

6 Geometría extrínseca de superficies

En este capítulo describimos algunos resultados geométricos que involucran especialmente la segunda forma fundamental. Enfatizamos los resultados *bidimensionales*, es decir que no pueden deducirse mirando sólo una curva contenida en la superficie, sino que requieren la consideración de un trozo “con área” de la superficie.

6.1 Puntos umbilicales

Recordemos que un punto de una superficie es umbilical si y sólo si en él se tiene $k_1 = k_2$. Podemos hablar, pues, de la *curvatura principal* (en singular) de la superficie en un tal punto: es el único escalar h tal que $II = hI$ en ese punto.

En estos puntos, y solamente en estos puntos, la superficie tiene una *esfera oscultriz*: una esfera tangente a la superficie en el punto y con las mismas curvaturas normales que la superficie en ese punto. Si la curvatura principal es $k_0 \neq 0$, entonces la esfera oscultriz tiene radio $1/|k_0|$. Si el punto es plano (con curvatura principal nula), entonces la esfera oscultriz es el plano tangente afín (esfera de radio infinito).

Lema 86. *Si una superficie conexa está toda hecha de puntos umbilicales, entonces la curvatura principal es constante.*

Demostración. Sea $\Phi(u, v)$ una parametrización de la superficie. Existe una función $h(u, v)$ que nos da el valor de la curvatura principal en cada punto. El endomorfismo de Weingarten es en cada punto igual a $-h \cdot \text{id}$, es decir que para todo $\mathbf{p} \in S$ y todo vector tangente $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ se tiene

$$(dN)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -h(\mathbf{p}) \mathbf{v}.$$

Aplicando esto, en todos los puntos de la superficie, a los vectores Φ_u, Φ_v , obtenemos las identidades:

$$N_u \equiv -h\Phi_u, \quad N_v \equiv -h\Phi_v.$$

Derivando la primera identidad respecto de v y la segunda identidad respecto de u , obtenemos:

$$\begin{aligned} N_{uv} &\equiv -h_v\Phi_u - h\Phi_{uv}, \\ N_{vu} &\equiv -h_u\Phi_v - h\Phi_{vu}. \end{aligned}$$

Ahora restamos estas dos identidades, teniendo en cuenta que $N_{uv} \equiv N_{vu}$ y que $\Phi_{uv} \equiv \Phi_{vu}$. Con ello llegamos a:

$$-h_v\Phi_u + h_u\Phi_v \equiv \mathbf{0}.$$

Pero Φ_u, Φ_v son linealmente independientes en cada punto, luego esta última identidad equivale a $h_u \equiv h_v \equiv 0$ y, como la superficie es conexa, el escalar h es constante. \square

Comentario. La conclusión del lema 86 es falsa si el conjunto de puntos umbilicales es solamente unidimensional: la curvatura principal puede ser variable a lo largo de una línea aislada de puntos umbilicales. Por lo tanto, *cualquier demostración que se dé del lema 86 ha de hacer uso de las dos dimensiones de la superficie*. En la demostración precedente eso se manifiesta en que hemos derivado en dos direcciones: en la de la variable u y en la de la variable v .

Teorema 87. *Sea S una superficie conexa con todos sus puntos umbilicales. Si la curvatura principal es la constante 0, la superficie es un trozo de plano. Si la curvatura principal es una constante k_0 no nula, entonces S está contenida en una esfera de radio $1/|k_0|$.*

Demostración. Supongamos primero que la curvatura principal es idénticamente nula. Tomamos una parametrización $\Phi(u, v)$ y tenemos $N_u \equiv N_v \equiv \mathbf{0}$, luego hay un vector unitario constante \mathbf{u}_0 con $N \equiv \mathbf{u}_0$. Entonces las identidades $N \cdot \Phi_u \equiv N \cdot \Phi_v \equiv 0$ se convierten en

$$0 \equiv \mathbf{u}_0 \cdot \Phi_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{u}_0 \cdot \Phi), \quad 0 \equiv \mathbf{u}_0 \cdot \Phi_v \equiv \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{u}_0 \cdot \Phi).$$

Por lo tanto existe una constante c tal que $\mathbf{u}_0 \cdot \Phi(u, v) \equiv c$, y la superficie está contenida en el plano afín $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x} = c\}$.

