I. Curvas

Geometría de curvas y superficies, 20-21

Departamento de Matemáticas, UAM

(José Luis Fernández/Pablo Fernández)

I.1 Curvas

Curva

Definición 1.1

Una curva γ en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación C^∞ de un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

- Para casi todo lo que sigue basta con que $\gamma \in C^2$. Para contrastar, en alguna discusión posterior, admitiremos curvas que son solo C^0 o C^1
- El intervalo $I = (a, b)$ puede ser infinito: $(-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, \infty)$

Habitualmente escribiremos $\gamma(t)$, para $t \in (a, b)$:

- el parámetro t es tiempo,
- y $\gamma(t)$ indica la posición en tiempo t.

Coordenadas de la curva

Escribimos $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para cada $t \in (a, b)$.

Las funciones $x(t), y(t), z(t)$ son las coordenadas o componentes de la curva γ.

Las coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ son funciones C^∞ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Curvas planas: Identificamos $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ con $\mathbb{R}^2$.

Una curva plana es una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, para $t \in I$: a veces, escribimos simplemente $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Traza de una curva

Definición 1.2

La traza de una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es el lugar de puntos en $\mathbb{R}^3$:

$$\{\gamma(t) : t \in I\} = \text{traza}(\gamma).$$

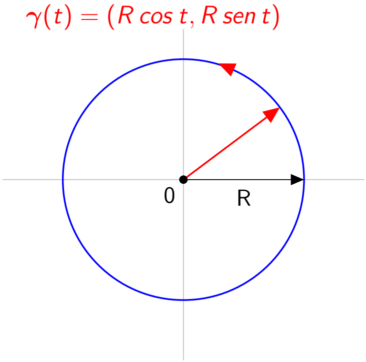
La traza es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que recorre la curva $\gamma(t)$ cuando t recorre el intervalo I.

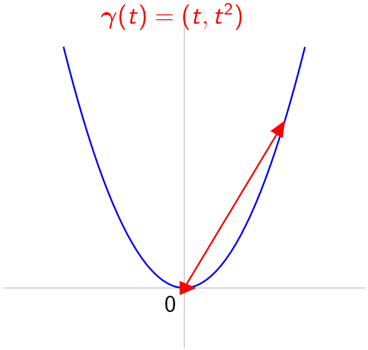
La traza es un conjunto. La curva es una manera de recorrer esa traza.

De la curva γ con traza Γ se dice que es una parametrización de Γ.

Dado $R > 0$, la traza de $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$ con $t \in (0, 4\pi)$ es la circunferencia de radio R (recorrida dos veces).

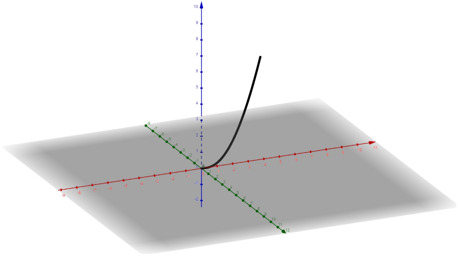
La traza de $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$ es una parábola.





Dos curvas distintas pueden tener la misma traza. Por ejemplo,

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\eta}(t) = (t^2, t^4, t^6), \quad \text{con } t > 0\,.$$



También

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\eta}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}\,.$$

De hecho, si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva y si $g : J \to I$ es una función C^∞ desde un intervalo J sobre el intervalo I, entonces $\boldsymbol{\eta} : J \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{\eta}(u) = \gamma(g(u)),$$

es una curva y tiene la misma traza que γ.

Ejemplos.

1. Recta:

$$\gamma(t) = (1-t)\,(x_0, y_0, z_0) + t(u_0, v_0, w_0), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

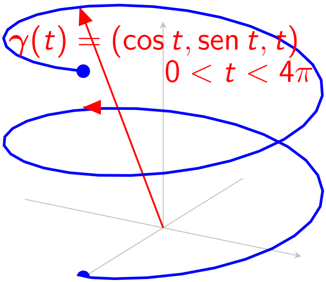
2. Circunferencia en el plano:

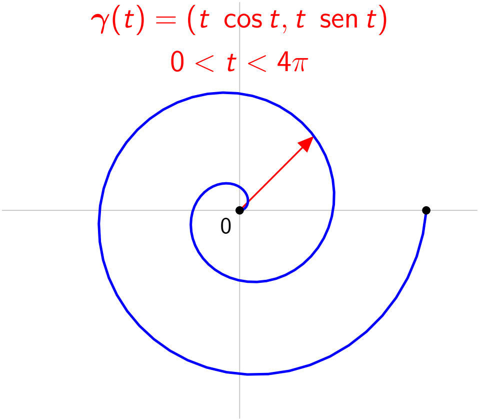
$$\gamma(t) = (x_0, y_0) + R(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para $t \in \mathbb{R}$ o para $t \in (0, 2\pi)$ o para ...

4. Hélice:
$$\gamma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt),$$
donde $a > 0$ y $b \neq 0$ son parámetros, y $t \in \mathbb{R}$.

5. Espiral:
$$\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t), \qquad \text{para } t > 0.$$


$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$
$0 < t < 4\pi$


$\gamma(t) = (t\ \cos t, t\ \operatorname{sen} t)$
$0 < t < 4\pi$
0

7. Gráfica de una función: si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función C^∞, la curva

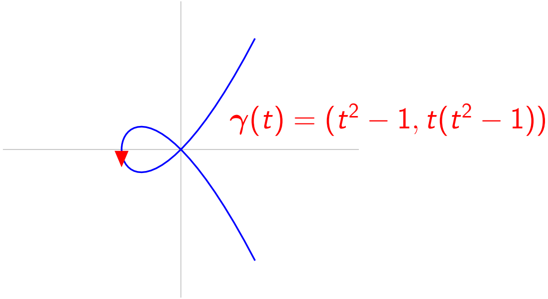
$$t \mapsto (t, f(t)), \quad \text{para } t \in I$$

tiene como traza la gráfica de f.

8. Con auto-intersección:

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

En $t = \pm 1$ la curva γ pasa por $(0, 0)$.



En ocasiones, interesa dar una parametrización de una cierta traza (la traza es el dato, y buscamos una curva que la recorra).

9. Hipérbola en el plano XY, el conjunto de los puntos (x, y) tales que

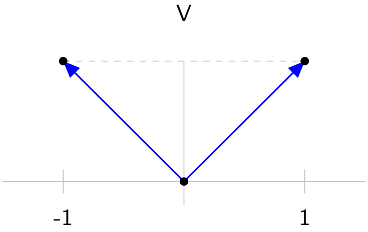
$$y^2 - x^2 = 1.$$

Una posible parametrización (de la rama de "arriba") es

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 + t^2}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

Alternativa: usar senos y cosenos hiperbólicos (puesto que $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$).

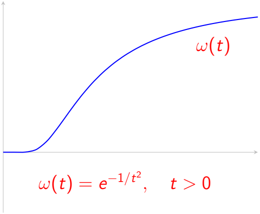
10. La aplicación
$$\eta(t) = (t, |t|), \qquad t \in (-1, 1)$$
lleva el intervalo $(-1, 1)$ en la gráfica V dada por $y = |x|$ con $-1 < x < 1$. Esa traza tiene un "pico" en $(0, 0)$.



La aplicación η no es una curva: no es siquiera derivable.

Sin embargo, consideremos la función real $\omega(t)$ dada por

$$\omega(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{si } t > 0\,, \\ 0, & \text{si } t = 0\,, \\ -e^{-1/t^2}, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$



Esta función $\omega : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ es C^∞ (todas sus derivadas en $t = 0$ son 0). Asimismo, $|\omega|$ es C^∞.

La aplicación

$$\gamma(t) = (\omega(t), |\omega(t)|), \qquad t \in \mathbb{R},$$

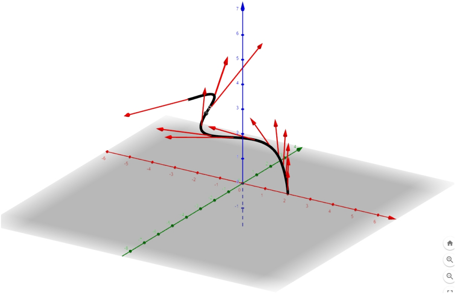
es C^∞, es una curva y tiene traza V.

Velocidad y rapidez

Definición 1.3

Si γ es una curva definida en un intervalo I, el vector velocidad o velocidad de γ en tiempo t es el vector $\gamma'(t)$.

El módulo $\|\gamma'(t)\|$ de la velocidad es conocido como la rapidez de γ en tiempo t.



Velocidad y rapidez son conceptos asociados a la curva, no a su traza.

La velocidad nos dice en qué dirección nos estamos moviendo en tiempo t y con qué rapidez.

En coordenadas, se calculan con

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Ejemplo. Las curvas $\gamma(t) = (t, t^2, 0)$ y $\boldsymbol{\eta}(t) = (t^3, t^6, 0)$, para $t \in \mathbb{R}$, tienen la misma traza.

Sus velocidades son

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 0) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\eta}'(t) = (3t^2, 6t^5, 0)\,,$$

y la rapidez de cada una es

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \qquad \text{y} \qquad \|\boldsymbol{\eta}'(t)\| = 3t^2\sqrt{1+4t^6}\,.$$

En tiempo $t = 0$ ambas curvas pasan por $(0, 0, 0)$. Lo hacen con velocidades respectivas de $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$

Curva regular

Definición 1.4

Una curva $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ se dice regular is $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$.

Ejemplo. Las curvas $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, 0)$ y $\boldsymbol{\eta}(t) = (t^3, t^6, 0)$, para $t \in \mathbb{R}$, tienen la misma traza. La curva $\boldsymbol{\gamma}$ es curva regular, pero la curva $\boldsymbol{\eta}$ no.

Ejemplo. El conjunto de puntos $V = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = |x|\}$ no es la traza de ninguna curva regular.

Pongamos que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es curva regular con traza V, y que $\gamma(0) = (0, 0)$. Entonces $y(t)$ tiene un mínimo en $t = 0$ y $y'(0) = 0$. Si fuera $x'(0) > 0$, entonces $x(t) > 0$ para $t \in (0, \delta)$ y, por tanto, $x(t) = y(t)$ para $t \in [0, \delta)$ y, por tanto $x'(0) = y'(0) = 0$. Contradicción: la curva γ no es regular. También conduce a contradicción el que $x'(0) = 0$.

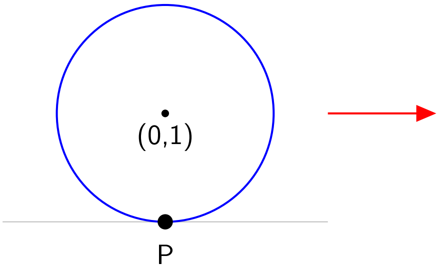
De otra forma. Si $x'(0) > 0$, entonces $x(t) > 0$, para $t \in (0, \delta)$ y $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ es múltiplo de $(1, 1)$ para $t \in (0, \delta)$. Asimismo, $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ es múltiplo de $(1, -1)$ para $t \in (-\delta, 0)$. De manera que $\gamma'(0)$ ha de ser $\mathbf{0}$.

Si la traza tiene algún "pico", entonces la curva no es regular. Asimismo, una curva regular no puede "volver sobre sí misma".

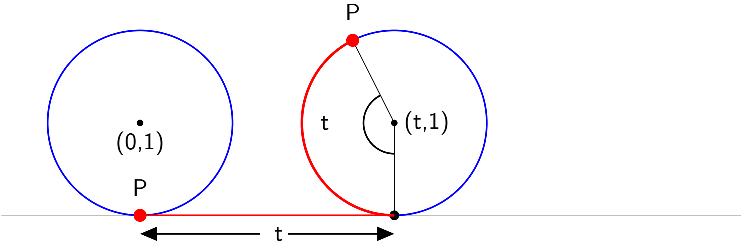
Cicloide

Un círculo de radio 1 reposa en el plano XY sobre el eje horizontal. Marcamos el punto de la circunferencia en el que ésta se apoya sobre el eje horizontal OX.

El centro del círculo se mueve hacia la derecha con rapidez 1 y la circunferencia se desplaza sin resbalar. Queremos la parametrización de la traza que describe ese punto marcado del círculo. Ésta es la cicloide.



El centro del círculo sigue una trayectoria descrita por la curva $\mathbf{c}(t) = (t, 1)$. Tomamos $t \in \mathbb{R}$ y no sólo $t \geq 0$.



$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t,1) + \big(\cos(-\pi/2 - t), \operatorname{sen}(-\pi/2 - t)\big) \\ &= (t,1) + (-\operatorname{sen} t, -\cos t) = \boxed{(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)}.\end{aligned}$$

Velocidad:

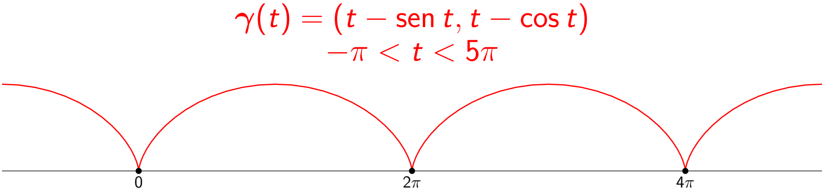
$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)\,.$$

Rapidez:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|.$$

La rapidez (y la velocidad) se anulan cuando t es múltiplo de 2π.

La cicloide restringida a $t \in (0, 2\pi)$ es curva regular.



Sobre la rapidez en tiempo t,

$$\|\gamma'(t)\| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|.$$

- La máxima rapidez vale 2; este valor máximo se alcanza en $t = \dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$
- La rapidez mínima es 0 y se alcanza en $t = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$

¿Y la rapidez media (en un arco de cicloide)?

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = \frac{4}{\pi} > 1.$$

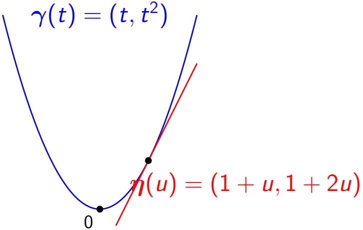
https://www.youtube.com/watch?v=ED3LXV6JWCA.

Recta tangente a una curva regular

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es curva regular y $t \in I$, la recta tangente a γ en $\gamma(t)$ es la recta que pasa por $\gamma(t)$ y tiene vector dirección $\gamma'(t)$ ($\neq \mathbf{0}$).

La recta tangente a la curva γ por $\gamma(t_0)$ viene dada por

$$\boldsymbol{\eta}(u) = \gamma(t_0) + u\,\gamma'(t_0), \qquad u \in \mathbb{R}.$$



Ejemplo. Cicloide:

$$\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \qquad \text{para } t \in (0, 2\pi).$$

Consideramos el punto con $t_0 = \pi$. Obsérvese que $\gamma(\pi) = (\pi, 2)$.

'Parece' que la recta tangente a la cicloide en ese punto ha de ser horizontal.

Como $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ se tiene que $\gamma'(\pi) = (2, 0)$.

