Coordenadas baricéntricas

Eugenio Hernández, Maria-Angeles Zurro

10 de noviembre de 2020

Índice

1. Sistemas de referencia baricéntricos

Fijaremos en esta sección un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ con V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita $n > 0$. Para dar coordenadas en $\mathbb{A}$ habámos utilizado en temas anteriores una referencia cartesiana $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ donde el uso de una base de V era un elemento que usábamos de manera auxiliar para comprender los puntos, las variedades lineales y sus posiciones relativas dentro de $\mathbb{A}$. Sin embargo otra aproximación es posible al problema de dar coordenadas a los puntos en A. En el siguiente vídeo puedes analizar cómo pensar las nuevas coordenadas, que llamaremos baricéntricas, para los puntos de A.

https://www.youtube.com/watch?v=BC1jft03k6M

Definición 1.1. *Los puntos $a_1, \ldots, a_k$ del espacio afín $\mathbb{A}$ se dicen afínmente independientes si los vectores $\overrightarrow{a_1a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_1a_k}$ son linealmente independientes.*

Observa que en un espacio afín de dimensión n, hay siempre $n+1$ puntos afínmente independientes (esto se deduce fácilmente de la definición anterior).

Es claro que no puede haber más de $n+1$ puntos afínmente independientes en un espeacio afín de dimensión n. Pero no es tan claro el papel privilegiado del punto a_1. Para estudiar la dependencia del concepto anterior de haber elegido este punto a_1 necesitaremos demostar algunos resultados matemáticos.

Proposición 1.1. *Dados $a_1, \ldots, a_k$ puntos del espacio afín $\mathbb{A}$, si son afinmente independientes, entonces para cualquier i_0 en $\{2, \ldots, k\}$, los vectores $\{\overrightarrow{a_{i_0}a_j}\}_{j \neq i_0}$ son linealmente independientes.*

Demostración. En efecto, si tomamos un punto a_{i_0} y consideramos los vectores $\overrightarrow{a_{i_0}a_j}$ para $j \neq i_0$, se tiene la gualdad de los espacios vectoriales

$$L\,(\overrightarrow{a_1a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_1a_k}) = L\,(\{\overrightarrow{a_{i_0}a_j}\}_{j\neq i_0}) \ ,$$

puesto que $\overrightarrow{a_1a_j} = \overrightarrow{a_1a_{i_0}} + \overrightarrow{a_{i_0}a_j}$ para cada $j = 2, \ldots, k$. Luego se obtiene el enunciado. $\square$

Proposición 1.2. *Dados $a_1, \ldots, a_k$ puntos del espacio afín $\mathbb{A}$, entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *Los puntos $a_1, \ldots, a_k$ son afinmente independientes.*

2. *Para cualquier punto o de A se la la siguiente implicación*

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1\overrightarrow{oa_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{oa_k} & = \overrightarrow{0} \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \ . \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que de da (1) y temos una igualdad en V dada por $\lambda_1\overrightarrow{oa_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{oa_k} = \overrightarrow{0}$, para unos ciertos escalares $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$. Entonces, por la propiedad ii) de espacio afín, se tiene que

$$\overrightarrow{0} = \lambda_1\overrightarrow{oa_1} + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i(\overrightarrow{oa_1} + \overrightarrow{a_1a_i}) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)\overrightarrow{oa_1} + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i\overrightarrow{a_1a_i} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i\overrightarrow{a_1a_i} \ ,$$

lo que demuestra la implicación en (2).

El recíproco es inmediato, pues basta toma $o = a_1$ en (2) para poder demostrar (1). $\square$

Nota 1.1. *Observa que la implicación dada en (2) es válida para todo punto o de A, luego se puede elegir cualquier punto para comprobarla ya que si tomamos otro punto, por ejemplo $p \in A$, es fácil ver que, si tenemos la implicación en o también se da en p, pues*

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pa_i} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (\overrightarrow{po} + \overrightarrow{oa_i}) = \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \right) \overrightarrow{po} + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{oa_i} = 0 \cdot \overrightarrow{po} + \overrightarrow{0} \ .$$

Para ilustrar los resultados anteriores mostraremos un ejemplo.

