4.7 DETERMINANTE DE UN PRODUCTO DE MATRICES CUADRADAS

Vamos a demostrar en esta sección que el determinante de un producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es el producto de sus determinantes.

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$; las transformaciones elementales que se usan en el método de Gauss para obtener una matriz escalonada (observa que toda matriz cuadrada escalonada es triangular superior) se pueden obtener como producto $E \cdot A$ donde $E \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz "elemental".

<u>Matrices elementales</u> $\quad 1 \leq i \neq k \leq n$

$c \neq 0$

$$E_i(c) = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & c & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{columna } i \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \end{array} \quad ; \quad E_i^k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{col } i \quad \text{col } k \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } k \\ \\ \end{array}$$

$$E_i^k(c) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & 0 & c & \cdots 1 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \\ \text{col } i \quad \text{col } k \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } k \\ \\ \end{array}$$

---

§ 4.7.1. Escribe las matrices elementales E_2^3, $E_1(1/2)$ y $E_3^1(-2)$ de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

S/

$$E_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_1(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad E_3^1(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que las matrices elementales se obtienen a partir de la matriz identidad I_n haciendo una transformación elemental sobre sus filas. No es difícil comprobar lo siguiente:

a) $E_i(c)A$ produce una matriz que se obtiene de A multiplicando por $c \in \mathbb{K}$ la fila i-ésima de A.

b) $E_i^k A$ produce una matriz que se obtiene de A intercambiando las filas i-ésima y k-ésima.

c) $E_i^k(c)A$ produce una matriz que se obtiene de A sumando a la fila k-ésima el resultado de multiplicar por c la fila i-ésima.

Puesto que toda matriz cuadrada puede reducirse mediante transformaciones elementales a una matriz escalonada se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 4.7.1.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$; existen $E_1, E_2, \dots E_k$ matrices elementales de orden n y una matriz triangular superior U tal que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U.$$

Ej 4.7.2. Transforma $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ en una matriz triangular superior mediante transformaciones elementales.

S/
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1^2(-2)]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Ej 4.7.3. Transforma $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en una matriz triangular superior mediante transformaciones elementales.

S/ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2^1(-3)]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2^3]{F_2/F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3^2(5)]{F_3+5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$E_3^1(5)\, E_2^3\, E_2^1(-3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

Prop 4.7.2.

Toda matriz elemental posee una inversa que es tambien una matriz elemental.

D/ La inversa de $E_i(c)$ es $E_i(1/c)$, $c \neq 0$

La inversa de E_i^k es E_i^k ya que se vuelve a la identidad intercambiando las filas que se habían intercambiado antes.

La inversa de $E_i^k(c)$ es $E_i^k(-c)$ ya que se vuelve a la identidad restando a la fila k-ésima c veces la fila i-ésima. ∎

Ej 4.7.1. Escribe las inversas de $E_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Cor 4.7.3

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible; A puede escribirse como un producto de matrices elementales

D/ Como A es invertible, usando Gauss puede reducirse a la identidad mediante matrices elementales. Es decir, existen $E_1, \dots, E_k \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ elementales tal que $E_k \cdots E_1 A = I$. Por tanto, $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ y cada E_j^{-1} es también elemental por la Prop 4.7.2. ∎

Teorema 4.7.4.

$$\boxed{\text{Si } A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad \det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)}$$

D/ <u>PASO I</u>: El resultado es cierto si A es una matriz elemental.

a) $A = E_i(c)$. Por la propiedad 1 de los determinantes $|E_i(c)| = c$ y $|E_i(c)B| = c|B| = |E_i(c)||B|$.

b) $A = E_i^k$. Por la propiedad 3 de los determinantes $|E_i^k| = -1$ y $|E_i^k B| = -|B| = |E_i^k||B|$

c) $A = E_i^k(c)$. Por la prop 2.7 (sección 4.2), $|E_i^k(c)| = 1$ y $|E_i^k(c)\cdot B| = |B| = |E_i^k(c)||B|$.

<u>PASO II</u> A invertible

En este caso, por el Cor 4.7.3 existen $E_1, \dots, E_k \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ elementales tales que $A = E_1 E_2 \cdots E_k$. Aplicando repetidas veces el paso I, se obtiene el resultado:

$$|AB| = |E_1 E_2 \cdots E_k B| = |E_1||E_2|\cdots|E_k||B| = |E_1 E_2|\cdots|E_k||B|$$
$$= |E_1 E_2 \cdots E_k||B| = |A||B|.$$

PASO III. A no invertible (e.d. $|A| = 0$ por el Cor 5.6)

Escribamos A y AB por filas

$$A = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Por el Cor 5.5, una de sus filas es c.l. de las restantes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j f_j$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = AB = \left[\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}\right] B = \begin{bmatrix} f_1 B \\ f_2 B \\ \vdots \\ f_n B \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$F_1 = f_1 B = \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j f_j\right) B = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j (f_j B) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j F_j .$$

Así pues, la fila primera de la matriz AB es c.l. de las restantes filas de AB. Por el Cor 5.5, $|AB| = 0$ y se cumple $|AB| = |A||B|$ porque $|A| = 0$. ∎

Ej 4.7.5. Halla el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

escribiéndola como un producto de matrices.

S/

$$A = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}$$

$$= (-2abc)(-2abc) = 4a^2b^2c^2.$$

Sea $A: V \to V$ un endomorfismo. Llamamos $M(A;\beta)$ a su matriz en la base β tanto en salida como en llegada. Tomemos otra base β' en V y llamemos $M(A;\beta')$ a la matriz de A con esta base en salida y en llegada.

$$(V,\beta') \xrightarrow[\underbrace{M(Id;\beta',\beta)}_{C}]{Id} (V,\beta) \xrightarrow[M(A;\beta)]{A} (V,\beta) \xrightarrow[\underbrace{M(Id;\beta,\beta')}_{C^{-1}}]{Id} (V,\beta')$$

En la sección 3.3 del Tema 3 hemos probado que

$$M(A;\beta') = C^{-1} M(A;\beta)\, C$$

donde C es la matriz del cambio de base de β a β'. Por el Teorema 4.7.4, $\det(C^{-1}) = 1/\det(C)$ y

$$\det(M(A;\beta')) = \det(M(A;\beta))$$

Por tanto, el determinante de la matriz de un endomorfismo no depende de la base elegida para escribir su matriz y podemos escribir $\det(A)$ para denotar el determinante de su matriz en una base cualquiera.