Hoja 3

Derivadas parciales y funciones diferenciables

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(*a*) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(xy^2)} - \log^2 x$, definida para los (x,y) tales que $x > 0$.

(*b*) $f(x,y,z) = x^2 y e^z - y^2 \operatorname{sen}(xz)$, definida en $\mathbb{R}^3$.

(*c*) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definida en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

(*d*) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}$, definida para los (x,y) tales que $x\,y \neq -1$.

2.- Determinar los puntos en los que existen las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x,y) = |x|y^2$ y calcular dichas derivadas.

3.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen pero no es continua en ese punto.

4.- Considérese la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad\qquad f(0,y) = 0.$$

(*a*) Demostrar que existen las derivadas parciales en el origen y calcular su valor.

(*b*) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(*c*) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(*d*) Hallar la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ para cada dirección $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

5.- Demuéstrese que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

6.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

7.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$.

8.- Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de la función

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2}$.

9.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z) = z^2\, e^x\, \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x\, \operatorname{sen} x, e^x\, \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(e) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\Big)$.

10.- Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x) = \|x\|^4$ y $f(x) = \langle a, x\rangle$, siendo $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_{\mathbf{v}} f(x)$ y $D_{\mathbf{v}} g(x)$ para cada $x, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{1}$.

(b) Tomando $n = 2$, hallar todos las direcciones unitarias $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $D_{\mathbf{v}} g(2,3) = 6$.

(c) Tomando $n = 3$, hallar todos las direcciones unitarias $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $D_{\mathbf{v}} g(1,2,3) = 0$.

11.- Sea $f(r,t) = t^n\, e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r \geq 0$ y $t > 0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r,t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big) \qquad (r, t > 0)\,.$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y) = e^{-y}\, \cos x$.

(b) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0,)\}$.

(c) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

13.- (a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$ en el origen.

(b) Comprobar que f es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcular el vector $\nabla f(2,1)$.

14.- Hallar los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v} = (u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(x,y)$ de la función $f(x,y) = 3\,x^2 + y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

15.- Hallar los valores de a, b, c tales que la derivada direccional respecto de un vector unitario de la función

$$f(x,y,z) = a\,x\,y^2 + b\,y\,z + c\,x^3 z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje $0Z$ (eje positivo de las Z's).

16.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1/\sqrt{13}$ y $D_{\mathbf{v}} f(a) = \sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ y $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(a) Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

(b) Hallas las dos direcciones unitarias $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}} f(a) = 0$.

17.- Hallar la derivada de $f(x,y) = x^2 - 3\,xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1,2)$.