4.5. RANGO DE UNA MATRIZ Y DETERMINANTES.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. En la sección 6 del Cap 2 definimos el rango de A, rango(A), como $\dim \langle\{\vec{c}_1,..,\vec{c}_n\}\rangle$, donde $\vec{c}_j$ es el j-ésimo vector columna de A. Sabemos que rango(A) coincide con el mayor número de los vectores $\{\vec{c}_1,..,\vec{c}_n\}\subset\mathbb{R}^m$ que son l. i. Además (Prop 6.1, del Cap 2), coincide con el número de peldaños de su matriz escalonada reducida.

En esta sección usaremos determinantes para calcular el rango de una matriz $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y probaremos que el rango de los vectores fila de A coincide con el rango de sus vectores columna.

Dada $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se llama <u>menor de orden k</u> de A al determinante de cualquier matriz de orden k ($k\leq \min\{m,n\}$) formada con los elementos de la intersección de k cualesquiera de sus filas y k cualesquiera de sus columnas.

Ej 5.1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&2&1&1\\1&2&0&2\end{pmatrix}$. Los menores de orden 3 de A se obtienen de una cualquiera de sus columnas. Prescindiendo de la 3ª columna

$$\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&2&1\\1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&4&5\\0&0&-2\end{vmatrix}=-8$$

es un menor básico. Un menor de orden 2 se obtiene con las filas 2ª y 4ª y las columnas 1ª y 3ª: $\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$.

NOTA: Los menores de orden 1 de una matriz son sus elementos.

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ sólo tiene un menor de orden n, que es $|A|$.

Def 5.1

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, A no nula, denotamos por $R(A)$ al único número con $0 < R(A) \leq \min\{m, n\}$ que satisface

1) A posee al menos un menor no nulo de orden $R(A)$

2) Todo menor de A de orden mayor que $R(A)$ es cero

Cualquier menor de A de orden $R(A)$ que no sea nulo se denomina menor básico; sus columnas se llaman columnas básicas y sus filas se llaman filas básicas.

Ej 5.1. Halla $R(A)$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

indicando un menor básico. Halla rango(A) con Gauss.

S/ Los menores de orden 3 son

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

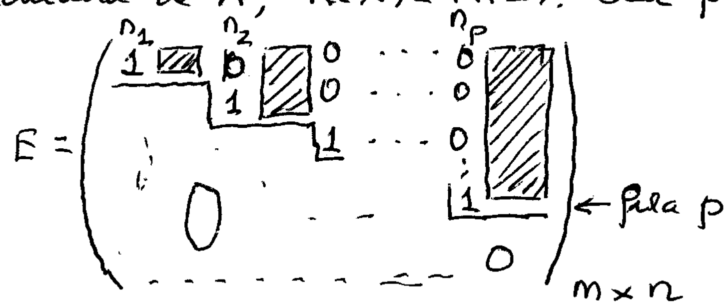
que son todos nulos (decir por qué sin calcular el det). Un menor de orden 2 no nulo es $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ (filas 1ª y 2ª; columnas 1ª y 3ª). Este es un menor básico, $R(A) = 2$.

Cuando se halla rango(A) con Gauss sale $p = 2$.

Proposición 5.2.

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, A no nula. El número $R(A)$ de la Def 5.1. coincide con el rango de A.

D/ El número $R(A)$ definido en 5.1 no se altera mediante las 3 transformaciones elementales de una matriz que expusimos en el Tema 1. (¿Por qué?). Así pues, si E es la matriz escalonada reducida de A, $R(A) = R(E)$. Sea p = peldaños de E:



donde las matrices sombreadas pueden ser no nulas.

$R(E)$ no puede ser superior a p porque cualquier menor de orden mayor que p incluiría una fila de ceros (Prop 2.5).

Por otro lado tomando las p primeras filas de E y las columnas $n_1, n_2, .., n_p$ de E se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}_{(p\times p)} = 1 \neq 0$$

Por tanto $R(A) = R(E) = p$. ■

Ej 5.2. Prueba que el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es 2.

Teorema 5.3 (Teorema del menor básico)

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, A no nula.

1) Cualquier columna de A es combinación lineal de sus columnas básicas

2) El mismo resultado es cierto para las filas de A

D/ Por las propiedades de los determinantes se puede suponer que el menor básico ocupa las R primeras filas y las R primeras columnas con $R = R(A) = \text{rango}(A)$. Es decir

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1R} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & C & \vdots & & & \vdots \\ a_{R,1} & \cdots & a_{R,R} & \cdots & & a_{R,n} \\ \hline \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,R} & \cdots & & a_{m,n} \end{array}\right)_{m\times n}$$

con $|C| \neq 0$. Sea $\vec{c}_j$, $j=1,2,..,n$, el j-ésimo vector columna de A.

