Aplicaciones afines

Eugenio Hernández, Maria-Angeles Zurro

21 de noviembre de 2020

Índice

---

1. Conceptos básicos y propiedades

Fijaremos en esta sección espacios afín $\mathbb{A}_i = (A_i, V_i, \varphi_i)$ con V_i un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita $n_i > 0$, $i = 1, 2$.

Analizaremos a continuación un tipo especial de aplicaciones entre espacios afines, llamadas aplicaciones afines o afinidades, que tienen la propiedad de preservar la colinealidad y el paralelismo.

Definición 1.1. *Una aplicación afín, o afinidad, entre los espacios $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ es una aplicación $f : A_1 \to A_2$ junto con una aplicación lineal $\tilde{f} : V_1 \to V_2$ tales que para todos $a, b \in A_1$ se da la igualdad:*

$$\tilde{f}\left(\varphi_1(a, b)\right) = \varphi_2(f(a), f(b)) \ . \tag{1}$$

En muchos libros la igualdad anterior se reescribe utilizando la notacón de vectores como

$$\tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{f(a)f(b)} \ . \tag{2}$$

La aplicación $\tilde{f}$ recibe el nombre de aplicación lineal asociada a *la aplicación afín f.*

La última notación (2) es la que utilizaremos en este texto. Una formulación equivalente a esta igualda la proporciona la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Con las notaciones anteriores, son equivalentes*

1. $\tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$ *para todos* a, b *en* A_1.

2. $f(a + \overrightarrow{u}) = f(a) + \tilde{f}(\overrightarrow{u})$ *para todo* $a \in A_1$ *y todo* $\overrightarrow{u} \in V_1$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que se da 1. Fijemos $a \in A_1$ y $\overrightarrow{u} \in V_1$. Como $(\varphi_1)_a$ es biyectiva, existe $b \in A_1$ tal que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u}$; es decir $b = a + \overrightarrow{u}$. Entonces

$$f(a + \overrightarrow{u}) = f(b) \quad \text{ y también } \quad \tilde{f}(\overrightarrow{u}) = \tilde{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)},$$

luego $f(b) = f(a) + \tilde{f}(\overrightarrow{u})$.

Recíprocamente, si 2 es cierto, entonces para a, b en A_1, definimos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab} \in V_1$. Por 2 aplicado a a y a $\overrightarrow{u}$ obtenemos

$$\tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \tilde{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(a)f(a + \overrightarrow{u})} = \overrightarrow{f(a)f(b)}\ ,$$

lo que demuestra la proposición. $\square$

Ejemplo 1.1. *Sea* $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ *un espacio afín. Dado* $\overrightarrow{v} \in V$*, la traslación de vector* $\overrightarrow{v}$ *es la apicación* $T_{\overrightarrow{v}} : A \to A$ *dada por* $T_{\overrightarrow{v}}(p) = p + \overrightarrow{v}$*, es ecir*

$$T_{\overrightarrow{v}}(p) = q \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{v}\ .$$

Es fácil demostrar, usando la proposición 1.1, que su aplicación lineal asociada $\widetilde{T_{\overrightarrow{v}}}$ *es la identidad en* V.

De la proposición 1.1 se puede deducir los siguientes resultados.

Corolario 1.1. *La imagen de una variedad lineal por una aplicación afín es una variedad lineal.*

Demostración. Es fácil demostrar usando la proposición 1.1, que si $L = p + W$ es una variedad lineal, entonces $f(L) = f(p) + \tilde{f}(W)$. $\square$

Se deduce fácilmente del anterior corolario el siguiente resultado.

Corolario 1.2. *Si* ℓ_1 *y* ℓ_2 *son dos variedades lineales paralelas, entonces* $f(\ell_1)$ *y* $f(\ell_2)$ *son paralelas.*

Una consecuencia fácil de la proposición 1.1 es el siguiente resultado que proporciona un importante criterio de igualdad entre aplicaciones afines.

Corolario 1.3. *Sean f, g dos aplicaciones afines de A_1 en A_2 tales que sus aplicaciones lineales asociadas son iguales (es decir $\tilde{f} = \tilde{g}$). Entonces, si coinciden en un punto de A_1, coinciden en todos (es decir $f = g$).*

Demostración. Sea $b \in A_1$. Entonces, por la proposición 1.1, se tiene que

$$f(b) = f(a_0 + \overrightarrow{a_0 b}) = f(a_0) + \tilde{f}(\overrightarrow{a_0 b}) = g(a_0) + \tilde{g}(\overrightarrow{a_0 b}) = g(b) \ ,$$

lo que demuestra el enunciado. □

Proposición 1.2. *Si $f : A_1 \to A_2$ y $g : A_2 \to A_3$ son dos aplicaciones afines, entonces su composición $g \circ f : A_1 \to A_3$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la composición de las aplicaciones lineales asociadas, es decir $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.*

Demostración. Tomemos dos puntos arbitrarios a, b en A_1. Entonces, las siguientes igualdades

$$\overrightarrow{(g \circ f)(a)(g \circ f)(b)} = \tilde{g}\left(\overrightarrow{f(a)f(b)}\right) = \tilde{g} \circ \tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right)$$

implican el enunciado pedido. □

Definición 1.2. *Dados una aplicación afín $f : A \to A$ y un punto $a \in A$, diremos que a es punto fijo de f si $f(a) = a$.*

Una variedad lineal ℓ se dirá fija por f si cada punto de ℓ es un punto fijo de f.

