HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Denotamos por $||x||$ la norma euclídea asociada al producto escalar en $\mathbb{R}^N$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Prueba las dos identidades siguientes, y da una interpretación geométrica:
1) *Identidad del Paralelogramo:* $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$.
2) *Identidad de Polarización:* $4 < x, y >= ||x+y||^2 - ||x-y||^2$.

1. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle$

$= ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 + ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2$

$= 2||x||^2 + 2||y||^2$

2. $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\langle x, y \rangle$

$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = ||x||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
$- (||x||^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle - ||y||^2)$

$= 4\langle x, y \rangle$

porque $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ya que es un producto escalar sobre $\mathbb{R}$.

Problema 2. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante 1×1 formado por la esquina superior izquierda es positivo. El determinante 1×1 formado por la esquina inferior derecha es positivo. El determinante 2×2 es positivo.
Comprueba que, sin embargo, existen vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} < 0$.
¿Contradice esto al criterio de Sylvester?

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-7y, x+y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 - 7xy + xy + y^2 = x^2 - 6xy + y^2 = (x-3)^2 - 8y^2$$

No contradice Sylvester pq. A no es simétrica

Problema 3. Sea E un espacio vectorial real dotado de una norma $||\cdot||$ que satisface la *Identidad del paralelogramo* (ver ej.1). Definimos

$$B(x,y) \;=\; \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Demuestra que $B(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en E.

(IP) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(3.1) : $B(x,x) = \|x\|^2$, $B(y,x) = B(x,y)$, $B(0,x) = 0 = B(x,0)$

A) Probar que $2B(x,y) = B(x+z,y) + B(x-z,y)$. En particular deducir

$$2B(x,y) = B(2x,y) \qquad (3.2)$$

$$B(x+z,y) = B(x,y) + B(z,y) \qquad (3.3)$$

$$B(x+z,y) + B(x-z,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\|x-z+y\|^2 - \|x-z-y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(\|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2\right)$$

$$\overset{(IP)}{=} \frac{1}{4}\left(2\|x+y\|^2 + 2\|z\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(2\|x-y\|^2 + 2\|z\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 2B(x,y)$$

En particular, con $z = x$, $2B(x,y) = B(2x,y) + B(0,y)$

$\Rightarrow$ $B(2x,y) = 2B(x,y)$

B) Prueba que $B(px,y) = pB(x,y)$ $\forall\, p \in \mathbb{N}$. (3.4)

Inducción

$$B((p+1)x,y) = B(px+x,y) \overset{(3.3)}{=} B(px,y) + B(x,y)$$

$$= p\,B(x,y) + B(x,y) = (p+1)B(x,y)$$

C) Prueba que si $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $B(\frac{p}{q}x, y) = \frac{p}{q} B(x,y)$

$$pB(x,y) \overset{B)}{=} B(px,y) = B(pq\frac{x}{q}, y) \overset{B)}{=} qB(\frac{px}{q}, y)$$

D) Usando que para y fijo, la función $x \to B(x,y)$ es continua de $(E, \| \ \|)$ en $\mathbb{R}$, concluir que
$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$\exists\, r_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} r_n = \lambda$. Por la continuidad de $B(\cdot, y)$

$$B(\lambda x, y) = B((\lim_{n\to\infty} r_n)x, y) = \lim_{n\to\infty} B(\frac{p_n}{q_n}x, y) \overset{C)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} B(x,y)$$
$$= \lim_{n\to\infty} r_n B(x,y) = \lambda B(x,y)$$

E) Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, se tiene
$$\lambda B(x,y) = B(\lambda x, y)$$

Primero observar que $B(-x,y) = -B(x,y)$. Esto se deduce de la definición:
$$B(-x,y) = \frac{1}{4}(\|-x+y\|^2 - \|-x-y\|^2) = \frac{1}{4}(-\|y+x\|^2 + \|y-x\|^2) =$$
$$= -\frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = -B(x,y)$$

