Estructuras Algebraicas

Hoja 3. Acciones de grupos.

1. Decimos que G actúa transitivamente sobre Ω si para todo par de elementos $\alpha, \beta \in \Omega$ existe un $g \in G$ tal que $g \cdot \alpha = \beta$.

a) Demuestra que si G actúa sobre Ω entonces G actúa transitivamente sobre la órbita de cada $\alpha \in \Omega$.

b) Prueba que S_n actúa transitivamente sobre $\Omega = \{1, \dots, n\}$ por evaluación.

2. Demuestra que S_4 tiene un subgrupo H isomorfo a D_8.

3. Sean $H, K \leq G$ subgrupos finitos y $g \in G$. Probad que

$$|HgK| = \frac{|H||K|}{|(g^{-1}Hg) \cap K|}.$$

Deducid que

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

4. Sea G un grupo y sea $N \lhd G$ abeliano. Consideramos $\Omega = \mathrm{Hom}(N, N)$ el conjunto de homomorfismos de N en sí mismo. Dado $\phi \in \Omega$ y $g \in G$ escribimos ϕ_g para denotar a la aplicación $\phi_g(n) = \phi(g^{-1}ng)$ de N en sí mismo.

a) Probad que $g \cdot \phi = \phi_g$ define una acción de G sobre Ω.

b) Decidid si la acción es fiel o transitiva.

c) En el caso en que $G = \mathsf{D}_{2n}$ y $N = \langle \rho \rangle$ donde $\rho \in G$ tiene orden n, demostrad que $|\Omega| = n$ y que la acción de G sobre Ω tiene un único punto fijo si, y solo si, n es impar.

5. Sea G un grupo y S un subconjunto no vacío de G. Se definen $\mathbf{C}_G(S) = \{g \in G \mid gs = sg \text{ para todo } s \in S\}$ y $\mathbf{N}_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$.

a) Demostrad que $\mathbf{C}_G(S) \lhd \mathbf{N}_G(S) \leq G$.

b) Demostrad que si $S \leq G$ entonces, S es abeliano si, y solo si, $S \subseteq \mathbf{C}_G(S)$.

c) Demostrad que si $S \leq G$ entonces $\mathbf{N}_G(S)/\mathbf{C}_G(S)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(S)$.

6. Si un grupo G actúa sobre un conjunto Ω, probad que para cada $\alpha \in \Omega$ y $g \in G$ se cumple que

$$G_{g \cdot \alpha} = g \; G_\alpha \; g^{-1}.$$

Concluid que si G actúa transitivamente sobre Ω entonces los estabilizadores de elementos de Ω son subgrupos conjugados de G.

7. Sea G un grupo y sea H un subgrupo finito de G. Sean además T y S sistemas de generadores de G y H, respectivamente.

a) Demostrad que un elemento g de G normaliza H si, y sólo si, $gHg^{-1} \subseteq H$.

b) Demostrad que un elemento g de G normaliza H si, y sólo si, $gSg^{-1} \subseteq H$.

c) Demostrad que H es normal en G si, y solo si, $tSt^{-1} \subseteq H$ para todo $t \in T$.
Muestra que la finitud de H es una condición necesaria.

8. Sea G un p-grupo finito y sea $1 < N \lhd G$. Probad que $N \cap \mathbf{Z}(G) > 1$.

9. Sea p un primo. Demostrad que:

a) Si $|G| = p^2$ entonces G es abeliano.

b) Si $|G| = p^3$ no es abeliano, entonces $|\mathbf{Z}(G)| = p$.

10. Sean G un grupo finito simple y $H \leq G$ con índice primo p. Probad que p es el mayor primo que divide $|G|$ y que p^2 no divide a $|G|$.

11. Determinad la clase de isomorfía de los subgrupos de Sylow de S_4.

12. Sea $|G| = p^a q^b$ con p y q número primos. Demostrad que $G = PQ$ donde $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

13. Sea G un grupo finito, p un número primo y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Demostrad que si P es el único p-subgrupo de Sylow de G y $f\colon G \to G$ es un homomorfismo, entonces $f(P) \leq P$. Concluid que si $P \lhd G$ entonces P es característico en G.

14. Sea G un grupo finito, p un número primo y $H \lhd G$ con $|H| = p^k$. Demostrad que $H \subseteq P$ para todo P, p-subgrupo de Sylow de G.

15. Si $H \leq G$ son grupos finitos y $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, probad que existe $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $P \cap H = Q$. Concluid que $\nu_p(H) \leq \nu_p(G)$.

16. Sea G un grupo finito. Si $H \leq G$ tiene índice 2 en G, probad que $\nu_p(G) = \nu_p(H)$ para cada primo p impar. ¿Se satisface la misma igualdad si $p = 2$?

17. (Argumento de Frattini) Sea G un grupo finito y $N \lhd G$. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$, probad que $G = N\mathbf{N}_G(P)$.

18. Si $|G| = pq$ donde $p > q$ son números primos, demostrad que G tiene un único p-subgrupo de Sylow. ¿Cuántos elementos de orden p tiene G? ¿Y de orden q?

19. Si $|G| = p^2 q$ donde p y q son primos, demostrad que G no es simple.

20. Demostrad que todo grupo de orden 175 es abeliano.

21. ¿Cuántos grupos no abelianos de orden 28 tienen al menos un elemento de orden 4?

22. Demostrar que todo grupo de orden $5^3 \cdot 7^3$ tiene un subgrupo normal de orden 125.

23. Demostrar que todo grupo de orden 312 tiene un p-subgrupo de Sylow normal para algún primo p que divide al orden del grupo.

24. Sea G un grupo de orden 220.

a) Probad que G tiene un subgrupo H de índice 4 y un subgrupo K de índice 5.

b) Probad que $H \lhd G$.

25. Probar que no existen grupos simples de orden pqr donde p, q y r son primos distintos.

26. Hallad todos los grupos abelianos (salvo isomorfimo) de órdenes 36, 64, 96 y 100.

27. Hallad grupos isomorfos a los grupos $\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_9 \times \mathsf{C}_{35}$ y $\mathsf{C}_{26} \times \mathsf{C}_{42} \times \mathsf{C}_{49}$ que sean producto directo de grupos cíclicos de órdenes potencias de primos.

28. Hallad todos los grupos abelianos de orden 175.

29. ¿Cuántos elementos de orden 3 puede tener un grupo abeliano de orden 36?