Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

**Hoja 9**

**Superficies parametrizadas. Integrales sobre superficies. Teoremas de Stokes y Gauss.**

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

($a$) $\Phi(u,v) = (4\,u, 3\,u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0,1,6)$.

($b$) $\Phi(u,v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0,1,1)$.

($c$) $\Phi(u,\theta) = (\cosh u\,\cos\theta, \cosh u\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0,1,0)$.

($d$) $\Phi(u,v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1,1)$.

**Solución:** (a) $-2y + z = 4$ (b) No tiene (c) $y = 1$ (d) $-x - y + z = -2$

**Desarrollo:**

(a) Tenemos que $\Phi_u(u,v) = (4, 6u, 0)$, $\Phi_v(u,v) = (0, 1, 2v)$ y

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 6u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = 12uv\mathbf{i} - 8v\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (12uv, -8v, 4) = 4(3uv, -2v, 1)$$

Como $\Phi(0,1) = (0,1,6)$ evaluamos en $(0,1)$ y obtenemos $(\Phi_u \times \Phi_v)(0,1) = 4(0,-2,1)$. El plano tangente en $(0,1,6)$ tiene ecuación

$$< (x, y-1, z-6), (0,-2,1) >= 0,$$

es decir, $-2y + z = 4$. (Recuerda el plano que pasa por un punto $p$ y tiene normal $\mathbf{N}$ es el mismo que el plano que pasa por $p$ y tiene normal $\lambda\mathbf{N}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

(b) Tenemos que $\Phi_u(u,v) = (2u, 0, 0)$, $\Phi_v(u,v) = (0, 2ve^{v^2}, 2v)$ y $\Phi(0,0) = (0,1,1)$. Evaluando vemos que $\Phi_u(0,0) = \Phi_v(0,0) = (0,0,0)$ y por tanto no hay plano tangente en $(0,1,1)$.

(c) El coseno hiperbólico y el seno hiperbólico se definen por:

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

La derivada de $\cosh u$ es $\operatorname{senh} u$ y la derivada de $\operatorname{senh} u$ es $\cosh u$. Además $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.
Tenemos que $\Phi_u(u,\theta) = (\operatorname{senh} u \cos\theta, \operatorname{senh} u \operatorname{sen}\theta, \cosh u)$, $\Phi_\theta(u,\theta) = (-\cosh u \operatorname{sen}\theta, \cosh u \cos\theta, 0)$ y

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{senh} u \cos\theta & \operatorname{senh} u \operatorname{sen}\theta & \cosh u \\ -\cosh u \operatorname{sen}\theta & \cosh u \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\cosh^2 u \cos\theta, -\cosh^2 u \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u \cosh u)$$

Como $\Phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,1,0)$ evaluamos en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y obtenemos $(\Phi_u \times \Phi_v)\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,-1,0)$. El plano tangente en $(0,1,0)$ tiene ecuación

$$< (x, y-1, z), (0,-1,0) >= 0,$$

es decir, $y = 1$.

(d) Tenemos que $\Phi_u(u,v) = (2u, 0, 2u)$, $\Phi_v(u,v) = (0, 2v, 2v)$ y

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 2u \\ 0 & 2v & 2v \end{vmatrix} = (-4uv, -4uv, 4uv) = 4uv(-1,-1,1)$$

Por tanto $(\Phi_u \times \Phi_v)(1,1) = 4(-1,-1,1)$. El plano tangente en $\Phi(1,1) = (2,2,2)$ tiene ecuación

$$< (x-2, y-2, z-2), (-1,-1,1) >= 0,$$

es decir, $-x - y + z = -2$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

($a$) $\Phi(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$.

($b$) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 < r < 5$, $0 < \theta < \pi$.

**Solución:** (a) $N(\Phi(u,v)) = (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos v)$ (b) $N(\Phi(r,\theta)) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)$

**Desarrollo:**

(a) Tenemos que $\Phi_u(u,v) = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0)$, $\Phi_v(u,v) = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v)$ y

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ \cos u \cos v & \operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = (-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v)$$

Calculamos $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$:

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\|^2 = \cos^2 u \operatorname{sen}^4 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^4 v + \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v = \operatorname{sen}^2 v$$

Por tanto

$$\begin{aligned} N(\phi(u,v)) &= \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{1}{\operatorname{sen} v}(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v) \\ &= (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos v) \end{aligned}$$

(b) Tenemos que $\Phi_r(r,\theta) = (0,0,1)$, $\Phi_\theta(r,\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ y

$$(\Phi_r \times \Phi_\theta)(r,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)$$

Como$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$

$$N(\phi(u,v)) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)$$

3.- Dada la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerándola como:

($a$) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta,\varphi) = (2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 2\cos\varphi)$ con $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$.

($b$) Superficie de nivel 4 de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

($c$) Gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

**Solución:** $x + y + \sqrt{2}\, z = 4$

**Desarrollo:**

(a) Tenemos que $\Phi_u(u,v) = (-2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 2\cos u \operatorname{sen} v, 0)$, $\Phi_v(u,v) = (2\cos u \cos v, 2\operatorname{sen} u \cos v, -2\operatorname{sen} v)$ y

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v) = 4\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ \cos u \cos v & \operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = 4(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v)$$

Como $\Phi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = (1,1,\sqrt{2})$ evaluamos en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ y obtenemos $(\Phi_\theta \times \Phi_\varphi)\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$. El plano tangente en $(1,1,\sqrt{2})$ tiene ecuación

$$< (x-1, y-1, z-\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) >= 0,$$

es decir, $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z = 4\sqrt{2}$ o equivalentemente $x + y + \sqrt{2}z = 4$.

(b) Como $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ tenemos que $\nabla f(x,y,z) = 2(x,y,z)$ y evaluando $\nabla f(1,1,\sqrt{2}) = 2(1,1,\sqrt{2})$. La ecuación del plano tangente en $(1,1,\sqrt{2})$ es

$$< (x-1, y-1, z-\sqrt{2}), (1,1,\sqrt{2}) >= 0,$$

de nuevo, $x + y + \sqrt{2}z = 4$.

(c) La ecuación del plano tangente en $(1, 1, g(1, 1))$ es

$$z = g(1,1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)\,(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)\,(y-1)$$

Como $g(1, 1)) = \sqrt{2}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

evaluando obtenemos

$$z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$$

o equivalentemente $x + y + \sqrt{2}z = 4$.

4.- ($a$) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

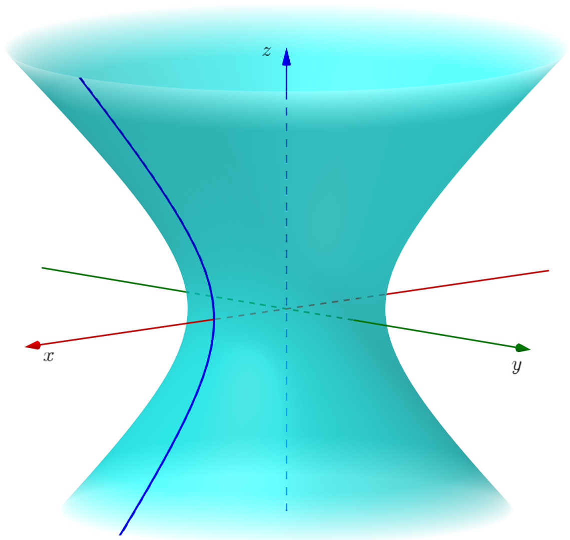
($b$) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

($c$) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

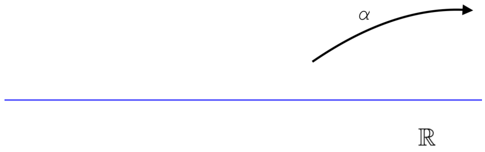
($d$) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0{,}5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0{,}5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en ($c$).

