demostración:

- sea $p_n \in \mathcal{P}_n$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$

  el polinomio interpolador por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

  y, para $l < n$, elegimos $p_l(x) = \sum_{k=0}^{l} a_k N_k(x)$

  $\Rightarrow$ $p_l \in \mathcal{P}_l$ es el pol. int. por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{l}$

  ⌈ porque: sea $d(x) = p_n(x) - p_l(x) = \sum_{k=l+1}^{n} a_k N_k(x)$

  si $i \in \{0, \dots, l\}$ $\Rightarrow$ $d(x_i) = 0$, porque $N_k(x_i) = 0 \ \forall k > l$

  $\Rightarrow$ $p_l(x_i) = p_n(x_i) = f(x_i) \xrightarrow{} y_i$: $p_l \in \mathcal{P}_l$ y pasa

  por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{l}$ $\Rightarrow$ es el único pol. interp ⌋

- $\Rightarrow$ a_l, que es el coeficiente del monomio de grado máximo de p_l, depende solo de f y de $\{x_i\}_{i=0}^{l}$

  ↳ llamémoslo $a_l = f[x_0, \dots, x_l]$ NOTACIÓN

- para terminar la prueba, tenemos que ver que los a_k están definidos por la recursiva

  ↳ sean $r(x) = p_{n-1}(x; \{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n})$

  $s(x) = p_{n-1}(x; \{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n-1})$

  $q(x) = r(x) + \frac{x - x_n}{x_0 - x_n}(s(x) - r(x))$

  afirmación: $q = p_n$

  para ver que esto es cierto procedemos por unicidad observando que $q \in \mathcal{P}_n$, porque $r, s \in \mathcal{P}_{n-1}$

q pasa por todos los $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ $\left\{\begin{array}{l} q(x_0) = r(x_0) + s(x_0) - r(x_0) = s(x_0) = f(x_0) \\ q(x_n) = r(x_n) = f(x_n) \\ \text{si } i \in \{1 .. n-1\} \quad q(x_i) = \underset{\underset{f(x_i)}{\|}}{r(x_i)} + \frac{x_i - x_n}{x_0 - x_n} \underbrace{(s(x_i) - r(x_i))}_{0} \end{array}\right.$

- ahora podemos escribir q de 2 maneras, e igualar los coeficientes del monomio de grado máximo x^n:

$$q(x) = r(x) + \frac{x - x_n}{x_0 - x_n}(s(x) - r(x)) = f[x_0 .. x_n]\, x^n + \underbrace{\ldots}_{P_{n-1}}$$

coef. del monomio de grado max del pol. interp por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

$$\| \qquad = x \, \frac{s(x) - r(x)}{x_0 - x_n} + \underbrace{\ldots}_{P_{n-1}}$$

$$s(x) = f[x_0, \ldots, x_{n-1}]\, x^{n-1} + \underbrace{\ldots}_{P_{n-2}}$$

$$r(x) = f[x_1, \ldots, x_n]\, x^{n-1} + \underbrace{\ldots}_{P_{n-2}}$$

$$\Rightarrow \quad q(x) = \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}\, x^n + \underbrace{\ldots}_{P_{n-1}}$$

$\#$

proposición: sean $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall \ \pi : \{0 .. n\} \xrightarrow{BI} \{0 .. n\} \text{ permutación}$$

$$f[x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(n)}] = f[x_0 \ldots x_n].$$

demostración:

- sean $\{N_k\}_{k=0}^{n}$ PEN por $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, y $N_k^{\pi}(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{\pi(j)})$

- $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0 .. x_k]\, N_k(x) = f[x_0 .. x_n]\, x^n + \underbrace{\ldots}_{P_{n-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(k)}]\, N_k^{\pi}(x) = f[x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(n)}]\, x^n + \underbrace{\ldots}_{P_{n-1}}$$

$\#$

cómo calcular las diferencias divididas

$$
\begin{array}{llll}
f(x_0) & & & \\
 & f[x_0,x_1] & & \\
f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & f[x_1,x_2] & & \\
f(x_2) & & & \cdots \quad f[x_0,\dots,x_n] \quad \cdots \\
\vdots & \vdots & & \\
 & & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \\
 & f[x_{n-1},x_n] & & \\
f(x_n) & & f[x_{n-1},x_n,x_{n+1}] \;\cdots & \\
 & f[x_n,x_{n+1}] & & \\
f(x_{n+1}) & & &
\end{array}
$$

$n+1$	$3n$	$3(n-1)$	$\dots$	$3 \cdot 1$	
$n+2$	$n+1$	n		2	1

$\Rightarrow$ flop para calcular las diferencias divididas

$$= 3 \sum_{j=1}^{n} j = \frac{3}{2} n(n-1) \qquad O(n^2)$$

$+$ coste de calcular $f(x_0), \dots, f(x_n)$

si añadimos 1 nodo/pt. interpolación $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$

$O(n)$

- $3n$ flop adición para calcular las dif. div.
- $N_{n+1}(x) = N_n(x)(x-x_n)$: 2 operaciones

$$= \prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)\cdot(x-x_n)$$