Resumen-Teoria-EDO.pdf

FOURKLEIN

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

ECUACIONES DIFERENCIALES

Tema 1. Introducción

Ecuaciones diferenciales: una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función y sus derivadas con respecto a una o más variables o independientes. Sirven para modelizar muchos fenómenos de la naturaleza.

Orden: el orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

EDO: si la función desconocida depende de una única variable, se llama ecuación diferencial ordinaria. (EDO). Una EDO de orden n es una ecuación de la forma $F\left(t, y, \dots, y^{n)}\right) = 0$, donde F es una función de $n+2$ variables, que no es constante con respecto a la última. Decimos que y es solución de la EDO si verifica la ecuación.

EDP: si la ecuación diferencial depende de varias variables, se llamará ecuación en derivadas parciales (EDP).

Problemas de tipo Cauchy: si las condiciones iniciales de la ecuación diferencial, se llama problema de tipo de Cauchy, o problema de valor inicial (PVI).

Problema de contorno: si las condiciones iniciales se dan en los extremos de un intervalo, se llama problema de contorno.

Isoclinas: las curvas a lo largo de las cuales la pendiente es constante se llaman isoclinas.

Familia ortogonal de curvas: dada una familia de curvas $F(x, y, c) = 0$, se dice que $G(x, y, c) = 0$ es la familia ortogonal de curvas de F si para todas las curvas $\Gamma_1 \in F$ y $\Gamma_2 \in G$ se tiene que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq 0$ y se cortan perpendicularmente.

Ecuaciones autónomas: son aquellas ecuaciones diferenciales que no dependen de la variable independiente (la x). Son de la forma $y' = f(y)$.

Propiedades de las ecuaciones autónomas:

1. Si $y(x)$ es solución de una ecuación autónoma, también lo es $y(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$.
2. Si $f(a) = 0$, entonces $y(x) = a$ es solución (constante) y se llama solución de equilibrio.

Teorema de existencia para E. Autónomas: sea f continua, entonces existe una solución en un entorno del dato $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ al problema $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \end{cases}$. La solución es, además, única, si $f(\mathrm{y}_0) \neq 0$. En el caso $f(\mathrm{y}_0) \neq 0$, se tiene unicidad si $\lim_{y \to b} \int_{y_0}^{y} \frac{du}{f(u)} = \infty$, para b tal que $f(b) = 0$. Si el límite fuese finito, no habría unicidad.

Teorema: sea f continua tal que el problema de valor inicial $y' = f(y)$ tiene solución única.

1. Toda solución no constante es estrictamente monótona (creciente o decreciente).
2. Si y es una solución tal que $\lim_{x \to \infty} y(x) = c$ (tiene una asíntota horizontal en c), entonces la función constante $u(x) = c$ es también solución.

Teorema Práctica 1 EDO: sea $f \in C^1$ decreciente tal que existe un único b con $f(b) = 0$. Entonces el problema $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \end{cases}$ tiene solución única en un entorno de (x_0, y_0).

Solución estable, inestable y asintóticamente estable: una solución y a un PVI de solución única se dice estable si para todo $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|y_0 - y_0^*| < \delta$, entonces $|y(x) - y^*(x)| < \epsilon\ \forall x > x_0$. Se dice inestable si no es estable. Además, una solución estable es asintóticamente estable si $\lim_{x \to \infty} |y(x) - y^*(x)| = 0$.

Teorema de Criterio de Estabilidad: si hay unicidad para el PVI $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$. Entonces, y= a es una solución asintóticamente estable si $f'(a) < 0$ y es inestable si $f'(a) > 0$.

Tema 2. Técnicas básicas de integración.

Resolución por Integrales: para resolver el sistema $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, integramos en ambos lados de la ecuación de forma que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$, luego la solución es $y(x)y(x_0) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$.

<u>Ecuación de variables separadas:</u> una ecuación de variables separadas es de la forma $\begin{cases} y'(x) = f(x)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, de manera que puede escribirse $\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$ (siempre que $y_0 \neq 0$), e, integrando y haciendo el cambio de variable $y(x) = u$, se llega a $\log(y) - \log(y_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$.

<u>Función homogénea de grado k:</u> una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado k si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda > 0$.

<u>Ecuación homogénea:</u> una ecuación se dice homogénea si es de la forma $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tal que f es homogénea de grado 0. Entonces $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, u) = g(u)$ haciendo $u = \frac{y}{x}$, de manera que $\frac{u'}{g(u)-u} = \frac{1}{x}$.

<u>Ecuaciones exactas:</u> una ecuación se dice que es exacta si es de la forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ tal que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Entonces, se halla el potencial tal que $\Delta F = (M, N)$, de manera que $F\big(x, y(x)\big) = Cte$, que define implícitamente $y(x)$.

<u>Ecuaciones de factor integrante:</u> son ecuaciones no exactas de la forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, que se pueden multiplicar por un factor integrante $\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de forma que $\mu M + \mu N y' = 0$ sí es exacta.

