1.- Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguientes, determinar (si existe) el límite puntual de la sucesión en el conjunto o conjuntos indicados, y comprobar si la convergencia es uniforme.

(a) $f_n(x) = \exp(-n\,x^2)\,, \quad \text{sobre } [-1,1]\,.$

(b) $f_n(x) = x^{1/n}\,, \quad \text{sobre } [0,1]\,.$

(c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, \quad \text{en } [0,1-\varepsilon],\ \text{en } [1-\varepsilon,1+\varepsilon],\ \text{y en } [1+\varepsilon,\infty).$

(d) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n, \\ x-n & \text{si } x \ge n, \end{cases} \quad \text{en cada } [a,b] \text{ y en } \mathbb{R}\,.$

(e) $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2}, \quad \text{en } [-1,1] \ \text{ y en } [1,\infty).$

(f) $f_n(x) = x^{-n}e^x, \quad \text{en } (1,\infty).$

2.- Sea la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones en $[0,1]$, dada por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$.

(a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Comprobar que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función integrable, y que cada f_n es integrable, se tiene $\lim_n \int_0^1 f_n = \infty$.

3.- Sea la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones en $\mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x\,e^{-nx^2}$. Probar que converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$ y que $f_n'(x)$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$, pero que $\{f_n'\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo que contenga propiamente a 0.

4.- Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja uniformemente a f en $[0,\infty)$ y tales que existan $\lim_n \int_0^\infty f_n$ y $\int_0^\infty f$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \neq \int_0^\infty f.$$

5.- Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Estudiar a qué función converge puntualmente la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si la convergencia es uniforme.

(b) Describir la función

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(k!x).$$

6.- Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ y $g_n(x) = (nx)^{-1}$.

(a) Demostrar que ambas convergen uniformemente en $[1,\infty)$ y sin embargo la sucesión de término general $f_n g_n$ no lo hace.

(b) Demostrar que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función f, $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f^2.

7.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de término general $f_n(x) = x/(1+n\,x^2)$. Comprobar que converge uniformemente a cierta f en $\mathbb{R}$ y que se se verifica $\lim_n f_n'(x) = f'(x)$ para cualquier $x \neq 0$ pero no para $x = 0$.

8.- Encontrar una sucesión de funciones derivables en $(-1,1)$ que converja uniformemente a $f(x) = |x|$.

9.- En este problema se va a probar por contradicción que $\pi \notin \mathbb{Q}$ usando la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n(1-x)^n/n!$ y las integrales $I_n = \int_0^1 a^{2n} f_n(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\,dx$.

(a) Usando la convergencia uniforme, deducir que para cualquier $a > 0$ se cumple que $\lim_n I_n = 0$.

(b) Probar que todas las derivadas de $f_n(x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ son números enteros.

(c) Suponiendo $\pi = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, integrando por partes y empleando el apartado anterior, demostrar que $\pi I_n \in \mathbb{Z}$.

(d) Usar que una sucesión de enteros estrictamente positivos no puede tener límite nulo, para llegar a una contradicción.

10.- Considerar la ecuación lineal

$$x' + a(t)x = 0,$$

donde $a(t)$ es una función continua y periódica de periodo T.

(a) Demostrar que si $x(t)$ es solución, entonces $y(t) = x(t+T)$ también lo es.

(b) Demostrar que existe una constante C tal que $x(t+T) = Cx(t)$ para todo t.

(c) Encontrar la condición que debe satisfacer $a(t)$ para que existan soluciones de período T, o de período $2T$.

(d) Si $a(t)$ es constante, calcular su valor para que existan soluciones periódicas de período $2T$.

11.- Considerar la ecuación lineal con $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$,

$$x' = rx + b(t),$$

donde b es una función periódica continua de período $T > 0$.

(a) Si $r < 0$, demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\xi) = x(T, \xi),$$

donde $x(t, \xi)$ es la solución de la ecuación con dato inicial $x(0) = \xi$, tiene un único punto fijo ξ_0. Para $r > 0$, demostrar lo mismo considerando la aplicación $F(\xi) = x(-T, \xi)$. Demostrar en ambos casos que la solución $x(t, \xi_0)$ es una función periódica de período T.

(b) Demostrar que si $r < 0$ la solución periódica obtenida es asintóticamente estable (cualquier solución de la ecuación converge a ella cuando $t \to +\infty$).

12.- Considerar la ecuación lineal

$$x' = a(t)x + b(t),$$

donde a y b son funciones continuas y periódicas de período $T > 0$.

(a) Demostrar que que si una solución $x(t)$ cumple que $x(0) = x(T)$, entonces es periódica.

(b) Demostrar que si $\alpha := \int_0^T a(s)ds \neq 0$, entonces existe una única solución periódica.

(c) Demostrar que si además $\alpha < 0$ la solución periódica obtenida es asintóticamente estable.

13.- Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función periódica de período $T > 0$ y A una matriz $n \times n$ real.

(a) Demostrar que todo autovalor de e^A es de la forma e^λ, donde λ es un autovalor de A.
Indicación: Usar las matrices de Jordan.

(b) Supongamos que ningún autovalor de A tiene parte real nula. Demostrar que la ecuación $X' = AX + f(t)$ tiene una única solución $X_p(t)$ de período T.

(c) Supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Demostrar que toda solución de $X' = AX + f(t)$ verifica

$$\lim_{t\to\infty} |X(t) - X_p(t)| = 0,$$

siendo X_p la solución periódica de **(b)**.