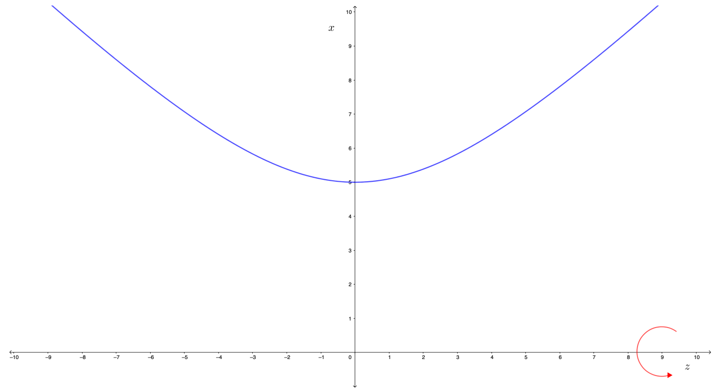
**Desarrollo:**

(a) El hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ puede verse como la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje $z$ la curva $x^2 - z^2 = 25$ con $x \geq 5$.



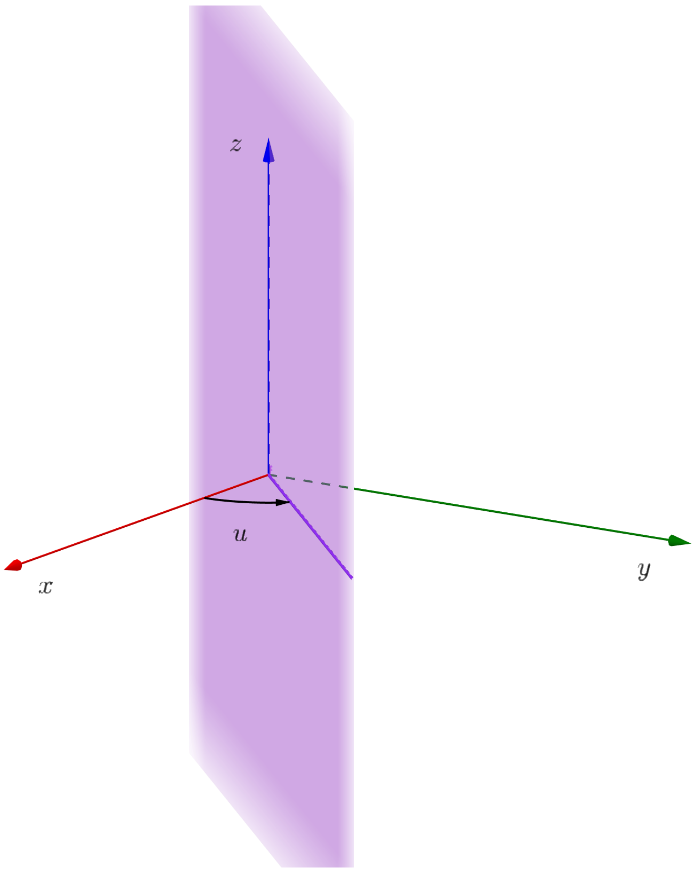

Supongamos por un momento que tenemos una parametrización de la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $\alpha(v) = (X(v), Z(v))$.



Si denotamos por $u$ el ángulo entre el plano $xz$ y el de revolución (ver dibujo), podemos parametrizar el hiperboloide por $\Phi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\Phi(u, v) = (X(v)\cos u, X(v)\operatorname{sen} u, Z(v))$$




Observa que $\Phi(0, v)$ nos da la curva en el semiplano $xz$ con $x > 0$, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ nos da la curva en el semiplano $yz$ con $y > 0$, $\Phi(\pi, v)$ nos da la curva en el semiplano $xz$ con $x < 0$ y $\Phi\left(\frac{3\pi}{2}, v\right)$ nos da la curva en el semiplano $yz$ con $y < 0$.

Volvamos a la parametrización de la curva, obsevamos que

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1$$

Si definimos $X(v) = 5\cosh v$ y $Z(v) = 5\,\mathrm{senh}\, v$, $\alpha(v) = (X(v), Z(v))$ nos da una parametrización de la curva. Observa que:

$$\left(\frac{X(v)}{5}\right)^2 - \left(\frac{Z(v)}{5}\right)^2 = \cosh^2 v - \mathrm{senh}^2\, v = 1 \quad \text{y} \quad X(v) = 5\cosh v \geq 5$$

Asi que $\Phi : U = [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(u, v) = (5\cosh v \cos u, 5\cosh v \,\mathrm{sen}\, u, 5\,\mathrm{senh}\, v)$$

parametriza el hiperboloide. (Si queremos $U$ abierto consideramos $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y estaríamos omitiendo la curva en el semiplano $xz$ con $x > 0$).

También podeis parametrizar la curva como una gráfica: $Z(v) = v$ y $X(v) = \sqrt{25 + v^2}$ y obtener otra parametrización del hiperboloide.

(b) Para nuestra parametrización obtenemos:

$\Phi_u(u, v) = (-5\cosh v \,\mathrm{sen}\, u, 5\cosh v \cos u, 0)$, $\quad \Phi_v(u, v) = (5\,\mathrm{senh}\, v \cos u, 5\,\mathrm{senh}\, v \,\mathrm{sen}\, u, 5\cosh v)$,

$$\begin{aligned}(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5\cosh v \,\mathrm{sen}\, u & 5\cosh v \cos u & 0 \\ 5\,\mathrm{senh}\, v \cos u & 5\,\mathrm{senh}\, v \,\mathrm{sen}\, u & 5\cosh v \end{vmatrix} \\ &= 25(\cosh^2 v \cos u, \cosh^2 v \,\mathrm{sen}\, u, -\,\mathrm{senh}\, v \cosh v))\end{aligned}$$

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = 25\cosh v(\cosh^2 v + \mathrm{senh}^2\, v)^{1/2} = 25\cosh v(2\cosh^2 v - 1)^{1/2} = 25\cosh v\sqrt{\cosh(2v)}$$

Por tanto

$$N(\phi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2v)}}(\cosh v \cos u, \cosh v \,\mathrm{sen}\, u, -\,\mathrm{senh}\, v)$$

(c) Sea $u$ tal que $\Phi(u, 0) = (5\cos u, 5\,\mathrm{sen}\, u, 0) = (x_0, y_0, 0)$, entonces

$$N(\phi(u, 0)) = (\cos u, \mathrm{sen}\, u, 0) = \frac{1}{5}(x_0, y_0, 0)$$

Por tanto la ecuación del plano tangente es

$$< (x - x_0, y - y_0, z), (x_0, y_0, 0) >= 0,$$

equivalentemente $x_0 x + y_0 y = 25$.

