Cálculo diferencial en varias variables

Luis Guijarro

UAM

18 de marzo de 2020

Límite de una función.

Tenemos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : U \to \mathbb{R}^m$, y puntos $x_0 \in U$ y $L \in \mathbb{R}^m$.

Definición

Decimos que f **tiene límite** *L en x_0, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in U \text{ con } 0 < \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

En este caso, escribiremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación: Si $m = 1$ (i.e, si f toma valores reales), entonces $\|f(x) - L\| = |f(x) - L|$.

Unicidad del límite

Definición

Si existe el límite de una función, es único.

Demostración.

Supongamos que no; esto es, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$.

Sea $\varepsilon := \dfrac{\|L_1 - L_2\|}{2}$. Hay un $\delta_1 > 0$, y un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|f(x) - L_1\| < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 < \|x - x_0\| < \delta_1,$$

$$\|f(x) - L_2\| < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 < \|x - x_0\| < \delta_2.$$

Si $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y $0 < \|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$\|L_1 - L_2\| \leq \|L_1 - f(x)\| + \|f(x) - L_2\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \|L_1 - L_2\|$$

□

Límites y funciones coordenadas

En el siguiente teorema, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, donde cada f_i toma valores reales (e.g, $f_i : U \to \mathbb{R}$).

Teorema

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un punto $x_0 \in U$ y un punto $L = (L_1, L_2, \cdots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m$$

Útil: Para calcular el límite de una función $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, basta calcular el límite de cada función coordenada por separado.

Ejercicio

Demuestre, usando la definición, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2 + y^2) = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

Propiedades de los límites

Sean $f, g : U \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones tal que existen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces:

(1) $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(3) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$, si $m = 1$.

(4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $m = 1$, y $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

Una **sucesión** en $\mathbb{R}^n$ es una colección de puntos de $\mathbb{R}^n$ indexada por $\mathbb{N}$; i.e,

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}, \cdots \subset \mathbb{R}^n$$

Cada punto $p_k \in \mathbb{R}^n$, así que

$$p_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n),$$

donde x_k^1 es la primera coordenada de p_k, x_k^2 es la segunda coordenada de $p_k i$, y así hasta la última.
Fijándonos en una coordenada determinada (por ejemplo, la tercera), tenemos una sucesión usual de números reales

$$x_1^3, x_2^3, \ldots, x_k^3, x_{k+1}^3, \ldots$$

Por ello también podemos definir una sucesión en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de n-sucesiones en $\mathbb{R}$, una para cada coordenada.

Límite de una sucesión en $\mathbb{R}^n$

Definición

Decimos que una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^n$ **converge** *a un punto* $L \in \mathbb{R}^n$, *escrito como* $\lim_{k\to\infty} p_k = L$, *si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $k > N$, *se tiene que* $\|p_k - L\| < \varepsilon$.

Teorema

El límite de una sucesión, si existe, es único.

Lemma

Dada una sucesión $\{p_k\}_k = \{(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)\}_k \in \mathbb{R}^n$ *y un punto* $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, *se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} p_k = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k^i = L_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Conjuntos cerrados y sucesiones

Teorema

Un conjunto E en $\mathbb{R}^n$ es cerrado si y solamente si el límite L de toda sucesión $\{p_k\}$ convergente de puntos en E permanece en E.

- Para ver que un conjunto no es cerrado, basta encontrar una sucesión $p_k \in E$ con $\lim_{k\to\infty} p_k \notin E$;
- para ver que es cerrado hay que ver que para cualquier sucesión $p_k \in E$ con $\lim_{\to\infty} p_k = L$, tiene $L \in E$.

Límites y sucesiones

Teorema (Caracterización del límite de funciones por sucesiones)

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un punto $x_0 \in U$ y un punto $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow$$

$$\forall \{x_k\}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0, \ \textit{con } \{x_k\}_k \in U \setminus \{x_0\}, \ \textit{se tiene que } \lim_{k\to\infty} f(x_k) = L$$

Útil: Si hay dos sucesiones diferentes x_k, $y_k \to x_0$, tal que las sucesiones $f(x_k)$ y $f(y_k)$ tienen límites diferentes, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

Si $f(x_k)$ y $f(y_k)$ tienen el mismo límite, **todavía no podemos decir nada sobre la existencia del límite**.

Ejemplo: Demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$.

