Compromiso de honestidad.

Yo, Pablo Cuesta Sierra, con DNI 54194689 L, me comprometo a realizar la prueba de evaluación de Álgebra Lineal de manera individual, sin la ayuda de otras personas, ni ayuda externa (llamadas telefónicas, videoconferencia, o cualquier otro modo análogo), ni material adicional, salvo las notas y mis apuntes de la asignatura.

Firma:

Cuesta.

Fecha: 17 de Abril, 2020.

Ejercicio 1. Sea $a \in \mathbb{R}$, $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida en $\mathcal{C}$ como sigue:

$$T_a(x,y,z) = (ax + 2y + 2z,\ 2x + ay + 2z,\ 2x + 2y + az)$$

$\mathcal{B} = \{ \vec{v_1} = (1,1,0),\ \vec{v_2} = (0,-1,1),\ \vec{v_3} = (-1,0,1) \}$ base de $\mathbb{R}^3$.

(a) $M(T_a; \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ es la matriz de T_a con

la base canónica en salida y en llegada, obtenida poniendo en las columnas las imágenes de los elementos de $\mathcal{C} = \{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \}$.

La matriz que se nos pide la podemos ver como la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[r, "T_a"', "M(T_a;\mathcal{C},\mathcal{C})" below] \arrow[rr, bend right] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[r, "Id_3", "C"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$$M(T_a; \mathcal{C}, \mathcal{B}) = C \cdot M(T_a; \mathcal{C}, \mathcal{C}) \quad (*)$$

Donde C es la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$,
es decir, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & +1/2 \end{array}\right) \to C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & +1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$* \Rightarrow M(T_a; \mathcal{C}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a+4 & a+4 & a+4 \\ a & 4-a & a \\ 4-a & a & a \end{pmatrix}\frac{1}{2}}$$

(b) Cuando $a = -2$

$$M(T_{-2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El núcleo: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker}(T_{-2}) \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ El núcleo tiene dimensión cero.

y, como $\dim(\operatorname{Ker} T_2) + \dim(\operatorname{Img}(T_2)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Podemos concluir que $\dim(\operatorname{Img}(T_2)) = 3$.

Como $\operatorname{Img}(T_2) \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Img}(T_2))$

$\Rightarrow \operatorname{Img}(T_{-2}) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es base de la imagen.

(c) Sup $a \neq 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & a & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2-a & 0 \\ a & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2-a & 0 \\ 0 & 4-2a & 4-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+2a-8 & 0 \end{array}\right) \qquad a^2 + 2a - 8 = 0 \iff a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{1} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

Si $a \neq -4$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, y el núcleo tiene dim. nula.

Si $a = -4$, el sistema es compatible indeterminado, (la matriz tiene dos escalones) $\rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T_{-4})) = 1$

Si $a = 2$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T_2)) = 2$

El núcleo tiene dim. máxima con $a = 2$.

Ejercicio 2

(a) $$|B| = \begin{vmatrix} a-mc & b-md \\ c-la & d-lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + ml \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} =$$

$$= |A| - ml \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A| - ml|A|$$

$$\Rightarrow |B| = (1-ml)|A|.$$

(b) $$A = [C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n]$$

$$B = [C_1, \dots, C_i - mC_j, \dots, C_j - lC_i, \dots, C_n]$$

$$\Rightarrow |B| = |[C_1, \dots, C_i, \dots, C_j - lC_i, \dots, C_n]| +$$

$$+ |[C_1, \dots, -mC_j, \dots, C_j - lC_i, \dots, C_n]|$$

$$= |[C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n]| +$$

$$+ |[C_1, \dots, C_i, \dots, -lC_i, \dots, C_n]| +$$

$$+ |[C_1, \dots, -mC_j, \dots, C_j, \dots, C_n]| +$$

$$+ |[C_1, \dots, -mC_j, \dots, -lC_i, \dots, C_n]|$$

(una columna es c.l. de otras, det = 0)

$$= |A| + |[C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n]|\,(-(-m)(-l)) = |A| - ml|A|.$$

a la última matriz, intercambio de las filas, $-mC_j$, $-lC_i$, es decir, su determinante se multiplica por (-1), sacamos los factores $(-m)$, $(-l)$ que multiplican a dos filas

$$\Rightarrow |B| = (1-ml)|A|.$$

Ejercicio 3 $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Para cada $K \in \mathbb{R}$: $T_K : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$p(x) \longmapsto (2p(0), Kp'(1), p''(2))$$

base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

(a)

