Números naturales en distintas bases

Estamos habituados a encontrar los números representados en el sistema decimal, o de base 10, con los diez dígitos: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. De menor a mayor, y sin saltarnos ninguno, los primeros naturales se representan

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < ...$$

Y los que siguen a 437 son $438, 439, 440, 441, ...$ El sistema decimal lo tenemos tan asumido que vamos a pasar por él para entender cualquier otro. De cada sistema entenderemos que los dígitos $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{b-1}$ de su base tienen los valores $0 < 1 < ... < b-1$ en el sistema decimal. En particular, si la base de numeración tiene menos de 10 dígitos utilizaremos los primeros dígitos de la base decimal. Para sistemas con más de 10 dígitos en la base se necesitan otros *símbolos* y se suelen utilizar las primeras letras mayúsculas del alfabeto: $A < B < C$... Se considera en estos casos que $A = 10$, $B = 11$, etcétera. De esta manera se podrá representar, en cualquier sistema, todo valor representable por el sistema decimal.

En un sistema de numeración con base $\mathbf{b}$ y dígitos 0, a_1, ..., a_{b-1} un número *natural* de m dígitos, digamos $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_0$, $0 \le d_j < b-1$ para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ y $d_{m-1} \neq 0$, tendrá valor:

$$d_{m-1} \cdot \mathbf{b}^{m-1} + d_{m-2} \cdot \mathbf{b}^{m-2} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b}^2 + d_1 \cdot \mathbf{b} + d_0 \,. \tag{1}$$

Para especificar que la expresión $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_0$ es en una base $\mathbf{b}$, distinta de la decimal, utilizaremos la notación: $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$.

Es sencillo ver que dado un número z, sus dígitos en una base $\mathbf{b}$ se pueden calcular con el siguiente algoritmo

Cálculo de los dígitos de un natural en base b

Objetivo: Dado $z \in \mathbb{N}$ y una base $\mathbf{b}$ averiguar $0 \le d_0, d_1, \ldots, d_k < \mathbf{b}$, con $d_k \neq 0$ tales que $z = d_k...d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$ es decir

$$z = d_k \cdot \mathbf{b}^k + d_{k-1} \cdot \mathbf{b}^{k-1} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b}^2 + d_1 \cdot \mathbf{b} + d_0 \,.$$

Procedimiento: Se calcula d_0 como el resto, no negativo y menor que $\mathbf{b}$, de la división entera de z por $\mathbf{b}$. Si q_1 es el cociente de esta división, es decir $z = q_1 \cdot \mathbf{b} + d_0$ con $0 \le d_0 < \mathbf{b}$, se tiene:

$$q_1 = d_k \cdot \mathbf{b}^{k-1} + d_{k-1} \cdot \mathbf{b}^{k-2} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b} + d_1 \qquad \text{con } 0 \le q_1 < z.$$

Si $q_1 = 0$ se acaba el algoritmo. En otro caso, se repite el cálculo anterior con q_1, encontrando $0 \le d_1 < \mathbf{b}$ tal que $q_1 = q_2\mathbf{b} + d_1$, con $0 \le q_2 < q_1 < z$. Este procedimiento acaba pues en un número finito de pasos aparece un cociente menor que $\mathbf{b}$: si $0 < q_k < \mathbf{b}$ el siguiente paso sería $q_k = 0 \cdot \mathbf{b} + d_k$, con $d_k = q_k$ el **dígito principal**.

Ejemplos

- *Sistema binario* o de base 2 con dígitos $0 < 1$. Primeros valores (naturales):

decimal:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
base 2:	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101

El desarrollo en base 2 del número 435 se averigua con los siguientes cálculos:

$$435 = 217 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 217 = 108 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 108 = 54 \cdot \mathbf{2} + 0\,, \quad 54 = 27 \cdot \mathbf{2} + 0\,,$$
$$27 = 13 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 13 = 6 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 6 = 3 \cdot \mathbf{2} + 0\,, \quad 3 = 1 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 1 = 0 \cdot \mathbf{2} + 1\,,$$

de manera que $435 = 110110011_{\lrcorner 2}$.

El valor decimal del número de nueve dígitos 110110011 en base 2 es

$$\begin{aligned} 110110011_{\lrcorner 2} &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2 + 1 = 256 + 128 + 32 + 16 + 2 + 1 = 435\,. \end{aligned}$$

- *Sistema ternario*, base 3, dígitos $0 < 1 < 2$. Primeros valores (naturales):

decimal:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
base 3:	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120

La representación en base 3 del número 428 se obtiene en los siguientes cálculos:

$$428 = 142 \cdot \mathbf{3} + 2\,, \quad 142 = 47 \cdot \mathbf{3} + 1\,, \quad 47 = 15 \cdot \mathbf{3} + 2\,,$$
$$15 = 5 \cdot \mathbf{3} + 0\,, \quad 5 = 1 \cdot \mathbf{3} + 2\,, \quad 1 = 0 \cdot \mathbf{3} + 1\,,$$

y así $428 = 120212_{\lrcorner 3}$.