- Si $R=n$, todas las columnas son básicas y $\vec{c}_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot \vec{c}_i$ es combinación lineal de $\vec{c}_1, \vec{c}_2, .., \vec{c}_n$.
- Si $R<n$ y $1 \leq j \leq R$, $\vec{c}_j$ es uno de los vectores $\vec{c}_1, .., \vec{c}_R$ y por tanto c. l. de ellos
- Si $R<n$ y $R<j\leq n$ se considera el SELH

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} & a_{1j} \\ \vdots & & & \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} & a_{Rj} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mR} & a_{mj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_R \\ x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

con m ecuaciones y R+1 incógnitas. Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es R que es menor que el nº de incógnitas (R+1) el sistema tiene infinitas soluciones (comp. indeterminado). Siempre podemos elegir una solución

$$x_1 = d_1,\ x_2 = d_2, \ldots, x_R = d_R,\ x_j = d_j \qquad (5.2)$$

con $d_j \neq 0$: si todas las soluciones tuvieran $d_j = 0$, el SELH (5.1) sería equivalente a SELH

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ que solo tiene la solución nula, y (5.1) solo tendría la solución nula.

Sustituyendo la solución (5.2) en (5.1) se tiene

$$d_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{R1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + d_R \begin{pmatrix} a_{1R} \\ \vdots \\ a_{RR} \\ \vdots \\ a_{mR} \end{pmatrix} + d_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Rj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$d_1 \vec{c}_1 + \dots + d_R \vec{c}_R + d_j \vec{c}_j = \vec{0}$. Como $d_j \neq 0$,

$$\vec{c}_j = -\frac{d_1}{d_j}\vec{c}_1 - \dots - \frac{d_R}{d_j}\vec{c}_R$$

lo que prueba que $\vec{c}_j$ es c.l. de $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_R\}$. ∎

Corolario 5.4

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$; el rango de sus vectores columnas coincide con el rango de sus vectores fila.

D/ El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta (Prop 2.2). Por tanto $R(A) = R(A^t)$. ∎

Corolario 5.5.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. $|A| = 0 \Leftrightarrow$ Una de sus filas (columna) es combinación lineal de las restantes filas (columnas) de A.

D/ $\Leftarrow$) Es la Prop 2.6 de las propiedades de los determinantes.

$\Rightarrow$) Si $|A| = 0$, rango$(A) = R < n$. Tomas una fila (columna) no incluida en sus filas (columnas) básicas. Por el Teorema 5.3 esta fila (columna) es c.l. de las filas (columnas) básicas, y por tanto también es c.l. de las restantes filas (columnas). ∎

Corolario 5.6

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Son equivalentes:

(1) A tiene una inversa (2) $\text{Rango}(A) = n$ (3) $|A| \neq 0$.

D/ (2)$\Leftrightarrow$(3) es el Corolario 5.5.

(3) $\Rightarrow$ (1) es el Teorema 4.1 que nos dice como calcular la inversa cuando $|A| \neq 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $X = (x_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ la inversa de A, e.d. $A\cdot X = I_n$. Con la primera columna de X se obtiene

$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

Como la inversa de A es única, el SEL (5.3) tiene solución única. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, $\text{rango}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $= n$. ∎

Ej 5.3. Prueba que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es 2. Escribe una fila (columna) como combinación lineal de las restantes filas (columnas).

La Proposición 5.2 junto con la Def 5.1 da un método para calcular el rango de $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Requiere calcular menores de A hasta encontrar un nº R tal que exista un menor no nulo de orden R y todos los menores de orden superior sean nulos.

En la práctica, basta hallar un menor de orden R no nulo y tal que todos los menores de orden $R+1$ que se obtienen ampliando dicho menor con una fila y una columna es suficiente

En efecto; sean $\{\vec{c}_1, .., \vec{c}_R\}$ las columnas de un menor básico. Por el Teo. del menor básico, $<\vec{c}_1, .., \vec{c}_R> = <\vec{c}_1, .., \vec{c}_R, \vec{c}_j>$ para todo $j = R+1, .., n$ pq. $\vec{c}_j$ es c.l. de $\{\vec{c}_1, .., \vec{c}_R\}$. Por tanto $<\vec{c}_1, .., \vec{c}_R> = <\vec{c}_1, .., \vec{c}_R, \vec{c}_{R+1}, .., \vec{c}_n>$ y Entonces rango$(A) = r$, por definición de rango de un conjunto de vectores.

Ej 5.4. Halla el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

S/ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+1 = 4 \neq 0$. Ahora $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

y $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto Rango$(A) = 2$.

(No ha sido necesario probar que son cero los otros dos menores de orden 3 de la matriz)