5.7. TEOREMA DE JORDAN (Clasificación de endomorfismos)

Denominaremos *matriz elemental de Jordan* de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ a la matriz $J_k(\lambda)$ de orden k cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que valen λ, y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal, que son unos. Por ejemplo:

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente.

Llamaremos *matriz de Jordan a* cualquier matriz cuadrada formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal, de la forma

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Teorema 5.7.1 (Teorema de Jordan)

Sea $A: V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ los valores propios distintos de A en $\mathbb{K}$. Sean $m_1, ..., m_r$ números naturales no nulos tales que

$$\prod_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I)^{m_i} = 0. \tag{7.2}$$

Entonces, existe una base B, llamada *base de Jordan* de V para A, respecto de la cual la matriz de A es de la forma (7.1).

NOTA 1. $(A-\lambda_i I)^{m_i}$ significa

$(A-\lambda_i I) \circ \overset{m_i}{\cdots} \circ (A-\lambda_i I)$;

$\prod_{i=1}^{r} (A-\lambda_i I)^{m_i}$ significa $(A-\lambda_1 I)^{m_1} \circ \dots \circ (A-\lambda_r I)^{m_r}$.

La igualdad $\prod_{i=1}^{r} (A-\lambda_i I)^{m_i} = 0$ significa que la parte izquierda es la aplicación nula.

NOTA 2. Para e.v. sobre $\mathbb{C}$, $p_A(x) = |A - xI|$ siempre puede factorizarse en factores simples, $p_A(x) = c\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Cayley-Hamilton, $p_A(A) = 0$ y, por tanto, se cumple la condición (7.2). Entonces, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ siempre se puede encontrar una base de Jordan de V.

Ej 5.7.1. Sea $A \in \mathrm{End}(V)$, $p(x), q(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$. Prueba que $p(A) \circ q(A) = q(A) \circ p(A)$

Sugerencia: prueba primero que $A \circ q(A) = q(A) \circ A$

NOTA 3 (Identidad de Bezout)

Sean $m_1(x), m_2(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ y $d(x) = \mathrm{m.c.d}(m_1(x), m_2(x))$. Existen $a_1(x), a_2(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tal que

$$d(x) = a_1(x)m_1(x) + a_2(x)m_2(x)$$

Este resultado se deduce del algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d de dos polinomios. Cuando los polinomios son números puede verse una demostración en la sección 2.2 de J. Dorronsoro y E. Hernández, Números, grupos y anillos, Addison Wesley / UAM (1996). La adaptación para polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ es sencilla

---

Lema 5.7.2

Sea $A\colon V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $q_1(x), ..., q_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que

$$\text{m.c.d.}\ (q_i(x), q_j(x)) = 1 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

entonces

$$\operatorname{Ker} q_i(A) \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A) \right) = \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, ..., r.$$

Demostración. Comenzaremos demostrando que si fijamos $i_0 \in \{1, ..., r\}$, para cada $l \in \{1, ..., r\} \setminus \{i_0\}$ se tiene

$$\operatorname{Ker} q_l(A) \subset \operatorname{Ker}\left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right). \tag{7.4}$$

En efecto, si $\vec{v} \in \operatorname{Ker} q_l(A)$, se tiene que $q_l(A)(\vec{v}) = \vec{0}$, y usando el ejer. 5.7.1

$$\left(\prod_{j\neq i_0} q_j(A) \right)(\vec{v}) = \left(\prod_{j \neq i_0, l} q_j(A) \right) \circ q_l(A)(\vec{v}) = \left(\prod_{j\neq i_0, l} q_j(A) \right)(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Como la suma de subespacios vectoriales contenidos en uno fijo W es un subespacio vectorial de W, de (7.4) concluimos

$$\sum_{l \neq i_0} \operatorname{Ker} q_l(A) \subset \operatorname{Ker}\left(\prod_{j\neq i_0} q_j(A) \right). \tag{7.5}$$

