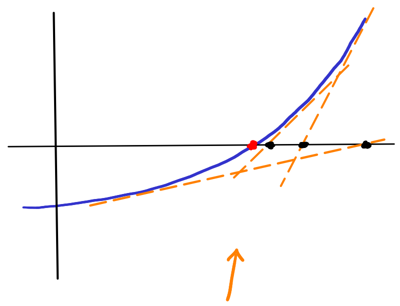
criterios de monotonía para tener convergencia del método de Newton

idea: buscar condiciones bajo las que $c < x_{k+1} < x_k$ (o $c > x_{k+1} > x_k$) para todo k para funciones $\mathcal{C}^2$

- si pasa esto, entonces x_k es convergente, porque es monótona y acotada
- si x_k es convergente, entonces $|x_{k+1} - x_k| \to 0$ y, usando que $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\Rightarrow \dfrac{|f(x_k)|}{|f'(x_k)|} \to 0$
- como $f \in \mathcal{C}^2$, entonces $|f'| < \infty$, de manera que necesariamente $f(x_k) \to 0$. por continuidad esto implica que el límite de x_k es un cero de f

situación típica en la que pasa esto:

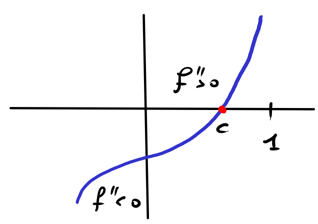
si f es convexa y creciente en un intervalo que contiene un (necesariamente único) cero entonces para todo x de ese intervalo la recta tangente a f por $(x, f(x))$ está debajo de f, y se cruza con el eje de las x siempre después del cero



esta situación genera una sucesión monótona

Ejemplo: calcular los ceros de $f(x) = 2x^3 + 4/3\, x - 1$

- $f'(x) = 6x^2 + 4/3 > 4/3$: f monótona creciente y $f(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} \pm\infty \Rightarrow \exists!\ c \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c) = 0$



- $f(0) = -1$, $f(1) = \frac{7}{3} \Rightarrow c \in (0,1)$
- $f''(x) = 12x$: f convexa $\forall x > 0$ ← intervalo que incluye c $\Rightarrow$ como en el dibujo de arriba, si $x > 0 \Rightarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} > c$
- además, si $x > c \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x$

$\Rightarrow$ para todo $x_0 > 0$ tenemos $c < x_{k+1} < x_k \quad \forall k \geq 2$

teorema: sea $f \in \mathcal{C}^2([c-h_1, c+h_2])$, $f(c) = 0$

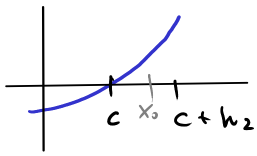
I. si $f', f'' \neq 0$ y tienen el mismo signo en $[c, c+h_2]$

$\Rightarrow$ el método de Newton converge almenos al ORDEN 2 $\forall\, x_0 \in [c, c+h_2]$

II. si $f', f'' \neq 0$ y tienen signos opuestos en $[c-h_1, c]$

$\Rightarrow$ el método de Newton converge almenos al ORDEN 2 $\forall\, x_0 \in [c-h_1, c]$

demostración:



I. sean $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ $\forall\, x \in [c, c+h_2]$
y sea $x_0 \in [c, c+h_2]$ a la derecha de c

- por definición del método de Newton

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

porque $\begin{cases} x_0 \geq c \\ f' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) > 0$

- como en la prueba del teorema principal de convergencia del método de Newton

$$x_1 = c + \frac{1}{2}(c-x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} > c$$

porque $\xi_0 \in (c, x_0)$
$\Rightarrow f''(\xi_0) > 0$

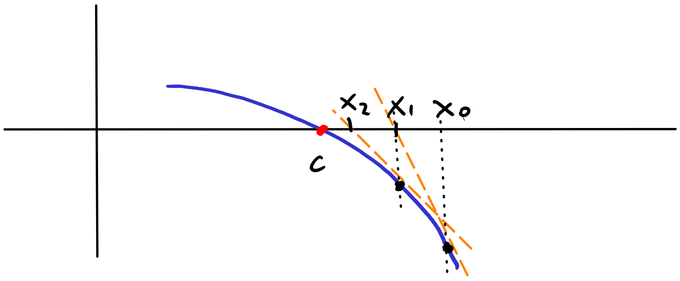
$\hookrightarrow$ $x_1 \in (c, x_0)$, y podemos repetir el argumento:

- $\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \\ x_{k+1} = c + \dfrac{1}{2}(c-x_k)^2 \dfrac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} > c \end{cases}$ $\forall\, k \geq 0$

$\Rightarrow$ $c < x_{k+1} < x_k$ $\forall\, k \geq 0$: por el argumento visto al principio $x_k \to c$

. la convergencia al menos al orden 2 se puede ahora obtener desde el teorema principal de convergencia: la sucesión converge a c, y f' es siempre >0, así que en un número finito de pasos entrará en un intervalo $[c, c+\delta]$ donde $|x_k - c| < 2 \frac{\min|f'|}{\max|f''|}$

I. si $f'<0$ y $f''<0$ estamos en una situación análoga de sucesión decreciente



$x_0 > c$

II. si f', f'' tienen signos opuestos, empezando la iteración a la izquierda de c se obtiene una sucesión creciente, y que se queda siempre a la izquierda de c.

↳ Ejercicio: escribir esta parte de la prueba #

<u>observación</u>: en el ejemplo de $f(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}x - 1$ podemos en realidad empezar la iteración en un cualquier punto $x_0 > 0$, aunque si $f', f'' > 0$.

este teorema nos diría de empezar en $x_0 > c$ pero, para esta f, tenemos $f', f'' > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow$ la condición $x_1 = c + \frac{1}{2}(c-x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}$ permite entrar en la región $x_0 > c$ en 1 paso.