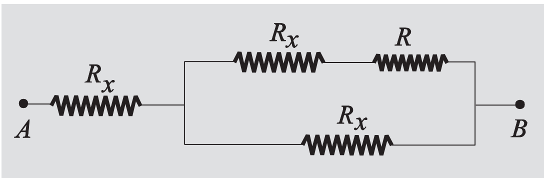
CORRIENTE CONTINUA

1. **Calcular el valor de R_X para que, conocido el valor de R, la resistencia total entre los bornes A y B sea, precisamente, igual a R.**



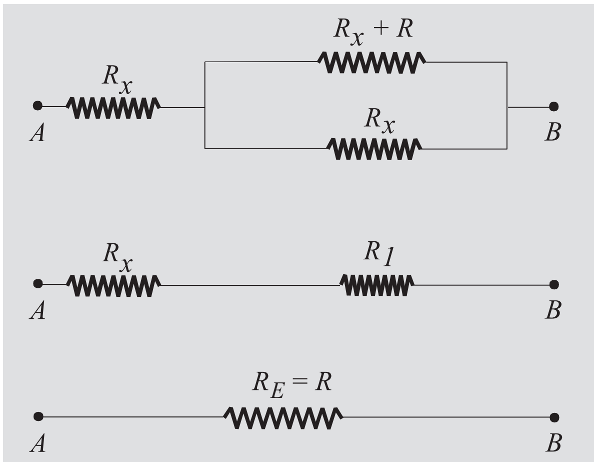
Calcularemos, paso a paso, la resistencia equivalente R_E entre los puntos **A** y B.

La equivalente de las asociadas en serie es la suma de las asociadas: $R_x + R$ (ver figura).

A continuación calculamos la equivalente de ésta con la R_x asociada en paralelo:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_x + R} + \frac{1}{R_x}$$

$$R_1 = \frac{R_x\,(R_x + R)}{2R_x + R}$$



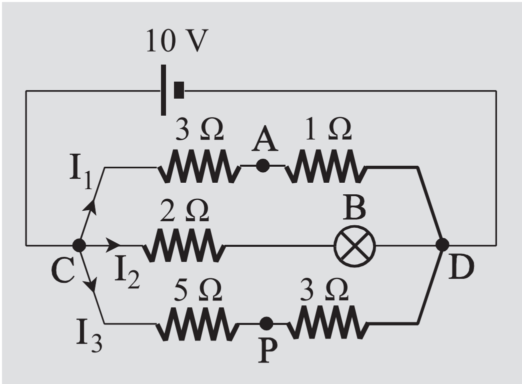
Por último, calculamos la equivalente de R_x y R_1 como suma de ambas:

$$R_E = R_x + R_1 = R_x + \frac{R_x\,(R_x + R)}{2R_x + R} = \frac{3R_x^2 + 2RR_x}{2R_x + R}$$

y como el enunciado requiere que esta resistencia equivalente sea igual a R queda:

$$R = \frac{3R_x^2 + 2RR_x}{2R_x + R} \qquad \Rightarrow \qquad R_x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

2. En el circuito de la figura, sabiendo que las características de la bombilla B son 5 V, 5 W:
a) Hallar la diferencia de potencial entre los puntos A y P.
b) ¿Se funde la bombilla?



a. La diferencia de potencial entre los puntos **A** y **P** es:

$$V_{AP} = V_{AC} + V_{CP} = -3\ I_1 + 5\ I_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en la que la d.d.p. V_{AC} tiene signo negativo ya que, en el sentido convencional, la corriente va de mayor a menor potencial y, en consecuencia, el punto **C** ha de suponerse que está a mayor potencial que el **A**.

Es preciso calcular las intensidades I_1 e I_3. Si llamamos R_1 y R_3 a las resistencias equivalentes de las ramas superior e inferior, respectivamente:

$$V_{CD} = I_1\ R_1 \quad \Rightarrow \quad 10 = I_1\ (3 + 1) \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2{,}5\ A$$

y también: $$V_{CD} = I_3\ R_3 \quad \Rightarrow \quad 10 = I_3\ (5 + 3) \quad \Rightarrow \quad I_3 = 1{,}25\ A$$

quedando al sustituir en (1): $V_{AP} = -3\ .\ 2{,}5 + 5\ .\ 1{,}25 = -1{,}25\ V$

resultado del que se deduce, por su signo negativo, que el punto **P** está a mayor potencial que el **A**.

b. Las características de una bombilla, se refieren a la potencia P que disipa (en este caso 5 W) cuando la diferencia de potencial a la que está sometida es V (en este caso 5 V). A partir de estas características se deduce la intensidad máxima que puede soportar sin que *se funda* y su resistencia:

$$P = I\ V \quad \Rightarrow \quad I_{máxima} = \frac{P}{V} = \frac{5}{5} = 1\ A$$

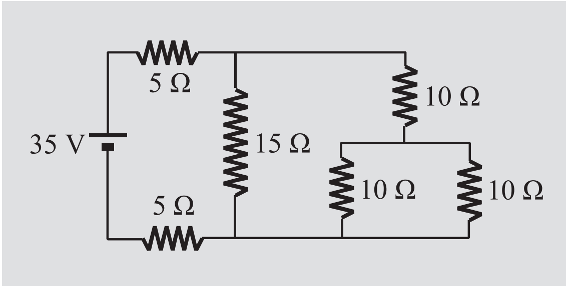
$$P = I\ V = \frac{V}{R}\ V \quad \Rightarrow \quad R_{Bombilla} = \frac{V^2}{P} = \frac{25}{5} = 5\ \Omega$$

Calculamos la intensidad que pasa por la bombilla para compararla con la máxima que puede soportar:

$$V_{CD} = I_2\ R_2 \quad \Rightarrow \quad 10 = I_2\ (2 + 5) \quad \Rightarrow \quad I_2 = 1{,}43\ A$$

resultado del que se deduce que la bombilla *se funde* por ser $I_2 > I_{máxima}$.

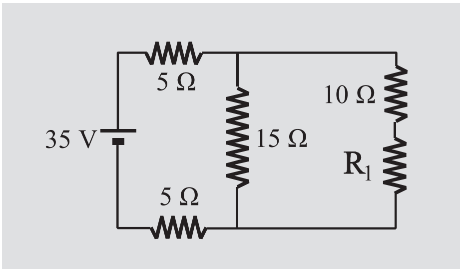
3. En el circuito de la figura calcular la intensidad que circula por la pila y por la resistencia de 15 Ω.



Para poder determinar la intensidad que pasa por la pila es preciso conocer la resistencia total del circuito. Para ello calculamos en primer lugar la resistencia equivalente de las de 10 Ω asociadas en paralelo:

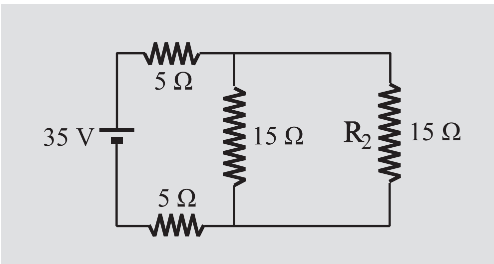
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 5\ \Omega$$

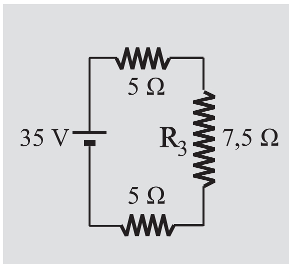
con lo que el circuito queda:

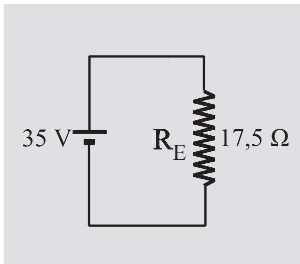


A continuación, en fases sucesivas, calculamos la equivalente de las resistencias de 5 y 10 Ω, asociadas en serie, y la equivalente de la combinación de estas, en paralelo, con la de 15 Ω:

$$R_2 = 5 + 10 = 15\ \Omega \quad ; \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \quad \Rightarrow \quad R_3 = 7{,}5\ \Omega$$







Por último, calculamos la equivalente total: $R_E = 5 + 7{,}5 + 5 = 17{,}5\ \Omega$

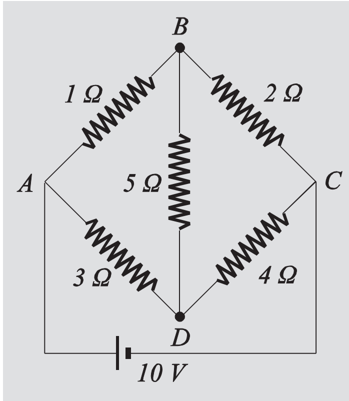
Cálculo de la intensidad que circula por la pila. $I = \dfrac{\varepsilon}{R_E} = \dfrac{35}{17{,}5} = 2\ A$

Cálculo de la intensidad que circula por la resistencia de 15 Ω

Puesto que la resistencia de 15 Ω y la equivalente R_2 tienen el mismo valor, la intensidad se va a dividir por igual. En consecuencia:

$$I_{15} = 1\ A$$

4. En el circuito de la figura, calcular:
a) la intensidad que pasa por cada resistencia.
b) la diferencia de potencial V_D - V_B.
c) la resistencia equivalente.



a. Asignamos un sentido arbitrario a cada una de las corrientes.

En la malla izquierda (**ABDA**):

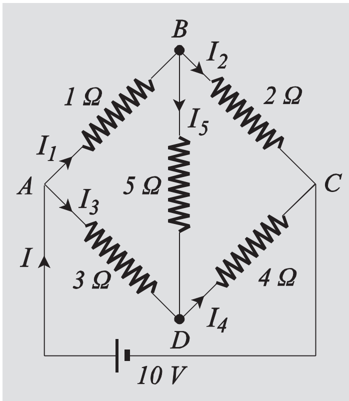
$$V_{AB} + V_{BD} + V_{DA} = 0$$

$$1\ I_1 + 5\ I_5 - 3\ I_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En la malla derecha (**BCDB**):

$$V_{BC} + V_{CD} + V_{DB} = 0$$

$$2\ I_2 - 4\ I_4 - 5\ I_5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



En la malla inferior (**ADCA**):

$$V_{AD} + V_{DC} + V_{CA} = 0$$

$$3\ I_3 + 4\ I_4 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

En el nudo **D**: $$I_4 = I_3 + I_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En el nudo **B**: $$I_1 = I_2 + I_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) a (5) se llega a la solución:

$$I_1 = 3{,}42\text{ A} \quad ; \quad I_2 = 3{,}29\text{ A} \quad ; \quad I_3 = 1{,}35\text{ A} \quad ; \quad I_1 = 1{,}48\text{ A} \quad ; \quad I_5 = 0{,}13\text{ A}$$

y por ser todas ellas positivas, el sentido de cada una de las intensidades es el prefijado en la figura.

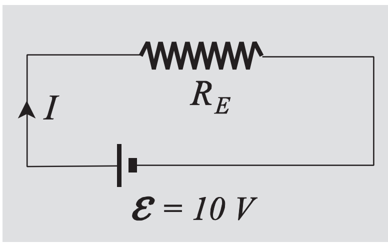
b. $$V_{BD} = 5\ I_5 = 5\ .\ 0{,}13 = 0{,}65\ V \quad \Rightarrow \quad V_{DB} = -\ V_{BD} = -\ 0{,}65\ V$$

En consecuencia, es mayor el potencial en el punto **B** que en el **D**.

c. Para calcular la resistencia equivalente es preciso conocer la intensidad *I* que pasa por la pila:

En el nudo **A**:

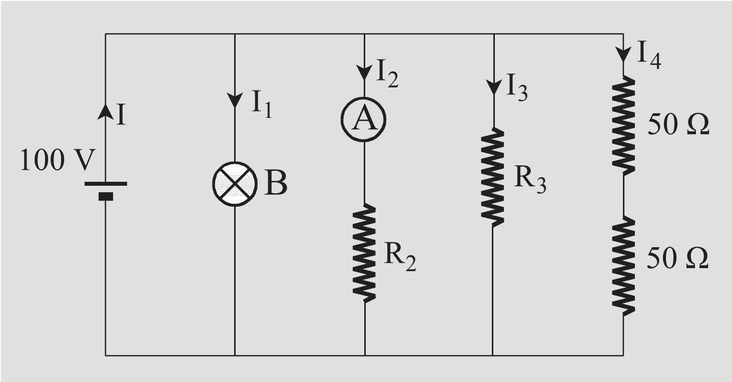
$$I = I_1 + I_3 = 3{,}42 + 1{,}35 = 4{,}77\ A$$



quedando la resistencia equivalente:

$$R_E = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{10}{4{,}77} = 2{,}09\ \Omega$$

5. En el circuito de la figura, la bombilla B consume 50 W, el amperímetro A, de resistencia despreciable, marca 0,5 A y la resistencia R_3 desprende calor a razón de 209 J.s^{-1}. Calcular:
a) la intensidad que pasa por cada rama.
b) la resistencia equivalente.
c) la potencia total consumida por el circuito.



Según el enunciado $I_2 = 0{,}5$ A

a. A partir de la potencia de la bombilla se calcula la intensidad I_1 que pasa por ella:

$$P_B = 50\ W = I_1 V_1 = I_1 \varepsilon = I_1\ 100 \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = 0{,}5\ A$$

A partir de la potencia P_3 que desprende R_3 calculamos la intensidad I_3 que pasa por esta rama:

$$P_3 = 209\ W = I_3 V_3 = I_3 \varepsilon = I_3\ 100 \qquad \Rightarrow \qquad I_3 = 2{,}09\ A$$

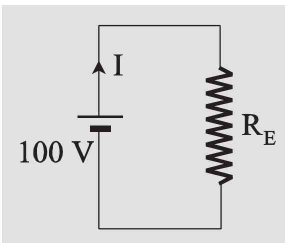
Puesto que la diferencia de potencial entre los extremos de la asociación de resistencias es igual a la f.e.m. del generador, aplicando la ley de Ohm:

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{\varepsilon}{50 + 50} = \frac{100}{100} = 1\ A$$

Conocidas las intensidades derivadas se calcula la intensidad principal I como suma de todas ellas:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4{,}09\ A$$

b. Para calcular la resistencia equivalente $\boldsymbol{R}_E$ a partir de las asociadas en paralelo es preciso, obviamente, conocer cada una de ellas. En este caso no se conoce ninguna, aunque se pueden calcular todas ellas a partir de los datos del problema. Sin embargo por conocerse la intensidad principal y la diferencia de potencial a la que estaría sometida esta resistencia equivalente, su cálculo se realiza directamente a partir de estos valores:

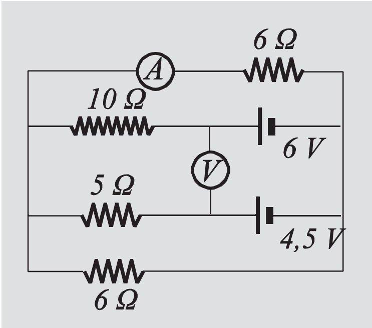


$$R_E = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{100}{4{,}09} = 24{,}45\ \Omega$$

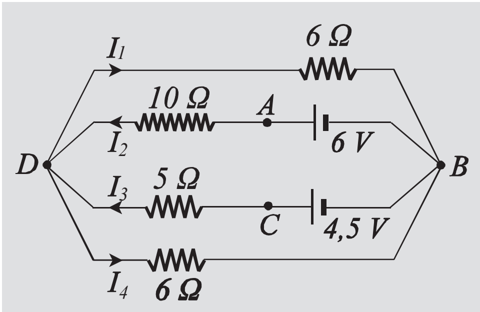
c. Como la potencia consumida por todos los elementos del circuito ha de ser igual a la suministrada por la pila, no es preciso calcular aquella como suma de las potencias consumidas por cada elemento, por lo que:

$$P_{CONSUMIDA} = P_{SUMINISTRADA} = \varepsilon\ I = 100\ .\ 4{,}09 = 409\ W$$

6. **¿Qué valores indicarán el voltímetro y el amperímetro de la figura?**



Para una mejor comprensión dibujaremos el circuito como se indica en la figura, en la que se ha suprimido el amperímetro ya que, considerado ideal, no tiene resistencia. También se ha suprimido el voltímetro dado que, considerado ideal, su resistencia es infinita y, en consecuencia, por él no pasa corriente. Además, se ha asignado arbotrariamente un sentido a la corriente de cada rama.



El voltímetro indicará la diferencia de potencial existente entre los puntos **A** y **C**. Esta d.d.p. es:

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = 6 + (-\ 4{,}5) = +\ 1{,}5\ V$$

en la que V_{BC} tiene signo negativo ya que **B** es el borne negativo (menor potencial) de la pila de 4,5 V, mientras que **C** es el borne positivo (mayor potencial) de esa pila.

Para calcular lo que marcará el amperimetro aplicamos las reglas de Kirchhoff *recorriendo* cada malla en el sentido de las agujas del reloj:

Malla superior: $$6\ I_1 - 6 + 10\ I_2 = 0$$

Malla central: $$-\ 10\ I_2 + 6 - 4{,}5 + 5\ I_3 = 0$$

Malla inferior: $$-\ 5\ I_3 + 4{,}5 - 6\ I_4 = 0$$

Nudo **D**: $$I_2 + I_3 = I_1 + I_4$$

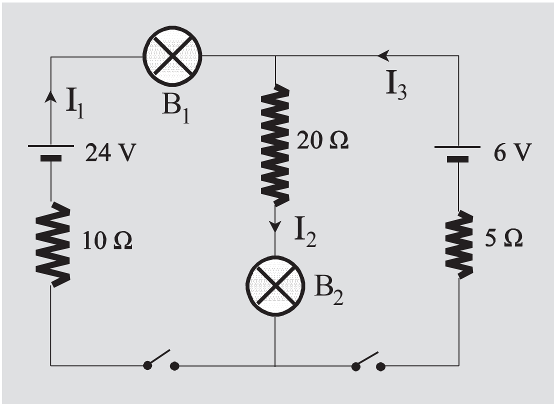
y resolviendo el sistema formado por estas cuatro ecuaciones se llega a la solución:

$I_1 = 0{,}39$ A ; $I_2 = 0{,}36$ A ; $I_3 = 0{,}42$ A ; $I_4 = 0{,}39$ A

y siendo I_1 la intensidad que recorre el amperímetro, éste marcará 0,39 A.

7. En el circuito de la fig. 2, B1 y B2 son dos pequeñas bombillas iguales, cuya resistencia es 7 Ω, que pueden soportar una intensidad máxima de 0,4 A.
a) Al cerrar los interruptores simultáneamente ¿se fundirá alguna de ellas?
En caso afirmativo calcular:
b) la intensidad que pasa por la otra.
c) el calor disipado por esta bombilla en cada segundo.
d) la potencia suministrada por cada pila.

a. Para conocer si se funde alguna de las bombillas hay que calcular la intensidad que pasa por cada una de ellas.



En la malla izquierda:

$$7\ I_1 + 20\ I_2 + 7\ I_2 + 10\ I_1 = 24$$

En la malla derecha:

$$20\ I_2 + 7\ I_2 + 5\ I_3 = 6$$

En el nudo: $I_2 = I_1 + I_3$

Resolviendo el sistema se llega a la solución:

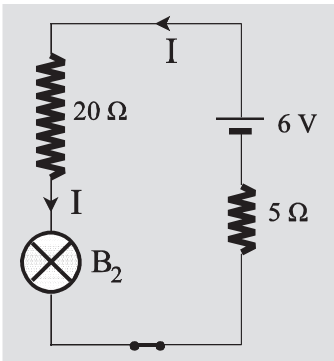
$$I_1 = 0{,}59\ A \quad ; \quad I_2 = 0{,}28\ A \quad ; \quad I_3 = -\ 0{,}31\ A$$

de la que se deduce:

1º) que la bobilla **B**$_1$ se funde por pasar por ella una intensidad superior a la que puede soportar.

2º) que la intensidad I_3 (negativa) tiene sentido contrario al que se le asignó.

b. Fundida **B**$_1$ el circuito queda como se indica en la figura. La intensidad ahora es:



$$20\ I + 7\ I + 5\ I = 6 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{6}{20 + 7 + 5} = 0{,}19\ A$$

y siendo esta intensidad menor que la que puede soportar, la bombilla **B**$_2$ no se funde.

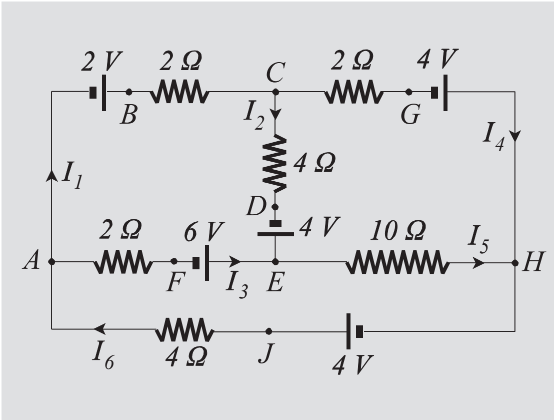
c. El calor disipado por segundo es la potencia:

$$P = I^2\ R = 0{,}19^2.7 = 0{,}25\ W = 0{,}25\ \frac{J}{s}$$

d. La potencia suministrada por la pila de 24 V es nula ya que por esa rama no pasa corriente al fundirse **B**$_1$. La potencia suministrada por la pila de 6 V es:

$$P = I\ \varepsilon = 0{,}19\ .\ 6 = 1{,}14\ W$$

8. Calcular la intensidad en cada una de las ramas de la red de la figura.



Asignamos arbitrariamente los sentidos de las corrientes que se indican en la figura y aplicamos las leyes de Kirchhoff.

Malla izquierda:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} + V_{FA} = 0$$

$$-2 + 2\,I_1 + 4\,I_2 - 4 + 6 - 2\,I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + 2\,I_2 - I_3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Malla derecha:

$$V_{CG} + V_{GH} + V_{HE} + V_{ED} + V_{DC} = 0$$

$$2\,I_4 - 4 - 10\,I_5 + 4 - 4\,I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\,I_2 + I_4 - 5\,I_5 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Malla inferior:

$$V_{AF} + V_{FE} + V_{EH} + V_{HJ} + V_{JA} = 0$$

$$2\,I_3 - 6 + 10\,I_5 - 4 + 4\,I_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 + 5\,I_5 + 2\,I_6 = 5 \quad \ldots\ldots (3)$$

Nudo **A**: $I_6 = I_1 + I_3$ .... (4)

Nudo **C**: $I_1 = I_4 + I_2$ .... (5)

Nudo **H**: $I_6 = I_4 + I_5$ .... (6)

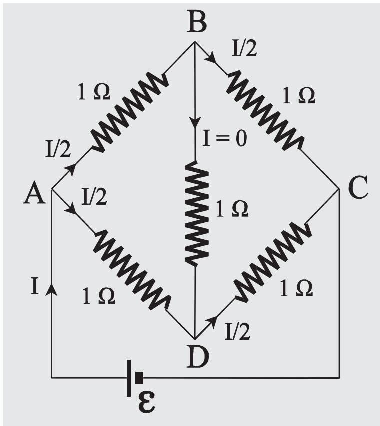
Resolviendo este sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas se llega a la solución:

$I_1 = 0{,}938$ A ; $I_2 = -\,0{,}208$ A ; $I_3 = 0{,}521$ A

$I_4 = 1{,}146$ A ; $I_5 = 0{,}313$ A ; $I_6 = 1{,}458$ A

De este resultado se deduce que, excepto I_2 (negativa), todas las intensidades tienen el sentido asignado en un principio, teniendo aquella sentido contrario al que se le asignó.

9. Calcular el valor numérico de la resistencia equivalente de la red de la figura, sabiendo que todas las resistencias son de 1 Ω. Orientación: observar la simetría de la red.



Debido a la simetría de la red, las intensidades bifurcadas en el punto **A** son iguales y, como consecuencia, su valor es la mitad de la intensidad principal *I*. También a causa de la simetría, por la resistencia central no pasa corriente debido a que los puntos **B** y **D** está al mismo potencial.

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = \frac{I}{2}\,1 + \frac{I}{2}\,1 = I$$

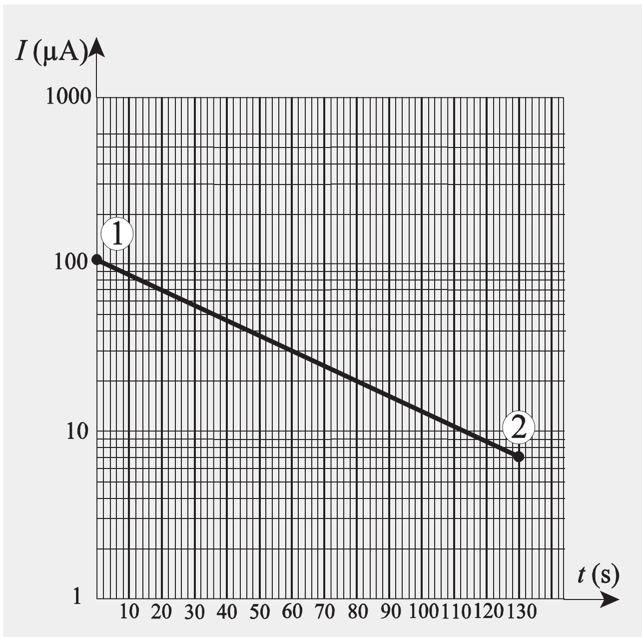
y como $V_{AC} = \varepsilon$ queda: $\varepsilon = I$

Por otra parte, si R_E es la resistencia equivalente, ha de ser:

$$\varepsilon = I\ R_E$$

y de la comparación de ambas se deduce que $\boldsymbol{R_E = 1\ \Omega}$.

10. En la figura se ha representado, en papel semilogarítmico, la variación de la intensidad con el tiempo en el proceso de carga de un condensador. Calcular la constante de tiempo.



En el proceso de carga de un condensador la variación de la intensidad con el tiempo tiene la forma:

$$I = I_0.e^{-\frac{t}{RC}} = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

en la que $\tau = RC$ es la constante de tiempo.

Tomando logaritmos:

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{1}{\tau}\,t$$

y haciendo:

$\ln I = y$; $\ln I_0 = n$; $-1/\tau = m$; $t = x$

queda: $y = n + mx$

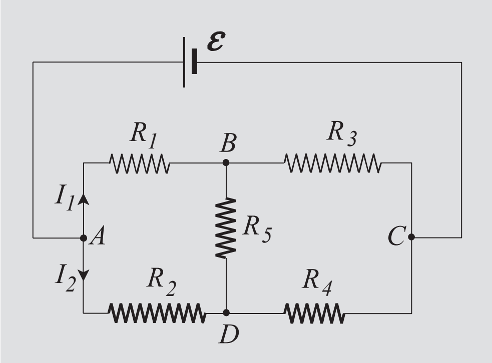
que es la ecuación de una recta cuya pendiente, $m = -1/\tau$, pasamos a calcular.

Tomando como punto **1** el de coordenadas (0 ; 100 μA) y como punto **2** el (130 ; 7 μA):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln I_2 - \ln I_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln 7.10^{-6} - \ln 100.10^{-6}}{130 - 0} = -\ 0{,}02$$

y la constante de tiempo queda: $$\tau = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\ 0{,}02} = 50\ s$$

11. En el circuito de la figura calcular el valor que ha de tener R_1 para que no pase corriente por R_5. Expresar el resultado en función de los datos del problema.



Si no pasa corriente por R_5 el potencial en el punto **B** es igual al del punto **D** y la intensidad que recorre las resistencias R_1 y R_3 es la misma (I_1) y también las resistencias R_2 y R_4 están recorridas por una misma intensidad (I_2). En consecuencia:

$$V_{AB} = V_{AD} \quad \Rightarrow \quad I_1R_1 = I_2R_2$$

y

$$V_{BC} = V_{DC} \quad \Rightarrow \quad I_1R_3 = I_2R_4$$

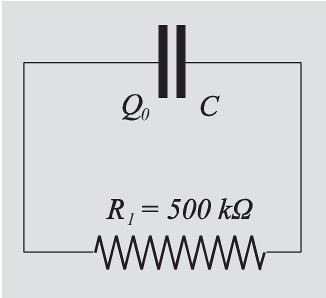
y dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_3\,\frac{R_2}{R_4}$$

12. Un condensador cargado se conecta a una resistencia de 500 kΩ y se observa que tarda 4,6 segundos en perder el 99% de su carga. Calcular el tiempo que tardaría en descargarse al 50% , en las mismas condiciones de carga iniciales, cuando se conectara a una resistencia de 200 kΩ.

En la descarga la variación de la carga con el tiempo es: $Q = Q_0 . e^{-\frac{t}{RC}}$

Primera situación: los datos relativos a esta primera situación permiten calcular la capacidad C del condensador. Si pierde el 99% de su carga, la residual Q_1 es el 1% de la inicial Q_0:

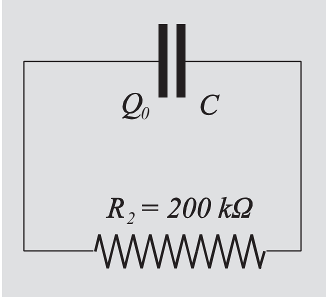


$$Q_1 = Q_0\, e^{-\frac{t_1}{R_1C}} = 0{,}01\ Q_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{t_1}{R_1C}} = 0{,}01$$

$$-\frac{t_1}{R_1C} = \ln\ 0{,}01 = -\ 4{,}6$$

$$C = \frac{t_1}{R_1\ 4{,}6} = \frac{4{,}6}{5.10^5.4{,}6} = 2.10^{-6}\ F = 2\ \mu F$$

Segunda situación: ahora la carga residual es el 50% de la inicial Q_0:



$$Q_2 = Q_0\, e^{-\frac{t_2}{R_2C}} = 0{,}5\ Q_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{t_2}{R_2C}} = 0{,}5$$

$$-\frac{t_2}{R_2C} = \ln\ 0{,}5 = -\ 0{,}69$$

$$t_2 = 0{,}69\ R_2C = 0{,}69\ .\ 2.10^5.\ 2.10^{-6} = 0{,}28\ s$$

13. **Un condensador se carga hasta que adquiere una carga Q_0 y a continuación se descarga.**
a) Calcular la pendiente de la función Q = f(t) en la descarga para t = 0 y escribir la ecuación de la recta tangente a la curva Q = f(t) para t = 0 .
b) ¿En qué punto corta esta recta al eje de tiempos?
c) ¿Cuál es la carga del condensador al cabo de este tiempo?

a. En el proceso de descarga de un condensador la variación de la carga con el tiempo tiene la forma:

$$Q = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para obtener la pendiente *m* derivamos respecto del tiempo:

$$m = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

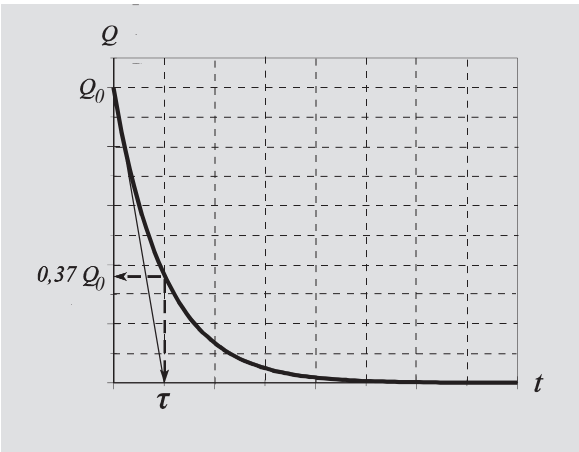
y para $t = 0$ esta pendiente toma el valor: $$m_0 = -\frac{Q_0}{RC}$$

La ecuación de la recta tangente a la curva, para $t = 0$, tiene la forma genérica:

$$Q = m_0\, t + n$$

en la que n es el valor que toma la carga para $t = 0$, es decir, n = Q_0, quedando:

$$Q = -\frac{Q_0}{RC}\, t + Q_0$$



b. Haciendo $Q = 0$ se obtiene el punto en el que esta recta tangente corta al eje de tiempos:

$$0 = -\frac{Q_0}{RC}\, t + Q_0 \quad \Rightarrow \quad t = RC = \tau$$

por lo que la recta tangente corta al eje de tiempos en un punto cuya coordenada es la constante de tiempo τ.

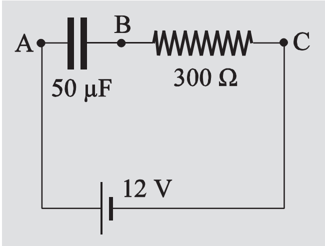
c. Haciendo $t = \tau$ en la expresión (1) se obtiene la carga del condensador al cabo del tiempo $t = \tau = RC$:

$$Q_\tau = Q_0\, e^{-\frac{\tau}{RC}} = Q_0\, e^{-\frac{RC}{RC}} = Q_0\, e^{-1}$$

$$Q_\tau = 0{,}37\ Q_0$$

resultado del que se deduce que al cabo de un tiempo τ la carga del condensador es el 37% de la inicial.

14. Un condensador de 50 µF, inicialmente descargado, se conecta en serie con una resistencia de 300 Ω y una batería de 12 V. Calcular:
a) La carga final Q_0 del condensador.
b) El tiempo que tarda el condensador en cargarse hasta $Q_0/2$.



La variación de potencial a lo largo de una malla cerrada es nula:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C} + IR = \varepsilon$$

y cuando el condensador se haya cargado es $Q = Q_0$ (carga final) y la intensidad es nula, por lo que:

$$\frac{Q_0}{C} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \varepsilon C = 12\ (50.10^{-6}) = 6.10^{-4}\ C = 600\ \mu C$$

En el proceso de carga la variación de ésta con el tiempo tiene la forma:

$$Q = Q_0\ (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

en la que Q_0 es la carga final que adquiere el condensador.

Si la carga final es $Q = Q_0/2$:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0\ (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = 0{,}5$$

$$t = -RC \ln 0{,}5 = -300\ .\ 50.10^{-6}.\ \ln 0{,}5 = 0{,}01\ s = 10\ ms$$

15. a) ¿Qué significado tiene la constante de tiempo en el proceso de carga de un condensador?
b) En la gráfica de la figura se representa la variación de la intensidad con el tiempo en el proceso de carga de un condensador. Determinar la constante de tiempo.

En el proceso de carga de un condensador la variación de la intensidad con el tiempo tiene la forma:

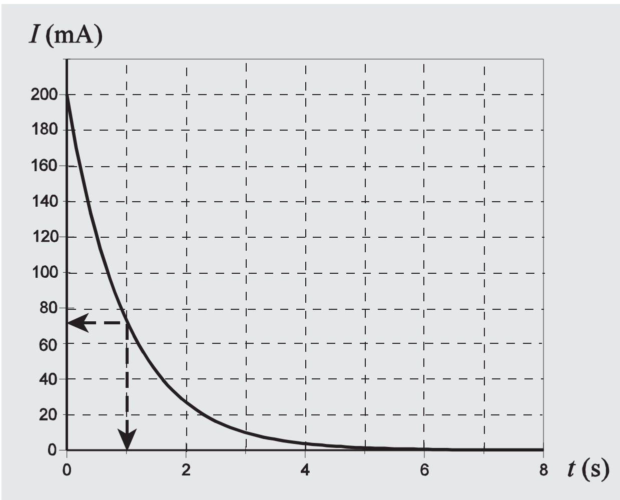
$$I = I_0.e^{-\frac{t}{RC}} = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

en la que $\tau = RC$ es la constante de tiempo.

Haciendo $t = \tau$ en la expresión anterior queda:

$$I = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0.e^{-\frac{\tau}{\tau}} = I_0.e^{-1} = 0{,}37\ I_0$$

En consecuencia, τ es el tiempo al cabo del cual la intensidad I se ha reducido hasta el 37% de su valor inicial I_0. Como, en este caso, $I_0 = 200$ mA, el 37% de I_0 son 74 mA. De la gráfica se deduce que la intensidad tarda 1 segundo en alcanzar este valor, por lo que:

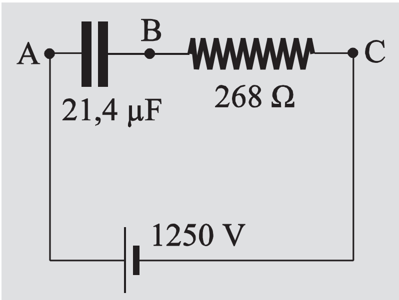


$$\boldsymbol{\tau = 1\ s}$$

16. **Una batería de acumuladores que mantiene una tensión entre terminales de 1250 V se conecta en serie a un condensador, inicialmente descargado, de 21,4 µF y a una resistencia de 268 Ω.**

a) Calcular la intensidad de corriente inicial.

b) ¿Cuál es la intensidad de la corriente cuando el condensador se ha cargado a las tres cuartas partes de su valor máximo?



a. ***Cálculo de la intensidad de corriente inicial.***

La variación de potencial a lo largo de una malla cerrada es nula:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q}{C} + IR - \varepsilon = 0$$

y como en el instante inicial el condensador está descargado ($Q = 0$) queda:

$$I_0\ R = \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1250}{268} = 4{,}66\ A$$

b. ***Cálculo de la intensidad de la corriente para Q = (3/4) Q_0 .***

En el proceso de carga de un condensador la variación de la intensidad con el tiempo tiene la forma:

$$I = I_0\ e^{-\frac{t}{RC}} = 4{,}66\ e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{. . . . . (1)}$$

en la que se conoce el valor de la intensidad inicial I_0 , calculado en el apartado anterior, pero no se conoce el valor que toma el factor $e^{-\frac{t}{RC}}$ cuando la carga del condensador es 3/4 del valor máximo Q_0 . Para su cálculo, recordemos que, en el proceso de carga, la variación de la carga con el tiempo viene dada por la expresión:

$$Q = Q_0\ (\ 1 - e^{-\frac{t}{RC}}\ ) \qquad \text{. . . . . (2)}$$

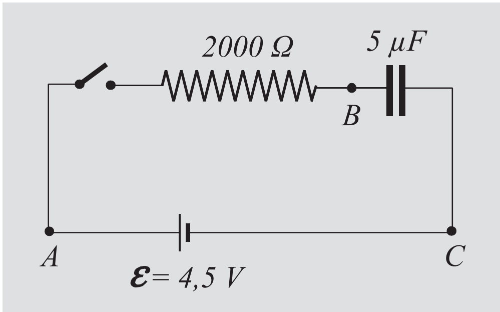
y como el problema requiere que: $$Q = \frac{3}{4}\ Q_0 \qquad \text{. . . . . (3)}$$

al igualar las expresiones (2) y (3) queda: $$e^{-\frac{t}{RC}} = 0{,}25$$

y sustituyendo este valor en la expresión (1) se obtiene el valor de la intensidad cuando la carga es 3/4 de la máxima:

$$I = 4{,}66\ .\ 0{,}25 = 1{,}17\ A$$

17. En el circuito de la figura, calcular al cabo de cuánto tiempo, después de cerrar el interruptor, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es de 2 V.



La ecuación del circuito es:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0 \quad \Rightarrow \quad I\,R + V_C - \varepsilon = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en la que, por ser la intensidad I variable con el tiempo, también lo va a ser la diferencia de potencial V_C entre los extremos del condensador.

De esta expresión se deduce el valor de la intensidad cuando la d.d.p. en el condensador sea de 2 V:

$$2000\,I + 2 - 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 1{,}25.10^{-3}\,A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La variación de la intensidad con el tiempo, en el proceso de carga de un condensador, viene dada por la expresión:

$$I = I_0.e^{-\frac{t}{RC}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

en la que I_0 es la intensidad inicial, cuyo valor se deduce de la ecuación del circuito (1):

para t = 0 es: $\quad I = I_0 \quad y \quad V_C = \dfrac{Q_0}{C} = 0$ (por ser nula la carga inicial)

quedando la expresión (1), para t = 0:

$$I_0\,R - \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

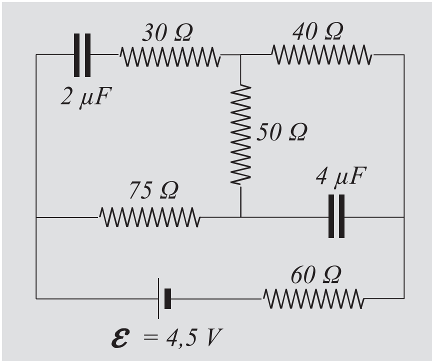
y llevando este valor a la (3):

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad 1{,}25.10^{-3} = \frac{4{,}5}{2000}\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad 0{,}55 = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\ln\,0{,}55 = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad t = -RC\,\ln\,0{,}55 = 2000\,.\,5.10^{-6}.\,\ln\,0{,}55 = 5{,}9.10^{-3}\,s$$

De esta forma se ha calculado el tiempo al cabo del cual la intensidad es de 1,25 mA, valor que se corresponde al momento en el que la diferencia de potencial en el condensador es de 2 V.

18. **En el circuito de la figura, una vez alcanzado el régimen estacionario, calcular:**
a) la intensidad en la resistencia de 60 Ω.
b) la potencia suministrada por el generador.
c) la diferencia de potencial entre las placas del condensador de 2 μF.
d) la carga que adquiere este condensador.



Planteamiento.

Por haberse alcanzado el régimen estacionario, no pasa corriente por las ramas en las que están situados los condensadores. En consecuencia, a efectos del cálculo de la intensidad, la red queda de la forma representada en la fig. a. De ella se deduce que todas las resistencias están en serie y, por lo tanto, la intensidad **I** que las recorre es la misma.

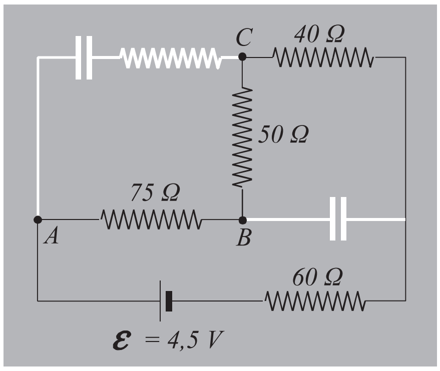


fig. a

Resolución.