Ahora es fácil probar E) usando D): si $\lambda < 0$

$$B(\lambda x, y) = B(-|\lambda| x, y) = -B(|\lambda| x, y) \overset{D)}{=} -|\lambda| B(x,y) = \lambda B(x,y)$$

F) Demostrar que $B(x,y)$ es lineal en la primera variable (es decir (3.3)) usando A)

De A) obtenemos
$$2B(x,y) = B(x+z, y) + B(x-z, y)$$
$$2B(z,y) = B(z+x, y) + B(z-x, y) = B(x+z, y) - B(x-z, y)$$
Sumando estas dos igualdades se obtiene
$$B(x,y) + B(z,y) = B(x+z, y).$$

Problema 4. Dadas las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

$$A(x,y) = \text{máx}\left\{2|x|\,,\ \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

$$B(x,y) = \text{máx}\left\{|y|\,,\ |x-y|\right\},$$

a) Demuestra que son normas en $\mathbb{R}^2$.
b) Dibuja la bola unidad en cada una de ellas.
c) Comprueba que para $A(x,y)$ la desigualdad triangular puede ser una igualdad, incluso para vectores linealmente independientes.

a) • $A(0,0)=0$; si $A(x,y)=0$, $2|x|=0$ y $\sqrt{x^2+y^2}=0$
$x=0,\ y=0$

• $A(\lambda(x,y)) = A(\lambda x, \lambda y) = \text{máx}\{2|\lambda x|, \sqrt{\lambda^2 x^2+\lambda^2 y^2}\}$
$= |\lambda|\, \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\} = |\lambda|\, A(x,y)$

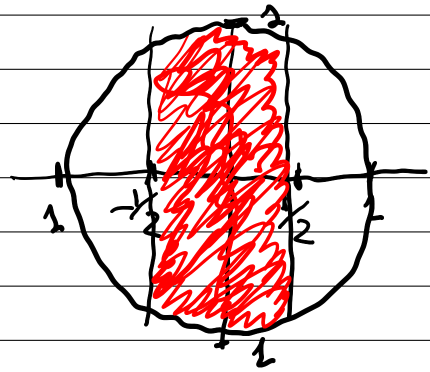
• $A((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = A(x_1+x_2, y_1+y_2) =$
$\text{máx}\{2|x_1+x_2|, \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\}$

$|x_1+x_2| \le |x_1|+|x_2|$,

$\|(x_1+y_1, x_2+y_2)\| = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} = \|(x_1,y_1)\|+\|(x_2,y_2)\|$

$\le \text{max}\{2|x_1|, \sqrt{x_1^2+y_1^2}\} + \text{máx}\{2|x_2| + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\}$
$= A(x_1,y_1) + A(x_2,y_2)$

b) $A(x,y) \le 1 \iff \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\} \le 1 \iff$
$2|x| \le 1$ y $x^2+y^2 \le 1$; $|x| \le 1/2$

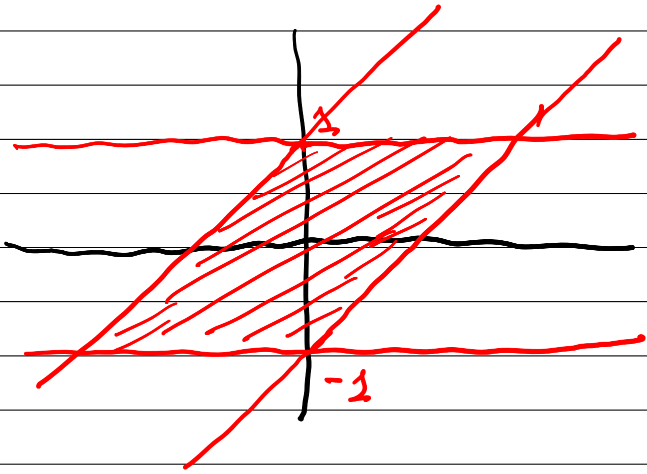


c) $\vec{x}=(1,0)$, $\vec{y}=(1,1)$ $\quad \vec{x}+\vec{y} = (2,1)$
$A(\vec{x}+\vec{y}) = \text{máx}\{4, \sqrt{5}\} = 4$
$A(\vec{x}) = \text{max}\{2, 1\} = 2$, $A(\vec{y}) = \text{max}\{2, \sqrt{2}\} = 2$