Ahora bien, nuestra hipótesis implica que $q_{i_0}(x)$ y $\prod_{j \neq i_0} q_j(x)$ son polinomios primos entre sí. Por la identidad de Bezout (Nota 3) existen $a(x), b(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tales que

$$a(x)q_{i_0}(x) + b(x) \prod_{j\neq i_0} q_j(x) = 1.$$

Luego

$$a(A) \circ q_{i_0}(A) + b(A) \circ \prod_{j\neq i_0} q_j(A) = I.$$

Entonces, si $\vec{v} \in \operatorname{Ker} q_{i_0}(A) \cap \operatorname{Ker}\left(\prod_{j\neq i_0} q_j(A) \right)$ se tiene

$$\vec{v} = I(\vec{v}) = a(A) \circ q_{i_0}(A)(\vec{v}) + b(A) \circ \prod_{j \neq i_0} q_j(A)(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Esto prueba que

$$\operatorname{Ker} q_{i_0}(A) \cap \operatorname{Ker}\left(\prod_{j\neq i_0} q_j(A) \right) = \{\vec{0}\}. \tag{7.6}$$

De (7.5) y (7.6) se deduce la conclusión del lema.

Corolario 5.7.3

Sea $A\colon V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de A y $m_1, ..., m_r$ son números naturales no nulos

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i} \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{r} \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j} \right) = \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, ..., r.$$

D/ Aplicar el lema 5.7.2.

Lema 5.7.4

Sean $A_1, A_2: V \to V$ dos aplicaciones lineales en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que conmutan. Entonces

$$\dim \operatorname{Ker}(A_1 \circ A_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A_1) + \dim \operatorname{Ker}(A_2). \qquad (7.7)$$

Demostración. Sea $W = \ker(A_1 \circ A_2)$.

W es invariante por A_1, e.d. $A_1(\vec{w}) \in W \ \forall \vec{w} \in W$:

$$A_1 \circ A_2(A_1(\vec{w})) = A_1 \circ A_2 \circ A_1(\vec{w}) = A_1 \circ (A_2 \circ A_2)(\vec{w}) = \vec{0}$$

donde se ha usado que A_1 y A_2 conmutan.

De manera similar, W es invariante por A_2.

Entonces

$$\tilde{A}_i = A_i|_{W} : W \longrightarrow W, \quad i = 1, 2.$$

Por la fórmula de las dimensiones (Teorema 4.3 del Tema 3

$$\dim(W) = \dim(\operatorname{Img}(\tilde{A}_2)) + \dim(\ker(\tilde{A}_2)) \qquad (7.8)$$

Pero $\operatorname{Img}(\tilde{A}_2) \subset \ker(\tilde{A}_1)$:

si $\vec{v} \in \operatorname{Img}(\tilde{A}_2)$, $\vec{v} = \tilde{A}_2(\vec{u})$ con $\vec{u} \in W$; entonces

$$\tilde{A}_1(\vec{v}) = \tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \in \ker(\tilde{A}_1)$$

Por tanto, $\dim(\operatorname{Img}(\tilde{A}_2)) \leq \dim(\ker(\tilde{A}_1))$. De (7.8) se deduce

$$\dim W \leq \dim(\ker(\tilde{A}_1)) + \dim(\ker(\tilde{A}_2)) \leq \dim(\ker(A_1)) + \dim(\ker(A_2)). \blacksquare$$

Lema 5.7.5

Sean $A_1, \ldots, A_r: V \to V$ aplicaciones lineales en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que conmutan entre sí. Entonces

$$\dim \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A_j).$$

Demostración. El Lema 5.7.4 nos da el resultado para dos aplicaciones lineales. Supongamos, por inducción, que el resultado es cierto para cualquier número s de aplicaciones lineales $B_1, \ldots, B_s$ en un espacio vectorial con $s < r$. Tomemos ahora $A_1, \ldots, A_r$. Sea $W_r = \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r)$ y consideremos

$$\tilde{A}_1 = A_1|_{W_r} \circ \cdots \circ A_{r-1}|_{W_r} \quad , \quad \tilde{A}_2 = A_r|_{W_r}.$$