Cálculo de la resistencia equivalente:

$$R = 75 + 50 + 40 + 60 = 225\ \Omega$$

a. ***Cálculo de la intensidad:***

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4,5}{225} = 0,02\ A$$

b. ***Cálculo de la potencia suministrada.***

$$P = \varepsilon\ I = 4,5\ (0,02) = 0,09\ W$$

c. ***Cálculo de la diferencia de potencial en el condensador de 2 μF.***

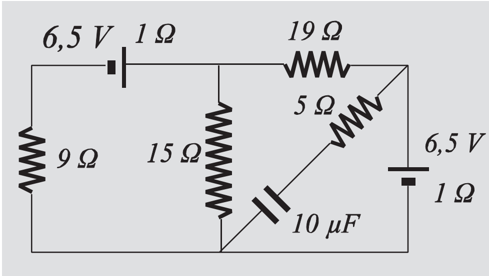
Por no pasar corriente por la resistencia de 30 Ω, la diferencia de potencial entre sus extremos es nula. En consecuencia, la d.d.p. entre las placas del condensador es la existente entre los puntos **A** y **C**:

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = 75\ I + 50\ I = 125\ I = 125\ (0,02) = 2,5\ V$$

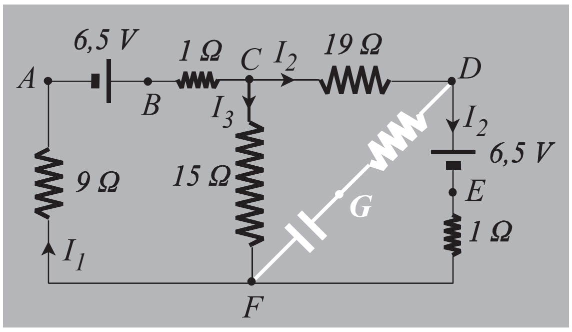
d. ***Cálculo de la carga adquirida por el condensador de 2 μF.***

$$Q = C\ V_{AC} = 2.10^{-6}.2,5 = 5.10^{-6}\ C = 5\ \mu C$$

19. El circuito de la figura está en régimen estacionario. Calcular:
a) la intensidad que pasa por cada una de las ramas.
b) la diferencia de potencial entre sus placas y la carga adquirida por el condensador.
c) la cantidad de calor desprendida en la resistencia de 15 Ω en 10 s.



a. Una vez alcanzado el régimen estacionario, por la rama **DF** en la que está situado el condensador no pasa corriente. Asignamos un sentido arbitrario a cada una de las intensidades y dibujamos la resistencia interna de las pilas (1Ω).



En la malla izquierda:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CF} + V_{FA} = 0$$

$$-6{,}5 + 1\ I_1 + 15\ I_3 + 9\ I_1 = 0$$

$$10\ I_1 + 15\ I_3 = 6{,}5$$

En la malla derecha:

$$V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} + V_{FC} = 0$$

$$19\ I_2 + 6{,}5 + 1\ I_2 - 15\ I_3 = 0$$

$$20\ I_2 - 15\ I_3 = -6{,}5$$

En el nudo **C**: $I_1 = I_2 + I_3$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a la solución:

$$I_1 = 0{,}2\ A \quad ; \quad I_2 = -0{,}1\ A \quad ; \quad I_3 = 0{,}3\ A$$

y en consecuencia, la intensidad I_2 tiene sentido contrario al asignado.

b. En la malla **CDGFC**:

$$V_{CD} + V_{DG} + V_{GF} + V_{FC} = 0 \quad \Rightarrow \quad 19\ I_2 + 0 + V_{GF} - 15\ I_3 = 0$$

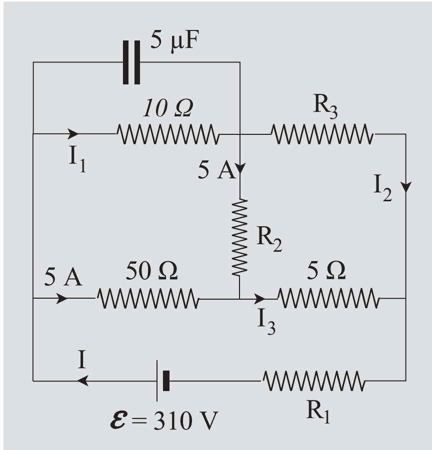
$$V_{GF} = 15\ I_3 - 19\ I_2 = 15\ (0{,}3) - 19\ (-0{,}1) = 6{,}4\ V$$

$$Q = C\ V_{GF} = (10.10^{-6})\ 6{,}4 = 6{,}4.10^{-5}\ C$$

c. El calor W desprendido en la resistencia de 15 Ω en 10 s es:

$$W = I_3^2\ R\ t = 0{,}3^2\ .\ 15\ .\ 10 = 13{,}5\ J$$

20. **Sabiendo que, una vez alcanzado el régimen estacionario, la carga del condensador del circuito de la figura es de 1 mC, calcular:**
a) las intensidades I, I_1, I_2 e I_3.
b) las resistencias R_1, R_2 y R_3.



Recordemos que, una vez alcanzado el régimen estacionario, la corriente contínua *no pasa* por un condensador por lo que el circuito queda, a efectos del cálculo de intensidades, como se indica en la figura a.

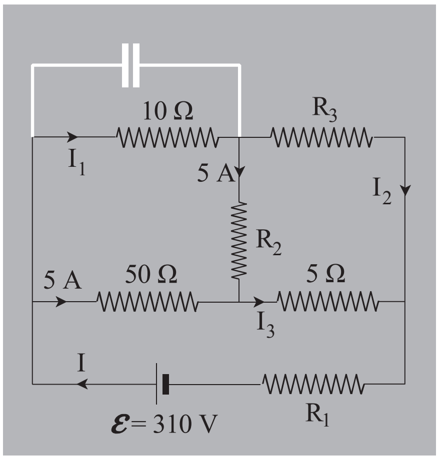


fig. a

a. ***Cálculo de las intensidades.***

El cálculo de I_1 requiere conocer la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia de 10 Ω que es la misma que entre las placas del condensador:

$$V_{10\ \Omega} = V_C = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}}{5.10^{-6}} = 200\ V$$

con lo que:

$$I_1 = \frac{V_C}{10} = \frac{200}{10} = 20\ A$$

$$I = I_1 + 5 = 20 + 5 = 25\ A$$

$$I_3 = 5 + 5 = 10\ A$$

$$I_1 = 5 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 - 5 = 20 - 5 = 15\ A$$

b. ***Cálculo de las resistencias.***

En la malla izquierda:

$$I_1\ 10 + 5\ R_2 - 5\ .\ 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{250 - I_1\ .\ 10}{5} = \frac{250 - 20\ .\ 10}{5} = 10\ \Omega$$

En la malla derecha:

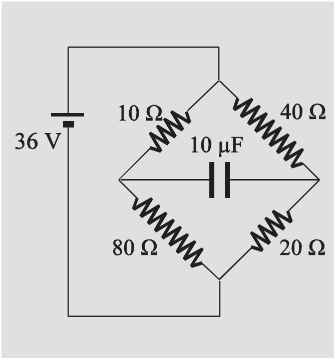
$$I_2\ R_3 - 5\ I_3 - 5\ R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \frac{5\ I_3 + 5\ R_2}{I_2} = \frac{5\ .\ 10 + 5\ .\ 10}{15} = 6{,}7\ \Omega$$

En la malla inferior:

$$I\ R_1 + 5\ .\ 50 + I_3\ .\ 5 = 310 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{310 - 250 - I_3\ .\ 5}{I} = \frac{60 - 10\ .\ 5}{25}$$

$$R_1 = \frac{60 - 50}{25} = 0{,}4\ \Omega$$

21. En el estado estacionario del circuito de la figura, calcular:
a) Las intensidades en cada una de las ramas.
b) La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.
c) Si la batería se desconecta, ¿cuánto tiempo tardará en descargarse el condensador hasta que la diferencia de potencial entre sus armaduras sea de 1 V?



a) Una vez alcanzado el estado estacionario, por el condensador no pasa corriente y el circuito queda como se indica en la fig. **a**. Hallando la resistencia equivalente de cada rama mediante la suma de las asociadas en serie, el circuito queda como se indica en la fig. **b**. Por último, se calcula la resistencia equivalente de todo el circuito (fig. **c**):

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{90} + \frac{1}{60} \qquad \Rightarrow \qquad R_E = 36\ \Omega$$

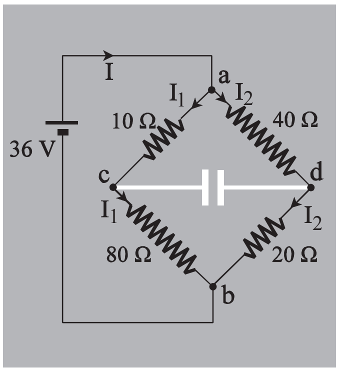


fig. a

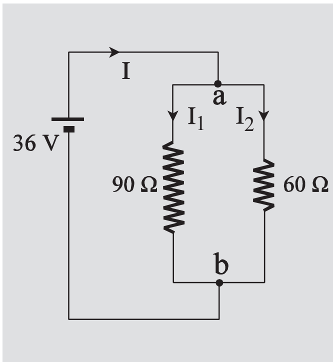


fig. b

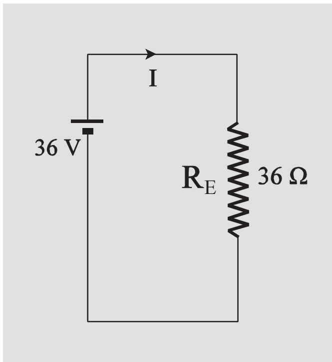


fig. c

Conocida la resistencia total, se calcula la intensidad **I**:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_E} = \frac{36}{36} = 1\ A$$

y la intensidad en cada rama (fig. **b**):

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{36}{90} = 0{,}4\ A \qquad ; \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{36}{60} = 0{,}6\ A$$

b) La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es la existente entre los puntos **c** y **d** (fig. **a**), siendo:

$$V_{cd} + V_{da} + V_{ac} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{cd} + (-\ I_2)\ 40 + I_1.10 = 0$$

$$V_{cd} = (0,6)\ 40 - (0,4)\ 10 = +\ 20\ V$$

resultado del que, por su signo positivo, se deduce que el punto **c** está a mayor potencial que el **d**.

c) La expresión: $$Q = Q_0.e^{-\ t/\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

permite calcular la carga $\boldsymbol{Q}$ al cabo de un cierto tiempo $\boldsymbol{t}$ en la descarga de un condensador, siendo $\boldsymbol{Q_0}$ la carga inicial y $\boldsymbol{\tau}$ la constante de tiempo. Como:

$$Q = CV \qquad \text{y} \qquad Q_0 = CV_0$$

la expresión (1) queda:

$$V = V_0.e^{-\ t/\tau} \quad \Rightarrow \quad 1 = 20.e^{-\ t/\tau} \quad \Rightarrow \quad t = \tau.\ln\frac{1}{20} = 3,0\ \tau \quad \ldots\ldots\ (2)$$

La constante de tiempo es $\boldsymbol{\tau = RC}$ siendo $\boldsymbol{R}$ la resistencia asociada al condensador. En la fig. **e** se han representado los pasos para el cálculo de esta resistencia teniendo en cuenta que, al desconectar la batería, el circuito queda como se indica en esa figura. En primer lugar se calcula la equivalente de las asociadas en serie en cada rama. A continuación se calcula la equivalente de la asociación en paralelo resultante:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{50} + \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad R = 33,3\ \Omega$$

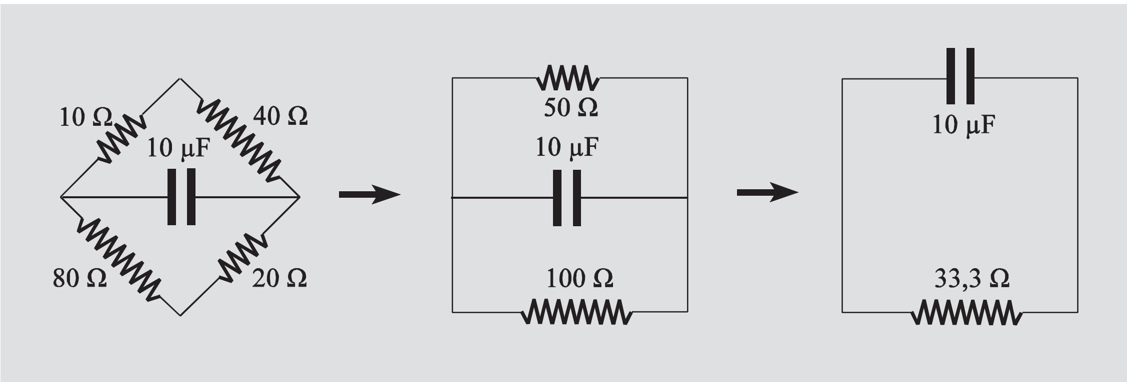


fig. e

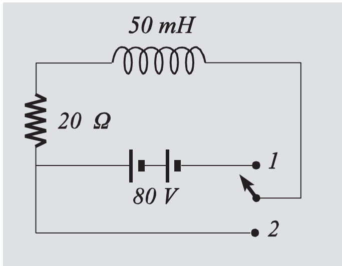
Conocido el valor de $\boldsymbol{R}$ la constante de tiempo queda:

$$\tau = RC = 33,3\ .\ 10\ .\ 10^{-\ 6} = 33,3\ .\ 10^{-\ 5}\ s$$

Por último, sustituyendo este valor de $\boldsymbol{\tau}$ en la expresión (2):

$$t = 3,0\ \tau = 3,0\ .\ 33,3\ .\ 10^{-\ 5} = 10^{-\ 3}\ s = 1\ ms$$

22. En el circuito de la figura se sitúa el interruptor en la posición 1 y la intensidad de la corriente alcanza su valor estacionario. A continuación se pasa a la posición 2. ¿Al cabo de cuánto tiempo la intensidad tendrá un valor igual al producto de 1/e por el valor estacionario de la intensidad?



Puesto que el enunciado del problema no hace referencia a la resistencia de la bobina, se ha de considerar que es nula. En estas condiciones, cuando se alcanza el régimen estacionario el circuito queda como se indica en la fig. **a**. En ese momento la intensidad, que llamaremos I_0, es:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{80}{20} = 4\ A$$

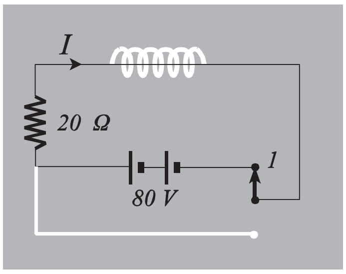


fig. a

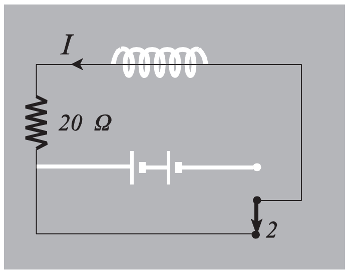


fig. b

Cuando el interruptor se sitúa en la posición **2** la bobina *devuelve* la energía que almacenó en el proceso anterior de manera que el circuito es recorrido ahora por una corriente de sentido contrario (fig. **b**), cuya intensidad decrece desde el valor inicial I_0 hasta anularse, obedeciendo su variación a la expresión:

$$I = I_0\ e^{-\frac{R}{L}t}$$

Como el valor de la intensidad requerido por el problema es:

$$I = \frac{1}{e} I_0 \quad \text{(siendo } e \text{ la base de los logaritmos naturales)}$$

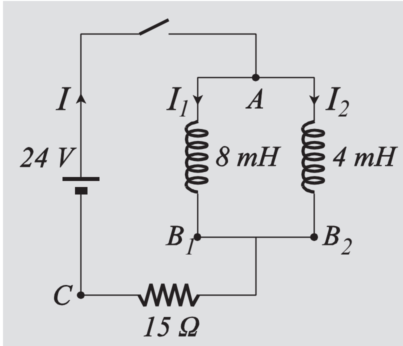
al igualar queda:

$$\frac{1}{e} I_0 = I_0\ e^{-\frac{R}{L}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\ln 1 - \ln e = -\frac{R}{L}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{R} = \frac{50.10^{-3}}{20} = 2{,}5.10^{-3}\ s$$

Este tiempo, $t = L/R$, recibe el nombre de constante de tiempo (τ).

23. **En el circuito de la figura, determinar: a) la variación de la corriente con el tiempo en cada inductor y en la resistencia, en el instante en que se cierre el interruptor, b) ¿Cuál es la corriente final?**



a. Al cerrar el interruptor se genera en la bobina una corriente autoinducida cuya fuerza electromotriz es proporcional a la rapidez con que varía la intensidad. Si la bobina es ideal (sin resistencia) esta f.e.m. es igual a la diferencia de potencial V_L entre sus extremos:

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt} = V_L$$

en la que L es el coeficiente de autoinducción que depende de la geometría de la bobina.

Aplicando la regla de Kirchhoff a la malla **AB₁CA**:

$$V_{AB_1} + V_{B_1C} + V_{CA} = 0$$

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + IR - \varepsilon = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 8.10^{-3}\frac{dI_1}{dt} + 15I - 24 = 0$$

y como en $t = 0$ es $I = 0$ queda:

$$\left[\frac{dI_1}{dt}\right]_{t=0} = 3000\ \frac{A}{s}$$

Aplicando Kirchhoff a la malla **AB₂CA**:

$$V_{AB_2} + V_{B_2C} + V_{CA} = 0$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + IR - \varepsilon = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4.10^{-3}\frac{dI_2}{dt} + 15I - 24 = 0$$

y como en $t = 0$ es $I = 0$ queda:

$$\left[\frac{dI_2}{dt}\right]_{t=0} = 6000\ \frac{A}{s}$$

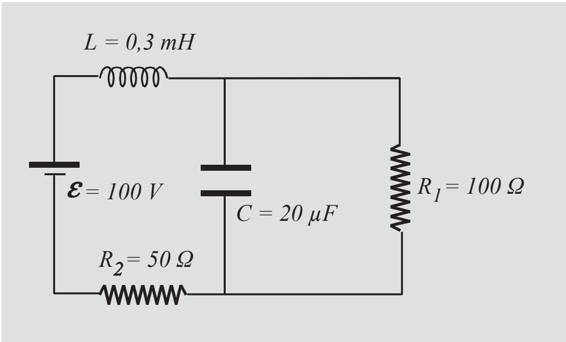
Por último, como la intensidad I que pasa por la resistencia es $I = I_1 + I_2$, su variación con el tiempo, en el instante inicial ($t = 0$), es:

$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = 3000 + 6000 = 9000\ \frac{A}{s}$$

b. Por tratarse de bobinas ideales, cuando se alcanza el régimen estacionario se comportan como un simple conductor sin resistencia, por lo que la intensidad final es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{24}{15} = 1{,}6\ A$$

24. **En el circuito de la figura, una vez alcanzado el régimen estacionario, calcular:**
a) la diferencia de potencial entre los extremos de R_2 .
b) la carga que adquiere el condensador.



Una vez alcanzado el régimen estacionario por la rama en la que está situado el condensador no pasa corriente, mientras que, según los datos del enunciado, la bobina no ofrece resistencia alguna con lo que el circuito queda como se indica en la fig. a.

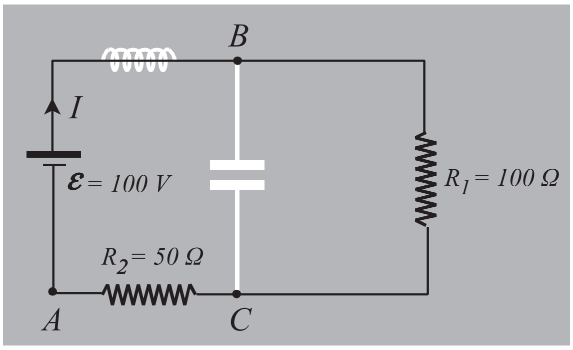


fig. a.

a. Para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de R_2 es preciso conocer la intensidad que pasa por esa resistencia:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{100}{100 + 50} = 0{,}\widehat{66}\ A$$

$$V_{CA} = I\, R_2 = 0{,}\widehat{66}\ .\ 50 = 33{,}\widehat{3}\ V$$

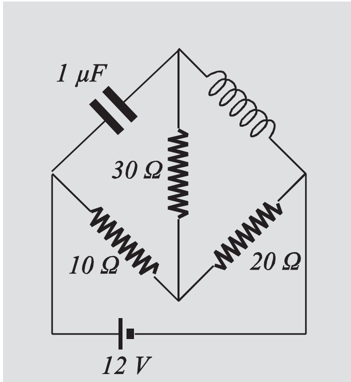
b. Para calcular la carga del condensador es preciso calcular la diferencia de potencial V_{BC} entre los extremos del condensador que es también la existente entre los extremos de R_1 por lo que:

$$V_{BC} = I\, R_1 = 0{,}\widehat{66}\ .\ 100 = 66{,}\widehat{6}\ V$$

quedando: $$Q = C\, V_{BC} = 20.10^{-6}.\ 66{,}\widehat{6} = 1{,}3\widehat{3}.10^{-3}\ C$$

25. **En el circuito de la figura, la bobina tiene una resistencia de 5 Ω. Una vez alcanzado el estado estacionario, calcular:**
a) la potencia suministrada por la pila.
b) la carga del condensador.

a. ***Cálculo de la potencia suministrada por la pila.***



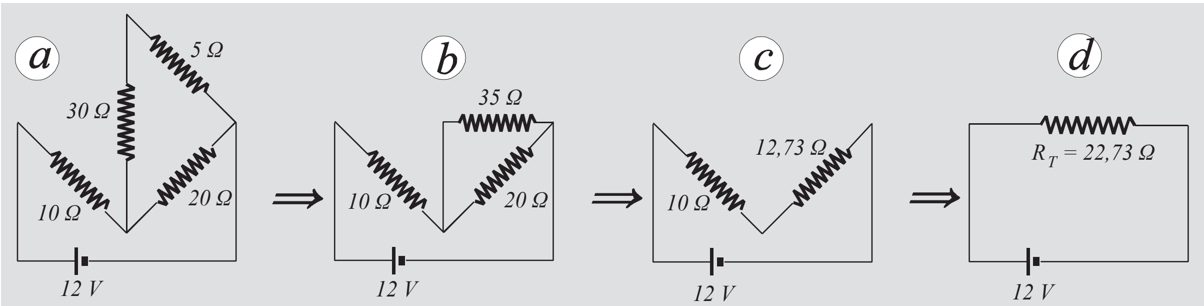
Una vez alcanzado el régimen estacionario no pasa corriente por el condensador y la bobina actúa como una resistencia de 5 Ω, quedando el circuito como se indica en la fig ***a***.

Para calcular la potencia suministrada por la pila ($P = \varepsilon I$) es preciso conocer la intensidad y para calcular ésta hay que determinar la resistencia equivalente que realizamos *paso a paso*. Las resistencias de 30 y 5 Ω están en serie y su equivalente es la suma de ambas (35 Ω). Ésta y la de 20 Ω están en paralelo (fig. ***b***) y su equivalente es:

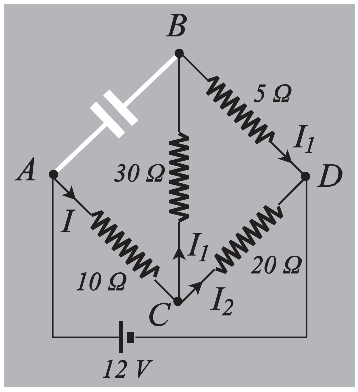
$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{35} + \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad R_E = 12{,}73\ \Omega$$

A su vez, esta resistencia de 12,73 Ω está asociada en serie con la de 10 Ω (fig. **c**) dando lugar a una equivalente total R_T de 22,73 Ω con lo que la intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T} = \frac{12}{22{,}73} = 0{,}53\ A$$ y la potencia: $$P = I\ \varepsilon = (0{,}53)\ 12 = 6{,}34\ W$$



b. ***Cálculo de la carga del condensador.***



Como $Q = C.V_{AB}$, es preciso conocer la diferencia de potencial entre los puntos **A** y **B**, extremos del condensador. Esta d.d.p. es:

$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = I.10 + I_1.30 = 0{,}53.10 + I_1.30$$
$$V_{AB} = 5{,}3 + I_1.30$$

Calculamos I_1: $V_{CB} + V_{BD} + V_{DC} = 0$

$$)\ I_1 + 5\ I_1 - 20\ I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 35\ I_1 = 20\ \ldots\ (1)$$

y como: $$I_1 + I_2 = I = 0{,}53\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

resolviendo el sistema formado por (1) y (2) queda: $I_1 = 0{,}19\ A$

y la carga del condensador:

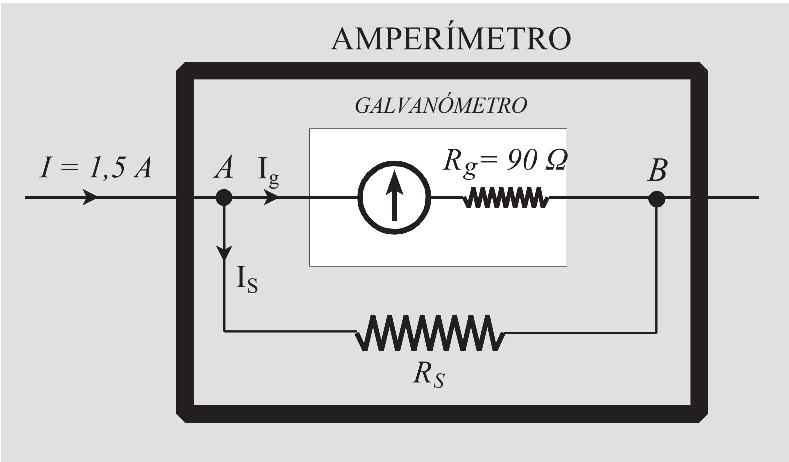
$$Q = C.V_{AB} = (10^{-6})\ (5{,}3 + I_1.30) = (10^{-6})\ (5{,}3 + 0{,}19.30) = 11.10^{-6}\ C = 11\ \mu C$$

26. **Un galvanómetro de resistencia 90 Ω da una desviación a fondo de escala cuando la corriente es de 1,5 mA. Se utiliza para construir un amperímetro cuya lectura a fondo de escala sea de 1,5 A.**

a) ¿Qué resistencia deberá colocarse en paralelo con el galvanómetro?

b) Si la resistencia se fabrica con un trozo de alambre de diámetro 2,6 mm y resistividad $1{,}4.10^{-6}$ Ω.m, ¿cuál deberá ser su longitud?

a. Como el galvanómetro se desvía a fondo de escala cuando la intensidad I_g es de 1,5 mA, si el amperímetro recibe una intensidad I de 1,5 A la diferencia entre ambas ha de derivarse hacia una resistencia R_S.



La diferencia de potencial entre los puntos **A** y **B** es:

$$V_{AB} = I_g\ R_g = I_S\ R_S \quad \Rightarrow \quad R_S = \frac{I_g\ R_g}{I_S} = \frac{1{,}5\ .\ 10^{-3}.\ 90}{I_S} \quad \text{.........} \ (1)$$

y siendo, como queda dicho $I_S = I - I_g = 1{,}5 - (1{,}5\ .\ 10^{-3}) = 1{,}4985\ A$, al sustituir en (1) queda:

$$\boldsymbol{R_S = 0{,}090\ \Omega}$$

De esta manera, cuando el dispositivo (amperímetro) formado por el conjunto galvanómetro-R_S reciba una intensidad de 1,5 A, la aguja del galvanómetro se desviará a fondo de escala.

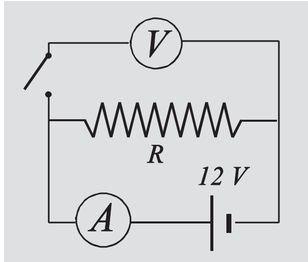
b. La resistencia de un conductor, en función de su naturaleza y su geometría, viene dada por la expresión:

$$R_S = \rho\ \frac{l}{S} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{R_S}{\rho}\ S$$

en la que: ρ = resistividad = $1{,}4.10^{-6}$ Ω.m
l = longitud
S = sección = $\pi d^2/4$

quedando al sustituir: $$l = \frac{0{,}09}{1{,}4.10^{-6}}\ \frac{\pi.d^2}{4} = 1{,}61.10^4.\ \pi.\ 0{,}0026^2 = 0{,}34\ m$$

27. En el circuito de la figura, el amperímetro marca 24 mA cuando el interruptor está abierto y 30 mA cuando está cerrado. Calcular la resistencia interna del voltímetro.



Cuando el interruptor está abierto el circuito queda como se indica en la fig. **a**. A partir de la intensidad I_A que circula calculamos el valor de la resistencia R :

$$R = \frac{\varepsilon}{I_A} = \frac{12}{0{,}024} = 500\ \Omega$$

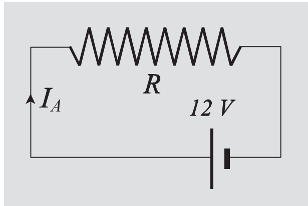


fig. a Interruptor abierto

Cuando el interruptor está cerrado el circuito queda como se indica en la fig. **b**. A partir de la intensidad I_C que circula calculamos el valor de la resistencia equivalente de R y de la resistencia del voltímetro R_V:

$$R_E = \frac{\varepsilon}{I_C} = \frac{12}{0{,}03} = 400\ \Omega$$

y la resistencia del voltímetro es:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} = \frac{1}{400} - \frac{1}{500}$$

$$R_E = 2000\ \Omega$$

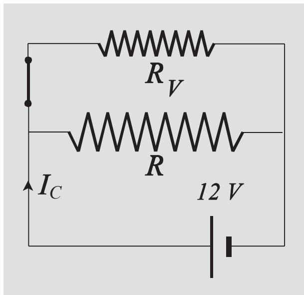
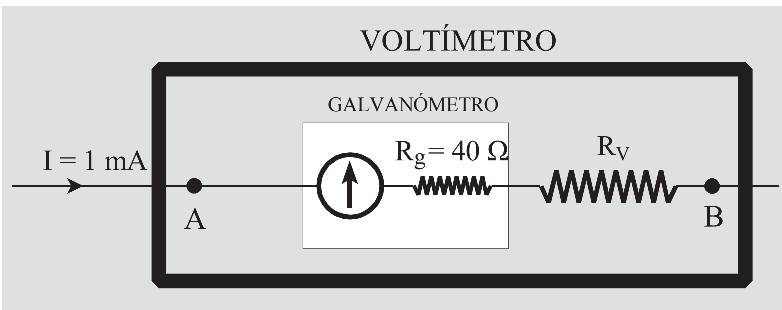


fig. b Interruptor cerrado

28. Un galvanómetro tiene una resistencia de 40 Ω. Una corriente de 1 mA produce una desviación de 50 divisiones en su escala. ¿Qué resistencia debe asociarse a este galvanómetro para convertirlo en un voltímetro con una sensibilidad de una división por voltio?

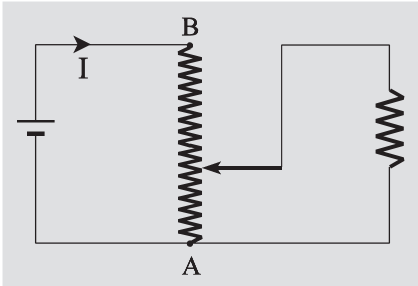
Como la sensibilidad ha de ser de una división por voltio, para producir una desviación de 50 divisiones es necesario que la diferencia de potencial entre **A** y **B** sea de 50 V cuando la intensidad sea de 1 mA:



$$I = \frac{V_{AB}}{R_g + R_V} \quad \Rightarrow \quad 0{,}001 = \frac{50}{40 + R_V} \quad \Rightarrow \quad R_V = 49960\ \Omega$$

De esta manera, cuando por el dispositivo formado por el conjunto galvanómetro-R_V pase una intensidad de 1 mA, la aguja del galvanómetro se desviará 50 divisiones, acusando una diferencia de potencial de 50 V entre los puntos **A** y **B**.

29. **En el circuito de la figura, ¿cómo variará la intensidad *I* al desplazar el cursor desde el punto** A **al** B**?**



Podemos considerar al circuito constituído por una resistencia variable R_1 asociada en serie a la asociación en paralelo de la resistencia variable R_2 con R_3 (fig. a), siendo:

$$R_1 + R_2 = R$$

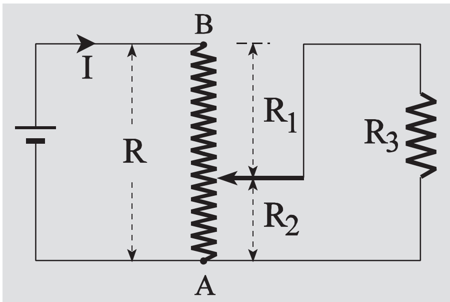


fig. a

La resistencia equivalente de R_2 y R_3 (asociadas en paralelo) es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2\, R_3} \qquad \Rightarrow \qquad R_{eq} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}$$

y la resistencia equivalente de toda la red:

$$R_T = R_1 + R_{eq} = R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3} = R_1 + \frac{(R - R_1)\, R_3}{R - R_1 + R_3}$$

Cuando el cursor está en el punto **A** es $R_1 = R$ y la resistencia total:

$$R_{T,A} = R + \frac{(R - R)\, R_3}{R - R + R_3} = R$$

y cuando el cursor está en el punto **B** es $R_1 = 0$ y la resistencia total:

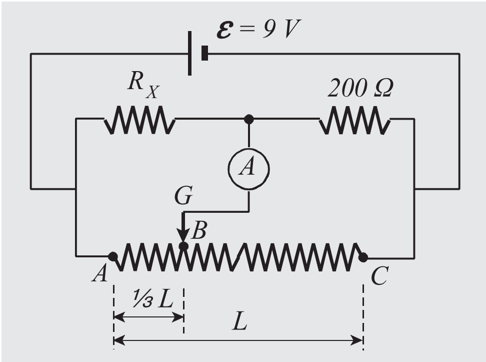
$$R_{T,B} = \frac{R\, R_3}{R + R_3} = \frac{R}{\dfrac{R}{R_3} + 1} < R$$

y como $R_{T,B} < R_{T,A}$ ha de ser: $\qquad I_B > I_A$

En consecuencia, al desplazar el cursor desde el punto **A** al punto **B** la intensidad ***I*** **aumenta**.

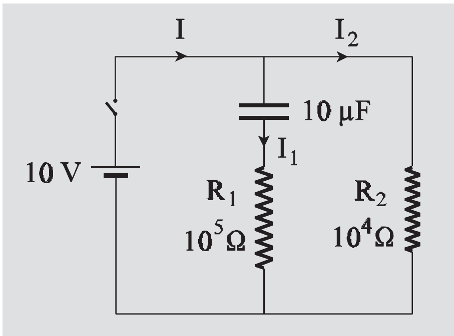
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El amperímetro **A** del circuito de la figura no acusa paso de corriente cuando la guía **G** está en la posición **B**. Sabiendo que la longitud del hilo entre los puntos **A** y **B** es 1/3 de la longitud total **AC**, calcular:
a) la resistencia R_X.
b) la intensidad que recorre esta resistencia R_X.



Solución: a)100 Ω
b) 30 mA.

2. Al cerrar el interruptor del circuito de la figura, calcular I , I_1 , I_2 y la d.d.p. en el condensador:
a) para t = 0,1 s.
b) para t = 0,5 s.
c) al cabo de mucho tiempo (régimen estacionario).



Solución:

a) I = 1,09 mA ; I_1 = 0,09 mA ; I_2 = 1,00 mA ; V_C = 0,95 V.
b) I = 1,06 mA ; I_1 = 0,06 mA ; I_2 = 1,00 mA ; V_C = 3,93 V.
c) I = 1,00 mA ; I_1 = 0 mA ; I_2 = 1,00 mA ; V_C = 10,00 V.

3. Se dispone de dos bombillas iguales.
a) ¿cuándo lucirán más: asociadas en serie o en paralelo?
b) si, asociadas en paralelo, se afloja una de ellas hasta que no luzca, lucirá más que antes la otra?.

S*olución*: a) en paralelo.
b) lucirá lo mismo.

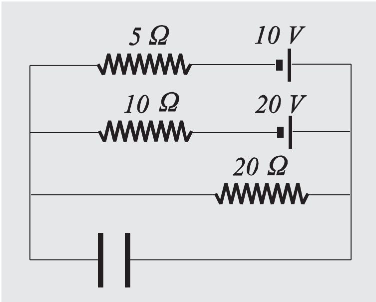
4. Se tiene un voltímetro de resistencia interna 0,5 Ω que puede medir 50 mV. Hallar las resistencias necesarias para convertirlo: **a)** en un amperímetro que pueda medir hasta 5 A, **b)** en un voltímetro que pueda medir hasta 50 V.

Solución: a) R = 0,01 Ω.
b) R = 499,5 Ω.

5. Un condensador de 50 µF, inicialmente descargado, se conecta en serie con una resistencia de 300 Ω y una batería de 12 V. calcular:
a) La carga final $\mathbf{q_f}$ del condensador.
b) El tiempo que tarda el condensador en cargarse hasta $\mathbf{q_f}/2$

Solución: a) q_f = 600 µC
b) t = 10,4 ms

6. Determinar la carga que adquiere el condensador del circuito de la figura si su capacidad es de 7 µF.

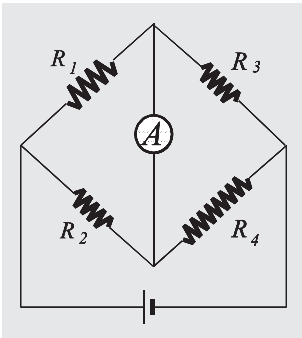


Solución: Q = 8.10^{-5} C.

7. Un galvanómetro tiene una resistencia de 140 Ω. Se necesita 1,2 mA para dar una desviación a fondo de escala.
a) ¿Qué resistencia deberá colocarse en paralelo con el galvanómetro para tener un amperímetro que señale 50 mA a fondo de escala?
b) ¿Qué resistencia deberá colocarse en serie con el galvanómetro para tener un voltímetro que señale 5 V a fondo de escala?

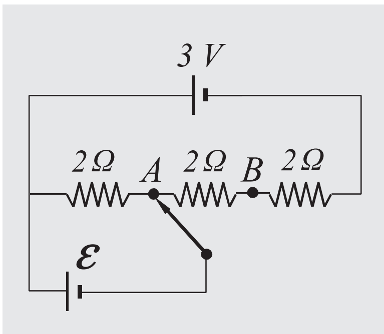
Solución: a) 3,44 Ω.
b) $4{,}03.10^3$ Ω.

8. Deducir la relación que debe existir entre las cuatro resistencias de la figura para que no pase corriente por el amperímetro **A.**



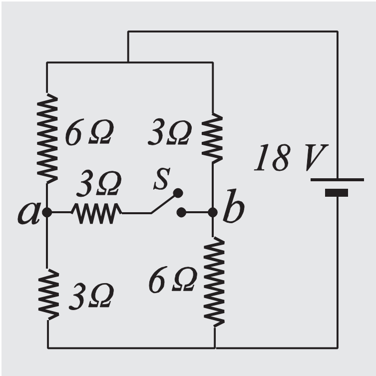
Solución: $R_1 / R_3 = R_2 / R_4$

9. Suponiendo que las dos pilas del circuito son ideales (sin resistencia interna):
a) Calcular ε si al conectar la pila en el punto **A** no circula por ella ninguna corriente.
b) Calcular la corriente que circula por ella si se desconecta del punto **A** y se conecta al punto **B**.
c) Obtener la potencia que disipa cada una de las tres resistencias y la que suministran las dos pilas.



Solución: a) ε = 1 V.
b) I = 0,75 A.
c) P_{1V} = 0,75 W (absorbe) ; P_{3V} = 3 W (suministra)
$P_1 = P_2$ = 0,125 W ; P_3 = 2 W

10. En el circuito de la figura la resistencia interna de la pila es despreciable. Calcular:
a) La diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b** cuando el interruptor **S** está abierto.
b) La corriente a través del interruptor cuando está cerrado.
c) La potencia suministrada por la pila en ambos casos.

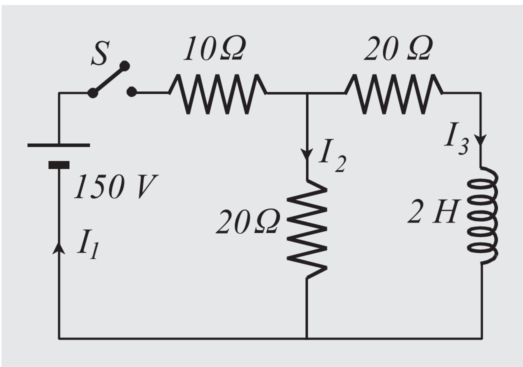


Solución: a) V_{ab} = - 6 V
b) I = 0,86 A;
c) P_a = 72 W; P_b = 77,1 W

11. Un condensador se carga hasta que adquiere una carga $\mathbf{Q}_0$ y a continuación se descarga.
a) ¿Qué forma tiene la ecuación **Q = f(t)** en la descarga?.
b) Calcular la pendiente de esta función para **t = 0** y escribir la ecuación de la recta tangente a la curva **Q = f(t)** para **t = 0** .
c) ¿En qué punto corta esta recta al eje de tiempos?
d) ¿Cuál es la carga del condensador al cabo de este tiempo?

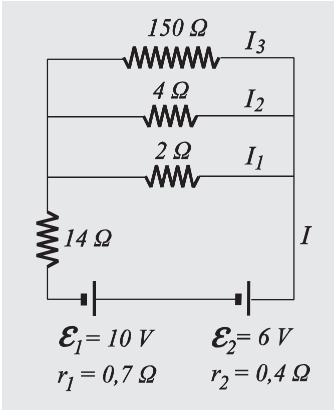
Solución: a) $Q = Q_0 .e^{-t/\tau}$
b) $- Q_0 /\tau$; $Q = Q_0 - Q_0 .t/\tau$
c) $t = \tau$
d) $Q = 0{,}37.Q_0$

12. Determinar en el circuito de la figura las corrientes I_1, I_2 e I_3, a) inmediatamente después de cerrar el interruptor **S**, y b) un tiempo largo después de haberlo cerrado. Después de cerrado el interruptor un tiempo largo, se abre de nuevo. Determinar los valores de las tres corrientes, c) inmediatamente después de la apertura, y d) un tiempo largo después de abrir el interruptor.