La recta tangente a la cicloide por el punto $\gamma(\pi) = (\pi, 2)$ es

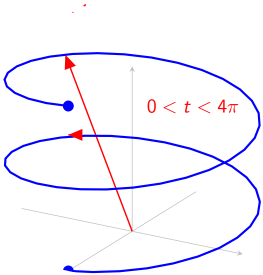
$$\boldsymbol{\eta}(u) = (\pi, 2) + u \cdot (2, 0) = (\pi + 2u, 2)\,, \quad \text{para } u \in \mathbb{R}\,.$$

La recta tangente es la recta horizontal a altura 2.

Ejemplo. Hélice de parámetros $a > 0$, $b \neq 0$:

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

Consideramos el punto con $t_0 = 2\pi$, es decir, el punto $A \equiv \gamma(2\pi) = (a, 0, 2\pi b)$.



Parece que la recta tangente a la hélice por A ha de estar contenida en el plano $x = a$.

Como $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b)$, se tiene que

$$\boldsymbol{\gamma}'(2\pi) = (0, a, b).$$

La recta tangente a la hélice por A viene dada por

$$\boldsymbol{\eta}(u) = (a, 0, 2\pi b) + u \cdot (0, a, b) = (a, au, 2\pi b + ub),$$

que está contenida, en efecto, en el plano $x \equiv a$.

I.2 Longitud de curvas y reparametrizaciones

Supongamos que tenemos una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

Fijamos dos tiempos c y d tales que $c, d \in I$ y $c < d$.

Queremos definir la longitud de la curva γ entre los puntos $\gamma(c)$ y $\gamma(d)$.

Y además, queremos exhibir una fórmula para calcular esa longitud.

Poligonales

Para especificar una poligonal de γ entre $\gamma(c)$ y $\gamma(d)$ se toman tiempos (una partición)

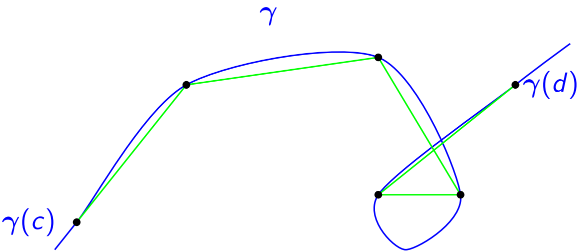
$$c = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d\,.$$

La poligonal Π asociada a esa selección de tiempos es la lista de segmentos de $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi = \big([\gamma(t_0), \gamma(t_1)],\ [\gamma(t_1), \gamma(t_2)],\ \ldots,\ [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]\big)\,.$$

Π es una poligonal asociada a γ desde $\gamma(c)$ hasta $\gamma(d)$.

Los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ son los vértices de la poligonal Π.



La longitud de la poligonal Π se denota $L(\Pi)$ y define de manera natural como

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \,,$$

es decir, como la suma de las longitudes de los segmentos que constituyen la poligonal.

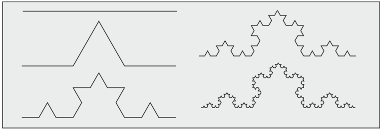
Definición de longitud de curva

Para una curva γ (continua, C^0) definida en un intervalo I, y para $c, d \in I$ con $c < d$, se define la longitud $L(\gamma, c, d)$ de la curva γ entre $\gamma(c)$ y $\gamma(d)$ como

$$L(\gamma, c, d) = \sup L(\Pi)\,,$$

donde el supremo se toma sobre todas las poligonales asociadas a γ desde $\gamma(c)$ hasta $\gamma(d)$.

En general, para una curva sólo continua este supremo puede ser ∞. Por ejemplo, para la curva copo de nieve de Von Koch.



Teorema de cálculo de longitud

Teorema 2.1

Para una curva regular γ definida en un intervalo I y para $c, d \in I$ con $c < d$, se tiene

$$L(\gamma; c, d) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| \, dt \, .$$

Para la conclusión de este teorema basta con que $\gamma \in C^1$.

En la demostración denotamos

- $L := L(\gamma; c, d)$, que es el supremo de las longitudes de las poligonales,
- $J := \int_c^d \|\gamma'(t)\| \, dt$.

Comprobaremos $L \leq J$ y $J \leq L$.

Lema 2.2

Sea $\mathbf{u} : I \to \mathbb{R}^3$ una aplicación continua y sean $c, d \in I$, con $c < d$. Entonces

$$\left\| \int_c^d \mathbf{u}(t)dt \right\| \leq \int_c^d \|\mathbf{u}(t)\| \, dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Usamos que para cualquier $\mathbf{v}$ se tiene que

$$\|\mathbf{v}\| = \sup\{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| : \|\mathbf{w}\| = 1\}.$$

Pongamos $\mathbf{v} = \int_c^d \mathbf{u}(t) \, dt$ y sea $\mathbf{w}$ con $\|\mathbf{w}\| = 1$. Entonces

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \int_c^d (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w}) \, dt \, ,$$

y

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \int_c^d |\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w}| dt \leq \int_c^d \|\mathbf{u}(t)\| \, dt.$$

Lo anterior es cierto para cualquier $\mathbf{w}$ con $\|\mathbf{w}\| = 1$. $\square$

[$L \leq J$] Para una poligonal Π con partición $t_0 = c < t_1 < \cdots < t_n = d$, se tiene que

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{n} \Big\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \Big\|.$$

Por el lema 2.2, se tiene que

$$L(\Pi) \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_n} \|\gamma'(t)\| dt = J.$$

Y por tanto, $L \leq J$.

$[J \leq L]$ Fijemos $\varepsilon > 0$.

Por la continuidad uniforme de $\gamma' \in C^0$, tenemos $\delta > 0$ tal que si $c \leq t \leq t' \leq d$

- son tales que $|t' - t| \leq \delta$,
- entonces $\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq \varepsilon$.

(El δ no depende de los puntos t y t', solo de ε).

Tomamos una partición $t_0 = c < t_1 < \cdots < t_n = d$ para la que se cumpla que $t_j - t_{j-1} < \delta$ para $j = 1, \ldots, n$.

Sea Π la poligonal dada por esa partición. La longitud de esa poligonal es

$$L(\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| = \sum_{j=0}^{n-1} \Big\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \Big\|.$$

Sea $u_j \in [t_{j-1}, t_j]$, tal que

$$\|\gamma'(u_j)\| = \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|\gamma'(t)\| \,.$$

Por un lado,

$$(\star) \qquad J = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \|\gamma'(u_j)\| (t_j - t_{j-1}) \,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)\,dt \\ &= \Big(\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t)-\gamma'(u_j))\,dt\Big) + \gamma'(u_j)\,(t_{j+1}-t_j).\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\|\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)\| &\geq \|\gamma'(u_j)\|\,|t_{j+1}-t_j| - \Big\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t)-\gamma'(u_j))\,dt\Big\| \\ &\geq \|\gamma'(u_j)\|\,|t_{j+1}-t_j| - \varepsilon\,(t_{j+1}-t_j),\end{aligned}$$

usando el Lema 2.2 y las condiciones de la partición.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
L(\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \\
&\geq \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma'(u_j)\|(t_{j+1} - t_j) - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&\geq J - \varepsilon(d - c),
\end{aligned}
$$

donde se ha usado $(\star)$.

En suma,

$$J \leq L(\Pi) + \varepsilon(d - c) \leq L + \varepsilon(d - c)\,.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $J \leq L$.

Ejemplo. Arco de hélice.

$$\gamma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)\,, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Así que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Y por tanto,

$$\text{Longitud de arco de hélice} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Ejemplo. Arco de cicloide.

$$\gamma(t) = (t - \cos t, 1 - \operatorname{sen} t)\,, \quad \text{para } 0 \le t \le 2\pi$$

(atención a los límites).

Así que

$$\|\gamma'(t)\| = 2\Big|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\Big|\,.$$

Y por tanto

$$\text{Longitud de arco de cicloide} = 2\int_0^{2\pi} \Big|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\Big|\,dt = 8\,.$$

Ejemplo. Gráfica de una función.

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad \text{para } c \leq t \leq d\,.$$

Se tiene que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f')(t)^2}\,,$$

y por tanto,

$$\text{Longitud de gráfica} = \int_c^d \sqrt{1 + (f')(t)^2}\; dt\,.$$

Ejemplo. Circunferencia.

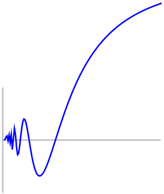
$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,, \quad \text{para } 0 \le t \le 4\pi \to \text{dos vueltas}\,.$$

Como $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$, se tiene que

$$\text{Longitud} = 4\pi\,.$$

Ejemplo. ¿Longitud infinita?

$$\gamma(t) = \left(t, t\sin\left(\tfrac{\pi}{2t}\right)\right), \qquad \text{para } t > 0.$$



La curva γ es regular en $(0, \infty)$. Para $a < 0$, la aplicación γ (extendida como $\gamma(t) = (t, 0)$ para $t \leq 0$) es sólo continua en el intervalo $(a, +\infty)$.

La longitud de la traza de γ para t entre 0 y 1 es ∞.

Sea γ una curva regular en I. Para $c, d \in I$, con $c < d$, hemos visto que

$$L(\gamma; c, d) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Esto es un número.

En bastante habitual fijar un valor t_0 ("desde" donde mediremos longitudes), y considerar la función

$$s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

para $t \in I$. Esta función es positiva para $t > t_0$ (y negativa en caso contrario), y además es creciente (pues $\frac{d}{dt} s_{t_0}(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, al ser la curva regular).

Esta función mide longitudes (con el convenio de signos) de arcos desde t_0.

Ejemplo. Arco de hélice, para la que ya hemos visto que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Tomamos $t_0 = 0$. Entonces

$$s_0(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, du = t\,\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Como ya vimos, $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo. Arco de cicloide. Tomamos $t_0 = 0$. Ya vimos que

$$\|\gamma'(t)\| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|.$$

Y por tanto, para $t < 2\pi$,

$$s_0(t) = 2\int_0^t \left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 8\,\sin(t/4)^2.$$

Se tiene que $s(2\pi) = 8$.

Ejemplo. Parábola:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$.

Elegimos $t_0 = 0$. Entonces, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\, du \\ &= \frac{1}{2}\, t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln(2t + \sqrt{1+4t^2}) \\ &= \frac{1}{2}\, t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(2t). \end{aligned}$$

Ups.

Detalle 1. Usamos el cambio $u = \frac{1}{2}\tan y$, para el que $du = \frac{1}{2}\sec^2(y)dy$. Además, $\sqrt{1+4u^2} = \sec(y)$. Llamamos z al número tal que $2t = \tan(z)$, y obtenemos que

$$\int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^z \sec^3(y)\,dy.$$

Ahora, integrando por partes ($u = \sec(y)$ y $dv = \sec^2(y)dy$),

$$\begin{aligned}\int_0^z \sec^3(y)\,dy &= \sec(z)\tan(z) - \int_0^z \tan^2(y)\sec(y)\,dy\\ &= \sec(z)\tan(z) - \int_0^z \sec^3(y)\,dy + \int_0^z \sec(y)\,dy,\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}\int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^z \sec^3(y)\,dy &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\int_0^z \sec(y)\,dy + \frac{1}{2}\sec(z)\tan(z)\Big)\\ &= \frac{1}{4}\ln\big(\sec(z)+\tan(z)\big) + \frac{1}{4}\sec(z)\tan(z)\\ &= \frac{1}{4}\ln\big(\sqrt{1+4t^2}+2t\big) + \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2}.\end{aligned}$$

Detalle 2. Justificación de que

$$\operatorname{arcsinh}(a) = \ln(a + \sqrt{1 + a^2}).$$

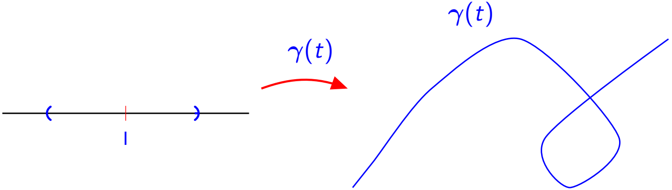
Sea b tal que

$$\begin{aligned} a = \sinh(b) = \frac{e^b - e^{-b}}{2} \quad &\Longrightarrow \quad (e^b)^2 - 2a\, e^b - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad e^b = a \pm \sqrt{1 + a^2} \\ &\Longrightarrow \quad e^b = a + \sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Reparametrizaciones

Reparametrización

Partimos de una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$. Podemos interpretar t como la etiqueta que se asigna al punto $\gamma(t)$ de la traza de γ.

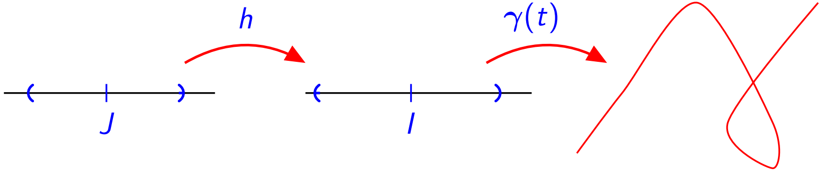


Queremos cambiar la forma de recorrer la traza de γ o, si se prefiere, cambiar las etiquetas con las que identificamos los puntos de la traza de γ.

Si $h : J \to I$ es un *difeomorfismo* C^∞ (biyección tal que tanto h como h^{-1} son C^∞) de un intervalo J sobre el intervalo I, entonces la curva $\boldsymbol{\eta}$ dada por

$$\boldsymbol{\eta}(u) = \boldsymbol{\gamma}(h(u)), \quad \text{para } u \in J\,,$$

es una reparametrización de la curva $\boldsymbol{\gamma}$.



- $\boldsymbol{\eta}$ es curva porque h es C^∞.
- γ y $\boldsymbol{\eta}$ describen la misma traza.
- γ es también reparametrización de $\boldsymbol{\eta}$, pues $\gamma = \boldsymbol{\eta} \circ h^{-1}$.
- γ es regular si y sólo si $\boldsymbol{\eta}$ es regular, pues

$$\boldsymbol{\eta}'(u) = h'(u) \cdot \gamma'(h(u))$$

($h'(u)$ es un escalar, $\gamma'(h(u))$ es un vector.)

Detalle en coordenadas. Escribimos $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. La curva $\boldsymbol{\eta}$ es

$$\boldsymbol{\eta}(u) = \gamma(h(u)) = (x(h(u)), y(h(u)), z(h(u))),$$

de manera que

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{du}\,\boldsymbol{\eta}(u) &= \big(x'(h(u)) \cdot h'(u), y'(h(u)) \cdot h'(u), z'(h(u)) \cdot h'(u)\big) \\ &= h'(u) \cdot \gamma'(h(u)). \end{aligned}$$

Orientación.

- Si h es función creciente, entonces $\boldsymbol{\eta}$ recorre la traza común en el mismo sentido en el que lo hace γ.
- Si h es decreciente, entonces $\boldsymbol{\eta}$ recorre la traza común en sentido contrario al que lo hace γ.

Longitudes.

