9) $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. hermítico.

a) Id. Paralelogramo. $\forall u, v \in V$

$$\underbrace{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2}_{(*)} = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

$$(*) = \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle.$$

$$= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$$

$$\langle u, u-v \rangle - \langle v, u-v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \cancel{\langle u, v \rangle} + \cancel{\langle v, u \rangle} + \langle v, v \rangle$$
$$+ \langle u, u \rangle - \cancel{\langle u, v \rangle} - \cancel{\langle v, u \rangle} + \langle v, v \rangle$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

9b) Id. de polarización. $\forall u, v \in V$,

$$4\langle u, v \rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2$$

(1) $\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$

(2) $-\|u-v\|^2 = -\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle$

(3) $i\|u+iv\| = \langle u+iv, u+iv \rangle \cdot i$

$$= \underline{i\langle u, u \rangle} + \cancel{\langle u, v \rangle} - \cancel{\langle v, u \rangle} + \underline{i\langle v, v \rangle}$$

(4) $-i\|u-iv\| = -i\langle u-iv, u-iv \rangle$

$$= \underline{-i\langle u, u \rangle} - \cancel{\langle v, u \rangle} + \cancel{\langle u, v \rangle} - \underline{i\langle v, v \rangle}$$

(1) + (2) + (3) + (4) =

$$= \cancel{\langle u, u \rangle} + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \cancel{\langle v, v \rangle}$$

$$\cancel{-\langle u, u \rangle} + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \cancel{\langle v, v \rangle}$$

$$= 4\langle u, v \rangle.$$

9c) $\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$

$+ \quad i\|u+iv\|^2 = i\langle u, u \rangle + i\langle v, v \rangle$

$$\|u\|^2(1+i) + \|v\|^2(1+i) + 2\langle u, v \rangle$$

$$\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 - (1+i)\|v\|^2$$

$$= \underline{2\langle u, v \rangle}.$$

10) Sea $\|(x,y)\| = |x| + |y|$

Es una norma. Ya que

$\|(x,y)\| = |x| + |y| > 0$ si $(x,y) \neq \vec{0}$

y $\|(x,y)\| = |x| + |y| = 0 \iff (x,y) = \vec{0}$.

Además, $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|)$

$= |\lambda| \cdot \|(x,y)\|$

y $\|(x_1,x_2) + (y_1,y_2)\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$

$\leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

$= \|(x_1,x_2)\| + \|y_1,y_2\|$.

Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

$A = \|x+y\| + \|x-y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |x_1-y_1| - |x_2-y_2|$

$B = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2\left((|x_1| + |x_2|)^2 + (|y_1| + |y_2|)^2\right)$

Tomando los vectores $u = (1,0)$, $v = (1,1)$

$\|u+v\| + \|u-v\| = \|(2,1)\| + \|(0,-1)\| = 4$

$\not\parallel$

$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 2(1^2 + 2^2) = 2 \cdot 5 = 10$

No cumple la identidad del paralelogramo.

11) Sea V un e.v. euclídeo o hermítico

Si $x, y \in V \Rightarrow \|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

$\big| \|x\| - \|y\| \big|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle =$

(Desig. de C.S.: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

$= \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$

$\Rightarrow (\|x\| - \|y\|)^2 \leq \|x-y\|^2$

$\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$.