Examen Parcial: 15 de octubre de 2021

Soluciones

Ejercicio 1 • Parte 1

a) Como A tiene más de un elemento, elegir $x_0 \in A$, $x_0 \neq x^*$.

Sea $x_1 = \frac{x+x^*}{2} \in A$, $x_2 = \frac{x_1+x^*}{2} \in A, \ldots,$ $x_n = \frac{x_{n-1}+x^*}{2} \in A$.

La sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ no es constante, está contenida en A y

$$x_n - x^* = \frac{x_{n-1}+x^*}{2} - x^* = \frac{x_{n-1}-x^*}{2} = \frac{x_{n-2}-x^*}{2^2} = \cdots = \frac{x_0-x}{2^n}.$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_0-x|}{2^n} = 0.$$

---

b) El conjunto $A=(0,1)$ es abierto y acotado y cumple la condición del enunciado

---

c) $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \in A$. La propiedad del apartado (a) no es suficiente para que A sea cerrado porque la convergencia debe ser para cualquier sucesión y no solo una en particular, como se ha encontrado en el apartado (a).

Parte 2

$$|||M||| = \sup_{\|(x,y)\|_\infty = 1} \left\| M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sup_{\substack{|x|\leq 1 \\ |y|\leq 1}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\substack{|x|\leq 1 \\ |y|\leq 1}} \sqrt{x^2+4y^2+(x+2y)^2}$$

$\leq \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$. Por otro lado, con $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$|||M||| \geq \left\| M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$$ Concluimos

que $|||M||| = \sqrt{14}$.

Ejercicio 2.

(a) $|\langle v, x_1\rangle|^2 + |\langle v, x_2\rangle|^2 + |\langle v, x_3\rangle|^2 = y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 +$
$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 = y^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy$
$= \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2) = \frac{3}{2}\|v\|^2.$

(b) $|||T_v||| = \sup_{\|y\|=1} |T_v(y)| = \sup_{\|y\|=1} |\langle v, y\rangle| \overset{C-S}{\leq} \sup_{\|y\|=1} \|v\|\,\|y\| = \|v\|$

Por otro lado, con $y = \frac{v}{\|v\|}$ $(v \neq 0)$, que tiene norma 1,

$|||T_v||| \geq \left|T_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right| = \left\langle v, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle = \|v\|$. Por tanto $|||T||| = \|v\|$

si $v \neq 0$. Si $v = 0$, la igualdad $|||T_0||| = 0 = \|0\|$ es trivial

porque $T_0 = 0$.

(c) Supongamos $N > M$. Tenemos

$$\|V_N - V_M\| \overset{(b)}{=} |||T_{V_N - V_M}||| = \sup_{\|y\|=1} |\langle V_N - V_M, y\rangle| =$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \left|\left\langle \sum_{n=M+1}^{N} \langle v, x_n\rangle x_n, y\right\rangle\right| \leq \sup_{\|y\|=1} \sum_{n=M+1}^{N} |\langle v, x_n\rangle|\,|\langle x_n, y\rangle|$$

$$\overset{C-S}{\leq} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle v, x_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle x_n, y\rangle|^2\right)^{1/2} \overset{\text{hipótesis}}{\leq}$$

$$\leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle v, x_n\rangle|^2\right)^{1/2} \sup_{\|y\|=1} \sqrt{B}\,\|y\| = \sqrt{B}\left(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle v, x_n\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$\xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$ porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, x_n\rangle|^2 \leq B\|v\|^2$

es convergente.

Ejercicio 3. Parte 1.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(f(x,y), 5x-y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x,y), 5x-y)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(f(x,y), 5x-y)\cdot 5.$$

Parte 2

(a) $$P(x,y) = F(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\cdot y$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,0)\,x^3 + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y}(0,0)\,x^2 y + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y^2}(0,0)\,xy^2\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y^3}(0,0)\,y^3\right]$$

Comparando con $P(x,y) = 2 + 3x + (4xy - y^2) + (x^3 + 2x^2y)$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = 4, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 4$$

(b) $g(x) = F(x, x^2)$. Como

$$P(x,x^2) = 2 + 3x + 4x^3 - x^4 + 2x^2x^2 + x^3,$$

el polinomio de Taylor de grado 3 de g alrededor de $x=0$ es $P_g(x) = 2 + 3x + 5x^3$.

También se puede hacer calculando $g(0) = F(0,0) = 2$ y luego $g'(0)$, $g''(0)$ y $g'''(0)$ usando la regla de la cadena y escribiendo $P_g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + \frac{1}{6}g'''(0)x^3$.