§ Cambio de sistema de referencia baricéntrico.

Supongamos dados dos sistemas de referencia baricéntricos:

$$\mathcal{S}_1 = \{a_0, \dots, a_n\} \quad , \quad \mathcal{S}_2 = \{b_0, \dots, b_n\}$$

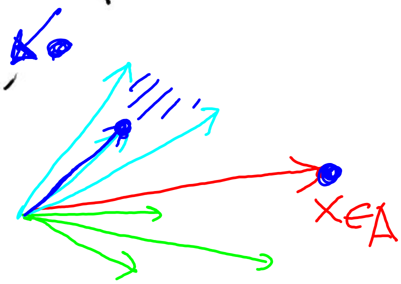
en un espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ de dimensión n. Dado $x \in A$, buscamos hallar la relación entre las coordenadas baricéntricas $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ de x en $\mathcal{S}_1$ y $(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ coordenadas baricéntricas de x. Entonces, para cualquier ~~$\theta \in A$~~ tenemos

$$\vec{\theta x} = \mu_0 \vec{\theta a_0} + \dots + \mu_n \vec{\theta a_n} \quad , \quad \mu_0 + \dots + \mu_n = 1 ,$$

$$\vec{\theta x} = \mu'_0 \vec{\theta b_0} + \dots + \mu'_n \vec{\theta b_n} \quad , \quad \mu'_0 + \dots + \mu'_n = 1 .$$

Por otro lado, para cada $k = 0, \dots, n$ tenemos que

$$\vec{\theta a_k} = \sum_{j=0}^{n} c_{kj} \vec{\theta b_j} \quad \text{con} \quad c_{k0} + \dots + c_{kn} = 1,$$



lo que da:

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k \left(\sum_{j=0}^{n} c_{kj} \vec{\theta b_j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \mu'_j \vec{\theta b_j} ,$$

y en consecuencia, $\mu'_j = \sum_{k=0}^{n} \mu_k c_{kj}$, $0 \le j \le n$, o también:

$$(\square) \qquad \begin{pmatrix} \mu'_0 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{n0} \\ \vdots & & \\ c_{0n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Pregunta: ¿Es C invertible?

$$\underline{\mu}' = C \, \underline{\mu}$$

$(n+1) \times (n+1)$

Observa que el determinante de la matriz (c_{ij}) es $\emptyset$ ya que $\sum_{j=0}^{n} c_{kj} = 1$, para todo $k = 0, \dots, n$. La ecuación matricial $(\square)$ se llama <u>ecuación del cambio de referencia</u> de $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.

$p\cdot 1 = 0 \iff \mathrm{char}(K) = p$

§. Baricentro de un conjunto finito de puntos.

Sea $\mathbb{A}=(A,V,\varphi)$ un K-espacio afín, donde K es un cuerpo de característica 0. Sea $S=\{a_0,\dots,a_n\}$ un sistema baricéntrico en $\mathbb{A}$.

Notación. Dados $p_0,\dots,p_k, x\in A$, si $\vec{px}=\alpha_0\vec{pp_0}+\dots+\alpha_k\vec{pp_k}$ con $\alpha_0+\dots+\alpha_k=1$, escribiremos:

$$x=\alpha_0p_0+\dots+\alpha_kp_k$$

$\vec{OX}=\alpha_0\vec{Op_0}+\dots+\alpha_k\vec{Op_k}$

observa que la expresión anterior no tiene sentido si la suma de coeficientes no es 1.

$\alpha_0+\dots+\alpha_k=1$

Definición. Se llama baricentro de m puntos $p_1,\dots,p_m\in A$ a un punto $b\in A$ tal que $b=\alpha_1p_1+\dots+\alpha_mp_m$ con $\alpha_1+\dots+\alpha_m=1$ y $\boxed{\alpha_1=\dots=\alpha_m}$.

Observa que si $d:=\alpha_1=\dots=\alpha_m$ entonces, de la igualdad $\alpha_1+\dots+\alpha_m=1$, deducimos que $dm=1$, luego $d=m^{-1}$. $\to d=\frac{1}{m}$

$\neq 0$

Ejemplo: Consideramos en $\mathbb{R}^n$ tres puntos afínmente independientes $X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_n)$, $Z=(z_1,\dots,z_n)$. Entonces, el baricentro del triángulo XYZ es

$$b=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{3}Z=\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}Z\right).$$

En $\mathbb{R}^2$ la igualdad anterior da la figura: