

Capítulo 4. Integrales curvilíneas

- 4.1. Curvas parametrizadas, vector tangente y longitud de arco
- 4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas
- 4.3. Campos vectoriales, campos conservativos
- 4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas
- 4.5. Teorema de Green

4.1. Curvas

Recordamos que una recta L en \mathbb{R}^n se puede definir usando una parametrización, a saber, que dado un punto $P \in L$ y un vector director \vec{v} de L , tenemos $L = \{P + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Esto expresa L como la imagen de la aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto P + t\vec{v}$.

Podemos ahora extender esta noción para expresar curvas más generales.

Definición (Curvas en el espacio euclídeo)

Una **curva** en \mathbb{R}^n es una aplicación $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

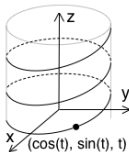
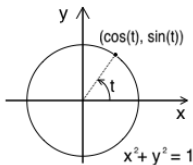
También se puede usar la palabra “curva” para referirse a la *imagen* en \mathbb{R}^n de la aplicación c (i.e. el conjunto de puntos $c(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$). Para $n = 2$ la curva se halla en el plano; para $n = 3$ se halla en el espacio, etc.

4.1. Curvas

Definición (Curva diferenciable, vector velocidad, y velocidad)

Una curva definida por $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** si lo es la función c en un abierto $U \supset [a, b]$. Si c es diferenciable, el **vector velocidad** de c en t es el vector $c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}$. La **velocidad** de c en t es $\|c'(t)\|$. El **vector aceleración** es $c''(t)$.

Ejemplos de curvas diferenciables y no diferenciables:



No diferenciable



El **vector tangente** de una curva c en t es el vector unitario $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$.

Si $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (c_1(t), \dots, c_n(t))$, entonces $c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))$.

Ejemplo: sea la curva $c(t) = (t, t^2, e^t)$. Calcular su velocidad en $t = 0$. Tenemos $c'(t) = (1, 2t, e^t)$, luego $c'(0) = (1, 0, 1)$, luego $\|c'(0)\| = \sqrt{2}$.

4.1. Curvas

Una curva parametrizada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es:

- **regular** si es diferenciable y

$$c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t)) \neq \vec{0} \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

- **de clase** $\mathcal{C}^k([a, b])$ si cada función c_i está en \mathcal{C}^k para todo $i = 1, \dots, n$.
- **simple** si es inyectiva en $[a, b]$, es decir, si $c(t_0) \neq c(t_1)$ siempre que $t_0 \neq t_1$.
- **cerrada** si $c(a) = c(b)$.
- **cerrada y simple** si es cerrada (e.g, $c(a) = c(b)$) y es inyectiva en $[a, b]$.

¡Cuidado!: no confundir el concepto de **cerrado**

4.1. Curvas - ejemplos

- **Rectas en \mathbb{R}^n :** la recta que pasa por el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en la dirección del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede parametrizar como

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad c(t) = x_0 + t\vec{v}$$

- **Gráfica de una función en \mathbb{R}^2 :** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La gráfica de f es el subconjunto

$$\text{Graf}(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \}.$$

Se puede parametrizar como

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t, f(t)).$$

4.1. Curvas - ejemplos

- **Circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r :**

$$C_r(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

Parametrizamos la circunferencia usando funciones trigonométricas:

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

- **Circunferencia de centro (a,b) y radio r :**

$$C_r(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\},$$

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$$

- **Hélice circular:**

$$c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$$

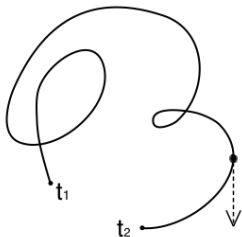
- **Elipse de centro (a, b) :**

$$E(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - a)^2}{p^2} + \frac{(y - b)^2}{q^2} = 1 \right\}$$

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a + p \cos t, b + q \sin t)$$

4.1. Curvas

Vamos a introducir las nociones de *recta tangente* y de *longitud de arco* para curvas. Consideremos una curva definida entre dos instantes t_1, t_2 :



Dos preguntas:

1. ¿Cuál es la recta tangente a la curva en un instante dado $t \in (t_1, t_2)$?
2. ¿Cuál es la longitud recorrida a lo largo de la curva entre t_1 y t_2 ?