El valor decimal del número de seis dígitos 120212 en base 3 es:

$$\begin{aligned} 120212_{\lrcorner 3} &= 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 \\ &= 243 + 2 \cdot 81 + 2 \cdot 9 + 3 + 2 = 243 + 162 + 18 + 3 + 2 = 428\,. \end{aligned}$$

- *Sistema hexadecimal*, base 16, dígitos $0123456789ABCDEF$.

$$41531 = 2595 \cdot \mathbf{16} + 11\,, \quad 2595 = 162 \cdot \mathbf{16} + 3\,, \quad 162 = 10 \cdot \mathbf{16} + 2\,, \quad 10 = 0 \cdot \mathbf{16} + 10\,, \; 41531 = A23B_{\lrcorner 16}$$

$$\begin{aligned} A23B_{\lrcorner 16} &= 10 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 11 \\ &= 10 \cdot 4096 + 2 \cdot 256 + 3 \cdot 16 + 11 = 40960 + 512 + 48 + 11 = 41531\,. \end{aligned}$$

Algoritmo de Horner

Como acabamos de ver en los ejemplos, es muy sencillo averiguar qué número en base 10 es el que en base $\mathbf{b}$ tiene expresión $d_{m-1}d_{m-2}\ldots d_2d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$. Basta con sustituir y evaluar:

$$d_{m-1} \cdot \mathbf{b}^{m-1} + d_{m-2} \cdot \mathbf{b}^{m-2} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b}^2 + d_1 \cdot \mathbf{b} + d_0\,.$$

Para evaluar esta expresión, para m dígitos, se han de realizar: $m-1$ sumas y $1 + 2 + \cdots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$ productos. El siguiente algoritmo, de propósito más general, nos aporta un gran ahorro en el número de operaciones.

Algoritmo de Horner

Objetivo: Calcular $p(x_0)$ con $p(x)$ el polinomio de grado n:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Procedimiento: Se calcula, a partir de los coeficientes del polinomio y del valor x_0, la sucesión

$$b_0 = a_n\,, \quad b_j = b_{j-1} \cdot x_0 + a_{n-j} \;\text{ para } j = 1, \ldots, n\,.$$

Se tiene que $p(x_0) = b_n$ (el último de la sucesión).

Es directo ver que en este algoritmo se realizan n sumas y n productos: una suma y un producto en el cálculo de cada b_j para $j = 1, \ldots, n$.

El uso de este algoritmo para el asunto que nos traemos entre manos es claro: *el número en base* 10 *que en base* $\mathbf{b}$ *tiene expresión* $d_{m-1}d_{m-2}\ldots d_2d_1d_0$ *es* $p(\mathbf{b})$ *con* $p(x)$ *el polinomio* $p(x) = d_{m-1}x^{m-1} + d_{m-2}x^{m-2} + \cdots + d_2x^2 + d_1x + d_0$.

Ejemplos: Para calcular, con el algoritmo de Horner, el valor decimal de $120212_{\lrcorner 3}$ tomamos el polinomio en x de grado $6 - 1 = 5$ con coeficientes, de mayor a menor grado, los 6 dígitos $1, 2, 0, 2, 1, 2$:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 2\,.$$

La sucesión del algoritmo de Horner, para evaluar dicho polinomio en $x = \mathbf{3}$, quedaría:

$$b_0 = 1\,, \quad b_1 = 1 \cdot \mathbf{3} + 2 = 5\,, \quad b_2 = 5 \cdot \mathbf{3} + 0 = 15\,, \quad b_3 = 15 \cdot \mathbf{3} + 2 = 47\,,$$
$$b_4 = 47 \cdot \mathbf{3} + 1 = 142\,, \quad b_5 = 142 \cdot \mathbf{3} + 2 = 428\,.$$

El valor decimal de $A23B_{\lrcorner 16}$ es el que se alcanza con el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} p(x) &= 10x^3 + 2x^2 + 3x + 11 \\ b_0 &= 10\,, \quad b_1 = 10 \cdot \mathbf{16} + 2 = 162\,, \quad b_2 = 162 \cdot \mathbf{16} + 3 = 2592 + 3 = 2595\,, \\ b_3 &= 2595 \cdot \mathbf{16} + 11 = 41520 + 11 = 41531\,. \end{aligned}$$