Este es un caso frecuente en los ejercicios, así que estudiamos algunas pautas para tratar de encontrarlos. Suponemos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y queremos decidir si existe, y en ese caso hallar

$$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x)$$

1. **Si existe** L, podemos usar que cualquier forma de aproximarnos a (a, b) debería dar valores de f que se aproximan a L. Por ejemplo, podemos probar

$$\lim_{y\to b} f(a, y), \text{ o } \lim_{x\to a} f(x, b)$$

Muy importante: Con esto hallamos un **candidato** al límite, pero **no demostramos que el límite exista**; podría ser que al aproximarnos de otra forma a (a, b), los valores de f se aproximaran a otro límite.

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$ (cont).

2. Límites laterales: Si

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{y\to b} f(x,y)\Big) \neq \lim_{y\to b}\Big(\lim_{x\to a} f(x,y)\Big),$$

entonces no hay límite.

Cuidado: si coinciden, entonces *todavía no sabemos si hay límite*.

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$ (cont).

3. Si encuentro dos formas distintas de acercarme a (a, b) donde la función f se aproxima a dos valores **diferentes**, entonces **el límite no existe**.
   - A menudo uno se aproxima con rectas de pendientes diferentes
   $$(x, \lambda(x-a)+b), \qquad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R};$$
   Si
   $$\lim_{x\to a} f(x, \lambda(x-a)+b) \qquad \text{depende de } \lambda,$$
   el límite de la función no existe.
   - A veces hay que probar con curvas más complicadas:
   $$(x, \lambda(x-a)^k+b), \qquad \text{con } x \to a, \lambda \in \mathbb{R},$$
   ó
   $$(\lambda(y-b)^k+a, y), \qquad \text{con } y \to b, \lambda \in \mathbb{R},$$

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$ (cont).

3. Puedo probar con coordenadas polares centradas en (a, b): si encuentro una función $F(r)$ con $\lim_{r\to 0^+} F(r) = 0$, tal que

$$\left| f(a + r\cos\theta, b + r \operatorname{sen}\theta) - L \right| \leq F(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.

4. Y finalmente, muchas veces, para demostrar el valor de un límite, **hay que trabajar con desigualdades** (ver ejemplos de clase).

Ejemplo: Resuelve $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para:

(a) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$

Continuidad de funciones.

Definición (Funcion continua)

- *Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ es* **continua en un punto** $x_0 \in U$ *si:*

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U \text{ con } \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

  O, equivalentemente: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

- *f es* **continua** *en U si es continua en todo punto $x_0 \in U$.*

Resumiendo, para que f sea continua en el punto x_0, necesitamos:

- que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- que f esté definida en x_0, esto es, que exista $f(x_0)$,
- que ambos valores coincidan: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Propiedades de las funciones continuas.

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continuas en x_0, entonces:

1. $\lambda f(x)$ es continua en x_0.
2. $f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
3. $f(x)g(x)$ es continua en x_0, si $m = 1$.
4. $f(x)/g(x)$ es continua en x_0, si $m = 1$ y $g(x_0) \neq 0$.

Lemma

Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ *entonces* f *es continua en* x_0 *si y sólo si* f_i *es continua para todo* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. *Si*

1. $x_0 \in A$, $f(x_0) \in B$,
2. f *es continua en* x_0, *y*
3. g *es continua en* $f(x_0)$,

entonces la composición $g \circ f$ *es continua en* x_0.

En pocas palabras, la composición de funciones continuas $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es continua.

Ejemplo: Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Caracterización topológica de la continuidad

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, definimos la **preimagen/ imagen inversa** de V por f como

$$f^{-1}(V) = \{x \in U : f(x) \in V\}$$

Teorema

Una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si para todo $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto.

Análogamente, una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si para todo $C \subset \mathbb{R}^m$ cerrado, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un cerrado.

Cuidado: La *imagen* de un abierto/cerrado por una función continua no es, necesariamente, una abierto/cerrado.

La derivada en $\mathbb{R}$

Como motivación para la definición de derivada de funciones en $\mathbb{R}^n$, recordamos el caso de $\mathbb{R}$ (que es el caso $n = 1$).

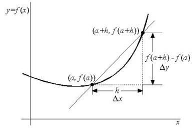
Definición

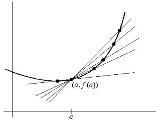
La derivada de la función f en el punto x_0, denotada $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que ese límite exista.

La derivada es la pendiente de la tangente





Ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$: $\quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Derivadas parciales

Definición

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la **derivada parcial** *i-ésima de f, $\partial f / \partial x_i$, se define como la derivada de f respecto a la variable x_i manteniendo el resto de variables fijas:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, entonces $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, y podemos hablar de la **derivada parcial** $\partial f_j / \partial x_i$ de la componente j-ésima de f con respecto a la variable x_i.