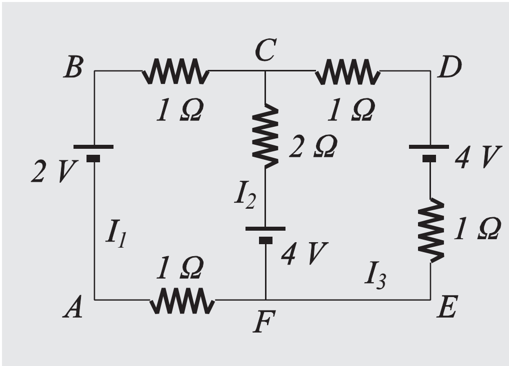
Solución: a) $I_1 = I_2 = 5$ A, $I_3 = 0$.
b) $I_1 = 7{,}5$ A, $I_2 = I_3 = 3{,}8$ A.
c) $I_1 = 0$, $I_3 = -I_2 = 3{,}8$ A.
d) $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

13. En el circuito de la figura, hallar:
a) la intensidad que pasa a través de las pilas.
b) la diferencia de potencial entre los extremos de cada pila.
c) la intensidad en cada una de las resistencias (**I_1**, **I_2** e **I_3**).



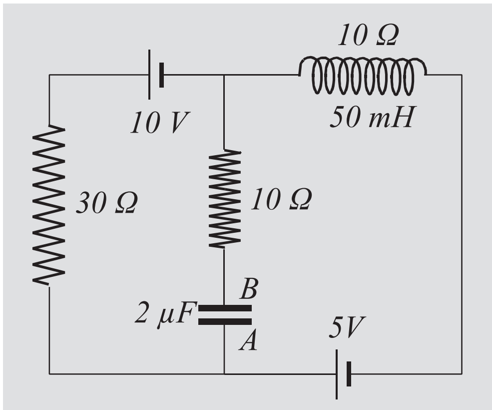
Solución: a) I = 0,974 A
b) V_1 = 9,32 V ; V_2 = 5,61 V
c) I_1 = 0,64 A ; I_2 = 0,32 A ; I_3 = 8,59 mA.

14. En el circuito de la figura hallar:
a) la intensidad que circula en cada rama.
b) la diferencia de potencial entre **C** y **F**.



Solución: a) I_1 = 2/3 A (B ⇒ A)
I_2 = 1/3 A (F ⇒ C)
I_3 = 1/3 A (E ⇒ D)
b) 10/3 V.

15. En el circuito de la figura, una vez alcanzado el régimen estacionario, calcular:
a) la intensidad en la resistencia de 30 Ω.
b) la carga del condensador indicando cuál de sus placas (A o B) está a mayor potencial.



Solución: a) 125 mA.
b) 12,5 μC.

CORRIENTE ALTERNA

1. **a) Una corriente continua *¿pasa* a través de un condensador? ¿Y a través de una bobina?**
b) Una corriente alterna *¿pasa* a través de un condensador? ¿Y a través de una bobina?

La intensidad a través de un condensador es:

$$I = \frac{V_C}{X_C} = 2\,\pi\,f\,C\,V_C$$

en la que: V_C = diferencia de potencial entre placas del condensador.
X_C = reactancia capacitiva.
f = frecuencia de la corriente.
C = capacidad del condensador.

De esta expresión se deduce que cuanto mayor sea la frecuencia de la corriente mayor será la intensidad de la corriente a través del condensador. Como el período *T* de una corriente continua es infinito (por no cambiar de sentido) su frecuencia (f = 1/T) es nula. En consecuencia, una corriente continua *no pasa* por un condensador y una corriente alterna lo hará tanto *más fácilmente* cuanto mayor sea su frecuencia.

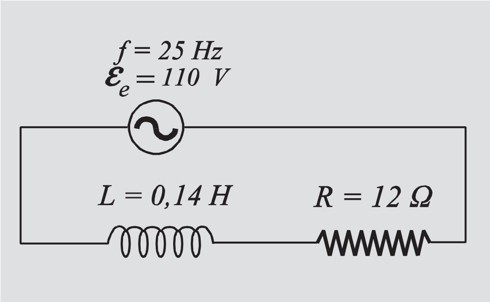
La intensidad a través de una bobina es:

$$I = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_L}{2\,\pi\,f\,L}$$

en la que: V_L = diferencia de potencial entre los extremos de la bobina.
X_L = reactancia inductiva.
f = frecuencia de la corriente.
L = coeficiente de autoindución de la bobina.

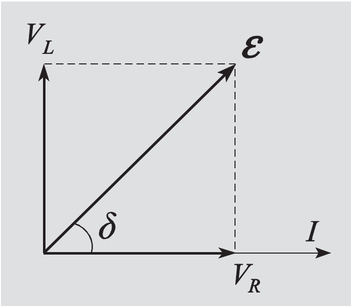
De esta expresión se deduce que cuanto mayor sea la frecuencia de la corriente menor será la intensidad de la corriente a través de la bobina. Como la frecuencia de una corriente continua es nula, ésta *pasa* sin dificultad alguna por una bobina (ideal), mientras que una corriente alterna lo hará tanto *más fácilmente* cuanto menor sea su frecuencia.

2. Una bobina de coeficiente L = 0,14 H y resistencia 12 Ω se conecta a un generador de 110 V eficaces y 25 Hz. Calcular:
a) El factor de potencia.
b) La pérdida de potencia en la bobina.



a. ***Cálculo del factor de potencia.***

El factor de potencia es el coseno del desfase δ:



$$\cos\ \delta = \frac{V_R}{\varepsilon} = \frac{I\ R}{I\ Z} = \frac{R}{Z} = \frac{12}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$\cos\ \delta = \frac{12}{\sqrt{12^2 + (L\omega)^2}} = \frac{12}{\sqrt{144 + (0{,}14.2.\pi.25)^2}}$$

$$\cos\delta = 0{,}48 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 61{,}4^{o}$$

b. ***Cálculo de la pérdida de potencia en la bobina.***

Una bobina ideal, sin resistencia óhmica, no disipa energía. La potencia disipada por una bobina con una cierta resistencia óhmica es debida exclusivamente a su propia resistencia **R** y según la ley de *Joule* es:

$$P = I^2\ R = I^2\ 12$$

por lo que es preciso calcular la intensidad.

$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{110}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{110}{\sqrt{12^2 + (L\omega)^2}} = \frac{110}{\sqrt{144 + (0{,}14.2.\pi.25)^2}} = 4{,}4\ A$$

quedando la potencia: $$P = 4{,}4^2.12 = 232{,}3\ W$$

Otra forma de resolver el problema.

La energía disipada en el circuito (en este caso debida exclusivamente a la resistencia interna de la bobina), ha de ser igual a la suministrada por el generador:

$$P_{disipada\ en\ bobina} = P_{suministrada\ por\ generador} = \varepsilon\ I\ \cos\delta = 110\ .\ 4{,}4\ .\ 0{,}48 = 232{,}3\ W$$

3. Se conecta una bobina a un generador de corriente alterna de fuerza electromotriz eficaz 100 V y frecuencia 60 Hz. A esta frecuencia la bobina tiene una impedancia de 10 Ω y una reactancia de 8 Ω. Calcular:

a) El valor de la corriente y su desfase respecto a la fuerza electromotriz.

b) La capacidad del condensador que habría que añadir en serie para que estuvieran en fase la corriente y la fuerza electromotriz.

c) El voltaje medido en el condensador en este caso.

Recordemos que una bobina no ideal puede considerarse como una autoinducción más una resistencia en serie (fig. 1).

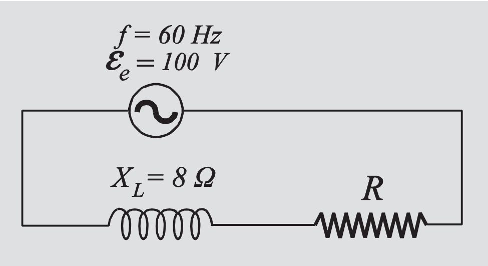


fig. 1

a.1. ***Cálculo de la intensidad***.

$$I = \frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{100}{10} = 10\ A$$

a.2. ***Cálculo del desfase.***

En la fig. 2: $$tg\ \delta = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I\ X_L}{I\ R} = \frac{X_L}{R}$$

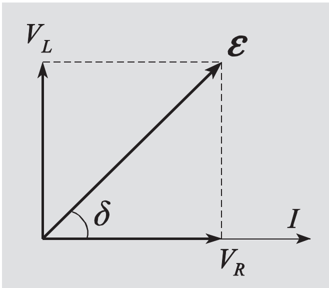


fig. 2

en la que $\mathbf{X_L} = 8\ \Omega$ pero se desconoce el valor de la resistencia **R** de la bobina, que pasamos a calcular:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\ \Omega$$

quedando el desfase:

$$tg\ \delta = \frac{X_L}{R} = \frac{8}{6} = 1{,}33 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 53{,}13^o$$

estando la f.e.m. **ε** adelantada respecto de la intensidad.

b. ***Cálculo de la capacidad del condensador.***

Si δ = 0 el circuito está en resonancia y, en estas condiciones, es $X_L = X_C$ por lo que:

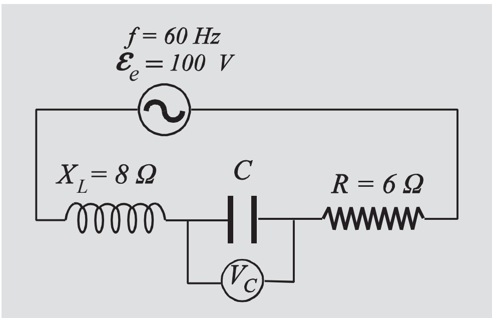


fig. 3

$$X_C = X_L = 8 = \frac{1}{C\omega}$$

$$C = \frac{1}{8.2\pi f} = \frac{1}{16.\pi.60} = 3{,}32.10^{-4}\ F = 332\ \mu F$$

c. ***Cálculo de la d.d.p. en el condensador***.

Por estar el circuito en resonancia, la impedancia total es ahora $Z_2 = R = 6\ \Omega$ y la d.d.p. en el condensador:

$$V_C = I_2\ X_C = I_2\ X_L = 8\ I_2 = 8\ \frac{\varepsilon_e}{Z_2} = 8\ \frac{100}{6} = 133{,}3\ V$$

4. La impedancia en un circuito serie RCL es de 10 Ω cuando la frecuencia es 80 Hz y únicamente de 8 Ω en condiciones de resonancia, siendo la frecuencia, en esas condiciones, 60 Hz. calcular los valores de R, C y L.

En resonancia las reactancias inductiva y capacitiva son iguales ($X_L = X_C$) y por ello la impedancia del circuito es igual a la resistencia óhmica:

$$Z_0 = R = 8\ \Omega$$

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{(2.\pi.60)^2} = 7{,}04.10^{-6}$$

$$Z_1 = 10 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{8^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2}$$

$$100 = 64 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad LC\omega_1^2 - 6C\omega_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7{,}04.10^{-6}\omega_1^2 - 6C\omega_1 - 1 = 0$$

$$7{,}04.10^{-6}\ (2.\pi.80)^2 - 6C\ (2.\pi.80) - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 2{,}58.10^{-4}\ F = 258\ \mu F$$

$$L = \frac{7{,}04.10^{-6}}{C} = \frac{7{,}04.10^{-6}}{2{,}58.10^{-4}} = 0{,}027\ H = 27\ mH$$

5. Un circuito RCL serie consta de un generador de fuerza electromotriz eficaz 200 V y frecuencia 60 Hz, de una resistencia de 44 Ω , de un condensador de reactancia 30 Ω y de una bobina de reactancia 90 Ω y resistencia 36 Ω . Determinar:
a) La intensidad de la corriente.
b) la d.d.p. en cada elemento (resistencia, condensador y bobina).
c) la potencia suministrada por el generador.
d) La potencia disipada en la bobina.

a. ***Cálculo de la intensidad de la corriente.***

$$Z = \sqrt{(R + R_L)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(44 + 36)^2 + (90 - 30)^2} = 100\ \Omega$$

$$I_e = \frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{200}{100} = 2\ A$$

b. ***Cálculo de la d.d.p. en cada elemento.***

$$V_R = I\ R = 2\ .\ 44 = 88\ V \qquad ; \qquad V_C = I\ X_C = 2\ .\ 30 = 60\ V$$

$$V_L = I\ Z_L = 2\ \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = 2\ \sqrt{36^2 + 90^2} = 193{,}9\ V$$

c. ***Cálculo de la potencia suministrada por el generador.***

$$P = I_e\varepsilon_e \cos\delta = 2\ .\ 200\ .\ \frac{R + R_L}{Z} = 400\ \frac{44 + 36}{100} = 320\ W$$

d. ***Cálculo de la potencia disipada en la bobina.*** $P = I_e^2\ R_L = 2^2\ .\ 36 = 144\ W$

6. **Un resistor, una bobina no ideal y un condensador se disponen en serie con un generador de 220 V eficaces y 50 Hz. Se mide la intensidad de la corriente y el voltaje en los tres elementos resultando (valores eficaces):**

$I = 2{,}0$ A ; $V_R = 160$ V ; $V_B = 50$ V ; $V_C = 150$ V

a) Calcular la resistencia del resistor y la capacidad del condensador.
b) Calcular el coeficiente de autoinducción y la resistencia de la bobina.
c) Dibujar el diagrama de fasores del circuito y calcular el desfase entre la intensidad y el voltaje del generador.
d) Calcular la potencia disipada en el circuito.

a.1. ***Cálculo de la resistencia del resistor*:** $R = \dfrac{V_R}{I} = \dfrac{160}{2} = 80\ \Omega$

a.2. ***Cálculo de la capacidad del condensador.***

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{150}{2} = 75\ \Omega = \frac{1}{C\ \omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{75\ \omega} = \frac{1}{75\ (2.\pi.50)} = 4{,}24.10^{-5}\ F$$

b. ***Cálculo del coeficiente de autoinducción y la resistencia de la bobina.***

La d.d.p. en la bobina (incluída su resistencia $\mathbf{R}_B$) es:

$$V_B = I\ Z_B = I\sqrt{R_B^2 + X_L^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{R_B^2 + X_L^2} = \frac{V_B}{I} = \frac{50}{2} = 25$$

$$R_B^2 + X_L^2 = 625 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (1)$$

Por otra parte, la impedancia total del circuito es:

$$Z = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{220}{2} = 110\ \Omega = \sqrt{(R + R_B)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(80 + R_B)^2 + (X_L - 75)^2}$$

$$12100 = (80 + R_B)^2 + (X_L - 75)^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (2)$$

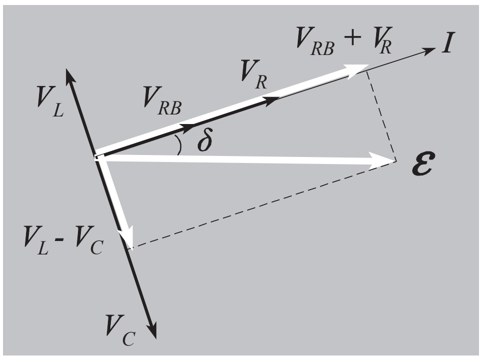
y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se llega a la solución:

$$R_B = 15{,}18\ \Omega \qquad y \qquad X_L = 19{,}86\ \Omega = L\omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{19{,}86}{2.\pi.50} = 0{,}063\ H$$

c. ***Diagrama de fasores y cálculo del desfase.***

$$\cos\ \delta = \frac{V_R + V_{RB}}{\varepsilon} = \frac{IR + IR_B}{I\ Z} = \frac{R + R_B}{Z}$$

$$\cos\ \delta = \frac{80 + 15{,}18}{110} = 0{,}86 \quad \Rightarrow \quad \delta = 30{,}1^{o}$$

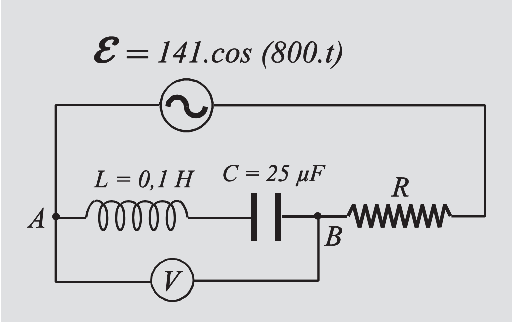


d. ***Cálculo de la potencia disipada en el circuito.***

Como la potencia disipada es igual a la suministrada por el generador:

$$P = \varepsilon\ I\ \cos\ \delta = 220\ .\ 2\ .\ 0{,}86 = 378{,}4\ W$$

7. El voltímetro de la figura señala 60 V. Calcular:
a) la intensidad que circula por el circuito.
b) el valor de la resistencia R.
c) el desfase y la potencia media que suministra el generador.



La f.e.m. instantánea **ε** del generador viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

y de su comparación con el dato que ofrece la figura se deduce que: $\varepsilon_0 = 141\ V$ y $\omega = 800\ rad/s$ por lo que la f.e.m. eficaz es:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100\ V$$

Por otra parte, recordemos que los instrumentos de medida proporcionan valores eficaces por lo que la d.d.p. eficaz entre los puntos **A** y **B** es $V_{AB} = 60$ V.

a. ***Cálculo de la intensidad***.

Aplicando la ley de Ohm entre los puntos **A** y **B:**

$$I_e = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{60}{Z_{AB}}$$

siendo $\boldsymbol{Z}_{AB}$ la impedancia entre los puntos **A** y **B**, que pasamos a calcular:

$$Z_{AB} = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = X_L - X_C = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0{,}1\ .\ 800 - \frac{1}{25.10^{-6}.800} = 80 - 50 = 30\ \Omega$$

quedando la intensidad:

$$I_e = \frac{60}{30} = 2\ A$$

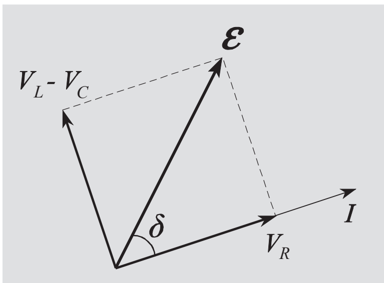
b. ***Cálculo de la resistencia R.***

Aplicando la ley de Ohm a todo el circuito:

$$Z = \frac{\varepsilon_e}{I_e} = \frac{100}{2} = 50\ \Omega = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$R = \sqrt{50^2 - (X_L - X_C)^2} = \sqrt{50^2 - (80 - 50)^2} = 40\ \Omega$$

c. ***Cálculo del desfase y la potencia.***



$$\cos \delta = \frac{V_R}{\varepsilon} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} = \frac{40}{50} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \delta = 36{,}9^{\circ}$$

$$P = \varepsilon_e\ I_e \cos \delta = 100\ .\ 2\ .\ 0{,}8 = 160\ W$$

8. En un circuito serie LCR el generador tiene una f.e.m. máxima de 200 V y una frecuencia angular de 2.500 rad/s. La resistencia es de 60 Ω y la capacidad es de 8.0 µF. La autoinducción puede variarse en el intervalo entre 10 mH y 50 mH insertando en la bobina un núcleo de hierro. Hallar:

a) La corriente máxima si el voltaje en el condensador no puede exceder de 150 V.

b) El valor de la autoinducción para que la corriente máxima sea un 5% inferior a la calculada en el apartado anterior.

c) La potencia suministrada por el generador al circuito en las condiciones del apartado b).

a. ***Cálculo de la corriente máxima.***

Por tratarse de un circuito en serie la intensidad es la misma en cada elemento. Aplicando la ley de Ohm al condensador:

$$I_0 = \frac{V_{0C}}{X_C} = \frac{150}{1/C\omega} = 150\ C\omega = 150\ .\ 8.10^{-6}\ .\ 2500 = 3\ A$$

b. ***Cálculo de la autoinducción.***

El enunciado requiere que la intensidad máxima sea un 5% inferior al calculado por lo que la nueva intensidad máxima es:

$$I_0 = 0{,}95\ I_0 = 0{,}95\ .\ 3 = 2{,}85\ A$$

y aplicando la ley de Ohm a todo el circuito se obtiene el valor de la autoinducción ***L*** que hace posible esta intensidad:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$2{,}85 = \frac{200}{\sqrt{60^2 + \left(2500\ L - \frac{1}{8.10^{-6}.\ 2500}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad L = 0{,}035\ H = 35\ mH$$

c. ***Cálculo de la potencia suministrada por el generador***.

La potencia suministrada por el generador ha de ser igual a la disipada por la resistencia ya que condensador y bobina no disipan energía:

$$P = I_e^2\ R = \frac{1}{2}\ I_0^2\ R = \frac{1}{2}\ 2{,}85^2.\ 60 = 243{,}7\ W$$

También se puede calcular la potencia a partir del factor de potencia:

$$\cos\delta = \frac{R}{Z} = \frac{60}{\varepsilon_0/I_0} = \frac{60}{200/2{,}85} = 0{,}86$$

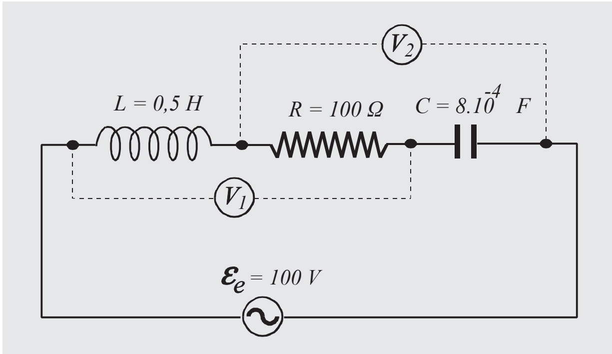
$$P = I_e\varepsilon_e\ \cos\ \delta = \frac{1}{2}\ I_0\varepsilon_0\ \cos\ \delta = \frac{1}{2}\ 2{,}85.\ 200.\ 0{,}86 = 243{,}7\ W$$

9. En el circuito RLC de la figura las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 son iguales. Calcular:

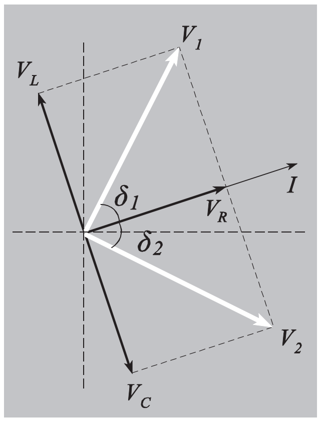
a) la frecuencia angular del generador.

b) V_1 y V_2 (valores eficaces).

c) el desfase de V_1 y V_2 respecto de la intensidad indicando, en su caso, si están adelantadas o retrasadas respecto de la intensidad.



a. ***Cálculo de la frecuencia angular del generador.***



V_1 es la suma fasorial de la d.d.p. en la resistencia y en la bobina:

$$V_1 = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{I_e^2 R^2 + I_e^2 X_L^2} = I_e \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad ..\ (1)$$

V_2 es la suma fasorial de la d.d.p. en la resistencia y en el condensador:

$$V_2 = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{I_e^2 R^2 + I_e^2 X_C^2} = I_e \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad ..\ (2)$$

y como según el enunciado es $V_1 = V_2$, de la comparación de ambas expresiones se deduce que $X_L = X_C$ por lo que el circuito está en resonancia:

$$X_L = X_C \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}5\ .\ 8.10^{-4}}} = 50\ \frac{rad}{s}$$

b. ***Cálculo de V_1 y V_2 (valores eficaces).***

Como el circuito está en resonancia, su impedancia total es **Z = R** y la intensidad:

$$I_e = \frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{\varepsilon_e}{R} = \frac{100}{100} = 1\ A$$

e introduciendo este valor en cualquiera de las expresiones (1) y (2):

$$V_1 = I_e \sqrt{R^2 + X_L^2} = 1 \sqrt{100^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{10^4 + (0{,}5\ .\ 50)^2} = 103{,}1\ V = V_2$$

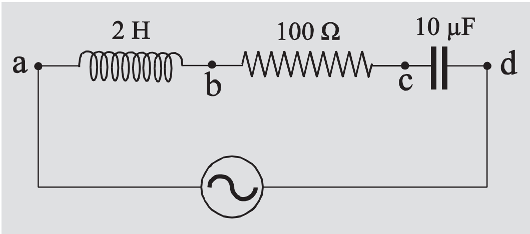
c. ***Cálculo del desfase de V_1 y V_2 .***

Del diagrama de fasores de la figura se deduce que:

$$\cos\ \delta_1 = \frac{V_R}{V_1} = \frac{I\ R}{I\ Z_{RL}} = \frac{R}{Z_{RL}} = \frac{100}{103{,}1} = 0{,}97 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 14º \quad (V_1\ adelantada)$$

$$\cos\ \delta_2 = \frac{V_R}{V_2} = \frac{I\ R}{I\ Z_{RC}} = \frac{R}{Z_{RC}} = \frac{100}{103{,}1} = 0{,}97 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 14º \quad (V_2\ retrasada)$$

10. **La diferencia de potencial entre los puntos a y c del circuito de la figura es de 429,7 V y entre los puntos b y d de 225,3 V. Calcular:**
a) la frecuencia de la corriente.
b) la intensidad eficaz.
c) la f.e.m. eficaz del generador.



a. ***Cálculo de la frecuencia de la corriente.***

Aplicando la ley de Ohm a la combinación formada por la bobina y la resistencia:

$$I = \frac{V_{ac}}{Z_{ac}} = \frac{429{,}7}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{429{,}7}{\sqrt{100^2 + 2^2\omega^2}} \quad \text{.................. (1)}$$

y aplicándola a la combinación formada por la resistencia y el condensador:

$$I = \frac{V_{bd}}{Z_{bd}} = \frac{225{,}3}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{225{,}3}{\sqrt{100^2 + \dfrac{1}{(10^{-5}\omega)^2}}} \quad \text{............... (2)}$$

y puesto que la intensidad es la misma en todos los elementos, al igualar las expresiones (1) y (2) se obtiene una ecuación bicuadrada que ofrece la solución:

$$\omega = 314 \text{ rad/s} = 2\,\pi\, f \qquad \rightarrow \qquad f = 50 \text{ Hz}$$

b. ***Cálculo de la intensidad eficaz.***

Sustituyendo el valor de ω en la (1) o en la (2):

$$I = \frac{V_{ac}}{Z_{ac}} = \frac{429{,}7}{\sqrt{100^2 + 2^2 .\ 314^2}} = 0{,}68\ A$$

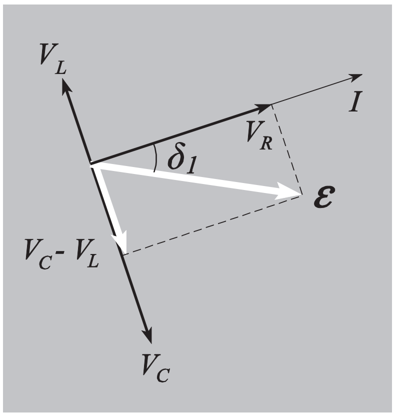
c. ***Cálculo de la f.e.m. eficaz.***

Aplicando la ley de Ohm a todo en circuito:

$$\varepsilon_e = I_e Z = 0{,}68\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 0{,}68\sqrt{100^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\varepsilon_e = 0{,}68\sqrt{100^2 + \left(2\ .\ 314 - \frac{1}{10^{-5} .\ 314}\right)^2} = 220\ V$$

11. Un circuito RCL en serie tiene una impedancia de 50 Ω y un factor de potencia de 0,6 cuando la frecuencia es de 60 Hz, estando la f.e.m. retrasada respecto de la intensidad. a) Si se desea aumentar su factor de potencia, ¿ha de colocarse en serie con el circuito un condensador o una bobina? b) ¿Qué valor ha de tener este elemento para que el factor de potencia sea la unidad?



Si la f.e.m. está retrasada es porque $\mathbf{V}_C$ es mayor que $\mathbf{V}_L$. Para que aumente el factor de potencia (cos δ) ha de disminuir el desfase δ lo que requiere que aumente $\mathbf{V}_L$ (ver diagrama de fasores) y, según la ley de Ohm ($\mathbf{V}_L$ = I.X_L), para que aumente $\mathbf{V}_L$ es preciso que aumente la reactancia inductiva X_L. En conclusión, ha de colocarse en serie una bobina.

Cálculo del coeficiente de autoinducción de la nueva bobina.

El problema requiere que con la reactancia inductiva final, que llamaremos X_L', el factor de potencia sea la unidad:

$$\cos\,\delta_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_2 = 0$$

por lo que el circuito en las condiciones finales estará en resonancia, lo que requiere que:

$$X_L' = X_C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En consecuencia, para conocer la reactancia inductiva final X_L' es preciso calcular X_C:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \Rightarrow \quad X_L - X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - R^2} \quad \ldots . (2)$$

y como:

$$\cos\,\delta_1 = \frac{V_R}{\varepsilon} = \frac{I\,R}{IZ} = \frac{R}{Z} \quad \Rightarrow \quad R = Z\,\cos\,\delta_1 = 50\,.\,0{,}6 = 30\ \Omega$$

y sustituyendo este valor de R en (2):

$$X_L - X_C = \sqrt{50^2 - 30^2} = \pm\ 40\ \Omega$$

Por ser inicialmente $X_C > X_L$ se ha de tomar la solución negativa:

$$X_L - X_C = -\ 40\ \Omega \quad \Rightarrow \quad X_C = X_L + 40$$

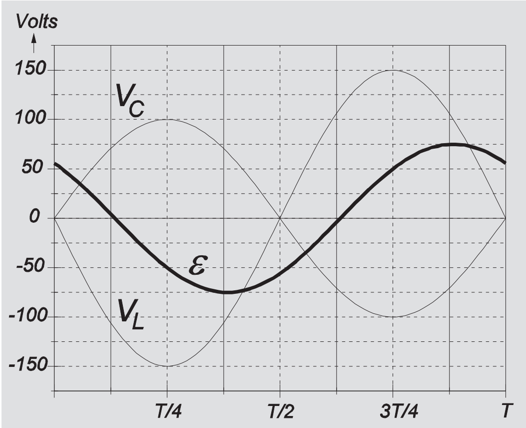
Y LLEVANDO ESTE RESULTADO A LA (1):

$$X_L' = X_L + 40 \quad \Rightarrow \quad X_L' - X_L = 40 \quad \Rightarrow \quad \Delta X_L = 40\ \Omega$$

En consecuencia para conseguir que el factor de potencia sea la unidad (circuito en resonancia) es preciso colocar en serie una bobina de reactancia 40 Ω, siendo su coeficiente de autoinducción:

$$L\omega = 40 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{40}{2\,\pi\,f} = \frac{40}{2\,\pi\,60} = 0{,}106\ H = 106\ mH$$

12. **Al analizar con un osciloscopio un circuito RCL en serie se obtienen las variaciones de V_C, V_L y ε representadas en la figura. Sabiendo que R = 1.000 Ω y que la frecuencia es 50 Hz, calcular:**
a) la d.d.p. eficaz en la resistencia.
b) el desfase.
c) la intensidad eficaz.
d) la capacidad del condensador.
e) el coeficiente de autoinducción de la bobina.



a. ***Cálculo de las diferencias de potencial.***

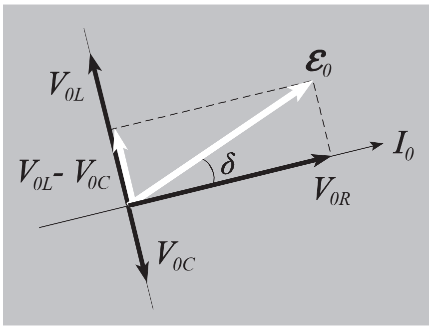
De la figura del enunciado se deducen los valores máximos de la f.e.m. y de las diferencias de potencial en la bobina y en el condensador:

$$V_{0L} = 150\text{ V} \quad ; \quad V_{0C} = 100\text{ V} \quad ; \quad \varepsilon_0 = 75\text{ V}$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{V_{0R}^2 + (V_{0L} - V_{0C})^2}$$

$$V_{0R} = \sqrt{\varepsilon_0^2 - (V_{0L} - V_{0C})^2} = \sqrt{75^2 - (150 - 100)^2} = 55{,}9\ V$$

$$V_R = \frac{V_{0R}}{\sqrt{2}} = \frac{55{,}9}{\sqrt{2}} = 39{,}5\ V$$



b. ***Cálculo del desfase***

$$\cos\delta = \frac{V_{0R}}{\varepsilon_0} = \frac{55{,}9}{75} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \delta = 41{,}81^{\circ}$$

c. ***Cálculo de la intensidad eficaz.*** $$I_e = \frac{V_R}{R} = \frac{39{,}5}{1000} = 0{,}0395\ A = 39{,}5\ mA$$

d. ***Cálculo de la capacidad del condensador.***

$$I_e = \frac{V_C}{X_C} \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{V_C}{I_e} = \frac{V_{0C}/\sqrt{2}}{I_e} = \frac{100}{\sqrt{2}\ .\ 0{,}0395} = 1790\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega\ X_C} = \frac{1}{2\ \pi\ f\ X_C} = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ 1790} = 1{,}78.10^{-6}\ F$$

e. ***Cálculo del coeficiente de autoinducción.***

$$I_e = \frac{V_L}{X_L} \quad \Rightarrow \quad X_L = \frac{V_L}{I_e} = \frac{V_{0L}/\sqrt{2}}{I_e} = \frac{150}{\sqrt{2}\ .\ 0{,}0395} = 2685\ \Omega$$

$$X_L = L\omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{2685}{2\ \pi\ f} = \frac{2685}{2\ \pi\ 50} = 8{,}55\ H$$

13. **En un circuito RCL en serie, R = 10 Ω, L = 0,5 H y C = 20 μF, siendo la fuerza electromotriz eficaz del generador 220 V. Calcular:**
a) la frecuencia de resonancia.
b) la potencia para esa frecuencia.
c) la anchura de resonancia.

a. ***Cálculo de la frecuencia de resonancia.***

En resonancia es:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 50{,}3 \ Hz$$

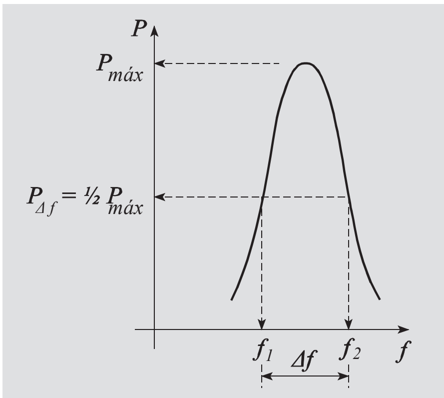
b. ***Cálculo de la potencia.***

En resonancia el desfase δ es nulo y $Z = R$, tomando la potencia su valor máximo:

$$P = P_{\max} = I_e \varepsilon_e \cos\delta = I_e \varepsilon_e = \frac{\varepsilon_e}{Z} \varepsilon_e = \frac{\varepsilon_e^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$P = P_{\max} = \frac{220^2}{10} = 4.840 \ W$$

c. ***Cálculo de la anchura de resonancia.***



La anchura de resonancia Δf es la diferencia de frecuencias ($f_2 - f_1$) para las cuales la potencia ($P_{\Delta f}$) es la mitad de la máxima ($P_{\max}$), potencia ésta que se corresponde con la situación de resonancia.

La potencia en cualquier situación y por lo tanto también cuando $P = P_{\Delta f}$ es:

$$P_{\Delta f} = I_e \varepsilon_e \cos\delta = \frac{\varepsilon_e}{Z} \varepsilon_e \frac{R}{Z} = \frac{\varepsilon_e^2}{Z^2} R$$

y como esta potencia es la mitad de la máxima (1):

$$P_{\Delta f} = ½ P_{\max} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_e^2}{Z^2} R = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_e^2}{R} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 2 R^2$$

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{R^2} = \pm R$$

resultado que conduce a las ecuaciones de segundo grado:

$$LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 \qquad y \qquad LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$$

que resueltas ofrecen las soluciones positivas y por lo tanto válidas:

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad y \quad \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\pi f_2 - 2\pi f_1 = 2\pi \ \Delta f \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{R}{2\pi \ L} = \frac{10}{2\pi \ 0{,}5} = 3{,}18 \ Hz$$

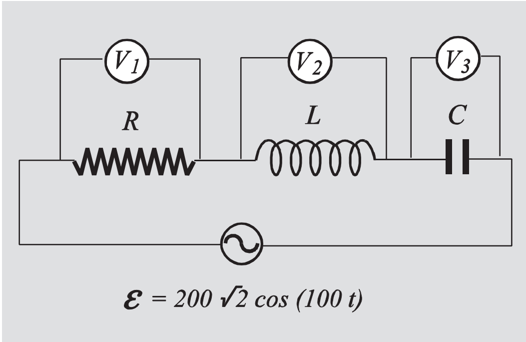
14. **En el circuito de la figura, las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 son iguales mientras que la lectura del voltímetro V_3 es doble que las anteriores (valores eficaces). Sabiendo que la intensidad máxima es de 2 A, calcular:**

a) el desfase, indicando si la intensidad está adelantada o retrasada.

b) la resistencia R .

c) el coeficiente de autoinducción L de la bobina, cuya resistencia óhmica es despreciable.

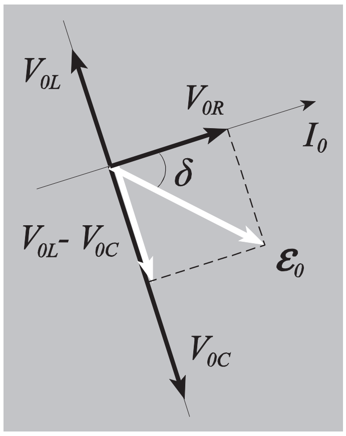
d) la capacidad C del condensador.



Puesto que la f.e.m. instantánea viene dada por la expresión $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$, al compararla con la dada por el enunciado se deduce que: $\varepsilon_0 = 200\sqrt{2}$ *y* $\omega = 100\ rad/s$.

a. ***Cálculo del desfase.***

$$tg\delta = \frac{V_{0L} - V_{0C}}{V_{0R}} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad .... (1)$$



y como la intensidad es la misma en cada elemento:

$$I = \frac{V_1}{R} = \frac{V_2}{X_L} = \frac{V_3}{X_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{X_L} = \frac{2V_1}{X_C}$$

de donde se deduce que: $X_L = R$ *y* $X_C = 2R$

y sustituyendo en (1):

$$tg\ \delta = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{R - 2R}{R} = -1 \quad \Rightarrow \quad \delta = -45^{\circ}$$

en la que, del signo negativo se deduce que la f.e.m. ε está retrasada respecto de la intensidad, tal como se indica en la figura.

b. ***Cálculo de R.***

$$Z = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{200\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (R - 2R)^2} = R\sqrt{2}$$

$$R = 100\ \Omega$$

c. ***Cálculo de L.*** $X_L = R = 100 = L\omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{100}{\omega} = \frac{100}{100} = 1\ H$

d. ***Cálculo de C.***

$$X_C = 2R = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2R\omega} = \frac{1}{2\ .\ 100\ .\ 100} = 5.10^{-5}\ F$$

15. En el estudio experimental de un circuito RCL en serie realizado en el laboratorio, con un generador de 4 V de f.e.m. eficaz, se obtuvo la variación de la intensidad con la frecuencia representada en la fig. a y la variación de X_L y X_C con la frecuencia (cuyos valores se han ocultado) representada en la figura b. A partir de estas gráficas calcular: a) la resistencia R, b) la capacidad del condensador C y c) el coeficiente de autoinducción L de la bobina.

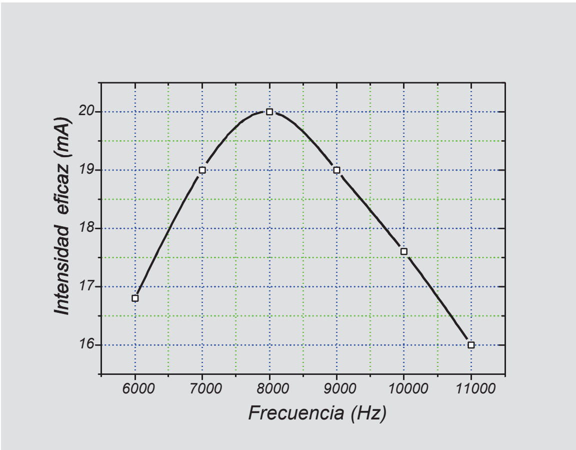


fig. a.

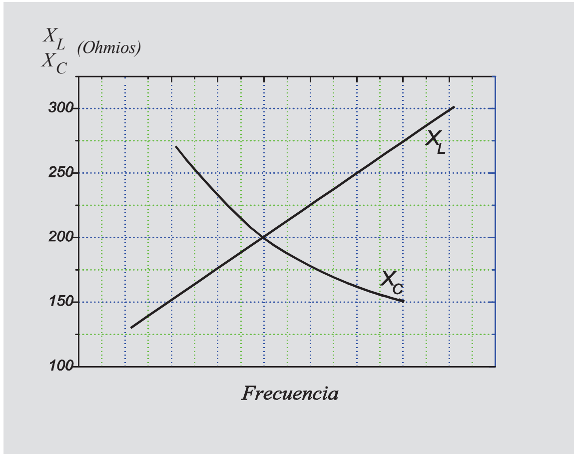


fig. b.