Ejemplo 1.1. *Considera en el espacio afín habitual $\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$ los siguientes puntos:*

$$a_1 = (0,0,0) \ , \ a_2 = (2,0,0) \ , \ a_3 = (0,1,0) \ , \ a_4 = (2,1,0) \ , \ a_5 = (0,0,1) \ . \quad (2)$$

Si queremos averiguar si a_1, a_2, a_3, a_4 son afínmente independientes tenemos que ver si el sistema lineal homogéneo dado por

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1 a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_1 a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_1 a_3} + \lambda_4 \overrightarrow{a_1 a_4} = \overrightarrow{0} \ , \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad (3)$$

tiene por única solución la trivial; pero esto no es así ya que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, -1, -1, 1)$ es una solución del sistema (3).

Por otro lado los puntos a_2, a_3, a_4, a_5 sí son afínmente independientes pues el sistema

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_5 a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_5 a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_5 a_3} + \lambda_4 \overrightarrow{a_5 a_4} = \overrightarrow{0} \ , \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad (4)$$

tiene por única solución la trivial.

Definición 1.2. *Un sistema de referencia baricéntrico de un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ de dimensión n es cualquier conjunto de $n+1$ puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ que sea afínmente independiente. Lo escribiremos $\mathcal{S} = \{a_0, \dots, a_n\}$, o también $\mathcal{R}_b = \{a_0, \dots, a_n\}$ si queremos enfatizar que el sistema es baricéntrico.*

En el ejemplo 1.1 los puntos $\mathcal{S} = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ forman un sistema baricéntrico en $\mathbb{R}^3$, pero los puntos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ no lo son.

2. Coordenadas baricéntricas

Fijado un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ de dimensión n y un sitema baricéntrico $\mathcal{R}_b = \{a_0, \dots, a_n\}$ en él, estudiaremos la construcción de las coordenados de un punto respecto de este sistema fijado. Para ello utilizaremos la estructura vectorial V que acompaña a nuestro espacio de puntos A.

Construcción. Tomemos un punto arbitrario $p \in A$. Los puntos $\{p, a_0, \dots, a_n\}$ son afínmente dependientes, luego por la proposición 1.2, fijado un puntos $o \in A$, existen escalares $\lambda, \lambda_0, \dots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda\overrightarrow{op} + \lambda_0\overrightarrow{oa_0} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{oa_n} = \overrightarrow{0}, \qquad \text{con } \lambda + \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 0\ . \tag{5}$$

Pero λ es un escalar no nulo, ya que $a_0, \dots, a_n$ son afínmente independientes. Luego, tenemos la igualdad de vectores

$$\overrightarrow{op} = -\frac{\lambda_0}{\lambda}\overrightarrow{oa_0} + \cdots + -\frac{\lambda_n}{\lambda}\overrightarrow{oa_n}, \qquad \text{con } \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) = 1\ . \tag{6}$$

Definición 2.1. *Dado un punto p en un espacio afín $\mathbb{A}$, y una referencia baricéntrica $\mathcal{R}_b = \{a_0, \dots, a_n\}$, diremos que $(\mu_0, \dots \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ son las coordenadas baricéntricas de p en la referencia $\mathcal{R}_b$, si para un punto $o \in A$ se tiene*

$$\overrightarrow{op} = \mu_0\overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_n\overrightarrow{oa_n}, \qquad \textit{con } \mu_0 + \cdots + \mu_n = 1\ . \tag{7}$$

La construcción anterior muestra que esto siempre es posible. Demostramos a continuación que la $(n+1)$-upla $(\mu_0, \dots \mu_n)$ asociada al punto p es única una vez fijada la referencia baricéntrica. La expresión dada en (7) se abrevia usando la siguiente notabión;

$$p = (\mu_0, \dots \mu_n) \tag{8}$$

o también

$$p = \mu_0 a_0 + \dots \mu_n a_n\ , \tag{9}$$

sobreentendiéndose la condición $\mu_0 + \cdots + \mu_n = 1$. Primero pondremos un ejemplo que ilustra el método de cálculo de las coordenadas baricéntricas de un punto.

