21/10/2020

REPASO

Teorema de la función inversa. $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$.

Si $\det Df(a) \neq 0$, f tiene una inversa local g definida en un entorno $V \ni b = f(a)$ con $g(b) = a$ y $g \in C^1(V)$.

Como $f(g(y)) = y$, $Dg(y) = [Df(x)]^{-1}$ con $x = g(y)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = y$.

Si $f \in C^p(U)$, entonces $g \in C^p(V)$.

Teorema de la función implícita. $F: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^p(A)$. Supongamos que $F(a, b) = 0$ y

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$$

Existen $U \ni a$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \ni b$ con $V \subset \mathbb{R}^m$ y una única $f: U \to V$ tal que, $f \in C^p(U)$ y

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U \qquad (1)$$

NOTA 1. Hemos escrito $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$. La ecuación (1) dice que $y_1, \dots, y_m$ se pueden despejar en función de $x_1, \dots, x_n$ en un entorno de b.

NOTA 2 Si $F = (F_1, \dots, F_m)$ y $f = (f_1, \dots, f_m)$ de (1) y la regla de la cadena $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ o, matricialmente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m\times n} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m\times n} = 0$$