1. Basta ver que dicha recta pasa por $c(t)$ y tiene vector director $c'(t)$.

La **recta tangente** a c en t es $\{c(t) + \lambda c'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Para definir la longitud de la curva, utilizamos la norma de $c'(t)$:

Definición (Longitud de arco)

La **longitud de arco** de una curva c entre t_1 y t_2 es $\ell = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\| dt$.

Ejemplo: sean las curvas $c_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $c_2(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Hallar la recta tangente en $t = 0$ y la longitud de arco entre $t = 0$ y $t = \pi$, para c_1 y c_2 .

Calculamos primero $c_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. El vector tangente en $t = 0$ es $c_1'(0) = (0, 1)$, que es tangente en el punto $c_1(0) = (1, 0)$. Por lo tanto, la recta tangente es $\{(1, 0) + \lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. La longitud de arco es

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

Para c_2 tenemos primero $c_2'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$. La recta tangente en $t = 0$ (es decir, en el punto $c_2(0) = (1, 0, 0)$) es pues $\{(1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. La longitud de arco es

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + 1} dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\pi.$$

Ejemplo: hallar la longitud de arco de la curva

$c(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t))$ en \mathbb{R}^4 entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Calculamos el vector velocidad:

$$c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), -2\sin(2t), 2\cos(2t)).$$

La velocidad es pues

$$\|c'(t)\| = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + 4\sin(2t)^2 + 4\cos(2t)^2} = \sqrt{5}.$$

Por lo tanto $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} \, dt = 2\sqrt{5} \pi$.

4.1 Reparametrizaciones de curvas

Definición

Sea $h : [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$ una aplicación biyectiva y diferenciable. Si $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva suave, entonces la curva

$$\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta(t) := \alpha(h(t)),$$

se llama **reparametrización** de α .

A menudo, se usa $s = h(t)$, y se entiende que s es el parámetro de α .

h debe ser una función solo creciente, o solo decreciente. En el primer caso, tenemos

$$h(a) = a_1, \quad h(b) = b_1.$$

En el segundo,

$$h(a) = b_1, \quad h(b) = a_1.$$

4.1 Reparametrizaciones de curvas

- En el primer caso, β se desplaza en la misma dirección que se desplazaba α , esto es, de $\alpha(a_1) = \beta(a)$ a $\alpha(b_1) = \beta(b)$.
- En el segundo, β se desplaza en sentido opuesto al de α , esto es, de $\alpha(b_1) = \beta(a)$ a $\alpha(a_1) = \beta(b)$.

Definición

- Si h es creciente, diremos que la reparametrización **conserva la orientación**;
- Si h es decreciente diremos que la reparametrización **invierte la orientación**.

Ejemplo: Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\beta(t) := \alpha(a + b - t)$$

invierte la orientación.

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Vamos a ver cómo se puede integrar una función $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a lo largo de una trayectoria dada.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, con $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. **La integral de f a lo largo de c es**

$$\int_c f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|c'(t)\| \, dt.$$

(Aquí “ ds ” se refiere al segmento infinitesimal en cada punto de c .)

Ejemplo: sea $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ (un segmento de hélice), y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular $\int_c f \, ds$.

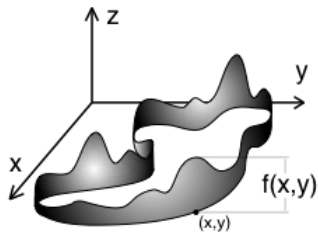
Tenemos $c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, luego $\|c'(t)\| = \sqrt{2}$ para todo t .

Por lo tanto

$$\int_c f \, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi (3 + 4\pi^2).$$

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Un caso especial interesante es aquel en el que c representa una curva plana: $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, y tenemos una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre esta curva.



Podemos calcular la integral de f a lo largo de la curva:

$$\begin{aligned} \int_c f(x, y) \, ds \\ = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt. \end{aligned}$$

Si $f \geq 0$, esto es el área de la “pared” sobre c definida por f .

