5.3. CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS DE SEGUNDO GRADO

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

Queremos averiguar qué tipos de curvas representa la ecuación (1). Puede ser una recta $a_1x + a_2y + a = 0$, dos rectas $(a_1x + a_2y + a)\cdot(b_1x + b_2y + b = 0$, o un punto: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ es el punto (a,b). Salvo estos casos (degenerados ?) el resto son secciones cónicas.

— x —

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ se llama parte principal de (1), es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ y podemos escribir

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix}$ es simétrica, existe una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = C^{-1}AC = C^tAC$$

, λ_1, λ_2 autovalores de A y $C = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ortogonal, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ cambio de base

Observa que C puede ser un giro o una simetría, pero si $\mathcal{B}'$ se elige con la misma orientación que la base canónica es un giro. Con este cambio de base

$$(x, y)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\,C^tAC\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$$

y la ecuación (1) se escribe como

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1x_1 + b_2y_1 + b = 0 \qquad (2)$$

en esta nueva base.

CASO I. $\delta \equiv |A| = \lambda_1\lambda_2 > 0$ (TIPO ELÍPTICO)

Podemos suponer $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Ambos tienen el mismo signo y son no nulos (2) puede escribirse como

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} + b = 0.$$

Con la traslación

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 &= y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{aligned}\right\}$$

podemos escribir

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x_2^2}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} = c}\,, \quad c = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - b$$

Si c tiene el mismo signo que λ_1 y λ_2 se tiene una elipse, si $c=0$ es un punto, y en el resto de los casos no hay solución en $\mathbb{R}^2$.

———————— x ————————

CASO II. $\delta \equiv |A| = \lambda_1\lambda_2 < 0$ (TIPO HIPERBÓLICO)

Ambos, λ_1 y λ_2 tienen signo distinto. Supongamos, para hacer el razonamiento $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Una traslación como en el caso I deja la cónica como

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c$$

Si $c \neq 0$ es una hipérbola. Si $c = 0$, $y_2 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\, x_2$ y se obtienen un par de rectas que se cortan en $(x_2, y_2) = (0,0)$.

———————— x ————————

CASO III. $\delta \equiv |A| = \lambda_1\lambda_2 = 0$ (TIPO PARABÓLICO)

Tomar $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (~~no puede ser~~ si λ_2 fuera también igual a cero ~~pq~~. ~~Si no fuera así~~ tendríamos una recta pq. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). La ecuación (2) se escribe

$$\lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b = 0. \tag{3}$$

III a) $b_1 \neq 0$

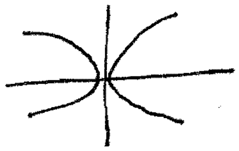
Se completan cuadrados:

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + b_1\left(x_1 + \frac{b}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1}\right) = 0$$

Con la traslación

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \dfrac{b}{b_1} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \end{array}\right\}$$

tenemos



$$\lambda_2 y_2^2 + b_1 x_2 = 0 \iff y_2^2 = -\frac{b_1}{\lambda_2} x_2$$

que es una parábola con el foco en la dirección de x_2, que es la dada por los autovectores de $\lambda_1 = 0$.

III b) $b_1 = 0$

(3) se escribe

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_2}\right) + b - \frac{b_1^2}{4\lambda_2} = 0.$$

La traslación

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_2} \end{array}\right\}$$

produce

$$\lambda_2 y_2^2 = \frac{b_1^2}{4\lambda_2} - b \equiv c.$$

Si $\frac{c}{\lambda_2} > 0$, $y_2 = \pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$ son dos rectas paralelas.

Si $\frac{c}{\lambda_2} < 0$, no hay solución

Si $c = 0$, se obtiene una recta de ecuación $y_2 = 0$.