Ejemplo 2.1. *Consideremos $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ y los puntos $a_0 = (1,1), a_1 = (3,0), a_2 = (0,4)$. En la referencia baricéntrica $\mathcal{S} = \{a_0, a_1, a_2\}$ el punto $p = (4,3)$ tiene unas coordenadas baricéntricas (μ_0, μ_1, μ_2) tales que*

$$p = \mu_0 a_0 + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2, \quad \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0\ .$$

Tomando $o = (0,0)$, la igualdad (7) da el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$4 = \mu_0 + 3\mu_1, \quad 3 = \mu_0 + 4\mu_2, \quad 1 = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 \ .$$

Su solución es $(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \left(-\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$. Luego $p = -\frac{13}{5}a_0 + \frac{11}{5}a_1 + \frac{7}{5}a_2$.

Proposición 2.1. *Sean $a_0, \ldots, a_r$ puntos de un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión n. Sea p un punto de A. Supongamos que existen $o \in A$ y $\mu_0, \ldots, \mu_r$ en $\mathbb{K}$ tales que*

$$\overrightarrow{op} = \mu_0 \overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_r \overrightarrow{oa_r} \quad , \quad \mu_0 + \cdots + \mu_r = 1 \ . \tag{10}$$

Entonces:

1. *La expresión (10) es válida con los mismos coeficientes cambiando o por cualquier otro punto o' de A.*

2. *Si $\{a_0, \ldots, a_r\}$ son afínmente independientes, los valores $(\mu_0, \ldots \mu_r)$ son únicos.*

Demostración. Por la propiedad ii) de espacio afín, se tiene que

$$\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op} = \left(\sum_{i=0}^{r} \mu_i\right) \overrightarrow{o'o} + \sum_{i=0}^{r} \mu_i (\overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'a_i}) = \sum_{i=0}^{r} \mu_i \overrightarrow{o'a_i} \ ,$$

lo que da (10) para o'. Además, si $o = a_0$, obtenemos la expresión para $\overrightarrow{a_0p}$ dada por:

$$\overrightarrow{a_0p} = \mu_1 \overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + \mu_r \overrightarrow{a_oa_r} \quad , \quad \mu_0 = 1 - \mu_1 - \cdots - \mu_r,$$

que es única por ser los vectores $\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_oa_r}$ línealmente independientes, luego obtenemos (2). $\square$

3. Cambio de coordenadas baricéntricas

Fijado un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ de dimensión n y dos sitemas baricéntricos $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_n\}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \{\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_n\}$, en él, estudiaremos en primer lugar la ecuaci°'on matricial que relaciona las coordenadas baricéntricas respecto a uno y otro sistema. A continuación fijaremos un sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R} = \{o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n}\}$ en $\mathbb{A}$, y encontraremos la ecuación matricial que permite estudiar el cambio entre las coordenadas cartesianas y las baricéntricas para los puntos de A. Para ello utilizaremos la estructura vectorial V que acompaña a nuestro espacio de puntos A.

3.1. Cambio entre sistemas baricéntricos.

Consideremos dos referencias baricéntricas en un espacio afín $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_n\}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \{\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_n\}$. Para cada punto $p \in A$ tenemos que

$$p = \mu_0 a_0 + \cdots + \mu_n a_n \quad , \quad \mu_0 + \cdots + \mu_n = 1, \tag{11}$$
$$p = \mu'_0 \widetilde{a}_0 + \cdots + \mu'_n \widetilde{a}_n \quad , \quad \mu'_0 + \cdots + \mu'_n = 1 \ , \tag{12}$$

con las notaciones introducidas en (9). En esta sección daremos las ecuaciones que ralacionan las $n+1$-uplas $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ y $(\mu'_0, \ldots, \mu'_n)$. Tratemos de estudiar primero un ejemplo concreto.

