Cálculo 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 5: Límites y derivadas

1.- Sea f tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. probar que

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

Indicación: ver ejercicio 9-b de la hoja de problemas número 2.

2.- (*) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{3\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + x^2}{2\,x^2}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{[x]}}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)}$

(g) $\lim_{x\to 1^-} (x^5-2\,x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$ (h) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x\,2^x}{2+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (i) $\lim_{x\to 1^+} (x^5-2\,x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$

(j) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2\,x-1}$ (k) $\lim_{x\to 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}}$ (l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (b) $f(x) = \arccos x$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$

(d) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

(g) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2, \\ a\cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b\cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \le 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a\cdot\cos x & \text{si} \quad x \le 0, \\ b - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ c\cdot\arctan x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi\,x) + a & \text{si} \quad x \le 0, \\ a + b\cdot x & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ c\cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

5.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \log\dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y = \log(x^2 \log^3 x)$

(d) $y = x^{\tan(2\,\pi x)}$ (e) $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x^2-1}$ (f) $y = x^{\log x}$

(g) $y = \log_x e^x$ (h) $y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)$ (i) $y = \sec(\operatorname{cosec} x)$

6.- Probar que si $f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $|f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- (*) a) Sea f una función diferenciable par. Calcular $f'(0)$.
b) Sea f una función diferenciable. Demostrar que si f es par entonces f' es impar. Demostrar que si f es impar entonces f' es par.
c) Encontrar un contraejemplo que pruebe que aunque f' sea par esto no implica que f sea impar.

8.- (*) a) Sean f, g, h funciones tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

demostrar que si $g(0) = h(0)$ y además $g'(0) = h'(0) = 0$ entonces f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.
b) Encontrar un contraejemplo que demuestre que aunque además de lo anterior tengamos $g''(0) = h''(0) = 0$, es posible que $f''(0)$ no exista.

9.- (*) Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que para todo x se cumple $x = f(x)g(x)$. ¿Y si no se pide que sean derivables?

10.- (*)Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

(I) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$

(II) Si $l(x) = m \cdot x + n$ y $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0$, entonces $l(x) = t(x)$.

11.- Hallar el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

12.- (*) Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x + 1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

13.- (*) Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número racional mayor que $\sqrt{2}$. Calcular una fórmula para la intersección $(x_1, 0)$ de la tangente a $f(x)$ en x_0 con el eje X y probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante fracciones y explicar esta aproximación geométricamente.

14.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

15.- Sea $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Calcular $f^{2010)}(x)$ (derivada de orden 2010).