \, dr.$$

La integral  $\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr$  satisface pues  $\mathcal{I} = \sqrt{2} - \mathcal{I} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \, dr$ , es decir

$$\mathcal{I} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \, dr.$$

Ahora esto lo podemos evaluar usando el hecho que  $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$  es la derivada de la función inversa del seno hiperbólico de  $r$ , es decir de  $\operatorname{arcsinh}(r) = \log(r + \sqrt{r^2 + 1})$ . Concluimos que

$$A(S) = 2\pi \mathcal{I} = \pi\sqrt{2} + \pi [\operatorname{arcsinh}(r)]_0^1 = \pi\sqrt{2} + \pi \log(1 + \sqrt{2}).$$

## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

Vamos a ver ahora que en varios casos se puede establecer una fórmula general que permite calcular todas las integrales concretas en estos casos.

1) Superficie parametrizada de la forma  $(x, y, z) = (u, v, f(u, v))$ .

Tenemos  $T_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$ ,  $T_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ .

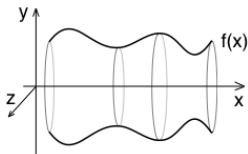
$$\text{Por lo tanto } T_u \times T_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1).$$

En este caso tenemos pues la fórmula

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} du dv.$$

## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

- 2) Superficie de revolución (alrededor del eje de  $x$ ), dada por  
 $(x, y, z) = (u, f(u) \cos(v), f(u) \sin(v))$ ,  $f \geq 0$ ,  $u \in [a_0, a_1]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ .



Tenemos

$$T_u = (1, f'(u) \cos(v), f'(u) \sin(v)),$$

$$T_v = (0, -f(u) \sin(v), f(u) \cos(v)).$$

Por lo tanto  $T_u \times T_v$  es

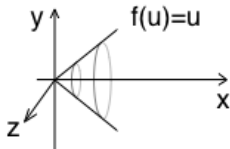
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & f'(u) \cos(v) & f'(u) \sin(v) \\ 0 & -f(u) \sin(v) & f(u) \cos(v) \end{vmatrix} = (f'(u)f(u), -f(u) \cos(v), -f(u) \sin(v)).$$

Tenemos pues  $\|T_u \times T_v\| = |f(u)|\sqrt{f'(u)^2 + 1}$ , de donde sigue la fórmula

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{a_0}^{a_1} f(u) \sqrt{f'(u)^2 + 1} \, du \, dv = 2\pi \int_{a_0}^{a_1} f(u) \sqrt{f'(u)^2 + 1} \, du.$$

## 5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

Ejemplo: hallar el área  $A_1$  del cono de revolución definido por la recta  $y = x$ , para  $x \in [0, 1]$ , y también el área  $A_2$  del casquete de cono para  $x \in [1, 2]$ .



Tenemos

$$A_1 = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{2} \, du = 2\pi\sqrt{2} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1 \\ = \pi\sqrt{2},$$

$$A_2 = 2\pi \int_1^2 u\sqrt{2} \, du = 2\pi\sqrt{2} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_1^2 \\ = 3\pi\sqrt{2}.$$

En cuanto a volúmenes, calcularemos el volumen de regiones limitadas por gráficas de superficies, o de intersecciones de estas.

## 5.3. Integrales de funciones escalares sobre superficies

En esta sección extendemos los métodos que hemos visto para integrales sobre curvas a integrales sobre superficies.

Sea pues una superficie parametrizada por  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tenemos entonces las nociones siguientes.

### Definición (Integral de una función escalar sobre una superficie)

Sea  $S$  una superficie en el espacio parametrizada por  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $U \supset S$ . Definimos la *integral de  $f$  sobre  $S$*  por la fórmula siguiente:

$$\iint_S f(x, y, z) \, dA = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

Esta definición tiene una clara interpretación intuitiva: el elemento infinitesimal de área de la superficie en el punto  $\Phi(u, v)$  viene dado por  $\|T_u \times T_v\| \, du \, dv$ , como aproximación infinitamente precisa de  $S$  en este punto.

## 5.4. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie parametrizada

Seguimos con otra definición importante, esta vez para campos vectoriales.

