

Apuntes de Geometría de curvas y superficies

Universidad Autónoma de Madrid

1 Curvas y superficies: derivadas primeras

Todos sabemos qué son, en la realidad, **curvas** y **superficies**, las estamos viendo constantemente en la vida cotidiana. Podemos imaginarnos las curvas como “filamentos” y las superficies como “láminas”. También las podemos imaginar como estelas: un punto que se mueve traza una curva, una cuerda que se desplaza barre una superficie.

En este curso estudiaremos **modelos** de esos objetos. Un modelo es un objeto artificial que inventamos procurando que cumpla dos requisitos: que sea fácil de manipular y que se parezca al objeto real que pretende representar (nunca igual, eso es imposible).

Los modelos utilizados en este curso tienen en común que se basan en la Geometría Analítica y en el Cálculo Infinitesimal, de una y varias variables. Este capítulo utiliza sólo la matriz jacobiana, la recta tangente y el plano tangente, nociones que sólo requieren derivadas primeras. En otros capítulos se definirán nociones de gran importancia geométrica que hacen intervenir derivadas de orden mayor que 1.

Importante: las funciones consideradas en este curso serán de clase \mathcal{C}^∞ salvo cuando indiquemos lo contrario. Esto está motivado por el uso extensivo que haremos de las derivadas. El adjetivo **suave** lo aplicamos solamente a funciones y aplicaciones (escalares o vectoriales) y es sinónimo de \mathcal{C}^∞ .

Usaremos dos modelos (no equivalentes) para curvas en el espacio \mathbb{R}^n :

- Paramétrico: aplicaciones $J \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.
- Como subconjuntos $C \subset \mathbb{R}^n$ cumpliendo ciertas condiciones.

Las superficies sólo las consideraremos en \mathbb{R}^3 , y de nuevo usaremos para ellas dos modelos no equivalentes:

- Paramétrico: aplicaciones $U \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo $U \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$ un abierto del plano de parámetros.
- Como subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ cumpliendo ciertas condiciones.

Insistimos en que, tanto en el caso de curvas como en el de superficies, esos dos modelos (aplicaciones y subconjuntos) son objetos matemáticos *diferentes*, y los dos son necesarios y útiles.

1.1 Objetos paramétricos

Elegido un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, un **camino**, **curva paramétrica** o **parametrización** (de un parámetro), en \mathbb{R}^n , es una aplicación $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ que supondremos **suave**, es decir de clase \mathcal{C}^∞ .

Un tal objeto lleva asociado un subconjunto de \mathbb{R}^n : la **imagen** $\alpha(J)$, también llamado **traza** de α . Este subconjunto puede presentar unas dificultades que examinaremos en varios ejemplos. La variable t , que recorre el intervalo J , recibe el nombre de **parámetro**.

Las palabras “velocidad” y “rapidez”, intercambiables en la vida diaria, tendrán en este curso significados bien distintos.

Definición 1. Dada una parametrización $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, su **velocidad** es el vector derivada $\alpha'(t)$ mientras que su **rapidez** es el escalar no negativo $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}$.

Si (x_1, \dots, x_n) es el elemento general de \mathbb{R}^n , entonces hay una identidad $\alpha(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$ con n funciones escalares $x_1(t), \dots, x_n(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ todas suaves. Además:

$$\text{velocidad} \equiv (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \quad , \quad \text{rapidez} \equiv \sqrt{x'_1(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2}.$$

Definición 2. Denotamos por \mathbb{R}_{uv}^2 un plano (llamado **plano de parámetros**) cuyos puntos (u, v) tienen coordenadas u, v . Fijado $U \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$, subconjunto abierto de \mathbb{R}_{uv}^2 , una **parametrización** (de dos parámetros) o **superficie paramétrica** es una aplicación $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que suponemos suave, es decir de clase \mathcal{C}^∞ en las dos variables (u, v) .

La parametrización $\Phi(u, v)$ lleva asociado un subconjunto: la imagen $\Phi(U)$. Este subconjunto puede presentar unas dificultades que examinaremos en varios ejemplos. A las variables u, v , cuyo par (u, v) recorre el abierto U , las llamaremos **parámetros** o **coordenadas curvilíneas**. Llamamos **líneas coordenadas** a los caminos $\Phi(u, \text{cte})$ y a los caminos $\Phi(\text{cte}, v)$; todos ellos están contenidos en la imagen $\Phi(U)$.

La **dimensión** de un espacio vectorial \mathbb{V} se define en cursos de Álgebra Lineal como el número de elementos de cualquier base de \mathbb{V} . Si $\dim \mathbb{V} = 1$, entonces \mathbb{V} tiene una base de un solo elemento $\{v_1\}$ y el elemento general de \mathbb{V} se escribe $x_1 v_1$, utilizándose **una coordenada** x_1 para fijar cualquier elemento de \mathbb{V} . Si $\dim \mathbb{V} = 2$, entonces \mathbb{V} tiene una base de dos elementos $\{v_1, v_2\}$ y el elemento general de \mathbb{V} se escribe $x_1 v_1 + x_2 v_2$, utilizándose **dos coordenadas** (x_1, x_2) para fijar cualquier elemento de \mathbb{V} . Podemos, pues, definir también la dimensión como el *número de coordenadas* que se necesitan para fijar un elemento del espacio vectorial.

Para fijar una posición en una curva $\alpha(t)$ se usa un valor paramétrico t (una coordenada curvilínea), lo que sugiere considerar a las curvas como “espacios curvilíneos de dimensión 1”. Para fijar una posición en una superficie $\Phi(u, v)$ se usan dos parámetros (u, v) (dos coordenadas curvilíneas), lo que sugiere considerar a las superficies como “espacios curvilíneos de dimensión 2”.

Definición 3. Decimos que la parametrización de un parámetro $\alpha(t)$ es **regular en el valor paramétrico** $t_0 \in J$ si el vector $\alpha'(t_0)$ es no nulo, y que α es **regular** si $\alpha'(t)$ nunca se anula.

Decimos que una parametrización de dos parámetros $\Phi(u, v)$ es **regular en el valor paramétrico** $(u_0, v_0) \in U$ si la matriz jacobiana $(D\Phi)_{(u_0, v_0)} = [\Phi_u(u_0, v_0) \mid \Phi_v(u_0, v_0)]$ tiene rango 2, y que Φ es **regular** si $D\Phi$ tiene rango constante 2.

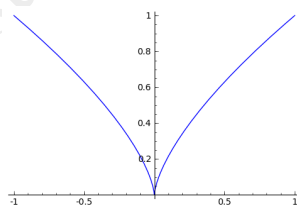
Definición 4. Una parametrización, de uno o dos parámetros, es **bicontinua** si es inyectiva y además su inversa (de la imagen al dominio) es también continua.

1.2 Primeros ejemplos

Ya hemos dicho que el adjetivo “suave” lo reservamos para funciones y aplicaciones. No hablaremos, pues, de “subconjuntos suaves” (introduciremos otro adjetivo para subconjuntos); pero todos sabemos reconocer cuando un subconjunto es “áspero” en alguna parte suya. Veamos ahora un ejemplo de un camino $\alpha(t)$ que es perfectamente suave mientras que su imagen es un conjunto con alguna “aspereza”. Se llama **parábola semicúbica** a la curva trazada por una parametrización como sigue:

$$\alpha_1(t) = (at^3, bt^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde a, b son constantes, las dos no nulas. Consideremos el caso $a = b = 1$. Este camino es inyectivo, es decir que nunca pasa dos veces por el mismo punto (pues si $(t^3, t^2) = (\bar{t}^3, \bar{t}^2)$ entonces $t^3 = \bar{t}^3$ y debe ser $t = \bar{t}$) y además es infinitamente diferenciable. Pero la imagen $\mathcal{C}_1 = \alpha_1(\mathbb{R})$ de este camino tiene un “pincho” en el punto $(0, 0)$ correspondiente a $t = 0$.



El subconjunto $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}_{xy}^2$ es un grafo $\{y = h(x)\}$ con h función no derivable en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x} \\ y = (\sqrt[3]{x})^2 = |\sqrt[3]{x}|^2 = (\sqrt[3]{|x|})^2 = |x|^{2/3} \end{array} \right.$$

La función $h(x) \equiv |x|^{2/3}$ tiene derivada infinita en $x = 0$ porque el exponente $2/3$ es menor que 1.

¡Cuidado! Una función puede no ser diferenciable pero tener grafo “sin asperezas”. Es lo que pasa con $y = \sqrt[3]{x}$, que no es derivable en $x = 0$ pero su grafo no es áspero porque también es el grafo $\{x = y^3\}$. Lo que realmente hace que \mathcal{C}_1 sea áspero es el **retroceso**: la función $|x|^{2/3}$ cambia bruscamente de decreciente a creciente en $x = 0$, con derivadas laterales infinitas.

La parametrización que hemos dado de \mathcal{C}_1 tiene velocidad $\alpha'_1(t) \equiv (x'(t), y'(t)) \equiv (3t^2, 2t)$, vector no nulo en todos los valores de t excepto en $t = 0$. Es decir, el “pincho” de la imagen aparece justo donde el camino deja de ser regular.

Lo que hemos llamado “pincho” se llamaba **punto de retroceso** en la literatura clásica. El de la curva \mathcal{C}_1 se llamaba **retroceso queratoide** (del griego $\kappa\epsilon\rho\alpha\varsigma$, “keras”, cuerno) porque la curva tiene cerca de ese punto forma como la cornamenta de un macho de cabra montés. En un tal punto la curva tiene dos ramas separadas por una semirrecta tangente común a ambas. Se definía el **retroceso ranfoide** (del griego $\rho\alpha\mu\phi\omicron\varsigma$, “ramphos”, pico ganchudo de las aves de rapiña) como aquél donde la curva tiene dos ramas ambas al mismo lado de una semirrecta tangente común. Por ejemplo $t = 0$ en la curva paramétrica $\mathbf{x}(t) \equiv (t^2, t^4 + t^5)$, que traza el conjunto $\{(x, y) : (y - x^2)^2 = x^5\}$.

