(Semana 4).

Pablo Cuesta Sierra.

NIA: $422974 \equiv 1 \pmod 3$.

1. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+2z, x+2y+3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) $h(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1+2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

a) Con $\langle , \rangle$ habitual, $\mathcal{B}_3$ es O.N. entonces la matriz de h^* es la traspuesta de $A = M(h)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = M(h^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

h es autoadjunta. (Su matriz en una base O.N. es simétrica).

b) $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $(y_1, y_2) = \vec{y}$.

$$\langle h(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle (x_1+x_2, x_1+2x_2), (y_1, y_2) \rangle$$
$$= (x_1+x_2)y_1 + (2x_1+3x_2)(y_1+y_2)$$
$$(*) \quad = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$$

$$(*) \quad \langle \vec{x}, h^*(\vec{y}) \rangle = \langle (x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta y_2, \gamma y_1 + \lambda y_2) \rangle$$
$$= x_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + (x_1+x_2)((\alpha+\gamma)y_1 + (\beta+\lambda)y_2)$$
$$= (2\alpha+\gamma)x_1y_1 + (2\beta+\lambda)x_1y_2 +$$
$$+ (\alpha+\gamma)x_2y_1 + (\beta+\lambda)x_2y_2$$

$$(*) \quad \begin{cases} 3 = 2\alpha + \gamma \\ 4 = \alpha + \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 = 2\beta + \lambda \\ 3 = \beta + \lambda \end{cases} \to \begin{matrix} \beta = -1 \\ \lambda = 4 \end{matrix}$$

$\alpha = -1$, $\gamma = 5$

$$\Rightarrow \boxed{h^*(x,y) = (-x-y, 5x+4y)}.$$