Supongamos ahora que la curvatura principal es una constante no nula k_0 . Antes de tratar la cuestión para superficies, la consideramos para curvas planas: tenemos una curva plana de curvatura escalar constante k_0 y queremos ver que dicha curva está contenida en una circunferencia. Una manera válida de demostrarlo es calcular la parametrización de la evoluta y comprobar que es constante, luego el centro de curvatura es un punto constante \mathbf{p}_0 y la curva está contenida en la circunferencia de centro \mathbf{p}_0 y radio $1/|k_0|$. Imitemos ese argumento con nuestra superficie. El centro de la esfera osculatriz correspondiente al punto $\Phi(u, v)$ es el punto $\mathbf{c}(u, v) = \Phi(u, v) + \frac{1}{k_0}N(u, v)$, y se calcula:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{c}(u, v) \equiv \Phi_u + \frac{1}{k_0} N_u \equiv \Phi_u + \frac{1}{k_0} (-k_0) \Phi_u \equiv \mathbf{0},$$

y análogamente $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{c}(u, v) \equiv \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{c}(u, v)$ es un punto constante y hemos terminado. \square

6.2 Líneas de curvatura

Definición 88. Dada una superficie S , una curva regular $\Gamma \subset S$ es una **línea de curvatura de S** si cada recta tangente a Γ es una dirección principal de curvatura de S en el punto correspondiente.

Esto quiere decir que, si $\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$ es una parametrización de Γ , entonces para cada valor t el vector $\alpha'(t) = u' \Phi_u + v' \Phi_v$ define una dirección principal de curvatura de S en el punto $\alpha(t)$. De manera equivalente, para cada t la velocidad $\alpha'(t)$ es autovector del operador de forma (o endomorfismo de Weingarten) en el punto $\alpha(t)$, es decir que:

$$\frac{d}{dt} N(\alpha(t)) \equiv \text{escalar} \cdot \alpha'(t).$$

Por las fórmulas vistas en el apartado 5.8, esas condiciones equivalen a la siguiente EDO

$$\begin{vmatrix} E(u, v) u' + F(u, v) v' & e(u, v) u' + f(u, v) v' \\ F(u, v) u' + G(u, v) v' & f(u, v) u' + g(u, v) v' \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

puediéndose reemplazar e, f, g por $\ell e, \ell f, \ell g$, respectivamente.

Si S es un trozo de superficie sin puntos umbilicales, las líneas de curvatura permiten darle coordenadas curvilíneas (\tilde{u}, \tilde{v}) que diagonalizan las dos formas fundamentales *en todos los puntos a la vez*, es decir que se consigue:

$$I \equiv \tilde{E}(d\tilde{u})^2 + \tilde{G}(d\tilde{v})^2, \quad II \equiv \tilde{e}(d\tilde{u})^2 + \tilde{g}(d\tilde{v})^2.$$

A unas coordenadas curvilíneas con esta propiedad, o sea tales que $\tilde{F} \equiv \tilde{f} \equiv 0$, se las llama **coordenadas principales** porque si $\Psi(\tilde{u}, \tilde{v})$ es la parametrización correspondiente entonces las direcciones principales de curvatura son las de los vectores $\Psi_{\tilde{u}}, \Psi_{\tilde{v}}$.

Estamos suponiendo que la superficie carece de puntos umbilicales. Si en (22) despejamos u', v' en función de u, v , resultan para cada valor (u, v) dos posibles direcciones tangentes. Geométricamente esto significa que (22) da lugar a *dos campos de direcciones* sobre la superficie (ver apartado 4.2), campos formados por las direcciones principales de curvatura en cada punto y por lo tanto ortogonales entre sí.

Entonces tenemos dos familias de líneas de curvatura: las curvas que pasan por cada punto con dirección tangente de máxima curvatura normal y las que pasan por cada punto con dirección de mínima curvatura normal.

Estas dos familias se calculan como soluciones de (22) y una vez halladas las describimos como curvas de nivel: $\tilde{u}(u, v) = \text{cte}_1$ para una familia y $\tilde{v}(u, v) = \text{cte}_2$ para la otra familia. Ahora pasamos a considerar las funciones $(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$ como nuevas coordenadas curvilíneas, en las cuales las líneas coordenadas son, por construcción, las líneas de curvatura de la superficie.

