5.4 EJEMPLOS DE FORMAS DE JORDAN DE MATRICES DE ORDEN 3.

Ej 5.4.1. Halla una forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz de paso.

S/

$$p_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+8 = (\lambda-2)(\lambda+2)^2=0$$

$$\lambda = 2 \text{ (simple)}, \quad \mu = -2 \text{ (doble)}$$

- $E_1(2) = \ker(A-2I)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{array} \right\}$$

Con $x_3 = c$, $x_2 = -c$, $2x_1 = c - 3c = -2c \Rightarrow x_1 = -c$

$$E_1(2) = \langle (-1,-1,1) \rangle$$

- $E_1(-2) = \ker(A+2I)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{array} \right\}$$

$x_3 = c$, $x_2 = -c$, $2x_1 = -c+3c = 2c \Rightarrow x_1 = c$

$$E_1(-2) = \langle (1,-1,1) \rangle$$

Como $E_1(2) + E_1(-2) \subsetneq \mathbb{R}^3$ no se puede elegir una base de autovectores. La matriz no es diagonalizable. Pero hay que hallar una "forma de Jordan".

Se calcula $E_2(-2) = \ker(A-(-2)I)^2 = \ker(A+2I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{x_1 + x_2 = 0\}$$

$$E_2(-2) = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$$

Elegimos $\vec{u}_3 \in E_2(-2) \setminus E_1(-2)$, p.e. $\vec{u}_3 = (0,0,1)$. Tomamos

$$\vec{u}_2 = (A+2I)(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(-2)$$

Tomas $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(2)$; $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

Como $A(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1$, $A\vec{u}_2 = -2\vec{u}_2$ y $A\vec{u}_3 = u_2 - 2\vec{u}_3$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej 5.4.2. Halla una forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz de paso.

S/ Los autovalores son $\lambda = 1$ (doble) y $\mu = -1$ (simple)

Como $E_1(1)$ tiene dimensión 2, es diagonalizable

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej 5.4.3 Halla una forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz de paso

S/

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^2 = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ (triple)}$$

$E_1(-2) = \ker(A+2I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{ x_1 = x_2 = x_3 \}$$

$$E_1(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Con este autoespacio no se puede hallar una base de autovectores.

$E_2(-2) = \ker(A+2I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{ -x_1 + x_3 = 0 \}$$

$$E_2(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Como $E_2(-2) \subsetneq \mathbb{R}^3$, calculamos $E_3(-2) = \ker(A+2I)^3$. Como $(A+2I)^3 = 0$, $E_3(-2) = \mathbb{R}^3$. Tenemos

$$E_1(-2) \subsetneq E_2(-2) \subsetneq E_3(-2) = \mathbb{R}^3$$

Tomamos

$$\vec{u}_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_2(-2) \quad \text{p.e.} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = (A+2I)\vec{u}_3 \; ; \; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(-2)$$

$$\vec{u}_1 = (A+2I)\vec{u}_2 \; ; \; \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(-2)$$

Con esta elección: $A(\vec{u}_1) = -2u_1$; $A(u_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ y $A(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$. Entonces,

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej 5.4.4 Halla una forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz de paso.

S/ Autovalores: $\lambda = -1$ (triple). En este caso $E_1(-1)$ tiene dimensión 2.

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej 5.4.5. Halla la forma de Jordan <u>real</u> de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz de paso.

S/ $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -5 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[-\lambda(2-\lambda)+2\right] =$

$= (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + 2\right] = 0$; $\quad \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1+i, \quad \lambda_3 = 1-i$$

$E_1(3) = \ker(A - 3I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{ z_2 = z_3 = 0 \}$$

Para los autovalores complejos hay que proceder como se explicó antes del Teorema 5.3.3.

$E_1(1+i) = \ker(A-(1+i)I)$

$$\begin{pmatrix} 2+i & -5 & -5 \\ 0 & -1+i & -1 \\ 0 & 2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-i)z_1 - 5z_2 - 5z_3 = 0 \\ (-1+i)z_2 = z_3 \end{array} \right\}$$

$$(2-i)z_1 = 5z_2 + 5z_3 = 5i\, z_2 \Rightarrow z_1 = \frac{5i}{2+i} z_2 = \frac{5i(2-i)}{5} z_2$$

$= (1+2i)z_2.$

$$E_1(1-i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\text{en } \mathbb{C})$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