———— x ————

EJEMPLO A. Estudiar la curva $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0$, reduciéndola a su forma canónica, indicando el cambio de sistema de referencia y sus elementos geométricos

S/ $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; $|A|=9-1=8>0$ Tipo elíptico

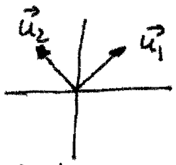
Autovalores

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=\lambda^2-6\lambda+9-1=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

$$\boxed{\lambda_1=2},\ \boxed{\lambda_2=4}$$

Autovectores unitarios

$\boxed{\lambda_1=2}$ $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=y$; $\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$



$\boxed{\lambda_2=4}$ $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=-y$; $\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ +1\end{pmatrix}$

orientados positivamente

Matriz del cambio de base :

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad (\text{Giro de } 45^{\circ})$$

y el cambio es

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1-y_1\\ x_1+y_1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)\\ y&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sustituimos en la curva

$$\frac{3}{2}(x_1-y_1)^2-(x_1-y_1)(x_1+y_1)+\frac{3}{2}(x_1+y_1)^2+\frac{2}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)-\frac{4}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)+1=0$$

$$2x_1^2+4y_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x_1-\frac{6}{\sqrt{2}}y_1+1=0$$

Completamos cuadrados:

$$2\left(x_1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+4\left(y_1-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{9}{8}+1=0$$

Traslación

$$\left\{\begin{array}{l} x_2=x_1-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_2=y_1-\dfrac{3}{4\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$2x_2^2+4y_2^2=\frac{3}{8} \iff \boxed{\frac{x_2^2}{3/16}+\frac{y_2^2}{3/32}=1}$$

Forma canónica Elipse

$a=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

$c=\sqrt{\frac{3}{16}-\frac{3}{32}}=\sqrt{\frac{3}{32}}=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ distancia focal

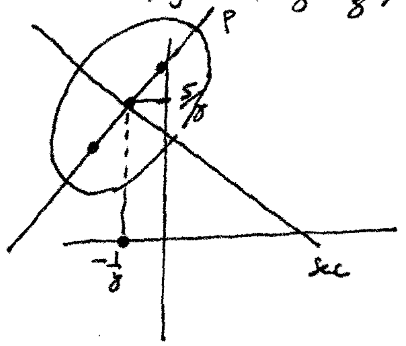
El cambio de s.de.r. está dado por (4) y (5)

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_2+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\left(y_2+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2)-\dfrac{1}{8} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_2+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\left(y_2+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2)+\dfrac{5}{8} \end{array}\right\} \quad (6)$$

El centro de la elipse es $(x_2,y_2)=(0,0) \Rightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)=C$

Eje principal: Pasa por $C=\left(-\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)$ en la dirección de $\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$:

$$y-\frac{5}{8}=x+\frac{1}{8} \iff y=x+\frac{3}{4}$$



Eje secundario:

$$C+\langle\vec{u}_2\rangle:\quad y-\frac{5}{8}=-\left(x+\frac{1}{8}\right) \iff y=-x+\frac{1}{2}$$

Focos: $C\pm\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\vec{u}_1=C\pm\frac{\sqrt{3}}{8}(1,1)=\left(-\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{8}(1,1)$

$$F_1=\left(-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8},\ \frac{5}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$F_2=\left(-\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8},\ \frac{5}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

——— x ———

EJEMPLO B. Estudiar la curva $x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$, reduciéndola a su forma canónica, indicando el cambio de sistema de referencia y sus elementos geométricos

S/ $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $|A| = 1-1=0$. TIPO PARABÓLICO

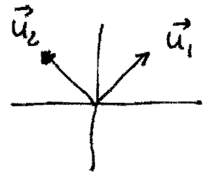
Autovalores:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-1 = \lambda^2-2\lambda+1-1 = \lambda^2-2\lambda = \lambda(\lambda-2)$$

$$\boxed{\lambda_1=0}, \quad \boxed{\lambda_2=2}$$

Autovectores

$\boxed{\lambda_1=0}$ $\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=y; \quad \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$



$\boxed{\lambda_2=2}$ $\quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=-y; \quad \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

Orientados positivamente

Cambio de base

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}(x_1-y_1)\\ y=\frac{1}{\sqrt2}(x_1+y_1)\end{cases}\right\} \quad (1)$$