Como las A_i conmutan entre sí $A_j \colon W_r \to W_r$ y por tanto

$$\tilde{A}_i \colon W_r \to W_r \quad , \quad i = 1, 2.$$

Aplicamos el Lema 5.7.4 a $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ y W_r para obtener

$$\dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1) + \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_2).$$

Por la hipótesis de inducción para $A_1|_{W_r}, \ldots, A_{r-1}|_{W_r}$ deducimos

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \dim \operatorname{Ker}(A_j|_{W_r}) + \dim \operatorname{Ker}(A_2|_{W_r}) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A_j).\end{aligned}$$

Pero $\operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) = W_r = \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r)$ por lo que queda probado el resultado.

Lema 5.7.6

Sea $A \colon V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Sean $q_1(x), \ldots, q_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que

$$\text{m.c.d.}\,(q_i(x), q_j(x)) = 1 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Si $q_1(A) \circ \cdots \circ q_r(A) = \prod_{j=1}^{r} q_j(A) = 0$ se tiene que

$$V = \operatorname{Ker} q_1(A) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} q_r(A).$$

Demostración. Las aplicaciones $q_j(A)$, $j = 1, \ldots, r$, conmutan entre sí por el Ejer 5.7.1.
Por el lema 5.7.5,

$$\dim \operatorname{Ker}\left(\prod_{j=1}^{r} q_j(A)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim(\operatorname{Ker} q_j(A)).$$

Puesto que $\prod_{j=1}^{r} q_j(A) = 0$, se da la igualdad $\operatorname{Ker}\left(\prod_{j=1}^{r} q_j(A)\right) = V$ y tenemos

$$\dim(V) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim(\operatorname{Ker} q_j(A)).$$

La conclusión del Lema 5.7.2 y la fórmula de Grassmann (Ver Tema 2) nos permiten escribir

$$\dim(V) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker} q_j(A) = \dim\left(\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A)\right).$$

Pero $\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_i(A) < V$, por lo que $V = \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A)$. Que la suma es directa se debe al lema 5.7.2. ∎

Corolario 5.7.7

Sea $A: V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son valores propios distintos de A y $m_1, \ldots, m_r$ son números naturales no nulos tales que

$$(A - \lambda_1 I)^{m_1} \circ \cdots \circ (A - \lambda_r I)^{m_r} = 0,$$

entonces

$$V = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_r I)^{m_r}.$$

Demostración. Aplicar el Lema 6.7.6 con $q_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, $i = 1, \ldots, r$, observando que los $q_i(x)$ son primos entre sí.

Comenzamos con la demostración del teorema de Jordan (Teorema 5.7.1). Escribamos $E_s(\lambda) = \ker((A - \lambda I)^s)$. Entonces, el Corolario 5.7.7 se puede escribir

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{m_i}(\lambda_i).$$

Por el lema 5.6.3, los $E_{m_i}(\lambda_i)$ son invariantes por A. Por la observación que sigue a la demostración del lema 5.6.3, al elegir β_i como base de $E_{m_i}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_r$$

es una base de V y en esta base la matriz de A es diagonal por cajas

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix} \qquad (7.9)$$

donde cada J_r es la matriz de $A|_{E_{m_i}(\lambda_i)}$.

Lo que tenemos que hacer ahora es elegir la base β_i de $E_{m_i}(\lambda_i)$ de manera que J_{λ_i} sea diagonal por cajas y cada caja sea una matriz elemental de Jordan (descritas en (7.1)).

Fijemos λ autovalor de A y formemos la "cadena"

$$E_1(\lambda) \subset E_2(\lambda) \subset \cdots\cdots \subset E_n(\lambda) \subset \cdots \subset V$$

Como V tiene dimensión finita, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $E_s(\lambda) = E_{s+1}(\lambda)$; sea m el menor de estos números. Probaremos que a partir de $E_m(\lambda)$ todos los subespacios $E_{m+1}(\lambda)$, $E_{m+2}(\lambda)$, ... coinciden con $E_m(\lambda)$.

