Espacios vectoriales

En $= \mathbb{R}^2$ sabemos definir una operación "suma"

+) $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $V = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$; $\quad u + V = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

Y otra operación "multiplicación por escalares"

•) $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbb{R}^2$

Se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

1) $u + (V + w) = (u + V) + w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^2$

2) $u + V = V + u \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

3) $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + \vec{0} = u$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$

4) $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\exists (-u) \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + (-u) = \vec{0}$

5) $\lambda(u + V) = \lambda u + \lambda V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, V \in \mathbb{R}^2$

6) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; u \in \mathbb{R}^2$

7) $(\lambda \mu) u = \lambda (\mu u) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; u \in \mathbb{R}^2$

8) $1 \cdot u = u \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$

Por ejemplo, para comprobar 2) escribimos:

- $u + V = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) =$
$(y_1, y_2) + (x_1, x_2) = V + u$

- Claramente $\vec{0}$ debe ser $\vec{0} = (0, 0)$. Asimismo, si $u = (x_1, x_2)$ entonces $-u$ debe ser $-u = (-x_1, -x_2)$ etc

<u>Definición</u>: Un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$ es un conjunto V en el que se han definido dos operaciones:

$$+)\quad \begin{aligned} V\times V &\longrightarrow V \\ (u,v) &\longmapsto u+v \end{aligned} \qquad \cdot)\quad \begin{aligned} \mathbb{K}\times V &\longrightarrow V \\ (\lambda,u) &\longmapsto \lambda u \end{aligned}$$

que verifican las 8 propiedades anteriores.

<u>Ejemplos</u>.

1) $\mathbb{R}^2$ es un e.v. sobre $\mathbb{R}$.

2) Más generalmente $\mathbb{R}^n$ es un e.v. sobre $\mathbb{R}$ (incluido el caso $n=1$) con las operaciones obvias:

$+)\ (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$; $\cdot)\ \lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

3) $\mathbb{R}^n$ es un e.V. sobre $\mathbb{Q}$ con las mismas operaciones

4) $\mathbb{C}^n$ " " " " $\mathbb{C}$ " " " "

5) $\mathbb{C}^n$ " " ... $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ " " " " ¿Y sobre $\mathbb{R}$?

6) $\mathbb{Q}^n$ " ... $\mathbb{Q}$ " " ...

7) $\mathcal{M}_{3\times3}$ es un e.V. sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones obvias:

$+)\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$; $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$

$\cdot)\ \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{pmatrix}$

¿Quién es ahora $\vec{0}$? ¿Y $(-A)$?

8) Más generalmente $\mathcal{M}_{n\times m}$ es un e.v. sobre $\mathbb{R}$, poniendo

+) $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & \cdots, & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1}, & \cdots, & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$

•) $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$

9) El conjunto de sucesiones de números reales (resp. complejos) es un e.v sobre $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

$\mathcal{S} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots) \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ es un e.v sobre $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

con las operaciones análogas a las definidas en $\mathbb{R}^n$.

10) Si X es cualquier conjunto y $\mathbb{K}$ es un cuerpo; el conjunto de funciones $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \}$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones.

+) $f+g : X \longmapsto \mathbb{K}$ es la aplicación $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

•) $\lambda f : X \longmapsto \mathbb{K}$ " " " $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

¿ Quiénes son ahora $\vec{0}$ y $-f$?

Subespacios vectoriales

Definición Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $W \subset V$ se llama subespacio vectorial de W si se verifican:

i) $\vec{0} \in W$

ii) $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$

iii) $\lambda \in \mathbb{K}, u \in W \Rightarrow \lambda u \in W$

Observación: Un subespacio vectorial es él mismo un e.V, pues está claro que las 9 propiedades que verifican los elementos de V serán también verificadas por los de $W \subset V$.

Ejemplos

i) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

ii) Más generalmente las soluciones de un sistema homogéneo

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

iii) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=8\}$ no es un subesp. de $\mathbb{R}^3$.

¿Qué falla?

iv) Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones "de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$"; entonces los subconjuntos

$\mathcal{C} = \{ f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es continua} \}$, $\mathcal{D} = \{ f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es derivable} \}$,

$\mathcal{P} = \{ f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es polinómica} \}$ y $\mathcal{P}_n = \{ f \in \mathcal{F} \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}$

son subespacios de $\mathcal{F}$ (y cada uno del anterior)

v) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x+y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

Un ejemplo especialmente importante de subespacio vectorial es el subespacio generado por un conjunto de vectores.

Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{V}$ entonces

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \left\{ v \in \mathbb{V} \,/\, v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \text{ ; para algún } \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ (Comprobarlo!.)

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ se denomina subespacio de las combinaciones lineales (o el subespacio generado por) $v_1, \dots v_r$.

