3.2 FACTORIZACIÓN LU

<u>definición</u>: sean $v, w \in \mathbb{R}^n$, decimos $M = v \otimes w$ la matriz $n \times n$ que se obtiene como producto del vector columna v y del vector fila w^t ($M = v w^t$ notación alternativa)

PRODUCTO TENSORIAL

$$M = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & w & - \end{pmatrix} \quad , \quad m_{ij} = v_i w_j$$

<u>propiedades</u>:

i) $(v \otimes w)\, u = \langle w, u \rangle\, v \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$

<u>demo</u>:

$$\begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} - & w & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}}_{\langle w, u \rangle}$$

$$M = v \otimes w \ , \quad (Mu)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} u_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} v_i w_j u_j = v_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} w_j u_j}_{\langle w, u \rangle} \ \#$$

ii) sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y sea e_k el k-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$(e_k)_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} = \delta_{i,k}$$

DELTA DE KRONECKER

si $v \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$v \otimes e_k = \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & v & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

↑ k-ésima columna

Ejercicio: demostrar

teorema (LU)

sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decimos $U^{(0)} = A$

definimos recursivamente $\{U^{(k)}\}_{k=1}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$

$$U^{(k)} = L_k^{-1}\, U^{(k-1)}, \qquad k = \underrightarrow{1 \dots n-1}$$

donde $L_k = \underset{\text{identidad } n\times n}{I} + \ell^{(k)} \otimes e_k$, y

$$\ell^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ell^{(k)}_{k+1} \\ \vdots \\ \ell^{(k)}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \ell^{(k)}_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \dots k \\ \dfrac{u^{(k-1)}_{ik}}{u^{(k-1)}_{kk}} & i = k+1 \dots n \end{cases}$$

si $\underline{u^{(k-1)}_{kk}} \neq 0 \quad \forall k = 1 \dots n-1$

$\Rightarrow$ $A = LU$, donde L, U son dados por

$$U = U^{(n-1)}, \qquad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} \ell^{(k)} \otimes e_k$$

y U es triangular alto.

$$\ell^{(k)} \otimes e_k = \begin{pmatrix} | & 0 & | \\ 0 & \vdots & 0 \\ | & \ell^{(k)} & | \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ | & 1 & & & \\ \ell^{(1)} & | & 1 & & \\ | & \ell^{(2)} & \ell^{(3)} & \ddots & \\ | & | & | & & 1 \end{pmatrix}$$

observación: la condición de existencia solo se puede comprobar haciendo la iteración