Como la intensidad toma su valor máximo (I_{max}) para la frecuencia de resonancia (f_0), de la figura **a** se deduce que:

I_{max} (valor eficaz) = 20 mA y f_0 = 8.000 Hz

Para la frecuencia de resonancia, la reactancia inductiva (X_L) es igual a la capacitiva (X_C), por lo que de la figura **b** se deduce que la frecuencia (oculta) para la que coinciden ambas reactancias es la de resonancia:

para $f = f_0 = 8.000$ Hz $\rightarrow$ $X_L = X_C = 200\ \Omega$

a. ***Cálculo de R.***

Para la frecuencia de resonancia, por ser $X_L = X_C$ es Z = R, por lo que:

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{\varepsilon_e}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon_e}{I_{max}} = \frac{4}{20.10^{-3}} = 200\ \Omega$$

b. ***Cálculo de L.***

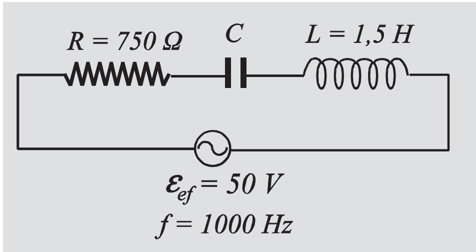
$$X_L = 200\ \Omega = L\omega_0 = L2\pi f_0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{2\pi f_0} = \frac{200}{2.\pi.8.10^3} = 3{,}98.10^{-3}\ H$$

c. ***Cálculo de C.***

$$X_C = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{C2\pi f_0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{X_C 2\pi f_0} = \frac{1}{200.2.\pi.8.10^3} = 9{,}95.10^{-8}\ F$$

16. En el circuito de la figura la intensidad está en fase con la fuerza electromotriz. Calcular:

a) la capacidad C del condensador.
b) la intensidad eficaz.
c) la diferencia de potencial eficaz en R.
d) la diferencia de potencial eficaz en C.
e) la diferencia de potencial eficaz en L.



a. ***Cálculo de la capacidad del condensador.***

Por estar en fase la intensidad con la f.e.m. el circuito está en resonancia, por lo que:

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{L\,(2\pi f)^2} = \frac{1}{1{,}5\,\,(2\pi.1000)^2} = 1{,}69.10^{-8}\ F$$

b. ***Cálculo de la intensidad eficaz.***

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{750^2 + \left(1{,}52\pi 50 - \frac{1}{1{,}69.10^{-8}2\pi 50}\right)^2} = 750\ \Omega$$

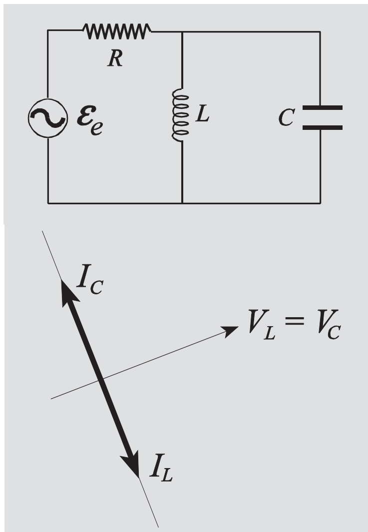
$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{50}{750} = 0{,}067\ A$$

c. ***Cálculo de V_R, V_C y V_L.*** $\qquad V_R = IR = 0{,}067\ .\ 750 = 50\ V$

y por estar en resonancia es:

$$V_C = V_L = IX_L = IL\omega = IL2\pi f = 0{,}066\ .\ 1{,}5\ .\ 2\ \pi\ 1000 = 628{,}3\ V$$

17. En el circuito de la figura, para una cierta frecuencia f, no pasa corriente por la resistencia R. Calcular esa frecuencia expresándola, exclusivamente, en función de los datos del problema que sean necesarios.



En una bobina la intensidad I_L está adelantada 90º respecto de la d.d.p. mientras que en un condensador la intensidad I_C está retrasada también 90º (ver figura). Puesto que, según el enunciado, no ha de pasar corriente por ***R***, la suma fasorial de ambas intensidades ha de ser nula, lo que requiere que los fasores representativos de estas intensidades sean iguales en magnitud:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = I_L = \frac{V_L}{X_L}$$

y como ambos elementos están sometidos a la misma d.d.p. por estar asociados en paralelo:

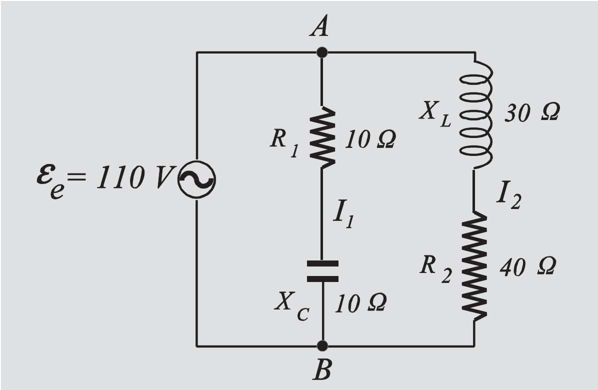
$$V_L = V_C \quad \Rightarrow \quad X_L = X_C$$

resultado del que se deduce que el circuito está en resonancia, siendo su frecuencia:

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

18. **En el circuito de la figura:**

a) calcular la impedancia en cada rama.
b) calcular la intensidad en cada rama y la diferencia de fase de estas intensidades respecto de la tensión aplicada.
c) calcular la intensidad total y su fase respecto a la tensión aplicada.



a. ***Cálculo de las impedancias.***

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{10^2 + (0 - 10)^2} = 14{,}14\ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{40^2 + (30 - 0)^2} = 50{,}0\ \Omega$$

b.1.***Cálculo de la intensidad en cada rama.***

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{Z_1} = \frac{110}{14{,}14} = 7{,}78\ A \quad ; \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = \frac{110}{50} = 2{,}20\ A$$

b.2. ***Cálculo de la diferencia de fase de estas intensidades respecto de la tensión aplicada.***

En la rama central, recorrida por la intensidad $\boldsymbol{I}_1$, la diferencia de potencial en $\boldsymbol{R}_1$ está en fase con la intensidad mientras que la d.d.p. en el condensador $\boldsymbol{V}_C$ está retrasada 90º respecto de esta intensidad (fig. 1). La d.d.p. total $\boldsymbol{V}_{AB}$ en la asociación en serie de $\boldsymbol{R}_1$ y de $\boldsymbol{C}$ es igual a la diferencia de potencial en los extremos del generador, es decir, a su f.e.m. $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\cos\ \delta_1 = \frac{V_{R1}}{V_{AB}} = \frac{V_{R1}}{\varepsilon} = \frac{I_1\ R_1}{I_1\ Z_1} = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{10}{14{,}14} = 0{,}707$$

$$\delta_1 = 45º$$

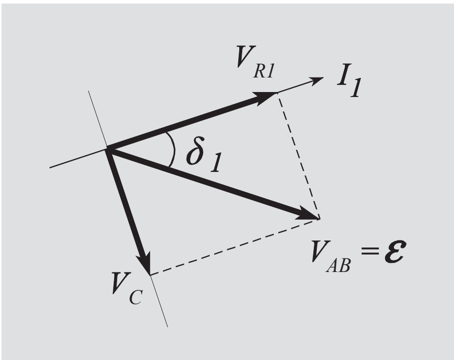


fig. 1

En la rama derecha, recorrida por la intensidad $\boldsymbol{I}_2$, la diferencia de potencial en $\boldsymbol{R}_2$ está en fase con la intensidad mientras que la d.d.p. en la bobina $\boldsymbol{V}_L$ está adelantada 90º respecto de esta intensidad (fig. 2). La d.d.p. total $\boldsymbol{V}_{AB}$ en la asociación en serie de $\boldsymbol{R}_2$ y de $\boldsymbol{L}$ es igual a la diferencia de potencial en los extremos del generador, es decir, a su f.e.m. $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\cos\ \delta_2 = \frac{V_{R2}}{V_{AB}} = \frac{V_{R2}}{\varepsilon} = \frac{I_2\ R_2}{I_2\ Z_2} = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{40}{50} = 0{,}8$$

$$\delta_2 = 36{,}9º$$

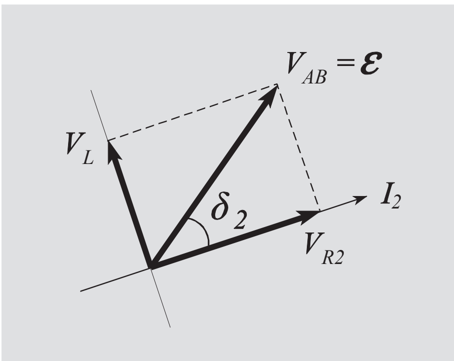


fig. 2

c.1. *Cálculo de la intensidad total.*

La intensidad total se obtiene mediante la suma *fasorial* de las intensidades $\boldsymbol{I}_1$ e $\boldsymbol{I}_2$. Para efectuar esta suma construimos un diagrama de fasores (fig. 3) que contiene a ambas intensidades y en el que se mantienen los respectivos desfases (δ_1 y δ_2) de éstas con la d.d.p. V_{AB} .

En este diagrama se han descompuesto los fasores $\boldsymbol{I}_1$ e $\boldsymbol{I}_2$ en sus respectivas componentes $\boldsymbol{I}_{1x}$, $\boldsymbol{I}_{1y}$, $\boldsymbol{I}_{2x}$ e $\boldsymbol{I}_{2y}$. La suma de las componentes ***x*** da lugar al fasor $\boldsymbol{I}_x$ mientras que el fasor $\boldsymbol{I}_y$ es la suma de las componentes ***y***:

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} = I_1 \cos \delta_1 + I_2 \cos \delta_2 = 7{,}78 \cos 45 + 2{,}2 \cos 36{,}9 = 7{,}26 \; A$$

$$I_y = I_{1y} - I_{2y} = I_1 \, sen \, \delta_1 + I_2 \, sen \, \delta_2 = 7{,}78 \, sen \, 45 - 2{,}2 \, sen \, 36{,}9 = 4{,}18 \; A$$

Por último, la suma fasorial de $\boldsymbol{I}_x$ e $\boldsymbol{I}_y$ es la intensidad total $\boldsymbol{I}$ (fig.4):

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{7{,}26^2 + 4{,}18^2} = 8{,}38 \; A$$

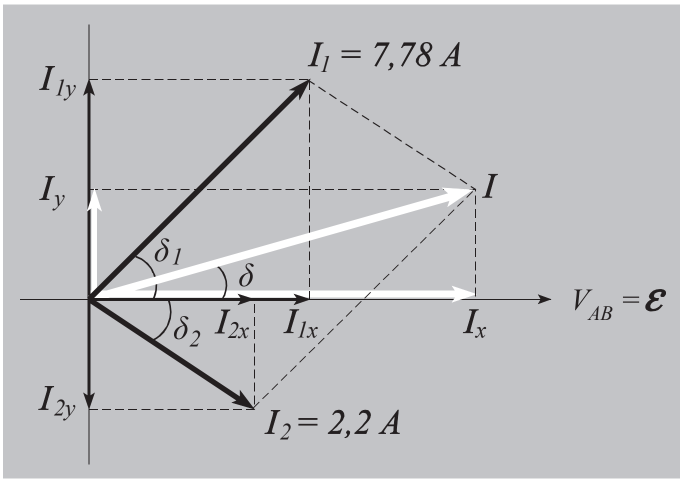


fig. 3

c.1. *Cálculo de la fase respecto a la tensión aplicada.*

En la fig. 4, el ángulo δ que forma la intensidad $\boldsymbol{I}$ con la tensión aplicada $V_{AB} = \boldsymbol{\varepsilon}$ es:

$$\cos \delta = \frac{I_x}{I} = \frac{7{,}26}{8{,}38} = 0{,}87 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 29{,}9^{o}$$

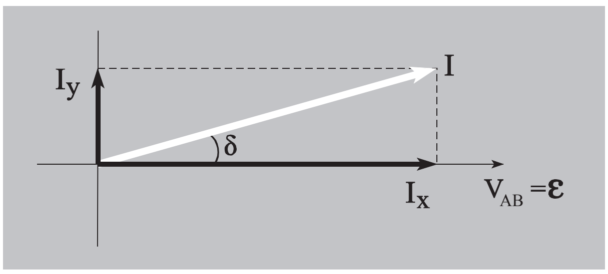
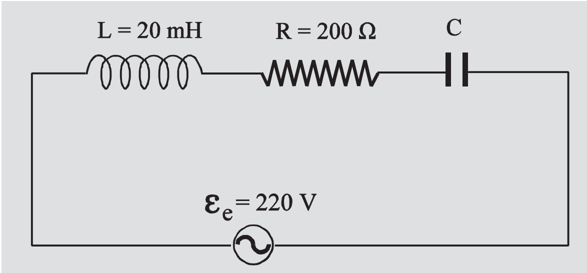


fig. 4

19. **Sabiendo que el circuito RCL de la figura es *capacitivo*, que la intensidad eficaz es 0,5 A y que la d.d.p. en la resistencia es igual a la d.d.p. en la bobina, calcular:**

a) la frecuencia de la corriente.
b) la capacidad del condensador.
c) las d.d.p. eficaces en la bobina (V_L) y en el condensador (V_C).
d) el desfase entre intensidad y f.e.m.
e) la potencia sumininistrada por el generador.
f) la frecuencia para la cual $V_L = V_C$.



a. ***Cálculo de la frecuencia de la corriente.***

Si $V_L = V_R$ es también $X_L = R$ por lo que:

$$X_L = L\omega = R = 200\ \Omega \ \Rightarrow\ \omega = \frac{R}{L} = \frac{200}{0{,}02} = 10^4\ rad/s = 2\pi f \ \Rightarrow\ f = \frac{10^4}{2\pi} = 1591{,}6\ Hz$$

b. ***Cálculo de la capacidad del condensador.***

$$Z = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{220}{0{,}5} = 440\ \Omega = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_L - X_C = \sqrt{440^2 - R^2} = \sqrt{440^2 - 200^2} = \pm\ 391{,}9\ \Omega$$

Como el circuito es capacitivo es $X_C > X_L$ y por ello que se ha de tomar la solución negativa:

$$X_L - X_C = -\ 391{,}9\ \Omega \quad \Rightarrow \quad X_C = X_L + 391{,}9 = R + 391{,}9 = 200 + 391{,}9 = 591{,}9\ \Omega$$

$$X_C = 591{,}9 = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi f\ 591{,}9} = \frac{1}{2\pi\ (1591{,}6)\ 591{,}9} = 1{,}69.10^{-7}\ F$$

c. ***Cálculo de las d.d.p. eficaces en la bobina (V_L) y en el condensador (V_C).***

$$V_L = V_R = I\ R = 0{,}5\ .\ 200 = 100\ V \quad ; \quad V_C = I\ X_C = 0{,}5\ .\ 591{,}9 = 295{,}9\ V$$

d. ***Cálculo del desfase entre intensidad y f.e.m..***

$$\cos\ \delta = \frac{V_R}{\varepsilon} = \frac{100}{220} = 0{,}45 \quad \Rightarrow \quad \delta = 63^{\circ}\ \ (I\ adelantaa\ \varepsilon)$$

e. ***Cálculo de la potencia suministrada por el generador.***

$$P = I_e\ \varepsilon_e\ \cos\ \delta = 0{,}5\ .\ 220\ .\ 0{,}45 = 50{,}0\ W$$

f. ***Cálculo de la frecuencia para la cual $V_L = V_C$.***

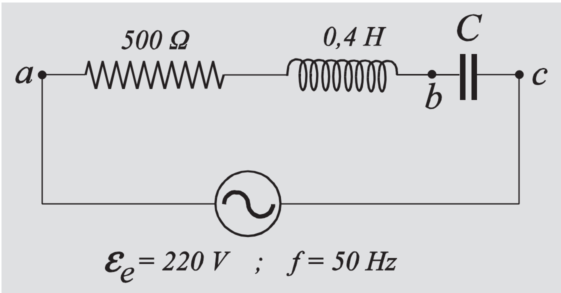
Si $V_L = V_C$ el circuito está en resonancia y, en estas condiciones, es:

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}02\ .\ 1{,}69.10^{-7}}} = 1{,}72\ .\ 10^4\ rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1{,}72\ .\ 10^4}{2\pi} = 2738\ Hz$$

20. **En el circuito de la figura calcular:**

a.1) la capacidad C del condensador para que la intensidad sea máxima.
a.2) el valor eficaz de esta intensidad máxima.
b.1) la capacidad que tendría que tener el condensador para que la diferencia de potencial entre los puntos *b* y *c* sea doble que la existente entre los puntos *a* y *b*.
b.2) la intensidad eficaz en este caso.
b.3) el desfase en este caso, indicando si la intensidad está adelantada o retrasada respecto de la f.e.m.
b.4) la potencia media suministrada por el generador.



a.1) Cálculo de C para que la intensidad sea máxima.

Si la intensidad es máxima el circuito está en resonancia, por lo que:

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}4\ (2.\pi.50)^2} = 2{,}5.10^{-5}\ F$$

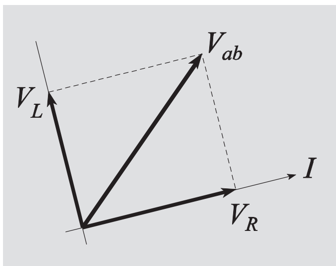
a.2) Cálculo de la intensidad eficaz máxima.

Por estar en resonancia es Z = R:

$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{220}{500} = 0{,}44\ A$$

b.1) Cálculo de la capacidad del nuevo condensador.

La d.d.p. entre ***b*** y ***c*** es: $V_{bc} = I\ X_C$ .... (1)



y entre ***a*** y ***b*** (ver figura):

$$V_{ab} = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_L^2} \quad .... (2)$$

y como según el enunciado ha de ser:

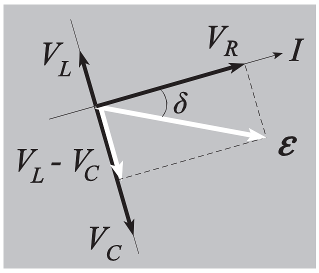
$$V_{bc} = 2\ V_{ab} \quad .... (3)$$

al sustitur (1) y (2) en (3) queda:

$$X_C = 2\sqrt{R^2 + X_L^2} = 2\sqrt{500^2 + (L.2.\pi.50)^2} = 1031\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{X_C\ \omega} = \frac{1}{1031\ (2.\pi.50)} = 3{,}1.10^{-6}\ F$$

b.2) Cálculo de la intensidad eficaz en este caso.



$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{220}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{220}{\sqrt{500 + (125{,}7 - 1031)^2}} = 0{,}21\ A$$

b.3) Cálculo del desfase.

Por ser $X_C > X_L$ es $V_C > V_L$ y, en consecuencia, la f.e.m. está retrasada respecto de la intensidad (ver figura).

$$tg\ \delta = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

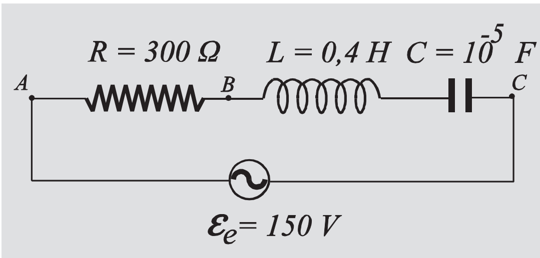
$$tg\ \delta = \frac{125{,}7 - 1031}{500} = -\ 1{,}81 \quad \Rightarrow \quad \delta = -\ 61{,}1^o$$

en la que el signo negativo indica que la intensidad está adelantada respecto de la f.e.m. ε.

b.4) Cálculo de la potencia media suministrada por el generador.

$$P = \varepsilon\ I\ \cos\ \delta = 220\ .\ 0{,}21\ .\ \cos\ 61{,}1 = 22{,}3\ W$$

21. En el circuito de la figura, la lectura de un voltímetro acoplado a los puntos A y B es la misma que si se acopla a los puntos B y C. Calcular:
a) la frecuencia de la corriente.
b) la intensidad.
c) la diferencia de potencial entre B y C.
d) el desfase, indicando si la intensidad está retrasada o adelantada respecto de la f.e.m.
e) el valor de la frecuencia para el que la intensidad es máxima.



a. ***Cálculo de la frecuencia***.

Aplicando la ley de Ohm entre los puntos **AB** y entre los puntos **BC** teniendo en cuenta que, por estar en serie los elementos del circuito, la intensidad que pasa por cada uno de ellos es la misma:

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{V_{BC}}{Z_{LC}}$$

y como, según el enunciado es $V_{AB} = V_{BC}$ ha de ser:

$$R = Z_{LC} = \sqrt{(X_L - X_C)^2} \quad \Rightarrow \quad X_L - X_C = \sqrt{R^2} = \pm\ R = \pm\ 300$$

Si $X_L > X_C$ el circuito sería inductivo y si $X_L < X_C$ sería capacitivo. Puesto que el enunciado no precisa el carácter del circuito ofrecemos las dos soluciones:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm\ 300 \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}4\omega - \frac{1}{10^{-5}\omega} = \pm\ 300$$

La resolución de las dos ecuaciones de segundo grado contenidas en esta expresión ofrece dos soluciones válidas y otras dos no válidas por ser negativas:

$$\omega_1 = 1000\ \frac{rad}{s} \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 159{,}2\ Hz$$

$$\omega_2 = 250\ \frac{rad}{s} \qquad \Rightarrow \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 39{,}8\ Hz$$

b. ***Cálculo de la intensidad.***

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 300\sqrt{2} = 424{,}3\ \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{150}{424{,}3} = 0{,}35\ A$$

c. ***Cálculo de V_{BC}.***

$$V_{BC} = V_{AB} = IR = 0{,}35\ .\ 300 = 105\ V$$

d. ***Cálculo del desfase.***

$$tg\ \delta = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\pm\ R}{R} = \pm\ 1 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \pm\ 45^{\circ}$$

si: $\delta = +\ 45^{\circ}$ $\Rightarrow$ circuito inductivo: $\boldsymbol{\varepsilon}$ adelanta a **I**

si: $\delta = -\ 45^{\circ}$ $\Rightarrow$ circuito capacitivo: **I** adelanta a $\boldsymbol{\varepsilon}$

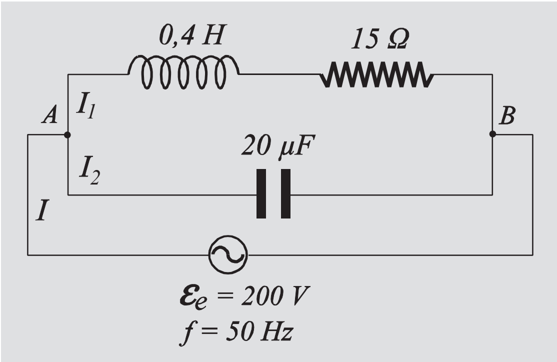
e. ***Cálculo de la frecuencia para intensidad máxima.***

La intensidad es máxima cuando el circuito está en resonancia:

$$X_L = X_C \qquad \Rightarrow \qquad L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L\ 2\pi\ f_0 - \frac{1}{C\ 2\pi\ f_0} = 0$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}4.10^{-5}}} = 79{,}6\ Hz$$

22. **Una bobina de 0,4 H y 15 Ω de resistencia y un condensador de 20 µF están en paralelo y reciben en sus bornes una tensión eficaz de 200 V. Si la frecuencia de la corriente es de 50 Hz, calcular: a) la intensidad en la bobina, b) la intensidad en el condensador, c) la intensidad total, d) la impedancia del circuito y e) el desfase.**



a. ***Cálculo de I_1.***

En la rama superior, la suma fasorial de la d.d.p. en la bobina y en el resistor es igual a la f.e.m. (ver fig. 1):

$$V_{AB} = \varepsilon = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{I_1^2 R^2 + I_1^2 X_L^2} = I_1 \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$I_1 = \frac{200}{\sqrt{15^2 + (L 2\pi f)^2}} = \frac{200}{\sqrt{15^2 + (0{,}4 \ . \ 2\pi 50)^2}} = 1{,}58 \ A$$

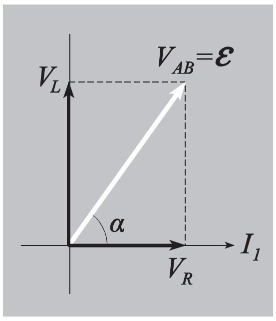


fig. 1

b. ***Cálculo de I_2.***

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{X_C} = \frac{\varepsilon}{X_C} = \varepsilon \ 2 \ \pi \ f \ C = 200 \ . \ 2\pi \ . \ 50 \ . \ 20.10^{-6} = 1{,}26 \ A$$

c. ***Cálculo de I.***

La intensidad I es la suma fasorial de las intensidades I_1 e I_2. Para realizar esta suma es preciso conocer la orientación de cada uno de estos dos fasores. Puesto que I_2 es la intensidad que recorre la rama inferior, en la que únicamente hay un condensador, esta intensidad está adelantada 90º respecto de la f.e.m. ε. El cáculo del desfase de I_1 se realiza a partir de la fig. 1:

$$tg \ \alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{IX_L}{IR} = \frac{2\pi f L}{R} = \frac{2\pi \ 50 \ (0{,}4)}{15} = 8{,}38$$

$$\alpha = 83{,}2º$$

con lo que el diagrama de fasores queda como se indica en la fig. 2.

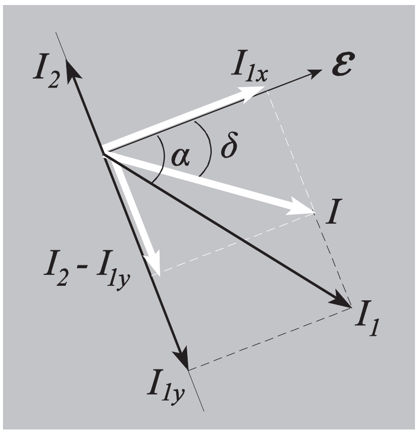


fig. 2.

Conocida la orientación de los fasores I_1 e I_2 se proyecta el fasor I_1 para obtener sus componenetes I_{1x} e I_{1y}:

$$I_{1x} = I_1 \cos \alpha = 1{,}58 \cos 83{,}2^{\circ} = 0{,}19 \; A$$

$$I_{1y} = I_1 \; sen \; \alpha = 1{,}58 \; sen \; 83{,}2^{\circ} = 1{,}57 \; A$$

La suma de los fasores colineales I_2 e I_{1y} (fig. 2) da lugar al fasor $I_2 - I_{1y}$. Por último, sumando este fasor y el I_{1X} se obtiene el fasor intensidad total I que forma un ángulo δ (desfase) con la f.e.m. ε (fig. 3):

$$I = \sqrt{(I_{1x})^2 + (I_2 - I_{1y})^2} = \sqrt{0{,}19^2 + (1{,}26 - 1{,}57)^2} = 0{,}36 \; A$$

d. ***Cálculo de la impedancia***.

$$Z = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{200}{0{,}36} = 550 \; \Omega$$

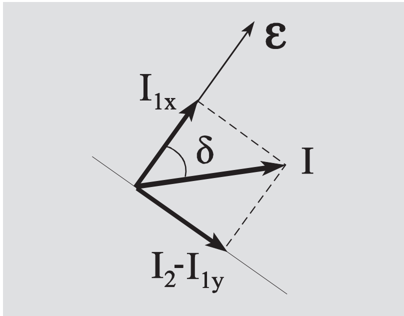


fig. 3

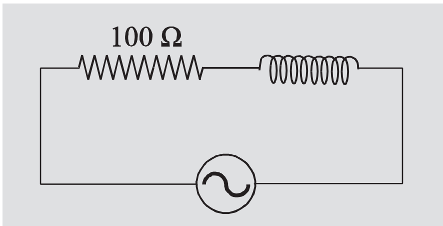
e. ***Cálculo del desfase***.

En la fig. 3:

$$\cos\delta = \frac{I_{1x}}{I} = \frac{0{,}19}{0{,}36} = 0{,}53 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 58^{\circ}$$

estando I retrasada respecto de ε como queda patente en la fig. 3.

23. En el circuito de la figura el desfase es $\delta_1 = 8{,}9^{\circ}$. Si a este circuito se le añade un condensador en serie el desfase es $\delta_2 = 32{,}6^{\circ}$ estando la intensidad adelantada respecto de la f.e.m. Calcular:
a) la reactancia de la bobina.
b) la reactancia del condensador.



a. ***Cálculo de la reactancia de la bobina.***

En el primer caso (fig. 1):

$$tg \; \delta_1 = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I \, X_L}{I \, R} = \frac{X_L}{R}$$

$$X_L = R \; tg \; \delta_1 = 100 \; tg \; 8{,}9^{\circ} = 15{,}7 \; \Omega$$

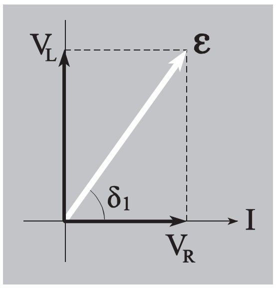


fig. 1

b. ***Cálculo de la reactancia del condensador.***

En el segundo caso , por estar adelantada la intensidad, el circuito es capacitivo siendo por lo tanto $V_C > V_L$ y $X_C > X_L$ (fig. 2). En consecuencia:

$$tg \; \delta_2 = \frac{V_C - V_L}{V_R} = \frac{I \, X_C - I \, X_L}{I \, R} = \frac{X_C - X_L}{R}$$

$$X_C = X_L + R \; tg \; \delta_2 = 15{,}7 + 100 \; tg \; 32{,}6^{\circ}$$

$$X_C = 79{,}6 \; \Omega$$

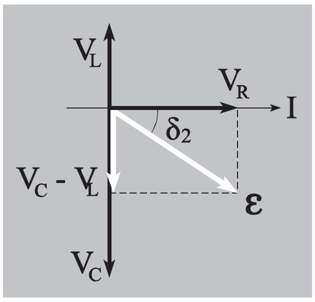
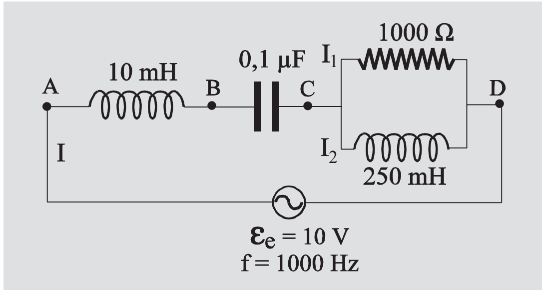


fig. 2

24. **En el circuito de la figura, calcular:**

a) las intensidades I, I_1 e I_2.
b) la impedancia total.
c) las diferencias de potencial entre los puntos AB, BC y CD.
d) el desfase.



En primer lugar calcularemos las reactancias de las bobinas y del condensador:

$$X_1 = X_{10\ mH} = 2\pi f\ L_{10\ mH} = 2\pi 1000(10.10^{-3}) = 62{,}8\ \Omega$$

$$X_2 = X_{250\ mH} = 2\pi f\ L_{250\ mH} = 2\pi 1000(250.10^{-3}) = 1570{,}8\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f\ C} = \frac{1}{2\pi 1000.10^{-7}} = 1591{,}5\ \Omega$$

En la combinación de resistor y bobina en paralelo, la intensidad I es la suma *fasorial* de las intensidades I_1 e I_2. Como en una resistencia la intensidad (I_1) está en fase con la d.d.p. (V_{CD}) y en una bobina la d.d.p. (V_{CD}) está adelantada 90º respecto de la intensidad que la recorre (I_2), el diagrama de fasores queda como se indica en la fig. 1, siendo:

$$tg\ \alpha = \frac{I_2}{I_1} = \frac{V_{CD}\ /\ X_2}{V_{CD}\ /\ R} = \frac{R}{X_2} = \frac{1000}{1570{,}8} = 0{,}637 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 32{,}5º$$

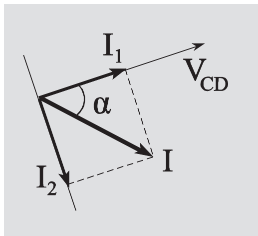


fig. 1

Por otra parte, la suma *fasorial* de las d.d.p. V_{AB}, V_{BC} y V_{CD} es la d.d.p. total, es decir, la f.e.m. ε. Para realizar esta suma construimos el correspondiente diagrama de fasores (fig. 2) teniendo en cuenta que, tal como se ha visto, la d.d.p. V_{CD} ha de estar adelantada 32,5º respecto de I.

Descomponiendo V_{CD} en V_x y V_y, la suma *fasorial* de los fasores colineales V_y, V_{AB} y V_{BC} da lugar al fasor ΣV_y. Por último, la suma *fasorial* de ΣV_y y V_x es la f.e.m. ε.

De la fig. 2 se deduce:

$$\varepsilon = \sqrt{V_x^2 + (\Sigma V_y)^2} = \sqrt{V_x^2 + (V_y + V_{AB} - V_{BC})^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

en la que: $\varepsilon = 10$ V

$V_x = V_{CD} \cos 32{,}5 = 0{,}84\ V_{CD}$ . . . . (2)

$V_y = V_{CD}$ sen $32{,}5 = 0{,}54\ V_{CD}$ . . . . (3)

$V_{AB} = I\,X_1 = 62{,}8\ I$ . . . . (4)

$V_{BC} = I\,X_C = 1591{,}5\ I$ . . . . (5)

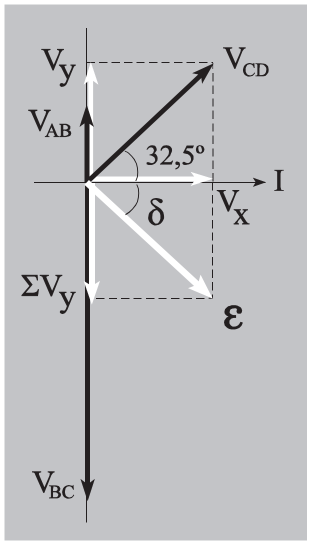


fig. 2

y sustituyendo en (1):

$$10 = \sqrt{(0{,}84 V_{CD})^2 + (0{,}54 V_{CD} + 62{,}8\ I - 1591{,}5\ I)^2} \quad \ldots (6)$$

a. ***Cálculo de las intensidades.***

a.1. Cálculo de *I*.

Aplicando la ley de Ohm entre los puntos **C** y **D**:

$$I = \frac{V_{CD}}{Z_{LR}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

en la que Z_{LR} es la impedancia de la asociación en paralelo del resistor de 1000 Ω y la bobina de 250 mH, que pasamos a calcular:

$$\frac{1}{Z_{LR}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{(1000)^2} + \frac{1}{1570{,}8^2}} \quad \Rightarrow \quad Z_{LR} = 843{,}6\ \Omega$$

y sustituyendo en (7):
$$V_{CD} = 843{,}6\ I \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones (6) y (8) ofrece la solución:

$$\boldsymbol{V_{CD} = 6{,}54\ V \qquad ; \qquad I = 7{,}75.10^{-3}\ A = 7{,}75\ mA}$$

a.2. Cálculo de I_1:
$$I_1 = \frac{V_{CD}}{R} = \frac{6{,}54}{1000} = 6{,}54.10^{-3}\ A$$

a.3. Cálculo de I_2:
$$I_2 = \frac{V_{CD}}{X_2} = \frac{6{,}54}{1570{,}8} = 4{,}16.10^{-3}\ A$$

b. ***Cálculo de la impedancia total.***

$$Z = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{10}{7{,}75.10^{-3}} = 1290\Omega$$

c. ***Cálculo de las diferencias de potencial.***

Sustituyendo los valores de I y V_{CD} en las expresiones (2) a (5):

$$V_x = 0{,}84\ V_{CD} = 0{,}84 \ .\ 6{,}54 = 5{,}52\ \text{V}$$

$$V_y = 0{,}54\ V_{CD} = 0{,}54 \ .\ 6{,}54 = 3{,}51\ \text{V}$$

$$V_{AB} = 62{,}8\ I = 62{,}8 \ .\ (7{,}75.10^{-3}) = 0{,}49\ \text{V}$$

$$V_{BC} = 1591{,}5\ I = 1591{,}5 \ .\ (7{,}75.10^{-3}) = 12{,}3\ \text{V}$$

d. ***Cálculo del desfase.***

En la fig. 2:

$$tg\ \delta = \frac{\Sigma V_y}{V_x} = \frac{V_y + V_{AB} - V_{BC}}{V_x} = \frac{3{,}51 + 0{,}49 - 12{,}3}{5{,}52} = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \delta = -56{,}4^{\circ}$$

en la que el signo negativo indica que la f.e.m. ε está retrasada respecto de la intensidad, tal como se representa en la fig. 2.

25. **En un circuito LC serie, con generador, la intensidad eficaz es de 2 A, la f.e.m. eficaz es de 100 V y la frecuencia 50 Hz. Sabiendo que las diferencias de potencial eficaces en la bobina (no ideal) y en el condensador son $V_L = 150$ V y $V_C = 200$ V, calcular los valores de R, L y C, expresando los resultados en unidades del S.I.**

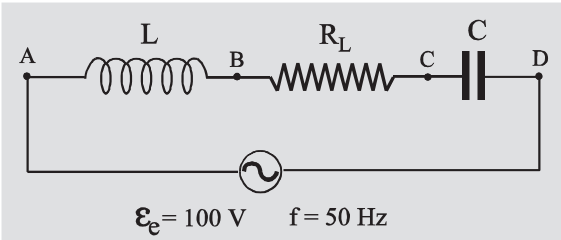


fig. 1

Por tratarse de una bobina no ideal, su resistencia $\mathbf{R_L}$ es distinta de cero por lo que, en realidad, se trata de un circuito **RCL**.

a. ***Cálculo de C.***

Aplicando la ley de Ohm entre los puntos **C** y **D**:

$$X_C = \frac{V_C}{I_e} = \frac{200}{2} = 100\ \Omega = \frac{1}{C\omega}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f\ C} = \frac{1}{2\pi\ 50\ 100} = 31{,}8\ .10^{-6}\ F$$

b. ***Cálculo de L y R.***

La d.d.p. entre los puntos **A** y **C** (V_{AC}) es igual a la suma *fasorial* de la d.d.p. entre los puntos **A** y **B** (V_{AB}) y la d.d.p. entre los puntos **B** y **C** (V_{BC}). Mientras que V_R está en fase con la intensidad, la d.d.p. en la bobina (V_L) está adelantada 90º (fig. 2). De esta figura se deduce que:

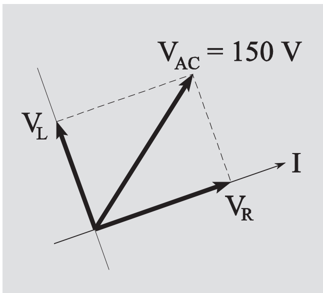


fig. 2

$$V_{AC}^2 = V_R^2 + V_L^2 = I^2R^2 + I^2X_L^2 = I^2\ (R^2 + X_L^2)$$

$$150^2 = 2^2\ (R^2 + X_L^2) \qquad \Rightarrow \qquad (R^2 + X_L^2) = 5625 \quad ..\ (1)$$

Por otra parte, al aplicar la ley de Ohm entre los puntos **A** y **D**, es decir, a todo el circuito:

$$Z = \frac{\varepsilon_e}{I_e} = \frac{100}{2} = 50\ \Omega$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 50^2 = R^2 + (X_L - 100)^2 \quad ....\ (2)$$

y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

***L* = 0,21 H** ; ***R* = 36,3 Ω**

26. **En un circuito RCL serie con un generador de frecuencia angular ω, los valores máximos de las diferencias de potencial son: V_{OR} = 0,5 V ; V_{OL} = 1,5 V ; V_{OC} = 1 V. Calcular:**

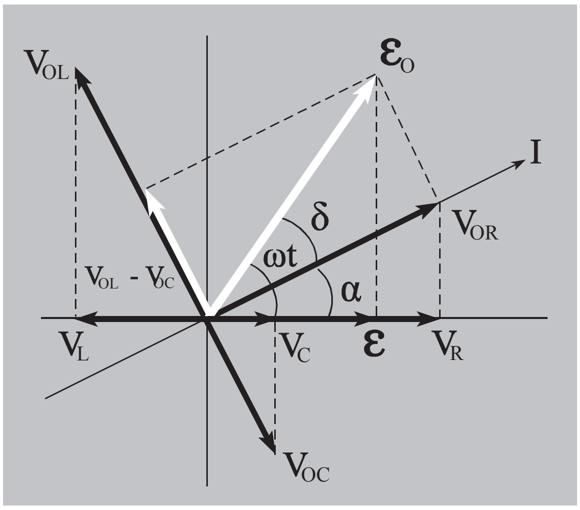
a) el valor máximo de la fuerza electromotriz del generador (ε_0).
b) el desfase.
c) el valor instantáneo de la fuerza electromotriz ε = f(t) .

a. ***Cálculo del valor máximo de la fuerza electromotriz del generador.***

Del diagrama de fasores de la figura se deduce que:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{V_{0R}^2 + (V_{0L} - V_{0C})^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \sqrt{0{,}5^2 + (1{,}5 - 1)^2} = 0{,}71\ V$$

b. ***Cálculo del desfase.***



De la figura:

$$\cos\ \delta = \frac{V_{0R}}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}5}{0{,}71} = 0{,}71$$

$$\delta = 45^{\circ}$$

c. ***Cálculo del valor instantáneo de la f.e.m.***

Puesto que la expresión general de la f.e.m. instantánea es:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\ \cos\ \omega t$$

al sustituir el valor de ε_0 queda:

$$\varepsilon = 0{,}71\ \cos\ \omega t$$

No obstante, a este mismo resultado se puede llegar considerando que, ***únicamente para los valores instantáneos***, se cumple que la fuerza electromotriz es igual a la ***suma algebraica*** de las diferencias de potencial existentes entre los extremos de los elementos asociados en serie:

$$\varepsilon = V_R + V_L + V_C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

en la que:

$$V_R = V_{0R}\ \cos\ \alpha$$

$$V_L = V_{0L}\ \cos\ (90 + \alpha) = -V_{0L}\ sen\ \alpha$$

$$V_C = V_{0C}\ \cos\ (90 - \alpha) = V_{0C}\ sen\ \alpha$$

quedando al sustituir en (1):

$$\varepsilon = V_{0R}\ \cos\ \alpha + (V_{0C} - V_{0L})\ sen\ \alpha = 0{,}5\ \cos\ \alpha + (1 - 1{,}5)\ sen\ \alpha = 0{,}5\ (\cos\ \alpha - sen\ \alpha)$$

y teniendo en cuenta que: $\quad \alpha = \omega t - \delta = \omega t - 45$

al sustituir queda: $\quad \varepsilon = 0{,}5\ [\cos\ (\omega t - 45) - sen\ (\omega t - 45)]$

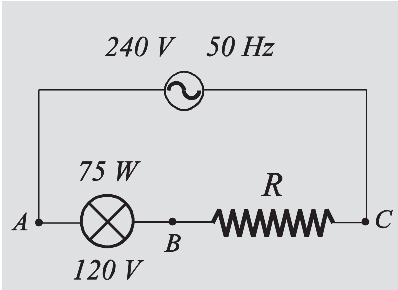
y operando se llega a: $\quad \varepsilon = 0{,}71\ \cos\ \omega t$

27. **Una bombilla eléctrica de 75 W está fabricada para funcionar a 120 V (eficaces). Sólo se dispone de una toma de corriente de 240 V (eficaces) y 50 Hz. ¿Se puede hacer que funcione correctamente conectando en serie con ella, a) una resistencia R, b) una bobina de autoinducción L? En caso afirmativo calcúlense los valores de R y L y la potencia extraida de la toma de corriente en cada caso.**

a. ***Por asociación con una resistencia.***

Puesto que una bombilla únicamente tiene resistencia óhmica y en una resistencia la d.d.p. y la intensidad están en fase, la d.d.p. total (240 V) es la suma *algebraica* de las d.d.p. en cada una de las resistencias asociadas. Como la bombilla ha de trabajar con una d.d.p. V_{AB} de 120 V, la d.d.p. V_{BC} entre los extremos de la resistencia **R** que se asocia ha de ser también 120 V y, en consecuencia, su resistencia ha de ser igual a la de la bombilla $\mathbf{R}_B$, por lo que es preciso calcular ésta.