Si $\Psi(\tilde{u}, \tilde{v})$ es la parametrización que corresponde a estas nuevas coordenadas, entonces el campo $\Psi_{\tilde{u}}$ es tangente a las líneas $\{\tilde{v} = \text{cte}_2\}$ y el campo $\Psi_{\tilde{v}}$ es tangente a las $\{\tilde{u} = \text{cte}_1\}$. Luego Las direcciones

de $\Psi_{\tilde{u}}, \Psi_{\tilde{v}}$ son las direcciones principales de curvatura en cada punto de la superficie. Luego, por lo explicado en el apartado 5.5, los campos $\Psi_{\tilde{u}}, \Psi_{\tilde{v}}$ son ortogonales respecto de I y también respecto de II , lo cual equivale a tener $I \equiv \tilde{E}(d\tilde{u})^2 + \tilde{G}(d\tilde{v})^2$ y también $II \equiv \tilde{e}(d\tilde{u})^2 + \tilde{g}(d\tilde{v})^2$, quedando las dos formas fundamentales diagonalizadas en todos los puntos a la vez.

Como primer ejemplo, en una superficie de revolución las líneas de curvatura son los paralelos y los meridianos. Correspondiendo a eso, las formas fundamentales primera y segunda son diagonales en las coordenadas curvilíneas asociadas a la *parametrización de revolución*.

Un ejemplo no trivial lo proporciona la silla $\{z = xy\}$. Para $\Phi(u, v) \equiv (u, v, uv)$ calculamos:

$$\begin{aligned}\ell N &\equiv \Phi_u \times \Phi_v \equiv (-v, -u, 1), \\ I &\equiv (1+v^2)(du)^2 + 2uvdudv + (1+u^2)(dv)^2, \\ \ell II &\equiv 2dudv.\end{aligned}$$

Como $[I] = \begin{bmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{bmatrix}$ y $[\ell II] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, la condición que define las líneas de curvatura es:

$$0 = \begin{vmatrix} (1+v^2)u' + uvv' & 0u' + 1v' \\ uvu' + (1+u^2)v' & 1u' + 0v' \end{vmatrix} \equiv (1+v^2)u'^2 - (1+u^2)v'^2,$$

y se desdobla en las dos EDOs siguientes:

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \pm \frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} = 0.$$

Las soluciones se describen como curvas de nivel: $\text{sh}^{-1}u \pm \text{sh}^{-1}v = \text{cte}$, con lo cual las coordenadas principales son:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &\equiv \text{sh}^{-1}u + \text{sh}^{-1}v, \\ \tilde{v} &\equiv \text{sh}^{-1}u - \text{sh}^{-1}v.\end{aligned}$$

El difeomorfismo inverso es:

$$(u, v) \equiv \left(\text{sh} \frac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2}, \text{sh} \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2} \right),$$

y la parametrización que diagonaliza las dos formas fundamentales es:

$$\Psi(\tilde{u}, \tilde{v}) \equiv \left(\text{sh} \frac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2}, \text{sh} \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2}, \text{sh} \frac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2} \cdot \text{sh} \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2} \right).$$

Advertencia. Es poco frecuente que se puedan hallar las líneas de curvatura y las coordenadas principales en términos elementales, como hemos hecho en el ejemplo. Lo importante es saber que estas coordenadas *existen*, al menos localmente, fuera de los puntos umbilicales.

6.3 Líneas asintóticas

En un punto hiperbólico la forma cuadrática $II(\cdot) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ es indefinida. Sus curvas de nivel son **hipérbolas** situadas en el plano $T_p S$ y compartiendo el mismo par de asíntotas, que es el par de rectas definido por $\{\mathbf{v} \in T_p S : II(\mathbf{v}) = 0\}$. Estas dos rectas son las **direcciones asintóticas de S en el punto p** . Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortonormal de vectores principales, entonces $II(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) \equiv k_1 a^2 + k_2 b^2$ y vemos que los ángulos entre las dos direcciones asintóticas dependen de la razón $|k_1/k_2|$. Luego esos ángulos pueden variar de un punto a otro en la superficie, pero sus bisectrices son siempre las direcciones principales de curvatura.