Teorema de Factor Integrante: dada la ecuación $M + Ny' = 0$, si admite solución, entonces existe un factor integrante $\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\mu M + \mu N y' = 0$ es exacta. No hay un procedimiento para hallar el factor integrante, pero podemos buscarlo de manera que solo dependa de x (de manera que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ tal que lo de la derecha solo depende de x), solo de y (de manera que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ tal que lo de la derecha solo depende de y) o que sea una combinación de x e y.

<u>Ecuación lineal:</u> una ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{n)})$=0 es lineal si la derivada de mayor orden puede escribirse como $y^{n)} = f(x, y, \dots, y^{n-1)})$ tal que f es lineal en todas las variables menos x. Una ecuación lineal de primer orden es de la forma $y' = p(x)y + q(x)$.

Resolución de Ecuaciones Lineales de Primer Orden: para ecuaciones lineales de primer orden ($y' = p(x)y + q(x)$), puedo encontrar un factor integrante de manera que $\mu(x) = e^{-P(x)}$, donde $P(x)$ es tal que $P'(x) = p(x)$, por lo que, al multiplicar en la ecuación, llego a la solución explícita $y = e^{+P} \int q e^{-P}$.

Proposición. Unicidad de Ecuaciones Lineales de Primer Orden: si el problema $\begin{cases} y' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene solución, entonces es única.

Ecuaciones Lineales de Segundo Orden Reducibles: en ocasiones, hay ecuaciones lineales de segundo orden que pueden hacerse de primer orden con un cambio de variable:

- Si y no aparece en la ecuación, es decir, $F(x, y', y'') = 0$, cambio $z = y'$, de forma que $z' = y''$ y tengo $F(x, z, z') = 0$ de primer orden.
- Si x no aparece ($F(y, y', y'') = 0$ hago el cambio $z = y' = \frac{dy}{dx}$ de forma que $y'' = z\frac{dz}{dy}$ y tengo $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$.

Ecuación de Bernoulli: una ecuación de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, haciendo el cambio de variable $z = y^{1-n}$, se transforma en la ecuación lineal $z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$.

Ecuación de Ricatti: una ecuación de la forma $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ de la que se conoce una solución particular $y_1(x)$ se convierte, haciendo el cambio de variable $z = y - y_1$, en una ecuación de Bernoulli $z' = (q(x) + 2y_1)z + r(x)z^2$ que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2, P(x) = -q(x) - 2y_1$ y $Q(x) = r(x)$.

Tema 3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

<u>Ecuación lineal homogénea de segundo orden:</u> una ecuación lineal de segundo orden es de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$. Si $r(x) = 0$ se dice que es homogénea. En caso contrario, es no homogénea.

Teorema 3.1: si $y_g(x, c_1, c_2)$ es solución general de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal de segundo orden y $y_p(x)$ es solución particular de la ecuación original (no homogénea) entonces $y_g + y_p$ es solución general de la ecuación no homogénea.

Teorema 3.2: si y_1 e y_2 son soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ también es solución para cualesquiera c_1, c_2.

Corolario del Tª 3.2: cualquier combinación lineal de soluciones de una ecuación lineal homogénea de grado 2 es también solución.

<u>Linealmente dependientes:</u> decimos que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo $[a, b]$ son linealmente dependientes si existe una constante k tal que $f(x) = kg(x)$. En otro caso, son linealmente independientes.

Teorema 3.4: sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general en $[a, b]$.

Teorema de existencia y unicidad 3.5: sean $p(x), q(x)$ y $r(x)$ funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. Si $x_0 \in [a, b]$ entonces para todo $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tiene una única solución $y(x)$ en el intervalo $[a, b]$ tal que $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

<u>Wronskiano:</u> dadas dos funciones y_1 e y_2, definimos su Wronskiano como $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)$.

Lema 3.6: sean y_1 e y_2 soluciones de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en $[a, b]$. Entonces su Wronskiano $W(y_1, y_2)$ es idénticamente 0 o no se anula nunca en $[a, b]$.

Lema 3.7: si y_1 e y_2 son soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en $[a, b]$, entonces son linealmente dependientes en ese intervalo si y solo si su Wronskiano es idénticamente 0.

Encontrar $\boldsymbol{y_2}$ a partir de $\boldsymbol{y_1}$: se busca $y_2 = vy_1$ con v una función no constante. Sustituyendo y_2 en la ecuación, se llega a que $y_2 = (\int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int p(x)dx} dx)y_1$.

