1.- Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con f localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. El objetivo de este problema es demostrar que el intervalo de existencia $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, dado por el teorema de existencia y unicidad local de soluciones, no depende de la constante de Lipschitz de f en un entorno del punto (t_0, x_0). Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

- **(a)** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $T : E \to E$. Demostrar que si T tiene una potencia contractiva (i.e., existe un entero m tal que T^m es una contracción, donde T^m denota la composición de T consigo misma m veces), entonces T tiene un único punto fijo. Comprobar que lo mismo es cierto para $T : X \to X$ si $X \subset E$ es un conjunto cerrado.
  Indicación: dado $x_0 \in E$, utilizar las sucesiones $\{S^j(T^l(x_0))\}_{j\geq 0}$, donde $S := T^m$ y $l = 0, 1, \ldots, m-1$, para demostrar que $\{T^k(x_0)\}_{k\geq 0}$ converge al punto fijo de T^m.
- **(b)** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se define $R_{a,b} := \{(t,x) : |t-t_0| \leq a \text{ y } |x-x_0| \leq b\}$. Sea L la constante de Lipschitz de f en $R_{a,b}$, y sea T el operador definido, para $u \in C([t_0-a, t_0+a])$, como

  $$T(u)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

  Dadas dos funciones $u, v \in C([t_0-a, t_0+a])$ que tomen valores en $\{x : |x-x_0| \leq b\}$, demostrar que para todo entero $m \geq 1$ se tiene

  $$|T^m(u)(t) - T^m(v)(t)| \leq \frac{L^m |t-t_0|^m}{m!} \|u-v\|_\infty \quad \text{para } t \in [t_0-a, t_0+a].$$

- **(c)** Utilizar los apartados anteriores y seguir la demostración del teorema de existencia y unicidad local de soluciones para ver que se puede tomar

  $$\varepsilon = \min\{a, b/M_{a,b}\}, \quad \text{donde } M_{a,b} := \max_{(t,x)\in R_{a,b}} |f(t,x)|.$$

2.- Hallar al menos tres soluciones diferentes del problema

$$\begin{cases} y' = y^{2/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Indicación: Combinar las dos soluciones que se pueden obtener de forma sencilla.

3.- Calcular todos los valores $\alpha \in [0, \infty)$ para los que haya existencia y unicidad en el problema

$$\begin{cases} y' = |y|^\alpha, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Para $\alpha = 0$, escribir $|y|^\alpha = 1$.

4.- Decidir razonadamente si cada una de las siguientes implicaciones es cierta para funciones $y, z \in C^1\big([0,\infty)\big)$, dando en cada caso un contraejemplo o una demostración:

- **(a)** $y \geq z \Rightarrow y' \geq z'$.
- **(b)** $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.
- **(c)** $y(0) = z(0), y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.

5.- Estudiar la existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} y' = |y| + x, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

y hallar explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, indicando a qué espacio $C^k(\mathbb{R})$ pertenecen.

6.- Estudiar si para cada par (x_0, y_0) la solución de

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

se puede definir en toda la recta real.

7.- Para cada $r > 0$, considerar el problema

$$\begin{cases} y' = y^4 + r, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- **(a)** Hallar el mayor entorno de cero posible en el que se pueda asegurar existencia y unicidad.
- **(b)** Probar que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$, y utilizar este hecho junto con $y' \geq y^4$ para encontrar otro entorno en el que se pueda asegurar que no existe solución regular.

8.- Sea y la solución de

$$\begin{cases} y' = y + \mathrm{sen}(xy), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

y sea z la solución de esta ecuación aproximando $\mathrm{sen}(xy)$ por xy.

(a) Hallar una cota superior para $\max |z(x) - y(x)|$ cuando $x \in [0, 0'1]$.

(b) Usando el apartado anterior, calcular una aproximación para $y(0'1)$.

(c) ¿Qué cota superior se podría dar para $\max |z(x) - y(x)|$ si $x \in [-0'1, 0]$?

9.- Sean los problemas

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{-y^2}, \\ y(0) = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1+x^2}, \\ z(0) = 10. \end{cases}$$

Demostrar que $0 \leq y(x) - z(x) \leq e^{-100}(e^x - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

10.- Estudiar el intervalo de definición de las soluciones no prolongables de las siguientes ecuaciones:

(a) $x' = \dfrac{x^2 + t^4}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}}$.

(b) $x' = \dfrac{x^3 + t^5}{\sqrt{1 + x^4 + t^4}}$.

11.- Sean los problemas de Cauchy:

$$(P_k) \qquad \begin{cases} x_k'(t) = |x_k|^{1/2} + \dfrac{1}{k+1}, & k \in \mathbb{N}, \\ x_k(0) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que (P_k) tiene una única solución. Estudiar si la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en el intervalo $[0, 1/2]$.

12.- Consideramos el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x - y - \dfrac{x}{(1-t)(x^2 + y^2)^{1/2}}, \\ y' = x + y - \dfrac{y}{(1-t)(x^2 + y^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

para $x^2 + y^2 > 0$. Estudiar si la solución del problema con dato (t_0, x_0, y_0) verificando $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$ y $t_0 < 1$ existe sobre el intervalo $(t_0, 1)$.

Indicación: Puede ser buena idea pasar a coordenadas polares.