Cálculo Numérico I

Curso 2020-2021 | Hoja de problemas 7 | 1º Mat./2º D.G.

1) Analizar la convergencia del método del punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, para calcular las raíces reales de $f(x) = x^2 - x - 2$, con cada una de las siguientes g's: $g_1(x) = x^2 - 2$, $g_2(x) = \sqrt{x+2}$, $g_3(x) = -\sqrt{2+x}$ y $g_4(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ con $x \neq 0$.

2) Encontrar los puntos fijos de las siguientes iteraciones y analizar la convergencia:

a) $x_{n+1} = \sqrt{p + x_n}$ con $p > 0$.

b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$.

3) En el intervalo [0,1] se considera la función $g(x) = \lambda x(1-x)$ donde $\lambda \in [0,4]$.

a) Demostrar que g envía el intervalo $[0,1]$ en sí mismo.

b) ¿Cuántos puntos fijos tiene g en [0,1]?

c) Demostrar que el punto fijo $p = 0$ es atractor si $\lambda < 1$ y repulsor para $\lambda > 1$.

4) Se considera la ecuación $\tan x = x$ para $x > 0$.

a) Demostrar que tiene una única raíz en cada uno de los intervalos $(\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi(n+1))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Escribir un programa que use iteración para calcular las 10 primeras raíces ($n = 0, 1, ..., 9$) con 6 dígitos correctos.

5) Se considera la función $g(x) = (1/2)x - x^3$.

a) ¿Cuántos puntos fijos tiene g?

b) Hallar un punto $\beta > 0$ con la propiedad $g(\beta) = -\beta$.

c) ¿Qué le ocurre a la iteración de punto fijo para $x_0 \in (0, \beta)$? ¿Y para $x_0 = \beta$? ¿Y para $x_0 > \beta$?
`Observación`: no es necesario considerar los casos en que x_0 sea negativo pues al cambiar el signo de x_0 cambia el signo de todos los iterados.

6) Sea $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

a) Encontrar los puntos fijos de g

b) Para cada x_0 real la sucesión de iterados converge a un punto fijo. Determinar, en función de x_0, cuál es ese límite.

7) Sea $f \in \mathcal{C}^{m+1}$, $m \geq 2$ (la función y sus $m+1$ primeras derivadas son continuas) tal que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0, \text{ pero } f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

a) Considerar la iteración del método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $k \geq 0$, y demostrar que no puede tener convergencia cuadrática para aproximar ξ.

b) Considerar el método de Newton modificado $x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0$, y demostrar que su orden de convergencia sí es 2.

8) Las funciones $g(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \tan(x)$ tienen ambas un punto fijo en $\alpha = 0$ y para ambas $g'(0) = 1$.

a) Probar que para $|x_0|$ suficientemente pequeño con el seno la iteración de punto fijo converge mientras que con la tangente diverge.

b) En el caso $|g'(\alpha)| = 1$ la convergencia o divergencia depende de los valores de las derivadas superiores de g. Probar que si con $|g'(\alpha)| = 1$ hay convergencia cada error es asintóticamente de la misma magnitud del anterior con lo que la convergencia es lentísima y el método carece de utilidad en ese caso.

9) Suponer que $f \in \mathcal{C}^2$, $f(\xi) = 0$ y que en el intervalo $[a, \xi]$ (con $a < \xi$), $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$.

a) Demostrar que para todo $x_0 \in [a, \xi]$ el método de Newton converge a ξ.

b) ¿Es eso cierto, en general, si cambiamos $[a, \xi]$ por $[\xi, a]$?

10) Se considera la ecuación (*) $x = -a \log(x)$, donde a es un parametro positivo.

a) Demostrar que para cualquier $a > 0$, esta ecuación tiene una única solución real.

b) Demostrar que el método del punto fijo, aplicado a la función $g(x) = -a \log(x)$, converge para $a < 1/e$, y diverge para $a > 1/e$.

c) Si se escoge $a = 1/10$, ¿para qué valores del dato inicial x_0 puede estar uno seguro de que el metodo converge?

d) Calcular (en MatLab o con una calculadora) la solución de la ecuación (*) para $a = 9/25$ con 4 dígitos signicativos, eligiendo un método adecuado.

11) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = \dfrac{5x}{1 + x^4}$.

a) Encontrar los puntos fijos de g. ¿Son atractores o repulsores?

b) Sea F el conjunto de puntos fijos de g, encontrado en el apartado anterior. Demostrar lo siguiente. Para todo dato inicial x_0, ó bien $x_k \in F$ para algún k finito (en este caso, lógicamente, los aproximantes $\{x_n\}$ convergen), ó bien $\{x_n\}$ no tienen ningún límite finito o infinito ($\pm\infty$). Comprobar también que en el último caso, la sucesión $\{|x_n|\}$ tampoco tiene límite (finito o infinito).

12) Se considera la función $f(x) = \text{signo}(x)|x|^a$, donde $\text{signo}(0) = 0$, $\text{signo}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ y $a > 0$ es un parámetro.

a) ¿Existen valores de a para los que no tenemos convergencia local del método de Newton a la raíz 0 de f? ¿Son válidos los teoremas que vimos en clase para estos casos?

b) Determinar los valores de a tales que se tiene la convergencia local. ¿Va a haber convergencia global en estos casos?

c) En casos cuando tenemos la convergencia local, determinar el orden de convergencia del método de Newton (en función de a).

13) Aplicamos el método del punto fijo a la función $g(x) = \frac{x}{1+2x}$ escogiendo $x_0 = 1$ como aproximante inicial.

a) Comprobar que $\alpha = 0$ es el único punto fijo de g. Demostrar que es atractor.

b) Decir exactamente, cuántas iteraciones necesitaremos para lograr que $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10}$. ¿Y cuántas para tener $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10^5}$?

14) (Continuación del ejercicio anterior). Supongamos ahora que g es cualquier función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

a) Demostrar que el punto fijo $\alpha = 0$ es atractor si $g''(0) < 0$ y es repulsor si $g''(0) > 0$.

b) Supongamos que $g''(0) < 0$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de aproximantes que tiende al punto fijo 0. Demostrar que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = |g''(0)|/2.$$

c) Ponemos $t_n = 1/x_n$. Sabemos pues que $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = |g''(0)|/2$. Deducir que existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n}.$$

Calcular este límite.

15) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = (x-2)/3 + C(x+1)^{-1/2}$, donde C es una constante positiva.

a) Demostrar que g es convexa en exactamente un punto fijo $(-1, +\infty)$. Demostrar que, indepentientemente del valor de C, g tiene exactamente un punto fijo en este intervalo.

b) Investigar si es atractor o repulsor. Calcular el orden de convergencia del método de punto fijo y demostrar que este orden no depende de C.

c) Demostrar que el método converge para todo aproximante inicial x_0 en $(-1, \infty)$.