ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Problemas. 23 de Noviembre.

Ejercicio 1. Hoja 5. Demuestra que el conjunto $(\mathcal{C}([0,1]),+,\cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \quad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para } x \in [0,1]$$

es un anillo. Especialmente señala los elementos neutros respecto de las dos operaciones y el inverso de un elemento dado respecto de la primera. ¿Es conmutativo?

Solución:

Comprobamos que $(\mathcal{C}([0,1]),+)$ tiene estructura de grupo abeliano:

(G0) La suma de funciones continuas en $[0,1]$ es una función continua en $[0,1]$:

$$f \in \mathcal{C}([0,1]) \implies \text{Dado } x_0 \in [0,1]: \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_f > 0 \,:\, |x-x_0| < \delta_f \implies |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

$$g \in \mathcal{C}([0,1]) \implies \text{Dado } x_0 \in [0,1]: \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_g > 0 \,:\, |x-x_0| < \delta_g \implies |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

Si tomamos $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, para $|x-x_0| < \delta$, se tiene:

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))| \le |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)| < 2\epsilon\,.$$

(G1) La suma de funciones es asociativa:

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)\,.$$

(G2) El elemento identidad es la función $e\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $e(x) := 0$ para todo $x \in [0,1]$:

$$(f+e)(x) = f(x)+e(x) = f(x)+0 = f(x) = 0+f(x) = e(x)+f(x) = (e+f)(x)\,.$$

(G3) El elemento inverso respecto a la suma de $f \in \mathcal{C}[0,1]$ es la función $(-f)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) := -(f(x))$ para cada $x \in [0,1]$:

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f(x)) = f(x)-f(x) = 0\,.$$

(GC) La suma de funciones de $\mathcal{C}$ es una operación conmutativa:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)\,.$$

Estudiamos las propiedades de la operación $\cdot$ en $\mathcal{C}([0,1])$:

(A0) El producto de funciones continuas en $[0,1]$ es una función continua en $[0,1]$. Si tomamos $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, para $|x-x_0| < \delta$, se tiene:

$$\begin{aligned}|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)| &= |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x_0) + f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\le |f(x)(g(x)-g(x_0))| + |(f(x)-f(x_0))g(x_0)| < |f(x)|\epsilon + \epsilon|g(x_0)| \\ &= |f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\epsilon + \epsilon|g(x_0)| \le |f(x)-f(x_0)|\epsilon + (|f(x_0)+g(x_0)|)\epsilon \\ &= \epsilon^2 + (|f(x_0)+g(x_0)|)\epsilon = \epsilon'\,.\end{aligned}$$

(A1) El elemento identidad para el producto es la función $1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $1(x) := 1$,

$$(f\cdot 1)(x) = f(x)\cdot 1(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\,.$$

(A2) La operación $\cdot$ satisface las propiedades distributivas respecto a la operación suma:

$$(f\cdot(g+h))(x) = f(x)\cdot(g+h)(x) = f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x) = (f\cdot g+f\cdot h)(x)\,,$$

$$((f+g)\cdot h)(x) = (f+g)(x)\cdot h(x) = (f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x) = (f\cdot h+g\cdot h)(x)\,.$$

(AC) La operación producto es conmutativa:

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x) = (g\cdot f)(x)\,.$$

Ejercicio 2. Hoja 5. Demuestra que $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi, \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ son subanillos de $\mathbb{C}$. ¿Es alguno de ellos un cuerpo? Discute las mismas cuestiones para $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.

Solución:

(i) Denotamos $F[i] = \{a+bi\colon a, b \in F\}$, con $F = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Veamos que $(F[i], +)$ es un subgrupo de $\mathbb{C}$. Para todo $a+bi, c+di \in F[i]$, tenemos que

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i \in F[i],$$

puesto que $a-c, b-d \in F$, por tener $(F, +)$ estructura de grupo. Veamos que el producto es una operación cerrada en $F[i]$. Para todo $a+bi, c+di \in F[i]$, tenemos que

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \in F[i],$$

puesto que $ac-bd, ad+bc \in F$, por tener $(F, +, \cdot)$ estructura de anillo. Finalmente, es claro que el elemento identidad $1 = 1+0\cdot i$ pertenece a $F[i]$. Por tanto, $F[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$ para $F = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Identificamos el inverso de cada elemento. Sea $a+bi \in F[i]$ un elemento no nulo. Observamos que

