Matemáticas e Ingeniería Informática

Hoja 10: Diagonalización de endomorfismos

1. a) Si $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ es un endomorfismo y $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^2$ es un vector no nulo, demuestra que $\langle \mathbf{v} \rangle$ es una recta invariante por f si y sólo si la matriz $B = \left[\, \mathbf{v} \,|\, f(\mathbf{v}) \,\right]_{2\times 2}$ tiene rango 1.

b) Utiliza el resultado de a) para hallar todas las rectas invariantes del endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo A una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

(Sugerencia: pon $\mathbf{v} = (x, y)$ y halla una ecuación, con incógnita y/x, que equivalga a $\operatorname{rango}(B) = 1$).

c) Si $g : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ es un endomorfismo y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}^4$ son linealmente independientes, demuestra que el plano $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ es invariante por g si y sólo si la matriz $\left[\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, g(\mathbf{v}_1) \,|\, g(\mathbf{v}_2) \,\right]_{4\times 4}$ tiene rango 2.

d) Para el endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, utiliza el resultado de c) para decidir si $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ es invariante por g o no, en los tres casos siguientes:

$$\langle \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 \rangle \;,\; \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \;,\; \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

e) Cuando en el apartado d) sea $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ invariante por g, da una base de $\mathbb{R}^4$ tal que, si la usamos en salida y en llegada, la matriz de g quede triangular por cajas.

2. Considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1/2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

a) Halla una base de $\mathbb{R}^2$ en la cual f tenga matriz diagonal.

b) Utiliza el resultado para calcular el iterado $f^{15}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

3. La *sucesión de Fibonacci* es la sucesión infinita de números enteros $F_1, F_2, F_3, \ldots$ que tiene la siguiente definición inductiva: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$. Los veinte primeros valores son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 .$$

a) Demuestra que la sucesión infinita de vectores $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots$, dada por $\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$, puede definirse también por $\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}_{k+1} = A\,\mathbf{b}_k$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Deduce que $\mathbf{b}_k = A^k \mathbf{b}_0$ para todo k.

b) Halla una base de $\mathbb{R}^2$ que diagonalice el endomorfismo $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ y utiliza el resultado para obtener la fórmula $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.

c) Deduce, finalmente, la fórmula:

$$F_n \;=\; \text{el entero más próximo a } \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

4. Para cada uno de los endomorfismos siguientes, se pide:

(a) Halla la lista completa de autovalores.

(b) Decide, razonadamente, si es diagonalizable o no.

(c) Caso de que sea diagonalizable, halla una base en la que su matriz quede diagonal.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

(ii) $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $g(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$.

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

(iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. (En el determinante de $f - \lambda I$ suma la segunda columna a la primera).

(v) $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $g(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$.

(vi) $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}$.

(vii) $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $F\big(\varphi(x)\big) = (x^2 - 2x + 3)\varphi(0) + x\varphi'(x) + (-x^2 + x - 1)\varphi''(x)$.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Diagonaliza el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y utiliza el resultado para hallar explícitamente una raíz cuadrada de A, es decir una matriz B tal que $BB = A$.

6. Sean $f : E \to E$ un endomorfismo y $F \subset E$ un subespacio invariante por f.

(a) Demuestra que el polinomio característico de f es divisible por el polinomio característico del endomorfismo inducido

$$g : F \longrightarrow F \quad , \quad g(v) \ = \ f(v) \ .$$

(Sugerencia: utiliza los ejercicios 5 y 6 de la hoja 9).

(b) Ayúdate de eso para hallar todos los subespacios invariantes del siguiente endomorfismo (en el determinante de $f - \lambda I$ suma la tercera columna a la primera):

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad f(\mathbf{x}) \ = \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} \ .$$

7. Decimos que dos matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ *conmutan* si $AB = BA$.

(a) Demuestra que si A, B conmutan y $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ entonces el vector $\mathbf{w} = B\mathbf{v}$ es o bien igual a $\mathbf{0}$ o bien un autovector de A, con el mismo autovalor λ.

(b) Usando el resultado del apartado (a), halla todas las matrices que conmutan con A, en los siguientes casos:

$$A \ = \ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A \ = \ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \ .$$

(c) Demuestra que la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ del ejercicio **5** tiene exactamente cuatro raices cuadradas.