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Proposición

La integral de la función escalar f sobre la curva $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ no depende de las reparametrizaciones de α ; en otras palabras, si $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es $\beta(t) = \alpha(h(t))$, entonces

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_{\beta} f \, ds$$

Demostración: Por la regla de la cadena,

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \quad \|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|.$$

- Si h preserva la orientación, h es creciente y $h' > 0$, $h(a) = a_1$, $h(b) = b_1$.

$$\int_{\beta} f \, ds = \int_a^b f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| \, dt = \int_a^b f(\alpha(h(t))) \|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t) \, dt$$

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Demostración (cont.): • Si h invierte la orientación, h es decreciente y $h' < 0$, $h(a) = b_1$, $h(b) = a_1$.

$$\int_{\beta} f \, ds = \int_a^b f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| \, dt = - \int_a^b f(\alpha(h(t)) \|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t) \, dt$$

En ambos casos, haciendo el cambio de variable $s = h(t)$, queda

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\alpha(s)) \|\alpha'(s)\| \, ds = \int_{\alpha} f \, ds$$

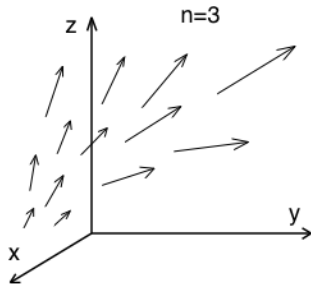
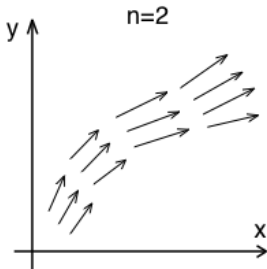


4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Aquí estudiaremos en más detalle las funciones de la forma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, viendo cada valor de F como un vector.

En particular, para $n = 2$ hablamos de un campo vectorial en el plano, y para $n = 3$ hablamos de un campo vectorial en el espacio.

Para representar gráficamente los campos vectoriales (esbozarlos), se toma un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n suficientemente “representativo” y se dibuja en cada punto x del conjunto el vector que va de x hasta $x + F(x)$, obteniendo así un conjunto de vectores representativo del campo vectorial.



4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Dado un campo vectorial F , una pregunta natural es la siguiente:
¿Existe una curva c tal que para todo t tenemos $F(c(t)) = c'(t)$?

Definición (Líneas de flujo)

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Llamamos **línea de flujo** de F una curva $c(t)$ tal que $F(c(t)) = c'(t)$.

En general el problema de hallar si un campo F dado tiene líneas de flujo requiere la teoría de las *ecuaciones diferenciales*, y no lo trataremos aquí. Sin embargo, podemos querer verificar que una curva c *dada* es una línea de flujo de F ; en este caso, basta comprobar que se tiene $F(c(t)) = c'(t)$.

Ejemplo 3.5: Calcular las líneas de flujo del campo vectorial constante

$$F(x, y, z) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Solución: Queremos hallar la familia de curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = 3 \\ z'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2t + x_0 \\ y(t) = 3t + y_0 \\ z(t) = t + z_0 \end{cases} \Rightarrow \gamma(t) = (2t + x_0, 3t + y_0, t + z_0)$$

las líneas de flujo de campo vectorial constante son rectas.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Campo gradiente y campo conservativo

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y diferenciable.

- El campo vectorial $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **campo vectorial gradiente**.
- Un campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **conservativo** si existe una función escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$. En este caso, f es el **potencial** de F .

Ejemplo: ¿Es $F(x, y) = (y, -x)$ un campo conservativo?

Solución: Si lo fuera, existiría una función escalar, f , diferenciable tal que:

$$F = \nabla f \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \end{cases} \quad \text{¡contradicción!}$$

ya que $f \in C^2$ (las derivadas parciales son polinomios, por tanto, continuas y derivables) y, por lo tanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Observación: Por la misma razón, si F es conservativo, entonces $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

A continuación, vamos a ver varias herramientas muy útiles para estudiar campos vectoriales. En particular, usaremos el gradiente.

Escribiendo $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ podemos ver el gradiente ∇f de una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como el resultado de aplicar el *operador* ∇ a f .

Tratando ∇ como un vector (de modo simbólico), podemos definir varias operaciones con campos vectoriales.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Definición (Divergencia de un campo vectorial)

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i \in [1, n]$ existen en cada punto. La **divergencia** de F es la función escalar

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

La noción siguiente se define para campos vectoriales en el espacio.