Derivadas parciales (cont.)

Dada una **función escalar en** $\mathbb{R}^2$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, y un punto $(x_0, y_0) \in U$, tenemos dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \underset{\text{Notación}}{=} f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underset{\text{Notación}}{=} f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

A efectos prácticos, una derivada parcial con respecto a una variable x_i, se calcula considerando el resto de variables como constantes, y derivando con respecto a la x_i.

Ejemplo: Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para las funciones:

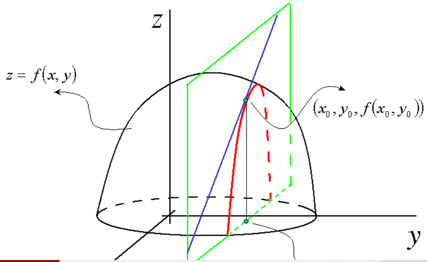
$$(a)\ f(x,y) = x^2 + y^4 \qquad (b)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$

Intersecamos la superficie descrita por la gráfica de la función $z = f(x, y)$ (en negro) con el plano $y = y_0$ (en verde), y obtenemos la curva C (en rojo).

La derivada parcial de f respecto de x en (x_0, y_0), $f_x(x_0, y_0)$, es la pendiente de la recta tangente a C en el punto (x_0, y_0, z_0) (en azul) en la dirección del eje OX.

Obs: Interpretación análoga para f_y, intercambiando el papel de x e y.



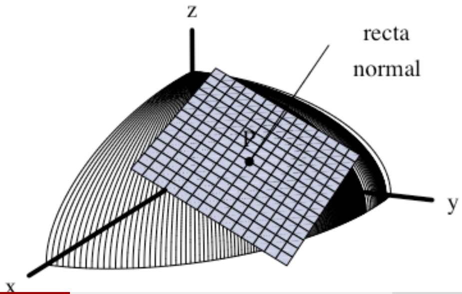
El plano tangente

Ecuación del **plano tangente** a la gráfica de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0):

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Es el plano que:

- pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$;
- tiene vector normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ -1\right)$.



Diferenciabilidad y derivadas parciales

Muy importante: Una función puede tener derivadas parciales y **no ser diferenciable**.

De hecho, puede tener derivadas parciales y ni siquiera ser continua.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funcion definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \text{ ó } y = 0; \\ 1, & \text{si } x \neq 0, \text{ e } y \neq 0. \end{cases}$$

f tiene parciales $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, pero en cualquier entorno de $(0, 0)$ hay puntos (x, y) con $f(x, y) = 1$ y puntos con $f(x, y) = 0$ (con lo que no es ni siquiera continua en $(0, 0)$.

Definición de diferenciabilidad de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición

$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** *en $(x_0, y_0) \in U$ si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Significado: El plano tangente en el punto es la mejor aproximación con un plano a la función cerca del punto.

Muy importante: Para que f sea diferenciable en un punto, necesitamos:

- derivadas parciales en ese punto,
- y **además** que el límite de arriba exista.

Definición de diferenciabilidad de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Definición

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es* **diferenciable** *en* $x_0 \in U$ *si:*

- *Las derivadas parciales de todas las* $f_1, \ldots, f_m$ *existen en* x_0*;*
- *para la matriz de m filas y n columnas* $\mathbf{D}f(x_0)$ *formada por esas parciales, se tiene que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$\mathbf{D}f(x_0)$ es la **derivada**, la **diferencial** o la **matriz jacobiana** de f en x_0.

La matriz jacobiana

La matriz jacobiana $\mathbf{D}f(x_0)$ tiene

- tantas filas como funciones f_i en f;
- tantas columnas como variables x_j;
- la entrada en la i-ésima fila y j-ésima columna es la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ evaluada en x_0.

Casos:

1. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y

$$\mathbf{D}f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

En este caso, a $\nabla f(x_0)$ se le llama **el gradiente de f en x_0**.

La matriz jacobiana (cont.)

2. Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces

$$f = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \qquad y$$

$$\mathbf{D}f(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

donde todas esas parciales están calculadas en el punto x_0.