En un punto hiperbólico, las direcciones asintóticas se caracterizan por tener curvatura normal nula. Generalizamos esto a puntos no necesariamente hiperbólicos, diciendo que una curva α en S es una **línea asintótica** en la superficie S si tiene curvatura normal idénticamente nula. La EDO que define dichas líneas es la siguiente:

$$e(u, v)u'^2 + 2f(u, v)u'v' + g(u, v)v'^2 = 0.$$

En una parte de la superficie formada por puntos hiperbólicos, las direcciones asintóticas definen dos campos de direcciones y sus líneas integrales (las líneas asintóticas) forman por lo tanto dos familias. En una parte de la superficie formada por puntos parabólicos, las líneas asintóticas sólo forman una familia que coincide con la de las líneas de curvatura correspondientes a la curvatura principal nula. En una zona de puntos elípticos no hay ninguna línea asintótica.

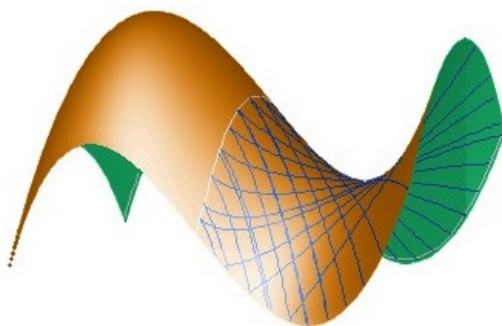
La EDO de las líneas asintóticas no siempre se puede resolver elementalmente, como pasaba con las líneas de curvatura.

Por el mismo razonamiento que en el apartado 6.2, si estamos en una parte de la superficie formada por puntos hiperbólicos y describimos las dos familias de líneas asintóticas como conjuntos de nivel $\tilde{u}(u, v) = \text{cte}_1$ y $\tilde{v}(u, v) = \text{cte}_2$ entonces (\tilde{u}, \tilde{v}) son coordenadas curvilíneas tales que $II \equiv 2\tilde{f}d\tilde{u}d\tilde{v}$, y se las llama **coordenadas asintóticas**. En general, unas coordenadas curvilíneas (u, v) son asintóticas si tienen $e \equiv g \equiv 0$. Insistimos en que estas coordenadas sólo existen, localmente, en la zona de puntos hiperbólicos de la superficie.

Una propiedad curiosa es que si (u, v) son coordenadas asintóticas entonces la ecuación de las líneas de curvatura carece del término en $u'v'$ y queda así: $(\dots)u'^2 + (\dots)v'^2 = 0$, tal como hemos observado para $\Phi(u, v) \equiv (u, v, uv)$ que parametriza la silla.

Como primer ejemplo, cualquier recta que esté contenida en la superficie es asintótica. En alguna ocasión esto puede utilizarse para detectar las rectas contenidas en la superficie.

Como segundo ejemplo, las líneas asintóticas de la superficie $S = \{z = (x^3/3) - x - y^2\}$ pueden calcularse elementalmente. Se comprueba que cada línea asintótica termina en la curva de puntos parabólicos $\Gamma = S \cap \{x = 0\}$ y forma un ángulo con Γ que varía de un punto de Γ a otro. Por lo tanto Γ no es línea de curvatura, pues si lo fuera con curvatura principal nula las líneas asintóticas terminarían tangentes a ella, y si lo fuera con la otra curvatura principal entonces las líneas asintóticas terminarían ortogonales a ella.



6.4 Puntos parabólicos

Acabamos de ver al final del apartado 6.3 que una línea de puntos parabólicos puede no ser línea de curvatura. Nos interesa un caso especial: que sí lo sea, y con curvatura normal nula.