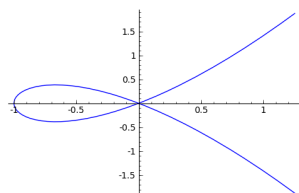
Veamos ahora un ejemplo de que la imagen puede no tener pinchos pero sí autointersecciones. La **cúbica nodal** tiene la siguiente definición implícita:

$$\mathcal{C}_2 = \{ (x, y) : y^2 = x^2(x + 1) \}.$$

Tomando $t = y/x$ como parámetro, podemos escribirla como $\mathcal{C}_2 = \alpha_2(\mathbb{R})$ donde

$$\alpha_2(t) \equiv (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

En este caso, la parametrización pasa dos veces por el origen: cuando $t = 1$ y cuando $t = -1$. Es decir que **NO** es inyectiva.

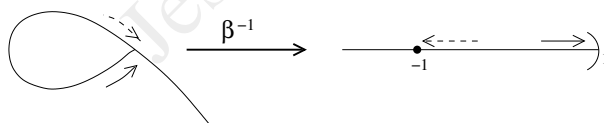


Por otro lado, la derivada (velocidad) de la parametrización:

$$\alpha'_2(t) \equiv (2t, 3t^2 - 1),$$

es un vector no nulo para *todos* los valores de t , es decir que α_2 es una parametrización regular. Vamos a ver en el apartado 1.4 que esta importante condición garantiza la ausencia de pinchos en la imagen, pero acabamos de ver que no garantiza la inyectividad.

Dado un intervalo J , toda aplicación continua e inyectiva $J \rightarrow \mathbb{R}^2$ es automáticamente bicontinua. Pero veamos que esto puede ser falso para una parametrización inyectiva $J \rightarrow \mathbb{R}^2$, aunque sea suave y regular. Consideramos $\beta(t) \equiv \alpha_2(t)|_{t < 1}$, que es parametrización *inyectiva* de un trozo de \mathcal{C}_2 , pero con un *bucle*. Entonces existe la inversa $\beta^{-1} : \beta((-\infty, 1)) \rightarrow (-\infty, 1)$ pero es discontinua en el punto $\mathbf{p} = (0, 0)$.



Este sencillo ejemplo nos avisa de que un camino regular e inyectivo puede no ser bicontinuo.

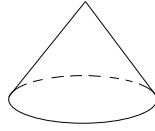
Veamos ya un ejemplo de superficie paramétrica:

$$\Phi(u, v) \equiv (u^2 - v^2, 2uv, 1 - u^2 - v^2).$$

Esta parametrización es claramente suave. Su matriz jacobiana

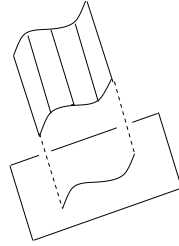
$$D\Phi = [\Phi_u | \Phi_v] = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \\ -2u & -2v \end{bmatrix},$$

tiene rango 2 en todos los valores paramétricos excepto $(u, v) = (0, 0)$, donde tiene rango 0. Se demuestra que la imagen $\Phi(\mathbb{R}_{uv}^2)$ es el grafo $\{z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, es decir la parte inferior de un cono de revolución con vértice en $(0, 0, 1) = \Phi(0, 0)$.



El valor paramétrico $(u, v) = (0, 0)$, el único donde Φ deja de ser regular, da lugar al único punto “áspero” de la imagen: el vértice.

Uno de los tipos más sencillos de superficie son los **cilindros generalizados**: superficies formadas por rectas, semirrectas o segmentos, todos paralelos entre sí. Estos elementos rectilíneos se llaman **generatrices** del cilindro generalizado. La proyección de un cilindro generalizado sobre un plano ortogonal a la dirección de las generatrices es una curva, que llamamos **perfil**.



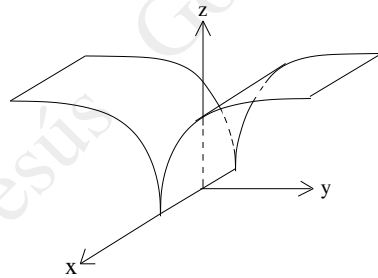
Al estudiar las *superficies cuádricas* has visto los primeros ejemplos de cilindros. En éstos el perfil puede ser una elipse (cilindro elíptico), una circunferencia (cilindro de revolución), una parábola (cilindro parabólico), una hipérbola (cilindro hiperbólico), una recta (el cilindro es entonces un plano), la unión de dos rectas que se cruzan (el cilindro es entonces la unión de dos planos que se cruzan) o la unión de dos rectas paralelas (el cilindro es entonces la unión de dos planos paralelos).

Insistimos en que *cualquier* curva plana sirve como perfil para un cilindro generalizado. A partir de ahora llamaremos **cilindros** a estas superficies, ahorrándonos el adjetivo “generalizados”.

A partir del camino $\alpha_1(t)$, que traza una parábola semicúbica, construimos una superficie paramétrica de la manera siguiente:

$$\Phi(u, v) \equiv (v, \alpha_1(u)) \equiv (v, u^3, u^2).$$

El resultado es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje x y cuyo perfil (proyección de la superficie sobre el plano yz) es una copia \mathcal{C}'_1 de la parábola semicúbica.



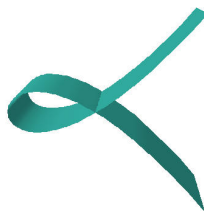
Esta superficie tiene una “arista infinitamente afilada” a lo largo de la generatriz cuya proyección sobre el plano yz es el pincho de \mathcal{C}'_1 . Los puntos de la arista proceden de los valores paramétricos $(u, v) = (0, v)$, que son precisamente aquellos en los que el rango de la jacobiana baja de 2 a 1:

$$D\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 0 \\ 3u^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

De manera enteramente análoga, la parametrización:

$$\Phi(u, v) \equiv (v, \alpha_2(u)) \equiv (v, 1 - u^2, u(1 - u^2)),$$

da lugar a un cilindro con generatrices paralelas al eje x y con perfil una copia \mathcal{C}'_2 de la cúbica nodal, colocada sobre el plano yz .

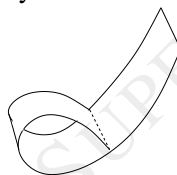


Vemos una autointersección, que delata el hecho de que $\Phi(u, v)$ no es inyectiva. La matriz jacobiana:

$$D\Phi \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2u & 0 \\ 1-3u^2 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene rango 2 en todo punto, o sea que Φ es regular. Esto garantiza la ausencia de “asperezas” en el conjunto imagen, pero estamos viendo que no garantiza la inyectividad. La restricción $\Phi|_{u>-1}$ es regular

e inyectiva, pero tiene un “bucle” y no es bicontinua



A partir de un *perfil* $(r(u), z(u))$ en \mathbb{R}_{rz}^2 , una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ y un punto \mathbf{p}_0 , construimos $\Phi(u, \theta) \equiv \mathbf{p}_0 + r(u) \cos \theta \mathbf{u}_1 + r(u) \sin \theta \mathbf{u}_2 + z(u) \mathbf{u}_3$ que es una **parametrización de revolución** con eje de revolución $\mathbf{p}_0 + \langle \mathbf{u}_3 \rangle$. Si la base es la estándar y $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, entonces:

$$\Phi(u, \theta) \equiv (r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u)).$$

Las curvas $\{\theta = \text{cte}_2\}$ se llaman **meridianos** y son copias del perfil rotadas alrededor del eje de revolución. Las curvas $\{u = \text{cte}_1\}$ se llaman **paralelos** y son circunferencias coaxiales con eje común el de revolución.

1.3 Difeomorfismos y difeomorfismos locales

Definición 5. Dados dos abiertos $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, una aplicación suave $\sigma : U_1 \rightarrow U_2$ es un **difeomorfismo local** si la jacobiana $D\sigma_{\mathbf{x}}$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in U_1$. Si además σ es biyectiva, entonces (y sólo entonces) decimos que es un **difeomorfismo**.

Para ver si una aplicación es un difeomorfismo hay que hacer dos comprobaciones independientes: que todas sus jacobianas sean invertibles y que sea *globalmente* biyectiva.

He aquí una definición equivalente:

Un difeomorfismo es una biyección entre dos abiertos de \mathbb{R}^n que es suave y con inversa también suave.

Una aplicación puede ser biyectiva y suave pero tener inversa no suave, debido a que la jacobiana no sea invertible. Es lo que le ocurre por ejemplo a $y = x^3$, biyectiva de la recta \mathbb{R}_x a la recta \mathbb{R}_y pero con inversa $x = \sqrt[3]{y}$ no derivable en $y = 0$, que corresponde al valor $x = 0$ en el cual la derivada dy/dx (matriz jacobiana 1×1) es nula.

Empezamos considerando un difeomorfismo local *unidimensional* definido en un intervalo:

una función $\sigma(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada $\sigma'(t)$ nunca nula.

Como J es un intervalo, la derivada $\sigma'(t)$ tiene que ser positiva en todo $t \in J$ o negativa en todo $t \in J$. Por lo tanto σ es o estrictamente creciente o estrictamente decreciente, luego biyectiva a la imagen: $\sigma : J \rightarrow \sigma(J)$. De hecho $\tilde{J} = \sigma(J)$ también es un intervalo y la inversa $\sigma^{-1} : \tilde{J} \rightarrow J$ existe y es suave.

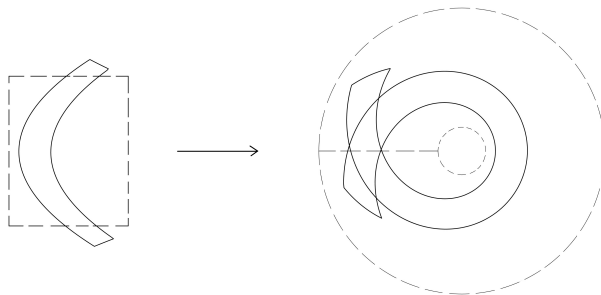
Pasamos ahora al caso *multidimensional*:

un difeomorfismo local entre abiertos de \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$.

El teorema de las funciones inversas nos dice que un difeomorfismo local es **localmente inyectivo** (inyectivo en dominios suficientemente pequeños). Pero puede que no sea *globalmente* inyectivo; un ejemplo es la siguiente aplicación:

$$(1, +\infty) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}_{xy}^2, \quad (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

asociada con el concepto de *coordenadas polares*. Es inyectiva en cualquier parte de su dominio en la que la variación del parámetro θ sea inferior a 2π , pero no es globalmente inyectiva porque cada imagen $\sigma(r, \theta)$ coincide con la $\sigma(r, \theta + 2\pi)$. La siguiente figura muestra, en línea de trazos, el rectángulo $[1, 6] \times [-\pi, \pi]$ y su imagen por σ (una corona circular). También muestra, en línea continua, un recinto en forma de “C” y su imagen por σ .