### Definición (Integral de un campo vectorial sobre una superficie)

Sea  $S$  una superficie en el espacio parametrizada por  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  
Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo con  $U \supset S$ . Definimos la **integral de  $F$**  sobre  $S$  por la fórmula siguiente:

$$\iint_S F \cdot dA = \iint_D F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) du dv.$$

## 5.4. Integrales sobre superficies parametrizadas

Para curvas parametrizadas vimos que el valor de la integral cambia de signo si se invierte la orientación de la parametrización. Con superficies ocurre un hecho similar. Dos parametrizaciones  $\Phi_1, \Phi_2$  de una misma superficie tienen misma **orientación** si el vector  $T_u \times T_v$  para  $\Phi_1$  tiene producto escalar positivo con el vector  $T_{u'} \times T_{v'}$  para  $\Phi_2$ , en todo punto.

### Teorema

Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y sean  $\Phi_1, \Phi_2$  dos parametrizaciones de  $S$ . Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo con  $U \supset S$ . Entonces tenemos  $\iint_{\Phi_1} F \cdot dA = \iint_{\Phi_2} F \cdot dA$  si  $\Phi_1, \Phi_2$  tienen la misma orientación, y  $\iint_{\Phi_1} F \cdot dA = -\iint_{\Phi_2} F \cdot dA$  si  $\Phi_1, \Phi_2$  tienen orientación opuesta.

## 5.4. Integrales sobre superficies parametrizadas

Como vimos con integrales sobre curvas, la integral en que aparece sólo la norma del vector director es invariante bajo reparametrizaciones. Para integrales sobre superficies ocurre algo similar.

### Teorema

Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y sean  $\Phi_1, \Phi_2$  parametrizaciones de  $S$  cualesquiera. Entonces para cualquier función continua  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \supset S$  tenemos

$$\iint_{\Phi_1} f \, dA = \iint_{\Phi_2} f \, dA.$$

Ejemplo: supongamos que la superficie en cuestión es la gráfica de una función  $g(x, y)$ , con  $(x, y)$  en una región  $D$ . Entonces tenemos

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right).$$

Deducimos que  $\iint_{\Phi} F \cdot dA = \iint_D -F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \, dx \, dy$ .



## 5.5. Teoremas de Stokes y de Gauss

Pasamos a estudiar los dos últimos resultados centrales del curso, a saber el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia (de Gauss).

Como veremos, estos resultados se pueden entender como generalizaciones del teorema fundamental del cálculo.

## 5.5.1. Teorema de Stokes

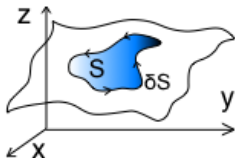
Supongamos que  $S$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , cuya frontera  $\partial S$  parametrizamos como una curva cerrada  $c$ . El teorema de Stokes (o Kelvin-Stokes) relaciona la integral de línea de un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  alrededor de  $c$  con la integral del rotacional de  $F$  sobre  $S$ .

### Teorema de Stokes

Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  definida por una parametrización  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , y sea  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $U \supset S$ . Entonces tenemos

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds.$$

Interpretación geométrica:

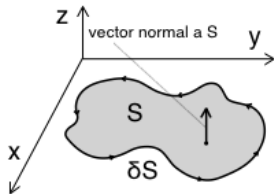


Nótese que, habiendo fijado una curva cerrada  $c$  en  $\mathbb{R}^3$ , podemos tener distintas posibilidades para la elección de la superficie  $S$  con frontera  $c$ .

## 5.5.1. Teorema de Stokes

Observación: la orientación que debemos tomar para  $\partial S$  es la que induce la regla de la mano derecha tomando en cuenta el vector normal a  $S$ . Dicho en términos intuitivos, si estamos sobre la superficie con la dirección hacia arriba marcada por este vector, entonces la orientación deseada para  $\partial S$  es la que deja  $S$  a nuestra izquierda cuando recorremos la frontera.

Veamos qué nos da la aplicación del teorema de Stokes en el caso en que  $S \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ . Aquí  $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$ ,  $\forall (u, v) \in D$ .



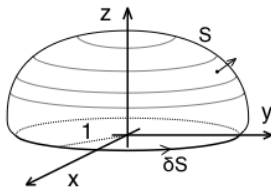
Sea  $F = (P, Q, R)$  el campo vectorial en cuestión. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Tenemos  $T_u \times T_v = \mathbf{e}_3$ , luego  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ . Por otro lado, tenemos  $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial S} P dx + Q dy$ . En este caso pues, el teorema de Stokes se reduce al teorema de Green.

## 5.5.1. Teorema de Stokes

Ejemplo: sea  $S$  la superficie siguiente, con borde  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  y la orientación indicada:



Hallar  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$ , con  $F = (y, -x, e^{xz})$ .  
Nótese que no es necesario parametrizar  $S$ , basta aplicar el teorema de Stokes sobre  $\partial S$ .

