5.4 INVARIANTES DE LAS CÓNICAS Y REDUCCIÓN A SU FORMA CANÓNICA

La ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

puede escribirse como

$$(x,y,1)\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ \hline a_1/2 & a_2/2 & a \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)\,\bar{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

En los ejemplos de la sección 5.3 ha resultado "sencillo" calcular la forma canónica pq los giros son "sencillos" (de 45º). Veremos ahora que puede hallarse la forma canónica de una curva de 2º grado sin conocer el giro, ~~sino~~ sólo estudiando sus invariantes.

Todo lo que necesitamos hacer para transformar una cónica en su forma canónica es hacer un giro y una traslación:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

o bien escrito de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

C ortogonal

Def 1 Un invariante de la curva (1) es cualquier expresión de sus coeficientes que no varíe al hacer el cambio de sistemas de referencia como (3).

Al sustituir (3) en (1) se obtiene, con $b = \begin{pmatrix} a_1/2 \\ a_2/2 \end{pmatrix}$

$$(x',y',1)\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

o bien

$$(x',y',1)\left(\begin{array}{c|c} C^tAC & C^tAp + C^tb \\ \hline p^tAC + b^tC & p^tAp + b^tp + p^tb + a \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (4)$$

<u>Teorema 1</u>. Son invariantes de la curva de segundo grado dada en (1) los siguientes:

$$S = a_{11} + a_{22} = \text{traza}(A) \; ; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} = |A| \; ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix} = |\bar{A}|$$

D/ Escribir (1) en el s.d.r. (x', y') como

$$(x', y', 1) \left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline (b')^t & a' \end{array} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)\, \bar{A}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Comparando con (4) se obtiene

$$A' = C^t A C$$
$$b' = C^t A p + C^t b$$
$$a' = p^t A p + b^t p + p^t b + a$$

1. Tenemos, porque C es ortogonal,

$$|A'| = |C^t||A||C| = |A| \quad \therefore \; \delta \text{ invariante}$$

2. Ahora, usando los polinomios característicos

$$P_{A'}(\lambda) = |A_0' - \lambda I| = |C^t A C - C^t \lambda I C| = |C^t||A - \lambda I||C| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

Como

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{traza}(A)\lambda + |A|$$

y $P_{A'}(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(A')\lambda + |A'|$, se tiene $S = \text{traza}(A) = \text{tra}(A')$ es invariante pq. $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$.

3)

$$|\bar{A}'| = \left| \left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array} \right) \bar{A} \left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \right| = |C^t||\bar{A}||C| = |\bar{A}|$$

porque C es ortogonal. luego $|\bar{A}| = \Delta$ es tambien invariante.

———— x ————

CASO I (Tipo elíptico) $\lambda_1\lambda_2 > 0$

La cónica (2) se transforma en $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c$ con un giro y una traslación. Como $\delta = |A|$ es invariante se tiene

$$|A| = \delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 .$$

Como $\Delta = |\bar{A}|$ es invariante se tiene

$$|\bar{A}| = \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2(-c) = -\delta c$$

Luego, conocidos los autovalores λ_1, λ_2, $c = \frac{-\Delta}{\delta} = \frac{-|\bar{A}|}{|A|}$ y así se calcula la forma canónica.

———— x ————

CASO II (Tipo hiperbólico) $\lambda_1\lambda_2 < 0$

La cónica (2) se transforma en $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c$. Como en el CASO I,

$$c = \frac{-\Delta}{\delta} = \frac{-|\bar{A}|}{|A|} .$$

———— x ————

CASO III (Tipo parabólico) $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (digamos $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$)

La cónica (2) se transforma en

III a) $\lambda_2 y_2^2 = b x_2$ $(b \neq 0)$

ó

III b) $\lambda_2 y_2^2 = c$ (no es una parábola)

III a) $\left\{\begin{array}{l} |A| = \delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{traza}(A) = \lambda_2 = S \end{array}\right\}$ y $|\bar{A}| = \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b/2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ -b/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2 \frac{b^2}{4} = -S\frac{b^2}{4} \neq 0$

$\Rightarrow b^2 = -\frac{4\Delta}{S}$; elegir $b = \sqrt{-\frac{4\Delta}{S}}$ para la forma canónica

III b) $\left(\begin{array}{l} |A| = \delta = 0 \\ \text{traza}(A) = \lambda_2 = S \end{array}\right)$ y $|\bar{A}| = \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{vmatrix} = 0$

y sabemos que da dos rectas paralelas.