Vemos la imagen “solapada sobre sí misma” de una forma muy parecida a cómo la cúbica nodal \mathcal{C}_2 se cruza consigo misma.

En \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, hay “sitio suficiente” para que un difeomorfismo local pueda “dar la vuelta” y pasar dos o más veces por el mismo lugar.

Tampoco es σ suprayectiva: su imagen no contiene ningún punto (x, y) con $x^2 + y^2 < 1$.

Vemos, así, que el caso unidimensional es excepcional: un difeomorfismo local $J \rightarrow \mathbb{R}$ es siempre inyectivo, no importa lo largo que sea J , porque en \mathbb{R} no hay “sitio para dar la vuelta”.

1.4 Descripciones locales como grafo

En este apartado vamos a mostrar cómo se comportan las parametrizaciones regulares. Una consecuencia (no la única) será la ausencia de “asperezas” en el conjunto imagen.

Definición 6. Sea ϕ una parametrización (de uno o dos parámetros). Una **reparametrización de ϕ** es la compuesta $\phi \circ T$, siendo T un difeomorfismo.

Caso de un parámetro. Tenemos un intervalo J , un camino $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, otro intervalo \tilde{J} y un difeomorfismo $T(\tilde{t}) : \tilde{J} \rightarrow J$. La correspondiente reparametrización de α es el camino:

$$\beta(\tilde{t}) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta(\tilde{t}) \equiv \alpha(t)|_{t=T(\tilde{t})} \equiv \alpha \circ T(\tilde{t}).$$

Caso de dos parámetros. Tenemos $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave con $U \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$ abierto, tenemos otro abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_{\tilde{u}\tilde{v}}^2$ y un difeomorfismo $T(\tilde{u}, \tilde{v}) : \tilde{U} \rightarrow U$. La correspondiente reparametrización de Φ es:

$$\Psi(\tilde{u}, \tilde{v}) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\tilde{u}, \tilde{v}) \equiv \Phi(u, v)|_{(u,v)=T(\tilde{u}, \tilde{v})} \equiv \Phi \circ T(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Describimos ahora un procedimiento llamado **usar una función como nuevo parámetro**.

Caso unidimensional. Tenemos $\alpha(t) : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave, tenemos un subintervalo $J \subseteq J_0$ en el cual hay definida una función escalar $\psi(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada nunca nula. Acabamos de ver en el apartado 1.3 que la imagen $\tilde{J} = \psi(J)$ es un intervalo y que $\psi(t) : J \rightarrow \tilde{J}$ es un difeomorfismo. Denotamos por ψ la variable que recorre el intervalo \tilde{J} y por $t(\psi) : \tilde{J} \rightarrow J$ el difeomorfismo inverso del $\psi(t)$, entonces la compuesta:

$$\beta(\psi) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta(\psi) \equiv \alpha(t)|_{t=t(\psi)},$$

es la **reparametrización de $\alpha|_J$ usando $\psi(t)$ como nuevo parámetro**.

Caso bidimensional. Tenemos un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$, una parametrización $\Phi(u, v) : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, un abierto $U \subseteq U_0$ en el que hay definida una función vectorial $\sigma = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana tiene siempre rango 2. El teorema de las funciones inversas nos dice que en subdominios *pequeños* $U' \subseteq U$ la función σ es inyectiva, que la imagen $\tilde{U} = \sigma(U')$ es un abierto del plano $\mathbb{R}_{\bar{u}\bar{v}}^2$, y que la inversa $\sigma^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U'$ es suave. Denotamos esa inversa $(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ y entonces la compuesta:

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}) : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\bar{u}, \bar{v}) \equiv \Phi(u, v) \Big|_{(u,v)=(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))},$$

es la **reparametrización de $\Phi|_{U'}$ usando las funciones $\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)$ como nuevos parámetros**. En este caso no siempre se puede reparametrizar todo el trozo $\Phi|_U$ de Φ , sino el más pequeño $\Phi|_{U'}$ debido a que σ sólo es inyectiva en dominios U' suficientemente pequeños.

Sea $\alpha(t) \equiv (x(t), y(t)) : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camino suave en el plano y $t_0 \in J_0$ un valor paramétrico en el que α es regular, es decir $(0, 0) \neq \alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$; entonces o bien $x'(t_0) \neq 0$ o bien $y'(t_0) \neq 0$. Si $x'(t_0) \neq 0$ hay un intervalo $J \subseteq J_0$ conteniendo a t_0 y en el que $x'(t)$ no se anula. Usando $x(t)$ como nuevo parámetro obtenemos una reparametrización $\beta(x) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la parte $\alpha|_J$ de α , con $\tilde{J} = x(J)$. Por su construcción, $\beta(x)$ es una **parametrización grafo**:

$$\beta(x) \equiv (x, h_2(x)) \quad , \quad x \in \tilde{J},$$

donde $h_2(x) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, y esto tiene dos consecuencias. Por una parte, tenemos igualdad de imágenes:

$$\alpha(J) = \beta(\tilde{J}) = \text{grafo } \{y = h_2(x)\},$$

y, como h_2 es suave, su grafo carece de “asperezas”. Por otra parte, es fácil ver que las parametrizaciones grafo son **bicontinuas**; deducimos que $\alpha|_J$ es bicontinua.

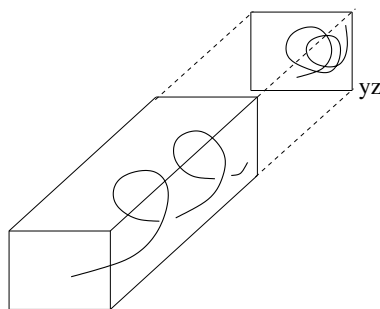
Si es $y'(t_0) \neq 0$, entonces hay un intervalo $J \subseteq J_0$ conteniendo a t_0 en el que $y'(t)$ nunca se anula y podemos usar $y(t)$ como nuevo parámetro para obtener una reparametrización $\beta(y)$ de $\alpha|_J$ que resulta ser una reparametrización grafo del tipo siguiente:

$$\beta(y) \equiv (h_1(y), y) \quad , \quad y \in \tilde{J},$$

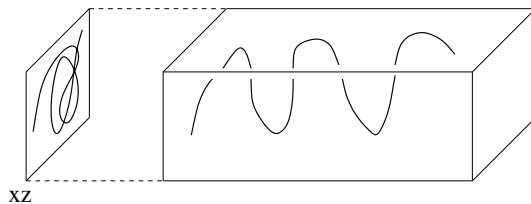
siendo $\tilde{J} = y(J)$ y $h_1(y) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. La imagen $\alpha(J)$ coincide con el grafo $\{x = h_1(y)\}$, con lo cual carece de asperezas, y $\alpha|_J$ es bicontinua.

Lo mismo pasa con curvas espaciales. Si $\alpha(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ es regular en $t = t_0$ entonces al menos una de las tres derivadas $x'(t), y'(t), z'(t)$ es distinta de 0 en $t = t_0$, por lo tanto nunca nula en un intervalo J conteniendo a t_0 , y podemos usar la correspondiente función $x(t), y(t)$ o $z(t)$ como nuevo parámetro. El resultado es una reparametrización del trozo $\alpha|_J$ de α que es una **parametrización grafo** de uno de los tres tipos que se describen a continuación.

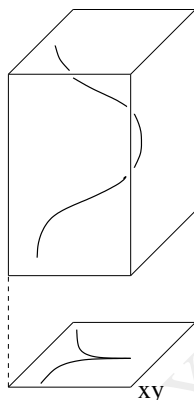
Correspondiendo a $x'(t_0) \neq 0$ se tiene $\beta(x) \equiv (x, h_2(x), h_3(x)), x \in \tilde{J} = x(J)$.



Correspondiendo a $y'(t_0) \neq 0$ se tiene $\beta(y) \equiv (h_1(y), y, h_3(y))$, $y \in \tilde{J} = y(J)$.



Correspondiendo a $z'(t_0) \neq 0$ se tiene $\beta(z) \equiv (h_1(z), h_2(z), z)$, $z \in \tilde{J} = z(J)$.



En los tres casos $(h_j, h_k) : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es función vectorial suave. Se deduce que la imagen $\alpha(J) = \beta(\tilde{J})$ es el grafo de la función vectorial (h_j, h_k) , por lo tanto carente de asperezas, y que $\alpha|_J$ es bicontinua.

En general, si $\alpha(t)$ es un camino suave en \mathbb{R}^n y es regular en $t = t_0$ entonces hay un intervalo J , conteniendo a t_0 , tal que una de las entradas $x_j(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ del vector $\alpha(t)$ puede usarse como nuevo parámetro para $\alpha|_J$, resultando una reparametrización $\beta(x_j)$ de tipo grafo (en la cual las otras $n - 1$ coordenadas son puestas como funciones suaves de la x_j), y se deduce que $\alpha|_J$ es bicontinua con imagen el grafo de una función vectorial suave $\tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ y por lo tanto sin asperezas. En definitiva:

Un camino regular en \mathbb{R}^n es bicontinuo en tramos cortos y con imagen carente de asperezas.

Insistimos en que, en tramos largos, un camino regular puede no ser inyectivo o no ser bicontinuo.