(d) Consideramos las rectas

$$\ell_1(t) = (x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5) = (x_0 - ty_0, y_0 + tx_0, 5t)$$

$$\ell_2(t) = (x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5) = (x_0 + ty_0, y_0 - tx_0, 5t)$$

Están en el plano $x_0 x + y_0 y = 25$ pues:

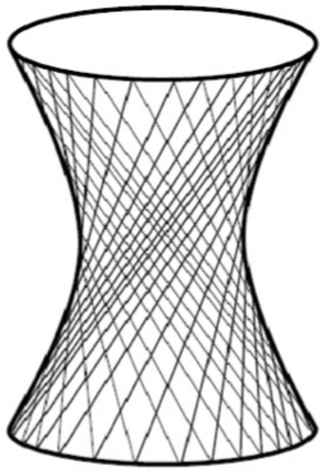
$$x_0(x_0 - ty_0) + y_0(y_0 + tx_0) = x_0^2 + y_0^2 = 25$$

$$x_0(x_0 + ty_0) + y_0(y_0 - tx_0) = x_0^2 + y_0^2 = 25$$

Están en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ pues:

$$(x_0 \mp ty_0)^2 + (y_0 \pm tx_0)^2 - (5t)^2 = (x_0^2 + y_0^2)(1 + t^2) - 25t^2 = 25(1 + t^2) - 25t^2 = 25$$

Es una superficie (doblemente) *reglada*, esto quiere decir que para cada punto de la superficie existe una recta (dos rectas en el caso del hiperboloide) que pasa por el punto y está contenida en la superficie. Otros ejemplos (mas sencillos) de superficies regladas son planos, cilindros y conos.



Usando que es reglada podemos también construir la siguiente parametrización del hiperboloide:

Primero parametrizamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el plano $z = 0$:

$\gamma : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\gamma(u) = (5\cos u, 5\operatorname{sen} u, 0)$

Luego consideramos la recta que pasa por $\gamma(u)$ con dirección $\delta(u) = (-5\operatorname{sen} u, 5\cos u, 5)$ (es la de la recta $\ell_1$ con $x_0 = 5\cos u$ y $y_0 = 5\operatorname{sen} u$).

Nuestra nueva parametrización es $\Psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\Psi(u, t) = \gamma(u) + t\delta(u) = (5\cos u, 5\operatorname{sen} u, 0) + t(-5\operatorname{sen} u, 5\cos u, 5)$$

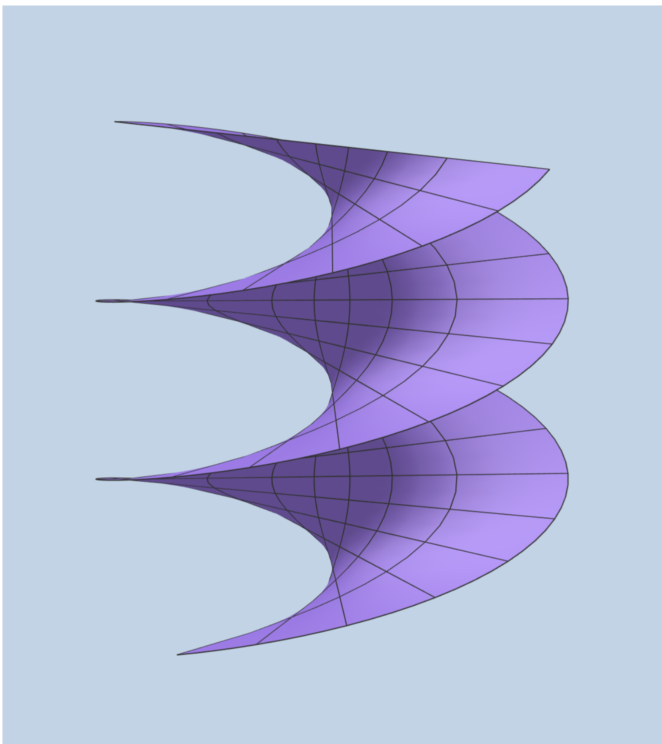
Ahora $\Psi_t(u, t) = \delta(t)$ y

$$\Psi_u(u, t) = \gamma'(u) + t\delta'(u) = (-5\operatorname{sen} u, 5\cos u, 0) + t(-5\cos u, -5\operatorname{sen} u, 0)$$

5.- Hallar el área del helicoide definido por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$ y $D$ es la región donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Desarrollo:**

Podemos pensar en el helicoide como la superficie barrida por la hélice de un avión que se mueve a velocidad constante a lo largo del eje $z$. Es una superficie reglada pues $\Phi(r, \theta) = \gamma(\theta) + r\delta(\theta)$ con $\gamma(\theta) = (0, 0, \theta)$ y $\delta(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$.



Para calcular el área $A$ de de la sección del helicoide que nos piden debemos resolver la integral

$$A = \int_D \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| \, dr \, d\theta$$

Tenemos que $\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1)$,

$$(\Phi_r \times \Phi_\theta)(r,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$$

y $\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{1+r^2}$. Para calcular $\|\Phi_r \times \Phi_\theta\|$ también podemos usar que:

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\|^2 = \|\Phi_r\|^2 \|\Phi_\theta\|^2 - (<\Phi_r, \Phi_\theta>)^2 = 1(1+r^2) - 0 = 1 + r^2$$

Por tanto

$$A = \int_D \sqrt{1+r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^1 \left[ \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \, d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr$$

Usando el cambio $r = \operatorname{senh} t$ y la igualdad $1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+r^2} \, dr &= \int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t} \, \cosh t \, dt = \int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int (e^t + e^{-t})^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} e^{2t} + 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + ctte \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{senh} t \cosh t + t) + ctte = \frac{1}{2} \left( r\sqrt{1+r^2} + \operatorname{arc\,senh} r \right) + ctte \end{aligned}$$

Obtenemos

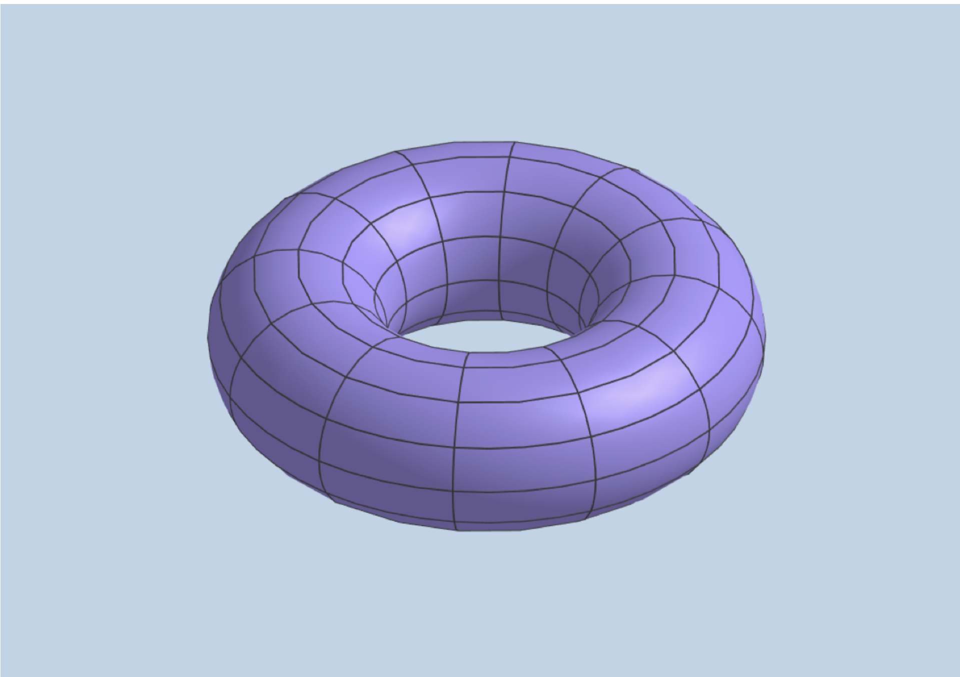
$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr = \pi \left( \sqrt{2} + \operatorname{arc\,senh} 1 \right) = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

6.- Un toro $T$ se puede representar como el conjunto $\Phi(D)$ con $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\theta)\cos\phi$, $y = (R + \cos\theta)\operatorname{sen}\phi$, $z = \operatorname{sen}\theta$, y $D = \{(\theta,\phi) \ : \ 0 < \theta < 2\pi \, , 0 < \phi < 2\pi\}$. Calcular el área de $T$.

