El resultado general sobre la convergencia de un método iterativo es el siguiente.

<u>teorema</u>: sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible y $b \in \mathbb{K}^n$ y sea $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$: $A\underline{x} = b$

la iteración $x_{k+1} = Bx_k + \phi$, $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\phi \in \mathbb{K}^n$

converge a $\underline{x}$ ($x_k \xrightarrow{k\to\infty} \underline{x}$) para todo $x_0 \in \mathbb{K}^n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i. & \phi = (I-B)A^{-1}b \\ ii. & \rho(B) < 1 \end{cases}$$

- pregunta: ϕ requiere la solución al sistema! ¿cómo obtener ϕ?
- ¿cuál es la velocidad de convergencia?

$$\| x_k - \underline{x} \| = \| B^k (x_0 - \underline{x}) \| \leq |||B^k||| \cdot \| x_0 - \underline{x} \|$$

por la fórmula de Gelfand $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon > 0$: $|||B^k||| \leq (\rho(B)+\varepsilon)^k \quad \forall k > k_\varepsilon$

para ε pequeño $(\rho(B)+\varepsilon)^k = \rho(B)^k \left(1 + \frac{k}{\rho(B)}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)$

$$\hookrightarrow \quad \| x_k - \underline{x} \| \lessapprox \rho(B)^k \| x_0 - \underline{x} \|$$

$\hookrightarrow$ el método converge tanto más rápido cuánto mas $\rho(B)$ es pequeño.

el problema sobre la forma de ϕ indica que no es trivial definir constructivamente un metodo iterativo

5.2 TECNICA SPLITTING (o del PRECONDICIONADOR)

<u>idea</u>: $A = M - N$, $M, N \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\Rightarrow A\underline{x} = b$ se escribe $M\underline{x} = N\underline{x} + b$

si M es invertible tenemos $\underline{x} = M^{-1}N\underline{x} + M^{-1}b$

"precondicionador"

$$= B\underline{x} + \phi$$

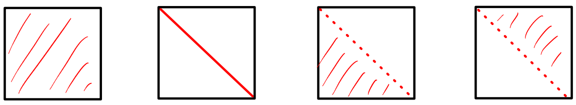
(es $\underline{x} = g(\underline{x})$)

<u>objetivo</u>: encontrar M, N tales que

- sea fácil invertir M (más fácil que invertir A)
- $\rho(M^{-1}N) < 1$

<u>métodos clásicos</u>:

notación: $A = D_A + L_A + U_A$



JACOBI: $M = D_A$, $N = -(L_A + U_A)$

↪ $B_J = -D_A^{-1}(L_A + U_A)$: $x_{k+1} = -D_A^{-1}(L_A + U_A)x_k + D_A^{-1}b$

converge a la solución de $Ax = b \iff \rho(B_J) < 1$

GAUSS-SEIDEL: $M = D_A + L_A$, $N = -U_A$

↪ $B_{GS} = -(D_A + L_A)^{-1}U_A$: $x_{k+1} = -(D_A + L_A)^{-1}U_A x_k + (D_A + L_A)^{-1}b$

converge a la solución de $Ax = b \iff \rho(B_{GS}) < 1$

origen e implementación

el sistema $Ax=b$ se puede escribir por componentes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad i=1\dots n$$

si $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \qquad i=1\dots n$$

idea de Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \qquad i=1\dots n$$

CADA COMPONENTE DEL PASO K+1 SE PUEDE CALCULAR SEPARADAMENTE A PARTIR DEL PASO K

$$x^{(k+1)} = D_A^{-1}\left(b - (L_A + U_A)\, x^{(k)}\right)$$

idea de Gauss-Seidel: usar para la componente i del paso $k+1$ las componentes $1..i-1$ ya conocidas al paso $k+1$ para acelerar la convergencia

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \qquad i = 1\dots n$$

AHORA HAY QUE IR EN ORDEN

esta iteración se puede escribir como splitting:

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

$$(D_A + L_A)\, x^{(k+1)} = b - U_A\, x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = -(D_A + L_A)^{-1} U_A\, x^{(k)} + (D_A + L_A)^{-1} b$$

pero su implementación es más rápida componente por componente, porque no requiere el cálculo de $(D_A+L_A)^{-1}$