Definición: Un subconjunto de vectores $\{v_1, \dots v_r\}$ de un e.v. $\mathbb{V}$ se llama generador de un subespacio $\mathbb{W}$ si $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \mathbb{W}$ i.e. si todo vector de $\mathbb{W}$ es combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$. O, dicho de otra forma, si $\mathbb{W}$ es el subespacio más pequeño que contiene a $\{v_1, \dots, v_r\}$. Ponemos $\langle \phi \rangle = \{\vec{0}\}$.

Ejemplos:

i) Los vectores $e_1 = (1,0)$, $e_2(0,1)$ generan $\mathbb{R}^2$, pues $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ podemos escribir $(x,y) = x e_1 + y e_2$

ii) También generan $\mathbb{R}^2$ los vectores $v_1 = (2,-2)$, $v_2 = (1,1)$, $v_3 = (2,3)$ pues $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escribir $(x,y) = \frac{x-y}{4} v_1 + \frac{x+y}{2} v_2 + 0\, v_3$

iii) No generan $\mathbb{R}^2$ los vectores $w_1 = (1,3)$, $w_2 = (2,6)$ pues no existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $(1,1) = x\, w_1 + y\, w_2$

Dicho de otra forma: la ecuación $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 1 \end{array}\right\}$ no tiene solución.

Definición. Un subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ se dice linealmente independiente si la única combinación lineal de ellos que da $\vec{0}$ es la trivial. Es decir:

" $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ "

En los tres ejemplos anteriores tenemos

i) $\{e_1, e_2\}$ son independientes:

$(0,0) = \vec{0} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

ii) $\{v_1, v_2\}$ son independientes: (escribiendo los vectores como columnas)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Pero $\{v_1, v_2, v_3\}$ no lo son, pues el sistema

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

admite más soluciones que la trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

En efecto, resolviendo por el método de Gauss (por ejemplo), tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3 = \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 = -5/2\, x_3 \end{cases}$$

Así, tomando $x_3 = 4$, $x_2 = -10$, $x_1 = 1$ obtenemos una combinación lineal nula $\vec{0} = 1 \cdot v_1 - 10 v_2 + 4 v_3$ donde los escalares no son todos nulos.

iii) $\{w_1, w_2\}$ no es independiente, pues

$$-2w_1 + w_2 = \vec{0}$$

Ejercicio.

Probar que en cualquier e.v. se verifican las siguientes propiedades

1) $0v = \vec{0}$, $\forall v \in V$

2) $\lambda \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

3) $(-1)v = -v$, $\forall v \in V$

4) $v \neq \vec{0} \Rightarrow \{v \text{ indep.}\}$

(Se trata de probar estas afirmaciones utilizando sólo las 8 propiedades de e.v. Por ejemplo, la primera podría hacerse así:

$$0v \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ neutro de}(\mathbb{K},+)}}{=} (0+0)v \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. 6}}}{=} 0v + 0v \Rightarrow \vec{0} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop 4}}}{=} -0\vec{v} + 0v = -0v + (0v + 0v) =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop 1}}}{=} (-0v + 0v) + 0v \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop 4}}}{=} \vec{0} + 0v \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. 3}}}{=} 0v \Rightarrow \boxed{\vec{0} = 0v}$$

<u>Proposición</u>. $v_1, \dots, v_m$ son lin. dep. $\Leftrightarrow$ alguno de ellos es combinación lineal de los restantes.

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow)$ $\{v_1 \dots v_m\}$ lin. dep $\Rightarrow$ existe una combinación lineal $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \vec{0}$ con algún $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ $\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}v_{i-1} + v_i + \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1} + \dots + \lambda_i^{-1}\lambda_m v_m = \vec{0}$

$$\Rightarrow v_i = (-\lambda_i^{-1}\lambda_1)v_1 + \dots + (-\lambda_i^{-1}\lambda_{i-1})v_{i-1} + (-\lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1}) + \dots + (-\lambda_i^{-1}\lambda_m)v_m$$

$\Leftarrow)$ Si algún v_i es de la forma $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m = \vec{0}$ es una combinación lineal nula con algún coeficiente (al menos el i-ésimo) distinto de cero $\Rightarrow \{v_1 \dots v_m\}$ son lin. dep.

<u>Definición</u>. $\{v_1 \dots v_n\}$ es una base de V si y sólo si

1) $\langle v_1 \dots v_n \rangle = V$ y 2) $\{v_1 \dots v_n\}$ lin indep.

<u>Ejemplos</u>.

Según hemos visto en las páginas anteriores

- $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ no son " "
- $\{e_1 = (1,0, \dots 0),\ e_2 = (0,1,0 \dots 0), \dots, e_n = (0, \dots 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$, <u>la base canónica</u>.
- Una base de $\mathcal{M}_{2\times 3}$ es:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \\ E_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix},\ E_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$