**Solución:** $4\pi^2 R$

**Desarrollo:**

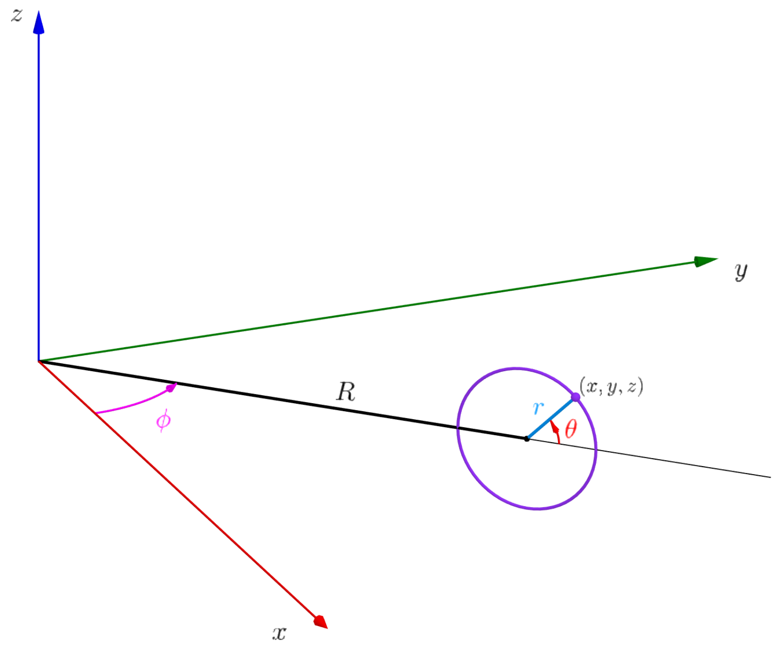
Un toro es la superficie de revolución obtenida al girar la circunferencia $(x-R)^2 + z^2 = r^2$en el plano $xz$ alrededor del eje $z$.



Ver dibujo para entender la parametrización:

$$\Phi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta)$$

Los radios $0 < r < R$ son datos (constantes) y en este ejercicio $r = 1$ pero mantendremos $r$ para mas generalidad.




El área $A$ que nos piden es la integral

$$A = \int_D \|\Phi_\theta \times \Phi_\phi\| \, d\theta \, d\phi$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_\theta &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\theta)\\ \Phi_\phi &= (-(R + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, (R + r\cos\theta)\cos\phi, 0)\end{aligned}$$

y en consecuencia

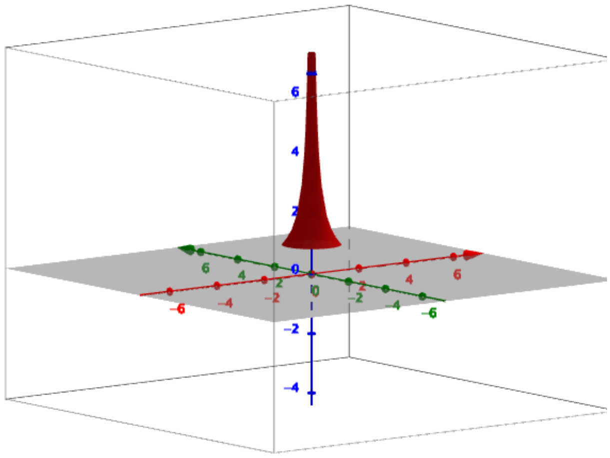
$$\begin{aligned}\|\Phi_\theta\|^2 &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 + (-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) + r^2\cos^2\theta\\ &= r^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2\\ \|\Phi_\phi\|^2 &= (R + r\cos\theta)^2\operatorname{sen}^2\phi + (R + r\cos\theta)^2\cos^2\phi = (R + r\cos\theta)^2\\ < \Phi_\theta, \Phi_\phi > &= r\operatorname{sen}\theta\cos\phi(R + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi(R + r\cos\theta)\cos\phi = 0\\ \|\Phi_\theta \times \Phi_\phi\|^2 &= \|\Phi_\theta\|^2\|\Phi_\phi\|^2 - (< \Phi_\theta, \Phi_\phi >)^2 = r^2(R + r\cos\theta)^2\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}A &= \int_D r(R + r\cos\theta)\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\theta)\, d\phi\right] d\theta = 2\pi r\int_0^{2\pi}(R + r\cos\theta)\, d\theta\\ &= 2\pi r\ (R\theta + r\operatorname{sen}\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4\pi^2 rR\end{aligned}$$

7.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \leq z < \infty$, “se puede llenar pero no se puede pintar” y explíquese el significado de esta frase.

**Desarrollo:** Primero que todo dibujamos la superficie:



Vamos a calcular el área de la superficie y también el volumen que encierra dicha superficie (aquí estamos poniéndole una "tapa" a la superficie por debajo) Si vemos que la integral de volumen es finita pero que la de superficie es infinita ya tendremos visto que "se puede llenar pero no se puede pintar".

Empecemos por la integral de volumen, si denotamos por $R_N$ con $N > 1$ la región

$$R_N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{z},\; 1 < z < N\right\}$$

"LLenar" correspondería a calcular

$$\lim_{N \to +\infty} Vol(R_N) = \lim_{N \to \infty} \int_{R_N} dx\, dy\, dz$$

Usando un cambio a coordenadas cilíndricas obtenemos que:

$$\int_{R_N} dx\, dy\, dz = \int_1^N \left[\int_0^{1/z} \left[\int_0^{2\pi} r\; d\theta\right] dr\right] dz = 2\pi \int_1^N \left[\int_0^{1/z} r\; dr\right] dz = \pi \int_1^N \frac{1}{z^2}\; dz =$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_1^N = \pi \left(-\frac{1}{N} + 1\right) \longrightarrow \pi \quad \text{cuando } N \to +\infty$$

Calculemos ahora el área de nuestra superficie. Definimos $S_N$ por

$$S_N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{z},\; 1 < z < N\right\}$$

"Pintar" correspondería a calcular

$$\lim_{N \to +\infty} \text{Area}(S_N)$$

Parametrizamos la superficie $S_N$ por:

$$\phi : D_N \subset \mathbb{R}^2 \to S_N$$

$$\phi(r, \theta) = \left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \frac{1}{r}\right)$$

con $D_N = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{N} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Así ahora ya podemos calcular $\|T_r \times T_\theta\|$,

$$T_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), -\frac{1}{r^2})$$

$$T_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0)$$

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\frac{1}{r^2} \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\cos(\theta)}{r}, \frac{\sin(\theta)}{r}, r\right)$$

$$\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} + r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{1+r^4}$$

