Cálculo Numérico I

Curso 2020-2021 | Hoja de Problemas 3 | 1º Mat./2º D.G.

1) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, con m no necesariamente igual a n, y sean $p_1, p_2 \in [1,\infty]$. Se considera la función $|||\cdot|||_{p_1\to p_2} : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ dada por

$$|||A|||_{p_1\to p_2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{p_2}}{\|x\|_{p_1}}$$

donde las normas $\|\cdot\|_p$ se consideran en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{R}^m$ dependiendo del espacio vectorial en el que se evaluan. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $|||\cdot|||_{p_1\to p_2}$ es una norma para el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n\times m}$

b) Para todo $q \in [1,\infty]$, para todo $\ell \geq 1$ y para toda $B \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ se cumple

$$|||AB|||_{p_1\to p_2} \leq |||A|||_{q\to p_2}|||B|||_{p_1\to q}$$

c) $|||A|||_{1\to 1} = \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \quad , \quad |||A|||_{\infty\to\infty} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{m} |A_{i,j}|$

d) $|||A|||_{2\to\infty} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left(\sum_{j=1}^{m} |A_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

2) Demostrar las siguientes desigualdades entre normas y dar un ejemplo de vector o matriz (no nulos) para los cuales se alcance la igualdad:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_\infty \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}|||A|||_\infty$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

3) Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular las normas $|||A|||_p$ para $p = 1, 2, \infty$.

b) ¿Puede suceder que para algún $p \in [1,\infty]$ y para algún vector $v \in \mathbb{R}^2$, se tenga la desigualdad $\|Av\|_p > |||A|||_p\|v\|_p$?

c) Describir todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|Av\|_\infty = |||A|||_\infty\|v\|_\infty$.

d) Describir todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|Av\|_2 = |||A|||_2\|v\|_2$.

4) Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -12 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -3 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular el número de condición de la matriz A en la norma Euclidea $\|\cdot\|_2$

b) Calcular el número de condición de la matriz A en las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$