Definición (Rotacional de un campo vectorial $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ existen en cada punto. El **rotacional** de F es el campo vectorial $\operatorname{rot} F = \nabla \times F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por la fórmula

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} &= \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Para el caso de campos vectoriales en \mathbb{R}^2 , $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ también se puede calcular el rotacional:

- Primero se considera f como un campo vectorial en \mathbb{R}^3 escribiendo

$$F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

- Ahora calculamos el rotacional normalmente:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Las dos operaciones que acabamos de ver están relacionadas en particular por el importante resultado siguiente.

Teorema

Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ambas funciones de clase \mathcal{C}^2 en \mathbb{R}^3 . Entonces tenemos

1) $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$. (El rotacional de cualquier gradiente es $\vec{0}$.)

2) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$. (La divergencia de cualquier rotacional es 0.)

($F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^2 si cada uno de sus componentes es una función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 .)

Demostremos el punto 1): Tenemos $\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$.

Usando que las derivadas cruzadas son independientes del orden de las variables (teorema visto anteriormente), deducimos que esto es $(0, 0, 0)$.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Significado geométrico de los operadores diferenciales :

- **La divergencia** mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente.

Si el campo tiene “fuentes” entonces $\operatorname{div} F > 0$, si tiene “sumideros” entonces $\operatorname{div} F < 0$, si se compensa $\operatorname{div} F = 0$.

- **El rotacional** es un operador vectorial que muestra la tendencia del campo a inducir *rotación alrededor de un punto*.

Si $\operatorname{rot} F = 0$ en un punto, el flujo no tiene “remolinos” en dicho punto, y se dice que el campo es **irrotacional**.

Ejemplo 3.6: Dado el campo $F(x, y, z) = (x^2y, z, xyz)$, halle $\operatorname{div} F$.

Soluc: $\operatorname{div} F = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = 3xy$

Ejemplo 3.7: Dado el campo $F(x, y) = (y, -x)$. Hallar $\operatorname{rot} F$.

Soluc: $\operatorname{rot} F = \left(0, 0, \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) = (0, 0, -2)$

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Supongamos dado un campo vectorial $F = (F_1, \dots, F_n)$ de clase \mathcal{C}^1 (e.g, todas las F_i tienen derivadas parciales continuas).

Si un campo F es conservativo, entonces

$$F = \nabla f, \text{ y } \operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \nabla f = 0$$

Esto es, **si $\operatorname{rot} F \neq 0$, entonces F no es conservativo.**

Para determinar si F es un campo conservativo:

- si el dominio es \mathbb{R}^2 y $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, F será conservativo si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- si el dominio es \mathbb{R}^3 , lo será si y solo si $\operatorname{rot} F = \vec{0}$.

Cuidado: Si el dominio es diferente, puede que no lo sea.

Ejemplo 3.4 (cont.): El campo $F(x, y) = (y, -x)$ ¿es conservativo?

Soluc: Para que un campo en \mathbb{R}^2 sea conservativo debe cumplir $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial(y)}{\partial y} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \Rightarrow 1 = -1 \text{ ¡No conservativo!}$$

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

En nuestro estudio posterior, los campos vectoriales siguientes jugarán un papel importante.

Definición (Campos vectoriales conservativos)

Decimos que un campo vectorial F es un **campo conservativo** (o **campo gradiente**) si $F = \nabla f$ para alguna función escalar f .

Nótese: el teorema anterior implica que el rotacional de cualquier campo gradiente es nulo.

¿Por qué llamarlos “campos conservativos”? Sea $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea una curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 que une el punto $A = c(a)$ al punto $B = c(b)$. Tiene mucho interés (particularmente en física) considerar una integral de la forma $\int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt$, llamada **integral de línea** de F a lo largo de c . Usando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo, se puede ver que esta integral es $f(B) - f(A)$, independiente de c . Así pues F *conserva* estas integrales de línea, i.e. las tiene constantes independientes de la curva particular que une los puntos extremos.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Otra operación muy útil que usa el gradiente es la que sigue.