Así

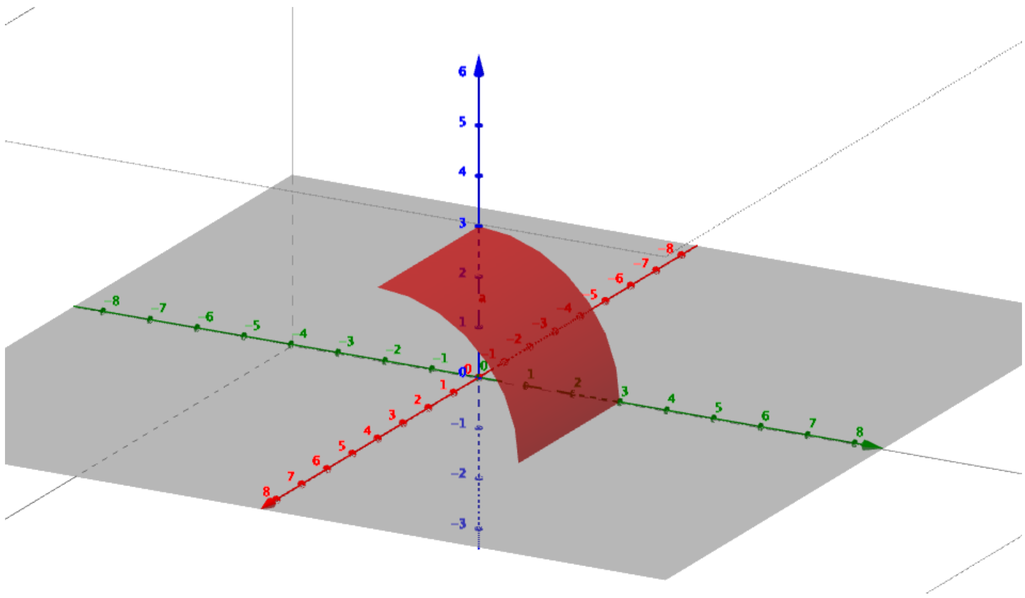
$$\begin{aligned}\text{Area}(S_N) &= \int_{S_N} dS = \int_{D_N} \|T_r \times T_\theta\|\, dr\, d\theta = \int_{\frac{1}{N}}^{1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\sqrt{1+r^4}\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{r}\sqrt{1+r^4}\, dr \geq \int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{r}\, dr = \log(N) \to +\infty \quad \text{cuando } N \to +\infty.\end{aligned}$$

8.- Calcular la integral de superficie $I = \int_S (x+z)\, dS$, donde $S$ es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando $S$ como la gráfica de una función de las variables $x$ e $y$ y expresando $I$ como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada $x$ y el ángulo $\theta$ de las coordenadas polares en el plano $yz$.

**Desarrollo:** Primero que todo dibujamos la superficie:



($a$) Consideramos $S$ como la gráfica de una función. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $f(x,y) = \sqrt{9-y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}$ entonces

$$S = \text{Gráf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \ \text{ y } \ z = f(x,y)\}$$

Así podemos parametrizar la supercicie del siguiente modo

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

$$\phi(u,v) = (u, v, \sqrt{9-v^2})$$

Por teoría ya sabemos como se calculan todas las integrales de superficie de este estilo, pero igualmente vamos a escribirlo.

Calculamos $\|T_u \times T_v\|$,

$$T_u = \frac{\partial \phi}{\partial u} = (1,0,0)$$

$$T_v = \frac{\partial \phi}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{9-v^2}}\right)$$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{9-v^2}} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{v}{\sqrt{9-v^2}}, 1\right)$$

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{1 + \frac{v^2}{9-v^2}} = \frac{3}{\sqrt{9-v^2}}$$

Ahora ya podemos calcular la integral de superficie

$$I = \int_S (x+z)\, dS = \int_D (u + \sqrt{9-v^2})\|T_u \times T_v\|\, du\, dv = 3\int_0^3\int_0^4 \left(\frac{u}{\sqrt{9-v^2}} + 1\right) du\, dv$$
$$= 3\int_0^3 \left(\frac{8}{\sqrt{9-v^2}} + 4\right) dv = 24 \arcsin\left(\frac{v}{3}\right)\Big|_0^3 + 36 = 12\pi + 36.$$

(*b*) Parametrizamos ahora la superficie del siguiente modo

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

$$\phi(x,t) = (x, 3\cos(t), 3\sin(t))$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : 0 \le x \le 4,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Calculamos $\|T_x \times T_t\|$,

$$T_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = (1,0,0)$$

$$T_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = (0, -3\sin(t), 3\cos(t))$$

$$T_x \times T_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sin(t) & 3\cos(t) \end{vmatrix} = (0, -3\cos(t), -3\sin(t))$$

$$\|T_x \times T_t\| = \sqrt{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)} = 3$$

Ahora ya podemos calcular la integral de superficie (Si lo hemos hecho bien tiene con coincidir con el apartado (*a*))

$$I = \int_S (x+z)\, dS = \int_D (x + 3\sin(t))\|T_x \times T_t\|\, dx\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 (x + 3\sin(t))\ dx\, dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 + 12\sin(t))\ dt = 12\pi + 36.$$

9.- Hallar la integral de superficie $\displaystyle\int_S F \cdot dS$, siendo $F(x,y,z) = (x^3, y^3, -3z)$ y donde $S$ denota la esfera unidad $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

**Desarrollo:** Este ejercicio podemos hacerlo de dos maneras, directamente o usando el teorema de divergencia. Primero directamente. Parametrizamos la esfera unidad,

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

$$\phi(\varphi, \theta) = (\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi))$$

con $D = \{(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2\ : 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Así ahora ya podemos calcular $T_\varphi \times T_\theta$,

$$T_\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = (\cos(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi))$$

$$T_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (-\sin(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), 0)$$

$$T_\varphi \times T_\theta = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \big(\sin^2(\varphi)\cos(\theta), \sin^2(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\varphi)\big)$$

Ahora ya podemos calcular la integral de superficie

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot dS &= \int_D F(\phi(\varphi,\theta)) \cdot T_\varphi \times T_\theta \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \big(\sin^3(\varphi)\cos^3(\theta), \sin^3(\varphi)\sin^3(\theta), -3\cos(\varphi)\big) \cdot \big(\sin^2(\varphi)\cos(\theta), \sin^2(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\varphi)\big) \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \big(\sin^5(\varphi)\cos^4(\theta) + \sin^5(\varphi)\sin^4(\theta) - 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\big) \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{3\pi}{4}\sin^5(\varphi) + \frac{3\pi}{4}\sin^5(\varphi) - 6\pi\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\right) d\varphi \\
&= \frac{8\pi}{5} - 4\pi \\
&= \frac{-12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Hagamos el ejercicio ahora usando el Teorema de la divergencia, denotamos por $B$ la bola unidad cerrada $(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$

$$\int_S F \cdot dS = \int_B \nabla \cdot F \, dV$$

Otra notación para $\int_B \nabla \cdot F \, dV$ es $\int_B \mathrm{div} F \, dx \, dy \, dz$.