Repetimos ese estudio para superficies paramétricas. Sea $\Phi(u, v) \equiv (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con $(D\Phi)_{(u_0, v_0)}$ de rango 2. Sabemos por Álgebra Lineal que alguna submatriz 2×2 de esta jacobiana 3×2 tiene que ser invertible, es decir que es invertible la jacobiana en (u_0, v_0) de al menos una de las funciones vectoriales siguientes:

$$\sigma_{12} \equiv (x(u, v), y(u, v)) \quad , \quad \sigma_{13} \equiv (x(u, v), z(u, v)) \quad , \quad \sigma_{23} \equiv (y(u, v), z(u, v)) \quad .$$

Supongamos que σ_{jk} tiene jacobiana invertible en (u_0, v_0) . El teorema de las funciones inversas dice que, si $U \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$ es un abierto *suficientemente pequeño* conteniendo a (u_0, v_0) , entonces $\tilde{U} = \sigma_{jk}(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^2 y $\sigma_{jk} : U \rightarrow \tilde{U}$ es un difeomorfismo. Podemos usar las dos entradas del vector $\sigma_{jk}(u, v)$ como nuevos parámetros, obteniéndose una reparametrización Ψ del trozo $\Phi|_U$ de Φ . Dicha reparametrización es una **parametrización grafo** de uno de los tres tipos siguientes:

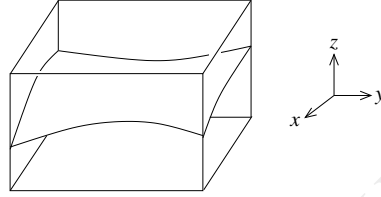
$$\begin{aligned} \text{si } (j, k) &= (1, 2), \text{ entonces } \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_{xy}^2 \text{ y } \Psi(x, y) \equiv (x, y, h(x, y)) \quad , \\ \text{si } (j, k) &= (1, 3), \text{ entonces } \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_{xz}^2 \text{ y } \Psi(x, z) \equiv (x, h(x, z), z) \quad , \\ \text{si } (j, k) &= (2, 3), \text{ entonces } \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_{yz}^2 \text{ y } \Psi(y, z) \equiv (h(y, z), y, z) \quad , \end{aligned}$$

donde $h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. En cualquiera de los tres casos sale que $\Phi(u, v)$ es bicontinua en $(u, v) \in U$ con imagen el grafo de h , que no tiene asperezas por ser h suave. En definitiva:

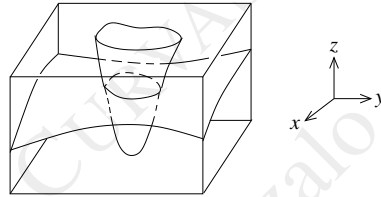
Una parametrización regular de dos parámetros en \mathbb{R}^3 es bicontinua en dominios pequeños y con imagen carente de asperezas.

De nuevo insistimos en que, en dominios grandes, la parametrización puede no ser inyectiva o no ser bicontinua.

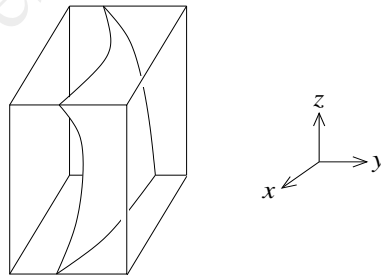
Nos fijamos ahora en el punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$. Si por ejemplo es $(j, k) = (1, 2)$, entonces \tilde{U} es un abierto del plano \mathbb{R}_{xy}^2 conteniendo el valor (x_0, y_0) , luego existen $\varepsilon, \delta > 0$ tales que \tilde{U} contiene todo el rectángulo $\mathcal{R}_0 = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, en el cual la función suave $h(x, y)$ es acotada y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < h(x, y) < b$ para todo $(x, y) \in \mathcal{R}_0$. Consideramos ahora el rectángulo abierto $\mathcal{R} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ (en el cual $h(x, y)$ está definida y es suave) y su preimagen $U' = \sigma_{12}^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$. Entonces $(u_0, v_0) \in U'$ y el trozo $\Psi|_{\mathcal{R}}$ de $\Psi(x, y)$ es reparametrización del trozo $\Phi|_{U'}$ de $\Phi(u, v)$. La imagen $\Phi(U') = \Psi(\mathcal{R})$ contiene al punto de partida \mathbf{p}_0 y es el grafo $\{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{R}\}$, a su vez contenido en la caja abierta $\mathcal{C} = \mathcal{R} \times (a, b)$ porque es $h(x, y) : \mathcal{R} \rightarrow (a, b)$.



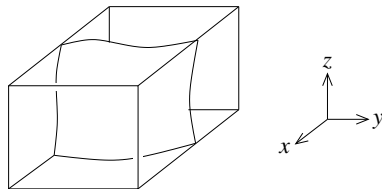
Para valores $(u, v) \in U_0$ alejados del dominio pequeño U' , la parametrización $\Phi(u, v)$ puede volver a entrar en la caja \mathcal{C} produciendo partes de $\Phi(U_0)$ que incluso corten al grafo $\Phi(U')$.



Si $(j, k) = (1, 3)$, hay una caja abierta $\mathcal{C} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (a, b) \times (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$, conteniendo a \mathbf{p}_0 , y un abierto $U' \subseteq U_0$ conteniendo a (u_0, v_0) , tales que $\Phi(U') \subset \mathcal{C}$ es el grafo $\{y = h(x, z)\}$ de una función suave $h(x, z) : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \delta, z_0 + \delta) \rightarrow (a, b)$. Valores $(u, v) \in U_0$ alejados de U' pueden producir partes de $\Phi(U_0)$ que entren de nuevo en \mathcal{C} e incluso corten al grafo de h .



Si $(j, k) = (2, 3)$, hay una caja abierta $\mathcal{C} = (a, b) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$, conteniendo a \mathbf{p}_0 , y un abierto $U' \subseteq U_0$ conteniendo a (u_0, v_0) , tales que $\Phi(U') \subset \mathcal{C}$ es el grafo $\{x = h(y, z)\}$ de una función suave $h(y, z) : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \delta, z_0 + \delta) \rightarrow (a, b)$. Valores $(u, v) \in U_0$ alejados de U' pueden producir partes de $\Phi(U_0)$ que entren de nuevo en \mathcal{C} e incluso corten al grafo de h .



1.5 Longitud de arco

Definición 7. Sea $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino y $t_1, t_2 \in J$ valores paramétricos con $t_1 < t_2$. La **longitud de $\alpha(t)$ entre $t = t_1$ y $t = t_2$** es el siguiente número:

$$\text{longitud}(\alpha(t)|_{t_1 < t < t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt ,$$

es decir, la integral definida de la rapidez.

Conviene advertir que es una propiedad del camino, no del conjunto imagen. Por ejemplo, dado $\alpha(t) \equiv (\cos t, \sin t)$ que traza la circunferencia unidad, los caminos $\alpha(t)|_{0 < t < 7}$ y $\alpha(t)|_{0 < t < 11}$ tienen por imagen la circunferencia completa (de longitud $2\pi = 6.28\dots$), pero el primero tiene longitud 7 y el segundo tiene longitud 11.

Definición 8. Decimos que un camino $\beta(t)$ es una **parametrización por longitud de arco** si cumple $\|\beta'(t)\| \equiv 1$.

Existencia. Para que un camino $\alpha(t)$ se pueda reparametrizar a una parametrización por longitud de arco $\beta(s)$ es necesario y suficiente que α sea regular. Necesidad: si $\alpha(t)$ se reparametriza a $\beta(s)$ entonces $\beta(s)$ se puede reparametrizar a $\alpha(t)$; como $\beta(s)$ es claramente regular y la reparametrización es una operación que conserva la regularidad, vemos que $\alpha(t)$ tiene que ser regular. Para demostrar la suficiencia introducimos la siguiente noción.

Definición 9. Llamamos **función longitud de arco del camino $\alpha(t)$** a cualquier integral indefinida de $\|\alpha'(t)\|$ o de $-\|\alpha'(t)\|$. Esto es, cualquier función $s(t)$ tal que $s'(t) \equiv \|\alpha'(t)\|$ o $s'(t) \equiv -\|\alpha'(t)\|$.

Sea ahora $\alpha(t)$ camino regular. Entonces la rapidez $\|\alpha'(t)\|$ no se anula nunca, luego cualquier función longitud de arco $s(t)$ tiene derivada nunca nula y la podemos utilizar como nuevo parámetro, siendo fácil demostrar que la parametrización $\beta(s)$ que resulta cumple $\|\beta'(s)\| \equiv 1$.

El proceso es el siguiente:

1. calculamos $\alpha'(t)$,
2. calculamos $\|\alpha'(t)\|$,
3. calculamos una integral indefinida $s(t)$ de $\pm\|\alpha'(t)\|$,
4. hallamos la función inversa $t(s)$ de la $s(t)$,
5. hacemos el camino compuesto $\beta(s) \equiv \alpha(t)|_{t=t(s)}$.

Si elegimos $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, entonces $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ definen el mismo sentido de recorrido. Si por el contrario elegimos $s'(t) = -\|\alpha'(t)\|$, entonces $\beta(s)$ define el sentido de recorrido opuesto al de $\alpha(t)$.

Ejemplo. Empezamos con $\alpha(t) \equiv (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in J = (-1, 1)$, que parametriza la mitad superior de la circunferencia unidad. Calculamos:

$$\alpha'(t) \equiv \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) , \quad \|\alpha'(t)\| \equiv \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} , \quad s(t) \equiv \arcsen t ,$$

el intervalo imagen $\tilde{J} = s(J)$ es igual a $(-\pi/2, \pi/2)$ y la función inversa es $t(s) \equiv \sen s$, $s \in \tilde{J}$. Finalmente $\beta(s) \equiv \alpha(t)|_{t=\sen s} \equiv (\sen s, \sqrt{1-\sen^2 s}) \equiv (\sen s, \cos s)$, $-\pi/2 < s < \pi/2$, es una parametrización por longitud de arco que recorre la semicircunferencia en el mismo sentido que $\alpha(t)$.

Unicidad. Sean $\beta(s) : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma(\bar{s}) : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos reparametrizaciones por longitud de arco de un mismo camino regular $\alpha(t)$. Entonces una es reparametrización de la otra, es decir que $\beta(s) \equiv \gamma(\bar{s})_{\bar{s}=\sigma(s)}$ para algún difeomorfismo $\sigma(s) : J_1 \rightarrow J_2$. Calculamos:

$$1 \equiv \|\beta'(s)\| \equiv \|\sigma'(s)\gamma'(\bar{s})_{\bar{s}=\sigma(s)}\| \equiv |\sigma'(s)| \cdot \|\gamma'(\bar{s})_{\bar{s}=\sigma(s)}\| \equiv |\sigma'(s)| \cdot 1,$$

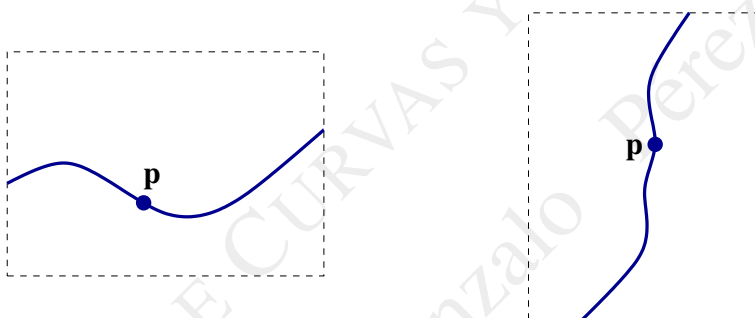
y deducimos $|\sigma'(s)| \equiv 1$, luego o bien $\sigma(s) \equiv s + \text{cte}$ o bien $\sigma(s) \equiv -s + \text{cte}$.