<u>Ecuaciones con coeficientes constantes:</u> si $p(x) = p, q(x) = q$ son constantes, se buscan soluciones de forma $y = e^{mx}$ y se obtiene que $m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$, de forma que se dan tres casos distintos:

1. $(p^2 - 4q) > 0$, entonces se tienen dos raíces reales distintas y la solución general es $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.
2. $(p^2 = 4q)$, entonces solo se tiene una solución particular, y para obtener la segunda se obtiene $y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$ y la solución general es $y = c_1e^{\frac{p}{2}x} + c_2xe^{\frac{p}{2}x}$.
3. $(p^2 - 4q < 0)$, entonces las soluciones son complejas, y se está trabajando en los reales. Usando la fórmula de Euler y sumando/restando y luego dividiendo por $2/2i$, se obtiene dos soluciones particulares linealmente independientes de forma que la solución general es $y = c_1e^{ax}\cos(bx) + c_2e^{ax}sen(bx)$, con $a = -\frac{p}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

<u>Ecuación lineal no homogénea de segundo grado:</u> son las ecuaciones de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tal que $r(x) \neq 0$. Su solución general es la suma de la solución general de lo homogénea y una solución particular de la no homogénea.

Método de los coeficientes indeterminados: sirve para encontrar la solución de la ecuación no homogénea una vez hallada la solución general de la homogénea cuando $p(x)$ y $q(x)$ son constantes y $r(x)$ es función tipo exponencial, seno, coseno, polinomio o combinación de ellas. Para ello, se buscan soluciones parecidas a $r(x)$ y sus derivadas:

1. $r(x) = e^{ax}$. Se buscan soluciones de la forma Ae^{ax}. Se obtiene que $A = \frac{1}{a^2+pa+q}$. Si el denominador fuese cero, se buscarían soluciones de la forma Axe^{ax}, y se obtiene $A = \frac{1}{2a+p}$. Si volviese a haber denominador nulo, se buscan soluciones de la forma Ax^2e^{ax} y se obtiene $A = \frac{1}{2} \neq 0$, que sería válido siempre.
2. $r(x) = sen(bx)$. Se buscan soluciones de la forma $Asen(bx) + Bcos(bx)$. En caso de que no se obtuvisen A y B, válidos se buscarían soluciones $x(Asen(bx) + Bcos(bx))$ y así sucesivamente.
3. $r(x)$ es un polinomio de grado n. Busco soluciones que sean polinomios de grado n, de forma que tendría n parámetros que encontrar.

Lema del principio de superposición 3.8: si y_1 e y_2 son soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x)$ y $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_2(x)$ respectivamente, entonces $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x) + r_2(x)$ tiene solución $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Es útil para usar el método de los coeficientes indeterminados si $r(x)$ es combinación de los casos estudiados, de forma que se dividiría la ecuación en varías para hallar solución de la original.

Método de variación de los parámetros: sirve para hallar la solución general de la no homogénea conociéndose la solución general de la homogénea $c_1y_1 + c_2y_2$. Se obtiene que la solución particular de la no homogénea es $y_p = y_1 \int -\frac{y_2 r(x)}{W(y_1,y_2)}dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W(y_1,y_2)}dx$.

<u>Oscilador armónico:</u> es un problema en el que se quiere estudiar el movimiento de un objeto afectado por la fuera de un muelle, una fuerza de rozamiento y una fuerza externa. Su ecuación diferencial es $x'' + \frac{v}{m}x' + \frac{k}{m}x = F(t)$, siendo F la fuerza externa, v la constante de rozamiento, k la constante del muelle, m la masa del objeto y x es la posición.

1. Sin fuerza externa:
   a. Sin rozamiento (vibraciones libres): tiene solución $x(t) = c_1sen(\omega t) + c_2cos(\omega t)$, de forma que el objeto oscila con amplitud constante y frecuencia $\frac{2\pi}{\omega}$. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
   b. Con rozamiento:
      i) Caso sobreamortiguado ($p^2 - \omega^2 > 0$): tiene solución $x(t) = c_1e^{at} + c_2e^{bt}$ con $a, b = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}$. Como mucho oscila una vez antes de detenerse.
      ii) Caso críticamente amortiguado ($p^2 = \omega^2$): tiene solución $c_1e^{-pt} + c_2te^{-pt}$. Como mucho oscila una vez antes de detenerse.
      iii) Caso subamortiguado ($p^2 - \omega^2 < 0$): tiene solución $x(t) = e^{-pt}(c_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - p^2}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - p^2}t\right))$, que sí oscila, pero con una amplitud que disminuye exponencialmente.
2. Con fuerza externa $F(t) = F_0\cos(\beta t)$:
   c. Sin rozamiento:
      I. $\omega \neq \beta$: la solución de la no homogénea es $\frac{F_0}{\omega^2 - \beta^2}cos(\beta t)$, de forma que la amplitud oscila, pero está acotada.
      II. $\omega = \beta$: la solución de la no homogénea es $\frac{F_0}{2\omega}tsen(\omega t)$, de forma que la amplitud no está acotada, va aumentando exponencialmente. Se le conoce como fenómeno de resonancia (puente de Tacoma).
   d. Con rozamiento: las soluciones de la no homogénea son comunes en cualquiera de los tres casos dados cuando no había fuerza externa. Se obtiene que la solución particular de la homogénea es $mcos(\omega t) + nsen(\omega t)$ con $m = \frac{F_0(\omega^2 - \beta^2)}{(\omega^2-\beta^2)^2 + 4\beta^2p^2}$ y n=$\frac{2F_0\beta p}{(\omega^2-\beta^2)^2+4\beta^2p^2}$. De la solución general de la ecuación, a la parte de la solución homogénea se le llama parte transitoria, pues desaparece cuando el tiempo avanza, y la de la no homogénea se llama parte estacionaria, que no desaparece y tiene amplitud acotada.