Lema 5.7.8
Si $E_m(\lambda) = E_{m+1}(\lambda)$, entonces $E_m(\lambda) = E_q(\lambda)$ para todo $q > m$.

Demostración. La demostración la realizamos por inducción en r, donde $q = m + r$. Si $r = 1$ la conclusión coincide con la hipótesis y no es necesario demostrar nada. Supongamos que el lema es cierto para $q = m + r$ y demostrémoslo para $q = m + r + 1$. Sea $\vec{x} \in E_{m+r+1}(\lambda)$, es decir,

$$(A - \lambda I)^{m+r}(A - \lambda I)\vec{x} = (A - \lambda I)^{m+r+1}\vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto, $(A - \lambda I)\vec{x} \in E_{m+r}(\lambda) = E_m(\lambda)$ (por la hipótesis de inducción); entonces $\vec{0} = (A - \lambda I)^m(A - \lambda I)\vec{x} = (A - \lambda I)^{m+1}\vec{x}$ y, por tanto, $\vec{x} \in E_{m+1}(\lambda) = E_m(\lambda)$. Hemos probado que $E_{m+r+1}(\lambda) \subset E_m(\lambda)$, de donde se deduce la igualdad puesto que la otra inclusión es trivial de verificar.

Para cada $i = 2, 3, ..., m$ consideremos la aplicación lineal

$$L_i : E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda) \longrightarrow E_{i-1}(\lambda)/E_{i-2}(\lambda)$$

entre espacios cociente dada por

$$L_i(\vec{v} + E_{i-1}(\lambda)) = (A - \lambda I)(\vec{v}) + E_{i-2}(\lambda).$$

Cada L_i es una aplicación inyectiva, $i = 2, 3, ..., m$. En efecto, si $L_i(\vec{v} + E_{i-1}(\lambda)) = \vec{0} + E_{i-2}(\lambda)$ se tendría $(A - \lambda I)(\vec{v}) \in E_{i-2}(\lambda)$ y por tanto

$$(A - \lambda I)^{i-2}(A - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0}.$$

Es decir, $\vec{v} \in E_{i-1}(\lambda)$, luego $\vec{v} + E_{i-1}(\lambda) = \vec{0} + E_{i-1}(\lambda)$. En consecuencia, la imagen por L_i de una base de $E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente en $E_{i-1}(\lambda)/E_{i-2}(\lambda)$.

Sea $p_i = \dim E_i(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., m$. Con $p_0 = 0$ se tiene

$$q_i = \dim E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda) = p_i - p_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Además, por ser cada L_i inyectiva, $i = 2, ..., m$, se tiene

$$q_m \leqslant q_{m-1} \leqslant \cdots \leqslant q_2 \leqslant q_1 = p_1 - p_0 = p_1 = \dim E_1(\lambda).$$

Escribamos la secuencia de aplicaciones inyectivas L_i como

$$E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda) \xrightarrow{L_m} E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda) \xrightarrow{L_{m-1}} E_{m-2}(\lambda)/E_{m-3}(\lambda) \to \cdots \to E_2(\lambda)/E_1(\lambda) \xrightarrow{L_2} E_1(\lambda).$$

Construyamos ahora la base de Jordan que nos permitirá escribir cada matriz J_λ de (7.9) como una matriz diagonal por cajas y que cada caja sea una matriz elemental de Jordan.

1.^{er} PASO. Tomemos $S_m = \{\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m,q_m}\}$ en $E_m(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda), ..., \vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda)\}$$

sea una base de $E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda)$ (basta tomar $\{\vec{v}_{m,1}, .. \vec{v}_{m,q_m}\} \subset E_m(\lambda) \setminus E_{m-1}(\lambda)$ l.i).

