Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

Hoja 1

Introducción al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

1.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

(b) $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \le \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+\lambda\, y\| \ge \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|$.

2.- (a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i}+\mathbf{j}-\lambda\mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales.

(b) Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano ab, determinado por tales a y b?

(c) Hallar dos vectores ortogonales a $(1, 1, 1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales?

3.- (a) Sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Lo mismo para el ángulo entre los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

(c) Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?

4.- Calcúlese el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

5.- Comprobar que las siguientes funciones tienen todas las propiedades que se requieren de una métrica en $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|\,, \qquad d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|\,.$$

6.- Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y cóncava con $f(0) \ge 0$.

(a) Demuestre que $f(tx) \ge t f(x)$ para todos $x \ge 0$, $0 \le t \le 1$;

(b) Use lo anterior para demostrar que f es subaditiva, es decir, $f(a + b) \le f(a) + f(b)$.

(c) Deduzca que las funciones $d(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \|x - y\|$ y $\delta(x, y) = \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ definen sendas métricas en $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$.

7.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(\frac{\ln k}{k}\,,\, k^{1/k}\Big), \quad x_k = \Big(\sqrt{k^2+2} - k\,,\, \frac{(-1)^k}{k}\Big), \quad x_k = \Big(\frac{\operatorname{sen} k}{k}, k(e^{1/k} - 1)\Big).$$

8.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\big\}\,, \quad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}\,.$$

9.- Determinar el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\big\}\,, \qquad B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\big\}\,.$$

10.- (a) Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión del segmento horizontal $I_0 = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$ y los segmentos verticales cerrados I_n de altura 1 y de extremo inferior $P_n = (1/n, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar que A no es cerrado (Indicación: falta el segmento vertical en $x = 0$).

(b) Sea

$$B = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1 \right\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

11.- Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, comprobar que aunque sea abierto cada A_i de una familia infinita $\{A_i\}_i$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

12.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos? Razonar la respuesta.

$$A = \big\{ x \in \mathbb{R} : |x| \le 1,\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \big\}, \qquad B = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \big\}, \qquad C = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1 \big\}.$$

13.- Decimos que x es un *punto de acumulación* de $E \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta de centro x contiene un punto de E distinto de x. Escribimos E' para denotar al conjunto de puntos de acumulación de E.

(a) Dado el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $A = \left\{ \frac{1}{k} : k = 1, 2, \ldots \right\}$, hallar A'. Lo mismo para $A = \mathbb{Q}$.

(b) Determinar los conjuntos A' y $\overline{A}$ para $A = \{(0,2)\} \cup \big([0,1] \times [0,1)\big) \subset \mathbb{R}^2$.

(c) Probar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

(d) Probar que $\overline{E} = E \cup E'$.

14.- Probar que $\mathbb{R}^2$ es completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente), siguiendo los pasos indicados. (Este razonamiento se puede generalizar a $\mathbb{R}^N$, $N \ge 2$.)

(a) Probar que $\text{máx}\big\{|a|, |b|\big\} \le \|(a,b)\| \le \sqrt{2}\, \text{máx}\big\{|a|, |b|\big\}$.

(b) Sea $\{v_n\}_k$ una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $v_n = (a_n, b_n)$. Probar que $\{v_n\}_n$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones de números reales $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.

(c) Usando que $\mathbb{R}$ es completo, concluir que $\mathbb{R}^2$ es completo.