Ejemplo

Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

Relación entre diferenciabilidad y continuidad

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si existen todas las derivadas parciales, $\partial f_j/\partial x_i$, de f y son continuas en un entorno de x_0, entonces f es diferenciable en x_0.

$$\boxed{\textit{Derivadas parciales continuas} \Rightarrow \textit{Diferenciabilidad} \Rightarrow \textit{Continuidad}}$$

Pero las implicaciones inversas son, en general, todas falsas:

Continuidad $\not\Rightarrow$ Diferenciabilidad $\not\Rightarrow$Derivadas parciales continuas

Propiedades de la matriz jacobiana $\mathbf{D}f(x_0)$

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en x_0, entonces:

(1) $\mathbf{D}(cf)(x_0) = c\mathbf{D}f(x_0)$.

(2) $\mathbf{D}(f+g)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0)$.

(3) Si $m = 1, \quad \mathbf{D}(fg)(x_0) = g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) + f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)$.

(4) Si $m = 1, g(x_0) \neq 0, \quad \mathbf{D}(f/g)(x_0) = \dfrac{g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) - f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Regla de la cadena

Teorema

Sean

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

funciones tal que

- f *es diferenciable en* $x_0 \in U$;
- g *es diferenciable en* $y_0 = f(x_0)$;
- $f(U) \subset V$, *así que la función* $h = g \circ f$ *está definida.*

Entonces la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *es diferenciable en* x_0, *y su matriz diferencial está dada por*

$$\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(x_0) = \mathbf{D}g(y_0) \cdot \mathbf{D}f(x_0)\,.$$

donde el lado derecho es un producto de matrices.

Primer caso de la regla de la cadena

Sean

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Denotamos

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad g = g(x, y, z)$$

Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función $h(t) = g(f(t)) = g(x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$h'(t_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_0(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

donde las parciales de g están evaluadas en el punto $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Segundo caso de la regla de la cadena

Sean $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la función $h:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$, entonces

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Derivada direccional

Definición

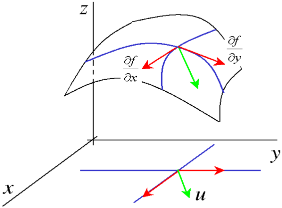
Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ *y* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *un vector unitario (esto es, un vector* $\vec{u}$ *con norma* $\|\vec{u}\|=1$*).*

Se llama la **derivada direccional** *de* f *en* x_0 **en la dirección** *del vector* $\vec{u}$ *a*

$$\mathbf{D}_{\vec{u}}f(x_0) = \frac{d}{dt}f(x_0 + t\vec{u})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}.$$

- Representa *la tasa de cambio (pendiente) de la función en la dirección de dicho vector.*
- Si $\|\vec{u}\| \neq 1$, $\mathbf{D}_{\vec{u}}f(x_0)$ es la **derivada según el vector** $\vec{u}$.

Derivada direccional y parciales



- Si $f : U \to \mathbb{R}$ y $v = \mathbf{e}_i$ es un vector de la base canónica,

$$\mathbf{D}_{\vec{\mathbf{e}}_i} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{\mathbf{e}}_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Gradiente de una función escalar $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

El **gradiente** de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en x_0 es el vector formado por las derivadas parciales de f en x_0.

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

A veces lo denotamos como grad f.

- Si f es diferenciable en x_0, existe el gradiente de f en x_0:
- pero si existe el gradiente de f en x_0, f **no tiene por qué** ser diferenciable en x_0.

Teorema (Relación entre gradiente y derivada direccional)

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in U$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, entonces

$$\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0) = < \nabla f(x_0), \vec{u} >$$

El gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funcion diferenciable en* $x_0 \in U$. *Supongamos que* $\nabla f(x_0) \neq 0$. *Entonces de entre todas las direcciones unitarias* $\vec{v}$, *la derivada direccional de* f *es* **máxima** *cuando*

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

Análogamente, la dirección unitaria en la que la derivada direccional de f en x_0 es **mínima**, es

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

El gradiente es ortogonal a las superficies de nivel

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $a \in \mathbb{R}$, la superficie de nivel de f correspondiente a a es

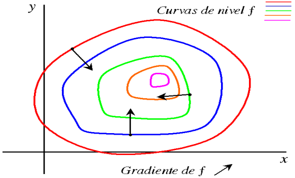
$$S_a = \{ x \in U : f(x) = a \} .$$

Teorema

Si $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ es una curva contenida en S_a con $c(0) = x_0$ (e.g., $f(c(t)) \equiv a$ para todo t), entonces

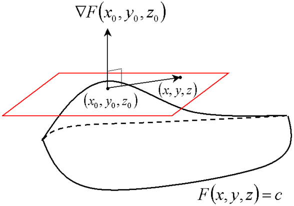
$$\langle \nabla f(x_0), c'(0) \rangle = 0$$

La dirección ∇f es perpendicular a las conjuntos de nivel en cada punto.