Una variedad lineal π se dirá invariante por f si $f(\pi) \subset \pi$. Observa que toda variedad de puntos fijos es una variedad invariante.

Proposición 1.3. *Sea $f : A \to A$ una aplicación afín de un espacio afín de dimensión n en sí mismo. Consideremos $n+1$ puntos afínmente independientes en A. Si todos los puntos anteriores son puntos fijos de f, entonces f es la aplicación identidad ($f(p) = p$ para todo $p \in A$).*

Demostración. Supongamos dados $a_0, \ldots, a_n$ puntos afínmente independientes en A. Entonces, $\overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_n}$ es una base de V para la que se cumple

$$\tilde{f}(\overrightarrow{a_0 a_i}) = \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{a_0 a_i} \ , \ i = 1, \ldots, n,$$

es decir $\tilde{f}$ es la identidad. Entonces, para cualquier $b \in A$ se tiene:

$$f(b) = f(a_0) + \tilde{f}(\overrightarrow{a_0 b}) = a_0 + \overrightarrow{a_0 b} = b,$$

lo que da el resultado. □

Proposición 1.4. *Sean $f : A \to A$ y $g : A \to A$ dos aplicaciones afines de un espacio afín de dimensión n en sí mismo. Consideremos $\mathcal{S} = \{b_0, \ldots, b_n\}$ una referencia baricéntrica en A. Si para $i = 0, \ldots n$ se tiene $f(b_i) = g(b_i)$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ las apliacaciones lineales asociadas a f y a g respectivamente. Como

$$f(b_0) = f(b_i) + \tilde{f}(\overrightarrow{b_0 b_i}), \quad \text{y también } g(b_0) = g(b_i) + \tilde{g}(\overrightarrow{b_0 b_i}),$$

se deduce fácilmente $\tilde{f} = \tilde{g}$. Luego, por el corolario 1.3, se tiene $f = g$. $\square$

2. Ecuación en una referencia cartesiana

Fijado un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ de dimensión n y un sitema cartesiano $\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ en él, estudiaremos la construcción de las ecuaciones de una afinidad $f : A_1 \to A_1$ respecto de este sistema dado. Para ello utilizaremos la estructura vectorial V que acompaña a nuestro espacio de puntos A.

Consideremos un punto arbitrario p en A. Entonces p y $f(p)$ se pueden escribir como:

$$\overrightarrow{op} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}, \tag{3}$$
$$\overrightarrow{of(p)} = x'_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + x'_n \overrightarrow{e_n}. \tag{4}$$

Para comparar ambas expresiones vectoriales tenemos que utilizar la aplicación lineal $\tilde{f} : V \to V$ asociada con f. Como aplicación lineal que es, en la base $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ tendrá una expresión marticial dada por una matriz M de tamaño $n \times n$.

Usando la expresión (2) podemos concluir que

$$\tilde{f}(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{f(o)f(p)} = \overrightarrow{f(o)o} + \overrightarrow{of(p)} = \overrightarrow{of(p)} - \overrightarrow{of(o)}$$

En consecuencia, conocida la ingen de o por f, digamos

$$\overrightarrow{of(o)} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}, \tag{5}$$

entonces

$$\tilde{f}(\overrightarrow{op}) = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{e_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - \alpha_i) \overrightarrow{e_i} \ .$$

Esta última expresión nos da la siguiente escritura matricial de f en la referencia cartesiana $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Ejemplo 2.1. *Fijemos el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y la referencia cartesiana habitual $\mathcal{R} = \{o = (0,0,0); \overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$ Hallaremos en este ejecio la ecuación matricial de la proyección de $A = \mathbb{R}^3$ sobre el plano $\pi = \{x+y+z = 1\}$ en la dirección de la recta vectorial $\ell = L(\{(0,1,1)\})$.*

En primer lugar reescribiremos el plano π de la form $\pi = a + W$ donde a es un punto de π y W es el espacio vectorial de dirección de π. En este caso podemos tomar

$$a = (0,0,1) \quad , \quad W = L(\{\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0), \overrightarrow{u_2} = (0,1,-1)\})$$

Calcularemos ahora la ecuación matricial de $\tilde{f}$, que es la proyección de $V = \mathbb{R}^3$ sobre W en la direción ℓ. Es muy fácil calcula la matriz de esta transformación en la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, (0,1,1)\}$; es la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base dada por la referencia $\mathcal{R}$, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, $\tilde{f}$ está dada matricialmente por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo los pasos anteriormente descritos, falta ahora calcular la imagen del punto o, es decir $f(o)$ (véase la fórmula 5). Para ello podemos utilizar un punto fijo de la tranformación, que en este caso puede ser cualquier punto del plano π; tomaremos el más sencillo: $p = (0,0,1)$. Luego, como $f(p) = p$, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos así que $f(o) = (0, 1/2, 1/2)$. En consecuencia la ecuación matricial de f en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Observa que los puntos $(x, y, 1 - x - y)$ son los únicos puntos fijos por esta transformación, y que la familia de rectas $\{a + \ell \mid a \in A\}$ está formada por subespacios invariantes pero no fijos.