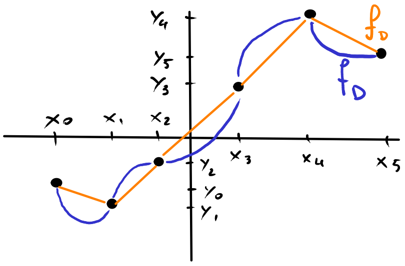
9. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

9.1 PROBLEMAS DE INTERPOLACIÓN



sean $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ puntos del plano

$x_i \neq x_j$ si $i \neq j$: encontrar $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\boxed{f_D(x_i) = y_i}$$ INTERPOLACIÓN

este problema en general tiene ∞ soluciones

por ejemplo $f_D(x) = \begin{cases} y_i & \text{si } x = x_i, \ i \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{x_i\}_{i=0}^{n} \end{cases}$

I. buscar f_D en una clase de funciones $\leadsto$ para nosotros: polinomios

- dada una clase : ¿$\exists$ solución? / ¿es única?
- si $\exists!$ f_D para todo D : ¿cómo calcularla?

encontrar un "buen" algoritmo t.q. dado $x \in \mathbb{R}$ nos permite obtener $f_D(x)$

"bueno":
- rápido (pocos flop)
- estable (poco sensible a los errores)

II. si ya tenemos un algoritmo

$D = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \longmapsto f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_D \in$ clase

supongamos que $\exists$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "función original"

- que conocemos solo por su valor en los puntos x_i : de f solo conocemos $y_i = f(x_i)$ — INFORMACIÓN PARCIAL
- que queremos conocer en puntos $x \neq x_i$

¿qué error hacemos si reemplazamos f por f_D?

error de interpolación:

- si f no está en la clase de funciones donde estamos buscando f_D, entonces $f_D \neq f$
- el error puede depender de los puntos $\{x_i\}$ donde conocemos el valor de f

9.2 POLINOMIO INTERPOLADOR

def: espacio de los polinomios de grado $\leq n$

$$\mathbb{P}_n = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ t.q. } p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ \forall x \in \mathbb{R} \}$$

proposición:

i. $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial real de dim $= n+1$

ii. las funciones $\{x^k\}_{k=0}^{n}$ MONOMIOS son una base de $\mathbb{P}_n$

demostración:

i. sean $p, p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

las operaciones $(p_1, p_2) \mapsto p_1 + p_2$

$(\lambda, p) \mapsto \lambda p$

definen un espacio vectorial

ii. por definición todo $p \in \mathbb{P}_n$ es c.l. de $\{x^k\}_{k=0}^{n}$

↳ solo hay que comprobar que son l.i.

si $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es t.q. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \quad \forall x$

p tiene ∞ ceros

todo $p \in \mathbb{P}_n$ no nulo tiene como mucho n ceros reales $\Rightarrow$ p es el polinomio nulo

$a = 0$ #

teorema: (existencia y unicidad del polinomio interpolador)

sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ $n+1$ puntos del plano t.q. $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$\Rightarrow \exists!$ polinomio de grado $\leq n$ $p \in \mathbb{P}_n$ t.q. $p(x_i) = y_i \quad \forall\, i \in \{0..n\}$.

demostración:

sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$\Rightarrow \quad p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = (1 \ x_i \ x_i^2 \ \ldots \ x_i^n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

↳ las $n+1$ condiciones $p(x_i) = y_i$, $i \in \{0..n\}$ se pueden escribir como el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

V matriz de Vandermonde para $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$: si $x_i \neq x_j$ $i \neq j$ $\det V \neq 0$

$$\Rightarrow \exists!\ a \in \mathbb{R}^{n+1} : \ V a = y \quad , \ y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

#

observaciones:

- esta prueba sugiere un algoritmo (o más) para encontrar el polinomio interpolador: resolver el sistema $Va = y$ $<^{LU}_{QR}$: $O(n^3)$

  $a = V^{-1}y$ define una función $p \in \mathcal{P}_n$ que podemos calcular en un $x \in \mathbb{R}$ con $O(n)$ operaciones aritméticas → algoritmo de Horner

- problema: V es típicamente una matriz MAL CONDICIONADA

  ↳ para muchas configuraciones de $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

- las estrategias que se usan para encontrar el polinomio interpolador no son $a = V^{-1}y$

  ↳ idea: usar bases distintas de la de los monomios

  - Lagrange
  - Newton

otra <u>demostración</u> (que no requiere el cálculo del determinante de Vandermonde):

- si $n=0$ (1 punto): polinomio de grado 0
  $p(x)=y_0$, existe y es el único t.q. $p(x_0)=y_0$
- si $n=1$: para 2 puntos (distintos) pasa uno y solo una recta

$$p(x) = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x + \frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0} = \frac{y_1}{x_1-x_0}(x-x_0) + \frac{y_0}{x_1-x_0}(x-x_1)$$

↳ recta por (x_0,y_0), (x_1,y_1): existe y es única

- por inducción: sea $p_n \in \mathcal{P}_n$ que pase por $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$

$$P_n(x_i)=y_i \quad \forall i \in \{0..n\}$$

↳ veamos que $\exists\ q \in \mathcal{P}_{n+1}$ t.q. $q(x_i)=y_i\ \forall i \in \{0..n+1\}$

un punto más: (x_{n+1}, y_{n+1})

sea $c \in \mathbb{R}$, sea $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ → grado $n+1$

y sea $q_c(x) = p_n(x) + c\,\Pi(x)$

- si $i \in \{0..n\}$, $q_c(x_i) = \underbrace{p_n(x_i)}_{=y_i} + c\underbrace{\Pi(x)}_{=0} = y_i$
- $q_c(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + c\,\underbrace{\Pi(x_{n+1})}_{\neq 0}$

$\neq 0$: Π es un polinomio de grado $n+1$ que es cero en los $n+1$ puntos $x_0..x_n$ no puede tener otro cero

⇒ podemos usar c para imponer $q_c(x_{n+1}) = y_{n+1}$: $c = \dfrac{y_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{\Pi(x_{n+1})}$

- unicidad: sean $p,q \in \mathcal{P}_n$, $p(x_i)=q(x_i)=y_i\ \forall i \in \{0..n\}$

⇒ $r = p-q \in \mathcal{P}_n$ es un polinomio de grado $\leq n$ que tiene $n+1$ ceros: $r(x_i)=0\ \forall i \in \{0..n\}$

⇒ r es el polinomio nulo $r=0$

#