Dos reparametrizaciones $\beta(s)$ y $\gamma(\bar{s})$ por longitud de arco de un mismo camino regular $\alpha(t)$ están relacionadas por $\beta(s) \equiv \gamma(\bar{s})_{\bar{s}=s+\text{cte}}$ o por $\beta(s) \equiv \gamma(\bar{s})_{\bar{s}=-s+\text{cte}}$.

Sea ahora $\alpha(t)$ un camino de rapidez constante $c > 0$. Entonces $s(t) \equiv \int c dt \equiv ct$ es una longitud de arco y el parámetro original $t = (1/c)s$ es un múltiplo constante de la longitud de arco, con factor $1/c$ el inverso de la rapidez.

1.6 Modelos como subconjuntos

Definición 10. Un subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es una **curva buena** si para cada punto $\mathbf{p} \in \Gamma$ hay una “ventana” $\mathcal{R} = (a, b) \times (a', b')$ conteniendo a \mathbf{p} y tal que la parte $\Gamma \cap \mathcal{R}$ que se ve dentro de la ventana consta solamente de un grafo $\{y = h(x)\}$, con $h : (a, b) \rightarrow (a', b')$ suave, o solamente de un grafo $\{x = h(y)\}$ con $h : (a', b') \rightarrow (a, b)$ suave.



El papel que juega la ventana \mathcal{R} es *proteger al grafo* que tiene dentro: impide que se le acerquen otras partes de Γ distintas de dicho grafo. El cruce o bucle que hemos visto en la cúbica nodal \mathcal{C}_2 son imposibles en una tal Γ .

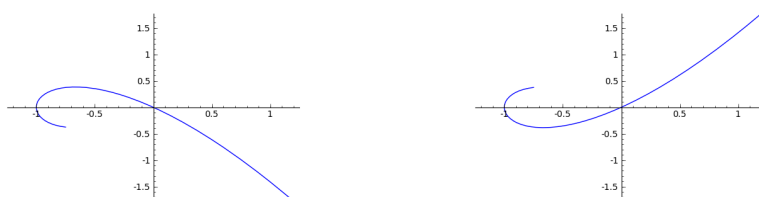
Si $\alpha(t)$ es un camino regular en el plano, hemos visto que las imágenes de tramos cortos son grafos metidos en ventanas, pero la ventana *no protege al grafo*: otros tramos del mismo camino pueden meterse en la ventana e incluso cortar al grafo.

Definición 11. Un subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ es una **curva buena** si para cada punto $\mathbf{p} \in \Gamma$ hay una “caja” $\mathcal{C} = (a, b) \times (a', b') \times (a'', b'')$ conteniendo a \mathbf{p} y tal que la parte $\Gamma \cap \mathcal{C}$ contenida dentro de la caja consta solamente del grafo de una función vectorial suave que va de una de las aristas de la caja al producto de las otras dos aristas, por ejemplo $(a, b) \rightarrow (a', b') \times (a'', b'')$.

Análogamente se define cuándo es un subconjunto una curva buena en \mathbb{R}^n .

Proposición 12. Una condición suficiente para que la imagen $\alpha(J)$ de un intervalo J por un camino $\alpha(t)$ sea una curva buena es que $\alpha|_J$ sea regular y bicontinuo.

Dado $\alpha_2(t)$, el camino (regular) que traza la cúbica nodal \mathcal{C}_2 , las restricciones $\alpha_2(t)|_{t < 1/2}$ y $\alpha_2(t)|_{t > -1/2}$ son bicontinuas y sus imágenes dos curvas buenas cuya unión es \mathcal{C}_2 .



Observa que estos dos “trozos buenos” de \mathcal{C}_2 no son grafos: en ellos no se puede poner ni y como función de x ni x como función de y . Además **se solapan**: comparten el tramo $\alpha_2(t)|_{1/2 < t < 1/2}$.

La condición suficiente de la proposición 12 no es, sin embargo, necesaria. Por ejemplo, el camino $\alpha(t) \equiv (\cos t, \sin t)$ no es ni siquiera inyectivo, pero su imagen es la **circunferencia unidad**, que es una curva buena (ver apartado 1.7).

Definición 13. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie buena** si para cada punto $\mathbf{p} \in S$ hay una “caja” $\mathcal{C} = (a, b) \times (a', b') \times (a'', b'')$ conteniendo a \mathbf{p} y tal que el trozo $S \cap \mathcal{C}$ dentro de la caja consta solamente del grafo de una función suave h de dos variables, definida en el producto de dos aristas de la caja y con valores en la otra arista, e.g. $h(x, z) : (a, b) \times (a'', b'') \rightarrow (a', b')$.

La caja \mathcal{C} protege a ese grafo: impide que otras partes de la superficie se le acerquen, haciendo imposibles cruces o bucles.

Si $\Phi(u, v)$ es una parametrización regular, hemos visto que cada valor paramétrico (u_0, v_0) se rodea de un abierto pequeño U' tal que la imagen $\Phi(U')$ es un grafo dentro de una caja, pero esta caja no protege al grafo: valores paramétricos alejados de U' pueden producir trozos del conjunto imagen que entren en la caja e incluso corten al grafo.

Proposición 14. Una condición suficiente para que la imagen $\Phi(U)$ de un abierto U por la parametrización $\Phi(u, v)$ sea una superficie buena es que $\Phi|_U$ sea regular y bicontinua.

Esta condición suficiente no es necesaria. Un ejemplo es $\Phi(u, v) \equiv (\cos u, \sin u, v)$, que no es ni siquiera inyectiva pero tiene por imagen el cilindro circular $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$, que es una superficie buena (ver apartado 1.7).

1.7 Definición implícita

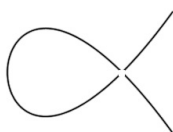
Puede ser difícil decidir si una parametrización regular es bicontinua o no. Necesitamos, pues, otra vía para estar seguros de que cierta curva o superficie es buena. El **teorema de las funciones implícitas** nos proporciona varios resultados en este sentido, de los cuales resaltamos dos con el siguiente enunciado.

Teorema 15. Sean $U \subseteq \mathbb{R}_{xy}^2$ un abierto, $h(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, c una constante y $\Gamma \subset U$ el subconjunto definido por $\Gamma = \{(x, y) \in U : h(x, y) = c\}$, que suponemos no vacío. Si el gradiente $\nabla h \equiv (h_x, h_y)$ no se anula en ningún punto de Γ , entonces Γ es una curva buena.

Sean $V \subseteq \mathbb{R}_{xyz}^3$ un abierto, $\phi(x, y, z) : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, c una constante y $S \subset V$ el subconjunto definido por $S = \{(x, y, z) \in V : \phi(x, y, z) = c\}$, que suponemos no vacío. Si el gradiente $\nabla \phi \equiv (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ no se anula en ningún punto de S , entonces S es una superficie buena.

Como primer ejemplo tomamos la circunferencia unidad $\{x^2 + y^2 = 1\}$. El gradiente $\nabla(x^2 + y^2) \equiv (2x, 2y)$ se anula (solamente) en el origen $x = y = 0$ que no es un punto de la circunferencia, luego ésta es una curva buena.

Como segundo ejemplo tomamos la cúbica nodal $\mathcal{C}_2 = \{y^2 - x^2(x + 1) = 0\}$. El gradiente $\nabla(y^2 - x^2(x + 1)) \equiv (-3x^2 - 2x, 2y)$ se anula en el punto $(0, 0)$, que sí pertenece a \mathcal{C}_2 , y en el punto $(-2/3, 0)$ que no está en \mathcal{C}_2 . Sabemos entonces que el resultado $\mathcal{C}_2 \setminus \{(0, 0)\}$ de quitarle el origen a \mathcal{C}_2 es una curva buena (de tres componentes conexas),



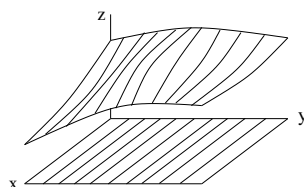
pero la curva completa presenta un problema en $(0, 0)$: en ese punto tiene el nodo.

Como tercer ejemplo tomamos el cilindro circular $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$. El gradiente $\nabla(x^2 + y^2) \equiv (2x, 2y, 0)$ se anula pero en puntos $(0, 0, z)$ que no están en el cilindro, y entonces ya sabemos que es una superficie buena.

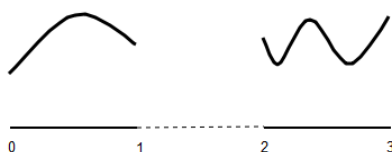
Puede merecer la pena pararse a analizar por qué si definimos una curva implícitamente es más fácil que sea buena que si la damos por una parametrización regular. Ante todo, observemos esto:

Una función de dos variables $h(x, y)$ es como una infinidad de funciones de una variable.

Concretamente, para cada valor y_0 de la segunda variable tenemos la función $x \mapsto h(x, y_0)$ que va cambiando a medida que cambiamos y_0 . El grafo $\{z = h(x, y)\}$ es la superficie barrida por la curva espacial $\Gamma_{y_0} = \{y = y_0, z = h(x, y_0)\}$, que se va deformando y desplazando a medida que cambia el valor y_0 .



En cambio un camino se asimila a una sola función de una variable. Por ejemplo $\alpha(t) \equiv (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$, es lo mismo que el par de funciones $x(t), y(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que a su vez se puede codificar en la función de una sola variable $\varphi(u) : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(u) = x(u)$ en $[0, 1]$ y por $\varphi(u) = y(u - 2)$ en $[2, 3]$.



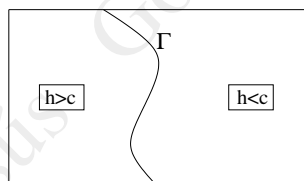
Es, pues, justo decir que una función de dos variables tiene mucha más información que un camino $(x(t), y(t))$.

Imaginemos experimentos con la siguiente disposición. En un recinto llano se sitúa una persona con los ojos tapados, y hay otra persona subida en una torre desde donde domina visualmente todo el recinto. Hacemos dos tipos de experimento: en un experimento del primer tipo se deja vagar al azar a la persona que está abajo, en un experimento del segundo tipo la persona de la torre da instrucciones por radio a la de abajo.

