3.7. EL ESPACIO VECTORIAL DUAL

Todo cuerpo $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}, \mathbb{C}$) es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión 1. Podemos considerar $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, el espacio de las aplicaciones lineales $A: V \to \mathbb{K}$, con V espacio vectorial.

Def Si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ se llama **espacio dual** de V y se denotará por V^*

NOTA: Otros autores usan V' para el espacio dual.

En la sección 3.6 hemos probado que $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ es un esp. vectorial sobre $\mathbb{K}$ y que $\dim(V^*) = \dim(\mathbb{K}) \cdot \dim(V) = \dim(V)$ cuando V tiene dimensión finita. Además, dada $\beta = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_n\}$ base de V, la prop. 6.1 nos da una forma de encontrar una base $\beta^* = \{E_1^*, .., E_n^*\}$ de V^*.

Recordemos: para $i = 1, 2, \dots n$.

$$E_i^*(\vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

β^* se llama <u>base dual</u> de β

NOTA: Otros autores escriben los elementos de β^* con letras minúsculas con asterisco, e.d. $\vec{e}_i^{\,*}$.

Ej 1. Describe la base dual de la base canónica $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

S/ $E_1^*(\vec{e}_1) = 1$, $E_1^*(\vec{e}_2) = 0$, $E_1^*(\vec{e}_3) = 0$. Por tanto

$$E_1^*(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 E_1^*(\vec{e}_1) + x_2 E_1^*(\vec{e}_2) + x_3 E_1^*(\vec{e}_3)$$

$$= x_1$$

De manera similar se concluye

$$\underline{E_2^*(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3) = x_2 \ , \quad E_3^*(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3) = x_3}$$

Ej 7.2. Sea $\beta = \{\vec{u}_1=(1,1,0),\ \vec{u}_2=(0,1,1),\ \vec{u}_3=(1,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ (Comprueba que es base). Describe la base dual $\beta^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$

S/ Por definición

$$U_1^*(\vec{u}_1)=1 , \quad U_1^*(\vec{u}_2)=0, \quad U_1^*(\vec{u}_3)=0$$

Es decir, si $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$U_1^*(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=1 , \quad U_1^*(\vec{e}_2+\vec{e}_3)=0 , \quad U_1^*(\vec{e}_1+\vec{e}_3)=0$$

Como U_1 es lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} U_1^*(\vec{e}_1)+U_1^*(\vec{e}_2) & & =1 \\ & U_1^*(\vec{e}_2)+U_1^*(\vec{e}_3) & =0 \\ U_1^*(\vec{e}_1) & +U_1^*(\vec{e}_3) & =0 \end{array}\right\} \quad \text{SEL} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$U_1^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3 \iff U_1^*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para hallar U_2^* hay que resolver un SEL con la misma matriz que el anterior y con término independiente $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para U_3^* hay que poner el término independiente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se puede, por tanto hacer un cálculo conjunto,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ U_1^* & U_2^* & U_3^* \end{array}$$

$$U_2^*(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow U_2^*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$U_3^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow U_3^*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

<u>NOTA</u>. Observa que las coordenadas de U_j^* en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ es la <u>columna</u> j de la matriz A^{-1}, donde A es la matriz que se obtiene poniendo <u>por filas</u> las coordenadas de los elementos de β en la base canónica $\mathcal{E}$.

NOTA: Algunos autores llaman **formas o 1-formas** a los elementos de $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$.

Proposición 7.1. Sea $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\beta^* = \{U_1^*, \dots, U_n^*\}$ su base dual. Las coordenadas de $A \in V^*$ en la base β^* son $(A(\vec{u}_1), \dots, A(\vec{u}_n))$.

D/ Como $\beta^* = \{U_1^*, \dots, U_n^*\}$ es base de V^*, se puede escribir $A = \sum_{j=1}^{n} a_j U_j^*$ con $a_j \in \mathbb{K}$. Tenemos que probar que $a_k = A(\vec{u}_k)$ para $k=1,\dots,n$:

$$A(\vec{u}_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot U_j^*\right)(\vec{u}_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot U_j^*(\vec{u}_k) \overset{\text{Def de } U_j^*}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \delta_{j,k} = a_k .$$

■

NOTA: $A = \sum_{j=1}^{n} A(\vec{u}_j)\, U_j^*$ (es lo que dice la Prop 7.1)