Como L_m es inyectiva, los vectores

$$\vec{v}_{m-1,1} + E_{m-2}(\lambda) = L_m(\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda))$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_{m-1,q_m} + E_{m-2}(\lambda) = L_m(\vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda))$$

son linealmente independientes en $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$. Sea

$$S_{m-1} = \{\vec{v}_{m-1,1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_m}\} \subset E_{m-1}(\lambda).$$

2.^{o} PASO. A los vectores de S_{m-1} obtenidos en el paso anterior añadir vectores $\vec{v}_{m-1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}$, en $E_{m-1}(\lambda)$ tales que

$$\{v_{m-1,j} + E_{m-2}(\lambda)\}_{j=1}^{q_{m-1}}$$

sea una base de $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$.

Como L_{m-1} es inyectiva, los vectores

$$\vec{v}_{m-2,1} + E_{m-3}(\lambda) = L_{m-1}(\vec{v}_{m-1,1} + E_{m-2}(\lambda))$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_{m-2,q_{m-1}} + E_{m-3}(\lambda) = L_{m-1}(\vec{v}_{m-1,q_{m-1}} + E_{m-2}(\lambda))$$

son linealmente independientes en $E_{m-2}(\lambda)/E_{m-3}(\lambda)$. Construimos así

$$S_{m-2} = \{\vec{v}_{m-2,1}, ..., \vec{v}_{m-2,q_{m-1}}\} \subset E_{m-2}(\lambda).$$

Continuaríamos este proceso $m - 2$ veces, habiendo elegido

$$S_2 = \{\vec{v}_{2,1}, ..., \vec{v}_{2,q_3}\} \subset E_2(\lambda)$$

de manera que

$$\vec{v}_{2,1} + E_1(\lambda), ..., \vec{v}_{2,q_3} + E_1(\lambda)$$

sean linealmente independientes en $E_2(\lambda)/E_1(\lambda)$. En el siguiente paso se añaden vectores $\vec{v}_{2,q_3+1}, ..., \vec{v}_{2,q_2}$ en $E_2(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{2,j} + E_1(\lambda)\}_{j=1}^{q_2}$$

sea una base de $E_2(\lambda)/E_1(\lambda)$

Como L_2 es inyectiva, los vectores

$$\vec{v}_{1,1} = L_2(\vec{v}_{2,1} + E_1(\lambda)), ..., \vec{v}_{1,q_2} = L_2(\vec{v}_{2,q_2} + E_1(\lambda))$$

son linealmente independientes en $E_1(\lambda)$. Construimos así $S_1 = \{\vec{v}_{1,1}, ..., \vec{v}_{1,q_2}\} \subset E_1(\lambda)$ que es un conjunto de vectores linealmente independiente en $E_1(\lambda)$. Finalizar añadiendo vectores $\vec{v}_{1,q_2+1}, ..., \vec{v}_{1,q_1}$ en $E_1(\lambda)$ de manera que

$$\{\vec{v}_{1,1}, ..., \vec{v}_{1,q_m}, ..., \vec{v}_{1,q_2+1}, ..., \vec{v}_{1,q_1}\}$$

sea una base de $E_1(\lambda)$.

Sea β_λ el conjunto de vectores que hemos hallado (ver la figura de la página 5.39) puestos por columnas de izquierda a derecha, y en cada columna de abajo a arriba:

$$\beta_\lambda = \{\vec{v}_{1,1}, \dots, \vec{v}_{m,1}, \dots \vec{v}_{1,q_m}, \dots, \vec{v}_{m,q_m}\} \cup$$

$$\cup \{\vec{v}_{1,q_m+1}, \dots, \vec{v}_{m-1,q_m+1}, \dots, \vec{v}_{1,q_{m-1}}, \dots, \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}\} \cup$$

$$\dots \cup \{\vec{v}_{1,q_3+1}, \vec{v}_{2,q_3+1}, \dots, \vec{v}_{1,q_2}, \vec{v}_{2,q_2}\} \cup \{\vec{v}_{1,q_2+1}, \dots, \vec{v}_{1,q_1}\}$$

