MATRICES DE PERMUTACIÓN

observación (sobre permutaciones n)

- $\forall$ permutación π $\exists$ permutación π^{-1} :
  $\pi^{-1}\pi = \pi\pi^{-1} = id$ (y id es una permutación)
- la composición de permutaciones es una operación asociativa

$\hookrightarrow$ las permutaciones forman un grupo

proposición: sean π, π_a, π_b permutaciones n

i. $P_\pi P_\pi^T = I$ $\quad$ ($P_\pi \in O(n)$)

ii. $P_\pi e_k = e_{\pi^{-1}(k)}$ $\quad \forall k = 1..n$ $\quad (e_k)_i = \delta_{k,i}$

iii. $P_{\pi_a} P_{\pi_b} = P_{\pi_b \pi_a}$ $\quad$ (omomorfismo)

demostración:

i. $P_\pi = \begin{pmatrix} - & e_{\pi(1)} & - \\ & \vdots & \\ - & e_{\pi(n)} & - \end{pmatrix}$, $P_\pi P_\pi^T = I$ por ortonormalidad de la base canónica

ii. $P_\pi \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$, $\quad j : \pi(j) = k$

iii. $(P_{\pi_a} P_{\pi_b})_{ij} = \langle P_{\pi_a} P_{\pi_b} e_j, e_i \rangle \overset{ii.}{=} \langle P_{\pi_a} e_{\pi_b^{-1}(j)}, e_i \rangle$

$$\overset{ii.}{=} \langle e_{\underbrace{\pi_a^{-1}(\pi_b^{-1}(j))}_{\pi_a^{-1}\pi_b^{-1}(j) = (\pi_b\pi_a)^{-1}(j)}}, e_i \rangle$$

$$\overset{ii.}{=} \langle P_{\pi_b \pi_a} e_j, e_i \rangle = (P_{\pi_b\pi_a})_{ij} \quad \#$$

<u>teorema</u> (PLU): sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists$ P m. de permutación, L m. triangular bajo, U m. triangular alto $\Big\}$ $n \times n$

t.q. $PA = LU$. Estas matrices se pueden obtener de la siguiente manera:

- $U = U^{(n-1)}$, $\begin{cases} U^{(0)} = A \\ U^{(k)} = L_k^{-1} P_k U^{(k-1)}, & k = 1 \dots n-1 \end{cases}$

  y decimos $\tilde{U}^{(k-1)} = P_k U^{(k-1)}$

- P_k matriz de permutación asociada a

$$\pi_k(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \neq k, m(k) \\ m(k) & \text{si } i = k \\ k & \text{si } i = m(k) \end{cases}, \quad m(k) = \underset{i \in \{k, \dots, n\}}{\operatorname{argmax}} \left| u_{ik}^{(k-1)} \right|$$

es el índice al que se tiene el max, y podría no ser único...

- $L = \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \dots \tilde{L}_{n-2} L_{n-1}$, $\tilde{L}_k = P_{n-1} \dots P_{k+1} L_k P_{k+1}^{-1} \dots P_{n-1}^{-1}$

  y $L_k = I + \ell_k \otimes e_k$, donde $\ell^{(k)} = \begin{cases} 0 & i = 1 \dots k \\ \dfrac{\tilde{u}_{ik}^{(k-1)}}{\tilde{u}_{kk}^{(k-1)}} & i = k+1 \dots n \end{cases}$

  recordar $\tilde{U}^{(k-1)} = P_k U^{(k-1)}$

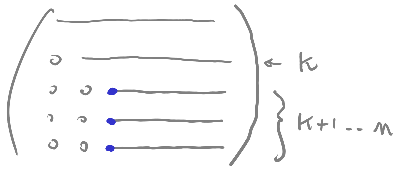
- $P = P_{n-1} \dots P_1$.

Para demostrar este teorema vamos antes a dar un resultado preliminar.

proposición: dado $k \in \{1 .. n-2\}$

- decimos P_{k+1} matriz de permutación asociada a una permutación de $\{k+1, \dots, n\}$, y decimos

$$P = P_{n-1} \cdots P_{k+1}$$



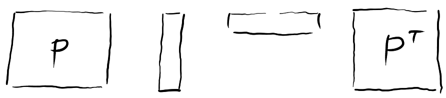
observación: esta también es la matriz de una permutación de $\{k+1 .. n\}$

- sea $L_k = I + \ell^{(k)} \otimes e_k$, donde $\ell^{(k)}_i = 0 \;\; \forall i = 1 .. k$

$$\Rightarrow \quad P L_k P^{-1} = I + (P \ell^{(k)}) \otimes e_k .$$

demostración:

$$P L_k P^{-1} = \underbrace{P I P^{-1}}_{I} + P \ell^{(k)} \otimes e_k \overbrace{P^{-1}}^{P^T}$$



$$= I + (P \ell^{(k)}) \otimes (P e_k)$$

→ permuta ceros

$$= I + (P \ell^{(k)}) \otimes e_k \quad \#$$

observación: esto es un vector de la forma $\tilde{\ell}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ell_{\pi(k)} \\ \vdots \\ \ell_{\pi(n)} \end{pmatrix}$

porque P es la matriz de una permutación π de $\{k+1 \dots n\}$

→ ejercicio: comprobar que P efectivamente permuta las filas $\{k+1 .. n\}$