Según el enunciado, la bombilla ha sido diseñada para disipar una potencia de 75 W cuando está sometida a una d.d.p. de 120 V por lo que:



$$P_B = I\,V_B = \frac{V_B}{R_B}\,V_B \quad\Rightarrow\quad R_B = \frac{V_B^2}{P_B} = \frac{120^2}{75} = 192\ \Omega$$

$$R = R_B = 192\ \Omega$$

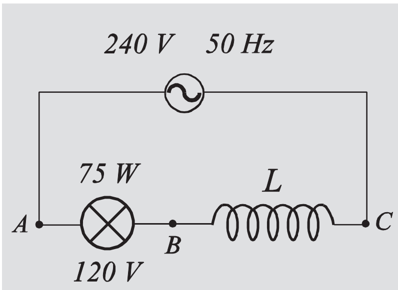
Como el desfase δ es nulo, cos δ = 1 y la potencia extraída es:

$$P = \varepsilon_e\, I_e \cos\delta = \frac{\varepsilon_e^2}{R_T} = \frac{240^2}{192 + 192} = 150\ W$$

en la que R_T es la resistencia total, suma de las dos asociadas.

b. ***Por asociación con una autoinducción.***

El valor máximo que puede tomar la intensidad eficaz en el circuito ha de ser, lógicamente, igual a la máxima intensidad $\mathbf{I}_B$ que puede soportar la bombilla. Esta intensidad es:



$$P_B = I_B\,V_B \quad\Rightarrow\quad I_B = \frac{P_B}{V_B} = \frac{75}{120} = 0{,}625\ A$$

La impedancia del circuito cuando circule esta intensidad es:

$$Z = \frac{\varepsilon_e}{I_e} = \frac{240}{0{,}625} = 384\ \Omega$$

$$Z = 384 = \sqrt{R_B^2 + X_L^2} = \sqrt{R_B^2 + L^2\omega^2} \quad\Rightarrow\quad L = \sqrt{\frac{Z^2 - R_B^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{384^2 - 192^2}{(2\pi 50)^2}} = 1{,}1\ H$$

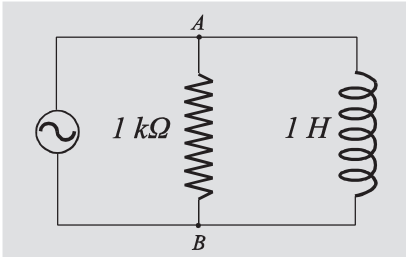
Para calcular la potencia extraída en este caso es precido conocer el factor de potencia (cos δ):

$$\cos\delta = \frac{R}{Z} = \frac{192}{384} = 0{,}5$$

quedando la potencia: $P = I_e\,\varepsilon_e \cos\delta = 0{,}626\ .\ 240\ .\ 0{,}5 = 75\ W$

Resultado que concuerda con el obtenido si se considera que la bobina no disipa potencia y, en consecuencia, la potencia disipada por una resistencia **R** debe ser la mitad que la disipada por la asociación **2R** del apartado **a**.

28. Calcular el módulo de las corrientes que circulan por el resistor, por el inductor y por el generador en el circuito de corriente alterna de la figura, si la tensión del generador, en voltios, está dada por *10.cos 10³.t.*



Puesto que la f.e.m. de un generador viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

por comparación con la dada por el enunciado se deduce que:

$$\varepsilon_0 = 10\ V \qquad ; \qquad \omega = 10^3\ rad/s$$

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07\ V$$

Por estar todos los elementos asociados en paralelo, la d.d.p. entre sus respectivos extremos es la misma:

$$V_{AB} = V_R = V_L = \varepsilon_e = 7{,}07\ V$$

a. ***Cálculo de la intensidad (eficaz) en la resistencia.***

$$I_R = \frac{\varepsilon_e}{R} = \frac{7{,}07}{1000} = 7{,}07.10^{-3}\ A = 7{,}07\ mA$$

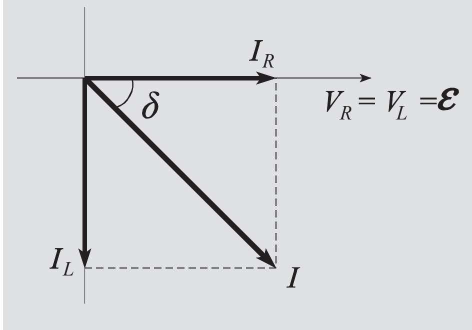
b. ***Cálculo de la intensidad (eficaz) en el inductor.***

$$I_L = \frac{\varepsilon_e}{X_L} = \frac{7{,}07}{L\omega} = \frac{7{,}07}{1.10^3} = 7{,}07.10^{-3}\ A = 7{,}07\ mA$$

c. ***Cálculo de la intensidad (eficaz) en el generador.***

Recordando que en una resistencia la d.d.p. está en fase con la intensidad y que en una bobina la d.d.p. está adelantada 90º, el diagrama de fasores queda como se indica en la figura. De ella se deduce que:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{7{,}07^2 + 7{,}07^2} = 10\ mA$$



d. ***Cálculo del desfase.***

Del diagrama de fasores de la misma figura se deduce:

$$tg\ \delta = \frac{I_L}{I_R} = \frac{7{,}07}{7{,}07} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 45º$$

29. En el circuito de la figura:

a) Calcular:

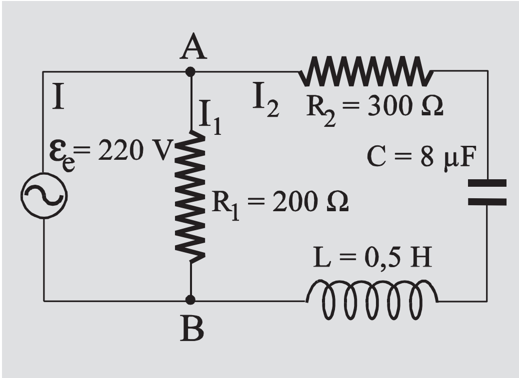
a.1. Para qué valor de la frecuencia de la corriente alterna suministrada por el generador la intensidad que circula por R_2 será máxima.

a.2. Las intensidades eficaces I_1 , I_2 , e I para esta frecuencia.

b) Si la frecuencia toma un valor de 50 Hz, calcular:

b.1. Las intensidades eficaces I_1 , I_2 , e I para esta frecuencia.

b.2. Calcular el desfase δ entre I y ε en este caso.



a.1. ***Cálculo de la frecuencia para que I_2 sea máxima.***

Mientras que la intensidad I_1 que pasa por R_1 no depende de la frecuencia, la I_2 si lo hace por existir reactancias en esa rama. Puesto que la intensidad en esta rama es:

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = \frac{\varepsilon}{Z_2}$$

la intensidad I_2 será máxima cuando la impedancia Z_2 de esta rama sea mínima lo que, según la expresión:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}$$

requiere que las reactancias inductiva y capacitiva sean iguales (*resonancia*):

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5\ .\ 8.10^{-6}}} = 500\ rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{500}{2\pi} = 79{,}6\ Hz$$

a.2. ***Cálculo de las intensidades eficaces I_1, I_2, e I para esta frecuencia.***

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{220}{200} = 1{,}10\ A$$

Esta intensidad I_1 está en fase con la f.e.m. ya que una resistencia no produce desfase.

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = \frac{\varepsilon}{Z_2} = \frac{220}{\sqrt{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{220}{R_2} = \frac{220}{300} = 0{,}73\ A$$

Esta intensidad I_2 está también en fase con la f.e.m. ya que:

$$\cos\delta_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{R_2}{R_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 0$$

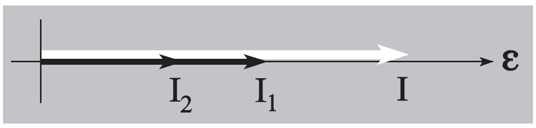


fig. 1

En consecuencia, la intesidad *I*, que es la suma fasorial de I_1 e I_2 , está también en fase con la f.e.m. por lo que, ***en este caso***, su valor se obtiene mediante la suma algebraica de ambas intensidades:

$$I = I_1 + I_2 = 1{,}1 + 0{,}73 = 1{,}83\ A$$

b.1. ***Cálculo de las Intensidades eficaces I_1, I_2, e I cuando la frecuencia es 50 Hz.***

Como queda dicho, la intensidad I_1 en R_1 no depende de la frecuencia de la corriente por lo que I_1 = 1,1 A. Ahora la frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 314 \ rad/s$$

y la intensidad I_2:

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = \frac{\varepsilon}{Z_2} = \frac{220}{\sqrt{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{220}{\sqrt{300^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$I_2 = \frac{220}{\sqrt{9.10^4 + \left(0,5 \ . \ 314 - \frac{1}{8.10^{-6} \ . \ 314}\right)^2}} = 0,57 \ A$$

Esta intensidad I_2 no está en fase con la f.e.m. siendo el desfase:

$$tg \ \delta_2 = \frac{X_L - X_C}{R_2} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_2} = \frac{(0,5 \ . \ 314) - \frac{1}{8.10^{-6} \ . \ 314}}{300} = - 0,80$$

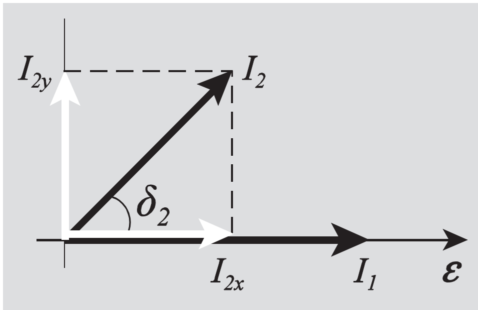
$$\delta_2 = - 38,75^{\circ}$$

en la que el signo negativo indica que I_2 está adelantada respecto de la f.e.m. según se indica en la fig. 2.

La intensidad I es la suma *fasorial* de I_1 e I_2. Para efectuar esta suma se descompone el fasor I_2 en los I_{2X} e I_{2y} (fig.2), siendo:

$$I_{2x} = I_2 \cos \delta_2 = 0,57 \cos 38,75 = 0,44 \ A$$

$$I_{2y} = I_2 \ sen \ \delta_2 = 0,57 \ sen \ 38,75 = 0,36 \ A$$



con lo que la intensidad I queda (ver fig. 3):

$$I = \sqrt{(I_1 + I_{2x})^2 + I_{2y}^2} = \sqrt{(1,1 + 0,44)^2 + 0,36^2}$$

$$I = 1,58 \ A$$

b.2. ***Cálculo del desfase en este caso.***

De la fig. 3 se deduce que:

$$tg \ \delta = \frac{I_{2y}}{I_1 + I_{2x}} = \frac{0,36}{1,1 + 0,44} = 0,23$$

$$\delta = 13,2^{\circ}$$

estando la intensidad I adelantada respecto de la f.e.m. como se indica en la fig. 3.

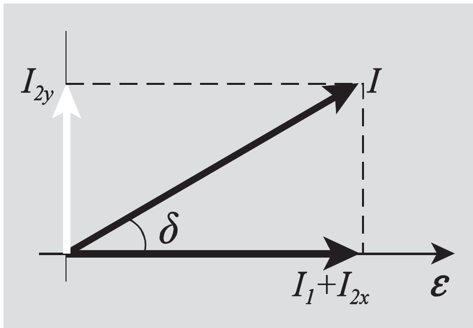
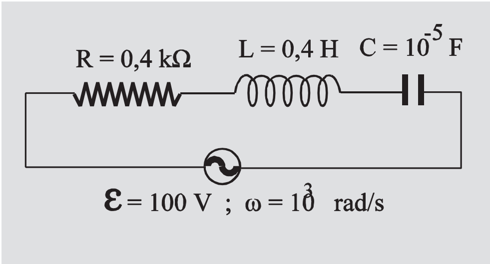


fig. 3

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el circuito de la figura, calcular:
a) la intensidad eficaz.
b) el voltaje eficaz en cada uno de los elementos del circuito.
c) calcular la frecuencia y la intensidad en el caso de la resonancia.



Solución: a) 0,2 A
b) V_R = 80 V, V_C= 20 V, V_L = 80 V.
c) 79,6 Hz; b) 0,25 A.

2. Un transformador tiene un primario de 500 vueltas que está conectado a 120 V eficaces. Su bobina secundaria posee tres conexiones diferentes para dar tres salidas de 2,5, 7,5 y 9 V. ¿Cuántas vueltas son necesarias para cada una de las partes de la bobina secundaria?

Solución: 10, 31 y 38 vueltas.

3. Se conecta en serie con un generador de corriente alterna de 60 Hz una bobina de 0,25 H y un condensador C. Se utiliza un voltímetro de corriente alterna para medir la tensión eficaz que aparece por separado en la bobina y en el condensador. La tensión eficaz que aparece en el condensador es 75 V y en la bobina 50 V.
a) Hallar la capacidad C y la corriente eficaz en el circuito
b) ¿Cuál será el valor de la tensión eficaz medida en el conjunto condensador-bobina?

Solución: a) $18{,}7.10^{-6}$ F ; 0,53 A
b) 25 V.

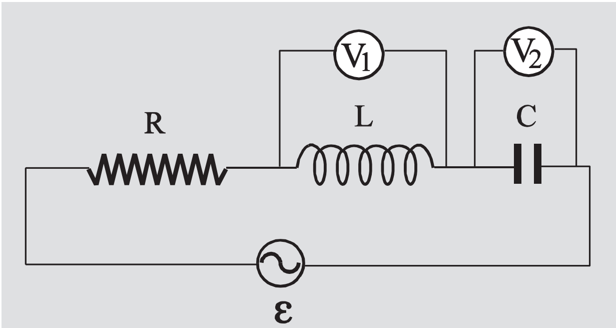
4. Una bobina con resistencia e inductacia se conecta a un generador de 60 Hz y 120 V eficaces. La potencia media suministrada a la bobina es 60 W y la corriente eficaz es 1,5 A. Hallar:
a) La resistencia de la bobina.
b) La inductancia de la bobina.
c) el desfase entre la corriente y la tensión.

Solución: a) 26,7 Ω
b) 0,200 H
c) 70º.

5. En un circuito **RCL** en serie, R = 10 Ω, L = 0,5 H y C = 20 μF, siendo la fuerza electromotriz eficaz del generador 220 V. Calcular:
a) la frecuencia de resonancia.
b) la potencia para esa frecuencia.
c) la anchura de resonancia.

Solución: a) 50,3 Hz
b) 4.840 W
c) 3,20 Hz.

6. En el circuito **RCL** de la figura es **R** = 200 Ω, **L** = 0,5 H y **C** = 0,1 μF. La intensidad eficaz es 0,5 A y las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 son iguales. Calcular:
a) la f.e.m. eficaz.
b) la d.d.p. en la resistencia.
c) la frecuencia.
d) las d.d.p. V_1 y V_2.

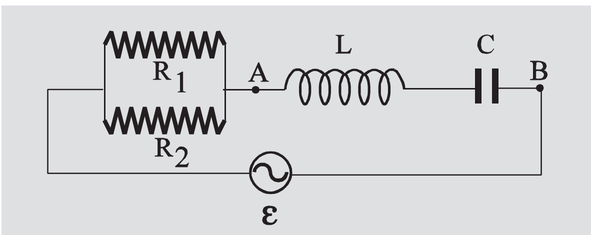


Solución: a) 100 V
b) 100 V
c) 711,7 Hz
d) 1.118 V

7. A los extremos de una bobina, cuya resistencia en corriente contínua es de 8 Ω, se aplica una diferencia de potencial alterna de 220 V eficaces y 50 Hz, obteniéndose una corriente eficaz de 22 A
a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de autoinducción de la bobina?
b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre la intensidad y la d.d.p. en los extremos de la bobina?

Solución: a) $1{,}91.10^{-2}$ H.
b) 36,9º.

8. En el circuito de la figura es: $\mathbf{R_1}$ = 3.000 Ω, $\mathbf{R_2}$ = 600 Ω, **L** = (10/π) H, **C** = (20/π) μF y **ε** = 250√2.cos ωt, siendo la frecuencia 50 Hz. Calcular:
a) la intensidad en **L** y en **C**.
b) la intensidad en cada resistencia.
c) d.d.p. eficaz entre los puntos **A** y **B**.
d) la potencia media suministrada por el generador.
e) el factor de potencia y el desfase.
f) la potencia instantánea para t = (1/200) s.

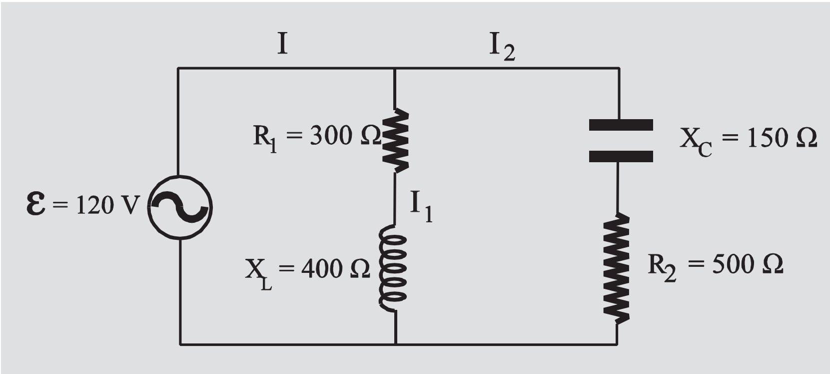


Solución: a) 0,354 A.
b) I_1 = 0,059 A ; I_2 = 0,295 A
c) 177 V.
d) 62,7 W.
e) 0,707 ; 45º
f) 0

9. A una fuente de tensión alterna se aplican ***sucesivamente*** una resistencia óhmica pura de 50 Ω, una autoinducción pura **L** y un condensador **C** midiéndose en cada caso intensidades de corriente de 4, 2 y 1 A respectivamente. ¿ Cuál es la intensidad de la corriente cuando se conectan estos tres elementos en serie a la fuente de tensión? ¿Cuál es la diferencia de fase entre corriente y f.e.m. en este caso?

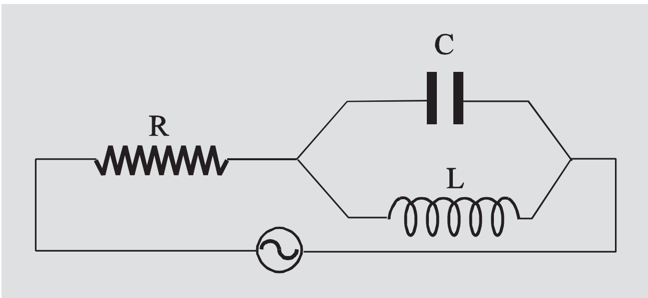
Solución: a) 1,79 A.
b) 63,4º (I adelantada).

10. En el circuito de la figura, calcular:
a) I_1, I_2 e I.
b) La diferencia de potencial en cada elemento.
c) El desfase entre I y ε.
d) ¿A qué circuito en serie de resistencia y reactancia equivale?



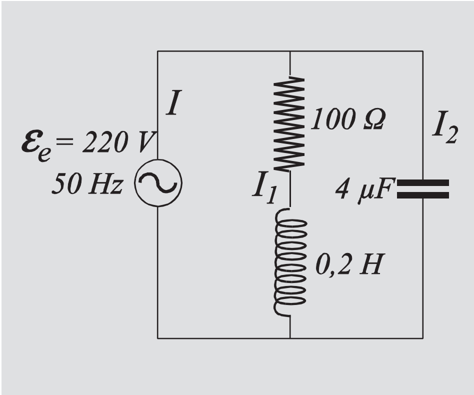
Solución: a) I_1 = 0,24 A ; I_2 = 0,23 A ; I = 0,39 A.
b) V_{R1} = 72 V ; V_{R2} = 115 V ; V_L = 96 V ; V_C = 34,5 V.
c) 19,1º.
d) R = 290 Ω ; X_L = 100 Ω.

11. En el circuito de la figura, para una cierta frecuencia, no pasa corriente por **R**. Calcular esa frecuencia expresando el resultado en función de **R**, **L** y **C**.



Solución: $f = \dfrac{1}{2.\pi.\sqrt{LC}}$

12. En el circuito de la figura, calcular:
a) la intensidad I_1.
b) el desfase de I_1 respecto de la f.e.m.
c) la intensidad I_2.
d) la intensidad I.
e) el desfase de I respecto de la f.e.m.
f) la potencia suministrada por el generador.



Solución: a) 1,86 A.
b) 32,1º
c) 0,28 A.
d) 1,73 A.
e) 24,4º.
f) 346,6 W.

PRINCIPIOS DE ELECTRÓNICA

1. A efectos de cálculo, un diodo de unión se puede reemplazar por una *fuerza electromotriz* de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia cuyo valor fuera el de la resistencia del diodo. Justificar esta afirmación.

En la fig. a se ha representado al diodo conectado a los puntos A y C de un circuito por el que pasa una corriente I y su característica I = f(V). Considerando que para $V > V_0$ el comportamiento de un diodo es cuasi-ómico (ver fig. a), de esta gráfica se deduce, teniendo en cuenta la ley de Ohm, que la pendiente es la inversa de la resistencia del diodo:

$$tg\ \alpha = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{I}{V_{AC} - V_0} = \frac{1}{R_d} \qquad \Rightarrow \qquad V_{AC} = V_0 + IR_d \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

siendo $\mathbf{V_0}$ la tensión umbral del diodo, $\mathbf{V_{AC}}$ la tensión aplicada a sus extremos y R_d la resistencia del diodo.

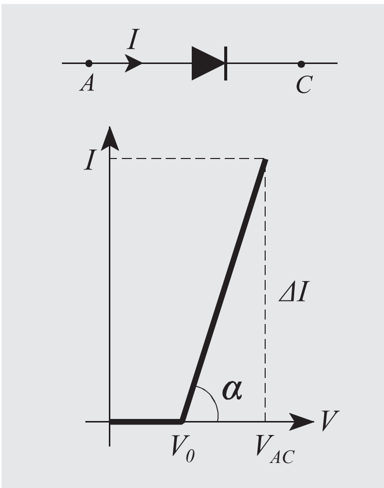


fig. a

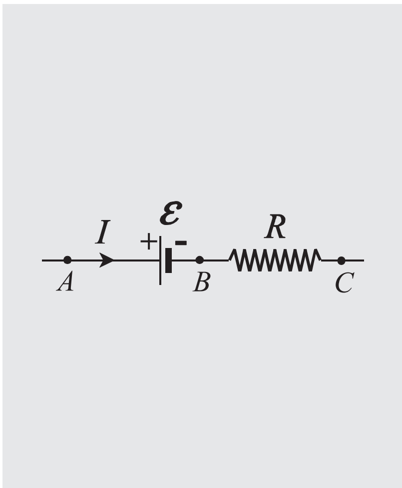


fig. b

En una asociación de una *fuerza electromotriz* **opuesta** al sentido de la corriente y una resistencia (fig. b):

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = \varepsilon + IR \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

y comparando las expresiones (1) y (2) se deduce la *equivalencia* entre un diodo de potencial umbral V_0 y resistencia R_d y una asociación de una *fuerza electromotriz* $\varepsilon = V_0$ en oposición a la corriente y una resistencia $R = R_d$.

2. **La curva característica del diodo utilizado en el circuito de la fig. 1 se puede aproximar por la indicada en la fig. 2. Hallar:**

a) La tensión umbral del diodo y la resistencia del diodo.
b) La intensidad que circula a través del diodo. (Tener en cuenta la tensión umbral del diodo).
c) La tensión aplicada al diodo.
d) La potencia disipada en el diodo.

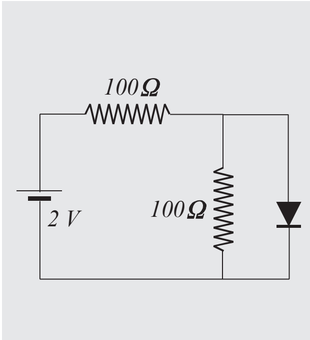


fig. 1

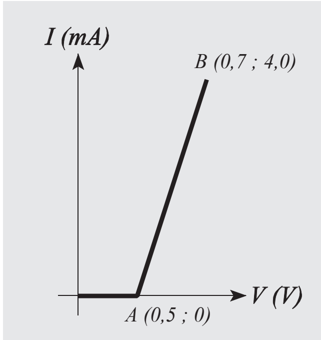


fig. 2

a.1. ***Cálculo de la tensión umbral del diodo.***

De la fig. a se deduce que el diodo permite el paso de la corriente cuando la tensión que se le aplica es mayor que 0,5 V, por lo que:

$$V_0 = 0{,}5 \ V$$

a.2. ***Cálculo de la resistencia del diodo.***

En la característica del diodo I = f (V), según la ley de Ohm, la resistencia es la inversa de la pendiente. En la fig. a:

$$tg \ \alpha = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{4.10^{-3}}{0{,}7 - 0{,}5} = 20.10^{-3} = \frac{1}{R_D} \qquad \Rightarrow \qquad R_D = 50 \ \Omega$$

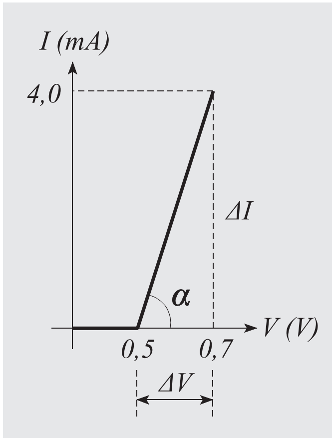


fig. a

b. ***Cálculo de la intensidad que circula a través del diodo.***

De acuerdo con lo visto en el problema anterior, en el circuito inferior de la fig. b se ha reemplazado el diodo por una f.e.m. de 0,5 V (potencial umbral del diodo) y una resistencia de 50 Ω (resistencia del diodo).

En la malla izquierda ABCA:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$

$$100 \ I_1 + (-2) + 100 \ I = 0 \ \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

En el nudo A:

$$I_1 + I_2 = I \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

En la malla derecha ABDA:

$$V_{AB} + V_{BD} + V_{DA} = 0$$

$$100 \ I_1 - 50 \ I_2 + (-0{,}5) = 0 \ \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

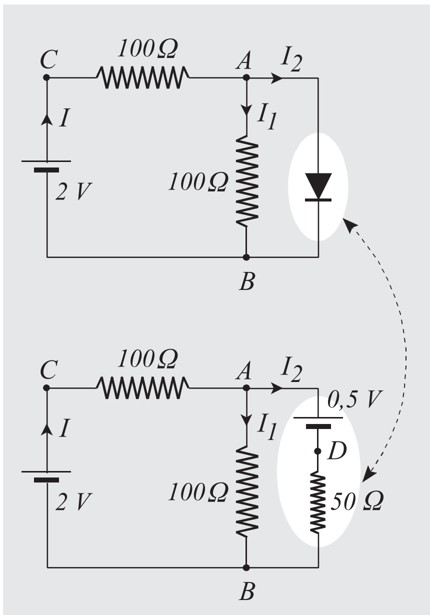


fig. b

y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) a (3):

$$I_1 = 7{,}5.10^{-3} \ A = 7{,}5 \ mA \qquad ; \qquad I_2 = 5.10^{-3} \ A = 5 \ mA$$

$$I = 12{,}5.10^{-3} \ A = 12{,}5 \ mA$$

c. ***Cálculo de la tensión aplicada al diodo.***

El diodo está conectado a los puntos A y B. La d.d.p. entre estos puntos se puede calcular aplicando la ley de Ohm a la rama central del circuito:

$$V_{AB} = 100\ I_1 = 100\ (7{,}5.10^{-3}) = 0{,}75\ V$$

d. ***Cálculo de la potencia disipada por el diodo.***

Mediante un balance de energía, la potencia aportada por la pila ha de ser igual a la disipada por el diodo y por las dos resistencias, por lo que:

$$P_{disipada\ por\ el\ diodo} = P_{suministrada\ por\ la\ pila} - P_{disipada\ por\ R_1} - P_{disipada\ por\ R_2}$$

$$P_{disipada\ por\ el\ diodo} = \varepsilon I - 100\ I^2 - 100\ I_1^2 = 2\ (12{,}5.10^{-3}) - 100\ (12{,}5.10^{-3})^2 - 100\ (7{,}5.10^{-3})^2$$

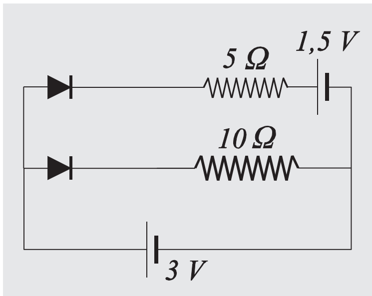
$$P_{disipada\ por\ el\ diodo} = 3{,}75.10^{-3}\ W = 3{,}75\ mW$$

3. En el circuito de la figura, los dos diodos tienen un voltaje umbral de 0,6 V y una resistencia en polarización directa de 5 Ω.

a) Calcular la intensidad que circula por cada uno de los diodos.

b) Calcular la potencia suministrada por las pilas.

c) Repetir los apartados anteriores si la pila de la rama inferior se sustituye por otra de f.e.m. 1,5 V.



Reemplazando cada uno de los diodos por una f.e.m. y una resistencia (ver problema nº 1) y asignando un sentido arbitrario a cada una de las corrientes, el circuito queda como se indica en la fig. a.

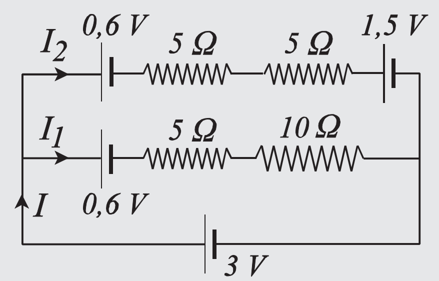


fig. a

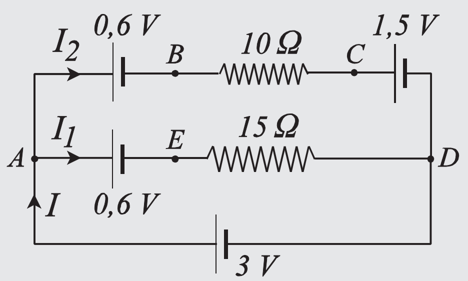


fig. b

a. ***Cálculo de la intensidad que circula por cada uno de los diodos.***

En la malla inferior AEDA (ver fig. b):

$$V_{AE} + V_{ED} + V_{DA} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6 + 15\ I_1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0{,}16\ A = 160\ mA$$

En la malla superior ABCDEA (fig. b):

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6 + 10\ I_2 + 1{,}5 - 15\ I_1 - 0{,}6 = 0$$

$$10\ I_2 - 15\ I_1 = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 0{,}09\ A = 90\ mA$$

En el nudo A: $$I = I_1 + I_2 = 160 + 90 = 250\ mA$$

Comentario: puesto que todas las intensidades calculadas son positivas, se deduce que su sentido es el que se asignó arbitrariamente en el planteamiento del problema, sentido que coincide con aquél en que los diodos son conductores.

b. ***Cálculo de la potencia suministrada por las pilas.***

$$P_{1,5\ V} = I_2\ \varepsilon = 0{,}09\ .\ 1{,}5 = 0{,}135\ W \quad ; \quad P_{3\ V} = I\ \varepsilon = 0{,}25\ .\ 3 = 0{,}75\ W$$

c. ***Repetición de los apartados anteriores cuando la f.e.m. de la pila de la rama inferior es de 1,5 V.***

En este caso el circuito queda como se indica en la fig. b.

c.1. ***Cálculo de la intensidad que circula por cada uno de los diodos.***

En la malla inferior AEDA:

$$V_{AE} + V_{ED} + V_{DA} = 0$$

$$0{,}6 + 15\ I_1 - 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0{,}06\ A = 60\ mA$$

En la malla exterior ABCDA:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

$$0{,}6 + 10\ I_2 + 1{,}5 - 1{,}5 = 0$$

$$I_2 = -0{,}06\ A = -60\ mA$$

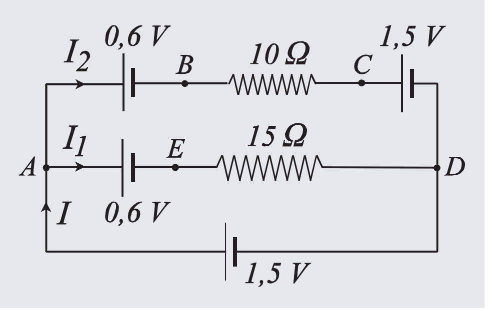


fig. b

Comentario: en este caso, la intensidad I_2 es negativa y de ello se deduce que su sentido real es contrario al asignado a priori quedando el diodo superior en polarización inversa y, en consecuencia, la corriente no pasará por la rama superior. El circuito queda entonces reducido al que se indica en la fig. c estando recorrido por la intensidad:

$$I = I_1 = 60\ mA$$

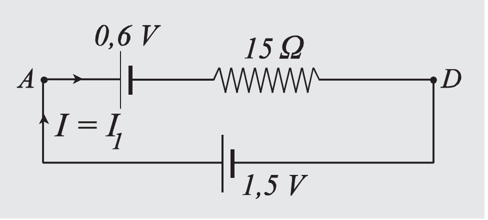


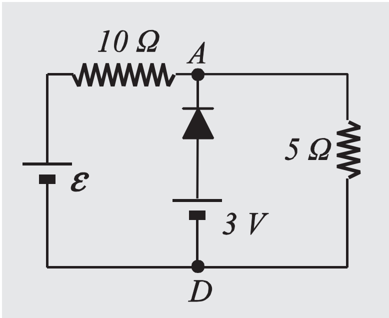
fig. c

c.2. ***Cálculo de la potencia suministrada por las pilas.***

$$P_{1,5\ V} = I\ \varepsilon = 0{,}06\ .\ 1{,}5 = 0{,}09\ W$$

La pila de la rama superior (fig. b) no suministra potencia ya que, ahora, no circula corriente por esa rama.

4. El diodo del circuito de la figura tiene un potencial umbral de 0,5 V y una resistencia de 20 Ω. ¿Para qué valores de ε pasará corriente por la rama AD?



Planteamiento: asignamos a las corrientes I, I_1 e I_2 los sentidos indicados en la fig. a. Estas tres intensidades dependen, lógicamente, del valor de ε. En particular, si se determina la forma de la función $I_1 = f(\varepsilon)$, no pasará corriente por la rama AD para aquellos valores de ε que hagan negativa a I_1 ya que el diodo únicamente permite el paso de la corriente en el sentido indicado. Para conocer la forma de esta función aplicamos las leyes de Kirchoff teniendo en cuenta que, a efectos de cálculo, un diodo de unión se puede reemplazar por una *fuerza electromotriz* de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia cuyo valor sea el de la resistencia del diodo (ver problema nº 1), como se indica en la fig. a.

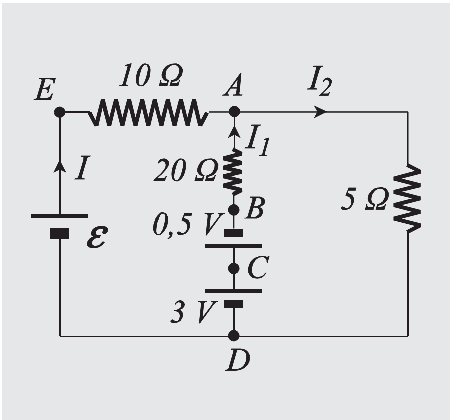


fig. a

Malla izquierda:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EA} = 0$$

$$-20\,I_1 - 0{,}5 + 3 - \varepsilon + 10\,I = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Malla derecha:

$$V_{AD} + V_{DC} + V_{CB} + V_{BA} = 0$$

$$5\,I_2 - 3 + 0{,}5 + 20\,I_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

*Nudo **A**:*

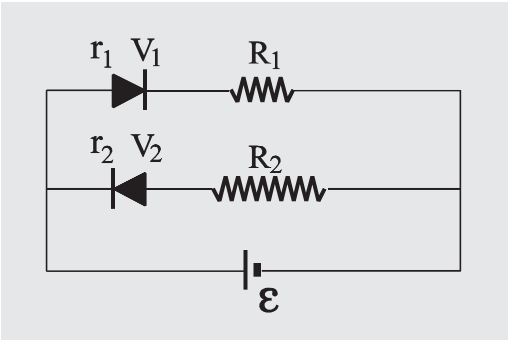
$$I + I_1 = I_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) se llega a:

$$I_1 = \frac{7{,}5 - \varepsilon}{70}$$

En consecuencia, para **ε** < 7,5 V la corriente I_1 tomará valores positivos y tendrá el sentido asignado en la fig.**a**, sentido en el que el diodo es coductor, por lo que pasará corriente por la rama **AD**. Para valores de **ε** ≥ 7,5 V la corriente I_1 será nula o tomará valores negativos y tendría sentido contrario al asignado en la fig. **a**, sentido en el que el diodo no es coductor.

5. En el circuito de la figura, r_1 , r_2 , V_1 y V_2 son, respectivamente, las resistencias y tensiones umbral de los diodos de unión. ¿Para qué valores de ε circulará corriente por cada uno de los diodos?



Sustituyendo cada diodo por una *fuerza electromotriz* de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia cuyo valor es el de la resistencia del diodo (ver problema nº 1), el circuito queda como se indica en la fig. a, en la que se han asignado sentidos arbitrarios a las corrientes.

En la malla exterior (ABCDA):

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

$$V_1 + I_1 r_1 + I_1 R_1 - \varepsilon = 0$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon - V_1}{r_1 + R_1}$$

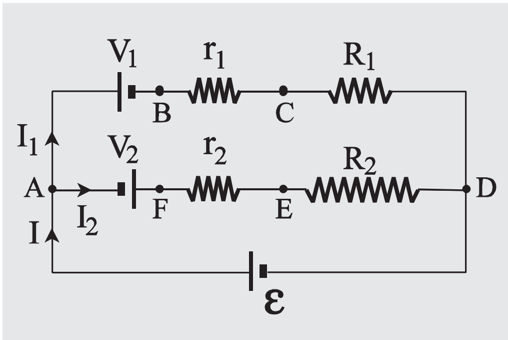


fig. a

resultado del que se deduce que:

1º) si $\varepsilon > V_1$ la intensidad I_1 es positiva y tiene el sentido asignado en la figura que es, justamente, el sentido en el que el diodo *1* es conductor.

2º) si $\varepsilon \leq V_1$ la intensidad I_1 es negativa teniendo sentido contrario al asignado en la figura, sentido en el que el diodo *1* no es conductor.

En la malla inferior (AFEDA):

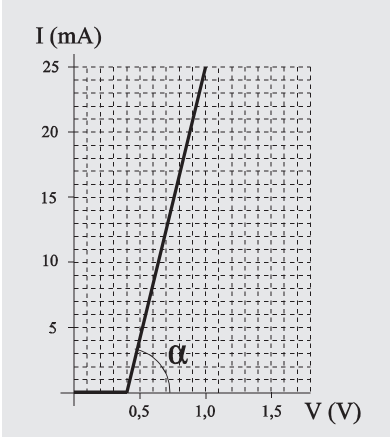
$$V_{AF} + V_{FE} + V_{ED} + V_{DA} = 0$$

$$- V_2 + I_2 r_2 + I_2 R_2 - \varepsilon = 0$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon + V_2}{r_2 + R_2}$$

De este resultado se deduce que la intensidad I_2 va a ser siempre positiva para cualquier valor de ε, teniendo por tanto el sentido asignado en la figura que es, justamente, el sentido en el que el diodo *2* no es conductor. En consecuencia, por este diodo no pasa corriente cualesquiera que sea el valor de ε.

6. **Un diodo de unión, cuya característica se representa en la figura, se asocia en serie a una resistencia de 100 Ω y a una pila de 1,5 V. Determinar:**
a) la tensión umbral del diodo y su resistencia.
b) el punto de funcionamiento:
b.1) gráficamente.
b.2) analíticamente.



a.1) De la gráfica se deduce que el potencial a partir del cual el diodo es conductor, es decir, su tensión umbral, es 0,4 V.

a.2) La resistencia del diodo R_d se obtiene a partir de la pendiente del tramo de la característica en el que el diodo tiene un comportamiento cuasi-óhmico:

$$tg\ \alpha = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{25.10^{-3}}{1 - 0{,}4} = 4{,}17.10^{-2} = \frac{1}{R_d}$$

$$R_d = 24\ \Omega$$

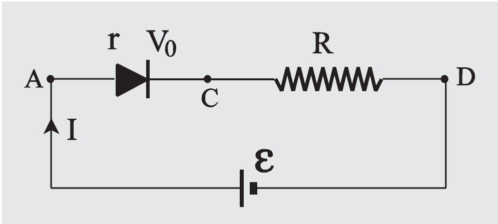


fig. a.

b.1) Determinación gráfica del punto de funcionamiento:

De la fig. a se deduce la ecuación del circuito:

$$V_{AC} + V_{CD} + V_{DA} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_d + 100\ I - 1{,}5 = 0$$

$$I = \frac{1{,}5 - V_d}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

siendo V_d la tensión aplicada al diodo.