Definición (Laplaciano de un campo escalar)

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar con derivadas de orden 2 definidas en cada punto. El **Laplaciano** de f es la función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denotada Δf y definida por $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Notación: A veces resulta conveniente abreviar la notación de derivadas parciales de un campo escalar f , reemplazando $\frac{\partial f}{\partial x}$ por f_x . Esto permite en particular escribir derivadas de orden superior acumulando subíndices (en el orden que reproduce el orden de las derivaciones). Por ejemplo $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$ se escribe de este modo f_{xzy} . El Laplaciano en dimensión 3 de f se escribiría $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

Ejemplo: sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en \mathcal{C}^2 . Demostrar que $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Escribamos $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, $\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$. Tenemos entonces

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = (f_y g_z - f_z g_y, -f_x g_z + f_z g_x, f_x g_y - f_y g_x).$$

Por lo tanto

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) - \frac{\partial}{\partial y}(f_x g_z - f_z g_x) + \frac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x)$$

Aplicando la fórmula del producto, desarrollamos esto, obteniendo que es igual a

$$\begin{aligned} & (f_{xy} g_z + f_y g_{xz} - f_{xz} g_y - f_z g_{xy}) \\ & - (f_{yx} g_z + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_z g_{yx}) \\ & + (f_{zx} g_y + f_x g_{zy} - f_{zy} g_x - f_y g_{zx}) = 0. \end{aligned}$$

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Ahora vamos a ver cómo podemos integrar campos vectoriales a lo largo de una trayectoria dada. En este caso tenemos lo siguiente.

Definición (Integral de línea)

Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y supongamos que F es continuo sobre la curva dada por $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos la **integral de línea** de F sobre c por la fórmula

$$\int_c F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt.$$

Ejemplo: sea $c(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, y sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\int_c F \cdot ds$. Aplicando la definición tenemos

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t), t) \cdot (\cos(t), -\sin(t), 1) dt = \int_0^{2\pi} t dt \\ &= [t^2/2]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Ejemplo: sea $c(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$, y sea $F(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$. Calcular $\int_c F \cdot ds$. (Nótese que escribiendo $ds = (dx, dy, dz)$ se puede escribir $\int_c F \cdot ds = \int_c x^2 dx + xy dy + dz$.)

Tenemos

$$\begin{aligned}\int_c F \cdot ds &= \int_0^1 (t^2, t^3, 1) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 t^2 + 2t^4 dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.\end{aligned}$$

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

A priori puede parecer que una integral a lo largo de una curva depende de la parametrización de la curva. El resultado siguiente precisa en qué medida se puede dar una tal dependencia.

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, supongamos que F es continuo sobre una curva de clase \mathcal{C}^1 dada por $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y sea $c_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de c_1 . Entonces tenemos $\int_{c_0} F \cdot ds = \pm \int_{c_1} F \cdot ds$, donde el signo en “ \pm ” depende de si la reparametrización conserva la orientación de la trayectoria, en cuyo caso el signo es “ $+$ ”, o si invierte la orientación de la trayectoria, en cuyo caso el signo es “ $-$ ”.

El hecho que haya esta dependencia en el signo se debe al producto escalar. En el caso de funciones escalares, como integramos más bien la cantidad positiva $\|c'(t)\|$, no ocurre este cambio de signo, y por tanto no cambia el valor de la integral bajo reparametrizaciones de la curva.

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Teorema fundamental de integración sobre curvas

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 sobre una curva de clase \mathcal{C}^1 dada por $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces tenemos $\int_c \nabla f \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a))$.

En particular, si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial conservativo, entonces una integral de línea de F a lo largo de c sólo depende de los puntos extremos de $c(a), c(b)$ (no del camino particular que toma c entre estos puntos). Nótese en particular que si $c(b) = c(a)$ entonces $\int_c \nabla f \cdot ds = 0$.

4.3. Campos vectoriales, campos conservativos

En nuestro estudio posterior, los campos vectoriales siguientes jugarán un papel importante.

Definición (Campos vectoriales conservativos)

Decimos que un campo vectorial F es un **campo conservativo** (o **campo gradiente**) si $F = \nabla f$ para alguna función escalar f .

Nótese: el teorema anterior implica que el rotacional de cualquier campo gradiente es nulo.