Tema 4. Ecuaciones lineales de orden superior. Sistemas de primer orden.

Ecuaciones de orden superior: las ecuaciones de orden superior son de la forma $y^{n)} + \cdots + p_0 y = r(x)$. Se pueden convertir, con un cambio de variables $y = y_1, y^{n-1)} = y_n$ a un sistema de ecuaciones de primer orden $\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_n = -p_0 y_1 - \cdots - p_{n-1} y_n + r(x) \end{cases}$ (#). Luego solo se estudiarán, al ser lo mismo, los sistemas. Los sistemas se pueden escribir de forma matricial como $Y' = AY + B$, que en el caso (#), A es una matriz $n \times n$ con coeficientes $-p_i$ en la última fila, con unos en la diagonal subprincipal superior y el resto ceros, y el vector columna B es nulo excepto el último coeficiente que es $r(x)$.

Teorema 4.1 de existencia y unicidad: dado el problema $Y' = AY + B$ y el dato inicial $Y(x_0) = Y_0$ de forma que los coeficientes de A y B son continuos en un intervalo $[a.b]$ de forma que $x_0 \in [a, b]$ existe una única solución Y en $[a.b]$. (la demostración sirve para la existencia y unicidad de ecuaciones de segundo orden y requiere usar la norma infinito y el teorema de la aplicación contractiva).

Notación: $C([a, b]) = \{Y: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continuas$\}$.

Proposición 4.2: la norma infinito es una norma y $(C([a, b]), || \cdot ||_\infty)$ es un espacio normado completo.

Lema 4.3: sea $Y' = AY$. Si $Y_1, \dots, Y_n$ son soluciones de $Y' = AY$ en el intervalo $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ y existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^n \alpha_j Y_j(x_0) = 0$ entonces para todo $x \in [a, b]$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j Y_j(x) = 0$.

Wronskiano para n>2: sean $Y_1, \dots, Y_n$:$[a, b] \to \mathbb{R}$, el Wronskiano es $W(Y_1, \dots, Y_n) = \det(Y_j)$.

Corolario 4.4: si $Y_1, \dots, Y_n$ son soluciones de $Y' = AY$ en $[a, b]$ entonces o bien $W(Y_1, \dots, Y_n) = 0$ en todo el intervalo, o bien no se anula nunca en el intervalo.

Teorema 4.5: las soluciones de $Y' = AY, Y(x_0) = Y_0$ tienen una estructura de espacio vectorial de dimensión n.

Corolario 4.6: sean $Y_1, \dots, Y_n$ soluciones linealmente independientes de $Y' = AY, Y(x_0) = Y_0$. Entonces toda solución del problema se puede escribir como $Y = \sum_{j=1}^n \alpha_j Y_j$ para todos $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.7: sea Y_p una solución de $Y' = AY + B$ y sea Y_h la solución del homogéneo. Entonces toda solución del problema se puede escribir como $Y = Y_p + Y_h$.

Resolución de sistemas homogéneos con coeficientes constantes: queremos resolver el problema $Y' = AY'$ con A matriz de coeficientes constantes. Se hará uso de los autovalores de la matriz:

1. Autovalores simples reales: si λ es un autovalor de A asociado a un autovector $\vec{v}$, es decir, $A\vec{v} = \lambda\vec{v}, Y(x) = e^{\lambda x}\vec{v}$. Luego, si tenemos una base de autovectores, tendremos todas las soluciones.
2. Autovalores simples no reales: si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es un autovalor, también lo es $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Si $\vec{w}_1 = \vec{a} + i\vec{b}$ es el autovector asociado a λ_1, entonces $\vec{w}_2 = \vec{a} - i\vec{b}$ es el asociado a λ_2. Pasando las soluciones complejas a forma polar y sumándolas y dividiéndolas entre 2, y restándolas y dividiéndolas entre $2i$, se obtienen dos soluciones reales $Y_1(x) = e^{\alpha x}[\cos(\beta x)\,\vec{a} - sen(\beta x)\vec{b}]$ e $Y_2(x) = e^{\alpha x}[\text{sen}(\beta x)\,\vec{a} + cos(\beta x)\vec{b}]$.
3. Autovalores compuestos reales: tenemos autovalores reales, pero no una base completa de autovectores. Busco soluciones de la forma e^{Ax}, Haciendo Taylor, si A es diagonal, e^{Ax} es una matriz diagonal $n \times n$ ($e^{a_{ii}x}$). Si A es diagonalizable, $A = P^{-1}DP$ de forma que $e^{Ax} = P^{-1}e^{Dx}P$, con D diagonal. Si A no es diagonalizable, se puede escribir como $A = P^{-1}JP$, con J la forma canónica de Jordan tal que $J = D + N$ tal que D es diagonal y N es nula excepto en la primera diagonal superior. Como D y N conmutan, $e^{D+N} = e^D e^N$, y como N es nilpotente, su polinomio de Taylor será finito y podemos escribir la solución como $e^{Ax} = P^{-1}e^D e^N P$. Si A no es diagonalizable y los autovalores son no reales, escribimos la forma de Jordan compleja como en el caso anterior y se restan y suman soluciones para hallar soluciones reales. Si un autovalor es 0, entonces se prueban soluciones polinómicas x, x^2 … en función de la multiplicidad del autovalor.