Esta ecuación permite el trazado de la *recta de carga* a partir de dos de sus puntos:

para I = 0 → V_d = 1,5 V → A (1,5 ; 0)

para V_d=0 → I = $1{,}5.10^{-2}$ A = 15 mA. → B (0 ; 15)

Puesto que el punto de funcionamiento **P** ha de satisfacer a la característica del diodo y a la ecuación del circuito (1), sus coordenadas vienen definidas por la intersección de ambas (fig. b):

P (0,6 V ; 9 mA)

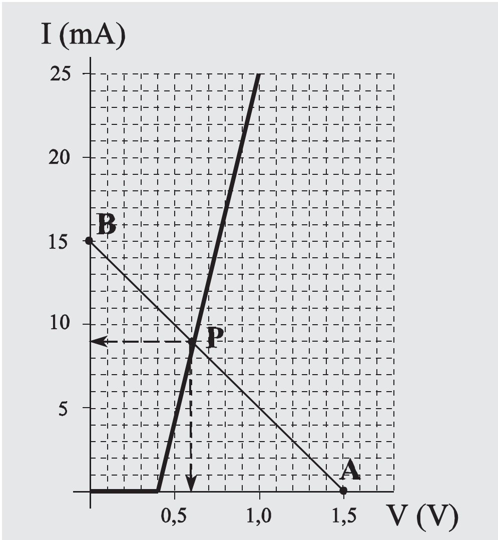


fig. b.

b.2) Determinación analítica del punto de funcionamiento:

Sustituyendo el diodo por una *fuerza electromotriz* de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia cuyo valor es el de la resistencia del diodo (ver problema nº 1), el circuito queda como se indica en la fig. c.

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

$$0{,}4 + 24\ I + 100\ I - 1{,}5 = 0$$

$$I = 8{,}9.10^{-3}\ A = 8{,}9\ mA$$

$$V_d = V_{AB} = 0{,}4 + 24\ I = 0{,}4 + 8{,}9.10^{-3}.24 = 0{,}61\ V$$

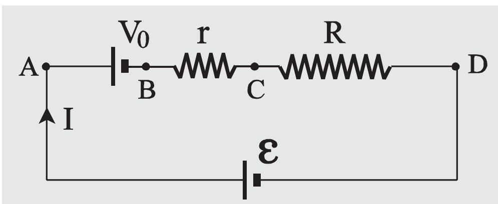
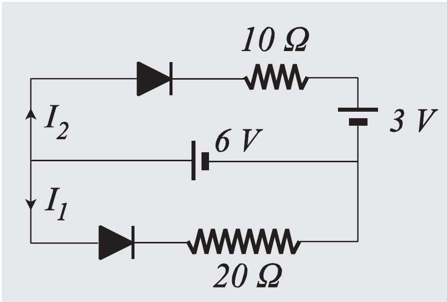


fig. c.

7. En el circuito de figura I_1 = 0,16 A e I_2 = 0,09 A. ¿Cuál será el valor de la resistencia (en polarización directa) y del voltaje umbral de los diodos del circuito de la figura, si se suponen iguales?



Reemplazando cada diodo por una *fuerza electromotriz* de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia cuyo valor es el de la resistencia del diodo (ver problema nº 1), el circuito queda como se indica en la fig. a.

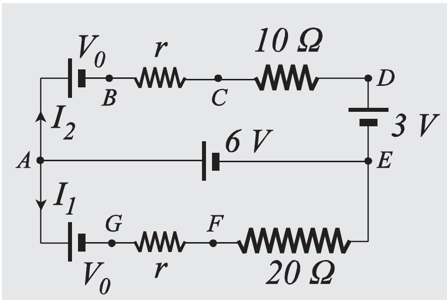


fig. a

En la malla superior:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EA} = 0$$

$$V_0 + I_2 r + I_2 .10 + 3 - 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En la malla inferior:

$$V_{AE} + V_{EF} + V_{FG} + V_{GA} = 0$$

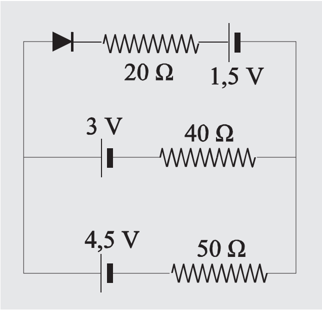
$$6 - I_1 .20 - I_1 .r - V_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En el marco del sentido convencional de la corriente, que es el adoptado con carácter general en toda la bibliografía y, por supuesto, también en este *Manual*, las cargas se desplazan desde puntos de mayor a menor potencial. En consecuencia, el punto **F** está a mayor potencial que el **E** y la d.d.p. $V_{EF} = V_E - V_F$ de la expresión (2), es negativa. Por la misma razón es negativa también la d.d.p. $V_{FG} = V_F - V_G$ entre los puntos **F** y **G**.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se llega a la solución:

r = 10 Ω ; V_0 **= 1,2 V**

8. El diodo de la figura tiene un potencial umbral V_o y su resistencia interna es r. ¿Para qué valores de V_o no pasará corriente por la rama superior?



Reemplazando el diodo por una *fuerza electromotriz* V_0 de valor igual al potencial umbral del diodo, asociada en serie con una resistencia **r** cuyo valor es el de la resistencia del diodo (ver problema nº 1), el circuito queda como se indica en la fig. a.

En la malla superior:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} + V_{FA} = 0$$

$$V_0 + I_1 r + 20\,I_1 + 1{,}5 - 40\,I_2 - 3 = 0$$

$$I_1 = \frac{40\,I_2 - V_0 + 1{,}5}{r + 20} \quad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

En la malla inferior:

$$V_{AF} + V_{FE} + V_{EG} + V_{GA} = 0$$

$$3 + 40\,I_2 + 50\,I_3 - 4{,}5 = 0 \quad \ldots\ldots \ (2)$$

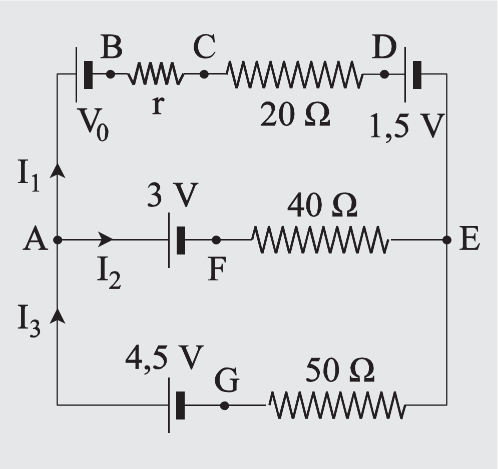


fig. a

En el nudo A: $I_3 = I_1 + I_2$

Cuando no pase corriente por la rama superior es $I_1 = 0$ quedando $I_2 = I_3$. Sustituyendo en (2) queda:

$$I_2 = 0{,}0166\ A$$

Por último, llevando este valor a la expresión (1) queda:

$$I_1 = \frac{2{,}17 - V_0}{r + 20}$$

Discusión: a) si $V_0 < 2{,}17$ V la intensidad I_1 tomará valores positivos, teniendo por tanto el sentido asignado en la fig. a, sentido en el que el diodo es conductor.

b) si $V_0 > 2{,}17$ V la intensidad I_1 tomaría valores negativos, lo que implicaría que tendría sentido contrario al asignado en la fig. a, sentido en el que el diodo NO es conductor.

c) si $V_0 = 2{,}17$ V la intensidad I_1 es nula.

d) el valor de V_0 para el cual no pasa corriente por la rama superior no depende de la resistencia r del diodo.

Conclusión: no pasará corriente por la rama superior para $V_0 \geq 2{,}17$ V.

9. En la fig. b se representa la característica del diodo de la fig. a.

a) ¿Para qué valores de ε lucirá la bombilla B?

b) ¿Qué intensidad pasará por la bombilla cuando ε = 7 V?

c) Determinar gráficamente el punto de funcionamiento del diodo para ε = 7 V.

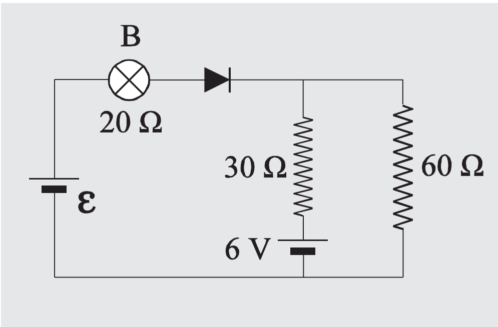


fig. a

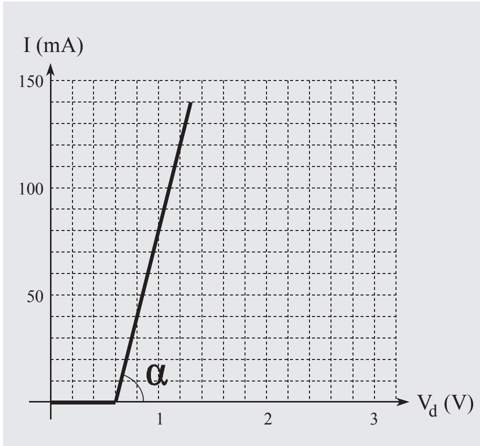


fig.b

a. 1) ***Potencial umbral del diodo.***

De la gráfica se deduce que el potencial umbral, a partir del cual el diodo conduce la corriente es $\mathbf{V_0}$ **= 0,6 V.**

a. 2) ***Cálculo de la resistencia del diodo.***

La pendiente de la recta es:

$$m = tg\ \alpha = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{140\ mA}{(1,3 - 0,6)\ V} = \frac{0,14\ A}{0,7\ V} = 0,2\ A/V = \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{0,2} = 5\ \Omega$$

a. 3) ***Cálculo de los valores de ε.***

A efectos de cálculo el diodo del circuito se puede reemplazar por una f.e.m. opuesta al sentido en el que el diodo es conductor, asociada en serie a una resistencia igual a la del diodo (fig. c).

Asignando arbitrariamente un sentido a cada una de las corrientes y aplicando las leyes de Kirchhoff:

en el nudo **N**: $I_1 + I_2 = I_3$ . . . . (1)

en la malla izquierda:

$$20\ I_1 + (0,6 + 5\ I_1) - 30\ I_2 + 6 = \varepsilon \quad (2)$$

en la malla derecha:

$$30\ I_2 + 60\ I_3 = 6 \quad \text{. . . . . (3)}$$

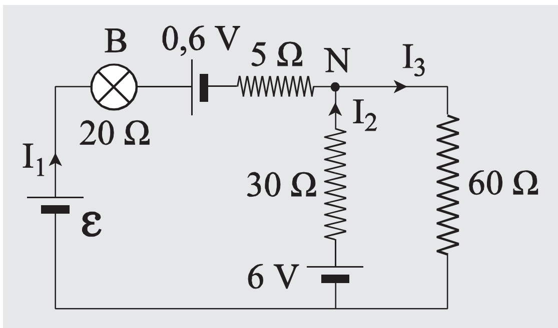


fig. c

La resolución de este sistema de ecuaciones, eliminado I_2 e I_3, conduce al resultado:

$$I_1 = \frac{\varepsilon - 4,6}{45}$$

Discusión de este resultado:

si $\varepsilon > 4{,}6$: I_1 tiene signo positivo. En consecuencia, esta intensidad tiene el sentido asignado arbitrariamente que es, precisamente, el sentido en el que el diodo permite el paso de la corriente: la bombilla lucirá.

si $\varepsilon \leq 4{,}6$: I_1 es nula o tiene signo negativo. En consecuencia, esta intensidad tiene sentido contrario al asignado arbitrariamente, sentido en el que el diodo **no** permite el paso de la corriente: la bombilla no lucirá.

b. ***Cálculo de la intensidad.***

$$I_1 = \frac{\varepsilon - 4{,}6}{45} = \frac{7 - 4{,}6}{45} = 0{,}053\ A = 53\ mA$$

c. ***Determinación gráfica del punto de funcionamiento.***

En la ecuación (2) el término entre paréntesis es la d.d.p. en los extremos del diodo V_d:

$$20\ I_1 + V_d - 30\ I_2 + 6 = \varepsilon$$

y eliminado I_2 haciendo uso de las ecuaciones (1) y (3) se llega a la ecuación de la recta de carga:

$$40\ I_1 + V_d = 3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (4)$$

El trazado de esta recta se realiza localizando dos de sus puntos:

para $I_1 = 0$ → $V_d = 3$ V → A (3,0 V ; 0 mA)
para $V_d = 0$ → $I_1 = 0{,}075$ A = 75 mA → B (0 V ; 75 mA)

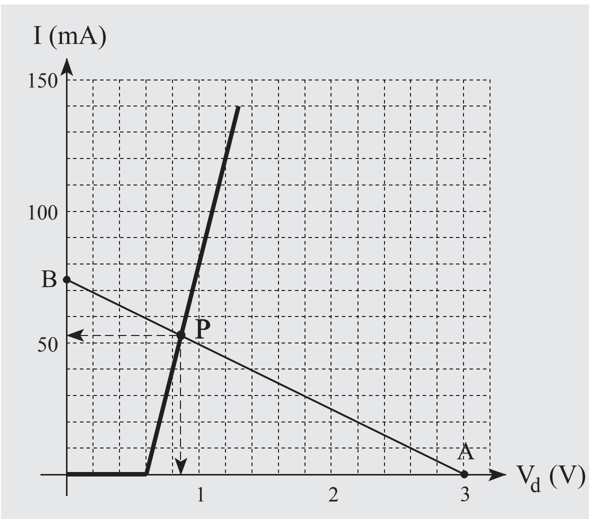


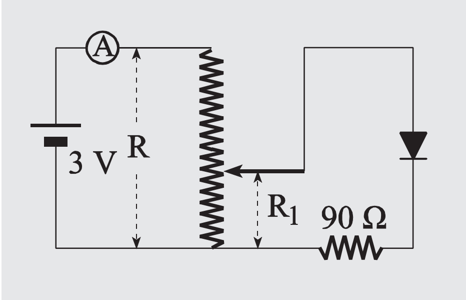
fig. d

Puesto que el diodo responde a su característica (fig. b) y a la recta de carga (4) del circuito en el que se encuentra, el punto de funcionamiento (**P**) del diodo va a venir definido por la intersección de ambas, siendo sus coordenadas (fig. d):

P (0,85 V ; 53 mA)

valor que concuerda con el obtenido en el apartado b).

10. **El diodo del circuito de la figura permite el paso de la corriente para valores de R_1 mayores de 50 Ω siendo la lectura del amperímetro *A* de 10 mA cuando R_1 = 50 Ω y de 11 mA cuando R_1 = 100 Ω. Calcular:**
a) la resistencia R.
b) el potencial umbral del diodo.
c) la resistencia del diodo.



Primera posición del cursor (R_1 = 50 Ω, I_1 = 0, I = I_2 = 10 mA).

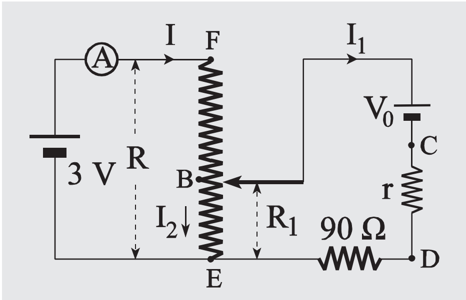


fig. a

a. ***Cálculo de R.***

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{3}{10.10^{-3}} = 300\ \Omega$$

b. ***Cálculo del potencial umbral.***

En la malla derecha:

$$V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EB} = 0$$

$$V_0 + I_1 r + 90 I_1 - I_2 R_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

y como, según el enunciado, el diodo permite el paso de la corriente únicamente cuando R_1 toma valores ***mayores*** de 50 Ω, para R_1 = 50 Ω no circula corriente por el diodo, siendo por lo tanto $I_1 = 0$ (fig. a).

Por otra parte, en el nudo **B** (fig. a):

$$I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I = 10\ mA$$

con lo que la expresión (1) queda:

$$V_0 - R_1 I = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = R_1 I = 50\ (10.10^{-3}) = 0{,}5\ V$$

Segunda posición del cursor (R_1 = 100 Ω, I = 11 mA ≠ I_2, I_1 ≠ 0).

c. ***Cálculo de la resistencia del diodo.***

En la malla izquierda:

$$V_{FB} + V_{BE} + V_{EF} = 0$$

$$I\ (R - R_1) + I_2 R_1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 11.10^{-3}\ (300 - 100) + 100 I_2 - 3 = 0$$

$$I_2 = 8.10^{-3}\ A = 8\ mA$$

En el nudo B: $\quad I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 11 - 8 = 3\ mA$

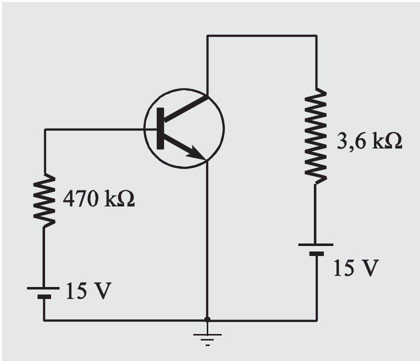
En la malla derecha:

$$V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EB} = 0$$

$$V_0 + I_1 r + 90\ I_1 - I_2 R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 + 3.10^{-3}\ r + 90\ (3.10^{-3}) - (8.10^{-3})100 = 0$$

$$r = 10\ \Omega$$

11. **En el circuito de la figura la d.d.p V_{BE} = 0,7 V, siendo la ganancia β = 100. Calcular:**
a) I_B , I_C e I_E .
b) la tensión colector emisor (V_{CE}).



a.1. ***Cálculo de la intensidad de base.***

En la malla izquierda (fig. a):

$$V_{DB} + V_{BE} + V_{EG} + V_{GD} = 0$$

$$4{,}7.10^5\ I_B + 0{,}7 + 0 - 15 = 0$$

$$I_B = 3{,}04.10^{-5}\ A = 30{,}4\ \mu A$$

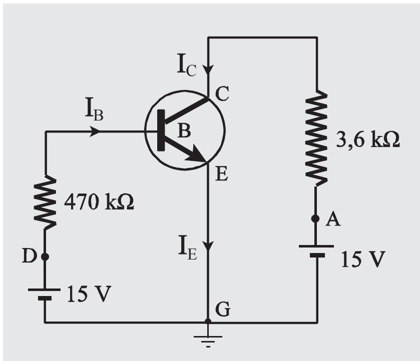


fig. a

a.2. ***Cálculo de la intensidad de colector.***

$$\beta = 100 = \frac{I_C}{I_B} \quad \Rightarrow \quad I_C = 100\ I_B$$

$$I_C = 100\ (3{,}04.10^{-5}) = 3{,}04.10^{-3}\ A = 3{,}04\ mA$$

a.3. ***Cálculo de la intensidad de emisor.***

$$I_E = I_B + I_C = 3{,}04.10^{-5} + 3{,}04.10^{-3}\ A = 3{,}07.10^{-3}\ A = 3{,}07\ mA$$

b. ***Cálculo de la tensión colector emisor.***

En la malla derecha (fig. a):

$$V_{CE} + V_{EG} + V_{GA} + V_{AC} = 0$$

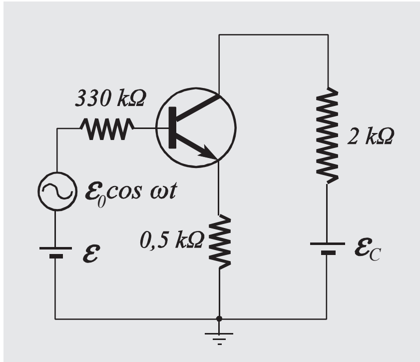
$$V_{CE} + 0 - 15 + 3{,}6.10^3\ I_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CE} - 15 + 3{,}6.10^3\ (3{,}04.10^{-3}) = 0$$

$$V_{CE} = 4{,}06\ V$$

12. La ecuación de la recta de carga del transistor en el circuito de la figura es:

$$I_C = 6.10^{-3} - 4.10^{-4}\ V_{CE}$$

siendo la ganancia $\beta = 65$ y la diferencia de potencial base emisor $V_{BE} = 0{,}7$ V. Sabiendo que los valores máximo y mínimo de las intensidades de base son 31,1 μA y 14,6 μA, calcular los valores de ε, ε_0 y ε_C.



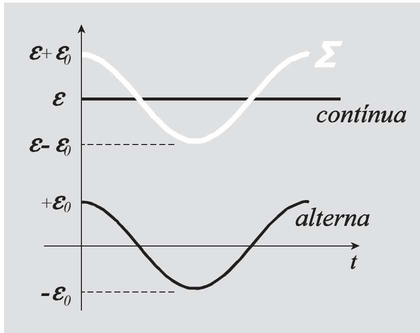


fig. a

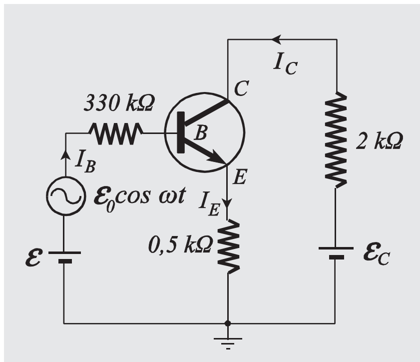


fig. b

a. ***Cálculo de ε y ε_0.***

En la malla izquierda (fig. b):

$$3{,}3.10^5\ I_B + V_{BE} + 500\ I_E = \varepsilon + \varepsilon_0 \cos \omega t \quad ..\ (1)$$

en la que:

$$I_E = I_B + I_C = I_B + \beta\ I_B = I_B + 65\ I_B = 66\ I_B$$

Para cos ωt = 1 el término $\varepsilon + \varepsilon_0$ cos ωt queda $\varepsilon + \varepsilon_0$ y la intensidad de base toma su valor máximo (I_B = 31,1 μA) con lo que la expresión (1) queda:

$$3{,}3.10^5\ (31{,}1.10^{-6}) + 0{,}7 + 500\ (66)\ (31{,}1.10^{-6}) = \varepsilon + \varepsilon_0$$

Para cos ωt = - 1 el término $\varepsilon + \varepsilon_0$ cos ωt queda $\varepsilon - \varepsilon_0$ y la intensidad de base toma su valor mínimo (I_B = 14,6 μA) con lo que la expresión (1) queda:

$$3{,}3.10^5\ (14{,}6.10^{-6}) + 0{,}7 + 500\ (66)\ (14{,}6.10^{-6}) = \varepsilon - \varepsilon_0$$

La resolución del sistema formado por estas dos ecuaciones ofrece el resultado:

$$\varepsilon = 9\ V \quad ; \quad \varepsilon_0 = 3\ V$$

b. ***Cálculo de ε_C .***

En la malla derecha (fig. b): $\quad 2.10^3\ I_C + V_{CE} + 500\ I_E = \varepsilon_C$

en la que: $\quad I_E = I_C + I_B = I_C + \dfrac{I_C}{\beta} = I_C + \dfrac{I_C}{65} = 1{,}015\ I_C$

quedando al sustituir:

$$2.10^3\ I_C + V_{CE} + 507{,}5\ I_C = \varepsilon_C \quad \Rightarrow \quad I_C = \frac{\varepsilon_C}{2507{,}5} - \frac{V_{CE}}{2507{,}5}$$

expresión que, por comparación con la ecuación de la recta de carga, ofrece la solución:

$$\frac{\varepsilon_C}{2507{,}5} = 6.10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_C = 15\ V$$

13. El transistor PNP cuyas características son las de la fig. a, está montado como se indica en la fig. b. Sabiendo que V_{EB} = 0,6 V:
a) estimar la ganancia a partir de la característica $I_C = f(V_{EC})$.
b) Trazar la recta de carga.
c) Determinar el punto de trabajo.

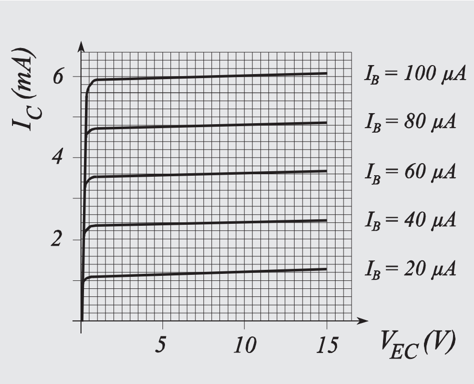


fig. a.

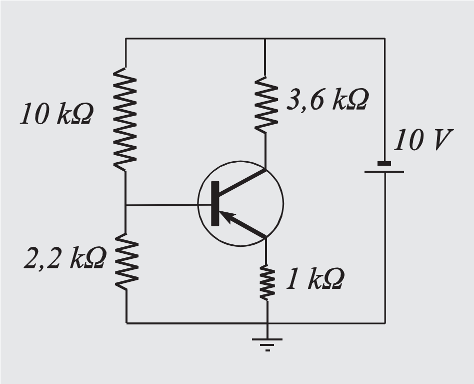


fig. b.

a. ***Estimación de la ganancia a partir de la característica***.

A partir de la característica, tomando el incremento de la intensidad de colector que corresponde a un determinado incremento de la intensidad de base se obtiene (fig. c):

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{(3,6 - 2,4)\ mA}{(60 - 40)\ \mu A} = \frac{1,2\ mA}{20.10^{-3}\ mA} = 60$$

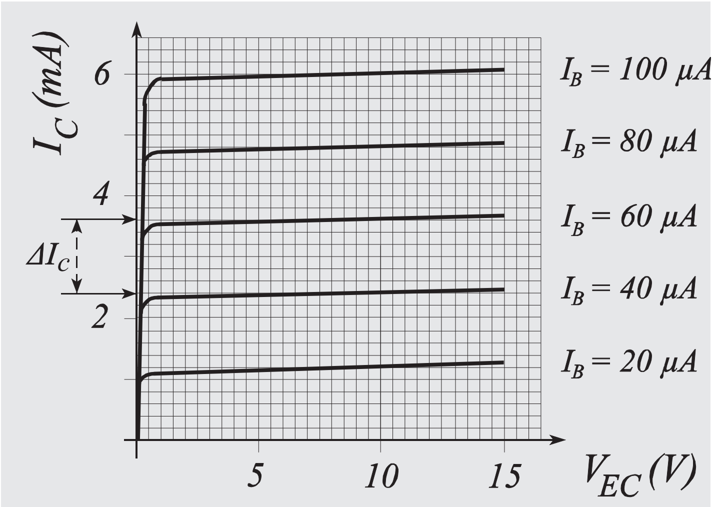


fig. c.

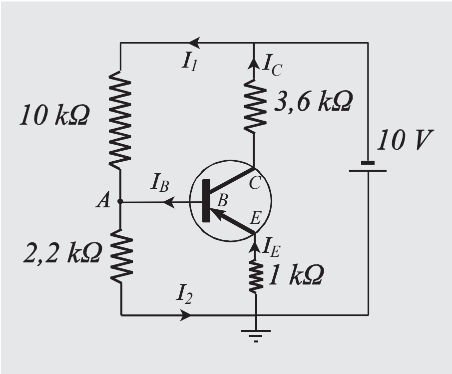


fig. d.

b. ***Recta de carga.***

Asignamos a las intensidades I_1 e I_2 los sentidos arbitrarios que se indican en la fig.d.

En la malla derecha: $3,6.10^3\ I_C - 10 + 10^3\ I_E + V_{EC} = 0$ .... (1)

y como: $$I_E = I_C + I_B = I_C + \frac{I_C}{\beta} = I_C + \frac{I_C}{60} = 1{,}017\ I_C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

al sustituir queda: $$4.616{,}7\ I_C + V_{EC} = 10 \quad \text{(ecuación de la recta de carga)}$$

Para su trazado gráfico se han de identificar dos de sus puntos. Para ello, damos valores a I_C y a V_{EC} en la ecuación anterior:

$$I_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EC} = 10\ V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(punto } \mathbf{A} \text{ fig. e)}$$

$$V_{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_C = \frac{10}{4.166{,}7} = 2{,}17.10^{-3}\ A = 2{,}17\ mA \quad \text{(punto } \mathbf{B} \text{ fig. e)}$$

d. *Determinación del punto de trabajo.*

En la malla izquierda superior: $$10^4\ I_1 + V_{BC} + 3{,}6.10^3\ I_C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

En la malla izquierda inferior: $$2{,}2.10^3\ I_2 + 10^3\ I_E + V_{EB} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

En el nudo **A**: $$I_2 = I_1 + I_B = I_1 + \frac{I_C}{\beta} = I_1 + \frac{I_C}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Además: $$V_{EC} = V_{EB} + V_{BC} = 0{,}6 + V_{BC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6) queda:

$$I_C = 1{,}15.10^{-3}\ A = 1{,}15\ mA$$

$$V_{EC} = 4{,}7\ V$$

$$I_B = 19.10^{-6}\ A = 19\ \mu A$$

coordenadas del ***punto de trabajo*** que concuerdan con las obtenidas gráficamente (punto **P** de la fig. e).

Los valores obtenidos para el resto de las variables son:

$$I_E = 1{,}17\ mA \quad ; \quad V_{BC} = +\ 4{,}09\ V$$
$$I_1 = -\ 0{,}82\ mA \quad ; \quad I_2 = -\ 0{,}80\ mA$$

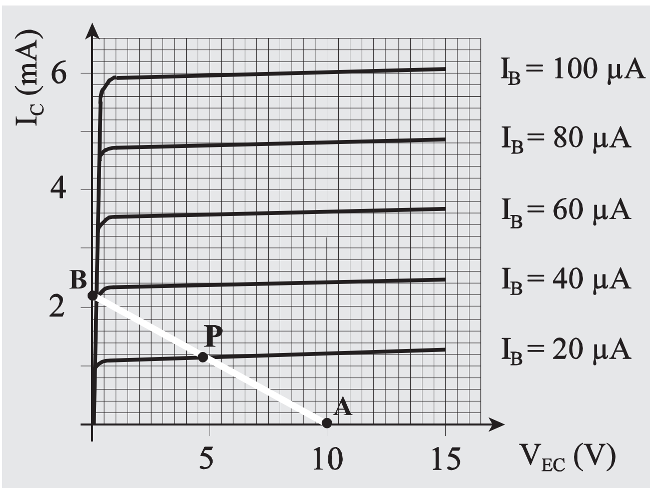
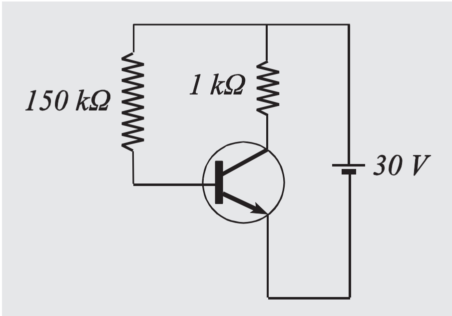


fig. e.

Del signo negativo de las intensidades I_1 e I_2 se deduce que el sentido de estas corrientes es opuesto al que se asignó arbitrariamente en el planteamiento inicial del problema (fig. d).

14. **Calcular las corrientes de base, de colector y de emisor y la caída de tensión entre colector y emisor en el circuito de la figura, suponiendo que V_{BE} = 0,7 V y que la ganancia de corriente es β = 80.**



En la fig. a se ha indicado el sentido de las corrientes.

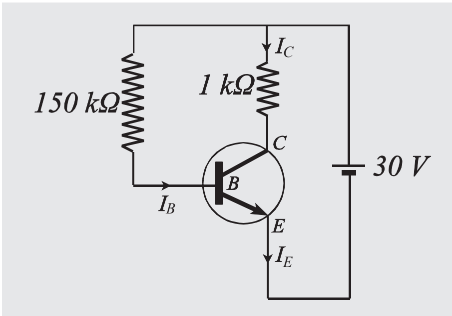


fig. a

En la malla derecha: $$10^3\ I_C + V_{CE} - 30 = 0 \qquad (1)$$

En la malla izquierda: $$1{,}5.10^5\ I_B + V_{BC} - 10^3\ I_C = 0 \qquad (2)$$

y además: $$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{I_C}{80} = 0{,}0125\ I_C \qquad (3)$$

y: $$V_{CE} = V_{CB} + V_{BE} = V_{CB} + 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} = V_{CE} - 0{,}7$$

por lo que: $$V_{BC} = 0{,}7 - V_{CE} \qquad (4)$$

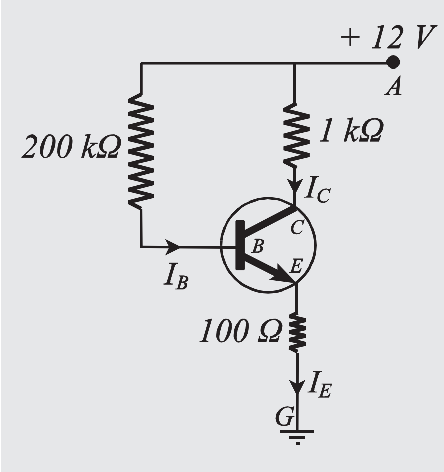
Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), queda:

$$I_C = 0{,}0156\ A = 15{,}6\ mA \qquad ; \qquad V_{CE} = 14{,}4\ V$$

$$I_B = 0{,}0125\ I_C = 0{,}195\ mA = 195\ \mu A$$

$$I_E = I_C + I_B = 15{,}8\ mA$$

15. **Un transistor npn (V_{BE} = 0,6 V), montado como se indica en la figura, tiene una ganancia β = 150. Calcular:**
a) I_E , I_B , I_C .
b) V_{CB} y V_{CE}.



A partir de la ganancia:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{I_C}{150} = 0{,}0067\ I_C$$

y como: $$I_E = I_C + I_B$$

queda: $$I_E = I_C + 0{,}0067\ I_C = 1{,}0067\ I_C$$

Además:

$$V_{CE} = V_{CB} + V_{BE} \quad \Rightarrow \quad V_{CB} = V_{CE} - V_{BE} = V_{CE} - 0{,}6$$

El potencial en el punto **G** (tierra) es nulo. Como en el punto **A** es V_A = + 12 V, la diferencia de potencial V_{AG} entre ambos puntos es:

$$V_{AG} = V_{AC} + V_{CE} + V_{EG}$$

$$12 = 10^3\ I_C + V_{CE} + 100\ I_E$$

$$12 = 10^3\ I_C + V_{CE} + 100\ (1{,}0067\ I_C) = 10^3\ I_C + V_{CE} + 100{,}67\ I_C$$

$$12 = 1100{,}67\ I_C + V_{CE} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (1)$$

En la malla izquierda: $$10^3\ I_C + V_{CB} - 2.10^5\ I_B = 0$$

$$10^3\ I_C + (V_{CE} - 0{,}6) - 2.10^5\ (0{,}0067\ I_C) = 0$$

$$V_{CE} - 340\ I_C = 0{,}6 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (2)$$

y la resolución del sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) ofrece el resultado:

$$I_C = 0{,}00791\ A = 7{,}91\ mA \qquad ; \qquad V_{CE} = 3{,}29\ V$$

quedando el resto de las variables:

$$I_B = 0{,}0067\ I_C = 0{,}053\ mA = 53\ \mu A$$

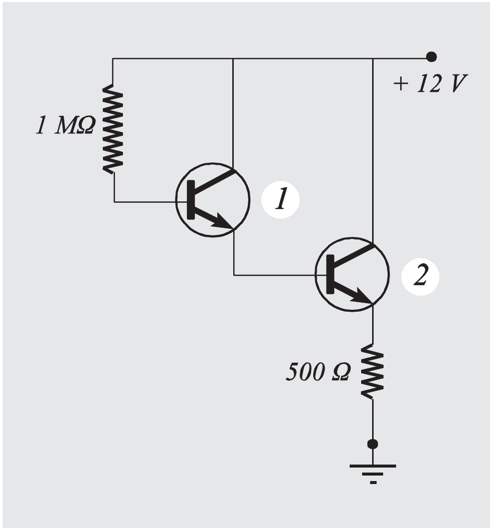
$$I_E = I_C + I_B = 7{,}96\ mA$$

$$V_{CB} = V_{CE} - 0{,}6 = 2{,}69\ V$$

16. Dos transistores npn (V_{BE} = 0,7 V), de la misma ganancia (β = 60), se montan como se indica en la figura. Calcular.

a) La intensidad que circula por la resistencia de 500 Ω.

b) Las diferencias de potencial V_{CE} en ambos transistores.



a. ***Cálculo de la intensidad que circula por la resistencia de 500 Ω.***

En la fig. a se han asignado arbitrariamente los sentidos de las corrientes que recorren cada rama del circuito.

$$\beta = \frac{I_C}{I_B}$$

$$\beta_1 = \frac{I_4}{I_5} = 60 \quad \Rightarrow \quad I_4 = 60\ I_5$$

$$\beta_2 = \frac{I_2}{I_6} = 60 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 60\ I_6$$

El Potencial en el punto **G** (tierra) es nulo. Como en el punto **A** es $V_A = +\,12\ V$, la diferencia de potencial V_{AG} entre ambos puntos es:

$$V_{AG} = V_{AC_2} + V_{C_2E_2} + V_{E_2G}$$

$$12 = 0 + V_{C_2E_2} + 500\ I_1$$

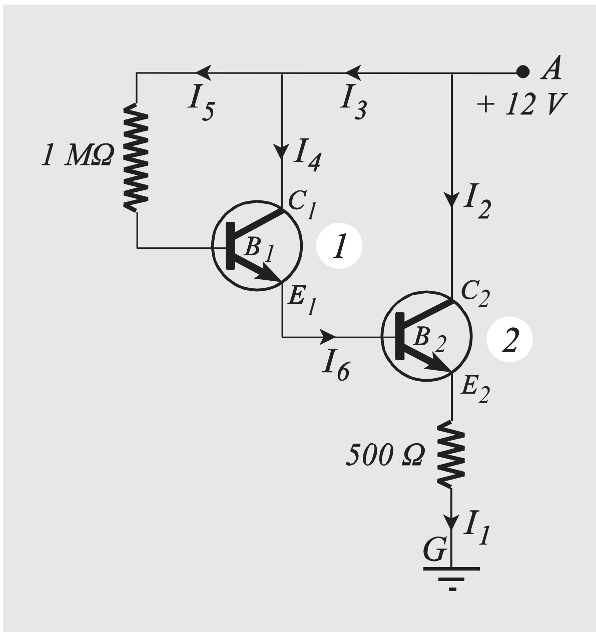


fig. a

$$I_1 = \frac{12 - V_{C_2E_2}}{500} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

En la malla izquierda:

$$10^6\ I_5 + V_{B_1C_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_{C_1B_1} = 10^6\ I_5$$

En la malla central:

$$V_{C_1E_1} + V_{B_2C_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_{C_1E_1} = -\ V_{B_2C_2} = V_{C_2B_2} = V_{C_2E_2} - V_{B_2E_2}$$

$$V_{C_1E_1} = V_{C_2E_2} - 0{,}7 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$V_{C_2E_2} = V_{C_1E_1} + 0{,}7 = (V_{C_1B_1} + V_{B_1E_1}) + 0{,}7 = V_{C_1B_1} + 1{,}4 = 10^6\ I_5 + 1{,}4$$

y sustituyendo este valor en la (1):

$$I_1 = \frac{12 - (10^6\ I_5 + 1{,}4)}{500} = \frac{10{,}6 - 10^6\ I_5}{500} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Por otra parte (fig. a):

$$I_1 = I_2 + I_6 = 60\ I_6 + I_6 = 61\ I_6$$

y como en el transistor **1** es $I_6 = I_4 + I_5$ queda:

$$I_1 = 61\ (I_4 + I_5) = 61\ (60\ I_5 + I_5) = 3721\ I_5$$

$$I_5 = 2{,}69.10^{-4}\ I_1$$

y sustituyendo este valor de I_5 en (3) y operando se llega al resultado:

$$I_1 = 13{,}8\ .\ 10^{-3}\ A = 13{,}8\ mA$$

b. *Cálculo de las diferencias de potencial V_{CE} en ambos transistores.*

De la expresión (1):

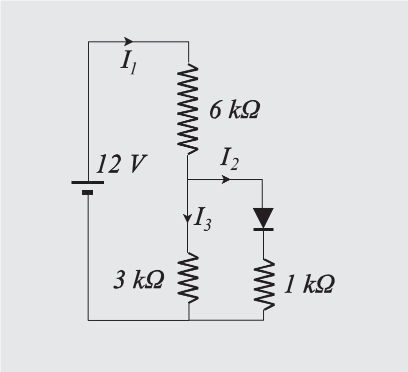
$$I_1 = \frac{12 - V_{C_2E_2}}{500} \qquad \Rightarrow \qquad V_{C_2E_2} = 12 - 500\ I_1 = 12 - 500\ (13{,}8.10^{-3}) = 5{,}1\ V$$

De la expresión (2):

$$V_{C_1E_1} = V_{C_2E_2} - 0{,}7 = 5{,}1 - 0{,}7 = 4{,}4\ V$$

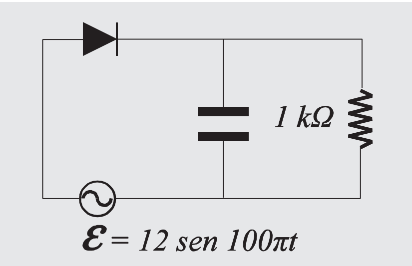
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resolver el circuito de la figura suponiendo que el diodo tiene una tensión umbral de 0,7 V y resistencia despreciable.



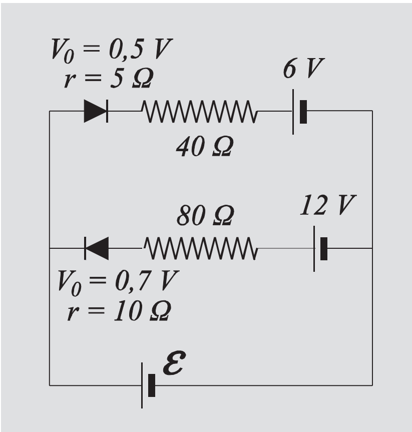
Solución: I_1 = 1,7 mA ; I_2 = 1,1 mA ; I_3 = 0,6 mA.

2. En el circuito rectificador de la figura, el condensador tiene una constante de tiempo 10^2 veces mayor que el período de la tensión alterna de entrada. Calcular:
a) La capacidad del condensador.
b) La variación de la tensión contínua de salida.
Despreciar la tensión umbral y la resistencia del diodo.