Primero $\nabla \cdot F(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 - 3$, así usando un cambio a coordenadas cilíndricas (recordad el Jacobiano es $r$) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_B \nabla \cdot F \, dV = \int_B 3x^2 + 3y^2 - 3 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (3r^2\cos^2(\theta) + 3r^2\sin^2(\theta) - 3) r \, dz \, d\theta \, dr \\
= 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (r^3 - r) \, dz \, d\theta \, dr &= 12\pi \int_0^1 (r^3 - r)\sqrt{1-r^2} \, dr = \frac{-12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

10.- Hallar la integral del campo

$$F(x,y,z) = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

**Desarrollo:** Este es un buen ejemplo donde vale mucho la pena usar el teorema de la divergencia. Como en el ejercicio anterior denotamos por $B$ la bola unidad cerrada $(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$ y por $S$ la esfera unidad

$$\int_S F \cdot dS = \int_B \nabla \cdot F \, dV$$

Primero $\nabla \cdot F(x,y,z) = 1 + 1 + 1 = 3$, así nos queda

$$\int_S F \cdot dS = \int_B \nabla \cdot F \, dV = 3\int_B dV = 3\mathrm{Vol}(B) = 4\pi.$$

11.- Sea $S$ la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int_S F \cdot dS\,.$$

12.- Transformar la integral de superficie

$$\int_S \mathrm{rot}\, F \cdot dS\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

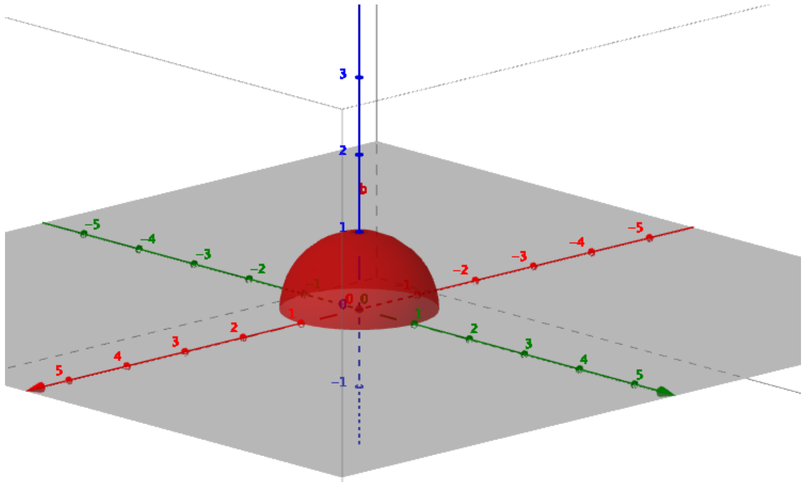
*a)* $F(x, y, z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde $S$ es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente $z$ no-negativa. *Resultado:* $0$ .

*b)* $F(x, y, z) = (y, z, x)$, donde $S$ es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente $z$ no-negativa. *Resultado:* $-\pi$ .

*c)* $F(x, y, z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde $S$ consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano $xy$ y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* $-4$ .

**Desarrollo:**

*a)* Primero dibujemos la superficie $S$



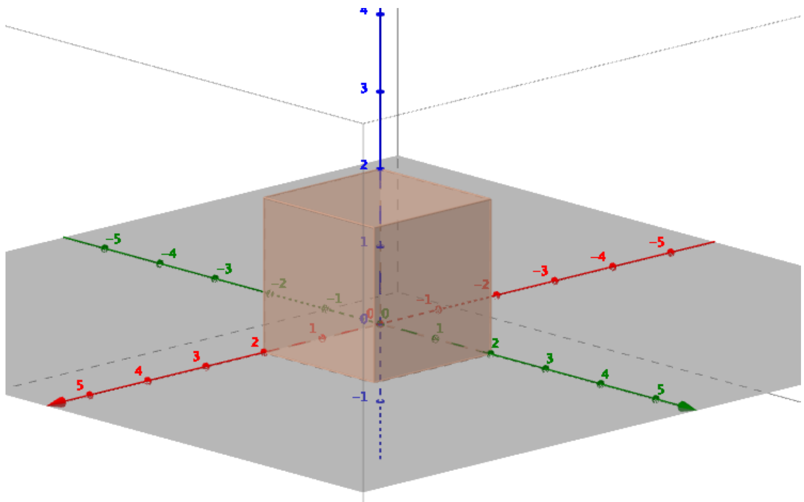
Por tanto la curva $\partial S$ vendrá dada por $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1 \;\text{ y }\; z = 0\}$. A continuación parametrizamos la curva (aquí hay que tener en cuenta la regla de la mano derecha para poner bien la orientación)

$$c : [0, 2\pi] \to \partial S, \qquad c(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \qquad (c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0))$$

Así usando el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS &= \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t), \cos(t)\sin(t), 0) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^3(t) + \cos^2(t)\sin(t)\,dt = 0\end{aligned}$$

*c)* Primero dibujamos nuestra superficie



Por tanto la curva $\partial S$ vendrá dada por

$$\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_2 \cup \partial S_3 \cup \partial S_4$$

Donde

$$\begin{aligned}
\partial S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq x \leq 2, \quad y = 0 \ \text{ y } \ z = 0\} \\
\partial S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq y \leq 2, \quad x = 2 \ \text{ y } \ z = 0\} \\
\partial S_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq x \leq 2, \quad y = 2 \ \text{ y } \ z = 0\} \\
\partial S_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq y \leq 2, \quad x = 0 \ \text{ y } \ z = 0\}
\end{aligned}$$

A continuación parametrizamos la curva (aquí hay que tener en cuenta la regla de la mano derecha para poner bien la orientación)

$$\begin{aligned}
c_1 &: [0,2] \to \partial S_1, \quad c_1(t) = (t,0,0) \quad (c_1'(t) = (1,0,0)) \\
c_2 &: [0,2] \to \partial S_2, \quad c_2(t) = (2,t,0) \quad (c_2'(t) = (0,1,0)) \\
c_3 &: [0,2] \to \partial S_3, \quad c_3(t) = (2-t,2,0) \quad (c_3'(t) = (-1,0,0)) \\
c_4 &: [0,2] \to \partial S_4, \quad c_4(t) = (0,2-t,0) \quad (c_4'(t) = (0,-1,0))
\end{aligned}$$

Así usando el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS &= \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial S_1} F \cdot ds + \int_{\partial S_2} F \cdot ds + \int_{\partial S_3} F \cdot ds + \int_{\partial S_4} F \cdot ds \\
&= \int_0^2 F(c_1(t)) \cdot c_1'(t)\, dt + \int_0^2 F(c_2(t)) \cdot c_2'(t)\, dt + \int_0^2 F(c_3(t)) \cdot c_3'(t)\, dt + \int_0^2 F(c_4(t)) \cdot c_4'(t)\, dt \\
&= 0 + 0 - \int_0^2 2\, dt + 0 \\
&= -4.
\end{aligned}$$

13.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre $C$ para llegar al resultado.