El número de vectores que tiene β_λ es:

$$q_m + q_{m-1} + \dots + q_2 + q_1 = (p_m - p_{m-1}) + (p_{m-1} - p_{m-2}) + \dots$$

$$\dots + (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0) = p_m - p_0 = p_m = \dim(E_m(\lambda)).$$

Luego, β_λ será una base de $E_m(\lambda)$ si demostramos que β_λ son linealmente independientes. Supongamos

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} \vec{v}_{i,j} = \vec{0}.$$

Si no todos los $c_{i,j}$ fueran cero, sea r el mayor índice tal que $c_{r,s} \neq 0$ para algún s. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} \vec{v}_{i,j} + \sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j} \vec{v}_{r,j} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{m-1,1} = (A-\lambda I)\vec{v}_{m,1}, \dots\dots, \vec{v}_{m-1,q_m} = (A-\lambda I)\vec{v}_{m,q_m}$$

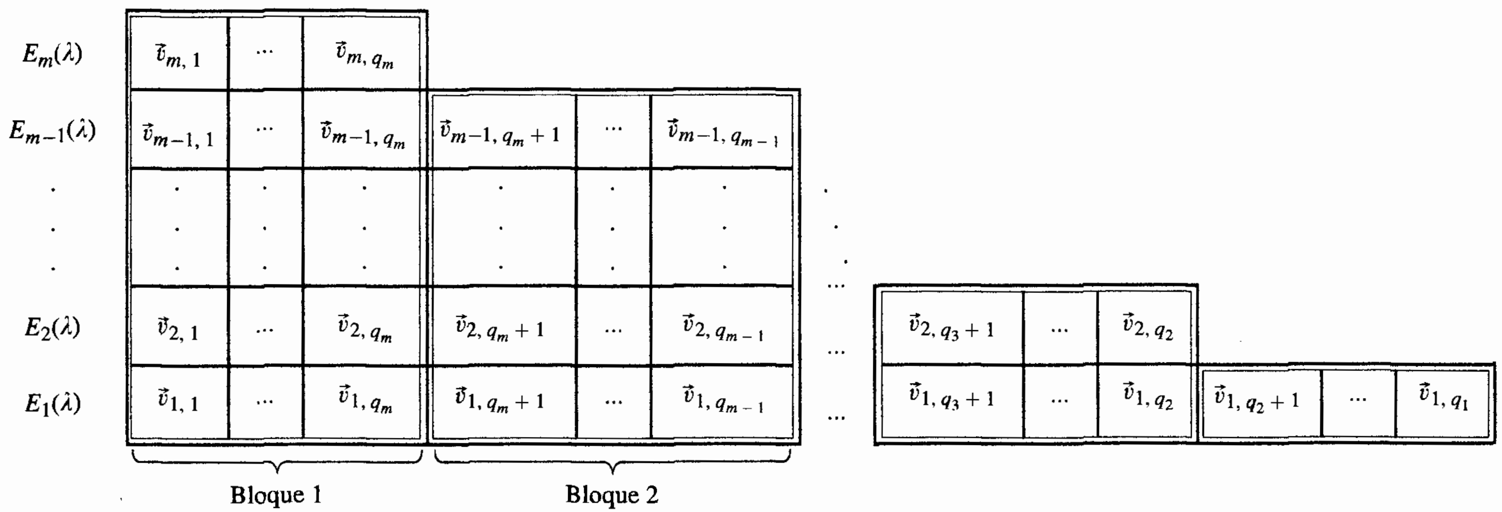

Figura 6.3

$$\vec{v}_{1,1} = (A-\lambda I)\vec{v}_{2,1}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \vec{v}_{1,q_3+1} = (A-\lambda I)\vec{v}_{2,q_3+1}, \dots, \vec{v}_{1,q_2} = (A-\lambda I)\vec{v}_{2,q_2}$$

