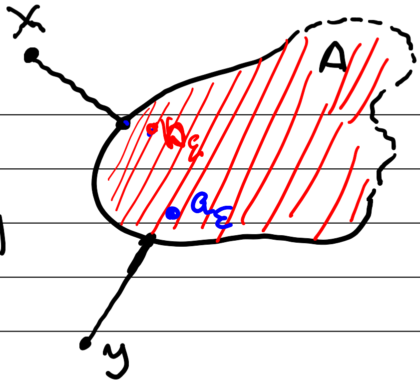
Problema 13. Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. Se define la **distancia de x a A** por

$$d(x, A) \; = \; \text{ínf}\{||x - y|| \; : \; y \in A\}.$$

a) Demuestra que para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq ||x - y||$$

b) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, A) < \epsilon\}$. Prueba que A_ϵ es abierto.
c) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, A) \leq \epsilon\}$, prueba que es cerrado.
d) Prueba que A es cerrado si y sólo si $A = \bigcap_{\epsilon > 0} A^\epsilon$.



a) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq ||x-y||$

e.d.

$$-||x-y|| \leq d(x,A) - d(y,A) \leq ||x-y||$$

Desig. derecha

$\forall \varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que

$$d(y, a_\varepsilon) \leq d(y,A) + \varepsilon$$

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,A) - d(y,a_\varepsilon) + \varepsilon \leq d(x,a_\varepsilon) - d(y,a_\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\overset{DT}{\leq} d(x,y) + d(y,a_\varepsilon) - d(y,a_\varepsilon) + \varepsilon = d(x,y) + \varepsilon = ||x-y|| + \varepsilon$$

Como ε es cualquiera, $\varepsilon > 0$,

$$d(x,A) - d(y,A) \leq ||x-y||$$

Desigualdad izquierda

$\forall \varepsilon > 0$, existe $b_\varepsilon \in A$ tal que

$$d(x, b_\varepsilon) \leq d(x,A) + \varepsilon$$

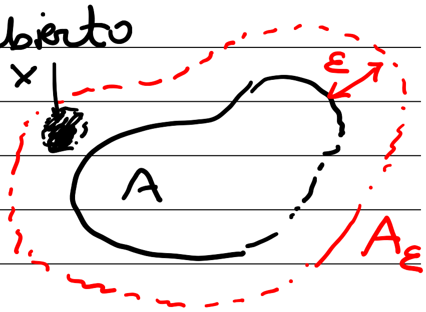
$$d(x,A) - d(y,A) \geq d(x,b_\varepsilon) - \varepsilon - d(y,b_\varepsilon) \overset{DT}{\geq} -d(x,y) - \varepsilon$$

$$= -||x-y|| - \varepsilon$$

Hacer $\varepsilon \to 0$ para concluir

NOTA: Acabamos de probar que la función $f_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f_A(x) = d(x,A)$ es continua

b) $A_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^N : d(x,A)<\varepsilon\}$ es abierto



Sea $x\in A_\varepsilon$ e.d. $d(x,A)<\varepsilon$

Sea $r=\varepsilon-d(x,A)$. Basta probar que $B_{r/2}(x)\subset A_\varepsilon$

a)

$y\in B_{r/2}(x)$; $d(y,A)\le \|x-y\|+d(x,A)$

$$\le \frac{r}{2}+d(x,A)=\frac{\varepsilon-d(x,A)}{2}+d(x,A)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{d(x,A)}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow y\in A_\varepsilon$$

Problema: A es cerrado $\Longleftrightarrow A=\{x\in X : d(x,A)=0\}$

$\Rightarrow$) $\subset$) Si $x\in A$, $d(x,A)=0$

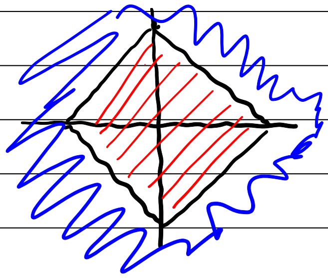
$\supset$) Si $d(x,A)=0$. Para $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ existe $a_n\in A$ tal que $d(a_n,x)<1/n \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x$. Como A es cerrado, $x\in A$

$\Leftarrow$) La función $f_A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, dada por $f_A(x)=d(x,A)$ es continua. Como $f_A^{-1}(\{0\})=$ $=\{x\in X : f_A(x)=d(x,A)=0\}=A$ y $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, $A=f_A^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

Problema 15. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\} \ , \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| = 1\} \ , \ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \geq 1\}$$

S/



A no es compacto, porque no es cerrado

B es compacto

C no es compacto, porque no es acotado

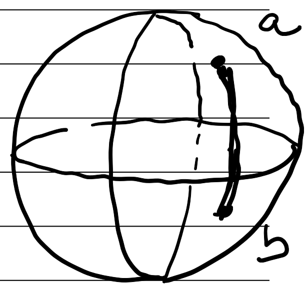
Problema 16. Sea $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : ||x|| = 1\}$. Sea $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}$ una función continua. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
1) $f(S^{N-1})$ es acotado.
2) $f(S^{N-1})$ es un abierto.
Si además se sabe que $f(S^{N-1}) \subset \mathbb{Q}$, estudiar qué se puede decir de f.

1) $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}$ continua
Con S^{N-1} es compacto, $f(S^{N-1})$ es compacto
$\Rightarrow f(S^{N-1})$ es acotado

2) $f(x) = 1 \quad \forall x \in S^{N-1}$, es continua,
$f(S^{N-1}) = \{1\}$ no es abierto

3) Si $f(S^{N-1}) \subset \mathbb{Q}$, f tendría que ser constante

Sean $a, b \in S^{N-1}$ con $a \neq b$.
Sea $\sigma : [0,1] \to S^{N-1}$ un camino continuo tal que
$\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$



Considerar $h = f \circ \sigma : [0,1] \to \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Como h es continua, por ser composición de funciones continuas, h debe tomar todos los valores intermedios entre $h(0)$ y $h(1)$. Es imposible que $h(0) \neq h(1)$ porque entre dos racionales siempre hay un número irracional. Luego $h(0) = h(1)$.
Por tanto
$$f(a) = f(\sigma(0)) = h(0) = h(1) = f(\sigma(1)) = f(b)$$
Como esto vale para todo $a, b \in S^{N-1}$, deducimos que f debe ser constante.