Plano tangente a una superficie de nivel en $\mathbb{R}^3$

Supongamos $f(x_0, y_0, z_0) = a$, y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. La ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie de nivel $f(x, y, z) = a$, es



$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Más explícitamente,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(z - z_0) = 0$$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$, en el punto $(1, 2, -3)$.

Derivadas de orden superior

Para una función f de una variable, sabemos que podemos calcular derivadas iteradas de f, a saber $\frac{d}{dx}f$, $\frac{d^2}{dx^2}f$, etc. Vamos a estudiar las operaciones análogas para funciones multivariables.

Empezamos con el caso particular de las derivadas de orden 2 para $f(x,y)$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se pueden tomar las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Notación: A menudo usaremos la notación f_{xx} para denotar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xy} para denotar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc.

Derivadas de orden superior (cont).

Las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se llaman a menudo **derivadas mixtas**.

Definición

Si todas estas derivadas existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y son funciones continuas, se dice que f es una función **de clase** $\mathcal{C}^2$, *o se escribe $f \in \mathcal{C}^2$.*

Para estas funciones tenemos el resultado siguiente.

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Derivadas de orden superior

Ejemplo: Sea $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 2(x + 2y)) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 4(x + 2y)) = 8.$$

Por otra parte, las derivadas mixtas se calculan como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y + 2(x + 2y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y) = 5;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 4(x + 2y)) = \frac{\partial}{\partial x}(5x + 8y) = 5.$$

Encontramos también que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5$.

Derivadas de orden superior (cont).

Más generalmente, si la función es de más de 2 variables, podemos tomar de modo similar las derivadas parciales de orden 2, fijando $i, j \in 1, \ldots, n$ y tomando la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$.

Notación: Como en el caso anterior, a menudo se usa la notación $f_{x_i x_j}$ para $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **de clase $\mathcal{C}^2$ en** U si para todo $i, j \in 1, \ldots, n$ la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe y es continua en U.

Como en el caso $n = 2$, tenemos en general lo siguiente.

Teorema

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en U, entonces para todo $i, j \in 1, \ldots, n$, para todo punto $x_0 \in U$, tenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$.

Derivadas de orden superior (cont).

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos(x)$. Las derivadas de orden 2 (o derivadas segundas) de f son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - z\,\mathrm{sen}(x)) = y^2 e^{xy} - z\cos(x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy}. \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\cos(x) = 0.$$

Verifiquemos que las derivadas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - z\,\mathrm{sen}(x)) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\,\mathrm{sen}(x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0.$$

Derivadas de orden superior (cont).

En general, si todas las derivadas de orden k existen y son continuas en U, decimos que la función es **de clase $\mathcal{C}^k$ en U**.

En este caso, las derivadas de orden $\leq k$ conmutan, es decir que no importa el orden de las variables en que tomemos las derivadas, la función obtenida al final será la misma.

Recordad: A la hora de hacer derivadas mixtas de una función $\mathcal{C}^k$, podemos elegir el orden de derivación que nos convenga:

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para la función $f(x, y) = x^2 y + \int_0^{y^2} \operatorname{sen} e^t \, dt$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x.$$

Repaso: Polinomio de Taylor en una variable

Polinomio de Taylor en una variable.

- Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado x_0, por un polinomio.
- La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto x_0.

El **polinomio de Taylor** de orden n de f alrededor del punto x_0 es

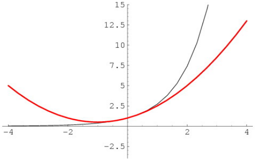
$$P_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Idea: Cuando x está cerca de x_0, los valores del polinomio $P_{n,x_0}f(x)$ se aproximan a los de $f(x)$. Más aún, la aproximación mejora cuando n aumenta.

Repaso: Polinomio de Taylor en una variable (cont.)

Ejemplos más habituales:

- $e^x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} \cdots + \dfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$



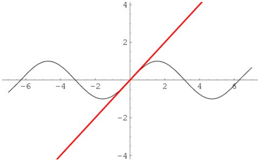
Aqui aparecen las gráficas de $f(x) = e^x$ (gris) y de su segundo polinomio de Taylor (rojo)

- $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
- $\log(1+x), \quad x_0 = 0 \quad \to \quad x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

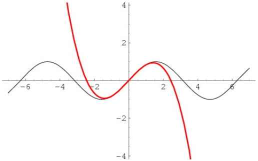
Repaso: Polinomio de Taylor en una variable (cont.)