Lema 4.8: si A y B son matrices que conmutan, entonces $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Lema 4.9: en la descomposición de la forma de Jordan $J = D + N$, D y N conmutan.

Matriz nilpotente: una matriz A se dice nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Lema 4.10: la matriz N de la descomposición de Jordan es nilpotente.

Matriz fundamental: una matriz fundamental $\Phi(x)$ del problema $Y' = AY$ es tal que $\Phi'(x) = A\Phi(x)$ y $\Phi(0) = Id$.

Resolución de casos no homogéneos: se usará el método de variación de los parámetros. Conociendo una matriz fundamental $\Phi(x)$ del problema homogéneo, busco $Y_p(x) = \Phi(x)\alpha(x)$ solución particular, luego $\Phi\alpha' = B$, entonces $\alpha' = \Phi^{-1}B$y $\alpha(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)B(s)ds$.

Base de Jordan: si hay autovalores repetidos y necesito un autovector de la base de Jordan. Sea $\vec{u}_i$ el vector de la base que falta, entonces escribo $J\vec{e}_i$ como combinación lineal de la base canónica, y luego sustituyo los vectores de la base canónica por los autovectores de la base de Jordan para resolver y hallar el vector que resta.

Tema 5. Existencia y Unicidad I. Convergencia

Teorema 5.1: $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ es un espacio completo (es un espacio de Banach).

Convergencia puntual: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que converge puntualmente a f en $[a,b]$ si para todo $x\in[a,b]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ si y solo si para todo $x\in[a,b]$ y para todo $\epsilon>0$ existe n_0 tal que si $n>n_0$, $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

Convergencia uniforme: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ si para todo $\epsilon>0$ existe n_0 tal que si $n>n_0$, $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ para todo $x\in[a,b]$.

Lema 5.2: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ si $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.

Proposición 5.3: sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b])$. Si $f_n\to f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces $f\in C([a,b])$.

Proposición 5.4: sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b])$. Si f_n converge uniformemente a f en $[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}\int_b^a f_n(x)dx = \int_b^a f(x)dx = \int_b^a \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Función Lipschitz: sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. Decimos que f es Lipschitz en $[a,b]$ si existe $L>0$ tal que para todos los puntos $x,y\in[a,b]$, $|f(x)-f(y)|\leq |x-y|$.

Observación: f es Lipschitz en $[a,b]$ si y solo si $\max_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)| \leq \max_{t,s\in[a,b]} |t-s|$.

Teorema 5.5: dado el problema $\begin{cases} y' = f(x,y), x\in[a,b] \\ y(x_0)=y_0,\ x_0\in[a,b]\end{cases}$, si f es Lipschitz con respecto a su segunda variable para todos $y_1,y_2\in\mathbb{R}, x\in[a,b]$, entonces existe una única $y\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ que resuelve el problema.

Localmente Lipschitz: una función $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se dice localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable alrededor de (x_0,y_0) si existen $\delta,\epsilon,L\geq$ tales que $|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$ para pares $(x,y_1),(x,y_2)\in R=[x_0-\epsilon,x_0+\epsilon]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]$.

Teorema 5.6: sea A abierto en $\mathbb{R}^2$. Sea (x_0,y_0). Si F es localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable alrededor de (x_0,y_0) y continua en A, entonces el problema $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ tiene solución única en $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ para algún $\rho>0$.

Teorema 5.7: sea $F\colon A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, A abierto. Si F es continuo en $(x_0,y_0)\in A$, entonces el problema $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ tiene, al menos, una solución $y_0\colon(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ para algún $\delta>0$.

Observaciones teorema 5.7: el teorema no se va a demostrar y no garantiza unicidad. La prolongabilidad de soluciones es difícil de estudiar usando este teorema. No es el resultado de existencia más general posible, se puede pedir F solo integrable.