$B(x,y) = \max\{|y|, |x-y|\} \leq 1 \iff$

$|y| \leq 1, \quad |x-y| \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq x-y \leq 1$

$-1 \leq y \leq 1 \qquad \left\{ \begin{array}{l} y \leq x+1 \\ y \geq x-1 \end{array} \right\}$



Problema 8. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

donde $1 \le p < +\infty$.
a) Dados $1 \le p < q < +\infty$, demuestra que si $||x||_p \le 1$ entonces $||x||_q \le 1$.
b) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica $||x||_q \le ||x||_p$.
c) Sea $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| \,:\, i = 1, 2, \dots, n\}$. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface:

$$\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

Indicaciones. *Dividiendo por la norma infinito en los dos miembros, podemos asumir que* $||x||_\infty = 1$. *Separa las componentes con* $|x_i| = 1$ *de las componentes con* $|x_i| < 1$. *Usa (después de demostrarla) la desigualdad* $|a^\alpha - b^\alpha| \le |a - b|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

a) Sea $||x||_p \le 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le 1 \Rightarrow |x_i|^p \le 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como $q > p$, $|x_i|^q = (|x_i|^p)^{q/p} \le |x_i|^p$

$\Rightarrow ||x||_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/q} \le 1.$

b) Si $x = 0$ se cumple. Si $x \neq 0$, tomar $y = \frac{x}{||x||_p}$.

Como $||y||_p = 1 \overset{a)}{\Rightarrow} ||y||_q \le 1 \Leftrightarrow \left|\left| \frac{x}{||x||_p} \right|\right|_q \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{||x||_p} ||x||_q \le 1 \Leftrightarrow ||x||_q \le ||x||_p$

c) Como $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ tenemos $|x_i| \le ||x||_\infty$ para todo $i = 1, \dots, n$. Tenemos que existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $||x||_\infty = |x_{i_0}|$.

$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \ge (|x_{i_0}|^p)^{1/p} = |x_{i_0}| = ||x||_\infty$

Además,

$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty^p\right)^{1/p} = \left(n\, ||x||_\infty^p\right)^{1/p}$

$\lim_{p\to\infty} ||x||_p \le \lim_{p\to\infty} n^{1/p} ||x||_\infty = ||x||_\infty$

Problema 9. Sea $D : X \times X \to [0, \infty)$ cumpliendo las dos condiciones siguientes:

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad , \quad D(x, y) \leq D(z, x) + D(z, y) \quad \text{para cualesquiera } \ x, y, z.$$

Demuestra que D es una distancia en X.

Probar que $D(x,y) = D(y,x)$ $\forall x, y \in X$

Tomar $z=y$ en la desigualdad:

$$D(x,y) \leq D(y,x) + D(y,y) = D(y,x)$$

Intercambiar x e y en la desigualdad probada:

$$D(y,x) \leq D(x,y)$$

Problema 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra las propiedades siguientes, válidas para cualesquiera $a, b, c \in X$,y $r, s > 0$:
a) $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.
b) Si $a, b \in B(c, r)$, entonces $d(a, b) < 2r$.
c) Si $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$, entonces $d(a, b) < r + s$.

a) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \Rightarrow$

$d(a,b) - d(c,b) \leq d(a,c)$

$d(a,b) - d(b,c) \leq d(a,c)$

$d(b,c) \overset{DT}{\leq} d(b,a) + d(a,c) \iff$

$-d(a,c) \leq d(b,a) - d(b,c)$

$-d(a,c) \leq d(a,b) - d(b,c)$