Para calcular M_K, matriz de T_K en $\mathcal{B}_1$ (salida) y $\mathcal{B}_2$ (llegada)

basta con calcular las imágenes de $\mathcal{B}_1$:

$T_K(1) = (2, 0, 0)$, $T_K(x^2) = (0, 2K, 2)$

$T_K(x) = (0, K, 0)$, $T_K(x^3) = (0, 3K, 12)$.

$$\Rightarrow \boxed{M_K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 2K & 3K \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}}$$

(b) Si $K=0 \rightarrow M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -6\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{B}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \right\rangle = \langle x, -6x^2 + x^3 \rangle}$$

es una base del núcleo con $K=0$

Si $K \neq 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9\lambda \\ -6\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \rightarrow \mathcal{B}_K = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \right\rangle = \boxed{\langle 9x - 6x^2 + x^3 \rangle}$$

Base del núcleo para $K \neq 0$.

(c) $T: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$p(x) \longmapsto \left(3p(0),\ 5p'(1),\ \tfrac{3}{2}p''(2)\right)$$

$$T_1(p(x)) = (2p(0),\ p'(1),\ p''(2))$$

$$T_2(p(x)) = (2p(0),\ 2p'(1),\ p''(2))$$

Tenemos que ver si ¿$\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ tq $T = aT_1 + bT_2$?

$$\leftrightarrow\ \left(3p(0),\ 5p'(1),\ \tfrac{3}{2}p''(2)\right) = a(2p(0), p'(1), p''(2)) + b(2p(0), 2p'(1), p''(2)).$$

Para todo $p(x) \in V$,

(*) Tenemos el SEL: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right)$

$$\rightarrow T = -\frac{4}{2}T_1 + \frac{7}{2}T_2.$$

$$\rightarrow T \in \langle T_1, T_2 \rangle.$$

(*) Para la primera coordenada, tomamos $p(x) = 1 \rightarrow p(0) = 1$

para la segunda $p(x) = x \rightarrow p'(1) = 1$

para la tercera $p(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow p''(2) = 1$

Ejercicio 4. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$\mathcal{C} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{C}$ base de V.

$$\beta = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Los elementos de β en la base $\mathcal{C}$:

$u_1 = (2, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, -2)$

$u_3 = (0, 0, -1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1, u_2, u_3$$

son l.i. y son 3

$\Rightarrow \beta$ es base de V.

Para calcular β^* basta con hacer la inversa de la matriz que tiene por filas u_1, u_2, u_3 (prop. vista en clase)

$0 \quad 1/2 \quad 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta^* = \{ u_1^* = (0, 1/2, 0)_{\mathcal{C}^*},\ u_2^* = (1, -1, 0)_{\mathcal{C}^*},\ u_3^* = (-2, 2, -1)_{\mathcal{C}^*} \}}$$

Base dual de β en coordenadas de $\mathcal{C}^*$.

(b) si $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & b \end{pmatrix} = (a, b, c)_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Ann}(\langle u_1^* + u_3^* \rangle)$

$$\Rightarrow (u_1^* + u_3^*)(A) = 0. \quad u_1^* + u_3^* = \left(-2, \tfrac{5}{2}, -1\right)_{\mathcal{C}^*}$$

$$\Rightarrow (-2, 5/2, -1)_{\mathcal{C}^*} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = -2a + \tfrac{5}{2} b - c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ -2\lambda + 5/2\,\beta \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Base de Ann $\langle u_1^* + u_3^* \rangle \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \right\}$

$$\boxed{= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

(c) $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\} = \beta^*$ es base de V^*

$\Rightarrow$ $g^* \in Ann(\langle u_1, u_2 \rangle)$ y $g^* = (a, b, c)_{\beta^*}$

$\Rightarrow$ $g^*(u_1) = 0, \; g^*(u_2) = 0$

$\downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} (a u_1^* + b u_2^* + c u_3^*)(u_1) = a = 0 \\ (a u_1^* + b u_2^* + c u_3^*)(u_2) = b = 0 \end{array}\right\} g^* = c \cdot u_3^*.$$

$\Rightarrow$ $\{u_3^*\}$ es base de $Ann \langle u_1, u_2 \rangle$

$\Rightarrow$ $\langle u_3^* \rangle = Ann(\langle u_1, u_2 \rangle) = \langle (-2, 2, -1)_{\beta^*} \rangle.$