¿Por qué llamarlos “campos conservativos”? Sea $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea una curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 que une el punto $A = c(a)$ al punto $B = c(b)$. Tiene mucho interés (particularmente en física) considerar una integral de la forma $\int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt$, llamada **integral de línea** de F a lo largo de c . Usando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo, se puede ver que esta integral es $f(B) - f(A)$, independiente de c . Así pues F *conserva* estas integrales de línea, i.e. las tiene constantes independientes de la curva particular que une los puntos extremos.

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Ejemplo: sea $c(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin(\frac{\pi}{2}t)^3, 0)$, $t \in [0, 1]$, y sea $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Calcular $\int_c F \cdot ds$. Observamos que esta integral se puede escribir $\int_c y dx + x dy = \int_c \nabla(xy) ds$. Por lo tanto, el teorema fundamental implica que la integral es $f(c(1)) - f(c(0))$ donde $f(x, y, z) = xy$, luego la integral es $\frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = 1/4$.

4.5. Teorema de Green

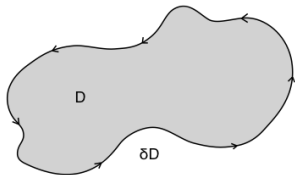
En esta sección estudiamos un resultado importante que nos da una herramienta para calcular integrales de funciones sobre ciertas regiones en \mathbb{R}^2 . El resultado en cuestión reduce una tal integral sobre una región a una integral más simple, calculada sobre la *frontera* de la región, como sigue.

Teorema de Green

Sea D una región elemental en \mathbb{R}^2 , sea ∂D el borde de D , y supongamos que ∂D está parametrizado de modo que se recorra en el sentido que deja D a la izquierda del vector director (sentido antihorario).

Sean $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^1 . Entonces tenemos

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$



Aquí $\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy$ es otra manera de escribir la integral de línea $\int_{\partial D} (P, Q) \cdot ds$.

4.5. Teorema de Green

Ejemplo: verificar el teorema de Green para $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = yx$, con D el disco unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Por un lado tenemos $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, que podemos parametrizar por $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy &= \int_{\partial D} (x, yx) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta), \cos(\theta) \sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin(\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \, d\theta \\ &= \left[\frac{\cos(\theta)^2}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos(\theta)^3}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy &= \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \, d\theta = \frac{1}{3} [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Una consecuencia interesante del teorema de Green es que podemos calcular el área de una región conociendo únicamente la frontera de esta región.

Corolario

Sea D una región donde podemos aplicar el teorema de Green. Entonces el área de D es $A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y, x) \cdot ds$.

Prueba. Tomemos $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. Entonces, aplicando el teorema de Green, tenemos

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 \, dx \, dy = A(D). \quad \square$$

4.5. Teorema de Green

Ejemplo: verificar el teorema de Green para $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ donde $P(x, y) = x^2 - y$, $Q(x, y) = x + xy + y^2$, con D el círculo de radio 1, i.e. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Parametrizamos de nuevo ∂D con $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. Tenemos que $\int_{\partial D} P dx + Q dy$ es igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta), \cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)^2) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\cos(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + \sin(\theta)^2\cos(\theta) d\theta = \left[\theta + \frac{\sin(\theta)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D ((1 + y) - (-1)) dx dy = \iint_D 2 + y dx dy.$$

Hacemos el cambio de variables $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, que tiene jacobiano r (como vimos anteriormente). Encontramos que esta integral es

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r \sin(\theta)) r d\theta dr = 4\pi \int_0^1 r dr + \int_0^1 r^2 [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} dr = 2\pi.$$

4.5. Teorema de Green

Ejemplo: hallar la integral de $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, con $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, a lo largo del círculo ∂D centrado en el origen y de radio r (parametrizado con orientación positiva, es decir dejando el disco D a la izquierda).

¿Se verifica la conclusión del teorema de Green en este caso?

Tenemos por un lado

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin(\theta)}{r^2} (-r \sin(\theta)) + \frac{r \cos(\theta)}{r^2} (r \cos(\theta)) \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Tenemos por otro lado que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ (en efecto $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$).

De modo que no se da la conclusión en cuestión aquí. ¿Por qué?

La razón es que P y Q no son de clase \mathcal{C}^1 sobre D , puesto que las derivadas parciales no son continuas en el origen.