Sustituimos en la curva dada

$$\frac{1}{2}(x_1-y_1)^2-(x_1-y_1)(x_1+y_1)+\frac{1}{2}(x_1+y_1)^2+\frac{4}{\sqrt2}(x_1-y_1)-\frac{6}{\sqrt2}(x_1+y_1)+1=0$$

$$2y_1^2-\frac{2}{\sqrt2}x_1-\frac{10}{\sqrt2}y_1+1=0$$

Completamos cuadrados:

$$2\left(y_1-\frac{5}{2\sqrt2}\right)^2-\frac{25}{4}-\frac{2}{\sqrt2}x_1+1=0$$

$$2\left(y_1-\frac{5}{2\sqrt2}\right)^2-\frac{2}{\sqrt2}\left(x_1-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{25\sqrt2}{8}\right)=0$$

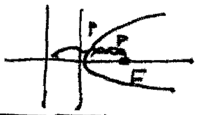
Traslación

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \dfrac{21\sqrt{2}}{8} \\ y_2 = y_1 - \dfrac{5}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$2\, y_2^2 = \frac{2}{\sqrt{2}} x_2 \iff \boxed{y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2}$$

Forma canónica

Parábola



$$2p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

Las ecuaciones del cambio de S. de R. son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_2 - \dfrac{21\sqrt{2}}{8}\right) - \left(y_2 + \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - y_2) - \dfrac{31}{8} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_2 - \dfrac{21\sqrt{2}}{8}\right) + \left(y_2 + \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + y_2) - \dfrac{11}{8} \end{array}\right\} \quad (3)$$

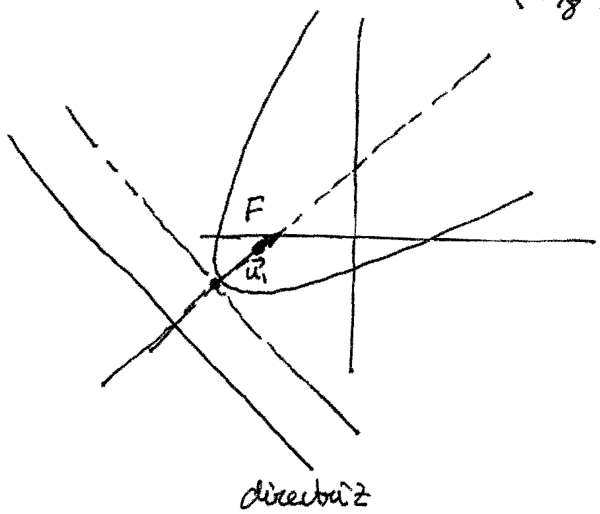
El vértice de la parábola es $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que se traduce en $V = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}$

Eje principal:

$V + \langle \vec{u}_1 \rangle$ o bien $y_2 = 0$

que se traduce en

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \dfrac{31}{8} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \dfrac{11}{8} \end{array}\right\} \qquad y + \frac{31}{8} = x + \frac{31}{8} \qquad \boxed{y = x + \frac{20}{8}}$$



Eje secundario

$V + \langle \vec{u}_2 \rangle$ o bien $x_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \dfrac{31}{8} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \dfrac{11}{8} \end{array}\right\} \qquad x + \frac{31}{8} = -\left(y + \frac{11}{8}\right) \qquad \boxed{y = -x - \frac{22}{4}}$$

Foco: $C + \frac{1}{4\sqrt{2}} \vec{u}_1$ o bien $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ lo que se traduce en

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4\sqrt{2}} - \dfrac{31}{8} = -\dfrac{30}{8} = -\dfrac{15}{4} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4\sqrt{2}} - \dfrac{11}{8} = -\dfrac{10}{8} = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \qquad \boxed{F = \begin{pmatrix} -15/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}}$$

La directriz es paralela al eje secundario a distancia $\frac{p}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ del vértice, o bien $x_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$, que se traduce en

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} - y_2\right) - \frac{31}{8} = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{32}{8} = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 4$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} + y_2\right) - \frac{11}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{12}{8} = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{3}{2}$$

$$x + 4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 = -y - \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x + y + \frac{11}{2} = 0} \text{ Directriz}$$

x