Si se va repitiendo el experimento del primer tipo, con frecuencia la persona de abajo acabará trazando una trayectoria con cruces o bucles; sólo puede evitarlo si tiene excelente memoria y un entrenamiento para hacerse un mapa mental de la ruta seguida. Si establecemos coordenadas cartesianas (x, y) en el recinto y representamos el tiempo por t , la persona de abajo va definiendo con su movimiento un camino $(x(t), y(t))$ que será regular si procura no parar en ningún instante; pero le será muy difícil asegurarse de que el camino es bicontinuo.

En un experimento del segundo tipo la persona de la torre, que tiene mucha más información que la de abajo, puede impedir a esta última hacer caminos cruzados o con bucle. Simplemente le hará evitar “entrar en baldosas por la que ya ha pasado”. Entonces la persona de abajo definirá con su movimiento un camino bicontinuo, que además será regular si procura no parar en ningún instante. Cuanto más pequeñas las baldosas, más “arrugado” puede ser el camino bicontinuo.

En la ecuación implícita $h(x, y) = c$ la función h hace el papel de la persona de la torre. Es un objeto con más información que cualquier camino y deja establecido *de antemano*, para cada posición (x, y) , un número $h(x, y)$ que es distinto de c excepto en los puntos del subconjunto $\Gamma = h^{-1}(c)$. Si por ejemplo $\mathcal{R} = (a, b) \times (a', b')$ es una baldosa en la cual la derivada parcial h_x es negativa, entonces a la izquierda de $\Gamma \cap \mathcal{R}$ los valores de h son mayores que c , y a la derecha menores que c .



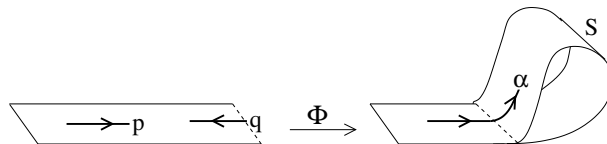
y esto prohíbe entrar dentro de la baldosa \mathcal{R} a toda rama de Γ distinta del tramo $\Gamma \cap \mathcal{R}$, evitando así cruces y bucles.

El razonamiento para superficies es enteramente análogo: la función $\varphi(x, y, z)$ proporciona cajas \mathcal{C} tales que $S \cap \mathcal{C}$ es un grafo que separa la caja en dos partes: una con $\varphi < c$ y otra con $\varphi > c$; esto impide que la superficie “vuelva a entrar” en la caja y así el grafo dentro de ella queda protegido.

1.8 Caminos en superficies

Definición 16. Sea $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica. Un camino $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un **camino en Φ** si existe un camino suave $(u(t), v(t)) : J \rightarrow U$ tal que $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$.

Por supuesto la imagen $\alpha(J)$ tiene que estar contenida en $S = \Phi(U)$, pero veamos con un ejemplo que el concepto que acabamos de definir es más que la mera inclusión conjuntista de las imágenes. La siguiente figura muestra una parametrización Φ de rango constante 2, inyectiva pero no bicontinua. También muestra un camino suave α , contenido en la imagen S de Φ , cuyo correspondiente camino $(u(t), v(t))$ es discontinuo porque salta bruscamente del punto p al punto q . Luego α no es un camino en Φ .



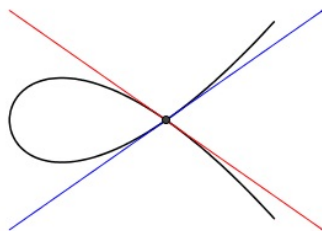
Si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular y bicontinua, entonces todo camino $\alpha(t)$ cuya imagen esté contenida en $\Phi(U)$ es un camino en Φ según la definición 16: en tal caso existen funciones $u(t), v(t)$, únicas y suaves, tales que $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$.

1.9 Recta tangente y plano tangente

Definición 17. Sean $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino suave y $t_0 \in J$ un valor paramétrico en el que α es regular. La **recta tangente vectorial de α en $t = t_0$** es el subespacio vectorial $T_{t_0} \alpha = \langle \alpha'(t_0) \rangle \subset \mathbb{R}^n$ y sus elementos son los **vectores tangentes a α en $t = t_0$** . La **recta tangente afín de α en $t = t_0$** es la recta afín en \mathbb{R}^n que pasa por el punto $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$ y es paralela a la recta tangente vectorial, es decir la recta afín $\mathbf{p} + \langle \alpha'(t_0) \rangle$.

Recuerda: estas rectas sólo se definen en los valores paramétricos en los que el camino es regular. La recta tangente vectorial pasa por el origen $\mathbf{0}$, pero puede que no pase por el punto \mathbf{p} . Del mismo modo, la recta tangente afín pasa por \mathbf{p} pero puede que no pase por el origen.

Observa que, para curvas paramétricas, definimos la recta tangente en función del valor paramétrico t_0 y no en función del punto imagen $\alpha(t_0)$. No hay ningún problema, pues, en que el camino sea no inyectivo: puede pasar varias veces por el mismo punto y tener una recta tangente diferente cada vez.



El conjunto $\{\lambda \alpha'(t_0) : \lambda \geq 0\}$, de los múltiplos no negativos de $\alpha'(t_0)$, es la **semirrecta tangente vectorial**. De manera evidente se define la afín. Si reparametrizamos el camino *manteniendo el sentido de recorrido*, es decir utilizando un difeomorfismo creciente $T : \tilde{J} \rightarrow J$, entonces la semirrecta tangente es la misma en valores paramétricos correspondientes por T .

Proposición 18. Si $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^n$ es una curva buena, y si $\alpha(t), \beta(\bar{t})$ son parametrizaciones regulares e inyectivas de un mismo trozo $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$, entonces $\alpha(t)$ y $\beta(\bar{t})$ son reparametrización la una de la otra.

Dado un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_0$ en una curva buena \mathcal{C}_0 , definimos la recta tangente vectorial $T_{\mathbf{p}} \mathcal{C}_0$ de esta curva en \mathbf{p} de la siguiente manera. Tomamos un tramo corto $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ que pase por \mathbf{p} , cualquier parametrización regular $\alpha(t)$ de este tramo corto, que va a ser inyectiva, y el valor paramétrico t_0 con $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$. Entonces $T_{\mathbf{p}} \mathcal{C}_0 = \langle \alpha'(t_0) \rangle$.

Veamos que esta recta sólo depende de la curva y el punto. Si cambiamos a otra parametrización regular $\beta(\bar{t})$ del mismo tramo corto \mathcal{C} , y tomamos el valor \bar{t}_0 tal que $\beta(\bar{t}_0) = \mathbf{p}$, entonces $\alpha(t)$ y $\beta(\bar{t})$ son una reparametrización del otro $\alpha \equiv \beta \circ T$, cumpliéndose $t_0 = T(\bar{t}_0)$ y $\alpha'(t_0) = T'(\bar{t}_0) \cdot \beta'(\bar{t}_0)$, luego $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(\bar{t}_0)$ generan el mismo espacio vectorial.

Observa esto: en realidad $T_{\mathbf{p}} \mathcal{C}_0 = T_{\mathbf{p}} \mathcal{C}$ sólo depende del punto \mathbf{p} y de un tramo arbitrariamente corto \mathcal{C} pasando por \mathbf{p} . Esto significa que *la recta tangente es una construcción local*.

La **recta tangente afín** se define, por supuesto, como $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}} \mathcal{C}_0$. En una curva buena **orientada**, es decir que se ha elegido un sentido de recorrido para ella, está bien definida la **semirrecta tangente** en cada punto.

Para definir el **ángulo** que el camino regular o la curva orientada hace con otro objeto, tomamos el ángulo hecho por la semirrecta tangente. Así definimos el ángulo con que se cruzan dos caminos (o dos curvas orientadas) al pasar por un mismo punto, el ángulo entre un camino y un vector no nulo, etc.

Si $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^2$ es una curva definida implícitamente $\{(x, y) \in U : h(x, y) = c\}$, el ángulo en cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_0$ entre la curva y el gradiente $\nabla h_{\mathbf{p}}$ (supuesto no nulo) es siempre **recto** porque si $\alpha(t)$ es parametrización regular de un tramo corto pasando por \mathbf{p} , con $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$, se tiene $h(\alpha(t)) \equiv c$ de donde

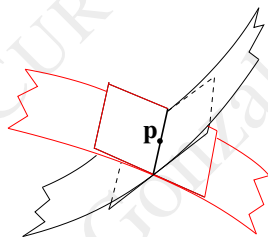
$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} h \circ \alpha(t) = \alpha'(t_0) \cdot \nabla h_{\mathbf{p}}.$$

Si $h(x, y)$ es suave con gradiente nunca nulo en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces los **niveles** de h en U son todos curvas buenas que llenan U por completo y hacen ángulo recto con el campo de vectores ∇h en cada punto por el que pasan.

Definición 19. Sean $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica y $(u_0, v_0) \in U$ un valor paramétrico en el que Φ es regular, es decir que $\Phi_u(u_0, v_0)$ y $\Phi_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes. El **plano tangente vectorial de Φ en $(u, v) = (u_0, v_0)$** es el subespacio vectorial $T_{(u_0, v_0)}\Phi = \langle \Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0) \rangle \subset \mathbb{R}^3$ y sus elementos son los **vectores tangentes a Φ en (u_0, v_0)** . El **plano tangente afín de Φ en $(u, v) = (u_0, v_0)$** es el plano afín en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ y es paralelo al plano tangente vectorial, o sea el plano afín $\mathbf{p} + \langle \Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0) \rangle$.

El plano tangente vectorial pasa por $\mathbf{0}$ pero tal vez no por \mathbf{p} . El plano tangente afín pasa por \mathbf{p} pero tal vez no por $\mathbf{0}$. Estos planos no están definidos en valores (u_0, v_0) en los que Φ no sea regular.

Al haber definido, para superficies paramétricas, el plano tangente en función del valor paramétrico (u_0, v_0) y no del punto imagen $\Phi(u_0, v_0)$, no hay ningún problema si Φ no es inyectiva: puede pasar varias veces por el mismo punto y tener un plano tangente distinto cada vez.



Proposición 20. Si $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie buena, y si $\Phi(u, v), \Psi(\bar{u}, \bar{v})$ son parametrizaciones regulares e inyectivas de un mismo trozo $S \subseteq S_0$, entonces Φ y Ψ son reparametrizaciones la una de la otra.