Lema 89. *Una curva $\Gamma \subset S$ es una línea de curvatura correspondiente a curvatura principal nula si y sólo si es una **cara de la superficie**: hay un plano afín tangente a S en todos los puntos de Γ .*

Demostración. Sean $\alpha(t)$ una parametrización de Γ y N una normal unitaria para S . La condición que α debe cumplir es:

$$0 \equiv 0 \cdot \alpha'(t) \equiv (dN)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \equiv \frac{d}{dt}N_{\alpha(t)},$$

claramente equivalente a que N sea un vector unitario constante \mathbf{u}_0 a lo largo de Γ . Si elegimos un punto cualquiera $\mathbf{p}_0 \in \Gamma$, se tiene $N|_{\Gamma} \equiv \mathbf{u}_0$ si y sólo si el plano afín $\{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = 0\}$ contiene la curva Γ y es tangente a S en todo punto de ella. \square

Un ejemplo de cara de una superficie es el paralelo más bajo de un **toro**, o sea la curva sobre la cual el toro se apoya si lo dejamos en una mesa.

Teorema 90. Sea S una superficie toda de puntos parabólicos. Entonces cada línea de curvatura correspondiente a la curvatura principal nula es rectilínea y S es una **superficie reglada**.

Este es también un enunciado bidimensional (como el lema 86), ya que una línea aislada de curvatura principal nula puede no ser recta (como por ejemplo sucede en el toro).

Demostración del teorema 90. Al ser todos los puntos de S parabólicos, en particular ninguno es umbilical y localmente S tiene coordenadas principales (u, v) . Supongamos que las $\{v = \text{cte}\}$ son las de curvatura normal nula. Para cada valor v_0 la línea $\{v = v_0\}$ es una cara de la superficie y hay un plano afín P_{v_0} tangente a S a lo largo de esa línea. La superficie es la **envolvente** de la familia uniparamétrica $\{P_v\}$ de planos afines. La demostración se completa con el siguiente resultado

Proposición 91. Si $\{P_v\}$ es una familia uniparamétrica de planos afines en \mathbb{R}^3 , cada plano P_{v_0} toca a la envolvente de la familia en una recta afín.

Para probar la proposición elegimos para cada v un punto $\alpha(v) \in P_v$ y una base $\{\mathbf{v}_1(v), \mathbf{v}_2(v)\}$ de \vec{P}_v ; entonces $(\lambda, \mu) \mapsto \alpha(v) + \lambda \mathbf{v}_1(v) + \mu \mathbf{v}_2(v)$ es una parametrización de P_v . Estas parametrizaciones se juntan en la función de tres variables $\psi(v, \lambda, \mu) \equiv \alpha(v) + \lambda \mathbf{v}_1(v) + \mu \mathbf{v}_2(v)$ y la envolvente es el conjunto de los valores singulares de ψ . Calculamos:

$$\psi_v = \alpha'(v) + \lambda \mathbf{v}'_1(v) + \mu \mathbf{v}'_2(v), \quad \psi_\lambda = \mathbf{v}_1(v), \quad \psi_\mu = \mathbf{v}_2(v),$$

definimos las funciones escalares:

$$\begin{aligned} h_0(v) &= \det[\alpha'(v) | \mathbf{v}_1(v) | \mathbf{v}_2(v)], \\ h_1(v) &= \det[\mathbf{v}'_1(v) | \mathbf{v}_1(v) | \mathbf{v}_2(v)], \\ h_2(v) &= \det[\mathbf{v}'_2(v) | \mathbf{v}_1(v) | \mathbf{v}_2(v)], \end{aligned}$$

y tenemos la siguiente ecuación para los puntos singulares de ψ :

$$0 = \det[\psi_v | \psi_\lambda | \psi_\mu] \equiv h_0(v) + \lambda h_1(v) + \mu h_2(v).$$

Vemos que para cada valor v_0 los puntos singulares (v, λ, μ) de ψ con $v = v_0$ forman una recta afín en $\mathbb{R}^3_{v\lambda\mu}$ cuya imagen por ψ es otra recta afín en \mathbb{R}^3_{xyz} y es donde la envolvente toca al plano P_{v_0} . Esto completa la prueba de la proposición y del teorema. \square

Atención: las superficies regladas no suelen estar hechas de puntos parabólicos. Por ejemplo la silla $\{z = xy\}$ tiene solamente puntos hiperbólicos. A lo largo de cada regla de la silla, el plano tangente varía y ninguna regla es una cara de la silla.