EJEMPLO Δ. Reducir a su forma canónica la curva (cónica)

$$x^2+2xy-y^2-6x+4y-3=0.$$

S/ $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; δ=traza(A)=0 , $|A|=-2=\lambda_1\lambda_2=\delta$ (Tipo hiperbólico)

$$\Delta=|\bar{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 2\\ -3 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 5 & -12\end{vmatrix}=24-25=-1\neq 0.$$

Autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)-1=\lambda^2-2=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=\sqrt{2}},\ \boxed{\lambda_2=-\sqrt{2}}$$

Forma canónica: $\sqrt{2}\,x_2^2-\sqrt{2}\,y_2^2=c$

con $c=\dfrac{\Delta}{\delta}=-\dfrac{-1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{-\frac{x_2^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}+\frac{y_2^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=1} \iff \boxed{\frac{X^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}-\frac{Y^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=1}$$

Observa que es una hipérbola equilátera con $a=b=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

——— x ———

El centro de una cónica como las elipses o las hipérbolas se pueden calcular de la siguiente manera: si el centro es el punto $C=\binom{\alpha}{\beta}$ la traslación

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

transforma la curva

$$f(x,y)=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a=0$$

en

$$a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}y_1^2+b_1x_1+b_2y_1+b=0$$

con

$$b_1=2a_{11}\alpha+a_{12}\beta+a_1,\quad b_2=a_{12}\alpha+2a_{22}\beta+a_2,\quad b=f(\alpha,\beta)$$

Observar que

$$b_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) \quad , \quad b_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)$$

Por tanto, (α,β) es solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x + 2a_{22}y + a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

que tiene solución única cuando $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = 4|A| \neq 0$, lo que siempre ocurre para elipses e hipérbolas.

EJEMPLO B. Determina el centro, los ejes y las asíntotas de la hipérbola del ejemplo A:

$$x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

S/ Su centro es la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 6 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{5}{2} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (Ejemplo A)

Autovectores:

$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1-\sqrt{2})x + y = 0 \; ; \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})x + y = 0; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Observa que, según la forma canónica, el eje principal está en la dirección de $\vec{v}_2$.

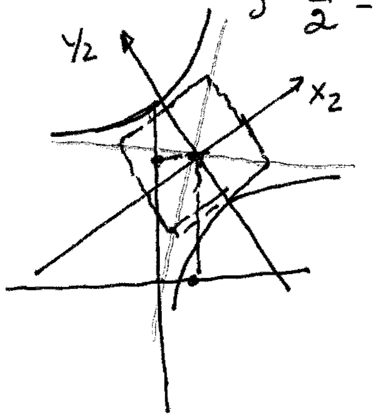
5.28

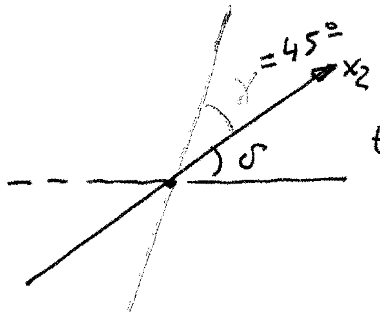
Eje principal: pasa por $C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ ~~en la~~ con dirección de $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$:

$$y - \frac{5}{2} = -(1+\sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Eje secundario: pasa por $C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ ~~en la~~ con dirección $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$:

$$y - \frac{5}{2} = (\sqrt{2}-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$





$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b} = 1$

$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{2} - 1$

La pendiente de una asíntota es

$$\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta} = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$$

Una asíntota:

$$y - \frac{5}{2} = (\sqrt{2}+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

La otra es perpendicular a esta, y, por tanto, su ecuación es

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(x - \frac{1}{2}\right) = (1-\sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

——— x ———