

1. Sea \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{R}^3 y \mathcal{C}^* su base dual. Dada la siguiente base de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

halla la base dual \mathcal{B}^* , expresando sus elementos en términos de las coordenadas en la base \mathcal{C}^* .

2. Sean $E_1^*, E_2^*, E_3^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ los elementos de la base dual estándar de \mathbb{R}^3 .

- (a) Comprueba que los elementos $E_1^* - E_2^* + 5E_3^*$, $3E_1^* + E_2^* + E_3^*$, $2E_2^* - E_3^*$ forman una base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
- (b) Halla la base de \mathbb{R}^3 de la cual $\{E_1^* - E_2^* + 5E_3^*, 3E_1^* + E_2^* + E_3^*, 2E_2^* - E_3^*\}$ es dual.
- (c) Halla una base del anulador de $\langle 3E_1^* + E_2^* + E_3^*, 2E_2^* - E_3^* \rangle$.

3. Calcula las bases de $(\mathbb{R}^2)^*$ duales de $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y de $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. ¿Hay algún vector compartido por \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 ? ¿Hay algún elemento compartido por las duales?

4. En \mathbb{R}^3 se consideran las bases canónica, $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 1), \vec{u}_2 = (-1, 1, 1), \vec{u}_3 = (1, -1, 0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1 = (2, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, -1, 1)\}.$$

- (a) Calcula sus bases duales expresadas en la dual de la base canónica.
- (b) Todo elemento del dual $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ se puede expresar en cualquiera de las 3 bases duales:

$$\mathcal{C}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}; \quad \mathcal{B}_1^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}; \quad \mathcal{B}_2^* = \{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}.$$

Calcula las matrices de cambio de base

$$P_1 : \text{ de } \mathcal{C}^* \text{ a } \mathcal{B}_2^*; \quad P_2 : \text{ de } \mathcal{B}_1^* \text{ a } \mathcal{C}^*; \quad P_3 : \text{ de } \mathcal{B}_2^* \text{ a } \mathcal{B}_1^*.$$

- (c) Expresa la matriz identidad como el producto, en el orden adecuado, de las tres matrices anteriores.
- (d) Calcula las coordenadas en la base \mathcal{B}_1^* de la forma lineal cuyas coordenadas en la base \mathcal{B}_2^* son $(3, -2, 1)$.

5. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales $p(x)$ de grado no mayor que 2. Definimos formas lineales $\ell_1, \ell_2, \ell_3 : E \rightarrow \mathbb{R}$ mediante: $\ell_1[p(x)] = p(0)$, $\ell_2[p(x)] = p'(0)$ y $\ell_3[p(x)] = p''(0)$.

- (a) Demuestra que $\mathcal{B}_0^* = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ es una base de E^* .
- (b) Dada la siguiente base de E : $\mathcal{B}_1 = \{x, 1 + x^2, 3x - x^2\}$, halla la base dual \mathcal{B}_1^* , expresando sus elementos como combinaciones lineales de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 .

6. Sean $E_1^*, E_2^*, E_3^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ los elementos de la base dual estándar de \mathbb{R}^3 .

Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ y sea A^* el endomorfismo dual.

- (a) Halla la matriz de A^* usando la base $\{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ tanto en salida como en llegada,
- (b) Halla la matriz de A^* usando la base $\{E_1^*, E_1^* + E_2^*, E_1^* + E_2^* + E_3^*\}$ en salida y la base $\{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ en llegada.

7. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b & b + 3c + 2d \\ c - d & d \end{pmatrix}.$$

Sea $f^* : (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))^* \rightarrow (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))^*$ su aplicación dual.

- (a) Encuentra la matriz A^* de f^* respecto de la base canónica \mathcal{C}^* (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).
- (b) Encuentra la matriz D^* de f^* respecto de la base \mathcal{C}^* y la dual de la base \mathcal{B} formada por los elementos siguientes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Encuentra las coordenadas de la forma lineal $f^*(E_1^* + E_2^* + 2E_3^* + E_4^*)$ respecto de \mathcal{B}^* .

8. Se considera en $(P^{(1)}[x])^*$, el espacio dual de $P^{(1)}[x]$, las formas lineales $I_{r,s}$ dadas por la siguiente regla:

$$I_{r,s} : P^{(1)}[x] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$a + bx \longmapsto \int_{-1}^1 (r + sx)(a + bx) dx$$

para ciertos r, s fijados. Se considera $\mathcal{C} = \{e_1 = 1, e_2 = x\}$ la base canónica de $P^{(1)}[x]$.

- (a) Encontrar formas lineales f_1 y f_2 del tipo anterior, tales que $f_i(e_j) = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. En otras palabras, describir la base dual de la canónica de $P^{(1)}[x]$ en términos de formas lineales del tipo $I_{r,s}$.
- (b) Calcular la matriz de la dual de la aplicación $D : P^{(1)}[x] \longrightarrow P^{(1)}[x]$ que a cada polinomio le asocia su derivado, en la base $\{f_1, f_2\}$.

9. Sean $f_1, f_2 : P^{(3)}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ las formas dadas por:

$$f_1(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2c + 3d, \quad f_2(p(x)) = 2p(1) - p(0)$$

respectivamente. Considerando bases canónicas y sus duales, calcular:

- (a) $\text{Ker}(f_1)$, $\text{Ker}(f_2)$, $\text{Im}(f_1^*)$ e $\text{Im}(f_2^*)$.
- (b) $\text{Im}(f_1)$, $\text{Im}(f_2)$, $\text{Ker}(f_1^*)$ y $\text{Ker}(f_2^*)$.
- (c) $\text{Ann}(\{f_1, f_2\})$.
- (d) $\text{Ann}(\text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2)$.

Comprobar en cada caso que las dimensiones son las esperadas.