# 9.3 POLINOMIO INTERPOLADOR EN LA FORMA DE LAGRANGE $(n>0)$

Ejemplo: $n=1$, 2 puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$, $x_0\neq x_1$

$$p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

- $p\in\mathcal{P}_1$
- $p(x_0)=y_0$, $p(x_1)=y_1$

definición (PEL): decimos polinomios elementales de Lagrange por los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset\mathbb{R}$, $x_i\neq x_j$ si $i\neq j$

$$L_j(x)=\prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k},\quad j\in\{0,\dots,n\}$$

Ejemplo: $n=2$, 3 puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2},\quad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2},\quad L_2(x)=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

teorema: sean $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}\subset\mathbb{R}^2$, $x_i\neq x_j$ si $i\neq j$ y sean $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ los PEL por $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

$\Rightarrow$ el polinomio interpolador $p\in\mathcal{P}_n$ es

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}y_j\,L_j(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

POLINOMIO INTERPOLADOR EN LA FORMA DE LAGRANGE

observación: coste computacional

- para calcular $p(x)$ en un punto $x\notin\{x_i\}_{i=0}^{n}$
  - evaluar todos los $L_j$ en $x$ $O(n^2)$ dependen de $x$
  - evaluar $p$ como c.l. $O(n)$
- para añadir un punto de interpolación $(x_{n+1},y_{n+1})$
  - ↳ es necesario recalcular todos los $L_j(x)$

demostración:

- cada $L_j \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} y_j L_j \in \mathcal{P}_n$
- $L_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$
- $p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i$ : es el único polinomio interp. #

corolario: sean $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ PEL por $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$\Rightarrow \{L_j\}_{j=0}^{n}$ son una base de $\mathcal{P}_n$.

para cualquier elección de los nodos se obtiene una base

demostración:

- todo $p \in \mathcal{P}_n$ es c.l. de los $L_j$:
  - sea $p \in \mathcal{P}_n$ y digamos $y_i = p(x_i)$, $i \in \{0..n\}$
  - $p$ es el único elemento de $\mathcal{P}_n$ que pasa por los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$.
  - $p(x) \overset{\text{TEOREMA}}{=} \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$ : es c.l. de los $L_j$
- los $L_j$ son l.i.
  - sea $\{c_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x) = 0 \quad \forall x$
  - sea $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x)$

    $\overset{\text{TEOREMA}}{\Rightarrow} q(x_j) = c_j \Rightarrow c_j = 0 \ \forall j \in \{0..n\}$

#

Ejercicio: sean $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ PEL por $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $q(x) = \sum_{j=0}^{n} 1 \cdot L_j(x)$ satisface $q(x_i) = 1$ $\forall i \in \{0 \dots n\}$
- $p(x) = 1$ es $\mathcal{P}_n$ y satisface $p(x_i) = 1$
- $\Rightarrow q = p$ por unicidad.

definición: decimos pesos baricéntricos de Lagrange por los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$$W_j = \frac{1}{\prod_{k=0, k \neq j}^{n} (x_j - x_k)}, \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

teorema: (forma baricéntrica de Lagrange)

sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$\Rightarrow$ el polinomio interpolador $p \in \mathcal{P}_n$ es

$$p(x) \overset{(*)}{=} \frac{\sum_{j=0}^{n} y_j \frac{w_j}{x - x_j}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{n}.$$

observación: coste computacional

- para calcular $p(x)$ en un $x \in \mathbb{R}$
  - evaluar todos los $w_j$ $O(n^2)$ no dependen de $x$
  - evaluar $p$ en $x$ usando $(*)$ $O(n)$
- para añadir un punto de interpolación $(x_{n+1}, y_{n+1})$
  - recalcular los $w_j$ $O(n)$ independientemente de $x$
  - evaluar $p$ en $x$ usando $(*)$ $O(n)$

demostración:

- sea $\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

"polinomio mónico que se anula en $\{x_i\}_{i=0}^{n}$"

↳ el único polinomio de grado $n+1$ que se anula en los $n+1$ nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ y que tiene coeficiente 1 para el monomio de orden $n+1$ (por eso "mónico")

$$\Rightarrow L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}$$

$$= w_j \frac{\Pi_{n+1}(x)}{x-x_j} = \Pi_{n+1}(x)\frac{w_j}{x-x_j}$$

- por el teorema anterior, el polinomio interpolador es

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}y_j$$

- usando la segunda de estas identidades (y el ejercicio)

$$1 = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}$$

$$\Rightarrow \Pi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}}$$

#