4.6. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS COMPATIBLES E INDETERMINADOS.

Comenzamos con un ejemplo. Queremos resolver el SEL

$$\left.\begin{aligned} x+2y \quad &= 1 \\ 2x+y+3z &= 2 \\ 3x+y+5z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Sea $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}$ la matriz de sus coeficientes y $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\2&1&3&2\\3&1&5&3\end{array}\right)$ su matriz ampliada. Identificamos un menor básico de A:

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0\ ;\quad \begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&3\\3&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-3&3\\3&-5&5\end{vmatrix}=0\ ;\quad \text{rango}(A)=2$$

También $\text{rango}(\bar{A})=2$ pq. la tercera columna es igual a la primera.
Por el Teorema de Rouché-Frobenius, como $\text{rango}(A)=\text{rango}(\bar{A})=2$ $<3=$ nº de incógnitas el SEL es compatible e indeterminado.

Como las dos primeras filas son básicas de $\bar{A}$, por el Teorema del menor básico la tercera fila es c. l. de la 1ª y la 2ª y por tanto no introduce nuevas soluciones en el SEL. Puede suprimirse:

$$\left.\begin{aligned} x+2y \quad &= 1 \\ 2x+y+3z &= 2 \end{aligned}\right\}$$ (soluciones iguales que el original)

Poniendo las columnas no básicas de A a la derecha:

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+y &= 2-3z \end{aligned}\right\}$$

Este sistema puede resolverse por la regla de Cramer dejando como parámetro z:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2\\2-3z&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}}=\frac{1-4+6z}{-3}=1-2z\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\2&2-3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}}=\frac{2-3z-2}{-3}=z$$

Con $z=t$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2t\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Resumimos el procedimiento del ejemplo anterior:

1) Detectar un menor básico de A

2) Suprimir las ecuaciones que corresponden a filas no básicas de A

3) Poner a la derecha las incógnitas que corresponden a columnas no básicas de A

4) Resolver por la regla de Cramer.

Prop 4.6.1.

> Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $k = n - \text{rango}(A)$. Existen k vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ lineal. indep. en $\mathbb{K}^n$ tal que todas las soluciones del SELH $A\vec{x} = \vec{0}$ ($\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{0} \in \mathbb{K}^m$) son de la forma
> $$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}.$$

D/ Sea $R = \text{rango}(A)$ y supongamos que un menor básico de A está en la parte superior izquierda. Según lo dicho anteriormente el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene las mismas soluciones que

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + \dots + a_{1R}x_R & = & -a_{1,R+1}x_{R+1} - \dots & - a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{R1}x_1 + \dots + a_{RR}x_R & = & -a_{R,R+1}x_{R+1} - \dots & - a_{R,n}x_n \end{array}\right\} \quad (5.4)$$

Sea $\vec{V}_j = (V_{j,1}, \dots, V_{j,R})$, $j = 1, \dots, k = n - R$ la solución de (5.4) que se obtiene poniendo $x_{R+j} = 1$ y $x_{R+k} = 0$ si $k \neq j$. Los vectores $\vec{u}_j = (V_{j,1}, \dots, V_{j,R}, 0 \dots \underbrace{1}_{R+j} \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ son l.i ya que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} V_{1,1} & \dots & V_{1,R}, & 1 & 0 & \dots & 0 \\ V_{2,1} & \dots & V_{2,R}, & 0 & 1 & \dots & 0 \\ V_{k1}, & \dots & V_{k,R}, & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{k\times n} = k$$

Falta demostrar que toda solución de $A\vec{x}=\vec{0}$ es c.l. de $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$. Sea $\vec{x}=(x_1,\dots,x_R,x_{R+1},\dots,x_n)$ una solución de $A\vec{x}=\vec{0}$. Consideremos $\vec{x}_0=\vec{x}-x_{R+1}\vec{u}_1-\dots-x_n\vec{u}_k$. Este vector es de la forma $\vec{x}_0=(z_1,\dots,z_R,0,\dots,0)$. Además $\vec{x}_0$ es solución de $A\vec{x}=\vec{0}$ ya que

$$A\vec{x}_0=A\vec{x}-x_{R+1}A\vec{u}_1-\dots-x_nA\vec{u}_k=0$$

Por tanto $(z_1,\dots,z_R)$ es solución del SELH

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1R}x_R=0\\ \vdots \\ a_{R1}x_1+\dots+a_{R,R}x_R=0\end{array}\right\} \qquad (5.5)$$

obtenido de (5.4) poniendo $x_{R+1}=\dots=x_n=0$. Como la matriz de este sistema es un menor básico de A, su det $\neq 0$. Por tanto (5.5) sólo posee la solución trivial $z_1=\dots=z_R=0$. Así pues, $\vec{x}_0=\vec{0}$ y $\vec{x}=x_{R+1}\vec{u}_1+\dots+x_n\vec{u}_k$, que era lo que queríamos demostrar.

Teorema 4.6.2. (Estructura de las soluciones de un sistema lineal)

Sea $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $k=n-\text{rango}(A)$. Sea $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ una solución particular de $A\vec{x}=\vec{b}$ ($\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{b}\in\mathbb{K}^m$). Existen k vectores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$, l.i. tal que todas las soluciones de $A\vec{x}=\vec{b}$ son de la forma

$$\vec{v}+c_1\vec{u}_1+\dots+c_k\vec{u}_k \quad , \quad c_j\in\mathbb{K}$$

Las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$ son solución del sistema homogéneo asociado $A\vec{x}=\vec{0}$.

D/ Sea $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ solución de $A\vec{x}=\vec{b}$. Como $\vec{v}$ es también solución de $A\vec{x}=b$ se tiene $A(\vec{x}-\vec{v})=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$.

Por la prop. 4.6.1, existen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ l.i. en $\mathbb{K}^n$ tal que

$$\vec{x} - \vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_k\vec{u}_k \quad , \quad c_j \in \mathbb{K}.$$

De aquí se deduce el resultado. ∎

Ej 6.1. Describe las soluciones del SEL

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

S/ Tomando como menor básico $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, todas las soluciones son de la forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 22 \\ -16 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix}.$$