Ejemplo 3.1. *Trabajaremos en el espacio afín real $\mathbb{A}^2$ Considera los puntos*

$$a_0 = (0,0) \ , \ a_1 = (1,0) \ , \ a_2 = (0,1) \ ,$$

que definen una referencia baricéntrixa $\mathcal{S} = \{a_0, a_1, a_2\}$ en $\mathbb{R}^2$. Los puntos

$$b_0 = (-1,1) \ , \ b_1 = (2,1) \ , \ b_2 = (1,-1) \ ,$$

también definen una referencia baricéntrixa $\mathcal{S}' = \{b_0, b_1, b_2\}$ en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que nos dan el punto $p = (4,3)$ de $\mathbb{R}^2$. Si calculamos sus coordenadas baricíntricas respecto a la referencia $\mathcal{S}$ siguiendo el procedimiento del ejemplo 2.1, obtenemos

$$p = (-6,4,3) \quad \text{en la referencia} \quad \mathcal{S} \ , \tag{13}$$

y de forma análoga podemos calcular sus coordenadas en la otra referencia:

$$p = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -1\right) \quad \text{en la referencia} \quad \mathcal{S}' \ . \tag{14}$$

Las expresiones para identificar al punto p dadas en (13) y (14) son muy distintas y nos gustaría encontrar la relación entre ellas. Para ello calcularemos los coordenadas de los puntos b_0, b_1, b_2 en la referencia $\mathcal{S}$ obteniendose

$$b_0 = (1,-1,1) \ , \ b_1 = (-2,2,1) \ , \ b_2 = (1,1,-1) \ .$$

En consecuencia, fijado un punto cualquiera $o \in \mathbb{R}^2$ obtenemos:

$$\overrightarrow{op} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ob_0} + \frac{7}{3}\overrightarrow{ob_1} + (-1)\overrightarrow{ob_1} = \tag{15}$$
$$-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{oa_0} - \overrightarrow{oa_1} + \overrightarrow{oa_2}\right) + \frac{7}{3}\left(-2\overrightarrow{oa_0} + 2\overrightarrow{oa_1} + \overrightarrow{oa_2}\right) + (-1)\left(\overrightarrow{oa_0} + \overrightarrow{oa_1} - \overrightarrow{oa_2}\right). \tag{16}$$

Luego, usando la proposición 2.1 da las siguientes igualdades:

$$-6 = -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{7}{3}\cdot(-2) + (-1)\cdot 1\ ,\ \ 4 = -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{7}{3}\cdot(2) + (-1)\cdot 1\ ,$$

$$3 = -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{7}{3}\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\ ,$$

lo que también se puede reescribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 7/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esta expresión se puede generalizar para obtener la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'_0 \\ \mu'_1 \\ \mu'_2 \end{pmatrix}$$

que da la ecuación matricial de cambio entre las referencias baricéntricas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

A continuación generalizaremos los cálculos hechos en el ejemplo anterior para sistemas de referencia baricéntricos en un espacio afín de dimensión finita. Para esto fijaremos un punto $o \in A$, y tenemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{op} =& \mu'_0\overrightarrow{o\tilde{a}_0} + \cdots + \mu'_n\overrightarrow{o\tilde{a}_n} = && (17)\\ & \mu'_0\left(\mu_{00}\overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_{n0}\overrightarrow{oa_n}\right) + \cdots + \mu'_n\left(\mu_{0n}\overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_{nn}\overrightarrow{oa_n}\right), && (18) \end{aligned}$$

donde $\tilde{a}_i = (\mu_{0i}, \ldots, \mu_{ni})$ son las coordenadas baricéntricas de $\tilde{a}_i$ en la referencia $\mathcal{S}$. La proposición 2.1 da la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{00} & \ldots & \mu_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n0} & \ldots & \mu_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'_0 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

llamadas *ecuaciones del cambio de referencia* de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$.

3.2. Cambio entre un sistema baricéntrico y uno cartesiano.

Supongamos dadas una referencia baricéntrica $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_n\}$ y otra cartesiana $\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n}\}$ en un espaci afín $\mathbb{A}$ de dimensión n. Sea $p \in A$ un punto arbitrario. Entonces tenemos, por (7), la siguiente igualdad:

$$\overrightarrow{op} = \mu_0 \overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_n \overrightarrow{oa_n} \quad , \quad \mu_0 + \cdots + \mu_n = 1 \; . \tag{20}$$

Por otro lado, el vector $\overrightarrow{op}$ se puede expresar en la base $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n}\}$ como

$$\overrightarrow{op} = x_1 \overrightarrow{e_1} \cdots + x_n \overrightarrow{e_n} \; , \tag{21}$$

es decir, $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas cartesianas de p en la referencia cateriana $\mathcal{R}$. Encontrar la ecuación del cambio entre estas coordenadas y las baricéntricas de p, $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$, es el objetivo de esta sección.