La aproximación mejora al aumentar el grado del polinomio:

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x$



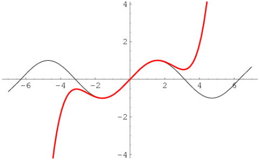
$$P_{1,0}f(x) = x$$



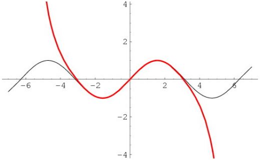
$$P_{3,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6}\,.$$

La aproximación mejora al aumentar el grado del polinomio:

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x$



$$P_{5,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$



$$P_{7,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Fórmula de Taylor para funciones de varias variables

Teorema (Fórmula de Taylor de 1er orden)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Entonces si $h \in \mathbb{R}^n$ con $x_0 + h \in U$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + R_1(x_0, h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_1(x_0, h)|}{\|h\|} = 0.$$

Cuando $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el punto es (x_0, y_0), y $n = 1$, la fórmula queda

$$P_{1,x_0} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Esto coincide con la fórmula del plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo: fórmula de Taylor de grado 1

Escriba la fórmula de Taylor de orden 1 centrado en $(0,0,1)$ para la función

$$f(x,y,z) = ze^x + \cos(x+y).$$

Solución: Como piden orden 1, empezamos calculando

- el valor de la función en el punto $(0,0,1)$: $f(0,0,1) = 2$;
- el valor de las derivadas parciales de orden 1 en el mismo punto $(0,0,1)$:

$$f_x(0,0,1) = ze^x - \mathrm{sen}(x+y)|_{(0,0,1)} = 1, \quad f_y(0,0,1) = -\,\mathrm{sen}(x+y)|_{(0,0,1)} = 0,$$

$$f_z(0,0,1) = e^x|_{(0,0,1)} = 1$$

Con estos valores, solo hay que sustituir en la fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(0,0,1) + f_x(0,0,1)(x-0) + f_y(0,0,1)(y-0) \\ & + f_z(0,0,1)(z-1) + R_1 \\ =& x + z + 1 + R_1 \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor de 2º orden

Teorema

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un abierto y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *en un entorno de* $x_0 \in U$*. Entonces la fórmula de Taylor de segundo orden de* f *en* x_0 *es*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j) + R_2(x_0, h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{\|h\|^2} = 0$$

.

Para hallarla: hay que calcular

- el valor de f en x_0;
- el valor de todas las derivadas parciales de orden 1 en x_0;
- el valor de todas las derivadas parciales de orden 2 en x_0.

Ejemplo: fórmula de Taylor de grado 2

Calcule la fórmula de Taylor de grados 1 y 2 de la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$ en el punto $(1,\pi/2)$.

Solución: Tenemos primero $f(1,\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Las derivadas parciales de orden 1 son las siguientes:
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi/2) = y\cos(xy)|_{(1,\pi/2)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi/2) = x\cos(xy)|_{(1,\pi/2)} = 0.$

Las derivadas parciales de orden 2 son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\pi/2) = -y^2 \operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -\pi^2/4.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\pi/2) = -x^2 \operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -1.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,\pi/2) = -xy \operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -\pi/2.$$

La fórmula de Taylor de grado 1 es $f(x,y) = 1 + R_1$.

La fórmula de Taylor de grado 2 es

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 + \pi(x-1)(y-\frac{\pi}{2}) + (y-\frac{\pi}{2})^2\Big) + R_2.$$

Otro ejemplo: fórmula de Taylor de grado 2

Halle la fórmula de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de la función: $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Solución: Como antes, empezamos calculando todas las parciales hasta orden dos.

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= e^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 1 & f_{xx}(0,0) &= 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)|_{(0,0)} = 2 \\
f_x(0,0) &= 2xe^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0 & f_{yy}(0,0) &= 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2)|_{(0,0)} = 2 \\
f_y(0,0) &= 2ye^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0 & f_{xy}(0,0) &= f_{yx}(0,0) = 4xye^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0
\end{aligned}
$$

Y ahora sustituimos en la fórmula:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{yy}(0,0)(y-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0)\right) + R_2 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2x^2+2y^2) + R_2 = 1 + x^2 + y^2 + R_2
\end{aligned}
$$