Supongamos que h es creciente. Sean $p, q \in J$ con $p < q$. Llamamos $h(p) = c < d = h(q)$. La curva $\boldsymbol{\eta}$ recorre de p a q la misma traza que $\boldsymbol{\gamma}$ desde c a d.

La longitud de esa porción de traza se puede calcular con $\boldsymbol{\eta}$ o con $\boldsymbol{\gamma}$. Como

$$\boldsymbol{\eta}'(u) = h'(u) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(h(u)),$$

se tiene que

$$\|\boldsymbol{\eta}'(u)\| = h'(u) \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(h(u))\|.$$

Cambiando de variable ($t = h(u)$) en la integral,

$$\int_p^q \|\boldsymbol{\eta}'(u)\| du = \int_p^q h'(u) \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(h(u))\| du = \int_c^d \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| dt\,.$$

Parametrización por longitud de arco

Una curva regular $\boldsymbol{\eta}(s)$ con $s \in I$ se dice que está parametrizada por longitud de arco si

$$s_2 - s_1 = L(\boldsymbol{\eta}; s_1, s_2)\,, \quad \text{para cualesquiera } s_1, s_2 \in I \text{ con } s_1 < s_2\,,$$

o, equivalentemente, si

$$s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\| ds\,, \quad \text{para cualesquiera } s_1, s_2 \in I \text{ con } s_1 < s_2\,,$$

o, equivalentemente, si

$$\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1\,, \quad \text{para todo } s \in I\,;$$

en otras palabras, si la rapidez es constante e igual a 1.

La parametrización por longitud de arco es natural y geométrica, porque las etiquetas para localizar puntos de la traza viene dados por longitud de traza hasta llegar a ellos.

En la parametrización por longitud de arco, tiempo y longitud recorrida coinciden.

Observación: si una curva está parametrizada por longitud de arco entonces es regular.

1. Una recta
$$\gamma(t) = \mathbf{p} + t\,\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R},$$
está parametrizada por longitud de arco si $\|\mathbf{u}\| = 1$.

2. La circunferencia
$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$
está ya parametrizada por longitud de arco. Ángulo = longitud: radianes.

3. La circunferencia
$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\operatorname{sen}(t))$$
no está parametrizada por longitud de arco, pero
$$\boldsymbol{\eta}(s) = (R\cos(s/R), R\operatorname{sen}(s/R))$$
sí lo está.

5. La hélice
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt),$$
con $a > 0$ y $b \neq 0$, tiene rapidez constante:
$$\rho := \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Así que
$$\boldsymbol{\eta}(s) = \big(a\cos(s/\rho), a\,\mathrm{sen}(s/\rho), b\,s/\rho\big)$$
es parametrización de la hélice (de parámetros a, b) por longitud de arco.

En general, si $\boldsymbol{\gamma}(t)$ tiene rapidez ρ constante, entonces $\boldsymbol{\eta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s/\rho)$ es parametrización por longitud de arco de la misma traza que $\boldsymbol{\gamma}$.

Preguntas/comentarios.

- Dada una curva regular $\gamma(t)$, ¿se puede siempre (re)parametrizar por longitud de arco?
- Todos los cálculos se simplifican sobremanera si la curva está parametrizada por longitud de arco.
- Aunque en general la reparametrización por longitud de arco no es fácil de calcular.

Teorema 2.3

Toda curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco.

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ regular.

Fijemos $t_0 \in I$.

Definimos

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du,$$

para cada $t \in I$.

- Para $t > t_0$, se tiene que $g(t)$ es la longitud de la curva γ entre $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t)$.
- Para $t < t_0$, la función $g(t)$ nos da el negativo de la longitud entre $\gamma(t)$ y $\gamma(t_0)$.

Queremos usar $s = g(t)$ como etiqueta del punto $\gamma(t)$, en otras palabras, queremos despejar t en términos de s, es decir, invertir g.

- Como γ es regular, se tiene $g'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. Así que g es función creciente.
- Supongamos que $I = (a, b)$. Llamemos $c = \lim_{t\downarrow a} g(t)$ y $d = \lim_{t\uparrow b} g(t)$.

  La función g es difeomorfismo entre $I = (a, b)$ y $(c, d) := J$.

Lema. Si $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ es C^∞, y no se anula, es decir, $\boldsymbol{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$, para cada $t \in I$, entonces la función $\phi(t) = \|\boldsymbol{\alpha}(t)\|$ es C^∞.

Demostración. La función $\phi(t)^2 = \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}(t)$ es C^∞. Y ϕ es la raíz cuadrada de una función C^∞ que no se anula.

El lema nos da que g' es C^∞.

Tomamos $h : J \to I$ dada por $h(s) = g^{-1}(s)$, y consideramos la curva

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(h(s)), \qquad \text{para } s \in J.$$

Se tiene que

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = h'(s)\,\boldsymbol{\gamma}'(h(s)) = \frac{1}{g'(h(s))}\,\boldsymbol{\gamma}'(h(s)) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}'(h(s)\|}\,\boldsymbol{\gamma}'(h(s)).$$

De manera que

$$\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1\,, \quad \text{para cualquier } s \in J\,,$$

y, por tanto, $\boldsymbol{\eta}$ está parametrizada por longitud de arco. $\square$

La relevancia del teorema de reparametrización por longitud de arco radica sobre todo en que nos permite suponer que hay tal reparametrización, no tanto en que sea un procedimiento para conseguirla.

Dada la curva regular $\gamma(t)$, $t \in I$, un tal "programa" de reparametrización sería

- fijar $t_0 \in I$,
- calcular $s = g(t)$ (¡ojo!),
- invertir: $t = g^{-1}(s) = h(s)$ (¡ojo!, ¡ojo!),
- para finalmente definir $\boldsymbol{\eta}(s) = \gamma(h(s))$.

Ejemplo 1. Sea $\gamma(t)$ una curva regular, $t \in I$, tal que $\|\gamma'(t)\| = r > 0$ constante. Entonces, para $t_0 \in I$,

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| \, dt = r\,(t - t_0) = s,$$

y por tanto

$$t = \frac{s}{r} + t_0 = h(s).$$

La curva reparametrizada por longitud de arco es

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \gamma(s/r + t_0).$$

Por ejemplo, para la hélice

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

para la que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$, tomando $t_0 = 0$,

$$\eta(s) = \gamma(s/\sqrt{2}) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}).$$

Cuando t se mueve de 0 a 2π, la hélice γ da una vuelta; esa misma vuelta se da con η moviendo s entre 0 y $2\pi \cdot \sqrt{2}$ (que es la longitud de esa vuelta de la hélice).

Ejemplo 2. Catenaria. La parametrización estándar de la catenaria es

$$\gamma(t) = (t, \cosh t), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que

$$\gamma'(t) = (1, \operatorname{senh} t) \quad \Longrightarrow \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t} = \cosh t\,.$$

De manera que

$$s = g(t) = \int_0^t \cosh y \, dy = \operatorname{senh} t.$$

Invertimos g, para cambiar de t a longitud de arco s:

$$t = \operatorname{senh}^{-1}(s) = \ln(s + \sqrt{1 + s^2}) = h(s).$$

Así que

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \gamma\big(\ln(s + \sqrt{1+s^2})\big) = \big(\ln(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2}\big)$$

es parametrización por longitud de arco de la catenaria.

Se ha usado que

$$\cosh t = \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(s)) = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(\operatorname{senh}^{-1}(s))} = \sqrt{1+s^2}.$$

Ejemplo 3. Parábola:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Tomamos $t_0 = 0$. La función $g(t)$ es

$$g(t) = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\, du = \frac{1}{4} \ln\left(\sqrt{1+4t^2} + 2t\right) + \frac{1}{2} t\sqrt{1+4t^2}\,,$$

como ya vimos.

¿Despejar t en $s = g(t)$, para tener $t = g^{-1}(s) = h(s)$ y poner $\boldsymbol{\eta}(s) = \gamma(h(s))$?

Inviable, pero $(h(s), h(s)^2)$ es parametrización por longitud de arco de la parábola.

I.3 Curvatura y torsión

La curvatura de una curva en un punto mide

- cuán próxima está la curva a ser recta en ese punto y
- cuan rápidamente está cambiando de dirección en ese punto.

La torsión de una curva en un punto mide

- cuán próxima está la curva a ser curva plana en ese punto y
- cuan rápidamente está cambiando su plano “osculador” en ese punto.

Usaremos frecuentemente el siguiente lema:

Lema 3.1

a) Sea $\mathbf{u} : I \to \mathbb{R}^3$ una aplicación derivable tal que $\|\mathbf{u}(t)\|$ es constante en I. Entonces

$$\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) = 0\,, \quad \text{para cada } t \in I\,,$$

es decir, $\mathbf{u}'(t) \perp \mathbf{u}(t)$, para cada $t \in I$.

b) Si $\mathbf{u} : I \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v} : I \to \mathbb{R}^3$ son aplicaciones derivables tales que $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ es constante en I, entonces

$$\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = -\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)\,, \quad \text{para cada } t \in I\,.$$

Uso típico: $\|\mathbf{u}(t)\| \equiv 1$ y $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \equiv 0$.

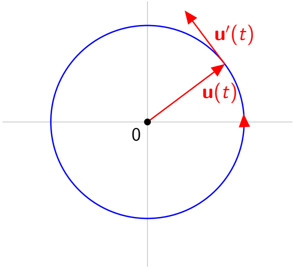
Demostración. La primera parte del lema se deduce de la segunda tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Para la segunda parte, como el producto escalar $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ es constante, derivando se tiene que

$$\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 0\,,$$

para todo $t \in I$. $\square$

Por ejemplo, si $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, entonces $\mathbf{u}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$.



Vector tangente $\mathbf{t}$

Supongamos que $\gamma(s) : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco.

Así que $\|\gamma'(s)\| = 1$ para $s \in I$.

Para cada $s \in I$, el vector $\gamma'(s)$ es un vector unitario (de módulo 1) tangente a la curva en $\gamma(s)$.

Se denota

$$\boxed{\mathbf{t}(s) := \gamma'(s)}$$

El vector $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente a la curva γ en $\gamma(s)$.

Curvatura

En cada $s \in I$, el vector $\mathbf{t}(s)$ nos dice en qué dirección se está moviendo la curva al pasar por $\gamma(s)$.

Nos interesamos ahora por la (magnitud de la) variación de ese vector tangente: la derivada $\mathbf{t}'(s)$ de $\mathbf{t}(s)$, que registra la tasa de cambio de dirección de $\gamma(s)$ por unidad de longitud.

La curvatura $\kappa(s)$ de γ en $\gamma(s)$ se define como

$$\boxed{\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|}$$

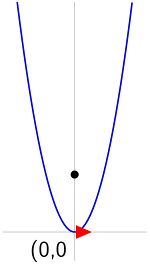
κ es 'kappa'.

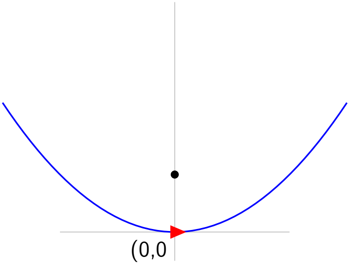
La curvatura de una curva en un punto mide cuán rápidamente está cambiando de dirección en ese punto.

Ejemplo. Curvatura nula significa que la traza es (parte de) una recta.

$\kappa \equiv 0$ si y solo si $\mathbf{t}' \equiv 0$; si y solo si $\mathbf{t} = \boldsymbol{\gamma}'$ es constante; si y solo si $\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es unitario.

Ejemplo. Un par de parábolas. La parábola de la izquierda cambia mucho más de dirección por unidad de longitud al pasar por $(0,0)$ que la de la derecha: la de la izquierda tiene más curvatura que la de la derecha.





Ejemplo. La circunferencia de radio R.

Parametrizamos por longitud de arco:

$$\gamma(s) = (R\cos(s/R), R\,\mathrm{sen}(s/R)).$$

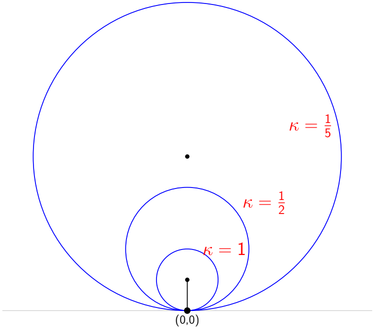
Y calculamos

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= (-\,\mathrm{sen}(s/R), \cos(s/R)),\\ \gamma''(s) &= \frac{1}{R}(-\cos(s/R), -\,\mathrm{sen}(s/R)).\end{aligned}$$

Así que

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\| = \frac{1}{R}\,, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

La circunferencia de radio R tiene curvatura κ constante e igual a $1/R$.



A mayor radio de la circunferencia, menor curvatura y mejor aproximación de la circunferencia a una recta.

Recíproco: una curva en el plano de curvatura constante $M > 0$ está contenida en una circunferencia de radio $1/M$.

Punto de partida: curva γ con $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco y con curvatura constante $M > 0$. Es decir,

$$\|\gamma'(s)\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|\gamma''(s)\| = M.$$

Objetivo: probar que los puntos de γ están a distancia fija $1/M$ de un cierto punto del plano.

- Como $\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) \equiv 1$, se tiene $(\star)$ $\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0$, es decir, $\gamma''(s) \perp \gamma'(s)$,
- como $\gamma''(s) \cdot \gamma''(s) \equiv M^2$, se tiene $\gamma''(s) \cdot \gamma'''(s) = 0$, es decir, $\gamma''(s) \perp \gamma'''(s)$.

Como $\gamma''(s) \neq \mathbf{0}$ esto significa (estamos en el plano) que

$$\gamma'''(s) \parallel \gamma'(s), \quad \text{es decir,} \quad \gamma'''(s) = \lambda(s)\,\gamma'(s),$$

para una cierta función $\lambda(s)$ (de hecho, $\lambda(s) = \gamma'''(s) \cdot \gamma'(s)$).

Derivando en $(\star)$, se sigue que

$$\gamma'''(s) \cdot \gamma'(s) + \gamma''(s) \cdot \gamma''(s) \equiv 0, \quad \text{es decir,} \quad \lambda(s) + M^2 \equiv 0.$$

Así que

$$\gamma'''(s) + M^2\,\gamma'(s) \equiv \mathbf{0}, \quad \text{es decir,} \quad \Big(\gamma(s) + \frac{1}{M^2}\gamma''(s)\Big)' \equiv \mathbf{0}.$$

De manera que, para un cierto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\gamma(s) + \frac{1}{M^2}\,\gamma''(s) = \mathbf{p} \quad \text{y, por tanto,} \quad \|\gamma(s) - \mathbf{p}\| = \frac{1}{M^2}\|\gamma''(s)\| = \frac{1}{M}\cdot$$

En conclusión, la curva plana γ está en la circunferencia de centro $\mathbf{p}$ y radio $1/M$.

