Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra Lineal **Examen del 19 de octubre de 2018**

Apellidos, Nombre: ____________________

1. [2 puntos] Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una aplicación lineal inyectiva. Sea $v_1, v_2, \cdots v_n$ una lista de vectores de $\mathbb{V}$ linealmente independiente. Demuestra que $f(v_1), f(v_2), \cdots f(v_n)$ es una lista de vectores de $\mathbb{W}$ linealmente independiente.

2. [4 puntos] Sea $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la aplicación dada por:

$$F(A) \;=\; \text{traza}\left(\begin{bmatrix} 1+x+x^2 & 2-x+x^2 \\ 0 & 1+4x+2x^2 \end{bmatrix} A \right).$$

Recuérdese que, en general, traza$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$.

a) Demuestra que F es lineal.

b) Halla la matriz de F respecto de las siguientes bases:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad \{ 1 \, , \, 1+x \, , \, x+x^2 \} \, .$$

c) Halla una base de $\operatorname{Im} F$ y una base de $\ker F$.

3. [4 puntos] Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 = < v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 = < v_4, v_5 >$, siendo

$$v_1 = (-1,4,2,-4) \; , \; v_2 = (0,2,1,-1) \; , \; v_3 = (1,-2,-1,3) \; , \; v_4 = (3,2,0,2) \; , \; v_5 = (0,4,3,1) \, .$$

a) Halla la dimensión de cada uno de los siguientes espacios: W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

b) Halla una base de cada uno de los espacios anteriores.