Fórmula de Taylor general

Definición (Fórmula de Taylor de orden k)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $f \in C^k$ en un entorno de $x_0 \in U$. Entonces

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$
$$+ \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} + R_n(x_0,h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(x_0,h)}{\|h\|^k} = 0$$

En los sumatorios, cada índice $i_1, \ldots, i_k$ va desde 1 hasta n. Esto implica que, por ejemplo, el último sumatorio que aparece en la fórmula anterior

Polinomio y resto de Taylor

El polinomio de taylor es simplemente las fórmulas de Taylor sin el resto. Por ejemplo,

$$P_{k,x_0,f}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

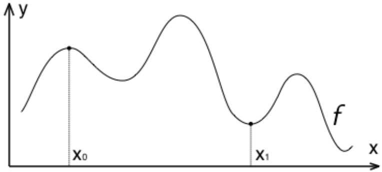
$$+ \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

es el **polinomio de Taylor de grado k para la función f en el punto** x_0.

Cuando la función es C^{k+1} entonces el **resto de Taylor de orden k** se describe con fórmulas (bien la de Lagrange, bien la integral). Se pueden encontrar en el libro de texto si se está interesado.

Máximos y mínimos locales

En esta sección estudiamos cómo calcular máximos y mínimos de funciones multivariables. Empecemos recordando estas nociones para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



x_0 = máximo local: f toma un valor máximo en un entorno de x_0.

$x_1 =$ mínimo local: f toma un valor mínimo en un entorno de x_1.

Estas nociones se generalizan fácilmente a funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Máximos, mínimos y extremos locales

Definición (Máximo local)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Decimos que* $x_0 \in U$ *es un* **máximo local** *de* f *si existe un abierto* V *con* $x_0 \in V \subset U$ *tal que* $\forall\, x \in V$, $f(x) \leq f(x_0)$*.*

Definición (Mínimo local)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $x_1 \in U$ es un **mínimo local** de f si existe un abierto V con $x_1 \in V \subset U$ tal que $\forall\, x \in V$, $f(x) \geq f(x_1)$.

Definición (Extremo local)

Decimos que $x_0 \in U$ *es un* **extremo local** *si es un máximo local o un mínimo local.*

¿Cómo se encuentran los extremos de una función?

En el caso de una variable, se usa la derivada (buscando los valores de x donde $f'(x) = 0$). Para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ usamos el **gradiente**.

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Si x_0 es un extremo local, entonces $\nabla f(x_0) = 0$.

Definición

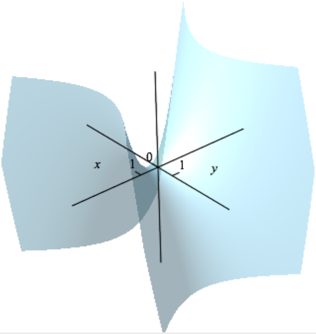
Un punto x_0 donde $\nabla f(x_0) = 0$ se llama un **punto crítico** *de f.*

El teorema implica que para encontrar un extremo local *en un subconjunto abierto V* del dominio de f, hay que mirar entre los puntos críticos en V. ¿Cómo averiguar si un punto crítico dado es un máximo o un mínimo?

Máximos y mínimos locales

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Tenemos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$, que se anula en $x_0 = (0,0)$. En este caso está claro que se trata de un mínimo.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$. Tenemos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$, que de nuevo se anula en $x_0 = (0,0)$. Si nos acercamos a $(0,0)$ con $y = 0$, tenemos un máximo en $x = 0$, mientras que si nos acercamos a $(0,0)$ con $x = 0$, tenemos un mínimo en $y = 0$. Un tal punto crítico se llama un *punto de silla*.



Tipos de extremos

Supongamos que $x_0 \in U$ es un extremo de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces x_0 puede ser de tres tipos:

- un **máximo** local;
- un **mínimo** local;
- un **punto de silla**, si no es ni máximo ni mínimo local.

Los puntos críticos los hallamos resolviendo $\nabla f(x_0) = 0$; una vez hecho esto, **¿cómo sabemos a cuál de los tres tipos de arriba pertenece?**

En el caso de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la segunda derivada f'' nos da el criterio deseado, a saber, que x_0 es un máximo local si $f''(x_0) < 0$ y es un mínimo local si $f''(x_0) > 0$.

La matriz Hessiana de una función f

Para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la herramienta análoga debe tomar en cuenta todas las derivadas parciales de orden 2.

Definición

Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *su* **matriz Hessiana** *se define como*

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$$

Calcular esta matriz nos da la información necesaria para averiguar la estructura de un punto crítico. Veamos esto en detalle.