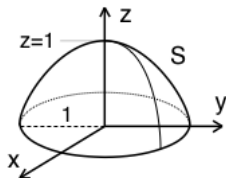
Usamos el cambio de variables  $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ . Tenemos pues

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot dA &= \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin(\theta), -\cos(\theta), e^0) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

## 5.5.1. Teorema de Stokes

Ejemplo: sea  $S$  la parte del paraboloide de ecuación  $z = 1 - x^2 - y^2$  que tiene  $z \geq 0$ , y sea  $F(x, y, z) = (y, z, x)$ . Transformar la integral de superficie  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$  en una integral de línea, y calcularla.

La superficie  $S$  tiene la siguiente representación:



Haciendo de nuevo un cambio a coordenadas polares, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \, dA &= \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2 \, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \, d\theta = -\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

## 5.5.2. Teorema de Gauss de la divergencia

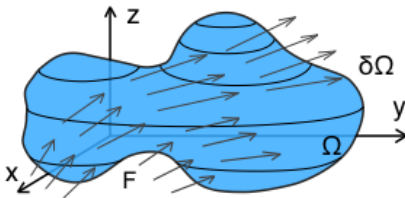
El teorema de la divergencia es otro ejemplo importante de resultado que relaciona la integral de un campo vectorial  $F$  sobre una región con la integral de cierta combinación de derivadas de  $F$  sobre la frontera de la región. La combinación en cuestión aquí es la divergencia  $\nabla \cdot F$ .

### Teorema de la divergencia

Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  compacto y tal que su frontera  $\partial\Omega$  es suave. Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $U \supset \Omega$ .

Entonces

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dA.$$



## 5.5.2. Teorema de Gauss de la divergencia

Ejemplo: usar el teorema de la divergencia para calcular  $\iint_{\partial W} F \, ds$  donde  $W$  es la bola cerrada  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  y  $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$ .

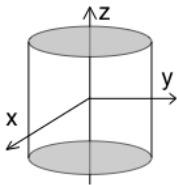
En este caso la aplicación del teorema de Gauss es sencilla:

Tenemos  $\nabla \cdot F = 1$ . Luego

$$\iint_{\partial W} F \cdot dA = \iiint_W \nabla \cdot F \, dV = \iiint_W 1 \, dV = V = \frac{4}{3}\pi.$$

## 5.5.2. Teorema de Gauss de la divergencia

Ejemplo: calcular  $\iint_S F \cdot dA$  con  $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ , donde  $S$  es la superficie del cilindro  $\Omega : x^2 + y^2 = 1$  acotado por los planos  $z = -1$ ,  $z = 1$ , e incluyendo los discos  $x^2 + y^2 \leq 1$  para  $z = -1$ ,  $z = 1$ .



Para el cálculo de esta integral usamos el teorema de Gauss.

$$\text{Tenemos } \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x} xy^2 + \frac{\partial}{\partial y} x^2y + \frac{\partial}{\partial z} y = y^2 + x^2.$$

Tenemos  $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV = \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dV$ . Cambiamos a coordenadas cilíndricas:  $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ , recordando que este cambio tiene jacobiano  $r$ .

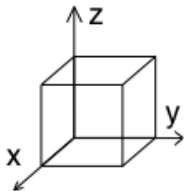
Con este cambio la integral es

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta \, dz = 4\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 4\pi \left[ r^4/4 \right]_0^1 = \pi.$$



## 5.5.2. Teorema de Gauss de la divergencia

Ejemplo: sea  $S$  la superficie del cubo  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , con la orientación dada por la normal exterior, y sea  $F = (x^2, y^2, z^2)$ . Calcular  $\iint_S F \cdot dA$ .



Calculamos la integral de dos maneras:

1) Directamente

2) Usando el teorema de Gauss.

1) Calculamos las 6 integrales correspondientes a las caras del cubo.

i) Cara  $z = 1$ : la integral es  $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 1$ .

ii) Cara  $z = 0$ : la integral es  $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0$ .

iii) Cara  $y = 1$ : la integral es  $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, 1, z^2) \cdot (0, 1, 0) dx dz = 1$ .

Seguimos así con las otras 3 caras. Obtenemos  $\iint_S F \cdot dA = 3$ .

2) Tenemos  $\nabla \cdot F = 2(x + y + z)$ . El teorema nos dice que  $\iint_S F \cdot dA$  es  $\iiint_V \nabla \cdot F dV = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz = 2(3 \int_0^1 x dx) = 3$ .