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \implies (a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2} = 1, \quad \text{con } \frac{a-bi}{a^2+b^2} \in \mathbb{C}.$$

Puesto que el inverso de un elemento es único, $F[i]$ será un cuerpo si $\frac{a-bi}{a^2+b^2} \in F[i]$, para cada $a+bi \in F[i]$ no nulo. Si $F = \mathbb{Z}$, observamos que

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \notin \mathbb{Z}[i].$$

Por lo que, $\mathbb{Z}[i]$ no es un cuerpo. Mientras que, si $F = \mathbb{Q}$, entonces

$$\frac{a}{a^2+b^2}, \; \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}.$$

Por tanto, todo elemento no nulo de $\mathbb{Q}[i]$ tiene inverso y concluimos que $\mathbb{Q}[i]$ es un cuerpo.

($\sqrt{-2}$) Escribimos $F[\sqrt{-2}] := \{a+b\sqrt{-2}\colon a, b \in F\}$, con $F = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Observamos que $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Veamos que $(F[\sqrt{-2}], +)$ es un subgrupo de $\mathbb{C}$. Para todo $a+b\sqrt{-2}, c+d\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}]$, tenemos que

$$(a+b\sqrt{-2})-(c+d\sqrt{-2}) = (a-c)+(b-d)\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}],$$

puesto que $a-c, b-d \in F$, por tener $(F, +)$ estructura de grupo. Veamos que el producto es una operación cerrada en $F[\sqrt{-2}]$. Para todo $a+b\sqrt{-2}, c+d\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}]$, tenemos que

$$(a+b\sqrt{-2})\cdot(c+d\sqrt{-2}) = (ac-2bd)+(ad+bc)\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}],$$

puesto que $ac - 2bd, ad + bc \in F$, por tener $(F, +, \cdot)$ estructura de anillo. Finalmente, es claro que el elemento identidad $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-2}$ pertenece a $F[\sqrt{-2}]$. Por tanto, $F[\sqrt{-2}]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$ para $F = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Identificamos el inverso de cada elemento. Sea $a + b\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}]$ no nulo. Observamos que

$$(a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2 \implies (a + b\sqrt{-2}) \cdot \frac{a - b\sqrt{-2}}{a^2 + 2b^2} = 1, \quad \text{con } \frac{a - b\sqrt{-2}}{a^2 + 2b^2} \in \mathbb{C}.$$

Puesto que el inverso de un elemento es único, $F[\sqrt{-2}]$ será un cuerpo si $\frac{a-b\sqrt{-2}}{a^2+2b^2} \in F[\sqrt{-2}]$, para cada $a + b\sqrt{-2} \in F[\sqrt{-2}]$ no nulo. Si $F = \mathbb{Z}$, observamos que

$$(1 + \sqrt{-2})^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-2}].$$

Por lo que, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ no es un cuerpo. Mientras que, si $F = \mathbb{Q}$, entonces

$$\frac{a}{a^2 + 2b^2}, \frac{-b}{a^2 + 2b^2} \in \mathbb{Q}.$$

Por tanto, todo elemento no nulo de $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ tiene inverso y concluimos que $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ es un cuerpo.

Ejercicio 3. Hoja 5. Sea $d \in \mathbb{Z}$, $1 \neq d \neq e^2$ con $e \in \mathbb{Z}$, consideramos el subconjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

Definimos la aplicación $N \colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ como $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$. Demuestra que:

(b) $N(x) = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

(c) $N(xy) = N(x)N(y)$.

(d) x es una unidad de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si, y solo si, $N(x) = \pm 1$.