Iterados de Picard: la idea es construir soluciones de $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ como límites de una iteración discreta. Para aplicarlo, se necesita que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja uniformemente y que F sea continua. La iteración es $y_1(x)=y_0;\ y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(s,y_1(s))ds\,;\dots;y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(s,y_{n-1}(s))ds$, de forma que la solución es $y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)$.

Tema 6. Existencia y Unicidad: Aplicaciones y Prolongabilidad de Soluciones.

<u>Solución no prolongable a la derecha:</u> si $y(x)$ es una solución definida en un intervalo $[x_0, \bar{x})$ que no tiene ninguna prolongación a la derecha, decimos que es una solución no prolongable a la derecha y que $[x_0, \bar{x})$ es el intervalo maximal de existencia a la derecha (análogamente hacia a la izquierda).

Teorema 6.1: sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f(x,y)$ continua y localmente Lipschitz respecto de y en D. Sea y una solución de $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ no prolongable a la derecha, definida en un intervalo $[x_0, \bar{x}]$. Entonces, para todo compacto $K \subset D$, si $\big(x, y(x)\big) \in K$ para algún $x \in [x_0, \bar{x})$, entonces $\exists x^* \in (x, \bar{x})$ tal que $\big(x^*, y(x^*)\big) \notin K$.

Observaciones teorema 6.1: si D es acotado, entonces las soluciones se aproximan a su frontera. Si no es acotado, o bien las soluciones se aproximas a la frontera, o bien explotan.

Proposición 6.2: si $\exists M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq M$ para todo $(x,y) \in D = (a,b) \times \mathbb{R}$, entonces la solución no prolongable está definida $\forall x \in (a,b)$.

Lema de Gronwall 6.3: sean $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continuas. Sea $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua que satisface $w(x) \leq f(x) + \int_a^x g(s)w(s)ds \ \ \forall x \in [a,b]$. Entonces, $w(x) \leq f(x) + \int_a^x f(s)g(s)e^{\int_s^x g(u)du}ds \ \ \forall x \in [a.b]$. En particular, si $f(x) \equiv k$, entonces $w(x) \leq k e^{\int_a^x g(s)ds}$.

Proposición 6.4: si $|f(x,y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$ con $\alpha, \beta \geq 0$ funciones continuas en $[a,b] \forall (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, entonces la solución no prolongable está definida para todo $x \in (a,b)$.

Dependencia continua respecto del dato inicial: dados dos problemas $\begin{cases} y_1' = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_{0,1} \end{cases}$ y $\begin{cases} y_2' = f(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_{0,2} \end{cases}$ con f continua y Lipschitz de constante L respecto de la segunda variable, en una región que contenga las gráficas de y_1 e y_2, se tiene que $|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_{0,1} - y_{0,2}| e^{L(x-x_0)}$, es decir, que para x fijo, $y_1 \to y_2$ si $y_{0,1} \to y_{0,2}$. Esto es lo que se conoce como dependencia continua respecto del dato inicial.

Dependencia continua respecto del dato de la ecuación: dados dos problemas $\begin{cases} y_1' = f\big(x, y_1(x)\big) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_2' = f\big(x, y_2(x)\big) + E(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$ con f continua y Lipschitz de constante L respecto de la segunda variable y $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $|E(x,y)| \leq K$, entonces $|y_1(x) - y_2(x)| \leq K(e^{L(x-x_0)} - 1)$, que tiende a 0 si K tiene a 0. Esto se conoce como dependencia continua respecto del dato de la ecuación.

Tema 7: Sistemas Autónomos

Problema autónomo en $\mathbb{R}^n$: sean $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\bar{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dado por $t \to \bar{x}(t)$. Se llama problema o sistema autónomo a la ecuación $\bar{x}'(t) = V\big(\bar{x}(t)\big)$.

Curvas de campo: a las soluciones de los sistemas autónomos se les llama curvas de campo.

Campo completo: decimos que V es un campo completo si las curvas de campo de la ecuación están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Integral primera del campo: decimos que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, no constante, es una integral primera del campo si $f\big(\bar{x}(t)\big) = cte$ para cada curva del campo. Es decir, $0 = \frac{d}{dt} f\big(\bar{x}(t)\big) = \nabla f\big(\bar{x}(t)\big) \cdot \bar{x}'(t) = \nabla f\big(\bar{x}(t)\big) \cdot V(\bar{x}(t))$.

Proposición 7.1: si f es una integral primera del campo tal que $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$, entonces V es un campo completo.

Sistemas autónomos en el plano: son los problemas $\begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}$, en los que no aparece la variable independiente en el lado derecho.

Observación: como en las ecuaciones autónomas, si $(x(t), y(t))$ es solución, también lo es $(x(t+c), y(t+c))$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$.

