

Hoja 3: Series numéricas.

1.- Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum b_k$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_k/b_k \rightarrow 0$.

- Demostrar que si $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
- Demostrar que si $\sum a_k$ diverge, entonces $\sum b_k$ diverge.
- Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum b_k$ puede converger o diverger.
- Demostrar mediante un ejemplo que si $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum a_k$ puede converger o diverger.

2.- Demostrar que las series siguientes divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

3.- Determinar si las siguientes series convergen o divergen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1 + k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 - k^3 + 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \sin k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos k}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum \frac{10^k}{k!}$	(b) $\sum \frac{1}{k 2^k}$	(c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$
(d) $\sum \frac{n!}{100^n}$	(e) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$	(f) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$
(g) $\sum k \left(\frac{2}{3} \right)^k$	(h) $\sum \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$	(i) $\sum \frac{2k + \sqrt{k}}{k^3 + 2\sqrt{k}}$
(j) $\sum \frac{k!}{10^{4k}}$	(k) $\sum \frac{k^2}{e^k + 1}$	(l) $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$
(m) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$	(n) $\sum \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2}}}$	(ñ) $\sum \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$
(o) $\sum \frac{(k!)^2}{(2k)!}$	(p) $\sum \frac{45}{1 + 100^{-n}}$	(q) $\sum \frac{\log n}{n^2}$
(r) $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$	(s) $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$	(t) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

5.-

a) Sea f una función decreciente. Demostrar

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1).$$

b) Aplicar la fórmula anterior con $f(x) = \log x$ para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n-1}}$$

c) Usar el apartado anterior para demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

7.- Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

8.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

9.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

10.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n , $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n a_n$ es convergente.

11.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{3^k k!}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \log k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

13.- Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2k} \right).$$

(Esta función juega un papel importante en la teoría de la integral de Riemann).