En el espacio cociente $E_r(\lambda)/E_{r-1}(\lambda)$ se tiene la igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j}(\vec{v}_{i,j}+E_{r-1}(\lambda))\right)+\left(\sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j}(\vec{v}_{r,j}+E_{r-1}(\lambda))\right)=\vec{0}+E_{r-1}(\lambda).$$

Pero $\vec{v}_{i,j}\in E_{r-1}(\lambda)$ cuando $i=1,\dots r-1$, por lo que el primer sumando de la igualdad anterior es $E_{r-1}(\lambda)$ y tenemos

$$\sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j}(\vec{v}_{r,j}+E_{r-1}(\lambda))=\vec{0}+E_{r-1}(\lambda).$$

Los vectores $\{\vec{v}_{r,1}+E_{r-1}(\lambda),\dots,\vec{v}_{r,q_r}+E_{r-1}(\lambda)\}$ son base de $E_r(\lambda)/E_{r-1}(\lambda)$, por lo que $c_{r,j}=0$ $\forall j=1,\dots,q_r$. Esto contradice que $c_{r,s}\neq 0$ para algún s. Por tanto $c_{i,j}=0$ para todo i,j.

Veamos ahora cuál es la matriz de $A|_{E_m(\lambda)}$ en la base β_λ. Fijémonos en los vectores de la primera columna de la izquierda de la tabla de la figura de la página 5-39:

$$\left.\begin{array}{lcl}
\vec{v}_{1,1}\in E_1(\lambda) & \Rightarrow (A-\lambda I)\vec{v}_{1,1}=\vec{0} \Rightarrow & A(\vec{v}_{1,1})=\lambda\vec{v}_{1,1} \\
\vec{v}_{1,1}=(A-\lambda I)\vec{v}_{2,1} & \Rightarrow & A(\vec{v}_{2,1})=\vec{v}_{1,1}+\lambda\vec{v}_{2,1} \\
\vdots & \vdots & \\
\vec{v}_{m-1,1}=(A-\lambda I)\vec{v}_{m,1} & \Rightarrow & A(\vec{v}_{m,1})=\vec{v}_{m-1,1}+\lambda\vec{v}_{m,1}
\end{array}\right\}\quad (7.11)$$

Esto produce una matriz elemental de Jordan de orden m y autovalor λ, e.d.

$$J_m(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}.$$

El resto de las columnas del bloque 1 de la figura de la página 5.39 también producen cajas de la forma $J_m(\lambda)$ sin mezclarse entre sí. Tenemos q_m matrices $J_m(\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ. Análogamente, el bloque 2 de la figura produce $q_{m-1}-q_m$ matrices elementales de Jordan de la forma $J_{m-1}(\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ. Finalmente, el último bloque de la figura produce q_1-q_2 matrices elementales de Jordan de la forma $J_1(\lambda)=(\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ.

Poniendo este resultado en (7.9) queda demostrado el teorema de Jordan.

Al construir la base β en la demostración del teorema de Jordan hemos necesitado hallar, para cada λ_i, $i=1,-,r$, el número natural no nulo m_i tal que la sucesión de núcleos

$$E_1(\lambda_i) < E_2(\lambda_i) < \dots < E_{m_i}(\lambda_i) < \dots < V$$

se estabiliza, es decir $E_{m_i}(\lambda)=E_q(\lambda)$ si $q>m_i$ y m_i es el menor de estos números. Llamemos a $E_{m_i}(\lambda_i)$ el <u>autoespacio máximo</u> asociado a λ_i

Se puede calcular m_i si $p_A(x)$ se puede factorizar en factores lineales en $\mathbb{K}$ (esto siempre pasa en $\mathbb{C}$) y si

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{s_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \text{ entonces}$$

$$\dim(E_{m_i}(\lambda_i)) = s_i \quad , i=1,\cdot r \cdot,$$

es decir, m_i es el número tal que $\dim(E_{m_i}(\lambda_i))$ coincide con la multiplicidad de λ_i.