Dado un punto $\mathbf{p} \in S_0$ en una superficie buena S_0 , definimos el plano tangente vectorial $T_{\mathbf{p}}S_0$ de esta superficie en \mathbf{p} de la manera siguiente. Tomamos un trozo pequeño $S \subset S_0$ que rodee a \mathbf{p} , tomamos cualquier parametrización regular y bicontinua $\Phi(u, v)$ de ese trozo pequeño, tomamos el valor paramétrico (u_0, v_0) tal que $\Phi(u_0, v_0) = \mathbf{p}$ y definimos $T_{\mathbf{p}}S_0$ como el plano tangente vectorial de $T_{(u_0, v_0)}\Phi$. El plano tangente afín a la superficie buena S_0 en el punto \mathbf{p} es, por supuesto, el plano afín $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S_0$.

Veamos que este plano sólo depende de la superficie S y del punto \mathbf{p} . Si cambiamos a otra parametrización regular y bicontinua $\Psi(\bar{u}, \bar{v})$ del mismo trozo pequeño $S \subset S_0$, y tomamos el valor (\bar{u}_0, \bar{v}_0) tal que $\Psi(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \mathbf{p}$, entonces tenemos $\Phi \equiv \Psi \circ T$, para un difeomorfismo T del dominio de Φ al de Ψ , cumpliéndose $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = T(u_0, v_0)$ y que $\Phi_u(u_0, v_0)$ y $\Phi_v(u_0, v_0)$ son las combinaciones lineales de $\Psi_{\bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ y $\Psi_{\bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ que proporciona la **regla de la cadena**. La matriz de los coeficientes de esas dos combinaciones lineales es la jacobiana $(DT)_{(u_0, v_0)}$, por lo tanto invertible, y se sigue la igualdad $\langle \Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0) \rangle = \langle \Psi_{\bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0), \Psi_{\bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$.

El plano tangente es una construcción local: fijado el punto \mathbf{p} , dicho plano es el mismo para cualquier trozo pequeño $S \subset S_0$ que rodee a \mathbf{p} .

El **ángulo** que la superficie (buena o paramétrica) forma con otro objeto en el punto \mathbf{p} es el formado por el plano tangente. Así definimos el ángulo con que se cruzan una superficie y una curva en un punto, el ángulo entre dos superficies al cruzarse en un punto, el ángulo entre una superficie y un vector, etc.

Si $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$ es un camino en Φ , entonces el vector $\alpha'(t) = u'(t)\Phi_u + v'(t)\Phi_v$ es a la vez tangente al camino y a la superficie. Fijado un valor paramétrico (u_0, v_0) , el correspondiente punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ y otro valor t_0 , hay caminos numéricos $(u(t), v(t))$ que pasan por (u_0, v_0) en $t = t_0$ y tienen por derivada $(u'(t_0), v'(t_0))$ el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que nosotros queramos. A medida que vamos tomando esos caminos numéricos, y los correspondientes α en la superficie, las velocidades $\alpha'(t_0)$ de estos últimos al pasar por \mathbf{p} van realizando *todas* las combinaciones lineales $a\Phi_u(u_0, v_0) + b\Phi_v(u_0, v_0)$.

El plano tangente vectorial de una superficie buena en un punto \mathbf{p} es el conjunto de todas las velocidades al pasar por \mathbf{p} de caminos en la superficie. También es igual a la unión de todas las rectas tangentes vectoriales al pasar por \mathbf{p} de caminos regulares en la superficie. Análogamente para superficies paramétricas, con el valor paramétrico (u_0, v_0) en vez de \mathbf{p} .

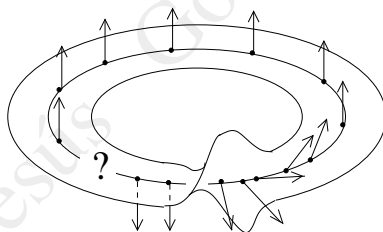
Si $S_0 = \{(x, y, z) \in V : \varphi(x, y, z) = c\}$ es una superficie implícita, el ángulo en cada punto $\mathbf{p} \in S_0$ entre la superficie y el vector gradiente $\nabla\varphi_{\mathbf{p}}$ es siempre recto. En efecto, si $\alpha(t)$ es un camino en la superficie se tiene $\varphi \circ \alpha(t) \equiv c$ y, derivando, se deduce $\alpha'(t) \cdot (\nabla\varphi)_{\alpha(t)} \equiv 0$. Luego $\nabla\varphi_{\mathbf{p}}$ hace ángulo recto con todo camino en la superficie al pasar por \mathbf{p} y, por la descripción que acabamos de dar de los planos tangentes, el ángulo entre $\nabla\varphi_{\mathbf{p}}$ y $T_{\mathbf{p}}S_0$ también es recto.

Si φ es suave con gradiente nunca nulo en un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces los **niveles** de φ en V son superficies buenas que llenan V por completo y son ortogonales al campo de vectores $\nabla\varphi$ en cada punto por el que pasan.

Dada una parametrización regular $\Phi(u, v)$, el **producto vectorial** $\mathbf{Y}(u, v) \equiv \Phi_u \times \Phi_v$ es un campo de vectores (función de los parámetros) normal a cada plano tangente $T_{(u,v)}\Phi$. A una superficie regular paramétrica $\Phi(u, v)$ le damos una **normal unitaria** $N(u, v) \equiv \mathbf{Y}/\|\mathbf{Y}\|$, dependiente de los parámetros. Si además $\Phi(u, v)$ es bicontinua, podemos reescribir N como función suave del punto en la superficie imagen: $N : \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Para una superficie dada como $S = \{\varphi = c\}$, tenemos una normal unitaria función del punto en S , obtenida restringiendo a S el campo $\nabla\varphi/\|\nabla\varphi\|$.

La **banda de Möbius** es una superficie buena, pero que no admite una normal unitaria que sea función continua del punto en la superficie.



Esto tiene una consecuencia importante: no es posible dar una definición implícita $S = \{\varphi = c\}$ de la banda de Möbius en ningún abierto espacial que la contenga y cumpliendo la condición de $\nabla\varphi$ nunca nulo a lo largo de la superficie, pues $(\nabla\varphi/\|\nabla\varphi\|)|_S$ sería esa normal unitaria continua que no existe. En otras palabras:

Hay más superficies buenas que las que pueden definirse implícitamente.

1.10 ¿Función del punto o función de los parámetros?

Como ya hemos avisado en el preámbulo de este capítulo, los modelos paramétricos y los modelos como subconjuntos son objetos matemáticos diferentes. Una situación en la que esta diferencia se nota mucho es al definir los **campos a lo largo del objeto**. Por ejemplo, las rectas tangentes forman un **campo de rectas** a lo largo de la curva pero este campo tiene dos definiciones no equivalentes según sea la curva paramétrica o buena.

Si el objeto (curva o superficie) es paramétrico, entonces un campo a lo largo de él es un objeto variable que *depende del parámetro o parámetros*.

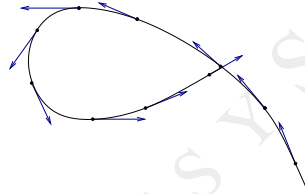
Por ejemplo dada la curva paramétrica $\alpha_2(t) \equiv (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$, que recorre la cúbica nodal, la derivada $\alpha_2'(t) \equiv (2t, 3t^2 - 1)$ es un **campo de vectores tangentes** a lo largo de α_2 ; es una función del parámetro t y no importa que “tome dos valores distintos en el punto $(0,0)$ ” porque esos dos valores, $\alpha_2'(-1)$ y $\alpha_2'(1)$, vienen de dos valores distintos de t y el campo lo consideramos función del parámetro, no del punto imagen.

Si el objeto es una curva o superficie buena, entonces un campo a lo largo de él es un objeto variable que *depende del punto en el objeto*.

Si un camino $\alpha(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular y bicontinuo, entonces cualquier campo $\mathcal{C}(t)$ a lo largo de α lo podemos reconvertir en un campo a lo largo de la curva buena $\Gamma = \alpha(J)$ componiendo con la aplicación inversa:

$$\Gamma \ni \mathbf{p} \longmapsto \mathcal{C}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}(t)|_{t=\alpha^{-1}(\mathbf{p})}.$$

Si el camino es solamente regular e inyectivo, pero no bicontinuo, la inversa α^{-1} existe pero es discontinua y la compuesta $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ puede ser discontinua también. Un sencillo ejemplo de esta dificultad lo dan el camino inyectivo $\alpha_2(t)|_{t < 1}$ y el campo de vectores tangentes $\mathcal{C}(t) \equiv \alpha_2'(t)$.



Si una parametrización $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular y bicontinua, entonces cualquier campo $\mathcal{C}(u, v)$ a lo largo de Φ lo podemos reconvertir en un campo a lo largo de la superficie buena $S = \Phi(U)$ componiendo con la aplicación inversa:

$$\mathbf{p} \in S \longmapsto \mathcal{C}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}(u, v)|_{(u,v)=\Phi^{-1}(\mathbf{p})},$$

y de nuevo no debemos hacer esto con una Φ que no sea bicontinua, aunque sea inyectiva.

Las construcciones que vamos a hacer son casi todas **locales**, o sea basadas en pequeños trozos de la curva o superficie. En el apartado 1.4 hemos visto que si ϕ es una parametrización regular (de uno o dos parámetros), entonces las restricciones de ϕ a partes pequeñas de su dominio son bicontinuas. Como consecuencia, dado un campo C a lo largo de ϕ las restricciones de C a pequeños dominios U se pueden reconvertir a campos a lo largo de las imágenes pequeñas $\phi(U)$.

1.11 Resultados globales 1

Una **propiedad local** es aquella que se puede comprobar en pequeños dominios (trozos) y, si se cumple ahí, entonces se cumple en el dominio grande. Ejemplos de propiedades locales: ser continua, ser suave, ser una parametrización regular (de uno o dos parámetros), ser una función escalar monótona $J \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo J , ser estrictamente monótona en J .

Ejemplos de propiedades *no locales*: ser una aplicación inyectiva, ser una función acotada (escalar o vectorial), ser una aplicación suprayectiva, ser una *curva cerrada y simple*, ser una *superficie cerrada*, ser una curva o superficie **conexa** (de una sola pieza).

Una **construcción local** es la que puede hacerse a partir de trozos arbitrariamente pequeños de un objeto. Ejemplos de construcciones locales: el vector velocidad, la recta tangente, el plano tangente, la normal unitaria, la matriz jacobiana.

