

ex5-sols.pdf



pakado



Ecuaciones Diferenciales



2º Grado en Matemáticas



**Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid**

Nombre y Apellidos _____
Grupo _____

Problema 1 Dado el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)e^{x^2(t)-1} - x(t)e^{x(t)-y(t)} = F(x(t), y(t)) \\ y'(t) = x^2(t)y(t) - y(t) = G(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Determinar la naturaleza de los (tres) puntos críticos utilizando el método de la linealización.

Dibujar las trayectorias (en el plano de fase (x, y)) de los sistemas linealizados, y también del sistema completo.

¿ Qué sabes decir sobre la estabilidad de estos puntos críticos, para los sistemas lineales y para el completo ?

Solución. Los puntos críticos son los puntos (x, y) tales que $F(x, y) = G(x, y) = 0$. Es fácil averiguar que los únicos puntos críticos son: $P_0(0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$. La ecuación diferencial de las trayectorias en el plano de fases:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} = \frac{x^2 y - y}{y e^{x^2-1} - x e^{x-y}}$$

las soluciones representan, en el plano de fases (x, y) , las trayectorias del sistema “lejos” de los puntos críticos. Se puede integrar lejos de los puntos críticos? es exacta? (ejercicio de la parte 2).

Antes que continuar es práctico calcular unas derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \partial_x F(x, y) = 2xye^{x^2-1} - (x+1)e^{x-y}, & \partial_x F(P_0) &= -1, & \partial_x F(P_1) &= 0, & \partial_x F(P_2) &= 2, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \partial_y F(x, y) = e^{x^2-1} + xe^{x-y}, & \partial_y F(P_0) &= e^{-1}, & \partial_y F(P_1) &= 2, & \partial_y F(P_2) &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) &= \partial_x G(x, y) = 2xy, & \partial_x G(P_0) &= 0, & \partial_x G(P_1) &= 2, & \partial_x G(P_2) &= 2, \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= \partial_y G(x, y) = x^2 - 1, & \partial_y G(P_0) &= -1, & \partial_y G(P_1) &= 0, & \partial_y G(P_2) &= 0, \end{aligned}$$

Para entender lo que pasa en los puntos críticos, se tiene que linealizar al rededor de ellos: pongo $P_i = (x_i, y_i)$ y

$$\begin{cases} x' = F(x(t), y(t)) = \partial_x F(P_i)(x - x_i) + \partial_y F(P_i)(y - y_i) + Err[F](x, y) \\ y' = G(x(t), y(t)) = \partial_x G(P_i)(x - x_i) + \partial_y G(P_i)(y - y_i) + Err[G](x, y) \end{cases}$$

donde he definido $Err[H](x, y) := F(x, y) - \partial_x H(P_i)(x - x_i) - \partial_y H(P_i)(y - y_i)$.

La traslación $(x - x_i) \mapsto X$ y $(y - y_i) \mapsto Y$ nos da el sistema lineal:

$$\begin{cases} X'(t) = \partial_x F(P_i)X + \partial_y F(P_i)Y \\ Y'(t) = \partial_x G(P_i)X + \partial_y G(P_i)Y \end{cases}$$

cuyo comportamiento alrededor de $(X, Y) = (0, 0)$, nos dice el comportamiento del sistema no-lineal al rededor del punto crítico P_i , siempre cuando los errores son pequeños, es decir cuando

$$\frac{Err(F)(x, y)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \frac{Err(G)(x, y)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \rightarrow 0, \quad \text{para } (x, y) \rightarrow (x_i, y_i)$$

Dado que las funciones F y G son regulares (al menos de clase C^2), entonces el desarrollo de Taylor de orden 1 (es decir, la linealización) tiene un error pequeño:

$$Err[H](x, y) = o\left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}\right) \quad \text{para } H = F, G.$$

En el caso de P_0 es fácil averiguarlo directamente:

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} \left| \frac{Err(F)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{y e^{x^2-1} - x e^{x-y} + x - e^{-1}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x(e^x-1) + e^{-1}(e^{x^2}-1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + e^{-2}x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+e^{-2}y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

dado que $(e^x-1) \sim x$ y $(e^{x^2}-1) \sim e^{-1}x^2$ cuando $x \rightarrow 0$. El error de G es analogo. En los otros puntos hay que tener cuidado si se quiere hacerlo en las variables $(X,Y) = (x-x_i, y-y_i) \rightarrow (0,0)$.

Ahora analizamos separadamente los sistemas lineales correspondientes a P_0, P_1, P_2 .

- $P_0 = (0,0)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = -X + e^{-1}Y \\ Y' = -Y \end{cases} \quad \text{un autovalor doble } \lambda = -1 \text{ y un solo autovector } v_1 = (1,0)$$

Estamos en el caso “Jordan”, y la solución general es dada con la matriz exponencial $Z(t) = e^{At}Z(0)$, donde $\vec{Z} = (X(t), Y(t))$ y A es la matriz del sistema:

$$Z(t) = \exp \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-1}t \right] Z(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-1}te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Z(0)$$

la solución general se puede escribir también como

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{-1}te^{-t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-1}t \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

con $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (e^{-1}t, 1)$. Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un nodo impropio estable (lineas rectas que se van hacia al origen) y es un atractor para el sistema lineal.

Usando el Teorema de linealización, cuyas hipótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico no lineal $P_0 = (0,0)$ o bien es un *nodo impropio estable* o bien *nodo estable* para el sistema no lineal, de todas formas se queda un atractor. (Dibujar el lineal y las dos posibilidades del no lineal)

- $P_1 = (1,1)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = 2Y \\ Y' = 2X \end{cases} \quad \text{dos autovalores } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \text{ y dos autovectores } v_1 = (1,1) \quad v_2 = (1,-1)$$

La solución general es dada por

$$Z(t) = c_1 e^{2t}v_1 + c_2 e^{-2t}v_2$$

Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un *punto de silla* con ejes principales $v_1 = (1,1)$ (repulsor) y $v_2 = (1,-1)$ (atractor) y en general no es ni atractor ni repulsor, por lo tanto es inestable. Las unicas soluciones que lo alcanzarán son las que corresponden a $c_1 = 0$, es decir $Z(t) = c_2 e^{-2t}v_2$.

Usando el Teorema de linealización, cuyas hipótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico no lineal $P_0 = (1,1)$ es un punto de silla para el sistema no lineal, por lo tanto no es ni atractor ni repulsor, tambien para el sistema no-lineal. (Dibujar el lineal y el no lineal)

- $P_2 = (-1,-1)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 2X \end{cases} \quad \text{dos autovalores } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \text{ y dos autovectores } v_1 = (0,1) \quad v_2 = (1,1)$$

La solución general es dada por

$$Z(t) = c_1 e^{0t}v_1 + c_2 e^{2t}v_2 = c_1 v_1 + c_2 e^{2t}v_2$$

Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un *nodo impropio inestable*, dado que repele a lo largo de cualquier dirección menos v_1 . De hecho cuando $c_2 = 0$ la solución es constante.

Usando el Teorema de linealización, cuyas hipótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico no lineal $P_0 = (-1,-1)$ o bien es un *nodo inestable* o bien en un *foco inestable* para el sistema no lineal, de todas formas se queda un repulsor, y repele tambien a lo largo de la dirección $v_1 = (0,1)$. (Dibujar el lineal y las dos posibilidades del no lineal)

- Dibujar el sistema no lineal global: ojo que sea coherente el dibujo.