Observación: cualquier sistema se puede convertir en un sistema autónomo añadiéndole una dimensión más: $\begin{cases} x'(t) = F(x,y,t) \\ y'(t) = G(x,y,t) \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = F(x,y,z) \\ y'(t) = G(x,y,z) \\ z'(t) = 1 \end{cases}$, haciendo $z(t) = t$. Pero, en general, esto suele complicar más la ecuación.

Integral primera del sistema: $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $E \in C^1$ y no es constante en ningún abierto de Ω se dice integral primera del sistema $\begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}$ si para cada solución $(x(t), y(t))$ se tiene que $E\big(x(t), y(t)\big) = cte$. Es decir, las soluciones se identifican con los conjuntos de nivel de E, y $\frac{d}{dt}\Big(E\big(x(t), y(t)\big)\Big) = 0$.

Sistemas conservativos: los sistemas que tienen una integral primera se llaman sistemas conservativos (la energía se conserva a lo largo de las trayectorias).

Sistemas Hamiltonianos: son de la forma $\begin{cases} x' = \frac{\partial V}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$ y son un caso particular de sistemas conservativos en los que $E(x,y) = V(x,y)$.

Ecuación del péndulo sin rozamiento: $x'' + ksenx = 0$ tiene como sistema asociado a $\begin{cases} x' = y \\ y' = -ksenx \end{cases}$, que tiene como integral primera a $E(x,y) = \frac{y^2}{2} - kcosx$, de forma que $y = \pm\sqrt{2}\sqrt{c + kcosx}$ y como puntos críticos a $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sistemas mecánicos conservativos: $x'' + f(x) = 0$ con sistema asociado $\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \end{cases}$ es una generalización de la ecuación del péndulo sin rozamientos. Tiene como integral primera $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + F(x)$ con $F(x) = \int f(x)dx$, luego $y = \pm\sqrt{2}\sqrt{c - F(x)}$. Los puntos críticos son $(x_c, 0)$ con $f(x_c) = F'(x_c) = 0$.

Linealización de sistemas: dado $\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$ con (a,b) punto crítico, es decir, $F(a,b) = G(a,b) = 0$, haciendo Taylor alrededor de (a,b) en ambas funciones y definiendo $\tilde{x} = x - a$ e $\tilde{y} = y - b$ (y omitiendo el error de la serie de Taylor), el problema se linealiza a $\begin{cases} \tilde{x}' = A\tilde{x} + B\tilde{y} \\ \tilde{y}' = C\tilde{x} + D\tilde{y} \end{cases}$, con $A = \frac{\partial F}{\partial x}$, $B = \frac{\partial F}{\partial y}$, $C = \frac{\partial G}{\partial x}$ y $D = \frac{\partial G}{\partial y}$. Como (a,b) es punto crítico en (x,y), $(0,0)$ es punto crítico en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Por eso, estudiaremos el $(0,0)$ en el sistema $\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$

, suponiendo que este es un punto crítico aislado, es decir, que $\begin{cases} 0 = Ax + By \\ 0 = Cx + Dy \end{cases}$ solo tiene como solución la trivial, (0,0) (o equivalentemente, que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$). Se estudiarán los autovalores y autovectores de esa matriz.

Autovalores reales positivos distintos: si se tienen dos autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ con dos autovectores asociados, respectivamente, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la solución será de la forma $\vec{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\,\vec{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,\vec{v}$, que tiende a 0 cuando $t \to \infty$. La solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \sim \frac{v_2}{v_1}$ cuando $t \to \infty$ (pendiente de $\vec{v}$) y $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \sim \frac{u_2}{u_1}$ cuando $t \to -\infty$ (pendiente de $\vec{u}$). Luego, se acerca al origen con pendiente paralela a $\vec{u}$ y se aleja de él con pendiente paralela a $\vec{v}$. El plano de fases se llama nodo inestable.

Autovalores reales distintos, uno positivo y otro negativo: se tiene $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ con autovectores asociados, respectivamente, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Cuando $t \to \infty$ (cua ando se aleja), tiene pendiente paralela a $\vec{v}$ y cuando $t \to -\infty$ (cuando viene) tiene pendiente paralela a $\vec{u}$. El plano de fases se llama punto silla inestable.

Autovalores reales distintos negativos: si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, se acerca al origen cuando $t \to \infty$. Cuando $t \to -\infty$, lo hace con pendiente paralela a $\vec{u}$ (se acerca al origen) y cuando $t \to \infty$ (se aleja del origen), lo hace con pendiente paralela a $\vec{v}$. Su plano de fases se llama nodo asintóticamente estable.

Autovalores reales dobles positivos con dos autovectores: si $\lambda > 0$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}(c_1\vec{u} + c_2\vec{v})$, que tiende al origen si $t \to -\infty$. El plano de fases puede tomar cualquier dirección, siempre alejándose del origen, y se llama nodo impropio inestable.

