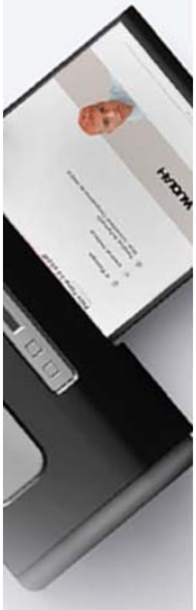
Final.pdf

Anónimo

Geometría de Curvas y Superficies

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid



Ej. 1	Ej.2	Ej.3	NOTA

Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas.
Geometría de Curvas y Superficies. Examen final. 27 de mayo de 2019.
Apellidos .... Nombre .... D.N.I. ....

Instrucciones:

- La pregunta correspondiente al **tercer parcial** es el **Ejercicio 3**.
- Si haces solo el tercer parcial, tienes **una hora y media** de tiempo. Si no, tienes **tres horas**.

Ejercicio 1.

1. Consideramos la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t\right).$$
   a) Demuestra que α es una curva regular, y calcula su triedro de Frenet.
   b) Usando el apartado anterior, determina la curvatura y la torsión de α.
   c) Demuestra que la traza de α es una circunferencia. Encuentra su centro, su radio, y la ecuación del plano en la que está contenida.

2. *a*) Da la definición de *geodésica* y *curva asintótica* en una superficie regular S.
   b) Demuestra que una curva (parametrizada por longitud de arco) es simultáneamente una curva asintótica y una geodésica de una superficie regular S si y solo si (su traza) es un segmento de recta.

Ejercicio 2.

1. Sea $\mathbb{X} : U \to S$ una parametrización de un abierto de una superficie regular S. Supongamos que la primera forma fundamental de S, en términos de la parametrización $\mathbb{X}(u,v)$, tiene matriz
$$I(u,v) = \begin{pmatrix} u+v & \sqrt{v} \\ \sqrt{v} & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Sea $\beta : \mathbb{R} \to U$ dada por $\beta(t) = (t,1)$, y sea $\alpha : \mathbb{R} \to S$ con $\alpha(t) = \mathbb{X}(\beta(t))$. Calcular la longitud de α entre $t = 0$ y $t = 3$.
   b) Sea $R \subset U$ dada por $0 < u < 4$ y $0 < v < 4$. Calcular el área de $\mathbb{X}(R)$.

2. Consideramos el trozo de cilindro $C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$, y el paraboloide P de ecuación $z = x^2 + y^2$. Sea
$$f : C \to P$$
dada por $f(x,y,z) = (x\sqrt{z}, y\sqrt{z}, z)$.
   a) ¿Es f una isometría local?
   b) Calcular $Df_p(0,0,1)$. (*Indicación: Puede ser útil considerar la curva $\alpha : (0,\infty) \to C$ dada por $\alpha(t) = (0,1,t)$.*)

Ejercicio 3.

1. Sea S la superficie con parametrización
$$\mathbb{X}(u,v) = ((3+\cos u)\cos v, (3+\cos u)\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u),$$
con $(u,v) \in (0,2\pi)\times(0,2\pi)$. (Geométricamente, S es (el complemento de un meridiano en) el toro obtenido al girar la circunferencia de centro $(3,0,0)$ y radio 1 contenida en el plano $y=0$ alrededor del eje z.)

   a) Calcular la primera forma fundamental de S en función de la parametrización $\mathbb{X}$.
   b) Determinar la expresión de un vector normal unitario a S en el punto $\mathbb{X}(u,v)$.
   c) Consideremos la curva
   $$\alpha : (0,2\pi) \to S$$
   dada por $\alpha(v) = \mathbb{X}(\pi, v)$. Calcular las curvaturas normal y geodésica de α. ¿Es (una reparametrización por longitud de arco de) α una geodésica en S?
   d) Responder a las mismas preguntas que en el apartado anterior para la curva $\beta : (0,2\pi) \to S$ dada por $\beta(v) = \mathbb{X}(\pi/2, v)$.

Contestar a uno y solo uno de los apartados 2) y 3).

2. Sea S regular una superficie con curvatura gaussiana negativa en todo punto. Demostrar que no existe en S un polígono de cuatro lados, todos geodésicos, y con ángulos internos iguales a $\pi/2$.

3. Probar que no existe una superficie $\mathbb{X}(u,v)$ tal que
$$\begin{array}{ccc} E = v^2 & F = 0 & G = 1 \\ e = v^2 & f = 0 & g = 1 \end{array}$$