*a)* Siendo $C$ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pi\, R^2 \sqrt{3}\,.$$

*b)* Siendo $C$ la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y+z)\, dx + (z+x)\, dy + (x+y)\, dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\, dx + x\,y\, dy + x\,z\, dz = 0\,.$$

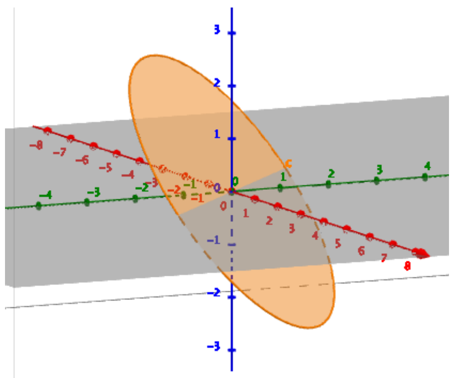
*c)* Siendo $C$ la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

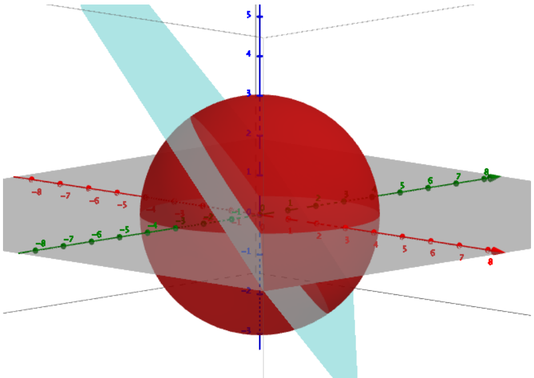
$$\int_C (y-z)\, dx + (z-x)\, dy + (x-y)\, dz = 2\pi\, a(a+b)\,.$$

**Desarrollo:**

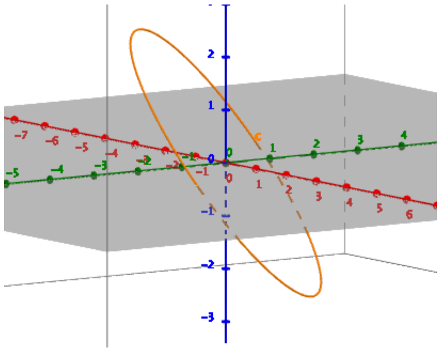
$a$) Primero dibujemos la curva $C$

Ahora debemos elegir una superficie cuya frontera sea exactamente la curva $C$, aquí hay múltiples posibilidades, nosotros elegiremos la intersección de la bola de radio $R$ y el plano, y la denotaremos $S$, es decir





(c) Intersección de la esfera y el plano



(d) Curva $C$

Aplicamos ahora el Teorema de Stokes (Aquí la curva estará orientada de modo que deje a la izquierda nuestra superficie),

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_S \text{rot } F \cdot dS.$$

Como $F(x,y,z) = (y,z,x)$ tenemos que rot $F(x,y,z) = (-1,-1,-1)$, por lo que si parametrizamos $S$ con

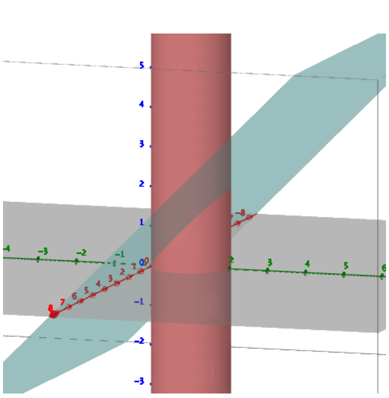
$$\phi(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad f(u,v) = -u - v$$

nos queda que $T_u \times T_v = (1,1,1)$. Ademas sabemos que

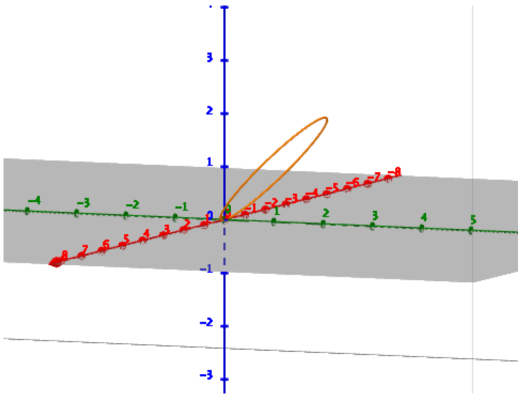
$$\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_S \text{rot } F \cdot \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} dS = -\sqrt{3}\text{Área}(S) = -\sqrt{3}R^2\pi.$$

Con lo que hemos terminado, sólo falta decir que la orientación adecuada para la curva $C$ es aquella que deja a la derecha la superficie $S$ (para conseguir el signo contrario).

*b*) Primero dibujemos la curva $C$

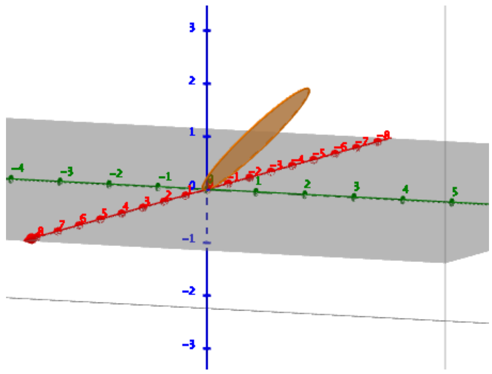


(e) Intersección del cilindro y el plano



(f) Curva $C$

Ahora debemos elegir una superficie cuya frontera sea exactamente la curva $C$, aquí hay múltiples posibilidades, nosotros elegiremos como antes la intersección del cilindro(relleno) con el plano, y la denotaremos por $S$, es decir




Aplicamos ahora el Teorema de Stokes (Aquí la curva estará orientada de modo que deje a la izquierda nuestra superficie), como tenemos que hacerlo en dos integrales empecemos por la primera

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_S \text{rot } F \cdot dS.$$

Como $F(x, y) = (y + z, z + x, x + y)$ tenemos que rot $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$, por lo que

$$\int_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = \int_S \text{rot } F \cdot dS = 0.$$

Pasemos a la otra integral

$$\int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = \int_S \text{rot } F \cdot dS.$$

Como $F(x, y) = (y^2, xy, xz)$ tenemos que rot $F(x, y, z) = (0, -z, -y)$, por lo que si parametrizamos $S$ con

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$
$$\phi(u, v) = (u, v, v)$$

con $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + (v - 1)^2 \leq 1\}$ nos queda que $T_u \times T_v = (0, -1, 1)$. Por lo que

$$\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_D \text{rot } F(\phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)\,du\,dv = \int_D (0, -v, -v) \cdot (0, -1, 1)\,du\,dv = 0.$$

Con lo que hemos terminado, sólo falta decir la orientación adecuada para la curva $C$ pero en este caso al ser 0 el resultado da igual la orientación.

c) El dibujo de la curva $C$ es muy parecido al anterior así que lo omitiremos. Debemos elegir una superficie cuya frontera sea exactamente $C$, aquí hay múltiples posibilidades, nosotros elegiremos como antes la intersección del cilindro(relleno) con el plano y la denotaremos por $S$. Aplicamos ahora el Teorema de Stokes (Aquí la curva estará orientada de modo que deje a la izquierda nuestra superficie),

$$\int_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz)\,dz = \int_S \text{rot } F \cdot dS.$$

Como $F(x, y) = (y - z, z - x, x - y)$ tenemos que rot $F(x, y, z) = (-2, -2, -2)$, por lo que si parametrizamos $S$ con

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$
$$\phi(u, v) = \left(u, v, b\left(1 - \frac{u}{a}\right)\right)$$

con $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \leq a^2\}$ nos queda que $T_u \times T_v = \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right)$. Por lo que

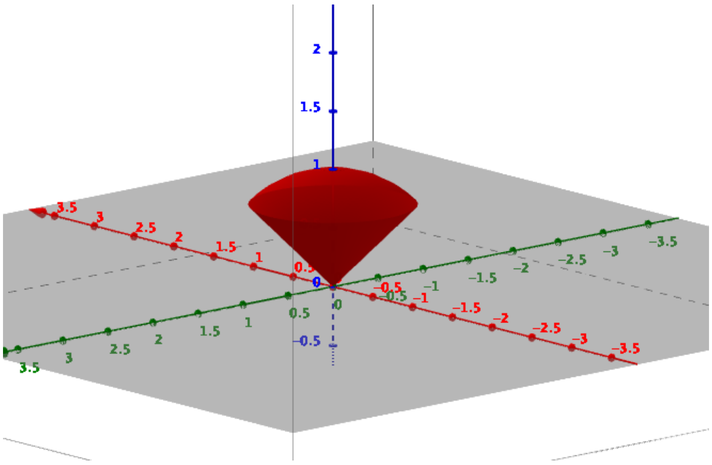
$$\begin{aligned}\int_S \text{rot } F \cdot dS &= \int_D \text{rot } F(\phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)\,du\,dv = -2\int_D (1, 1, 1) \cdot \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right)\,du\,dv \\ &= -2\int_D \frac{b}{a} + 1\,du\,dv = -2\left(\frac{b}{a} + 1\right)\text{Área}(D) = -2\pi a^2\left(\frac{b}{a} + 1\right) = -2a\pi(a + b).\end{aligned}$$

Con lo que hemos terminado, sólo falta decir que la orientación adecuada para la curva $C$ es aquella que deja a la derecha la superficie $S$ (para conseguir el signo contrario).