Ejemplo. Hélice. Partimos de

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt)$$

con $b \neq 0$ y $a > 0$. Reparametrizamos por longitud de arco:

$$\gamma(s) = \Big(a\cos\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), a\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,s\Big).$$

Derivando,

$$\gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-a\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), a\cos\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), b\Big),$$

y una segunda,

$$\gamma''(s) = \frac{a}{a^2+b^2}\Big(-\cos\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), -\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big), 0\Big).$$

Así que

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}\,, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}\,.$$

- Si $b = 0$, la hélice *degenera* en una circunferencia de radio a (de curvatura $1/a$).
- Cuando $a \to \infty$ o cuando $b \to \infty$, la hélice tiende a ser una recta (de curvatura 0); de hecho, con $\mathbf{t}(s) \sim (0, 1, 0)$ en el primer caso, y $\mathbf{t}(s) \sim (0, 0, 1)$ en el segundo.

Curva birregular

Definición 3.2

Una curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco es birregular si

$$\gamma''(s) \neq \mathbf{0}\,, \quad \text{para todo } s \in I.$$

- Birregular equivale a curvatura no nula.
- Las rectas NO son birregulares.

Nota 1: Una curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) es birregular si su reparametrización por longitud de arco es birregular.

Nota 2: Una curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) es birregular si y sólo si $\gamma'(t)$ y $\gamma''(t)$ son linealmente independientes para todo $t \in I$.

Sea $\boldsymbol{\eta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(h(s))$ una reparametrización de $\boldsymbol{\gamma}$ por longitud de arco. Entonces

$$\boldsymbol{\eta}'(h(s)) = h'(s)\,\boldsymbol{\gamma}'(h(s))$$

y

$$\boldsymbol{\eta}''(s) = h'(s)^2\,\boldsymbol{\gamma}''(h(s)) + h''(s)\,\boldsymbol{\gamma}'(h(s)).$$

Si $\boldsymbol{\gamma}$ es birregular, entonces $\boldsymbol{\eta}$ también lo es, y por tanto $\boldsymbol{\eta}''(s) \neq \mathbf{0}$; además, $\boldsymbol{\eta}'(s) \cdot \boldsymbol{\eta}''(s) = 0$. Así que $\boldsymbol{\eta}'(s)$ y $\boldsymbol{\eta}''(s)$ son linealmente independientes. Mirando las expresiones de arriba, esto supone que $\boldsymbol{\gamma}'(h(s))$ y $\boldsymbol{\gamma}''(h(s))$ han de ser también linealmente independientes.

Si $\boldsymbol{\gamma}'(h(s))$ y $\boldsymbol{\gamma}''(h(s))$ son linealmente independientes, entonces $\boldsymbol{\eta}''(s)$ no puede ser el vector nulo, pues en la combinación lineal de arriba, $h'(s) > 0$.

Vector normal $\mathbf{n}$

Si γ es una curva birregular parametrizada por longitud de arco, se define **el** vector normal a γ en $\gamma(s)$, y se denota $\mathbf{n}(s)$, al vector

$$\boxed{\mathbf{n}(s) := \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}}$$

La aplicación $s \to \mathbf{n}(s)$ es C^∞, pues $\kappa(s)$ es C^∞ y no se anula.

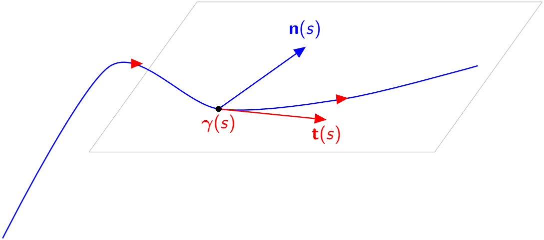
Se tiene que $\boxed{\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{t}(s)}$, pues de que $\|\mathbf{t}\| \equiv 1$ se deduce que $\mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$.

El vector $\mathbf{n}(s)$ es unitario y perpendicular a $\mathbf{t}(s)$. Hay infinitos vectores en $\mathbb{R}^3$ (toda una circunferencia) con esa propiedad: $\mathbf{n}(s)$ es uno de ellos, pero canónico.

Plano osculador

Para una curva birregular $\gamma(s)$ parametrizada por longitud de arco, los vectores $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ y $\mathbf{n}(s) = \gamma''(s)/\kappa(s)$, junto con el punto $\gamma(s)$, determinan un plano, que recoge la dirección y la variación de dirección de la curva en $\gamma(s)$.

El plano por $\gamma(s)$ con vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ es el plano osculador a la curva γ en $\gamma(s)$.



Para una curva en el plano $\mathbb{R}^2$, el plano osculador es $\mathbb{R}^2$.

Sea $\gamma(s)$ una curva birregular definida en I y parametrizada por longitud de arco. Supongamos que $0 \in I$.

Aproximaciones para $\gamma(s)$ cerca de $\gamma(0)$:

Aproximación de primer orden:

$$\gamma(s) \approx \gamma(0) + s\,\gamma'(0) = \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0).$$

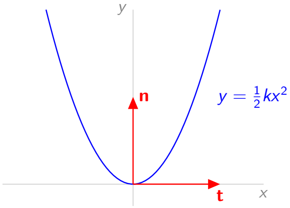
Es una recta: la recta tangente a γ por $\gamma(0)$.

Aproximación de segundo orden:

$$\begin{aligned}\gamma(s) &\approx \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0) + \frac{1}{2}\,s^2\,\gamma''(0)\\ &= \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0) + \frac{\kappa(0)}{2}\,s^2\,\mathbf{n}(0).\end{aligned}$$

Es una parábola: la parábola $s \mapsto \big(s, \frac{\kappa(0)}{2}\,s^2\big)$ contenida en el plano osculador: parábola osculatriz.

"Hasta orden 2", la curva está contenida en su plano osculador.



Vector binormal $\mathbf{b}$

Sea $\gamma(s)$, $s \in I$, una curva birregular. Para cada s tenemos ya $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, dos vectores unitarios en $\gamma(s)$, tales que $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$.

Definimos el vector binormal $\mathbf{b}(s)$ como

$$\boxed{\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)}$$

Por las propiedades del producto vectorial, se tiene que $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{n}(s)$ (por eso, binormal) y además $\|\mathbf{b}(s)\| \equiv 1$.

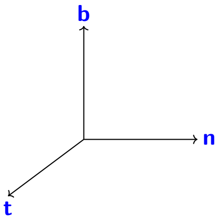
El plano osculador (osculante, tangente) a γ en $\gamma(s)$ es el plano que pasa por $\gamma(s)$ y es perpendicular a $\mathbf{b}(s)$.

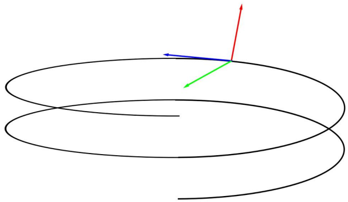
El vector binormal es un vector unitario normal (perpendicular) al plano osculador a γ por $\gamma(s)$.

Triedro de Frenet

- Para cada $s \in I$, los vectores $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ conforman un triedro positivamente orientado.
- Para cada $s \in I$ los vectores $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

A $\big[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\big]$ se le conoce como triedro de Frenet de la curva γ en el punto $\gamma(s)$.





Torsión

La torsión de γ en $\gamma(s)$ va a medir cómo varía el plano osculador en $\gamma(s)$, y, alternativamente, cuán 'plana' es la curva γ en el punto $\gamma(s)$.

Como $\mathbf{b}(s)$ es el vector normal (unitario) al plano osculador, se trata de ver cómo varía $\mathbf{b}(s)$, es decir, de estudiar su derivada $\mathbf{b}'(s)$.

Como $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, al derivar se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{b}'(s) &= \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \kappa(s)\,\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s),\end{aligned}$$

pues $\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$. Se deduce que

$$\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s).$$

Además, como $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1$,

$$\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s).$$

Se deduce que

$$\boxed{\mathbf{b}'(s) \parallel \mathbf{n}(s)}$$

Se define la torsión de $\boldsymbol{\gamma}$ en $\gamma(s)$ como el factor $\tau(s)$ de manera que

$$\boxed{\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)}$$

(τ es 'tau').

Se tiene $\tau(s) = \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$. Así que $\tau \in C^\infty$. También $\|\mathbf{b}'(s)\| = |\tau(s)|$.

Para una curva birregular la curvatura es siempre positiva, pero la torsión en un punto dado puede ser positiva, negativa o 0. El signo de la torsión tiene significado geométrico.

Nota: Hay quien define la torsión τ con signo opuesto al que estamos usando.

Torsión $\equiv 0$.

Una curva birregular $\gamma(s)$ está contenida en un plano si y solo si su torsión $\tau(s)$ es idénticamente nula.

Si una curva está contenida en un plano, entonces $\mathbf{b}$ es constantemente uno de los dos vectores normales unitarios a ese plano y su derivada es nula.

Supongamos que $\tau \equiv 0$, es decir, que $\mathbf{b}'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Por tanto, si fijamos $s_0 \in I$, se tiene que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}(s_0)$, para todo $s \in I$.

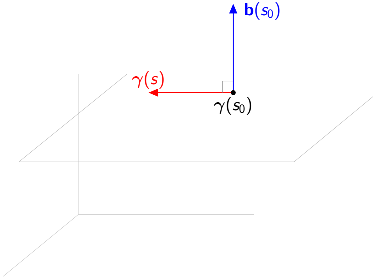
Queremos comprobar que $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \perp \mathbf{b}(s_0)$.

Pero, derivando el producto escalar,

$$\begin{aligned}\big((\boldsymbol{\gamma}(s)-\boldsymbol{\gamma}(s_0))\cdot\mathbf{b}(s_0)\big)' &= \boldsymbol{\gamma}'(s)\cdot\mathbf{b}(s_0)\\ &= \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b}(s_0)=\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b}(s)=0 \quad \text{para todo } s\in I.\end{aligned}$$

Por tanto, $(\boldsymbol{\gamma}(s)-\boldsymbol{\gamma}(s_0))\cdot\mathbf{b}(s_0)$ es una constante cuando s recorre I, pero en $s=s_0$ se tiene que vale 0, así que

$$(\boldsymbol{\gamma}(s)-\boldsymbol{\gamma}(s_0))\cdot\mathbf{b}(s_0)=0\,,\quad \text{para todo } s\in I\,.$$

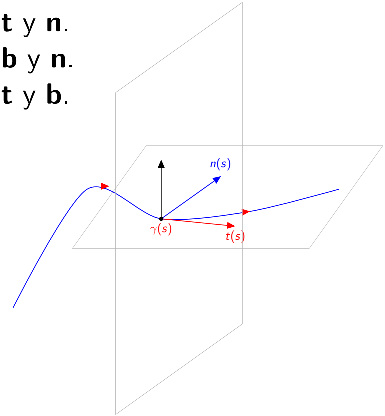


Planos

Sea $\gamma(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco.

Sea $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ el triedro de Frenet de γ en $\gamma(s)$.

Plano osculador,	determinado por	$\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$.
Plano normal,	determinado por	$\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}$.
Plano rectificante,	determinado por	$\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$.



Ejercicio: Si todos los planos normales de una curva birregular γ pasan por un punto fijo $\mathbf{p}$, entonces la traza de la curva está contenida en una esfera.

Ejercicio: Si todos los planos osculantes de una curva birregular γ pasan por un punto fijo $\mathbf{p}$, entonces la traza de la curva está contenida en un plano.

Ejemplo. Hélice de parámetros $a > 0, b \neq 0$:

$$\gamma(s) = \Big(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big),$$

parametrizada por longitud de arco.

Se tiene

$$\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\Big),$$

$$\gamma''(s) = \frac{a}{a^2+b^2}\Big(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\Big)$$

Así que

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(s) = \Big(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\Big).$$

Ya tenemos $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ de la hélice. Calculamos $\mathbf{b}(s)$ a partir de $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$. Llamamos $\theta = s/\sqrt{a^2+b^2}$, para simplificar notación:

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen}\theta & a\cos\theta & b \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix}$$

De manera que

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \Big(b \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \Big).$$

(Nótense dónde aparecen a y b).

Para la torsión $\tau(s)$, derivamos $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\Big(b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\Big) = -\frac{b}{a^2+b^2}\,\mathbf{n}(s)$$

y

$$\tau(s) = -\frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

La hélice tiene curvatura y torsión constantes.

Fórmulas de Frenet–Serret

Vamos a expresar las derivadas $[\mathbf{t}'(s), \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}'(s)]$ respecto de la base ortonormal $[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)]$(derivada del triedro respecto de sí mismo).

Ya tenemos

- $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{n}(s)$ (definición de κ y $\mathbf{n}$),
- $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)$ (definición de τ).

Nos falta $\mathbf{n}'(s)$. De que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ se sigue que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$.

Derivando,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\ &= \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + \kappa(s)\,\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s)\,\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\,\mathbf{t}(s)\,. \end{aligned}$$

Escribimos las tres derivadas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{FS}} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}$$

Estas son las ecuaciones de Frenet–Serret.

La matriz escalar FS es antisimétrica.

$\to$ Una matriz cuadrada M es antisimétrica si $M^{\mathsf{T}} = -M$. Esto, en particular, exige que los elementos de la diagonal sean 0.

$\to$ Si escribimos los vectores de arriba en coordenadas ($\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, $\mathbf{t}' = (t_1', t_2', t_3')$, etc.), la matriz anterior es de dimensiones 9×9: cada símbolo en la matriz FS se ha de sustituir por una caja diagonal.

La expresión de $\mathbf{n}'(s)$ se puede obtener asimismo como sigue. Como $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ es base ortonormal, podemos escribir

$$\mathbf{n}'(s) = u(s)\,\mathbf{t}(s) + v(s)\,\mathbf{n}(s) + w(s)\,\mathbf{b}(s).$$

Argumentamos como sigue:

- como $u(s) = \mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{t}(s)$, de que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ se deduce que

$$u(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = -\kappa(s);$$

- como $v(s) = \mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$, de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ se deduce que

$$v(s) = 0;$$

- como $w(s) = \mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{b}(s)$, de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ se deduce que

$$w(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) = -\tau(s).$$

Ejemplo. Curvas con $\tau \equiv 0$ y $\kappa(s)$ constante no nula (digamos $\kappa_0 > 0$) son (parte de) circunferencias en planos.

Probamos primero que, como la curvatura es constante, la traza está en una esfera.

Generalizamos el argumento de la página 83. Sea γ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura κ_0 constante. Calculamos

$$\Big(\gamma(s) + \frac{1}{\kappa_0}\mathbf{n}(s)\Big)' = \mathbf{t}(s) + \frac{1}{\kappa_0}\,(-\kappa_0\,\mathbf{t}(s) - \tau(s)\,\mathbf{b}(s)) = \mathbf{0}\,.$$

Por tanto, $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa_0}\mathbf{n}(s)$ es constante, digamos igual a $\mathbf{p}$, y

$$\|\gamma(s) - \mathbf{p}\| \equiv \frac{1}{\kappa_0}\,,$$

así que la traza de γ está contenida en la esfera de centro $\mathbf{p}$ y radio $1/\kappa_0$.

