FORMAS CUADRÁTICAS

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, donde K es un cuerpo de característica distinta de 2.

Definición 1. Llamaremos forma cuadrática sobre V a toda aplicación $Q: V \longrightarrow K$ tal que:

i) $Q(\lambda \vec{v}) = \lambda^2 Q(\vec{v})$, $\forall\, \vec{v} \in V$, $\lambda \in K$.

ii) La aplicación $F_Q : V \times V \longrightarrow K$ definida por

$$F_Q(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}\left[Q(\vec{u}+\vec{v}) - Q(\vec{u}) - Q(\vec{v}) \right] \quad , \vec{u}, \vec{v} \in V,$$

es una forma bilineal.

Es fácil ver que F_Q es una aplicación simétrica, y que además $Q(u) = F_Q(u,u)$. En consecuencia, si fijamos una base $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ en V la forma cuadrática Q admite una representación matricial mediante una matriz A que es simétrica. Es decir

$$(*) \qquad Q((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado un cambio de base, pongamos $\vec{x} = C \vec{x}'$ cambia la fórmula $(*)$ de la siguiente manera:

$$Q((x_1', \dots x_n')) = (x_1', \dots, x_n')\, B \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \boxed{B = C^t A C}$$

Definición 2. Sea $Q: V \longrightarrow K$ una forma cuadrática. Si existe una base β de V en la que $Q(x_1, \dots x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$ para unos ciertos $a_j \in K$, decimos que Q está escrita en forma canónica.

Análogamente, se demuestra que p no puede ser mayor que k (ejercicio), por lo que $p=k$.

La igualdad $m=r=\text{rango}(A)$, con A la matriz de Q, se deduce de que el rango de una forma cuadrática es invariante por cambio de base (ejercicio). $\boxtimes$

<u>Definición 3</u>. Sea $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática real. Si Q está dada en una base β por la expresión

$$(**) \qquad Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_p x_p^2 - \beta_1 x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_q x_{p+q}^2$$

con $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, se definen los siguientes invariantes:

$p :=$ índice de inercia positivo de Q

$q :=$ índice de inercia negativo de Q

$s := |p-q| =$ signatura de Q

Observa que se da la igualdad $\text{rango}(Q) = r = p+q$.

<u>Nota</u>: Observa que si Q está dada como en $(**)$, podemos hacer el siguiente cambio de base:

$$\begin{cases} y_j := \sqrt{\alpha_j}\, x_j, & 1 \le j \le p \\ y_{j+p} := \sqrt{\beta_j}\, x_{j+p}, & 1 \le j \le q \\ y_j := x_j, & j > p+q = r \end{cases}$$

y así reescribimos Q como:

$$Q(\vec{x}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 .$$

Esta expresión recibe el nombre de <u>forma normal de la forma cuadrática Q</u>.

FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS. CRITERIOS DE SYLVESTER

Sea V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n.

Definición. Sea $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

(a) Q se dice definida positiva si $Q(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$. Si $Q(\vec{x}) \geqslant 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces Q se dice semidefinida positiva.

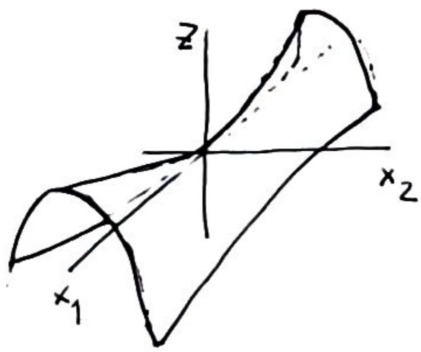
(b) Q se dice definida negativa si $Q(\vec{x}) < 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$. Si $Q(\vec{x}) \leqslant 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces Q se dice semidefinida negativa.

Ejemplos:

1) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es definida positiva

2) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2$ es definida negativa.

3) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ no es ni definida positiva ni negativa. Observa que su gráfica es:



En esta sección demostraremos un criterio efectivo que nos permitirá identificar las formas cuadráticas definidas tanto positivas como negativas. Son los llamados criterios de Sylvester para formas cuadráticas.

Teorema (Criterio de Sylvester para formas cuadráticas def. positivas)
Sea $Q: V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$ con A una matriz simétrica, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ Si los menores principales de A son positivos, es decir:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\ ,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0\ , \dots, \Delta_n = \det(A) > 0,$$

entonces la forma Q es definida positiva.

Demostración. Se hará por inducción en $n = \dim V$, $V = L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Si $n=1$, entonces $Q(\vec{x}) = a_{11} x_1^2 > 0$ para $x_1 \neq 0$.
Si $n=2$, entonces $Q(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Supongamos que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, entonces podemos reescribir Q como

$$Q(x_1,x_2) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2 = \Delta_1\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2^2 > 0.$$

Supongamos que se da el criterio para dimensión $\le n-1$, y consideremos la forma cuadrática definida por la submatriz de A dada por

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

es decir consideramos $G(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j$. Por inducción G es definida positiva y por tanto en una base ortonormal β' de $L(e_1,\dots,e_{n-1})$ diagonaliza, es decir $G(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}y_{n-1}^2$, con $y_1,\dots,y_{n-1}$ coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\beta = \{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{n-1}\}$. En consecuencia Q en la base $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{n-1},\vec{e}_n\}$ tiene la expresión

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}y_{n-1}^2 + \left(b_{1n}y_1y_n + \dots + b_{n-1,n}y_{n-1}y_n\right) + a_{nn}y_n^2$$

donde $y_n = x_n$. En consecuencia, completando cuadrados obtenemos:

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_{1n}}{2\lambda_1} y_n \right)^2 + \cdots + \lambda_{n-1} \left(y_{n-1} + \frac{b_{n-1,n}}{2\lambda_{n-1}} y_n \right)^2 + b y_n^2$$

donde $b = a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{4\lambda_1^2} - \cdots - \frac{b_{n-1,n}}{4\lambda_{n-1}^2}$. En consecuencia, en las variables:

$$z_j := y_j + \frac{b_{j,n}}{2\lambda_j} y_n \ , \ 1 \leq j \leq n-1 \ ; \ z_n = y_n \ ,$$

se obtiene que $Q(\vec{x}) = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} z_{n-1}^2 + b z_n^2$. Observa que $\lambda_j > 0$, luego sólo falta demostrar que $b > 0$ para obtener el resultado.

Si C es el cambio de base de $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(z_1, \ldots, z_n)$ sabemos que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & b \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} C \quad , \text{ con } \det C = 1$$

Tomando determinantes vemos que $\left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \cdot b = \det(C)^2 \Delta_n > 0$. Luego, $b > 0$.

<u>Proposición</u>. Si $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$, con A matriz simétrica y definida positiva, entonces los menores principales de A son todos positivos.

<u>Demostración</u>. En la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ tenemos que Q es definida positiva. Sea $E_k = L(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Sea $Q_k(\vec{x}) := \sum_{1 \leq i,j \leq k} a_{ij} x_i x_j$. Entonces Q_k es definida positiva en E_k. Luego:

$$Q_k(\vec{x}) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_k y_k^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{pmatrix} = C_k^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} C_k \ ,$$

en una base β_k adecuada. Por tanto

$$0 < a_1 \cdot \ldots \cdot a_k = |C_k|^2 \Delta_k \implies \Delta_k > 0 \ . \quad \boxtimes$$