Análomente al apartado anterior, comenzaremos con un ejemplo que ilustra la situación que vamos a abordar.

Ejemplo 3.2. *Trabajaremos en el espacio afín real* $\mathbb{A}^2$ *Considera los puntos*

$$b_0 = (-1, 1) \; , \; b_1 = (2, 1) \; , \; b_2 = (1, -1) \; ,$$

que definen una referencia baricéntrixa $\mathcal{S}' = \{b_0, b_1, b_2\}$ *en* $\mathbb{R}^2$*. Supongamos dada una referencia catesiana* $\mathcal{R} = \{o = (0, 0); \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$*. Luego, si nos dan el punto* p *de coordenadas cartesianas* $(4, 3)$ *tenemos que*

$$\overrightarrow{op} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} \; ,$$

también, por el ejercico 3.1, sabemos que las coordenadas baricéntricas de p *en la referencia baricéntrica* $\mathcal{S}'$ *son* $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -1\right)$*, es decir,*

$$\overrightarrow{op} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ob_0} + \frac{7}{3}\overrightarrow{ob_1} + (-1)\overrightarrow{ob_1} = -\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) + \frac{7}{3}\left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) + (-1)\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right) \tag{22}$$

En consecuencia, igualando las dos expresiones que tenemos para el vector $\overrightarrow{op}$*, se tiene*

$$4 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{7}{3} \cdot (2) + (-1) \cdot 1 \; , \quad 3 = -\frac{1}{3} \cdot (1) + \frac{7}{3} \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) \; ,$$

expresión que se puede reescribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 7/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esta expresión se puede generalizar para obtener la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0' \\ \mu_1' \\ \mu_2' \end{pmatrix} ,$$

que da la ecuación matricial de cambio entre la referencias baricéntrica $\mathcal{S}'$ y la referencia cartesiana $\mathcal{R}$.

Los cálculos hechos en el ejemplo anterior se pueden generalizar para sistemas de referencia baricéntricos $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_n\}$ y cartesianos $\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n}\}$ en un espacio afín de dimensión finita. Para esto fijaremos un punto arbitrario $p \in A$. Tendremos para este punto expresiones coordenadas de los dos tipos

$$\overrightarrow{op} = \mu_0 \overrightarrow{oa_0} + \cdots + \mu_n' \overrightarrow{oa_n} \quad \text{(coordenadas baricéntricas)} \tag{23}$$
$$\overrightarrow{op} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n} \quad \text{(coordenadas catesianas)} \ . \tag{24}$$

Los vectores $\overrightarrow{oa_i}$ se pueden expresar en la base $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n}\}$ de V mediante cambinaciones lineales de la siguiente forma

$$\overrightarrow{oa_i} = \alpha_{1i} \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_{ni} \overrightarrow{e_n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \ .$$

De las identidades (23) y (24), se deducen las siguientes fórmulas:

$$x_\ell = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{\ell j} \mu_j, \quad \ell = 1, \ldots, n,$$

y también su reescritura matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

llamadas *ecuaciones del cambio de referencia* de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{R}$. Observa que la matriz anterior no es una matriz cuadradda[1], pero que es una matriz de rango n.

[1]Es una matriz de tamaño $n \times (n+1)$.

4. Ecuaciones baricéntricas de variedades lineales

Fijaremos en esta sección un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ con V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita $n > 0$.

Definición 4.1. *Sia $p_0, \ldots, p_r$ son $r+1$ puntos en $\mathbb{A}$, definiremos la variedad lineal engendrada por estos puntos como la variedad lineal*

$$\mathcal{L}(\{p_0, \ldots, p_r\}) = p_0 + L(\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_r}\})$$

donde $L(\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_r}\})$ denota el subespacio vectorial de V denerado por los vectores $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_r}$. En consecuencia su dimensión es siempre $\leq r$, y es igual a r si y sólo si los puntos $p_0, \ldots, p_r$ son afínmente independientes.