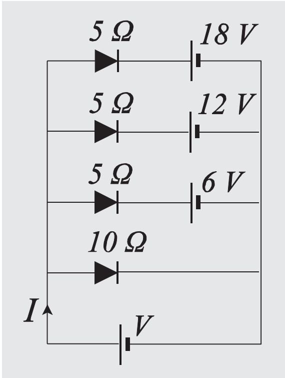
Solución: a) 2.10^{-3} F
b) 5,94 V/s.

3. En el circuito de la figura:
a) ¿para qué valores de **ε** conducirán ***los dos*** diodos?
b) calcular la intensidad que pasa por cada diodo para ε = 12 V.
c) calcular la potencia suministrada por cada pila para ε = 12 V.



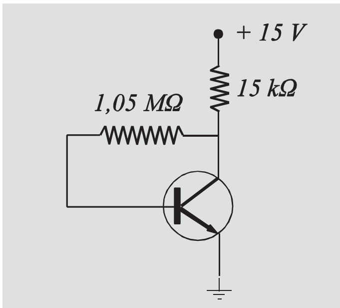
Solución : a) 6,5 < ε < 11,3 V
b) $I_{10\,\Omega} = 0$; $I_{5\,\Omega}$ = 122 mA
c) $P_{12\,V} = 0$; $P_{6\,V}$ = 0,73 W

4. En el circuito de la figura, calcular la intensidad ***I*** para tensiones ***V*** de: a) 6 V; b) 12 V; c) 18 V, y d) 24 V. La tensión umbral de los diodos es despreciable y sus resistencias son las indicadas en la figura.



Solución : a) 0,6 A; b) 2,4 A; c) 5,4 A; d) 9,6 A.

5. Para el circuito esquematizado en la figura, suponiendo V_{BE} = + 0,6 V y β = 250. calcular:
a) El punto de trabajo (V_{CE}, I_C).
b) La intensidad de base I_B.



Solución: a) 3,75 V ; 0,75 mA
b) 3,0 μA.

6. El transistor cuyas características se dan en la fig. **a** está montado como se indica en la fig. **b**.
a) Dibujar la recta de carga.
b) Estimar la ganancia.
c) Calcular el punto de trabajo. Suponer $I_E \simeq I_C$ y V_{BE} = 0,6 V.

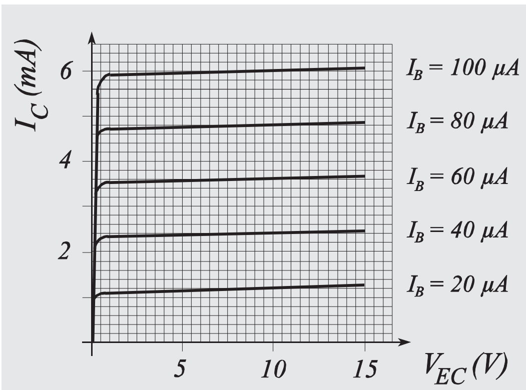


fig. a.

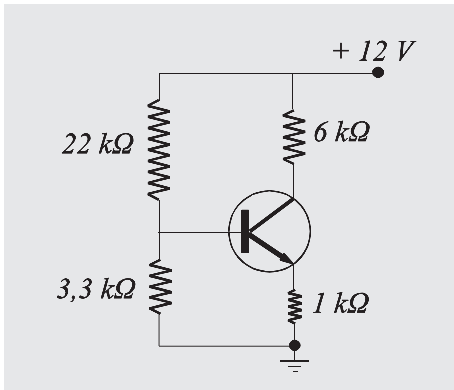
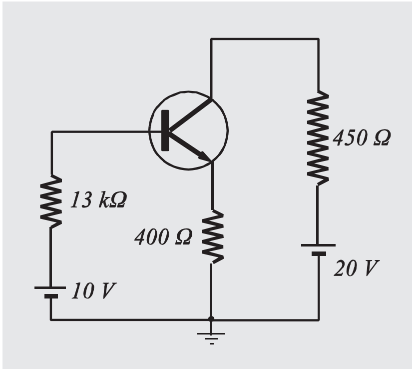


fig. **b**.

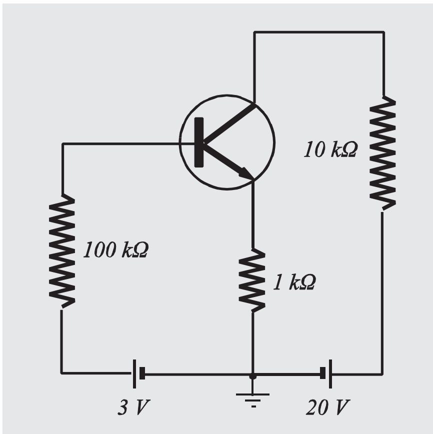
Solución: b) 50.
c) (5,7 V ; 0,9 mA).

7. Un transistor **npn** está montado como se indica en la figura. Sabiendo que $I_C \simeq I_E$, $\beta = 200$ y que $V_{BE} = 0{,}7$ V, hallar:
a) I_E, I_B e I_C.
b) V_{CE} y V_{CB}.



Solución: a) $I_B = 100\ \mu A$; $I_C = I_E = 20$ mA
b) $V_{CE} = 3$ V ; $V_{CB} = 2{,}3$ V.

8. En la zona de funcionamiento del amplificador de la figura se cumple que $I_C = I_B.100$. Calcular:
a) La intensidad $\mathbf{I_C}$.
b) La tensión entre colector y emisor.
c) La potencia disipada en cada resistencia y en el transistor.
Nota: Despreciar la tensión entre la base y el emisor, y suponer que las intensidades de emisor y colector son aproximadamente iguales.



Solución: a) 1,5 mA
b) 3,5 V
c) $P_{100\,k\Omega} = 2{,}25.10^{-2}$ mW ; $P_{10\,k\Omega} = 22{,}5$ mW ; $P_{1\,k\Omega} = 2{,}25$ mW ; $P_{transistor} = 5{,}27$ mW.

ÓPTICA GEOMÉTRICA

CONVENIO DE SIGNOS (Normas DIN).

En las relaciones matemáticas que van a permitir obtener las características de las imágenes formadas por los sistemas ópticos aparecen elementos como la distancia desde un objeto o una imagen a un espejo o a una lente, el radio de curvatura de un espejo, etc. Si previamente no se establece un convenio de signos, estas relaciones matemáticas no proporcionan una información completa de las características de las imágenes. Por ejemplo, no nos dirán si la imágen es invertida, ni si se forma a uno u otro lado del espejo o de la lente.

Por ello, es necesario establecer previamente un convenio de signos que permita el completo conocimiento de las características de las imágenes a través de las relaciones matemáticas obtenidas. En los libros de Física General e incluso en los manuales específicos de Óptica se emplean distintos convenios de signos que conducen a expresiones diferentes aunque, lógicamente, todas ellas aplicadas adecuadamente proporcionan una información correcta sobre las características de las imágenes.

El convenio que adoptaremos en este estudio de la Óptica Geométrica, que en nuestra opinión es el de más sencilla aplicación, es el siguiente:

1º) Dibujaremos las figuras de manera que la luz incidente en el sistema óptico procede de la izquierda propagándose hacia la derecha o, lo que es lo mismo, situaremos siempre los objetos *a la izquierda* y los sistemas ópticos *a la derecha*.

2º) Consideraremos al sistema óptico situado en el origen de un sistema de ejes de coordenadas por lo que las distancias medidas desde el origen hacia la izquierda serán negativas y las medidas hacia la derecha serán positivas. Dicho de otra forma: las distancias serán positivas si se miden en el sentido de avance de la luz y negativas si se miden en sentido contrario.

Ejemplos:

a) el radio de un dioptrio, de un espejo esférico o de una cara de una lente es r = VC siendo V su vértice y C su centro de curvatura. Si se trata de una superficie cóncava (fig. 1.a) el radio r es negativo mientras que es positivo en el caso de superficies convexas (fig. 1.b).

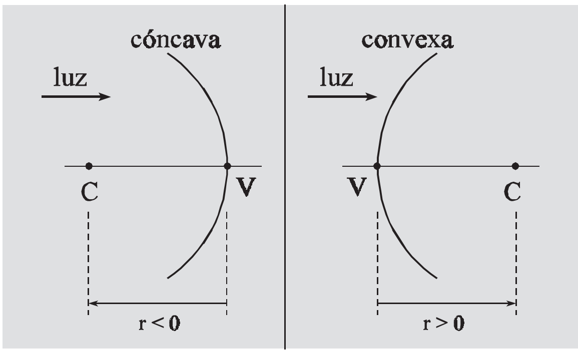


fig. 1.a fig. 1.b

b) las posiciones del objeto O y de la imagen O' vienen dadas por las distancias s = VO y s' = VO' en el caso de los dioptrios y espejos y por s = LO y s' = LO' si se trata de lentes. En las figuras 2 y 3 se concreta el signo de estas distancias.

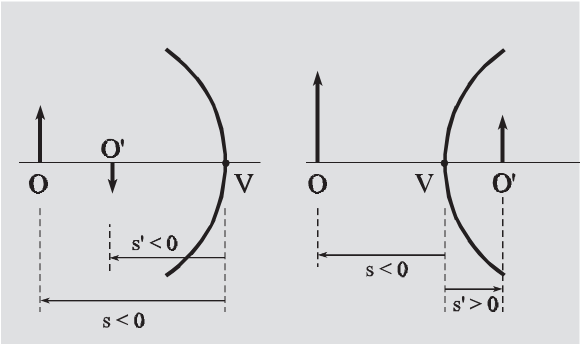


fig. 2

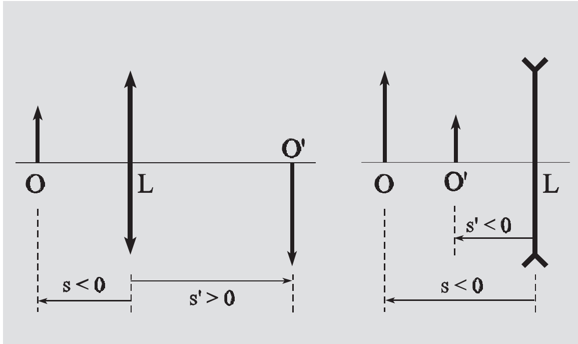


fig. 3

3º) Las distancias perpendiculares al eje son positivas cuando se miden desde el eje hacia arriba y negativas cuando se miden hacia abajo. Así, el tamaño de un objeto viene dado por la distancia y = OA que es positiva mientras que el de la imagen y' = O'A' es negativo (fig. 4).

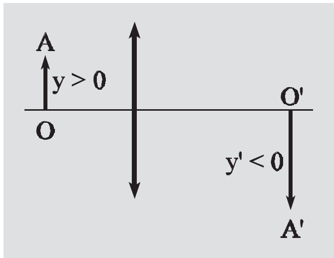


fig. 4

4º) Los ángulos que forman los rayos con el eje del sistema óptico se consideran positivos si girando al rayo por el camino más corto para hacerlo coincidir con el eje, el sentido del giro es el antihorario y serán negativos en caso contrario (fig. 5).

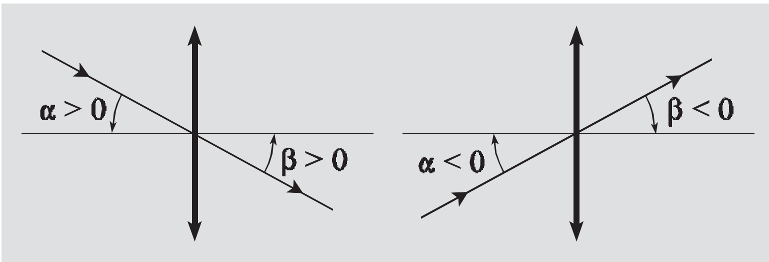


fig. 5

5º) Los ángulos de incidencia ε, de reflexión y de refracción ε' se consideran positivos si girando al rayo por el camino más corto para hacerlo coincidir con la normal N, el sentido del giro es el horario y serán negativos en caso contrario (fig. 6).

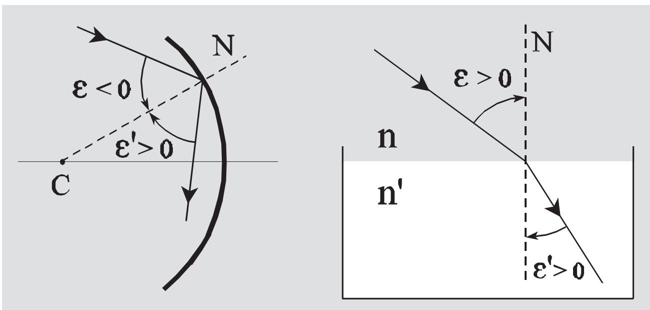


fig. 6

FÓRMULAS

La aplicación de este convenio de signos en la deducción de las fórmulas de la Óptica Geométrica paraxial conduce a las expresiones siguientes:

LEY DE SNELL

$$n \; sen \; \varepsilon = n' \; sen \; \varepsilon' \qquad \text{(I)}$$

en la que: n = índice de refracción del primer medio.
n' = índice de refracción del segundo medio.
ε = ángulo de incidencia.
ε' = ángulo de refracción.

DIOPTRIO ESFÉRICO

a. ***Focales***: . . . .

$$f' = \frac{n' \, r}{n' - n} \qquad f = \frac{-\, n \, r}{n' - n} \qquad \text{(II) y (III)}$$

en las que: f' = VF' = distancia focal imagen (desde el vértice del dióptrio hasta el foco imagen).
f = VF = distancia focal objeto (desde el vértice del dióptrio hasta el foco objeto).
n = índice de refracción del primer medio.
n' = índice de refracción del segundo medio.
r = VC = radio del dióptrio (desde el vértice del dióptrio hasta su centro de curvatura).

b. ***Posición de la imagen***: . . . .

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \qquad \text{(IV)}$$

en la que: s = VO = distancia objeto (desde el vértice del dióptrio hasta el objeto).
s' = VO' = distancia imagen (desde el vértice del dióptrio hasta la imagen).

c. ***Aumento lateral***: . . . .

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n \, s'}{n' \, s} \qquad \text{(V)}$$

en la que: β = aumento lateral.
y' = tamaño de la imagen (desde el eje hasta el extremo de la imagen).
y = tamaño del objeto (desde el eje hasta el extremo del objeto).

d. ***Potencia***: . . . .

$$P = \frac{n'}{f'} = \frac{-\, n}{f} \qquad \text{(VI)}$$

Nota: la potencia P viene expresada en dioptrías (D) si las focales se expresan en metros.

DIOPTRIO PLANO

a. ***Posición de la imagen***: . . . . $\dfrac{n'}{s'} = \dfrac{n}{s} = \dfrac{n' - n}{r}$ . . . . (VII)

ESPEJOS ESFÉRICOS

a. ***Posición de la imagen***: . . . . $\dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2}{r} = \dfrac{1}{f} = P$ . . . . (VIII)

en la que: r = radio del espejo (desde el vértice del espejo hasta su centro de curvatura).
f = distancia focal (desde el vértice del espejo hasta el foco).
P = potencia del espejo. (En dioptrías si la focal se expresa en metros).

b. ***Aumento lateral***: . . . . $\beta = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{-\,s'}{n'\,s}$ . . . . (IX)

LENTES DELGADAS (EN AIRE)

a. ***Focales y potencia***: . . . . . . $\dfrac{1}{f'} = (n - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = \dfrac{-\,1}{f'} = P$ . . . . (X)

en la que: r_1 = LC_1 = radio de la primera superficie de la lente de centro C_1.
r_2 = LC_2 = radio de la segunda superficie de la lente de centro C_2.
n = índice de refracción de la lente.
f' = LF' = distancia focal imagen (desde la lente hasta el foco imagen).
f = LF = distancia focal objeto (desde la lente hasta el foco objeto).
P = potencia de la lente. (En dioptrías si la focal se expresa en metros).

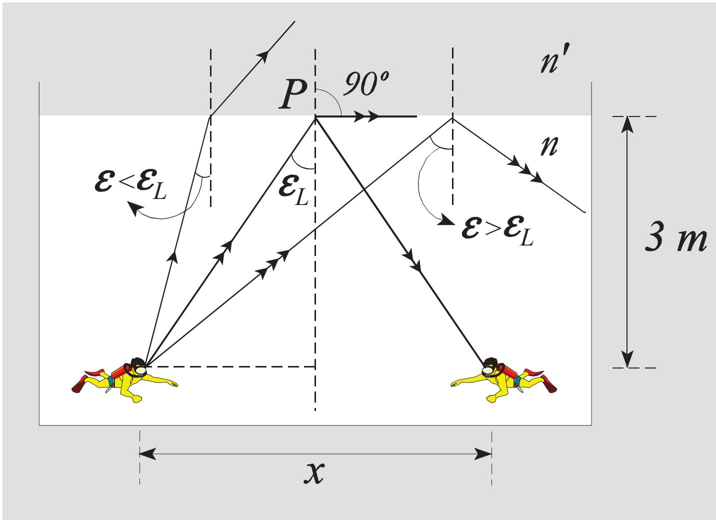
b. ***Posición de la imagen***: . . . . $\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{-\,1}{f} = P$ . . . . (XI)

en la que: s = LO = distancia objeto (desde la lente hasta el objeto).
s' = LO' = distancia imagen (desde la lente hasta la imagen).

c. ***Aumento lateral***: . . . . $\beta = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{n'\,s}$ . . . . (XII)

en la que: β = aumento lateral.
y' = tamaño de la imagen (desde el eje hasta el extremo de la imagen).
y = tamaño del objeto (desde el eje hasta el extremo del objeto).

1. **Dos buceadores están situados, a la misma profundidad, en el fondo de una piscina de manera que sus ojos están a 3 m de profundidad. Calcular la distancia mínima que debe existir entre ellos para que se puedan ver uno al otro por reflexión total. (Índice de refracción del agua = 4/3).**



Planteamiento.

Los rayos de luz como el --▸-- que, procedentes de uno de los observadores, incidan sobre la superficie que separa el agua del aire con un ángulo ε menor que el ángulo límite (ε_L), se refractarán emergiendo al aire. Por el contrario, los rayos de luz como el --▸▸▸-- que incidan sobre la superficie con un ángulo ε grande, mayor que el ángulo límite, sufrirán reflexión total. Como la *frontera* entre la refracción y la reflexión total la define el ángulo límite, la distancia mínima (**x**) que puede existir entre ambos buzos para que puedan verse por reflexión total es la que corresponde a una trayectoria como la del rayo --▸▸-- que incide, precisamente, con el ángulo límite.

Resolución.

$$tg\ \varepsilon_L = \frac{x/2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = 6.tg\ \varepsilon_L$$

es preciso, por lo tanto, calcular el ángulo límite ε_L.

Cálculo del ángulo límite.

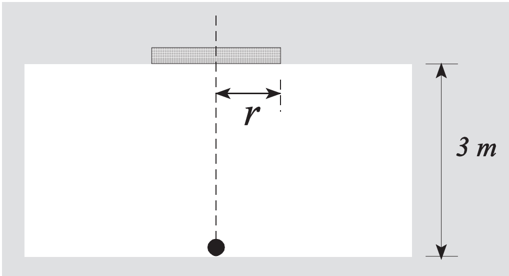
Aplicando la ley de Snell a la refracción en el punto **P**:

$$n\ sen\ \varepsilon_L = n'\ sen\ 90 \quad \Rightarrow \quad sen\ \varepsilon_L = \frac{n'}{n} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_L = 48{,}75^{o}$$

y sustituyendo este valor, la distancia mínima a la que pueden estar los buzos para poder verse por reflexión total, queda:

$$x = 6.tg\ \varepsilon_L = 6.tg\ 48{,}75 = 6{,}84\ m$$

2. Un pequeño objeto está sumergido en el agua (n = 4/3) a 3 m de profundidad. Calcular el radio que ha de tener una placa circular de corcho para que, colocada sobre el agua con su centro en la vertical del objeto, impida la visión de éste a cualquier observador situado fuera del agua.



Planteamiento:

Los rayos que, como el --▸-- incidan con ángulos menores que el ángulo límite ε_L se refractarán emergiendo al aire (fig. a), lo que permitirá ver la imagen del objeto a un observador situado fuera del agua.

Los rayos que, como el --▸▸▸-- incidan con ángulos mayores que el ángulo límite ε_L sufrirán reflexión total y no llegarán hasta ningún observador exterior.

En consecuencia, el rayo --▸▸-- que incide con el ángulo límite es la *frontera* entre los rayos que emergen y los que no emergen del agua. Si la placa de corcho tiene un radio r tal que impida salir a los rayos --▸-- que inciden con ángulos menores que el límite, ningún observador exterior podrá ver el objeto situado en el fondo del agua.

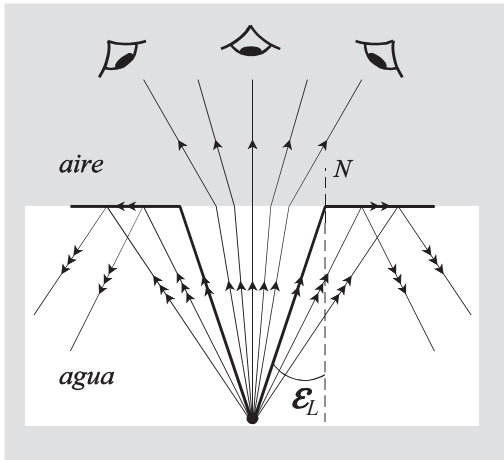


fig. a

Cálculo del radio.

En la fig. b: $tg\ \varepsilon_L = \dfrac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad r = 3\ tg\ \varepsilon_L$

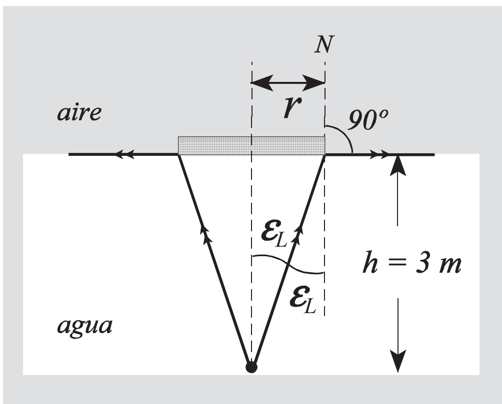


fig. b

Cálculo del ángulo límite.

Aplicando la ley de Snell (expresión - I):

$$n_{agua}\ sen\ \varepsilon_L = n_{aire}\ sen\ 90$$

$$sen\ \varepsilon_L = \frac{n_{aire}}{n_{agua}} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\varepsilon_L = 48{,}75^{\circ}$$

quedando al sustituir: $r = 3\ tg\ \varepsilon_L = 3\ tg\ 48{,}5 = 3{,}39\ m$

3. Una fibra óptica cilíndrica está formada por un núcleo de índice de refracción n_f = 1,64 recubierto de un material de índice n_c = 1,51 (fig. a). Para que una señal luminosa se pueda propagar dentro de la fibra, por sucesivas reflexiones totales, es preciso que incida sobre ella con un ángulo inferior a ε (fig. b). Calcular este ángulo.

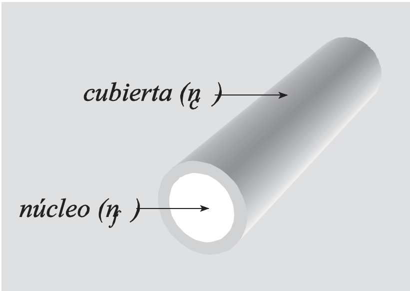


fig. a.

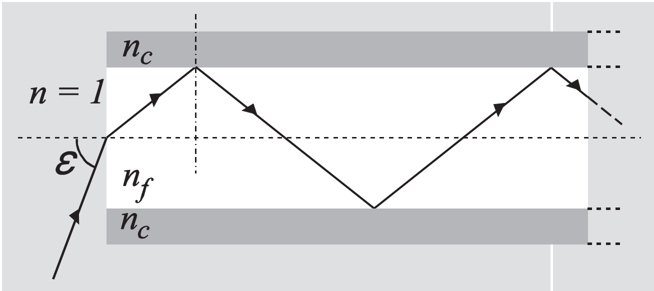


fig. b.

Planteamiento.

Si el ángulo de incidencia **α** en el punto **B** (fig. c) es menor que el ángulo límite (**ε_L**), el rayo de luz se refractará pasando al medio de índice **n_C** y no se propagará por la fibra.

Por el contrario, si **α** es mayor que el ángulo límite, el rayo sufrirá reflexión total y se propagará por la fibra tras sucesivas reflexiones en los puntos **C**, **D**, ...

En consecuencia, la *frontera* entre ambas situaciones la define el ángulo límite **ε_L**: $\alpha = \varepsilon_L$

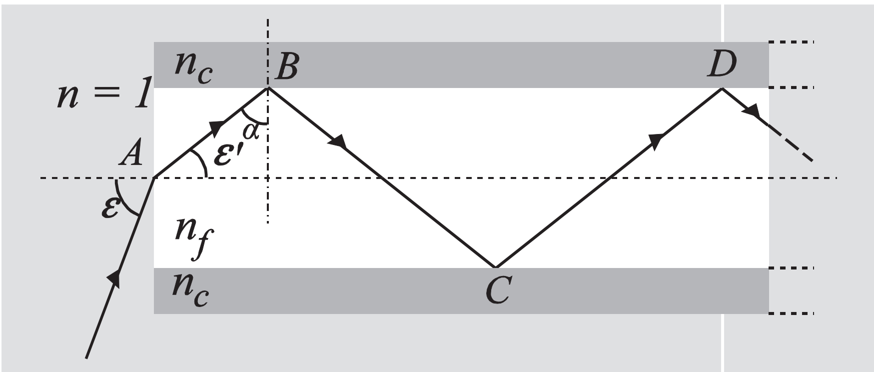


fig. c.

Cálculo de ε_L: $$sen\ \varepsilon_L = \frac{n'}{n} = \frac{n_c}{n_f} = \frac{1{,}51}{1{,}64} = 0{,}92 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_L = 67{,}0^{\circ} = \alpha$$

Cálculo de ε': $$\varepsilon' = 90 - \alpha = 90 - 67 = 23^{\circ}$$

Cálculo de ε: aplicando la ley de Snell en el punto **A**:

$$n.sen\ \varepsilon = n'.sen\ \varepsilon' \quad \rightarrow \quad 1.sen\ \varepsilon = n_f.\ sen\ \varepsilon' = 1{,}64.sen\ 23 = 0{,}64 \quad \rightarrow \quad \varepsilon = 39{,}8^{\circ}$$

Conclusión: si el rayo de luz incide sobre la fibra (en el punto **A**) con un ángulo **menor** que 39,8º, incidirá sobre el punto **B** con un ángulo α mayor que el ángulo límite, sufrirá reflexión total y se propagará en el interior de la fibra .

4. Una piscina tiene 3 m de profundidad. ¿Cuál es la profundidad aparente cuando está llena de agua (n = 1.33)?
a) Si se mira perpendicularmente a la superficie del agua.
b) Si la línea de mirada forma un ángulo de 45º con la superficie del agua.

Si el observador mira perpendicularmente a la superficie del agua (fig. a), los rayos de luz que llegan a él procedentes del objeto inciden en la superficie que separa el agua del aire (dioptrio plano) con ángulos pequeños (rayos paraxiales) en cuyo caso, para calcular la posición de la imagen, se puede aplicar la expresión (VII):

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$$

en la que: n = índice de refracción del primer medio (agua).
n' = índice de refracción del segundo medio (aire).
s = posición del objeto = AO.
s' = posición de la imagen = AO'.

quedando al sustituir:

$$\frac{1,33}{3} = \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = 2,25\ m = AO'$$

***Conclusión*:** al observador *le parece* que los rayos proceden del punto **O'** y es aquí donde se forma la imagen del fondo de la piscina.

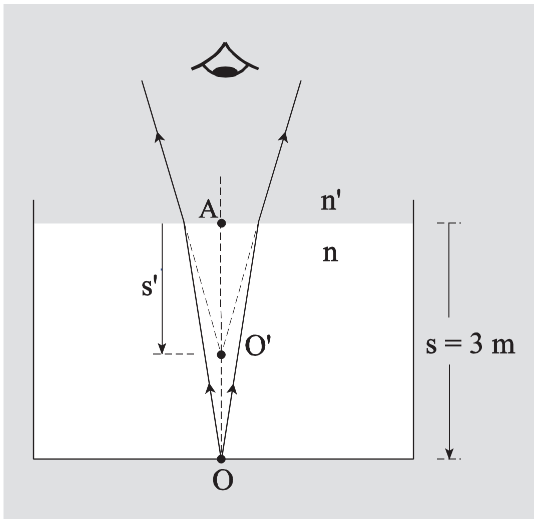


fig. a

Sin embargo, si la línea de mirada forma un ángulo grande con la superficie del agua (fig. b), la expresión anterior no es válida (por no tratarse de rayos paraxiales) y la posición de la imagen se ha de calcular teniendo en cuenta la geometría del sistema y aplicando la ley de Snell.

$$n.sen\ \varepsilon = n'.sen\ \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad 1,33.sen\ \varepsilon = 1.sen\ 45$$

$$sen\ \varepsilon = 0,53 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 32,12º$$

Por otra parte, en el triángulo **OAB**:

$$a = s.tg\ \varepsilon = 3.tg\ 32,12 = 1,88$$

y en el **O'AB**:

$$s' = \frac{a}{tg\ \varepsilon'} = \frac{1,88}{tg\ 45} = 1,88\ m = AO'$$

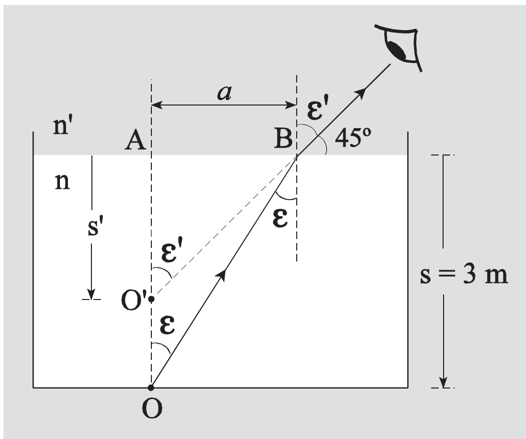


fig. b

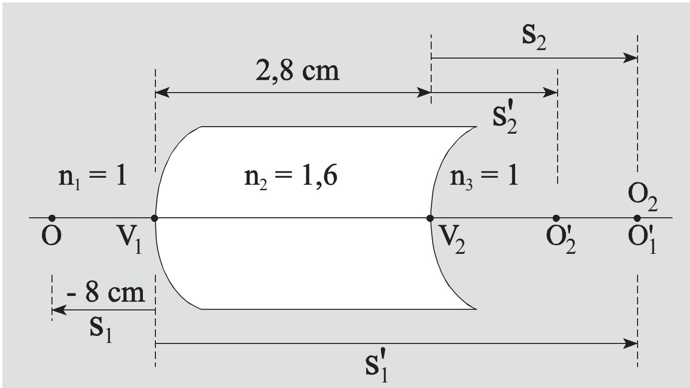
***Conclusión*:** en este caso, al observador *le parece* que los rayos proceden de un punto **O'** más elevado que cuando mira perpendicularmente a la superficie del agua.

5. **Los extremos de un cilindro de vidrio de n = 1,6 se tallan según superficies esféricas convexa y cóncava de radios 2,4 cm. A 8 cm del primer vértice se coloca un objeto de 2 cm. La separación entre vértices es de 2,8 cm. Calcular: a) las distancias focales y las potencias de ambas superficies, b) la distancia de la imagen final de la primera y segunda superficie, c) el tamaño de la imagen final.**

a. Cálculo de las focales y potencias.

Para su cálculo aplicaremos las expresiones (II), (III) y (VI) teniendo en cuenta que los radios de ambas caras son positivos por estar los respectivos centros de curvatura situados a la derecha de los vértices: $\boldsymbol{r_1 = r_2 = +2,4}$ **cm.**

a.1. Primera superficie:



$$f_1 = \frac{-n_1 r_1}{n_2 - n_1} = \frac{-2,4}{1,6 - 1} = -4\ cm$$

$$f_1' = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} = \frac{1,6\ (2,4)}{1,6 - 1} = +6,4\ cm$$

$$P_1 = \frac{n_2}{f_1'} = \frac{1,6}{0,064\ m} = 25\ D$$

a.2. Segunda superficie:

$$f_2 = \frac{-n_2 r_2}{n_3 - n_2} = \frac{-1,6\ (2,4)}{1 - 1,6} = +6,4\ cm \quad ; \quad f_2' = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2} = \frac{2,4}{1 - 1,6} = -4\ cm$$

$$P_2 = \frac{n_3}{f_2'} = \frac{1}{-0,04\ m} = -25\ D$$

b. Cálculo de la posición de la imagen.

La primera superficie va a formar una primera imagen situada en un punto $\mathbf{O_1'}$ cuya posición no conocemos, de momento. Esta imagen $\mathbf{O_1'}$ *actúa como objeto* ($\mathbf{O_2}$) para la segunda superficie que forma de ella la imagen final $\mathbf{O_2'}$.

b.1. Primera imagen. Aplicando la expresión (IV):

$$\frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1,6}{s_1'} - \frac{1}{-8} = \frac{1,6 - 1}{2,4} \quad \Rightarrow \quad s_1' = V_1O_1' = +12,8\ cm$$

b.2. Segunda imagen (final). Cualesquiera que sea la posición de la imagen $\mathbf{O_1'}$, su posición respecto de la segunda superficie de vértice $\mathbf{V_2}$, para la cual *actúa como objeto* ($\mathbf{O_2}$), es:

$$V_2O_2 = V_2O_1' = V_1O_1' - V_1V_2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = s_1' - 2,8 = 12,8 - 2,8 = +10\ cm = V_2O_2$$

y aplicando de nuevo la expresión (IV):

$$\frac{n_3}{s_2'} - \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_2'} - \frac{1,6}{10} = \frac{1 - 1.6}{2,4} \quad \Rightarrow \quad s_2' = -11,1\ cm = V_2O_2'$$

resultado del que se deduce que la imagen está situada a 11,11 cm a la izquierda de V_2 o, lo que es lo mismo, a 8,31 cm a la izquierda de V_1. (En la figura se ha supuesto otra posición para la imagen final $\mathbf{O_2'}$ porque, lógicamente, antes de resolver el problema no se conoce su verdadera posición).

c. Cálculo del tamaño de la imagen final.

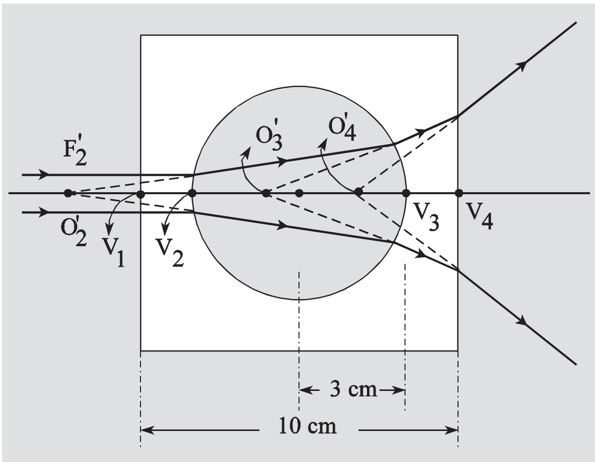
El aumento en un sistema formado por varios elementos es el producto de los aumentos de cada elemento por lo que, de acuerdo con la expresión (V), el aumento total del sistema es:

$$\beta = \beta_1 \ \beta_2 = \frac{n_1 \ s_1'}{n_2 \ s_1} \ \frac{n_2 \ s_2'}{n_3 \ s_2} = \frac{12{,}8}{1{,}6 \ (-\ 8)} \ \frac{1{,}6 \ (-\ 11{,}11)}{10} = +\ 1{,}778$$

y siendo el aumento final β la relación entre el tamaño de la imagen final (y_2') y el del objeto (y) queda:

$$\beta = +\ 1{,}778 = \frac{y_2'}{y} = \frac{y_2'}{2} \quad \Rightarrow \quad y_2' = 3{,}55 \ cm \quad \text{(imagen virtual, mayor y derecha respecto del objeto)}$$

6. Un cubo de vidrio de índice 1,5 tiene un espacio hueco en su interior en forma de esfera con el mismo centro que el cubo. La arista del cubo mide 10 cm y el radio de la esfera hueca es de 3 cm. Un haz de rayos paralelos entre sí incide perpendicularmente a una de las caras del cubo. Hallar en qué punto del eje se cortarán los rayos. Hallar las focales imagen de las distintas superficies. El espacio hueco del cubo contiene aire.



Para la primera superficie (plana) *todo sucede como si* los rayos paralelos al eje procedieran de un objeto situado en el infinito y según la expresión (VII), si $s_1 = \infty$, también es $s_1' = V_1O_1' = \infty$. En consecuencia, la primera superficie forma una primera imagen $\mathbf{O_1'}$ en el infinito. Por incidir normalmente a ella, los rayos no sufren desviación en esta primera superficie plana y alcanzan a la segunda superficie, esférica convexa, paralelos al eje por lo que, después de refractarse, convergen en su foco imagen F_2' dando lugar a la segunda imagen $\mathbf{O_2'}$, cuya posición es:

$$s_2' = f_2' = \frac{n' \ r}{n' - n} = \frac{3}{1 - 1{,}5} = -\ 6 \ cm$$

$$s_2' = V_2F_2' = V_2O_2' = -\ 6 \ cm$$

La imagen $\mathbf{O_2'}$ actúa *como objeto* para la tercera superficie (esférica cóncava) ya que todo sucede como si los rayos llegaran a ella procedentes de $\mathbf{O_2'}$. La posición de la imagen $\mathbf{O_3'}$ que forma esta tercera superficie la calculamos mediante la expresión (IV):

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

en la que n = 1 y n' = 1,5 ya que la luz, en esta tercera superficie pasa del aire al vidrio, y:

$$r = -3 \text{ cm} \qquad ; \qquad s_3 = V_3O_2' = V_3V_2 + V_2O_2' = (-6) + (-6) = -12 \text{ cm}$$

y sustituyendo y operando queda: $\mathbf{s_3'} = -6 \text{ cm} = V_3O_3'$

resultado del que se deduce que la imagen $\mathbf{O_3'}$ formada por la tercera superficie está situada, precisamente, en V_2.

Por último, en la cuarta superficie (plana), los rayos van a sufrir una refracción en la que *todo sucede como si* procediesen de un punto objeto situado en $\mathbf{O_3'}$ o, lo que es lo mismo según el resultado anterior, en V_2. Para calcular la posición de la imagen final $\mathbf{O_4'}$, aplicamos la expresión (VII) en la que:

$$n = 1{,}5 \quad ; \quad n' = 1 \quad ; \quad s_4 = V_4O_3' = V_4V_3 + V_3O_3' = (-2) + (-6) = -8 \text{ cm}$$

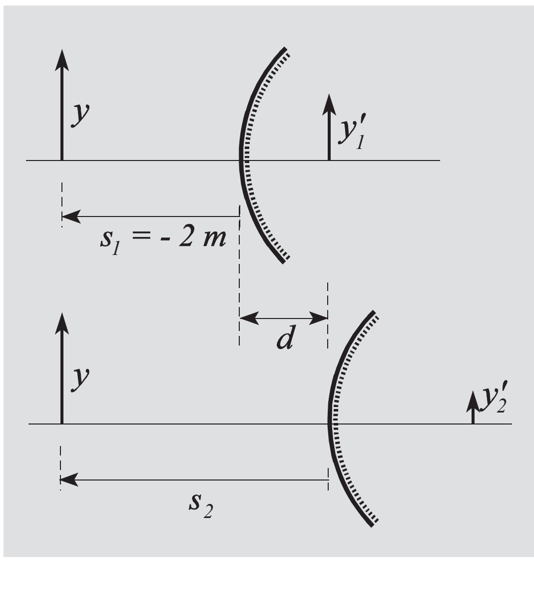
quedando al sustituir: $\mathbf{s_4'} = -5{,}33 \text{ cm} = V_4O_4'$

resultado del que se deduce que la imagen final $\mathbf{O_4'}$ y, por tanto, el punto de corte de los rayos está a 5,33 cm a la izquierda de V_4, es decir, a 0,33 cm a la izquierda del centro de la esfera.

7. El conductor de un vehículo parado mira, a través del espejo retrovisor esférico de 1 m de radio, a un objeto situado a 2 m del espejo. Pone en marcha su vehículo y al cabo de cierto tiempo le parece que el tamaño de la imagen que ahora ve es la mitad que la imagen anterior. Calcular el espacio recorrido por el vehículo.

Aunque el enunciado no lo indica expresamente, se trata de un espejo esférico **convexo** (radio positivo) ya que los cóncavos sólo producen imágenes *observables* para posiciones del objeto más próximas que el foco del espejo. Para posiciones más alejadas, los cóncavos forman imágenes reales, no *observables* directamente, e invertidas, lo cual no sucede **para ninguna posición** en los convexos en los que siempre la imagen es virtual (y por lo tanto observable directamente), menor y derecha.

Como se conoce la posición inicial del objeto ($\mathbf{s_1} = -200$ cm) y el radio del espejo (r = + 100 cm), se puede calcular la posición de la imagen ($\mathbf{s_1'}$) cuando el vehículo está parado:



$$\frac{2}{r} = \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{100} = \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{-200}$$

$$s_1' = 40 \ cm$$

El aumento para cada situación es:

$$\beta_1 = \frac{y_1'}{y} = \frac{-s_1'}{s_1} \qquad ; \qquad \beta_2 = \frac{y_2'}{y} = \frac{-s_2'}{s_2}$$

y teniendo en cuenta que según el enunciado es $y_1' = 2\,y_2'$, despejando el tamaño del objeto (y) en cada una de estas expresiones e igualando, queda:

$$y = \frac{y_1'\,s_1}{s_1'} = \frac{2y_2'\,s_1}{s_1'} \qquad ; \qquad y = \frac{y_2'\,s_2}{s_2'}$$

$$\frac{2s_1}{s_1'} = \frac{s_2}{s_2'} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,(-\,200)}{40} = \frac{s_2}{s_2'} \quad \Rightarrow \quad s_2' = -\,0{,}1s_2$$

Por último, aplicando la fórmula de los espejos (expresión VIII), calculamos la posición final (**s** $_2$) del objeto respecto del espejo:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{100} = \frac{1}{-\,0{,}1s_2} + \frac{1}{s_2} \quad \Rightarrow \quad s_2 = -\,450\ cm = -\,4{,}5\ m$$

En consecuencia el desplazamiento **d** del vehículo ha sido:

d = 4,5 m - 2,0 m = **2,5 m**

8. **El radio de un espejo esférico cóncavo es de 30 cm. Un objeto de 4 cm de tamaño está a distancias del espejo: a) 60 cm, b) 30 cm, c) 15 cm, d) 10 cm. Hállese la distancia imagen para cada una de estas posiciones. Hallar el tamaño de la imagen en cada caso.**

a. Posición de la imagen.

