Hoja 6: Aplicaciones lineales. Cambio de base.

1. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Si $f : V \longrightarrow W$ y $g : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales, demuestra que:

(a) $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$.

(b) Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$.

2. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{\,(1,0,1)\,,\,(-1,1,1)\,,\,(1,-1,0)\,\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{\,(2,1,1)\,,\,(1,1,1)\,,\,(1,-1,1)\,\}\,.$$

(a) Calcula la matriz de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ usando $\mathcal{B}_1$ en salida y $\mathcal{B}_2$ en llegada.
(b) Calcula la matriz de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ usando $\mathcal{B}_2$ en salida y $\mathcal{B}_1$ en llegada.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

a) Determina la matriz A de f usando la base estándar en salida y en llegada.

b) Determina la matriz M de f usando la base $\mathcal{B} = \{\,(1,1,0)\,,\,(2,3,-1)\,,\,(0,0,1)\,\}$ en salida y en llegada.

c) Sea P la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$. Deduce, del cálculo que has hecho en b), la igualdad $AP = PM$.

d) Describe P como la matriz de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ en ciertas bases y vuelve a deducir $AP = PM$.

4. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de V que son complementarios mutuos: $V = V_1 \oplus V_2$. Definimos una aplicación $T : V \to V$ de la manera siguiente:

$$\boxed{\text{Dado } u \in V, \text{ hay } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2 \text{ únicos tales que } u = v_1 + v_2, \text{ entonces hacemos } T(u) \overset{\text{def}}{=} v_1.}$$

Llamamos a T la *proyección de V sobre V_1 en la dirección de V_2*.

(a) Demuestra que T es lineal. Halla su imagen y su núcleo. Demuestra que $T \circ T = T$.

(b) Halla la matriz de T en una base $\{w_1, \ldots, w_{n+r}\}$, resultado de tomar una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V_1 y poner a continuación una base $\{w_{n+1}, \ldots, w_{n+r}\}$ de V_2.

(c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $u = (2,1)$. Proyecta u sobre el eje $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ de abscisas en la dirección del eje $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ de ordenadas. Proyecta u sobre el eje de abscisas en la dirección de la recta $\langle (1,3) \rangle$. Haz un dibujo.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Halla, si es posible, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ en salida y llegada sea $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Misma pregunta con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Determina una igualdad $A = P\left[\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]Q$, con P y Q inversas mutuas. Usa esta igualdad para hallar una raíz cuadrada de A, es decir una matriz R tal que $RR = A$.

6. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliza el método de Gauss para hallar una base de $\operatorname{Im} f$ y una de $\ker f$.

b) Extiende la base de $\ker f$ a una de $\mathbb{R}^6$, añadiendo vectores de la base estándar.

c) Utiliza el resultado para dar una base del espacio cociente $\mathbb{R}^6/\ker f$.

7. Sean V, W, espacios vectoriales, $F \subseteq V$ un subespacio vectorial y $f : V \to W$ una función lineal. Demuestra que si $F \subseteq \ker f$ entonces la fórmula $g(v + F) = f(v)$ define correctamente una aplicación $g : V/F \to W$ y que esta g así definida es lineal.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$.

a) ¿Por qué es $(f \circ f)(\mathbf{x}) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$?

b) Halla la matriz A de f respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

c) Halla la matriz B de $f^2 = f \circ f$ respecto de $\mathcal{B}$ en salida y la base estándar en llegada.

d) Explica por qué $B \neq A^2$.

9. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T_a\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

a) Halla la matriz A_a de T_a respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

b) Halla la matriz B_a de T_a respecto de la base estándar en salida y la base $\mathcal{B}$ en llegada.

c) Comprueba que A_a y B_a no son inversas la una de la otra, excepto si $a = -1/3$. Explica este fenómeno (indicación: para todo a calcula la compuesta $T_a \circ T_a$).