6.5 Las ecuaciones de compatibilidad

Empezamos con la pregunta:

Las formas fundamentales primera y segunda ¿se determinan la una a la otra?

La respuesta es: no del todo. Por ejemplo, consideremos la **superficie tangencial**:

$$\Phi(u, v) \equiv \alpha(u) + v \mathbf{t}_\alpha(u), \quad v > 0,$$

donde $\alpha(u)$ es una curva birregular espacial, con u parámetro longitud de arco. Optando por la elección $N(u, v) \equiv \mathbf{b}_\alpha(u)$ de normal unitaria, calculamos:

$$I_\Phi \equiv (1 + v^2 k^2) (du)^2 + 2 du dv + (dv)^2, \quad II_\Phi \equiv v k \tau (du)^2.$$

Si tomamos dos curvas espaciales con la misma k pero distintas τ , obtenemos dos parametrizaciones Φ, Ψ con $I_\Phi \equiv I_\Psi$ pero $II_\Phi \neq II_\Psi$, luego I no determina totalmente a II .

Si tomamos dos curvas espaciales con el mismo producto $k\tau$ pero distintas k , obtenemos dos parametrizaciones con la misma II pero distintas I , luego tampoco II determina a I del todo.

Se cumple algo más sutil:

Las dos formas fundamentales ponen muchas limitaciones la una sobre la otra.

Dada una parametrización regular $\Phi(u, v)$, al menos de clase \mathcal{C}^3 , la correspondiente séxtupla E, F, G, e, f, g de funciones de (u, v) satisface tres EDPs que se llaman **ecuaciones de compatibilidad**. Si cambiamos la normal unitaria de la superficie, la nueva séxtupla es $E, F, G, -e, -f, -g$ y también cumple la tres ecuaciones.

El recíproco fue demostrado por el matemático belga Pierre Ossian Bonnet alrededor de 1860.

Teorema 92. (O. Bonnet). Sean E, F, G, e, f, g seis funciones definidas en un mismo dominio $U \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$, con la matriz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ definida positiva en todo punto de U . Si estas seis funciones satisfacen las tres ecuaciones de compatibilidad, entonces existe una parametrización regular $\Phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que realiza las dos ternas E, F, G y $\pm(e, f, g)$ como coeficientes de sus dos formas fundamentales. Cualquier otra parametrización regular $\Psi(u, v)$ con la misma séxtupla es $\Psi(u, v) \equiv \mathbf{c} + \Phi(u, v) \mathbf{M}$, con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{M} \in \text{O}(3)$ constantes.

También se le llama **teorema fundamental de las superficies en el espacio**, porque la superficie queda determinada salvo movimiento Euclídeo de modo análogo a como se determina la forma de una curva plana en el teorema 28 del apartado 2.3.

Dos ecuaciones de compatibilidad salen de la identidad $N_{uv} \equiv N_{vu}$ y se llaman **ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi**. La otra ecuación de compatibilidad se llama **ecuación de Gauss** y se obtiene a partir de la identidad:

$$-\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} \equiv \Phi_{uu} \cdot \Phi_{vv} - \Phi_{uv} \cdot \Phi_{uv},$$

que es satisfecha por toda parametrización $\Phi(u, v)$ que sea al menos de clase \mathcal{C}^3 . Por otra parte es fácil ver que $\Phi_{uu} \cdot \Phi_{vv} - \Phi_{uv} \cdot \Phi_{uv} \equiv eg - f^2 + (\dots)$, donde (\dots) es una expresión sólo de E, F, G y sus derivadas primeras, con lo cual la ecuación de Gauss queda así:

$$eg - f^2 = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - (\dots)$$

Una consecuencia es el llamado **teorema egregio de Gauss**:

Teorema 93. La primera forma fundamental I determina la función $K \equiv k_1 k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Por lo tanto, toda isometría local $h : (S_1, I_1) \rightarrow (S_2, I_2)$ conserva el producto $k_1 k_2$, a pesar de que no suele conservar el par no ordenado $\{k_1, k_2\}$. Luego h lleva puntos elípticos a puntos elípticos, puntos hiperbólicos a puntos hiperbólicos, etc.

En el capítulo 10 daremos una explicación geométrica de este “milagro”.