Despejando s' en la fórmula de los espejos (expresión VIII), queda:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{r\ s}{2\ s\ -\ r} = \frac{-\ 30\ s}{2\ s\ +\ 30} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

b. Tamaño de la imagen.

El aumento en los espejos es (expresión IX):

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{-\ s'}{s} \quad \Rightarrow \quad y' = -\ y\ \frac{s'}{s} = -\ 4\ \frac{s'}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

c. Resultados. Sustituyendo cada valor de **s** en (1) y el de **s** y **s'** en (2) queda:

s	**s'**	**y'**
- 60 cm	- 20 cm (real)	- 1,33 cm (invertida)
- 30 cm	- 30 cm (real)	- 4 cm (invertida)
- 15 cm	∞	∞
- 10 cm	+ 30 cm (virtual)	+ 12 cm (derecha)

9. Un espejo produce una imagen real e invertida tres veces mayor que el objeto, a una distancia de 28 cm del objeto. Hallar la distancia focal y el radio del espejo.

El aumento en un espejo es (expresión IX):

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{-3\,y}{y} = \frac{-s'}{s} \qquad \Rightarrow \qquad s' = 3\,s$$

De la figura se deduce la relación de segmentos *orientados*:

O'O + OV = O'V

en la que: O'O = + 28 cm ; OV = - s ; O'V = - s'

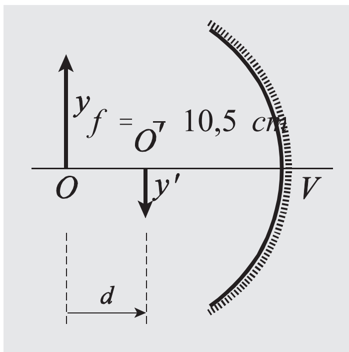
y al sustituir, igualar y operar, queda:

28 - s = - s' ⇒ s' = s - 28 = 3.s ⇒ s = - 14 cm

Por otra parte al sustituir estos valores de **s** y **s'** en la fórmula de los espejos (expresión VIII):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{3\,s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{3\,(-14)} + \frac{1}{-14} \qquad \Rightarrow \qquad f = 10{,}5\ cm$$

$$r = 2\,f = -21\ cm$$



y de este resultado se deduce que el espejo es cóncavo por tener focal negativa, lo que no podía ser de otra forma por ser éstos los únicos espejos que forman imágenes reales de objetos reales.

10. Demostrar analíticamente que, en un espejo cóncavo, si el aumento es -1, la distancia objeto-imagen es mínima.

Supongamos que el objeto y su imagen están en una posición cualquiera (dentro de las posibles para un espejo cóncavo) como la que se representa en la figura. De ella se deduce que:

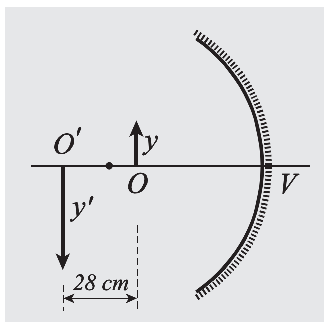
OO' + O'V = OV

y como: OO' = d ; O'V = - s' ; OV = - s

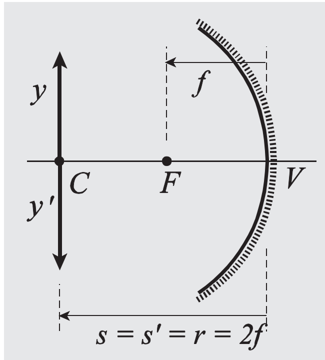
queda: $d + (-s') = -s$ ⇒ $d = s' - s$ . . . . (1)

Despejando s' en la fórmula de los espejos (expresión VIII):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad s' = \frac{s\,f}{s-f} \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (2)$$



y sustituyendo en (1): $$d = s' - s = \frac{s\,f}{s - f} - s = \frac{2\,s\,f - s^2}{s - f}$$



Derivando ***d*** respecto de ***s*** e igualando a cero esta derivada:

$$d' = 0 = \frac{s^2 - 2\,s\,f}{(s - f)^2} \quad \Rightarrow \quad s^2 - 2\,s\,f = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2\,f$$

por lo que, para $s = 2\,f$, la distancia ***d*** entre objeto e imagen es mínima.

De este resultado tambien se deduce que el objeto está situado en el centro de curvatura **C** del espejo ya que el radio de un espejo esférico es $r = 2\,f$.

Para comprobar que el valor del aumento es $\beta = -1$, sustituyendo el valor de s' obtenido en (2) en la expresión (IX) del aumento:

$$\beta = \frac{-s'}{s} = \frac{-s\,f\,/\,(s - f)}{s} = \frac{-f}{(s - f)}$$

y como, en este caso, es $s = 2\,f$ queda:

$$\beta = \frac{-f}{(2\,f - f)} = -1 = \frac{-s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = s$$

resultado del que también se deduce que, en estas circunstancias, el objeto y la imagen ocupan la misma posición, en el centro de curvatura **C**, como se indica en la figura.

11. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de 1,6 m. Hallar la posición del objeto y de la imagen si ésta es: a) real y tres veces mayor, b) real y tres veces menor, c) virtual y tres veces mayor. Repetir el mismo problema para un espejo esférico convexo del mismo radio.

El aumento en cualquier espejo esférico es (expresión IX):

$$\beta = \frac{-s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = -\beta\,s$$

y sustituyendo en la fórmula de los espejos (expresión VIII):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-\beta\,s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{r}{2}\,\frac{\beta - 1}{\beta} \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

1. ***Espejo cóncavo (r* = - 1,6 m)**.

a) Por ser real, la imagen es invertida y el aumento:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-3\,y}{y} = -3$$

y sustituyendo en (1):

$$s = \frac{r}{2}\,\frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{-1{,}6}{2}\,\frac{(-3\;-1)}{-3} = -1{,}07\ m \quad ; \quad s' = -\beta\,s = -(-3)\,(-1{,}07) = -3{,}2\ m$$

b) Por ser real, la imagen es invertida y el aumento:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-(1/3)\,y}{y} = -\frac{1}{3} = -0{,}33$$

y sustituyendo en (1):

$$s = \frac{r}{2}\,\frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{-1{,}6}{2}\,\frac{(-0{,}33 - 1)}{-0{,}33} = -3{,}2\ m$$

$$s' = -\beta\, s = -(-0{,}33)\,(-3{,}2) = -1{,}07\ m$$

c) Por ser virtual, la imagen es derecha y el aumento:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{+3\,y}{y} = +3$$

y sustituyendo en (1):

$$s = \frac{r}{2}\,\frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{-1{,}6}{2}\,\frac{(3 - 1)}{3} = -0{,}53\ m$$

$$s' = -\beta\, s = -3\,(-0{,}53) = 1{,}6\ m$$

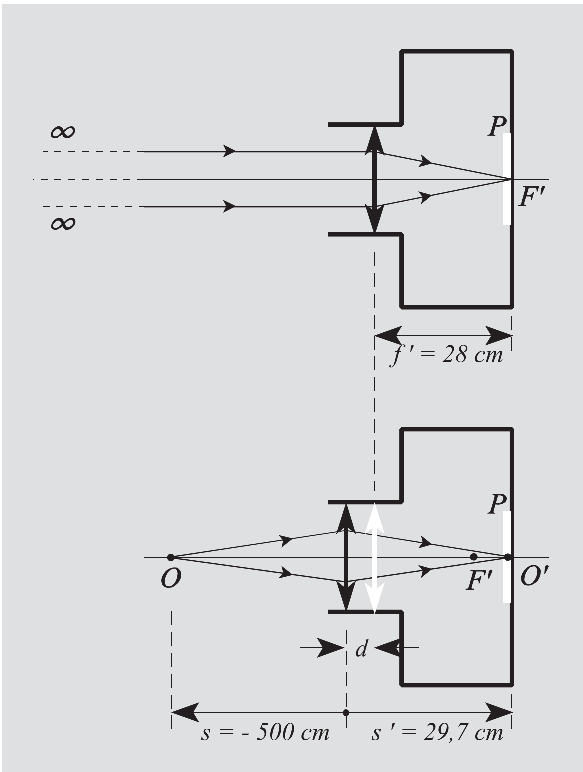
2. ***Espejo convexo.***

Los espejos convexos, para un objeto real, no forman en ningún caso las imágenes que indica el enunciado ya que estos espejos forman siempre imágenes virtuales, menores y derechas, lo que no se corresponde con ninguna de las características de las imágenes referidas en el enunciado.

12. Una cámara fotográfica está equipada con una lente de distancia focal 28 cm.

a) ¿Cómo deberá desplazarse para cambiar el enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro que se encuentra a una distancia de 5 m?.

b) ¿Cuál es el tamaño en la película de la imagen de una persona de 1,75 m de altura que se encuentre a una distancia de 5 m?



a. Cuando la cámara está enfocada al infinito, la imagen, que se forma en la película **P**, está en el plano focal imagen **F'** de la lente, es decir, a 28 cm de ella.
Cuando se enfoca a un objeto situado a 5 m, la imagen se forma a una distancia **s'** que pasamos a calcular:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{28} + \frac{1}{-500}$$

$$s' = +29{,}7\ cm$$

En consecuencia, el desplazamiento que se ha de dar a la lente para conseguir el enfoque de nuevo es:

d = 29,7 - 28 = 1,7 cm *hacia la izquierda*.

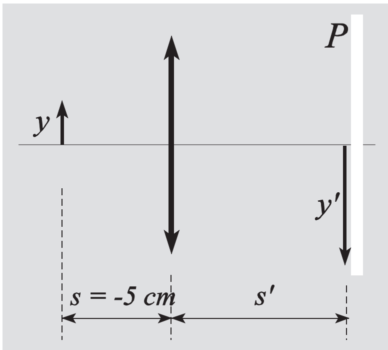
b. Cálculo del tamaño de la imagen:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad y' = y\,\frac{s'}{s} = 175\,\frac{+\,29{,}7}{-\,500} = -\,10{,}4\ cm$$

en la que el signo negativo indica que la imagen es invertida.

13. Un objeto está situado a 5 cm de una lente que forma de él una imagen 40 veces mayor en una pantalla. Calcular: a) la posición de la pantalla, b) la potencia de la lente.

a. La posición de la pantalla está definida por la distancia **s'** a la que se forma la imagen. Como la imagen es invertida es $y' = -40y$, y el aumento:



$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-\,40y}{y} = -\,40 = \frac{s'}{s}$$

$$s' = -\,40s = -\,40\,(-\,5) = +\,200\ cm = 2\ m$$

por lo que la pantalla ha de estar situada a 2 m a la derecha de la lente.

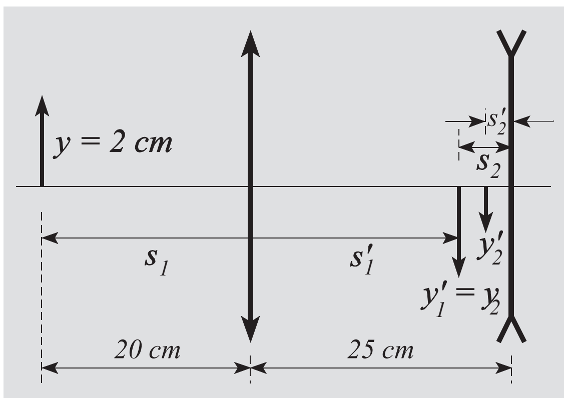
b. Potencia de la lente:

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{-\,0{,}05} = 20{,}5\ D$$

en la que las distancias ***s*** y ***s'*** se han expresado en metros para que la potencia venga en dioptrías.

14. A 20 cm a la derecha de un objeto de 2 cm de tamaño está situada una lente convergente de 10 dioptrías. A 25 cm a la derecha de esta lente hay otra, divergente, de 20 dioptrías. Calcular: a) la posición de la imagen final. b) el tamaño de esta imagen.

La primera lente forma, del objeto y, una imagen y'_1 a una distancia de ella s'_1. Esta imagen, situada a una distancia s_2 de la segunda lente, actúa como objeto para esta lente que forma la imagen final y'_2 a una distancia de ella s'_2



Posición de la primera imagen:

Teniendo en cuenta que la distancia objeto es negativa por estar éste situado a la izquierda de la lente y que esta distancia ha de expresarse en metros, al aplicar la fórmula de las lentes queda:

$$P_1 = \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'_1} = P_1 + \frac{1}{s_1} = 10 + \frac{1}{-0{,}2} \quad \Rightarrow \quad s'_1 = +0{,}2\ m = 20\ cm$$

resultado del que se deduce que la primera imagen está situada a 5 cm a la izquierda de la segunda lente. En consecuencia, s_2 = - 5 cm = - 0,05 m.

Tamaño de la primera imagen:

$$\beta = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad y'_1 = y_1 \frac{s'_1}{s_1} = 2\ cm\ \frac{+20\ cm}{-20\ cm} = -2\ cm$$

resultado del que se deduce que la primera imagen es invertida y tiene el mismo tamaño que el objeto. En consecuencia, y_2 = - 2 cm.

Posición de la segunda imagen:

$$P_2 = \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} \Rightarrow \frac{1}{s'_2} = P_2 + \frac{1}{s_2} = -20 + \frac{1}{-0{,}05} \Rightarrow s'_2 = -0{,}025\ m = -2{,}5\ cm$$

Tamaño de la segunda imagen:

$$\beta_2 = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2} \quad \Rightarrow \quad y'_2 = y_2 \frac{s'_2}{s_2} = -2\ cm\ \frac{-2{,}5\ cm}{-5\ cm} = -1\ cm$$

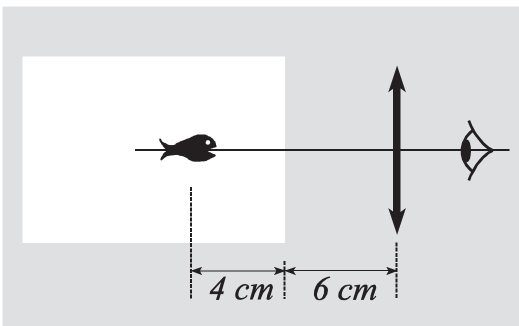
De estos resultados se deduce que la imagen final está situada a 2,5 cm a la izquierda de la segunda lente siendo invertida y de 1 cm de tamaño.

15. Una persona mira a la cría de un pez de 5 mm de tamaño a través de una lupa de 10 cm de focal, tal como se indica en la figura. Calcular:

a) la posición de la imagen que ve el observador en el momento en que el pez se encuentra a 4 cm de la pared de la pecera.

b) el tamaño de esta imagen.

Considerar despreciable el espesor de la pared de vidrio. (n_{agua} = 4/3).



Planteamiento.

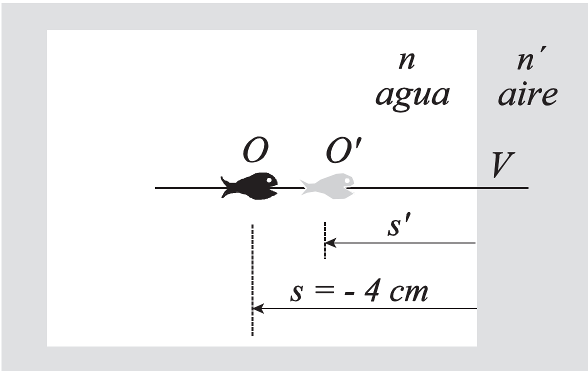
El sistema agua-aire (dioptrio plano) forma una primera imagen del pez. Esta imagen va a actuar como objeto para la lente, que formará la imagen final. Si esta imagen es virtual la verá el observador.

Imagen formada por el dioptrio plano.

La posición de la imagen (paraxial) en un dioptrio plano viene dada por la expresión (VII):

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$$

en la que:
n = índice de refracción del primer medio (agua) = 1,33
n' = índice de refracción del segundo medio (aire) = 1
s = posición del objeto = - 4 cm
s' = posición de la imagen.



quedando al sustituir:

$$\frac{1{,}33}{-4} = \frac{1}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad s' = -3\ cm = VO'$$

En cuanto al tamaño de esta primera imagen, recordemos que el aumento lateral en un dioptrio plano es + 1, por lo que el tamaño de esta imagen es también de 5 mm.

Imagen formada por la lente.

La imagen **O'** formada por el dioptrio plano está a 3 cm de **V** y, por lo tanto, a 9 cm de la lente. En consecuencia, la posición del objeto para la lente es s = -9 *cm*.

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{10} + \frac{1}{-9}$$

$$s' = -90{,}0\ cm$$

y el tamaño de esta imagen final:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$y' = y\,\frac{s'}{s} = 0{,}5\,\frac{-90}{-9} = 5\ cm$$

Conclusión: la imagen final es virtual (por formarse a la izquierda de la lente), está situada a 90 cm de la lente y tiene un tamaño de 5 cm.

16. Para proyectar un objeto sobre una pantalla situada a 50 cm de él, se utiliza una lente de 10 dioptrías. Se observa que hay dos posiciones de la lente para las que se forma una imagen nítida en pantalla.

a) ¿Cuáles son estas posiciones?

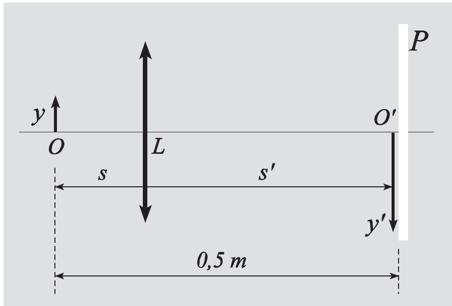
b) ¿Cuál es el aumento en cada caso?

c) ¿Qué potencia tendría que tener una lente para que, colocada en el centro de la distancia objeto-pantalla, formara en ésta una imagen nítida?

d) ¿Cuál es el aumento en este caso?

a. Aunque expresamente el enunciado no dice el tipo de lente, ha de ser convergente ya que las divergentes, de un objeto real, no forman imágenes en pantallas.

Se desconoce tanto la distancia objeto ***s*** como la distancia imagen ***s'*** pero, teniendo en cuenta el convenio de signos y que s = LO y s' = LO', se puede plantear la relación:



$$OL + LO' = OO' \quad \rightarrow \quad -s + s' = +0{,}5 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

y como: $$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P' = 10\ D$$

resolviendo el sistema queda una ecuación de segundo grado que ofrece las soluciones:

$$s_1 = -\,0{,}138\ \text{m} = -\,13{,}8\ \text{cm} \qquad ; \qquad s_2 = -\,0{,}362\ \text{m} = -\,36{,}2\ \text{cm}$$

En consecuencia, la pantalla ha de estar situada a 13,8 cm o a 36,2 cm a la derecha del objeto. A cada una de estas posiciones del objeto, de acuerdo con la expresión (1), le corresponde la siguiente posición de la imagen:

$$s_1' = 0{,}5 + s_1 = 0{,}5 - 0{,}138 = 0{,}362\ \text{m} = 36{,}2\ \text{cm}$$

$$s_2' = 0{,}5 + s_2 = 0{,}5 - 0{,}362 = 0{,}138\ \text{m} = 13{,}8\ \text{cm}$$

b) *Cálculo del aumento en cada caso.*

$$\beta_1 = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{36{,}2}{-\,13{,}8} = -\,2{,}62 \qquad ; \qquad \beta_2 = \frac{s_2'}{s_2} = \frac{13{,}8}{-\,36{,}2} = -\,0{,}38$$

c) Si el objeto y la imagen son equidistantes respecto de la lente, es:

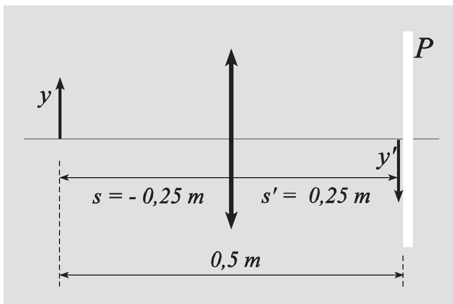
$$s = -\,0{,}25\ \text{m} \qquad y \qquad s' = +\,0{,}25$$

y la potencia de la lente:

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{-\,0{,}25} = 8\ D$$

d) *Cálculo del aumento en este caso:*

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{0{,}25}{-\,0{,}25} = -\,1$$



y la imagen, en este caso, es invertida y del mismo tamaño que el objeto.

17. **Un sistema óptico formado por dos lentes de potencia desconocida está instalado en los extremos de un tubo de 17,5 cm de longitud. Calcular la focal de ambas lentes sabiendo que si se coloca un objeto a 5 cm de un extremo del tubo, el sistema forma una imagen real a 20 cm del otro extremo y que si se invierte la posición del tubo el sistema forma una imagen virtual a 4, 23 cm del extremo posterior.**

Recordemos que en un sistema formado por dos o más lentes, la imagen que forma la primera actúa como objeto para la siguiente.

Supongamos que, cuando las lentes están en la posición de la fig. **a**, la primera lente (**L_1**) forma la imagen **O_1'** del objeto **O**:

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{-5} = \frac{1}{s_1'} + 0,2 \quad ...(1)$$

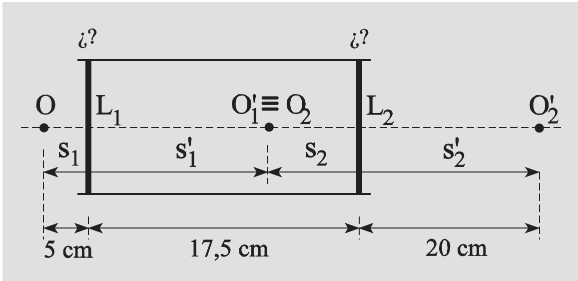


fig. a

Esta imagen **O_1'** actúa como objeto (**O_2**) para la segunda lente **L_2** que forma una imagen real en **O_2'**:

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{s_2} = 0,05 - \frac{1}{s_2} \quad .... (2)$$

Por otra parte se puede establecer la relación de distancias: $L_1L_2 = L_1O_1' + O_1'L_2 = L_1O_1' + O_2L_2$

y teniendo en cuenta el convenio de signos y recordando que: s = LO y s' = LO' queda:

$$17,5 = s_1' - s_2 \quad .... (3)$$

Cuando se invierte la posición del tubo (fig. **b**), la primera lente (**L_2**) forma una imagen que, por desconocida, suponemos en **O_3'** :

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_3} = \frac{1}{s_3'} - \frac{1}{-5} = \frac{1}{s_3'} + 0,2 \quad . (4)$$

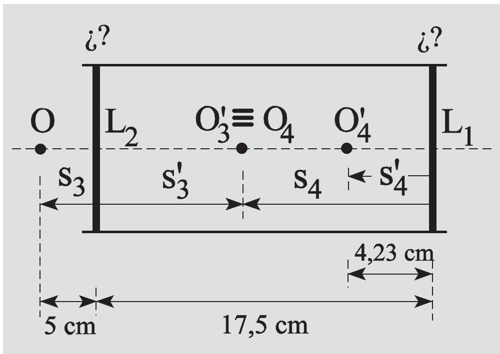


fig. b

Esta imagen **O_3'** actúa como objeto (**O_4**) para la segunda lente (**L_1**) que, según el enunciado, forma una imagen final virtual por lo que hemos de situar a esta imagen en una posición (**O_4'**) a la izquierda de la lente **L_1**:

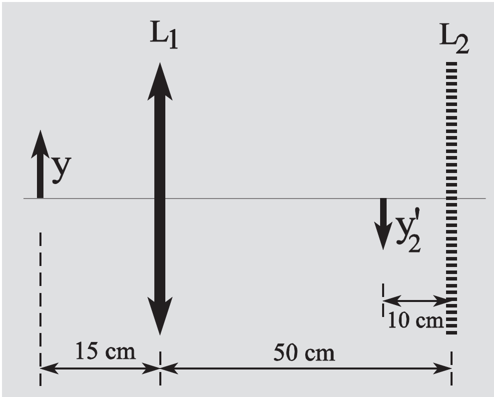
$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{s_4'} - \frac{1}{s_4} = \frac{1}{-4,23} - \frac{1}{s_4} = -0,236 - \frac{1}{s_4} \quad .... (5)$$

además: $L_2L_1 = L_2O_3' + O_3'L_1 = L_2O_3' + O_4L_1 \quad \Rightarrow \quad 17,5 = s_3' - s_4 \quad .... (6)$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones (1) a (6) conduce a dos soluciones posibles:

1ª solución:	$f_1' = -5$ cm	⇒	$P_1 = -20$ D (divergente)
	$f_2' = +10$ cm	⇒	$P_2 = +10$ D (convergente)
2ª solución:	$f_1' = +3,60$ cm	⇒	$P_1 = +27,8$ D (convergente)
	$f_2' = +3,78$ cm	⇒	$P_2 = +26,5$ D (convergente)

18. **En el sistema de la figura, la potencia de la lente L_1 es 10 dioptrías y se ha ocultado la naturaleza de la lente L_2. Calcular la potencia de esta lente sabiendo que y_2' es la imagen final formada por el sistema.**



Planteamiento.

Calcularemos la posición s_1' de la imagen y_1' que forma la primera lente. Esta imagen actúa como objeto (y_2) para la segunda lente. Conocida la distancia s_1' se puede calcular la posición de y_2 respecto de $\mathbf{L_2}$. Por último, se calcula la potencia de esta lente dado que el enunciado proporciona la posición s_2' de la imagen final. Recordemos, además, que cuando se trabaja con potencias es necesario que las distancias se expresen en metros.

Resolución.

$$P_1 = \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{s_1} + P = \frac{1}{-0{,}15} + 10 = 3{,}33$$

$$s_1' = 0{,}3\ m = 30cm = L_1O_1'$$

La posición $\mathbf{s_2}$ de esta imagen, actuando como objeto, respecto de la lente $\mathbf{L_2}$ es:

$$L_1L_2 = L_1O_1' + O_1'L_2 = L_1O_1' - L_2O_1'$$

y como $O_1' \equiv O_2$:

$$L_1L_2 = L_1O_1' - L_2O_2$$

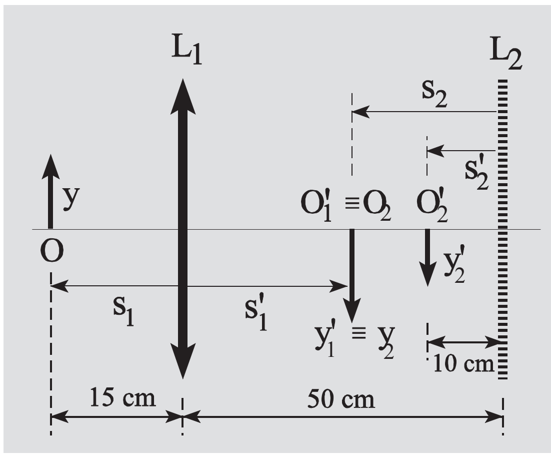
quedando al sustituir:

$$50 = s_1' - s_2 \quad \rightarrow \quad s_2 = s_1' - 50 = 30 - 50$$

$$s_2 = -20 \text{ cm}$$

con lo que la potencia de $\mathbf{L_2}$ queda:

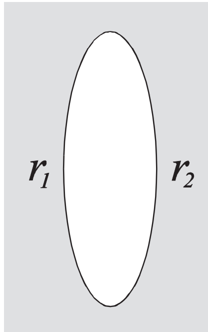
$$P_2 = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{-0{,}2} = -5\ D$$



Se trata, pués, de una lente divergente de - 5 dioptrías.

19. **Una lente biconvexa de radios iguales y de índice de refracción 1,5 tiene una potencia de 5 dioptrías. Calcular:**
a) los radios de la lente.
b) la posición del objeto y de la imagen sabiendo que ésta es real y que se encuentra a doble distancia de la lente que el objeto.
c) el aumento.

a) *Cálculo de los radios.*



La potencia de una lente, en función de su geometría, viene dada por la expresión:

$$P = (n - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

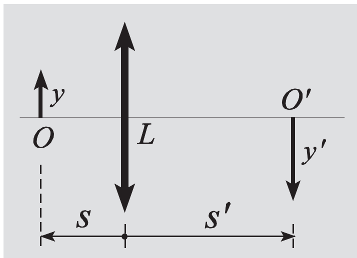
En este caso, por ser biconvexa, ambos radios son iguales en valor absoluto. Llamando ***r*** a este valor:

$$r_1 = r \qquad \text{y} \qquad r_2 = -r$$

y sustituyendo:

$$5 = (1{,}5 - 1)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{-r}\right] \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}2 \ m = 20 \ cm$$

b) *Cálculo de la posición del objeto y de la imagen.*



Según el enunciado es:

LO' = 2.OL

y como: OL = - s y LO' = s'

queda: $s' = -2s$

y sustituyendo en la fórmula de las lentes:

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad 5 = \frac{1}{-2s} - \frac{1}{s}$$

$$s = -0{,}3 \ m = -30 \ cm \quad ; \quad s' = -2s = -2(-30) = 60 \ cm$$

c) *Cálculo del aumento.*

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{60}{-30} = -2$$

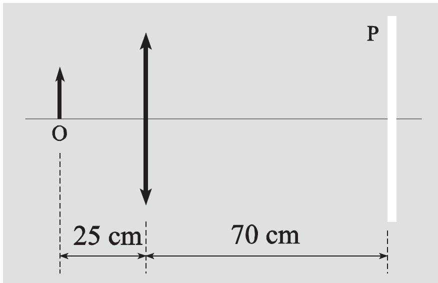
resultado del que se deduce que la imagen es invertida y de doble tamaño que el objeto.

20. **Con una lente convergente de 20 cm de distancia focal se desea proyectar la imagen de un objeto O sobre una pantalla P situada a 70 cm de la lente (ver figura). Si se coloca el objeto a 25 cm de la lente la imagen se ve borrosa.**

a) ¿Cuánto y en qué sentido tendrá que desplazarse la pantalla para ver una imagen nítida? ¿Cuál sería el aumento en este caso?.

b) Partiendo de la posición inicial, ¿cuánto y en qué sentido tendrá que desplazarse el objeto para ver una imagen nítida? ¿Cuál sería el aumento en este caso?

a. Cuando la pantalla esté situada justamente en la posición donde se forma la imagen, ésta se verá nítida. Calculamos esta posición:



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{20} + \frac{1}{-25}$$

$$s' = +100 \ cm$$

Por lo tanto, la pantalla hay que situarla a 100 cm a la derecha de la lente, lo que implica un desplazamiento de 30 cm hacia la derecha.

El aumento en este caso es:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{100}{-25} = -4$$

b. En este caso, la imagen ha de formarse en la posición inicial de la pantalla, es decir, a 70 cm a la derecha de la lente. Calculamos la posición en la que ha de estar el objeto:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{70} \quad \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s = -28 \ cm$$

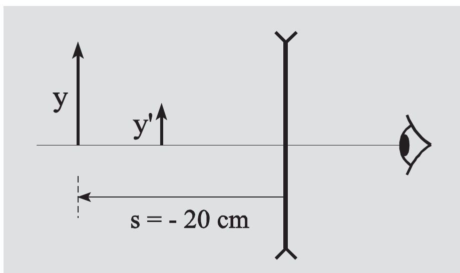
En consecuencia, hay que desplazar al objeto desde la posición inicial (s = - 25 cm) hasta la final (s = - 28 cm), es decir, 3 cm hacia la izquierda.

El aumento en este caso es:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{70}{-28} = -2{,}5$$

21. **Un objeto de 5 cm de tamaño está situado a 20 cm de una lente. Una persona lo observa a través de la lente y estima que la imagen mide 2 cm. Calcular la potencia de la lente. ¿De qué tipo de lente se trata?**

Aunque el enunciado no lo indica expresamente, se trata de una lente divergente ya que la imagen es *observable y menor* y las imágenes *observables* que forman las convergentes son mayores que el objeto (lupa).

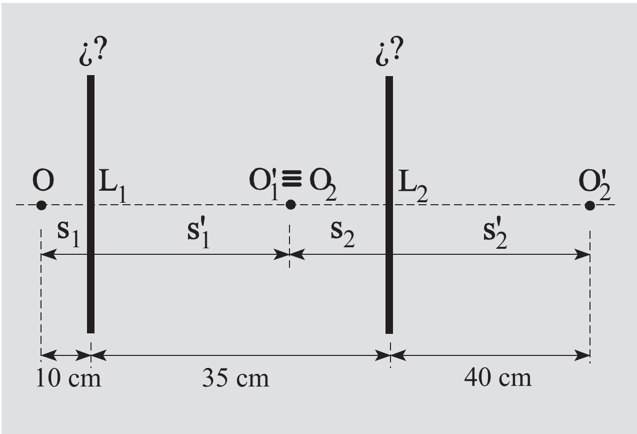


Las imágenes que forman las lentes divergentes (de objetos reales) son derechas (tamaño positivo). Como se conoce el tamaño del objeto y el de la imagen, a partir del aumento se puede calcular la distancia imagen. Conocida ésta, aplicando la fórmula de las lentes, obtendremos la potencia.

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{+2}{+5} = \frac{s'}{-20} \quad \Rightarrow \quad s' = -8\ cm$$

$$P = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-0{,}08} - \frac{1}{-0{,}20} = -7{,}5\ D \quad \text{(lente divergente)}$$

22. Un sistema óptico está formado por dos lentes de potencia desconocida. Calcular la potencia de ambas lentes sabiendo que si se coloca un objeto a 10 cm de la primera, el sistema forma una imagen real a 40 cm del otro extremo y de tamaño igual a la mitad del objeto, siendo la distancia entre lentes de 35 cm.



En un sistema formado por dos o más lentes, la imagen que forma la primera actúa como objeto para la siguiente y así sucesivamente.

Supongamos que la primera lente (**L_1**) forma la imagen **O_1'** del objeto **O**. Esta imagen **O_1'** actúa como objeto (**O_2**) para la segunda lente **L_2** que forma una imagen final real, y por lo tanto a su derecha, en **O_2'**.

Se puede establecer la relación de distancias:

$$L_1L_2 = L_1O_1' + O_1'L_2 = L_1O_1' + O_2L_2$$

y teniendo en cuenta el convenio de signos y recordando que: s = LO y s' = LO' queda:

$$35 = s_1' - s_2 \quad \Rightarrow \quad s_1' = 35 + s_2 \quad \ldots\ (1)$$

Por otra parte, el aumento en un sistema formado por varias lentes viene dado por el producto de los aumentos:

$$\beta = \beta_1 . \beta_2 = \frac{s_1'}{s_1}\frac{s_2'}{s_2} = \frac{s_1'}{-10}\frac{+40}{s_2} = -4\frac{s_1'}{s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

y como, según el enunciado, el tamaño dela imagen final (y_2') es la mitad del objeto (y), el aumento β es:

$$\beta = \frac{y_2'}{y} = \frac{\pm 0{,}5y}{y} = \pm 0{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

en la que, por desconocer la naturaleza y potencia de las lentes, se ha de contemplar la posibilidad de que el aumento sea positivo o negativo, por lo que el problema tendrá dos soluciones.

1ª solución: para β = + 0,5.

Igualando las expresiones (2) y (3):

$$\beta = -4\frac{s_1}{s_2} = +0{,}5 \quad \Rightarrow \quad s_2 = -8s_1' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

y resolviendo el sistema formado por (1) y (4) queda $s_1' = 3{,}89\ cm$ con lo que se puede calcular f_1':

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{3{,}89} - \frac{1}{-10} \quad \Rightarrow \quad f_1' = 2{,}8\ cm = 0{,}028\ m \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{f_1'} = 35{,}7\ D$$

y sustituyendo el valor de s_1' en (4) queda $s_2 = -8\ (3{,}89) = -31{,}1\ cm$ por lo que se puede calcular la focal de la segunda lente:

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{40} - \frac{1}{-31{,}1} \quad \Rightarrow \quad f_2' = 17{,}5\ cm = 0{,}175\ m \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{1}{f_2'} = 5{,}7\ D$$

2ª solución: para β = - 0,5.

Repitiendo el cálculo realizado en el caso anterior, haciendo ahora β = - 0,5 , se obtiene el resultado:

$$f_1' = -10\ cm = -0{,}1\ m \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{f_1'} = -10\ D$$

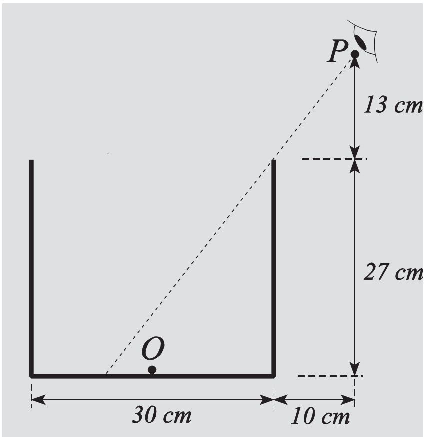
$$f_2' = 20\ cm = 0{,}20\ m \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{1}{f_2'} = 5\ D$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos personas están sumergidas, a la misma profundidad, en una piscina. Si la distancia entre ellas es de 10 m, calcular la máxima altura que puede tener el agua sobre sus cabezas para que ambas puedan verse por reflexión total (n_{agua} = 4/3).

Solución: 4,41 m

2. Un pequeño objeto **O** está situado en el centro del fondo de un recipiente opaco y vacío cuyas medidas se indican en la figura. Un observador, que está situado en el punto **P**, no puede ver directamente el objeto **O**. Sin embargo, si se vierte lentamente agua en el recipiente, llega un momento en que el observador puede ver el objeto. Calcular la altura del agua en ese momento.



Solución*:* 22,6 cm.

3. Una capa de agua de 2 cm de espesor (n = 1,33) flota encima de una capa de 4 cm de gruesa de tetracloruro de carbono (n = 1,46) dentro de un depósito. ¿A qué profundidad respecto de la superficie libre del agua parecerá estar el fondo del depósito para un observador que está mirando desde arriba y con incidencia normal?

Solución*:* 4,24 cm.

4. Un submarinista lleva una máscara de buceo cuya parte delantera está curvada hacia el exterior con un radio de curvatura de 0,5 m. Existe así una superficie esférica convexa entre el agua y el aire que llena la máscara. Un pez se encuentra a 2,5 m delante de la máscara.
a) ¿Dónde parece estar?
b) ¿Cuál es la amplificación de su imagen?
(**n** del agua = 1,33).

Solución*:* a) a 0,83 m *a la izquierda* de la máscara.
b) + 0,44.

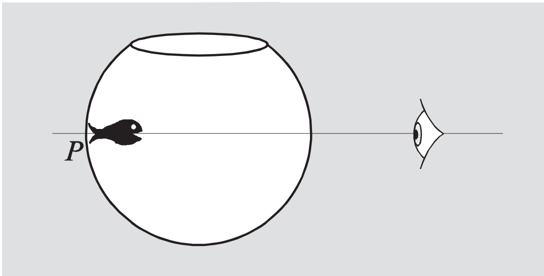
5. Un observador sentado en su coche en reposo ve a un corredor por su retrovisor lateral, que es un espejo esférico con un radio de curvatura de 2 m. El corredor está inicialmente a 5 m del espejo y se está acercando a 3,5 m/s. ¿Con qué velocidad se acerca su imagen cuando se le observa por el espejo?

Solución: 0,096 m/s.

6. Un pez se encuentra en el extremo (punto **P**) de una pecera esférica de radio 20 cm.

a) Calcular la posición y el aumento de la imagen vista por el observador.

b) Si el observador se desplazara ¿cambiaría la posición de la imagen?
Despreciar el efecto de las delgadas paredes de vidrio.(n_{agua} = 4/3).



S*olución*: a) el observador ve una imagen derecha, dos veces mayor que el objeto, situada a 20 cm a la izquierda del punto **P**.

b) la posición de la imagen no depende, en ningún caso, de la posición del observador.

7. Un objeto está situado a 5 cm de una lente que forma de él una imagen 40 veces mayor en una pantalla. Calcular:

a) la posición de la pantalla.

b) la potencia de la lente.

Solución: a) a 2 m a la derecha de la lente

b) 20,5 dioptrías.

8. Una persona acaba de fotografiar un paisaje (objeto en el infinito) con una cámara cuya lente tiene una potencia de 20 dioptrías. A continuación pasa a fotografiar a un objeto que, una vez enfocada la cámara, queda a 20 cm de la lente. ¿Cuánto y en qué sentido ha tenido que desplazar la lente para conseguir el nuevo enfoque?

Solución: 1,67 cm hacia el objeto.

9. Un objeto y una pantalla están separados 1 m.

a) ¿En qué puntos entre el objeto y la pantalla puede colocarse una lente de distancia focal 21 cm para obtener una imagen nítida sobre la pantalla?.

b) Cuál es el aumento de la imagen en cada caso?.

Solución: a) a 30 cm y a 70 cm a la derecha del objeto.

b) 2,3 ; 0,43.

10. Una lente convergente de radios iguales y distancia focal 50 cm proyecta sobre una pantalla la imagen real de un objeto de tamaño 5 cm.

a) Calcular la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen tenga un tamaño de 40 cm.

b) Si el índice de refracción de la lente es 1,5, calcular el valor de los radios y la potencia de la lente.

c) Junto a esta lente se sitúa otra para que, sin variar las posiciones del objeto y de la pantalla, el conjunto proyecte una imagen de tamaño 10 cm. ¿Qué distancia focal debe tener esta segunda lente?.

Solución: a) 4,5 cm.

b) 50 cm, 2 dioptrías.

c) 1,12 m.