Ejercicio: sean $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$

sean $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ polinomios elementales de Lagrange

sea $V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ Vandermonde

y sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demostrar que

1) $L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} (V^{-1})_{kj} \, x^k \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$

2) $f[x_0 \ldots x_k] = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) \, L_j[x_0 \ldots x_k] \quad \forall \, k \in \{0 \ldots n\}$

---

1) problema de cambio de base Lagrange $\leftrightarrow$ monomios

sabemos que $x^k = \sum_{j=0}^{n} x_j^k \, L_j(x) \quad \forall \, k \in \{0 \ldots n\}$
$\forall \, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ si fijamos un $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ L_2(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X} = V^t \qquad \mathbb{L}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = (V^t)^{-1} \mathbb{X} = (V^{-1})^t \mathbb{X}$$

$$\mathbb{L}_j = L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} (V^{-1})^t_{jk} \, x^k = \sum_{k=0}^{n} (V^{-1})_{kj} \, x^k$$

2) sabemos que el pol. interp. por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ en la base de Newton $\{N_k\}_{k=0}^{n}$ es

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0 \dots x_k] \, N_k(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \, L_j(x)$$

otro cambio de base Newton $\leftrightarrow$ Lagrange $\leftarrow$ si fuesemos capaces de escribir estos en la base de Newton podríamos igualar coeficientes

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(j)} N_k(x) = \sum_{k=0}^{n} L_j[x_0 \dots x_k] \, N_k(x)$$

$L_j \in \mathcal{P}_n$, $\{N_k\}_{k=0}^{n}$ base de $\mathcal{P}_n$

un polinomio de $\mathcal{P}_n$ es su propio interpolador

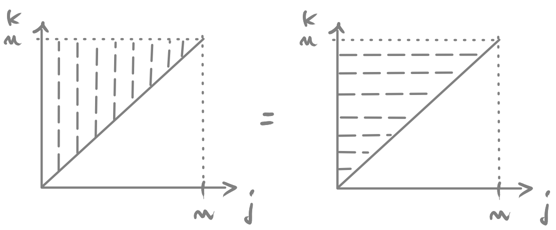
$$L_j(x_i) = \delta_{ij} \Rightarrow L_j[x_i, x_k] = \frac{L_j(x_i) - L_j(x_k)}{x_i - x_k} = \frac{\delta_{ij} - \delta_{kj}}{x_i - x_k}$$

es 0 si ambos $i, k \neq j$

$$\Rightarrow L_j[x_0 \dots x_k] = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{0 \dots k\} \; : \; \text{si} \quad j > k$$

$$\Rightarrow L_j(x) = \sum_{k=j}^{n} L_j[x_0 \dots x_k] \, N_k(x)$$

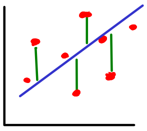
$$\sum_{k=0}^{n} f[x_0 \dots x_k] \, N_k(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sum_{k=j}^{n} L_j[x_0 \dots x_k] \, N_k(x)$$



$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} f(x_j) \, L_j[x_0 \dots x_k] \right) N_k(x)$$

Ejercicio: sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

y sea $\boxed{m < n}$



encontrar $p \in \mathcal{P}_m$ t.q.

POLINOMIO DE BEST FIT

$$(*) \quad \boxed{\sum_{i=0}^{n} |p(x_i) - y_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |q(x_i) - y_i|^2 \quad \forall q \in \mathcal{P}_m.}$$

- $p(x_i) = y_i$: $n+1$ ecuaciones para los coeficientes de $p \in \mathcal{P}_m$ ← ahora $m+1$

$\boxed{\text{más ecuaciones que incógnitas}}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

$$\underset{n+1}{\updownarrow} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}}^{m+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sistema incompatible

$$V a = y$$

- si $V = \hat{Q}\hat{R} \Rightarrow c = \hat{R}^{-1}\hat{Q}^* x$ es la solución de mínimos cuadrados (I): satisface

$$\boxed{\|Vc - y\|_2 \leq \|Va - y\|_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^{m+1}}$$

esto es $(*)$ con $p(x) = p_{MC}(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, porque

$$(Vc)_i = \sum_{k=0}^{m} V_{ik} c_k = \sum_{k=0}^{m} c_k x_i^k = p_{MC}(x_i).$$