Como $\tau \equiv 0$, ya sabemos (página 98) que la traza de γ está contenida en un plano.

Cambio de sentido y triedro de Frenet

Sea $\gamma : I = (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco.

Supongamos por comodidad que $0 \in I$ y que el intervalo es $(-a, a)$, para a positivo.

Consideremos la curva $\bar{\gamma}$ dada por $\bar{\gamma}(s) = \gamma(-s)$, que recorre la misma traza que γ, pero en sentido contrario.

Queremos relacionar el triedro de $\bar{\gamma}$ y su curvatura $\bar{\kappa}$ y torsión $\bar{\tau}$ con los de γ en $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

- $\bar{\mathbf{t}}(0) = -\mathbf{t}(0)$.
- $\bar{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{n}(0)$ y $\bar{\kappa}(0) = \kappa(0)$.
- $\bar{\mathbf{b}}(0) = -\mathbf{b}(0)$ y $\bar{\tau}(0) = -\tau(0)$.

Movimientos rígidos y triedro

Los movimiento rígidos de $\mathbb{R}^3$ se obtienen componiendo traslaciones con rotaciones.

Si M es movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, entonces M viene dado por un vector $\mathbf{p}$ y una matriz ortogonal O con determinante 1:

$$M\mathbf{v} = O\,\mathbf{v} + \mathbf{p}\,, \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\,.$$

En estas expresiones escribimos los vectores como columnas, como matrices 1×3.

Recuerda:

- Una matriz O es ortogonal si $O^{\mathsf{T}} = O^{-1}$.
- Las columnas (y las filas) de O ortogonal forman una base ortonormal.
- $\|O\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, si O es ortogonal.

Observa: como $\det(O) = 1$, se tiene que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces $O\mathbf{u} \times O\mathbf{v} = O(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Comprueba: sea M una matriz 3×3 no nula que satisface que

$$M\mathbf{u} \times M\mathbf{v} = M(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ y $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Entonces $M = \pm O$, para una cierta O matriz ortogonal.

1) Traslaciones

Sea $\gamma(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sea $\bar{\gamma}$ la curva $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + \mathbf{p}$.

Como $\bar{\gamma}'(s) = \gamma'(s)$, se tiene que $\bar{\gamma}(s)$ está parametrizada por longitud de arco y que $\bar{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(s)$, para todo s.

Por tanto, para todo s,

$$\bar{\kappa}(s) = \kappa(s), \qquad \bar{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(s), \qquad \bar{\tau}(s) = \tau(s), \qquad \bar{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(s).$$

2) Rotaciones

Consideremos ahora la curva $\bar{\gamma}(s)$ dada por $\bar{\gamma}(s) = O\gamma(s)$.

Se tiene, $\bar{\gamma}'(s) = O\gamma'(s)$, para todo s. Así que $\bar{\gamma}$ está parametrizada por longitud de arco y $\bar{\mathbf{t}}(s) = O\mathbf{t}(s)$, para todo s.

Además, $\bar{\mathbf{t}}'(s) = O\mathbf{t}'(s)$, para todo s. De manera que para todo s,

$$\bar{\kappa}(s) = \kappa(s), \quad \bar{\mathbf{n}}(s) = O\mathbf{n}(s).$$

Finalmente, usando la observación anterior,

$$\bar{\mathbf{b}}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s) \times \bar{\mathbf{n}}(s) = O\mathbf{t}(s) \times O\mathbf{n}(s) = O\big(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\big) = O\mathbf{b}(s).$$

Esto nos da que $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$.

Imagine: La traza de la curva $\gamma(s)$ está hecha de alambre muy rígido. En varios puntos de la traza se ha marcado el triedro de Frenet.

Al trasladar o rotar la curva (sin deformaciones), las longitudes se conservan: triedros van en triedros y sus variaciones (κ, τ) se conservan.

Ejercicio: Sea $\gamma(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco y sea

$$\bar{\gamma}(s) = T\gamma(s).$$

Relación entre triedros y curvatura y torsión en los siguientes casos:

(1) T es reflexión en el plano XY o, en general, $T = O$ es matriz ortogonal con $\det(O) = -1$.

(2) T es homotecia de escala $\lambda > 0$: $T(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Otros triedros sobre curvas

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular parametrizada por longitud de arco.

Sea $\big[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)\big]$ un triedro positivo sobre la curva γ.

Es decir,

- $\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)$ son aplicaciones C^∞ de I en $\mathbb{R}^3$,
- $\|\mathbf{P}(s)\| = \|\mathbf{Q}(s)\| = \|\mathbf{R}(s)\| = 1$, para cada $s \in I$,
- $\mathbf{P}(s) \perp \mathbf{Q}(s) \perp \mathbf{R}(s)$ y $\mathbf{R}(s) \perp \mathbf{P}(s)$, para cada $s \in I$.

Para cada $s \in I$ tenemos una base ortonormal $\big[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)\big]$ de $\mathbb{R}^3$. Además, que ese triedro es positivo (positivamente orientado) significa

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{P}(s) \times \mathbf{Q}(s)\,, \quad \text{para cada } s \in I\,.$$

Vamos a expresar la variación de $\big[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)\big]$ respecto de sí mismo, como ya hicimos con el triedro de Frenet para obtener las ecuaciones de Frenet–Serret.

Buscamos, por ejemplo, los coeficientes (funciones de s) de

$$\mathbf{P}'(s) = \underline{??} \cdot \mathbf{P}(s) + \underline{??} \cdot \mathbf{Q}(s) + \underline{??} \cdot \mathbf{R}(s),$$

y lo mismo para $\mathbf{Q}'(s)$ y $\mathbf{R}'(s)$.

Representaremos estas relaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(s) \\ \mathbf{Q}'(s) \\ \mathbf{R}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{R}(s) \end{pmatrix}.$$

Como $\|\mathbf{P}(s)\| \equiv 1$, tenemos que $\mathbf{P}'(s) \cdot \mathbf{P}(s) = 0$. Análogamente para $\mathbf{Q}(s)$ y $\mathbf{R}(s)$. Así que la matriz tiene ceros en la diagonal.

Como $\mathbf{P}(s) \cdot \mathbf{Q}(s) = 0$, se tiene que

$$\mathbf{P}'(s) \cdot \mathbf{Q}(s) = -\mathbf{Q}'(s) \cdot \mathbf{P}(s),$$

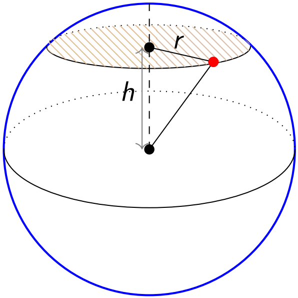
y análogamente con $\mathbf{P}(s) \cdot \mathbf{R}(s) = 0$ y $\mathbf{Q}(s) \cdot \mathbf{R}(s) = 0$.

Así que la matriz es antisimétrica:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(s) \\ \mathbf{Q}'(s) \\ \mathbf{R}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A(s) & B(s) \\ -A(s) & 0 & C(s) \\ -B(s) & -C(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{R}(s) \end{pmatrix}.$$

El caso del triedro de Frenet es especialmente sencillo.

Ejemplo. Paralelo en la esfera unidad. Consideramos la circunferencia que es la intersección de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $z = h$, con $h \in (0, 1)$.



Se tiene que $r = \sqrt{1 - h^2}$.

Cuestión 1. Triedro de Frenet y fórmulas de Frenet–Serret.

Parametrizamos la curva por longitud de arco:

$$\gamma(s) = (r\cos(s/r), r\,\mathrm{sen}(s/r), \sqrt{1-r^2}).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= (-\,\mathrm{sen}(s/r), \cos(s/r), 0) = \mathbf{t}(s),\\ \gamma''(s) &= \underbrace{\frac{1}{r}}_{\kappa}\underbrace{(-\cos(s/r), -\,\mathrm{sen}(s/r), 0)}_{=\mathbf{n}(s)} = \mathbf{t}'(s).\end{aligned}$$

El vector $\mathbf{n}(s)$ es horizontal y apunta hacia el eje vertical OZ.

Mientras que
$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = (0, 0, 1).$$
Como $\mathbf{b}'(s) \equiv 0$, se tiene que $\tau \equiv 0$.

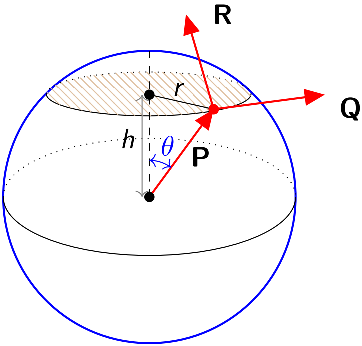
Las fórmulas de Frenet–Serret son:
$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ -1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$
donde $r = \sqrt{1 - h^2}$.

Cuestión 2. Triedro asociado a paralelos y meridianos.

Para $\gamma(s)$ parametrizada por longitud de arco, tomamos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s) &= \gamma(s), \\ \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{t}(s) = \gamma'(s), \\ \mathbf{R}(s) &= \mathbf{P}(s) \times \mathbf{Q}(s). \end{aligned}$$

- $\mathbf{P}(s)$ es el propio vector posición $\gamma(s)$, que es unitario pues la traza de γ está sobre la esfera unidad.
- $\mathbf{Q}(s)$ es el vector tangente a la curva $\gamma(s)$, también unitario (y perpendicular al anterior) por estar γ parametrizada por longitud de arco.
- $\mathbf{R}(s)$ es tangente (unitario) a un meridiano en el sentido del Polo Norte.



El ángulo θ es tal que $\cos\theta = h$. El radio r de la circunferencia es $\operatorname{sen}\theta$. Y $h = \sqrt{1-r^2}$. Así que

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sqrt{1-h^2}}{h}\,.$$

Interesa expresar las derivadas $[\mathbf{P}'(s), \mathbf{Q}'(s), \mathbf{R}'(s)]$ respecto de la base ortonormal $[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)]$.

Alternativa 1 (ejercicio): utilizar la parametrización γ por longitud de arco y las correspondientes expresiones explícitas para $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}(s)$ y $\mathbf{R}(s)$, para obtener la matriz (antisimétrica).

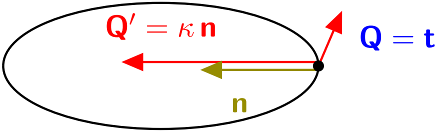
Alternativa 2. Argumento geométrico.

Para empezar, $\mathbf{P}'(s) = \gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = \mathbf{Q}(s)$.

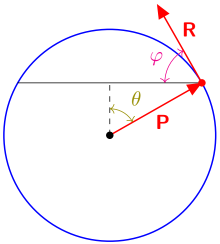
Para la derivada de $\mathbf{Q}$ tenemos

$$\mathbf{Q}'(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa\, \mathbf{n}(s) = \frac{1}{r}\, \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, \mathbf{n}(s).$$

El vector $\mathbf{n}(s)$ es horizontal y apunta hacia el eje vertical OZ.



Queremos expresar $\mathbf{Q}'(s)$ en la base $[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)]$.



- Por supuesto, $\mathbf{Q}'(s) \cdot \mathbf{Q}(s) = 0$.
- Se tiene que (ver dibujo)

$$\mathbf{Q}'(s) \cdot \mathbf{R}(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{R}(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\tan\theta}\,.$$

- Por último,

$$\mathbf{Q}'(s) \cdot \mathbf{P}(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{n}(s) \cdot \gamma(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\cos(\pi/2 + \theta) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -1.$$

No son necesarios más cálculos: por antisimetría, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(s) \\ \mathbf{Q}'(s) \\ \mathbf{R}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{\tan\theta} \\ 0 & -\frac{1}{\tan\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{R}(s) \end{pmatrix}.$$

Recuérdese que $\tan\theta = r/\sqrt{1-r^2}$.

I.4 Curvatura y torsión. Complementos

1. Curvas no parametrizadas por longitud de arco

Tenemos una curva $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^3$, con un parámetro natural t, pero que no es longitud de arco.

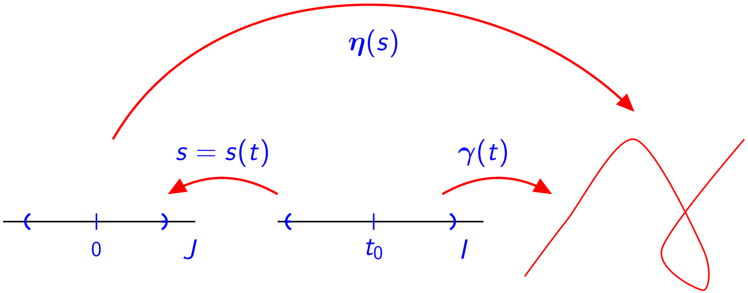
Queremos obtener la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet de $\gamma(t)$.

Ejemplo de referencia: una parábola: $t \mapsto (t, t^2, 0)$.

La parametrización $\boldsymbol{\eta}$ por longitud de arco viene dada, para cada $t \in I$, por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\eta}(s(t)),$$

donde $s = s(t)$ es la longitud de arco de γ desde $\gamma(t_0)$ hasta $\gamma(t)$.



Cuando t recorre el intervalo I, el parámetro s recorre un intervalo J.

En notación general de (re-)parametrización, la función $t \to s(t)$ se denotó por $g(t)$.

Como $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ y κ, τ se expresan y calculan a través de derivadas de $\boldsymbol{\eta}$ y queremos en términos de $\boldsymbol{\gamma}$ y no de $\boldsymbol{\eta}$, aplicaremos la regla de la cadena.

Por abreviar, vamos a denotar

- derivadas respecto de t con '$\dot{}$',
- y derivadas respecto de s con '$\,'\,$'.

Para cada $t \in I$, el parámetro $s(t)$ viene dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\|\, du,$$

de manera que

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|, \quad \text{para } t \in I\,.$$

Tenemos $\gamma(t) = \boldsymbol{\eta}(s(t))$, para $t \in I$. A derivar. Necesitaremos hasta la tercera derivada.

Primera:

$$\dot{\gamma}(t) = \boldsymbol{\eta}'(s)\,\dot{s} = \dot{s}\,\mathbf{t}(s).$$

Segunda:

$$\ddot{\gamma}(t) = \dot{s}^2\,\mathbf{t}'(s) + \ddot{s}\,\mathbf{t}(s) = \kappa(s)\,\dot{s}^2\,\mathbf{n}(s) + \ddot{s}\,\mathbf{t}(s).$$

Tercera:

$$\begin{aligned}\dddot{\gamma}(t) &= \kappa(s)\,\dot{s}^3\,\mathbf{n}'(s) \qquad\quad + \text{combinación lineal de } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{n}\\ &= -\kappa(s)\,\dot{s}^3\,\tau(s)\,\mathbf{b}(s) + \text{combinación lineal de } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Fórmula general para la curvatura

El producto vectorial de $\dot{\gamma}$ y $\ddot{\gamma}$ es

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \kappa(s)\, \dot{s}^3\, \mathbf{b}(s),$$

de donde

$$\boxed{\kappa(s) = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}}$$

Nota: si γ está parametrizada por longitud de arco, entonces $\|\dot{\gamma}\| = 1$ y $\dot{\gamma}$ y $\ddot{\gamma}$ son perpendiculares; y quedaría $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$.