Una construcción **global** o bien no se puede hacer a trozos, o bien exige recubrir de alguna manera el dominio entero con esos trozos. Ejemplos de construcciones globales: hallar el máximo (o el mínimo) de una función, calcular una integral definida, hallar un conjunto preimagen $h^{-1}(y)$.

Aviso: mientras que en los ejemplos que acabamos de dar está claro el carácter local o no local, a veces puede no estar tan clara la distinción. Por ejemplo la propiedad “ser una curva buena en el plano” sería una propiedad local si dado un subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ fuese fácil determinar sus intersecciones con ventanas $\Gamma \cap \mathcal{R}$. Pero supongamos que Γ viene dado como el conjunto imagen $\Gamma = \alpha(J)$ de una parametrización $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$; entonces determinar $\Gamma \cap \mathcal{R} = \alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{R}))$ nos requiere hallar la preimagen $\alpha^{-1}(\mathcal{R})$, y acabamos de decir que hallar preimágenes es un problema global.

Damos ahora un ejemplo de *resultado global* para curvas en el plano:

Teorema 21. (Desigualdad isoperimétrica). *Fijado un valor positivo l , de entre todas las curvas cerradas de longitud l en el plano las que encierran área máxima son (solamente) las circunferencias.*

Haremos un uso particular de la desigualdad isoperimétrica en el capítulo 4.

Un ejemplo de resultado global para superficies es la observación, hecha en el apartado 1.9, de que la banda de Möbius no tiene una normal unitaria continua en toda la superficie. También es un resultado global la consecuencia de que dicha banda no se puede definir por una ecuación con gradiente nunca nulo.

1.12 Grados de regularidad

Normalmente usamos la palabra “suave” como sinónimo de \mathcal{C}^∞ , porque éste es el grado de diferenciabilidad más popular en los cursos de Geometría Diferencial, pero hay un grado de regularidad que es todavía más fuerte y que nos hará falta algunas veces en este curso.

Definición 22. *Una función (de una o varias variables) es de clase \mathcal{C}^ω , o **analítica real**, si es \mathcal{C}^∞ y en cada punto de su dominio tiene un desarrollo de Taylor, centrado en ese punto, que de hecho es convergente a la función en algún entorno de dicho punto.*

Ejemplos de funciones \mathcal{C}^ω : todos los polinomios, e^x , $\sin x$ y la función x/y en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Suma, multiplicación y composición de funciones \mathcal{C}^ω produce nuevas funciones \mathcal{C}^ω . Si un difeomorfismo es \mathcal{C}^ω entonces su inverso es \mathcal{C}^ω , ejemplos: $\log x$ y $\sqrt[n]{x}$ en el intervalo $x > 0$.

Si una función $y = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ está definida implícitamente por $h(x_1, \dots, x_k, y) = 0$, donde h es \mathcal{C}^ω y con $h_y \neq 0$ en los puntos $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$, entonces φ es \mathcal{C}^ω .

Si $\mathbf{F}(t, x_1, \dots, x_n)$ es función vectorial \mathcal{C}^ω de $n+1$ variables, con valores en \mathbb{R}^n , entonces las soluciones $\mathbf{x}(t)$ del sistema de EDOs $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ son todas funciones \mathcal{C}^ω de t .

El ejemplo estándar de una función que es \mathcal{C}^∞ pero **NO** \mathcal{C}^ω es el siguiente

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se demuestra que esta $h(x)$ es \mathcal{C}^∞ en toda la recta real y que su serie de Taylor en $x_0 = 0$ es la serie idénticamente nula. Como $h(x)$ no es idénticamente nula en ningún entorno de 0, deducimos que h no es \mathcal{C}^ω .

Podemos pensar en las funciones \mathcal{C}^ω como *hechas de cristal*, ya que son muy rígidas: la restricción de una función \mathcal{C}^ω a un pequeño abierto ya la determina en todo su dominio. Podemos pensar en las \mathcal{C}^∞ como *hechas de goma*, ya que son enormemente flexibles. Por ejemplo la función $h(x)$ arriba descrita coincide con la 0 en $x \leq 0$ pero es muy distinta de la 0 en $x > 0$.

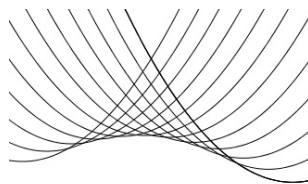
1.13 Envoltentes

Sea $\alpha_\lambda(t)$ una familia uniparamétrica de curvas regulares en el plano, es decir que para cada valor λ_0 la función $t \mapsto \alpha_{\lambda_0}(t)$ es suave con derivada nunca nula. Se dice que la curva α_λ **depende suavemente del parámetro λ** si la aplicación

$$\Phi(t, \lambda) : (\text{un abierto del plano } t\lambda) \mapsto \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Phi(t, \lambda) \equiv \alpha_\lambda(t) ,$$

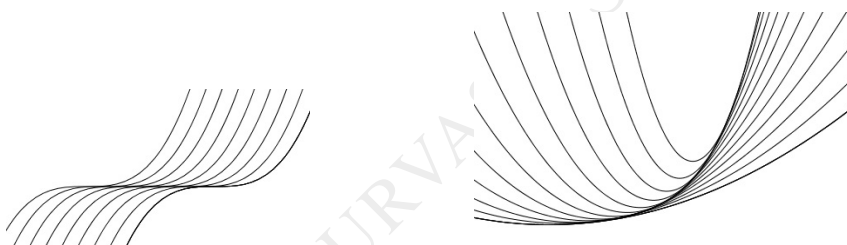
es suave como función de dos variables. La **envolvente** de esta familia se define *intuitivamente* como la curva o sistema de varias curvas (si es que existe) que es tangente a cada α_λ .

Es importante distinguir entre dos tipos de envolvente. Tenemos una **envolvente de rebote** cuando cada curva α_λ de la familia retrocede nada más tocar a la envolvente, es decir que “rebota contra la envolvente”.



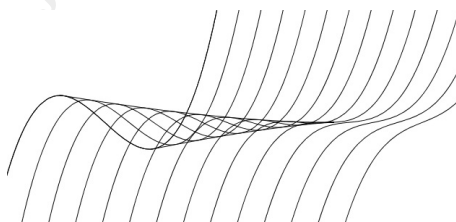
Estas envolventes son las que el ojo humano ve con más precisión; las aprecia como parte de la frontera que separa la zona rellenada por las α_λ del resto del plano (de hecho, en la figura anterior sólo se han dibujado las α_λ , la envolvente te la imaginas tú). Envolventes de este tipo son frecuentes en obras de arte y en imágenes de publicidad.

Tenemos una **envolvente atravesada** si cada curva α_λ la atraviesa tangente. En las siguientes figuras sólo se han dibujado las α_λ , pero el ojo humano ve (con escasa precisión) la envolvente atravesada como “la zona de máxima intensidad de negro”.



Las envolventes de rebote suelen ser una configuración *robusta*: si deformamos un poco las α_λ la envolvente de rebote sobrevive aunque también se desplaza y deforma un poco. Para que falle esta robustez tiene que darse algo excepcional: que alguna α_λ y la envolvente no estén separadas por una **cuña cuadrática** en el punto de contacto, sino por una cuña cuártica o más fina.

Las envolventes atravesadas son, en cambio, configuraciones *inestables*. Al deformar las α_λ , incluso un poquito, suele suceder que la envolvente atravesada se desvanece por completo o se desdoble en dos envolventes de rebote. También es muy frecuente que en parte se desvanezca y en parte se desdoble en dos de rebote, en cuyo caso la nueva envolvente tiene un punto de retroceso queratoide en el cual se juntan sus dos ramas de rebote.



La facilidad con que se da este fenómeno explica en parte la abundancia de retrocesos queratoides en las envolventes, algo que se viene observando desde el siglo XVII.

Ahora vamos a dar un método de cálculo de la envolvente. Introducimos los siguientes conceptos:

- Un **punto singular de Φ** es un (t_0, λ_0) en el dominio de Φ tal que $\text{rango}(D\Phi_{(t_0, \lambda_0)}) < 2$.
- Un **valor singular de Φ** es la imagen por Φ de algún punto singular de Φ .

Proposición 23. Sea α_λ una familia suave de curvas regulares en el plano. Supongamos que los puntos singulares de $\Phi(t, \lambda) \equiv \alpha_\lambda(t)$ forman una curva, trazada por $\beta(u) \equiv (t(u), \lambda(u))$, y que la función

$\lambda(u)$ no permanece constante en ningún intervalo. Entonces la parametrización $\gamma(u) \equiv \Phi(\beta(u))$, que traza el conjunto de los valores singulares, es tangente a cada curva α_λ que se va encontrando.

Demostración. Como cada curva α_λ es regular, el vector $\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \alpha'_\lambda(t)$ es siempre no nulo. Esto implica que en los puntos singulares $(t(u), \lambda(u))$ el rango de Φ es exactamente 1, y que existe una función escalar suave $c(u)$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\Phi \Big|_{(t(u), \lambda(u))} \equiv c(u) \frac{\partial}{\partial t}\Phi \Big|_{(t(u), \lambda(u))}.$$

Entonces es fácil ver que $\gamma'(u) \equiv a(u) \alpha'_{\lambda(u)}(t)|_{t=t(u)}$, con $a(u) \equiv t'(u) + c(u) \lambda'(u)$. Como además $\gamma(u) = \alpha_{\lambda(u)}(t(u))$ vemos que, para cada u , la curva γ toca tangentemente a la curva $\alpha_{\lambda(u)}(t)$ en el valor $t = t(u)$. \square

Esta demostración vale igual si la función $\lambda(u)$ es constante en algún intervalo, pero en tal caso la curva γ contiene todo un tramo de alguna curva α_{λ_0} , situación que hemos preferido no considerar.

Una familia uniparamétrica de superficies $\Phi^\lambda(u, v)$ es suave si $\psi(u, v, \lambda) \equiv \Phi^\lambda(u, v)$ es suave como función de tres variables. Definimos intuitivamente la **superficie envolvente** como una superficie o sistema de varias superficies (si es que existe) que sea tangente a cada superficie de la familia.

Lo normal es que la envolvente sea tangente a cada Φ^λ a lo largo de una curva.

De nuevo tenemos los conceptos de punto singular y valor singular de ψ . Un punto singular está en el dominio de ψ y en él la jacobiana $D\psi$ tiene rango < 3 . Un valor singular es la imagen por ψ de un punto singular. La superficie envolvente se obtiene como el conjunto de los valores singulares de ψ .