Autovalores reales dobles positivos con autovector doble: se tendrá una forma de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en una base $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ de forma que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\big(c_1\vec{u} + c_2(t\vec{u} + \vec{w})\big)$, que se acerca y se aleja del origen paralelo al vector $\vec{u}$. Podemos identificar la pendiente de las trayectorias en algunos puntos. Si $x' = 0, y = -\frac{B}{A}x$ (pendiente horizontal en esa recta) y si $y' = 0, y = -\frac{C}{D}x$ (pendiente vertical en esa recta). El plano de fases se llama nodo impropio inestable también.

Autovalor real doble negativo: si tenemos dos autovectores, tendremos el mismo caso que con el autovalor real doble y dos autovectores, pero estable (se acerca al origen en sentido hacia el origen). De igual forma, con un solo autovector será lo mismo que el caso de autovalor real doble positivo y un autovector, pero estable. En ambos casos, el plano de fases se llama nodo impropio asintóticamente estable.

Autovalores complejos $\boldsymbol{\lambda = \alpha \pm \beta i}$: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \cdot$ (función periódica). Si $\alpha = 0$, como la solución es periódica, las trayectorias son cerradas y se tiene que si $y' = 0, Cx + Dy = 0$ y si $x' = 0, Ax + By = 0$, y el plano de fases serán círculos siguiendo las pendientes anteriores, tendremos que identificar en qué sentido se recorren, y se llama centro estable. Si $\alpha \neq 0$, la parte periódica de la solución induce un giro, que será una espiral. Si $\alpha > 0$, la espiral se aleja del origen en sentido contrario al origen, y se llama foco inestable. Si $\alpha < 0$, lo hace en sentido hacia el origen, y se llama foco asintóticamente estable.

<u>Representación traza determinante:</u> sea $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con traza $T = A + D$ y determinante $N = AD - BC$. Si dibujamos la curva $N = \frac{T^2}{4}$, podemos ver qué tipos de puntos críticos tenemos según su región en el plano. A los que se encuentran en la curva y el eje y, correspondientes al centro y los nodos impropios, se les llama <u>casos límite</u>, pues pequeñas perturbaciones del sistema modificarían ligeramente los autovalores, de forma que el punto crítico podría cambiar. A los demás casos se les llama <u>principales.</u>

Teorema 7.2: supongamos que (0,0) es punto crítico del sistema $\begin{cases} x'(t) = ax + by + f(x,y) \\ y'(t) = cx + dy + g(x,y) \end{cases}$ de forma que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Entonces, si consideramos el sistema lineal asociado $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ y el (0,0) pertenece a uno de los casos principales, en el sistema completo seguirá siendo del mismo tipo. El teorema no nos dice nada si pertenece a un caso límite.

(Semi)definida positiva: sea $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $E(0,0) = 0$ y sea $R > 0$. E se dice definida positiva en $B_R(0,0) \Leftrightarrow E(x,y) > 0 \forall (x,y) \in B_R(0,0) - \{0,0\}$. E es semidefinida positiva en $B_R(0,0) \Leftrightarrow E(x,y) \geq 0 \forall (x,y) \in B_R(0,0) - \{0,0\}$.

Método de Liapunov: dado el sistema $\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$ y una función $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, E \in C^1$, consideramos $g(t) = E\big(x(t), y(t)\big)$ y estudiamos $g'(t) = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G$.

Teorema de Liapunov 7.3: sea $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E \in C^1, E(0,0) = 0$ definida positiva en $B_R(0,0), R > 0$.

i. Si $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G < 0$ en $B_R(0,0)$, entonces $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable.
ii. Si $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \leq 0$ en $B_R(0,0)$, entonces $(0,0)$ es un punto crítico estable.

Teorema de inestabilidad 7.4: si E es definida positiva con $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G > 0$, entonces todas las trayectorias próximas al origen se alejan de él, es decir, $(0,0)$ es un punto crítico inestable.

Teorema de Chetaev 7.5: sea $E \in C^1, E(0,0) = 0$. Si existe un abierto U tal que $(0,0) \in \partial U, E > 0\ \partial \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G > 0$ en U, entonces el $(0,0)$ es un punto crítico inestable.

Teorema de Bendixon 7.6: sean $F, G \in C^1$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ tiene signo constante en una región D simplemente conexa (sin agujeros). Entonces no puede haber trayectorias cerradas en D.

Teorema de Poincaré 7.7: si $(x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada, entonces rodea al menos a un punto crítico (luego si en una región simplemente conexa no hay puntos críticos, entonces no puede haber trayectorias cerradas.).

Teorema de Poincaré-Bendixon 7.8: sea A un compacto de $\mathbb{R}^2$. Si A contiene puntos críticos y $(x(t), y(t))$ es una trayectoria que entra en A en algún t_0 y se queda dentro $\forall t > t_0$, entonces esta es una trayectoria cerrada o una espiral que se acerca a una trayectoria cerrada cuando $t \to \infty$. En cualquier caso, existe una trayectoria cerrada en A.