Fórmula general para la torsión

El triple producto nos da:

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} \\
&\qquad = (\kappa(s)\, \dot{s}^3\, \mathbf{b}(s)) \cdot \big(-\kappa(s)\, \dot{s}^3\, \tau(s)\, \mathbf{b}(s) + \text{combinación lineal de } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{n}\big) \\
&\qquad = -\kappa^2\, \dot{s}^6\, \tau = -\tau \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2,
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\boxed{\tau(s) = -\frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}}
$$

En cuanto a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$:

$$\boxed{\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}}$$

$$\boxed{\mathbf{b} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}}$$

$$\boxed{\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| \, \|\dot{\gamma}\|}}$$

En resumen:

Curvatura y torsión

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \qquad\qquad \tau = -\frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}$$

Triedro

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \qquad \mathbf{b} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|} \qquad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$$

Ejemplo. Parábola al pasar por su vértice. Para $M > 0$, la parametrización natural es

$$\gamma(t) = (t, Mt^2, 0)\,, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Sin cálculos: $\tau \equiv 0$ y $\mathbf{b} \equiv (0, 0, 1)$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= (1, 2Mt, 0), &\quad& \text{y por tanto} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + 4M^2t^2},\\
\ddot{\gamma}(t) &= (0, 2M, 0), &&\\
\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) &= (0, 0, 2M), && \text{y por tanto} \quad \|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| = 2M.
\end{aligned}$$

Al pasar por $t = 0$,

$$\dot{\gamma}(0) = (1, 0, 0), \quad \ddot{\gamma}(0) = (0, 2M, 0), \quad \|\dot{\gamma}(0)\| = 1\,.$$

Esto nos da que

$$\mathbf{t} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{n} = (0, 1, 0), \qquad \kappa = 2M.$$

A mayor M, mayor curvatura en el vértice de la parábola.

Para un t general, la curvatura es

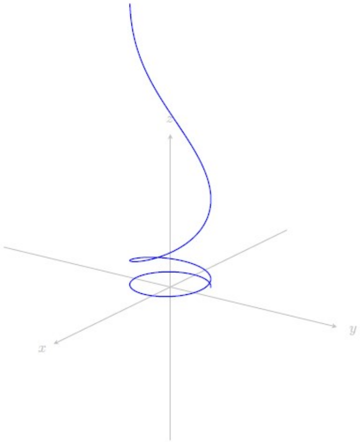
$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\|(0,0,2M)\| = \frac{2M}{(1+4M^2t^2)^{3/2}}\,.$$

La curvatura tiende a 0 cuando $t \to \pm\infty$.

Para los vectores normal y tangente, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+4M^2t^2}}\,(1, 2Mt, 0),\\ \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+4M^2t^2}}\,(-2Mt, 1, 0).\end{aligned}$$

Ejemplo. $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^t)$, para $t \in \mathbb{R}$.



Cálculos:

$$\dot\gamma(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, e^t), \quad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}\,,$$
$$\ddot\gamma(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, e^t)$$

y

$$\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & e^t \\ -\cos t & -sent & e^t \end{vmatrix} = \big(e^t(\cos t+\operatorname{sen} t), e^t(\operatorname{sen} t-\cos t), 1\big),$$

de donde

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1+2e^{2t}}}{(\sqrt{1+e^{2t}})^3}\,.$$

Observa:

- $\kappa \to 0$, cuando $t \to +\infty$,
- $\kappa \to 1$, cuando $t \to -\infty$.

Más cálculos:

$$\dddot{\gamma}(t) = (\operatorname{sen} t, -\cos t, e^t)$$
$$(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \dddot{\gamma}(t) = 2e^t$$
$$\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + 2e^{2t}}$$

de donde

$$\tau = -\frac{2e^t}{1 + 2e^{2t}} \cdot$$

Observa:

- $\tau \to 0$, cuando $t \to +\infty$,
- $\tau \to 0$, cuando $t \to -\infty$

El vector binormal $\mathbf{b}$ en $\gamma(t)$ es

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2e^{2t}}}\left(e^t(\cos t + \operatorname{sen} t), e^t(\operatorname{sen} t - \cos t), 1\right).$$

Cuando $t \to -\infty$, $\mathbf{b}(t) \to (0,0,1)$.

Cuando $t \to +\infty$,

$$\mathbf{b} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - \cos t, 0)$$

que va rotando uniformemente (en t) y no tiende a un vector constante.

Pero $\mathbf{b}'(s) \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Se tiene $\left\|\frac{d\mathbf{b}(s(t))}{dt}\right\| \approx 1$, y $\|\dot{s}(t)\| \approx e^t$.

2. Curvatura de curvas planas

Para curvas planas: podemos darle signo a la curvatura, y darle a ese signo un significado geométrico.

Para un vector $\mathbf{u}$ unitario en $\mathbb{R}^2$, definimos $\mathbf{u}^\perp$ como el vector que se obtiene al girar 90 grados (es decir, $\pi/2$ radianes) al vector $\mathbf{u}$ en sentido positivo.

- Si $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces $\mathbf{u}^\perp = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.
- El vector $\mathbf{u}^\perp$ es perpendicular a $\mathbf{u}$.
- Hay otro vector unitario perpendicular a $\mathbf{u}$, a saber, $-\mathbf{u}^\perp$.
- En $\mathbb{R}^3$ hay infinitos vectores unitarios perpendiculares a un vector unitario; en $\mathbb{R}^2$ sólo dos.

Sea $\gamma(s)$ una curva regular en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco. Denotamos con $\hat{\mathbf{n}}(s)$ a

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s)^{\perp}}$$

- La aplicación $s \to \hat{\mathbf{n}}(s)$ es C^∞.
- Para cada s, se tiene $\mathbf{t}(s) \perp \hat{\mathbf{n}}(s)$.
- Para cada s, se tiene $\mathbf{n}(s) = \pm\,\hat{\mathbf{n}}(s)$.

Como $\mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$, tenemos que $\mathbf{t}'(s) \parallel \hat{\mathbf{n}}(s)$. Escribimos

$$\boxed{\mathbf{t}'(s) = \hat{\kappa}(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)}$$

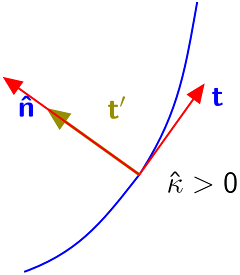
$\hat{\kappa}(s)$ es la curvatura con signo de γ en $\gamma(s)$.

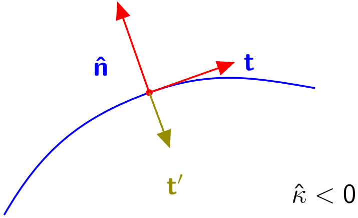
La curvatura con signo sólo requiere que la curva sea regular.

- El coeficiente $\hat{\kappa}(s)$ está unívocamente determinado.
- Se escribe $\hat{\kappa}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)$.
- $|\hat{\kappa}(s)| = \kappa(s)$, porque

$$|\hat{\kappa}(s)| = \|\mathbf{t}'(s)\| = \kappa(s).$$

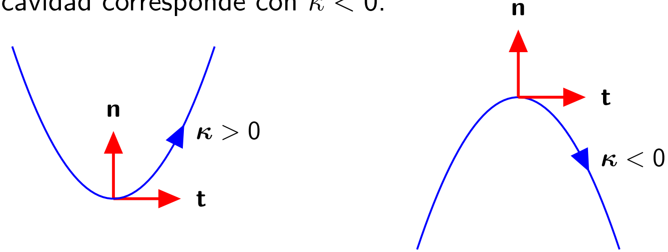
El correspondiente vector binormal sería $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \mathbf{t}^{\perp} = (0, 0, 1)$.





- Si $\hat{\kappa}(s) > 0$, la curva γ está girando hacia la izquierda de la dirección que marca $\mathbf{t}(s)$ en $\gamma(s)$
- Si $\hat{\kappa}(s) < 0$, la curva γ está girando hacia la derecha de la dirección que marca $\mathbf{t}(s)$ en $\gamma(s)$

Para una gráfica en el plano $t \mapsto (t, f(t))$ que, de natural, se recorre de izquierda a derecha (t creciente) la convexidad ($\ddot{f} > 0$) corresponde con $\hat{\kappa} > 0$; la concavidad corresponde con $\hat{\kappa} < 0$.



Ejercicio: Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva plana, no necesariamente parametrizada por longitud de arco. Comprueba que $\hat{\kappa}$ en el punto $\gamma(t)$ de la traza viene dada por

$$\hat{\kappa} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3},$$

Para una gráfica $\gamma(t) = (t, f(t))$, se tiene que $\hat{\kappa} = \dfrac{\ddot{f}}{(1 + \dot{f}^2)^{3/2}}$.

Relación entre curvatura y ángulo con eje OX.

Vamos a describir la relación entre la curvatura $\hat{\kappa}$ y (la variación de) el ángulo que (el vector tangente de) la curva forma con el eje OX.

Usaremos el siguiente resultado:

Lema 4.1

Sea $\mathbf{u}(t)$ una aplicación C^∞ de un intervalo I en $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$, para cada $t \in I$. Entonces existe una función $\theta(t)$ que es C^∞ de I en $\mathbb{R}$ y es tal que

$$\mathbf{u}(t) = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$$

La función $\theta(t)$ es única salvo por adición de múltiplo entero de 2π.

En particular, la derivada $\theta'(s)$ está unívocamente determinada.

Dada una curva $\gamma(s)$ regular plana y parametrizada por longitud de arco, podemos escribir

$$\mathbf{t}(s) = \big(\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)\big),$$

con θ función C^∞. Así que

$$\hat{\mathbf{n}}(s) = (-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s))\,.$$

$\theta(s)$ es el ángulo que forma $\mathbf{t}(s)$ con el eje OX. El ángulo $\theta(s)$ determina la dirección de $\mathbf{t}(s)$.

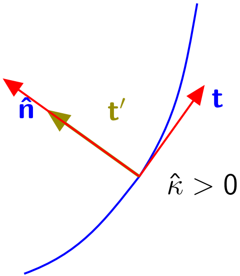
Derivando,

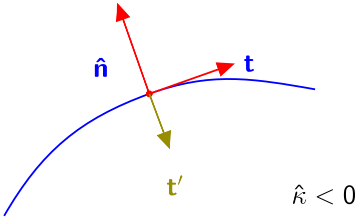
$$\mathbf{t}'(s) = \theta'(s)\big(-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s)\big) = \theta'(s)\,\hat{\mathbf{n}}(s)$$

de manera que

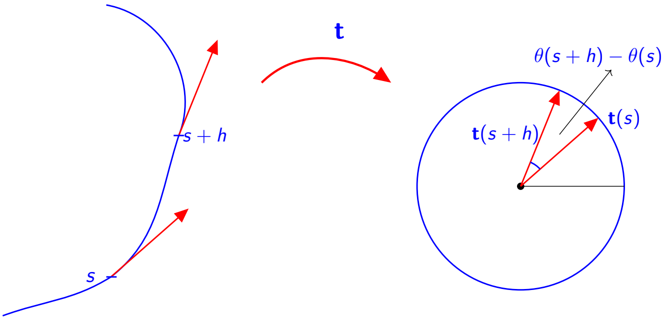
$$\hat{\kappa}(s) = \theta'(s)\,, \quad \text{para todo } s\,.$$

- Si θ crece, nos desplazamos a la izquierda de $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$ apunta en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\kappa} > 0$.
- Si θ decrece, nos desplazamos a la derecha de $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$ apunta en la dirección de $-\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\kappa} < 0$.





Interpretación curvatura plana.



$$\hat{\kappa}(s)=\theta'(s)\approx\frac{\theta(s+h)-\theta(s)}{h}=\frac{\text{longitud de imagen por } \mathbf{t} \text{ de } s \text{ a } s+h}{h}$$

Reconstrucción de curva plana a partir de $\hat{\kappa}$.

Vamos ahora a analizar cómo determinar (salvo traslación y rotación) una curva plana a partir de su función de curvatura $\hat{\kappa}(s)$ con signo.

Sea $\gamma(s)$ una curva plana parametrizada por longitud de arco.

Sea M un movimiento rígido del plano que conserva orientación, es decir, traslación compuesto con rotación.

Consideremos la curva $\bar{\gamma}(s)$ dada por $\bar{\gamma}(s) = M\gamma(s)$, para todo s.

Como M es movimiento rígido, se tiene que $\bar{\gamma}(s)$ está parametrizada por longitud de arco.

Además, $\hat{\bar{\kappa}}(s) = \hat{\kappa}(s)$, para todo s.

Imagine:

Vamos a movernos con rapidez constantemente 1 en el plano.

Partiremos del punto $(0,0)$ en dirección $(1,0)$.

En cada instante de tiempo ($=$ longitud recorrida), tendremos instrucción exacta e instantánea de cómo variar de dirección.

Con estas instrucciones, la trayectoria queda completamente determinada, ¿verdad?

La instrucción instantánea de cambio de dirección es $\theta'(s)$, es decir, $\hat{\kappa}(s)$.

Integrando la función $\theta'(s)$ entre 0 y s nos da la función $\theta(s)$ excepto por la constante de integración. Pero como $\theta(0) = 0$, pues $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$, tenemos

$$\theta(s) = \int_0^s \theta'(u)\,du = \int_0^s \hat{\kappa}(u)\,du.$$

Como $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \mathbf{t}(s) = \big(\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)\big)$, integrando y usando que $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$ se tiene que

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \Big(\int_0^s \cos\theta(u)\,du, \int_0^s \operatorname{sen}\theta(u)\,du\Big).$$

$$\boxed{\hat{\kappa}(s) \Rrightarrow \theta'(s) \Rrightarrow \theta(s) \Rrightarrow \mathbf{t}(s) \Rrightarrow \boldsymbol{\gamma}(s)}$$

En general, si conocemos la función $\hat{\kappa}(s)$, $s \in I$, tendremos que

$$\theta(s) = \int \hat{\kappa}(s)\, ds + c_1,$$

para cierta constante c_1.

Por lo tanto, con la $\theta(s)$ de arriba,

$$\gamma(s) = \Big(\int \cos\theta(s)\, ds, \int \operatorname{sen}\theta(s)\, ds \Big) + (c_2, c_3)$$

para ciertas constantes c_2 y c_3.

Los valores de c_1, c_2 y c_3 quedan determinados, por ejemplo, por los valores de γ y γ' es un cierto $s_0 \in I$.

Ejemplo. Se pide hallar una curva $\gamma(s)$ regular plana y parametrizada por longitud de arco, con $s \in \mathbb{R}$, que tenga curvatura $\hat{\kappa}(s) = 1/R$, para cierto $R > 0$.