Solución:

(a) Veamos que $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +)$ es un subgrupo de $\mathbb{C}$. Para todo $a + b\sqrt{d}, c + e\sqrt{d} \in F[\sqrt{d}]$, tenemos

$$(a + b\sqrt{d}) - (c + e\sqrt{d}) = (a - c) + (b - e)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],$$

puesto que $a - c, b - e \in \mathbb{Z}$, por tener $(\mathbb{Z}, +)$ estructura de grupo. Veamos que el producto es una operación cerrada en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Para todo $a + b\sqrt{-2}, c + e\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, tenemos que

$$(a + b\sqrt{d}) \cdot (c + e\sqrt{d}) = (ac + dbe) + (ae + bc)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],$$

puesto que $ac + dbe, ae + bc \in \mathbb{Z}$, por tener $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ estructura de anillo. Finalmente, es claro que el elemento identidad $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{d}$ pertenece a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Por tanto, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

(b) Si $x = 0$, entonces $N(x) = N(0 + 0\sqrt{d}) = 0^2 - d0^2 = 0$. Supongamos que $N(a + b\sqrt{d}) = 0$, es decir, $a^2 - db^2 = 0$. Si $b \neq 0$, entonces $d = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, dando lugar a una contradicción, pues d no puede ser un cuadrado. Entonces $b = 0$ y necesariamente $a = 0$.

(c) Sean $x = a + b\sqrt{d}$ e $y = c + e\sqrt{d}$, se tiene que

$$N(xy) = N((ac + dbe) + (ae + bc)\sqrt{d}) = (ac + dbe)^2 - d(ae + bc)^2 = a^2c^2 + d^2b^2e^2 - da^2e^2 - db^2c^2,$$

$$N(x)N(y) = (a^2 - db^2)(c^2 - de^2) = a^2c^2 + d^2b^2e^2 - da^2e^2 - db^2c^2 \,.$$

(d) Sea $x = a + b\sqrt{d}$ una unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, es decir, existe $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tal que $xy = 1$. Entonces, se tiene que:

$$1 = N(1) = N(xy) = N(x)N(y) \,.$$

Como $N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$, necesariamente se tiene que $N(x) = \pm 1$.

Recíprocamente, sea $x = a + b\sqrt{d}$ tal que $N(x) = \pm 1$. Observamos que

$$(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 = N(x) = \pm 1 \,.$$

Por tanto, $a + b\sqrt{d}$ es una unidad, ya que

$$(a + b\sqrt{d})N(x)(a - b\sqrt{d}) = 1 \,.$$

Ejercicio 4. Hoja 5. Halla las unidades de los siguientes anillos $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $M_2(\mathbb{Q})$ y $M_2(\mathbb{Z})$.

Solución:

($\mathbb{Z}[i]$) Por el ejercicio 3, sabemos que $x \in \mathbb{Z}[i]$ es una unidad si y solo si $N(x) = \pm 1$. Observamos que

$$N(a + bi) = a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1) \,.$$

Por tanto, el conjunto de unidades es $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

($\mathbb{Q}[i]$) Por el ejercicio 2, sabemos que $\mathbb{Q}[i]$ es un cuerpo. Por tanto, el conjunto de unidades es $\mathbb{Q}[i]^* = \mathbb{Q}[i] \backslash \{0\}$.

($\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$) Por el ejercicio 3, sabemos que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es una unidad si y solo si $N(x) = \pm 1$. Observamos que

$$N(a + bi) = a^2 + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1, 0) \,.$$

Por tanto, el conjunto de unidades es $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^* = \{\pm 1\}$.

($\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$) Por el ejercicio 3, sabemos que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es una unidad si y solo si $N(x) = \pm 1$. Observamos que

$$N(a + bi) = a^2 + 5b^2 = 1 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1, 0) \,.$$

Por tanto, el conjunto de unidades es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{\pm 1\}$.

($M_2(\mathbb{Q})$) Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})^*$, entonces existe $B \in M_2(\mathbb{Q})$ tal que $AB = I$. Tomando determinantes, tendríamos $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = \det(I) = 1$. Por lo que, $\det(A) \neq 0$. Se puede comprobar que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies B = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Por tanto, el conjunto de unidades es $M_2(\mathbb{Q})^* = \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \colon \det(A) \neq 0\}$.

($M_2(\mathbb{Z})$) Sea $A \in M_2(\mathbb{Z})^*$, entonces existe $B \in M_2(\mathbb{Z})$ tal que $AB = I$. Tomando determinantes, tendríamos $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = \det(I) = 1$. Como $\det(A) \in \mathbb{Z}$, la única posibilidad es $\det(A) = \pm 1$. Se puede comprobar que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies B = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Por tanto, el conjunto de unidades es $M_2(\mathbb{Z})^* = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \colon \det(A) = \pm 1\}$.