Se puede demostrar que, con la notación dada en (9), se da la igualdad[2]

$$\mathcal{L}(\{p_0, p_1, \ldots, p_r\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{r} \alpha_i p_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \ , \ 0 \leq i \leq r \right\} \ .$$

4.1. Ecuaciones baricéntricas de líneas

Dados dos puntos $p_0 \neq p_1$ en A y una referencia baricéntrica $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_n\}$, hallaremos las ecuaciones que deben verificar las coordenadas baricéntricas de los puntos de A que están en la recta $\mathcal{L}(\{p_0, p_1\})$. Para esto basta observar que si

$$\begin{aligned} p_0 =& (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \quad , \text{ con } \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1 \ , \\ p_1 =& (\beta_0, \ldots, \beta_n) \quad , \text{ con } \beta_0 + \cdots + \beta_n = 1 \ , \end{aligned}$$

entonces $q = (\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{L}(\{p_0, p_1\})$ si y sólo si $\overrightarrow{p_0q} = t\overrightarrow{p_0p_1}$ para un $t \in \mathbb{K}$. Esta expresión equivale a $q = (1-t)p_0 + tp_1$, lo que da las ecuaciones paramétricas de la

[2] Observa que en un espacio afín se da (propiedad ii) de espacio afín)

$$q = r + \overrightarrow{rq} \ , \quad \text{para cada pareja de puntos } q, \ r \in A \ , \tag{26}$$

y cuando se tiene un escalar α en el cuerpo $\mathbb{K}$, se denota por αq a $\varphi_r^{-1}(\alpha\overrightarrow{rq})$, es decir,

$$\alpha q = r + \alpha\overrightarrow{rq} \ , \quad \text{para cada pareja de puntos } q, \ r \in A \ ,$$

.

línea en el sistema $\mathcal{S}$. Las eciaciones implícitas se obtienen de imponer que el rango de la siguiente matriz sea 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \\ \beta_0 & \cdots & \cdots & \beta_n \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} .$$

Ejemplo 4.1. *Trabajaremos en el espacio afín real $\mathbb{A}^2$ Considera los puntos*

$$b_0 = (-1, 1) \ , \ b_1 = (2, 1) \ , \ b_2 = (1, -1) \ ,$$

que definen una referencia baricéntrixa $\mathcal{S}' = \{b_0, b_1, b_2\}$ en $\mathbb{R}^2$. La línea que une los puntos b_0 y b_2 tiene por ecuación baricéntrica ímplicita $\mu_1 = 0$.

4.2. El baricentro de una familia finita de puntos

Definición 4.2. *Supongamos dados $a_1, \ldots a_m$ afínmente independientes. Se llama* baricentro *de los puntos $a_1, \ldots a_m$ al punto G tal que en cualquier referencia baricéntrica se tiene*

$$G = \frac{1}{m} a_1 + \cdots + \frac{1}{m} a_m$$

Recuerda que en la proposión 2.1 vimos que la definición anterior proporciona una única opción de punto bariéntrico de un sistema libre.

Si consideramos sólo tres puntos no alineados, a, b, c, se tiene que $G = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2}\right)$; es decir el baricentro está en la mediana del vértice a, ya que $\frac{b+c}{2}$ es el punto medio del segmento de extremos b, c.

Si consideramos cuatro puntos no coplanarios, a, b, c, d, se tiene que $G = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}\left(\frac{b+c+d}{3}\right)$; es decir el baricentro está en la recta que une el vértice a con el baricentro del triángulo de vértices b, c, d, ya que $\frac{b+c+d}{3}$ es el baricentro de dicho triángulo. También se puede calcular baricentros teniendo puntos con pesos como muestra el vídeo que vimos al principio; esto equivale al problema de estudiar baricentros para puntos afínmente dependientes. Es un buen ejercicio volver a ver el vídeo inicial desde este punto de vista:

https://www.youtube.com/watch?v=BC1jft03k6M

o también leer esto
https://es.wikipedia.org/wiki/Baricentro.