14.- Sea $S$ la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y del semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int_S F \cdot dS$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$F(x,y,z) = (x\,z + e^{y \operatorname{sen} z}, 2\,y\,z + \cos(xz), -z^2 + e^x \cos y).$$

**Desarrollo:** Primero dibujamos la superficie




Viendo la forma que tiene el campo vectorial $F$ vamos a usar el teorema de la divergencia. Denotamos por $R$ la región que encierra nuestra superficie

$$\int_S F \cdot dS = \int_R \nabla \cdot F\, dV$$

Como $\nabla \cdot F(x,y,z) = z + 2z + -2z = z$ nos queda que

$$\int_S F \cdot dS = \int_R \nabla \cdot F\, dV = \int_R z\, dV$$

Para calcular esta integral vamos a dividir $R$ en dos partes, la parte del cono $R_1$ y la parte de la esfera $R_2$. Usando un cambio a coordenadas cilíndricas (recordad que el Jacobiano es $r$) nos queda que

$$\int_{R_1} z\, dV = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^z zr\, dr\, d\theta\, dz = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^3\, dz = \frac{\pi}{16}.$$

$$\int_{R_2} z\, dV = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-r^2}} zr\, dz\, d\theta\, dr = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{r}{2} - r^3\, dr = \frac{\pi}{16}.$$

Por tanto,

$$\int_S F \cdot dS = \int_{R_1} z\, dV + \int_{R_2} z\, dV = \frac{\pi}{8}.$$

Otra forma equivalente para calcular $\int_R z\, dV$ sería considerar $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right\}$ y tendríamos

$$\begin{aligned}
\int_R z\, dx\, dy\, dz &= \int_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz\right] dx\, dy = \frac{1}{2}\int_D (1 - 2(x^2+y^2))\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\text{Area}(D) - \int_D (x^2+y^2) dx\;\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\int_0^{2\pi} r^3\; d\theta\right]\; dr = \frac{\pi}{4} - 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3\; dr = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

15.- Hallar la integral de superficie

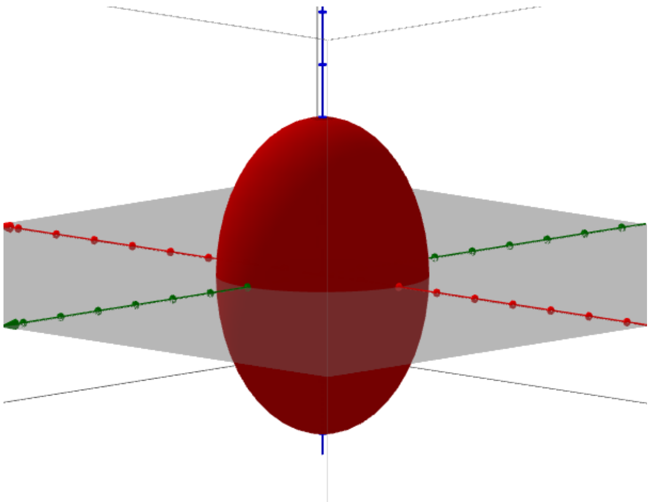
$$\int_S F \cdot dS \qquad \text{siendo} \qquad F(x,y,z) = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando $S$ es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.

**Desarrollo:** Primero dibujamos la superficie



Este ejercicio es bastante parecido al ejercicio 9. Como en el ejercicio 9 podemos hacerlo de dos maneras, directamente o usando el teorema de divergencia. Primero directamente. Parametrizamos el elipsoide,

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

$$\phi(\varphi, \theta) = (a\sin(\varphi)\cos(\theta), a\sin(\varphi)\sin(\theta), b\cos(\varphi))$$

con $D = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,: 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Así ahora ya podemos continuar $T_\varphi \times T_\theta$,

$$T_\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = (a\cos(\varphi)\cos(\theta), a\cos(\varphi)\sin(\theta), -b\sin(\varphi))$$

$$T_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (-a\sin(\varphi)\sin(\theta), a\sin(\varphi)\cos(\theta), 0)$$

$$T_\varphi \times T_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos(\varphi)\cos(\theta) & a\cos(\varphi)\sin(\theta) & -b\sin(\varphi) \\ -a\sin(\varphi)\sin(\theta) & a\sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \left(ab\sin^2(\varphi)\cos(\theta), ab\sin^2(\varphi)\sin(\theta), a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\right)$$

Ahora ya podemos calcular la integral de superficie

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot dS &= \int_D F(\phi(\varphi,\theta)) \cdot T_\varphi \times T_\theta \, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(a^3\sin^3(\varphi)\cos^3(\theta), a^3\sin^3(\varphi)\sin^3(\theta), -ab^2\cos(\varphi)\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \left(ab\sin^2(\varphi)\cos(\theta), ab\sin^2(\varphi)\sin(\theta), a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\right)\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^4 b\sin^5(\varphi)\cos^4(\theta) + a^4 b\sin^5(\varphi)\sin^4(\theta) - a^3b^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \frac{3a^4b\pi}{4}\sin^5(\varphi) + \frac{3a^4b\pi}{4}\sin^5(\varphi) - 2a^3b^2\pi\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi \\
&= \frac{8a^4b\pi}{5} - \frac{4a^3b^2\pi}{3} \\
&= \pi a^3 b\left(\frac{24a - 20b}{15}\right).
\end{aligned}$$

Hagamos el ejercicio ahora usando el Teorema de la divergencia, denotamos por $R$ la región encerrada por $S$

$$\int_S F \cdot dS = \int_R \nabla \cdot F \, dV$$

Primero $\nabla \cdot F(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 - ab$, así usando un cambio a coordenadas cilíndricas (recordad el Jacobiano es $r$) tenemos que (aquí consideramos $a, b > 0$)

$$\begin{aligned}
\int_R \nabla \cdot F \, dV = \int_R 3x^2 + 3y^2 - ab \, dx \, dy \, dz &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-b\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}}^{b\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}} (3r^2\cos^2(\theta) + 3r^2\sin^2(\theta) - ab) r \, dz \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-b\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}}^{b\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}} 3r^3 - abr \, dz \, d\theta \, dr \\
&= 12b\pi \int_0^a r^3 \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)} \, dr - 4ab^2\pi \int_0^a r \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)} \, dr \\
&= \frac{8a^4 b\pi}{5} - \frac{4a^3b^2\pi}{3} \\
&= \pi a^3 b \left( \frac{24a - 20b}{15} \right).
\end{aligned}$$