Como $\theta'(s) = \hat{\kappa}(s)$, tenemos que

$$\theta(s) = \frac{s}{R} + c_1.$$

Esto nos dice que

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s) = \big(\cos(s/R + c_1), \operatorname{sen}(s/R + c_1)\big).$$

Y por tanto, que

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \Big(\int \cos(s/R + c_1)\, ds, \int \operatorname{sen}(s/R + c_1)\, ds\Big) + (c_2, c_3) \\ &= \big(R \operatorname{sen}(s/R + c_1), -R\cos(s/R + c_1)\big) + (c_2, c_3).\end{aligned}$$

Pongamos que $\gamma(0) = (R, 0)$ y que $\gamma'(0) = (0, 1)$.

De $\gamma'(0) = (0, 1)$ se obtiene que

$$(0,1) = \gamma'(0) = \big(\cos(c_1), \operatorname{sen}(c_1)\big) \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \pi/2.$$

Así que

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \big(R \operatorname{sen}(s/R + \pi/2), -R\cos(s/R + \pi/2)\big) + (c_2, c_3) \\ &= \big(R\cos(s/R), R\sin(s/R)\big) + (c_2, c_3). \end{aligned}$$

Si ha de ser $\gamma(0) = (R, 0)$, entonces $c_2 = c_3 = 0$, y la curva es (la esperada)

$$\gamma(s) = \big(R\cos(s/R), R\sin(s/R)\big).$$

3. Forma canónica local

$\gamma(s)$ es curva birregular parametrizada por longitud de arco.

Analizamos localmente, mediante aproximación de Taylor de tercer orden, la curva γ en un entorno de $0 \in I$.

En $s = 0$ este es más cómodo.

Se tiene

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\,\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\,\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\,\gamma'''(0) + \mathbf{E}(s)\,,$$

donde $\mathbf{E}(s)$ es un vector que depende de s y es tal que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\|\mathbf{E}(s)\|}{s^3} = 0\,.$$

Como

$$
\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \mathbf{t}(0),\\
\gamma''(0) &= \kappa(0)\,\mathbf{n}(0),\\
\gamma'''(0) &= \kappa'(0)\,\mathbf{n}(0) + \kappa(0)\,\mathbf{n}'(0) = \kappa'(0)\,\mathbf{n}(0) - \kappa(0)^2\,\mathbf{t}(0) - \kappa(0)\,\tau(0)\,\mathbf{b}(0),
\end{aligned}
$$

resulta

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) = \gamma(0) &+ \Big(s - \frac{\kappa(0)^2 s^3}{6}\Big)\ \mathbf{t}(0)\\
&+ \Big(\frac{\kappa(0)s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6}\Big)\ \mathbf{n}(0)\\
&+ \Big(-\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6}\Big)\ \mathbf{b}(0)\\
&+ \mathbf{E}(s)
\end{aligned}
$$

Tras un movimiento rígido o con cambio de sistema de referencia, suponemos que

$$\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{t}(0) = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{n}(0) = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{b}(0) = \mathbf{k}.$$

Si $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ y si $\mathbf{E}(s) = (e_x(s), e_y(s), e_z(s))$, entonces

$$\begin{cases} x(s) = s & & -\dfrac{\kappa^2}{6}\, s^3 & + e_x(s) \\ y(s) = & \dfrac{\kappa}{2}\, s^2 & + \dfrac{\kappa'}{6}\, s^3 & + e_y(s) \\ z(s) = & & -\dfrac{\kappa\tau}{6}\, s^3 & + e_z(s) \end{cases}$$

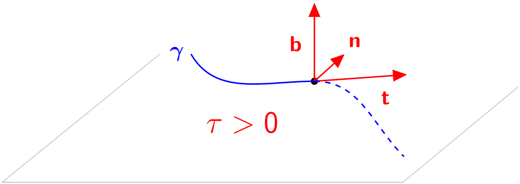
Esta es la **forma canónica local** de $\gamma(s)$ cerca de $s = 0$.

Hemos puesto $\kappa = \kappa(0)$, $\kappa' = \kappa'(0)$ y $\tau = \tau(0)$, para aliviar notación.

Interpretación del signo de τ. La torsión τ sólo aparece en $z(s)$:

- Si $\tau > 0$, para $s > 0$ la curva $\boldsymbol{\gamma}(s)$ tiende a meterse debajo del plano osculador ("debajo" $=$ en dirección opuesta a $\mathbf{b}$).
- Si $\tau < 0$, para $s > 0$ la curva $\boldsymbol{\gamma}(s)$ tiende a pasar por encima del plano osculador ("encima" $=$ en la dirección de $\mathbf{b}$).

Recordamos que hay quien define la torsión τ con signo opuesto al que estamos usando.



Forma canónica local. Curvas planas

Para una curva plana $\gamma : I \in \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco con $0 \in I$ se tiene:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2}\,\hat{\kappa}(0)\,\hat{\mathbf{n}}(0) + \mathbf{F}(s),$$

con

$$\lim_{s\to 0} \frac{\|\mathbf{F}(s)\|}{s^2} = 0\,.$$

Con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ y $\gamma(0) = (0,0)$ y $\mathbf{t}(0) = (1,0)$, $\mathbf{n}(0) = (0,1)$ se tiene

$$\begin{cases} x(s) = s & - \dfrac{\kappa^2}{6}s^3 \quad +o(s^3) \\ y(s) = \quad \dfrac{\kappa}{2}s^2 & \quad +o(s^2) \end{cases}$$

Aproximaciones:

- $s \to \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0)$ es la recta tangente,
- $s \to \gamma(0) + s\,\mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2}\,\hat{\kappa}(0)\,\hat{\mathbf{n}}(0)$ es la parábola osculatriz.

Circunferencia osculatriz:

- centro: $\gamma(0) + \dfrac{1}{\kappa(0)}\,\mathbf{n}(0) =$ centro de curvatura
- radio: $\dfrac{1}{\kappa(0)} =$ radio de curvatura

La circunferencia osculatriz aproxima a la curva γ cerca de $s = 0$:

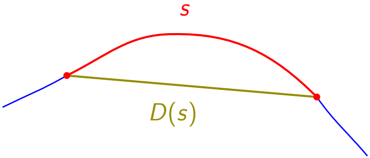
$$\Big\| \gamma(s) - \underbrace{\Big(\gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)} \, \mathbf{n}(0) \Big)}_{\text{centro}} \Big\| = \underbrace{\frac{1}{\kappa(0)}}_{\text{radio}} + o(s^2) \, .$$

A la curva

$$s \to \boldsymbol{\gamma}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \, \mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \frac{1}{\hat{\kappa}(s)} \, \hat{\mathbf{n}}(s),$$

cuya traza consiste de los centros de curvatura, se le llama evoluta de γ.

Curvatura y comparación arco/cuerda en el plano.



$$D(s) = \|\gamma(s_0 + s) - \gamma(s_0)\|$$

- $D(s) \leq [\text{longitud de } \gamma \text{ entre } s_0 \text{ y } s_0 + s] = s\,,$
- $\lim_{s\to 0} \dfrac{D(s)}{s} = \|\gamma'(s_0)\| = 1\ .$

Poniendo $s_0 = 0$, y $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0,0)$ y $\mathbf{t}(0) = (1,0)$, $\mathbf{n}(0) = (0,1)$, se tiene

$$\begin{aligned} D(s)^2 = x(s)^2 + y(s)^2 &= s^2 - 2\,\frac{\kappa^2}{6}\,s^4 + \frac{\kappa^2}{4}\,s^4 + o(s^4) \\ &= s^2\left(1 - \frac{1}{12}\,\kappa^2 s^2 + o(s^2)\right). \end{aligned}$$

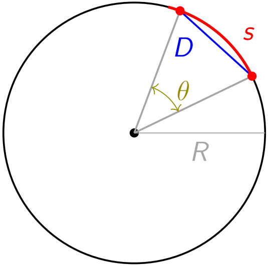
Así que

$$\frac{D(s)^2}{s^2} = 1 - \frac{1}{12}\,\kappa^2 s^2 + o(s^2)\,.$$

Cuando más grande es κ, más pequeño es $D(s)/s$.

Observa: $\dfrac{D(s)}{s} = 1 - \dfrac{1}{24}\,\kappa^2 s^2 + o(s^2)$.

Ejemplo. Circunferencia de radio R:



$$\left.\begin{aligned} s &= \theta R \\ D(s) &= 2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Rrightarrow \quad \begin{aligned} D(s) &= 2R \operatorname{sen} \frac{s}{2R} \\ &= 2R\Big(\frac{s}{2R} - \frac{1}{6}\frac{s^3}{(2R)^3} + o(s^4)\Big) \\ &= s - \frac{1}{24}\frac{s^3}{R^2} + o(s^4) \end{aligned}$$

I.5 Teorema fundamental de la teoría de curvas

El teorema fundamental de la teoría de curvas afirma

- que la curvatura y la torsión de una curva la determinan completamente salvo por la acción de un movimiento rígido (unicidad).
- y que para cualesquiera posibles curvatura y torsión, hay una curva que las tiene como tales (existencia).

Recuerde: ya hemos visto este resultado para curvas en el plano con la curvatura plana (con signo) en lugar de la curvatura y la torsión.

Imagine: parte en tiempo $s = 0$ de un punto del espacio con un sistema de referencia $(\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0))$. Tiene instrucciones para, moviéndose en dirección de $\mathbf{t}(0)$, girar hacia $\mathbf{n}(0)$ en el plano dado por $\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0)$ según indica $\kappa(0)$ y moviéndose en dirección de $\mathbf{b}(0)$ (hacia arriba o hacia abajo) según indica τ (atención a signo). Recalcule la referencia y repita. Así sucesivamente y en continuo.

Instrucciones de movimiento que determinan completamente la trayectoria.

Existencia

Teorema 5.1

Sea I un intervalo abierto y sean $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ dos funciones C^∞ en I tales que $\kappa(s) > 0$, para todo $s \in I$.

Entonces existe una curva birregular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco de manera que

para cada $s \in I$ la curvatura y torsión de γ en $\gamma(s)$ son $\kappa(s)$ y $\tau(s)$.

Apelaremos al siguiente resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea un intervalo I abierto en $\mathbb{R}$. Por comodidad, $0 \in I$.

Para cada $t \in I$, tenemos una matriz $A(t)$ cuadrada de dimensiones $n \times n$:

$$A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{1 \le i,j \le n}$$

de manera que las entradas $a_{i,j}(t)$ son funciones C^∞ en el intervalo I.

Sea $\mathbf{b}_0 = (b_0, \ldots, b_n)^{\mathsf{T}}$ un vector columna $1 \times n$ dado.

Entonces **existen** funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ **únicas** definidas y C^∞ en el intervalo I, tales que el vector columna $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^{\mathsf{T}}$, satisface

- el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{f}'(t) = A(t)\,\mathbf{f}(t)\,, \quad \text{para todo } t \in I$$

- y la condición inicial

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{b}_0.$$

Usaremos este resultado con $n = 9$ y con $n = 6$.

Demostración del Teorema 5.1 de existencia. Por comodidad, suponemos que $0 \in I$.

Sea $[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)]$ solución del sistema de 9 ecuaciones (diferenciales) con 9 (funciones) incógnitas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(s) \\ \mathbf{Q}'(s) \\ \mathbf{R}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{R}(s) \end{pmatrix}$$

con dato inicial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{R}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Llamando

$\mathbf{P}(s) = (P_1(s), P_2(s), P_3(s)),\ \mathbf{Q}(s) = (Q_1(s), Q_2(s), Q_3(s)),\ \mathbf{R}(s) = (R_1(s), R_2(s), R_3(s)),$

el sistema anterior, en todo su esplendor (o casi todo su esplendor, porque obviamos la referencia a s), sería

$$\left(\begin{array}{c} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ \hline Q_1' \\ Q_2' \\ Q_3' \\ \hline R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ \hline 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\right).$$

El vector (¡puesto como fila!) de condiciones iniciales sería

$$(1, 0, 0|0, 1, 0|0, 0, 1).$$

Veamos que $[\mathbf{P}(s), \mathbf{Q}(s), \mathbf{R}(s)]$ es triedro ortonormal positivo para cada $s \in I$.

Consideramos los seis productos escalares

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{P}(s)\cdot\mathbf{Q}(s)\big),\ \big(\mathbf{P}(s)\cdot\mathbf{R}(s)\big),\ \big(\mathbf{Q}(s)\cdot\mathbf{R}(s)\big),\\&\big(\mathbf{P}(s)\cdot\mathbf{P}(s)\big),\ \big(\mathbf{Q}(s)\cdot\mathbf{Q}(s)\big),\ \big(\mathbf{R}(s)\cdot\mathbf{R}(s)\big),\end{aligned}$$

que son funciones C^∞ en I que cumplen el siguiente sistema de seis ecuaciones diferenciales: (obviamos s)

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\big)' &= \kappa\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\big) - \kappa\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\big) - \tau\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\big)\\
\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\big)' &= \kappa\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\big) + \tau\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\big)\\
\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\big)' &= -\kappa\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\big) - \tau\big(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\big) + \tau\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\big)\\
\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\big)' &= 2\kappa\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\big)\\
\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\big)' &= -2\kappa\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\big) - 2\tau\big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\big)\\
\big(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\big)' &= 2\tau\big(\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\big)
\end{aligned}$$

En forma matricial, el sistema anterior se escribe

$$\left(\begin{array}{c}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})' \\ (\mathbf{P}\cdot\mathbf{R})' \\ (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R})' \\ \hline (\mathbf{P}\cdot\mathbf{P})' \\ (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q})' \\ (\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})'\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\tau & 0 & -\kappa & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & \tau & -\tau \\ \hline 2\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\kappa & 0 & -2\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}) \\ (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}) \\ \hline (\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}) \\ (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\end{array}\right).$$

El vector de condiciones iniciales en $s = 0$ sería

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)$$

Los 6 productos escalares y las 6 funciones constantes: 0, 0, 0, 1, 1, 1, satisfacen el mismo sistema, pues:

$$\left(\begin{array}{c} (0)' \\ (0)' \\ (0)' \\ \hline (1)' \\ (1)' \\ (1)' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\tau & 0 & -\kappa & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & \tau & -\tau \\ \hline 2\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\kappa & 0 & -2\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y además toman los mismos valores en $s = 0$.

Por unicidad de solución de este sistema de ecuaciones diferenciales, se tiene que

$$\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\big)\equiv 0,\ \ \big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\big)\equiv 0,\ \ \big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\big)\equiv 0,$$
$$\big(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\big)\equiv 1,\ \ \big(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\big)\equiv 1,\ \ \big(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\big)\equiv 1.$$

Por tanto, la matriz $\big(\mathbf{P}(s)\big|\mathbf{Q}(s)\big|\mathbf{R}(s)\big)$ es una matriz ortogonal para todo $s\in I$.

Como, además, el determinante de esa matriz es una función continua (de hecho, C^∞) y vale ± 1 y en 0 vale 1, se tiene que

$$[\mathbf{P}(s),\mathbf{Q}(s),\mathbf{R}(s)] \text{ es triedro ortonormal positivo.}$$

Sea ahora γ dada por $\gamma'(s) = \mathbf{P}(s)$ y $\gamma(0) = \mathbf{0}$.

