¿cuántas operaciones aritméticas se necesitan para $A = LU$ en $\mathbb{R}^n$? $\sim \frac{2}{3} n^3$

```
B3 | for k = 1:n-1
   |
B2 |    for i = k+1:n
   |        L(i,k) = U(i,k) / U(k,k);
B1 |        for j = k:n
   |            U(i,j) = U(i,k) - L(i,k) U(k,j);
   |        end
   |    end
   | end
```

$$B1 = 2(n-k+1) \qquad B2 = (1 + B1)(n-k)$$

$$B3 = \sum_{k=1}^{n-1} B2(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2(n-k)+3\right)(n-k)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n-k)}_{n-k=l}{}^2 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n-k)}_{n-k=l}$$

$k=1 \to l = n-1$

$k = n-1 \to l = 1$

$$= 2 \sum_{l=1}^{n-1} l^2 + 3 \sum_{l=1}^{n-1} l$$

$$= 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + 3 \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{3} n^3 + O(n^2)$$

la solución de sistemas triangulares también tiene $\sim n^2$

3.3 FACTORIZACIÓN LU CON PIVOTAJE

observación: $A = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(· tiene solución sencilla $\searrow Ax=b$)

· ~~no~~ se puede aplicar $A = LU$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{54} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 0 & \underbrace{1-2^{54}}_{-2^{54} \text{ en fl. p. 64 bit}} \end{pmatrix}$

$$LU = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ este puede ser un error grave

ejemplo: $Ax = b$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{1-2^{-54}} \approx -1 \\ y = \dfrac{1}{1-2^{-54}} \approx 1 \end{cases}$$

$$LU\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

ejemplo de pivotaje:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 17 & 10 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} A$$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} = L_1 U^{(1)}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_2} U^{(1)}$$

$\Rightarrow U^{(2)} = L_2^{-1} P_2 L_1^{-1} P_1 A$. $A = P_1^{-1} L_1 P_2^{-1} L_2 U^{(2)} \overset{?}{=} PLU$

definición: una permutación de $\{1, \dots, n\}$ es una bijección $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

sea $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, decimos matriz de permutación asociada a una π

$$P_\pi = \begin{pmatrix} — & e_{\pi(1)} & — \\ — & e_{\pi(2)} & — \\ & \vdots & \\ — & e_{\pi(n)} & — \end{pmatrix}$$

ejemplo: $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

preguntas para un algoritmo PLU

a) · $P_\pi^{-1} = P_{\tilde{\pi}}$?

· $P_{\pi_a} P_{\pi_b} = P_{\pi_c}$?

b) ¿qué pasa si intentamos intercambiar L_j y P_{j+1}^{-1} ? y ... ¿como lo podemos hacer?