Como $\|\mathbf{P}\| \equiv 1$, se tiene que γ está parametrizada por longitud de arco, pues $\mathbf{t}(s) = \mathbf{P}(s)$, para todo $s \in I$.

Como $\gamma'' \equiv \mathbf{P}' \equiv \kappa\, \mathbf{Q}$ y $\|\mathbf{Q}\| \equiv 1$, se tiene que κ es la función curvatura de γ y que $\mathbf{n} \equiv \mathbf{Q}$.

Como $\mathbf{R} \equiv \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, por ser triedro positivo, se tiene que $\mathbf{b} \equiv \mathbf{R}$.

Finalmente, como

$$\mathbf{b}' \equiv \mathbf{R}' \equiv \tau\, \mathbf{Q} \equiv \tau\, \mathbf{n},$$

se tiene que τ es la función torsión de γ. $\square$

Unicidad, salvo movimiento rígido

Teorema 5.2

Sean γ y $\bar{\gamma}$ dos curvas definidas en el intervalo I y parametrizadas por longitud de arco, tales que

$$\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \quad \text{y} \quad \tau(s) = \bar{\tau}(s) \,, \quad \text{para todo } s \in I \,.$$

Entonces existe un movimiento rígido M de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\bar{\gamma}(s) = M\gamma(s) \,, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Y recíprocamente.

La parte recíproca ya se ha visto: los movimientos rígidos preservan longitud de arco, triedro y curvatura y torsión.
Usaremos la parte inversa en la prueba de la parte directa.

Demostración del Teorema 5.2 de unicidad. Suponemos sin pérdida de generalidad y por comodidad que $0 \in I$.

Usando la parte directa, podemos suponer que $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ y que

$$\mathbf{t}(0) = \bar{\mathbf{t}}(0), \quad \mathbf{n}(0) = \bar{\mathbf{n}}(0), \quad \mathbf{b}(0) = \bar{\mathbf{b}}(0).$$

- Tras esta normalización, queremos probar que $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$, para todo $s \in I$.
- Comprobaremos que $\mathbf{t}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s)$, para todo $s \in I$. Con esto bastará, porque integrando y usando que $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ se tendrá $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$, para todo $s \in I$.
- Pero, de hecho, probaremos simultáneamente que

$$\mathbf{t}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s), \quad \mathbf{n}(s) = \bar{\mathbf{n}}(s), \quad \mathbf{b}(s) = \bar{\mathbf{b}}(s)\,, \quad \text{para todo } s \in I\,.$$

Consideramos la siguiente función real h definida en el intervalo I:

$$h(s) = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{t}(s) - \bar{\mathbf{t}}(s)\|^2 + \|\mathbf{n}(s) - \bar{\mathbf{n}}(s)\|^2 + \|\mathbf{b}(s) - \bar{\mathbf{b}}(s)\|^2\right).$$

Queremos ver que $h \equiv 0$. Como $h(0) = 0$, basta ver que $h' \equiv 0$.

Derivando, usando la fórmulas de Frenet–Serret y que $\bar{\kappa} \equiv \kappa$ y $\bar{\tau} \equiv \tau$ se obtiene (obviando el parámetro s para mejor lectura)

$$\begin{aligned} h' &= (\mathbf{t}' - \bar{\mathbf{t}}') \cdot (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) + (\mathbf{n}' - \bar{\mathbf{n}}') \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) + (\mathbf{b}' - \bar{\mathbf{b}}') \cdot (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\ &= \ + \kappa\,(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \\ &\quad\ - \kappa\,(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) - \tau\,(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \\ &\quad\ + \tau\,(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

$\square$

I.6 Desigualdad isoperimétrica. Geometría global de curvas planas.

Dido y la fundación de Carthago

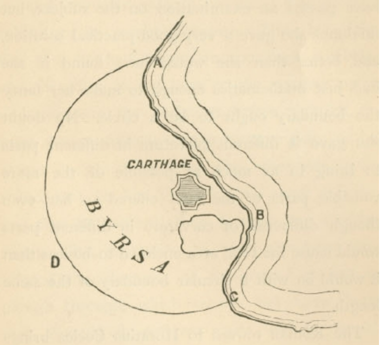
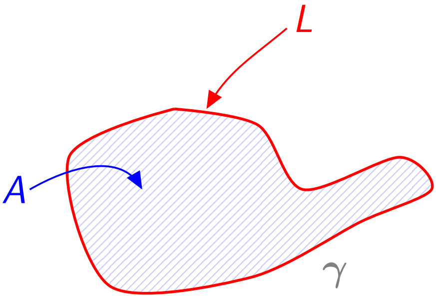


Ilustración extraída de “Isoperimetric problems”, de Sir William Thomson (Lord Kelvin), 1894.

Problema isoperimétrico: de entre todas las figuras planas con idéntico perímetro, ¿cuál es la que encierra mayor área?

El problema isoperimétrico trata del área A que encierra una curva simple cerrada plana γ en el plano de longitud L.

Hay aquí tres conceptos que hemos de precisar.



La desigualdad isoperimétrica

La desigualdad afirma que hay una función $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$A \leq \varphi(L).$$

Es decir, que dada la longitud L de una curva simple cerrada γ, hay una cota superior $\varphi(L)$ para el área A que encierra esa curva.

Una tal función φ viene dada por

$$\varphi(L) = \frac{\pi}{4} L^2 , \quad \text{para cada } L > 0.$$

Razón: Si la curva simple cerrada γ tiene longitud L, entonces γ está contenida en un círculo de radio L, o, mejor, de radio $\ldots$ $L/2$.
De manera que el área encerrada A no excede la de un círculo de radio $L/2$, es decir, $(\pi/4)L^2$.

Queremos no una cota, sino la mejor cota.

La óptima de entre esas funciones φ es la función Φ que viene definida por

$$\Phi(L) = \sup\{A : \text{área encerrada por curva simple cerrada } \gamma \text{ de longitud } L\}\,.$$

El objetivo es hallar la función Φ.

Cota superior para Φ: ya sabemos que $\Phi(L) \leq \dfrac{\pi}{4} L^2$.

Cota inferior para Φ: pongamos que γ es una circunferencia de radio R. En este caso,

$$L = 2\pi R \quad \text{y} \quad A = \pi R^2.$$

Como resulta $A = \dfrac{1}{4\pi} L^2$ se tiene que,

$$\Phi(L) \geq \frac{1}{4\pi} L^2.$$

De manera que

$$\frac{1}{4\pi} L^2 \leq \Phi(L) \leq \frac{\pi}{4} L^2 .$$

Argumento dimensional

Vamos a comprobar que la función Φ tiene que ser $\Phi(x) = Cx^2$, para una cierta constante C por determinar.

Luego nos preocuparemos de obtener la constante C.

Usaremos un argumento de dimensionalidad/cambio de escala.

Una homotecia de razón $r > 0$ lleva la curva γ en la curva $r\gamma$ y el área encerrada y la longitud de la curva se transforman como

$$A \to r^2 A \quad \text{y} \quad L \to rL.$$

Así que

$$r^2 A \leq \Phi(rL)$$

y, por tanto,

$$r^2 \Phi(L) \leq \Phi(rL)$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{r^2}\Phi(rL) \leq \Phi(L)$$

y, por tanto,

$$r^2 \Phi(L) = \Phi(rL).$$

Poniendo $r = 1/L$ se tiene que

$$\Phi(L) = \Phi(1)\, L^2.$$

Desigualdad isoperimétrica

La intuición (Dido) es que para una longitud dada L, el área máxima que se puede encerrar se obtiene con una circunferencia de longitud L, es decir, de radio

$$\frac{L}{2\pi}$$

que encierra un círculo de área $\dfrac{1}{4\pi}L^2$.

La desigualdad isoperimétrica afirma que esa intuición es correcta:

$$A \leq \frac{1}{4\pi}L^2.$$

Como se tiene igualdad en el caso de circunferencias, se tendría que

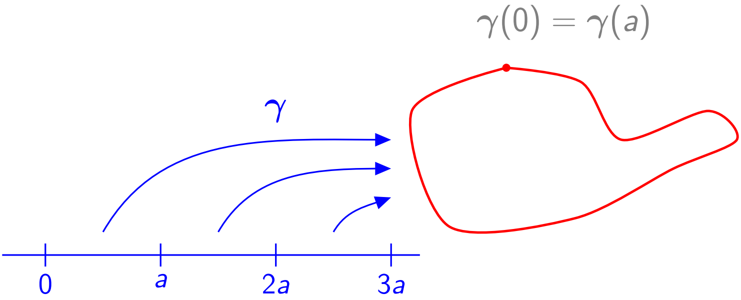
$$\Phi(L) = \frac{1}{4\pi}L^2, \quad \text{para cada longitud } L.$$

¡Conceptos

1. Curva simple cerrada plana.

Una curva simple cerrada γ de periodo $a > 0$ es una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{t_1 - t_2}{a} \in \mathbb{Z}\,.$$



La traza de γ es $\gamma(\mathbb{R}) = \gamma[0, a]$.

Definimos la longitud L de γ por $L = \int_0^a \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

La aplicación γ es inyectiva en el intervalo $[u, u + a)$, sea cual sea u.

Si γ es regular y está parametrizada por longitud de arco, entonces su periodo a es L.

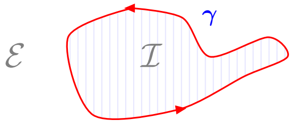
Por ejemplo, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una curva simple cerrada plana parametrizada por longitud de arco con periodo 2π y de longitud 2π.

2. Región encerrada: El teorema de la curva de Jordan.

La traza de una curva simple cerrada plana (vale con continua) γ separa el plano en exactamente dos trozos (componentes conexas):

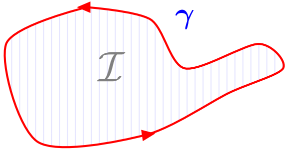
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{traza de } \gamma\} = \mathcal{I} \,\dot{\cup}\, \mathcal{E}.$$

La componente conexa $\mathcal{I}$ (el interior, encerrada por γ) es acotada, y la otra componente $\mathcal{E}$ (el exterior) es no acotada.



Lagos de Wada: 3 abiertos del plano conexos disjuntos dos a dos ¡con la misma frontera!

3. Área encerrada: Fórmula de Green.



La fórmula de Green nos dice que si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, recorrida en sentido positivo, encierra la región $\mathcal{I}$, entonces

$$\iint_{\mathcal{I}} (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_\gamma (P\, dx + Q\, dy).$$

Nos basta aquí el caso en que P, Q son funciones C^∞ de todo $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Recordamos: si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$, entonces

$$\int_\gamma (P\, dx + Q\, dy) = \int_a^b \big(P(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)\big)\, dt.$$

Si tomamos

- $Q(x,y) = x$, $P \equiv 0$, se tiene

$$\text{Área}(\mathcal{I}) = \int_\gamma x\, dy = \int x(t)\, \dot{y}(t)\, dt. \tag{6.1}$$

- $P(x,y) = -y$, $Q \equiv 0$, se tiene

$$\text{Área}(\mathcal{I}) = -\int_\gamma y\, dx = -\int y(t)\, \dot{x}(t)\, dt. \tag{6.2}$$

De las dos expresiones anteriores,

$$\text{Área}(\mathcal{I}) = \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int \big(x(t)\, \dot{y}(t) - y(t)\, \dot{x}(t)\big)\, dt.$$

¡Área aparece como integral sobre curva!

Ejemplo. Elipse

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Como

$$x(t)\,\dot{y}(t) - y(t)\,\dot{x}(t) \equiv ab,$$

se tiene que

$$\text{área encerrada por elipse} = \pi ab.$$

Demostración

Sólo para curvas regulares.

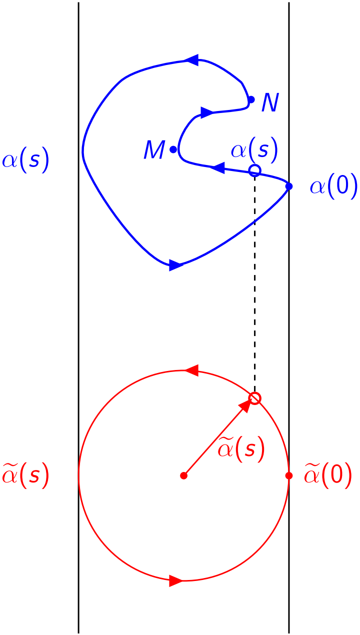
Sea $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ una curva regular simple cerrada plana y parametrizada por longitud de arco, con longitud L y área encerrada A.

Queremos ver que $A \leq \dfrac{1}{4\pi} L^2$. Podemos suponer que α se recorre en sentido positivo.

Tomamos dos líneas verticales tangente a α de manera que α esté contenida en la banda delimitada entre esas dos líneas. Pongamos que la distancia entre esas dos líneas verticales es $2r$.

Tomamos una circunferencia de radio r tangente a las dos líneas verticales.

Podemos suponer que esta circunferencia tiene centro $(0, 0)$.


N
M
$\alpha(s)$
$\alpha(s)$
$\alpha(0)$
$\widetilde{\alpha}(s)$
$\widetilde{\alpha}(s)$
$\widetilde{\alpha}(0)$

Recorremos la circunferencia con la proyección de $\boldsymbol{\alpha}(t)$. Esto da una curva

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)).$$

Se tiene que

- $\widetilde{x}(t) = x(t)$, para todo t.
- En general, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ no está parametrizada por longitud de arco.
- En general, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ no es curva regular. En la proyección de los puntos M y N se tiene que $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'$ se anula.

El área A encerrada por $\boldsymbol{\alpha}$ es, usando (6.1),

$$A = \int_0^L x(s)\, y'(s)\, ds = \int_0^L \widetilde{x}(s)\, y'(s)\, ds\,.$$

Por su parte, el área encerrada por $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ es, usando (6.2),

$$\pi r^2 = -\int_0^L \widetilde{x}'(s)\, \widetilde{y}(s)\, ds = -\int_0^L x'(s)\, \widetilde{y}(s)\, ds\,.$$

Sumando (y obviando s),

$$A + \pi r^2 = \int_0^L \big(\widetilde{x}\, y' - x'\, \widetilde{y}\big)\, ds = \int_0^L (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \cdot (y', -x')\, ds$$

[Usando desigualdad de Cauchy–Schwarz]

$$\leq \int_0^L \sqrt{\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2}\, \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, ds = \int_0^L \|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(s)\|\, \|\boldsymbol{\alpha}'(s)\|\, ds$$

$$= \int_0^L r \cdot 1\, ds = r\, L.$$

Así que

$$A + \pi r^2 \leq rL.$$

La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}\,, \quad \text{para todo } a, b \geq 0\,,$$

que se sigue de que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, nos da que

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} rL,$$

de donde, dividiendo por r y elevando al cuadrado, se concluye

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2\,.$$