Distinguiendo extremos, caso general

Dada una matriz M cuadrada de tamaño n, para cada $i \in 1 \dots n$ el *menor principal i-ésimo* de M es el determinante de la submatriz $M_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ cuyas filas y columnas son las primeras i filas y columnas de M.

Clasificación de puntos críticos (usando el criterio de Sylvester)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en U. Sea $x_0 \in U$ un punto crítico de f, y supongamos que cada menor de $H_f(x_0)$ es no nulo.

1) x_0 es un **mínimo local** si todos los menores principales de $H_f(x_0)$ son positivos, es decir si $H_f(x_0)$ es *definida positiva*.

2) x_0 es un **máximo local** si los menores principales i-ésimos son negativos para i impar y positivos para i par, es decir si $H_f(x_0)$ es *definida negativa*.

3) Si los menores principales son todos no nulos y no se da ni 1) ni 2), entonces x_0 es un **punto de silla** (en algunas direcciones es un mínimo y en otras un máximo).

(Si algún menor de $H_f(x_0)$ es nulo, no podemos decir nada en general.)

EL discriminante de una función $f(x, y)$

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suave. Recordamos que $\nabla f(x_0, y_0)$ es el vector gradiente de f en un punto (x_0, y_0).

Definición

El discriminante de f en (x_0, y_0) (denotado por D) es el determinante del Hessiano de f en (x_0, y_0), esto es

$$D := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$$

todo ello evaluado en el punto (x_0, y_0).

Distinguiendo extremos para $f(x, y)$

Este caso aparece frecuentemente.

Teorema

Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un abierto U.

- *Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un* **mínimo local estricto** *de f si se tiene que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \qquad D > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

- *Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un* **máximo local estricto** *de f si se tiene que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \qquad D > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

- *(x_0, y_0) es un* **punto de silla** *si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0), \qquad D < 0.$*

Observación: Si $D = 0$, **no podemos decir nada** de (x_0, y_0)

Distinguiendo extremos para $f(x, y)$ (resumen)

Queremos hallar los extremos de $f(x, y)$. Entonces:

1. Primero calculamos el gradiente ∇f.
2. Después hallamos todos los puntos (x_0, y_0) donde $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3. Para cada uno de los puntos calculados en el paso anterior, hallamos el discriminante D de f en ese punto:
   - Si $D < 0$, (x_0, y_0) es un **punto de silla**.
   - Si $D > 0$, hay que calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$:
     - Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) es un **minimo local estricto**.
     - Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) es un **máximo local estricto**.
   - SI $D = 0$, **no podemos decir nada.**

Ejemplo de cálculo y clasificación de extremos

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$. Calculemos los puntos críticos de f.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$. Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{array} \right.$.

Encontramos el punto crítico $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Calculamos la hessiana en $(0,0)$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Los menores principales son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4$.

Por lo tanto $(0,0)$ es un mínimo local.

Otro ejemplo de cálculo de mínimos

Queremos encontrar los puntos de **la gráfica de** $f(x,y) = 1/(xy)$ que minimizan la distancia al origen $(0,0,0)$. Esta distancia se da por la fórmula siguiente:

$$\left\|(x, y, f(x,y)) - (0,0,0)\right\| = \left(x^2 + y^2 + 1/(x^2y^2)\right)^{1/2}.$$

Por lo tanto, el problema consiste en encontrar los mínimos de la función $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1/(x^2y^2)$. Calculemos los puntos críticos.

$$\tfrac{\partial g}{\partial x} = 2x - \tfrac{2y^2x}{x^4y^4} = 2x - \tfrac{2}{x^3y^2}, \quad \tfrac{\partial g}{\partial y} = 2y - \tfrac{2}{x^2y^3}.$$

Está claro que los puntos críticos tienen x, y ambos no nulos.

Tenemos pues que resolver el sistema $\begin{cases} 2x^4y^2 = 2 \\ 2x^2y^4 = 2 \end{cases}$. Encontramos cuatro puntos críticos, a saber $(x_0, y_0) = (\pm 1, \pm 1)$. Confirmemos que son mínimos:

$$\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 + \tfrac{6y^2x^2}{x^6y^4} = 2 + \tfrac{6}{x^4y^2}, \quad \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 + \tfrac{6}{x^2y^4}, \quad \tfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \tfrac{4yx^3}{x^6y^4} = \tfrac{4}{x^3y^3}.$$

Tenemos $H_g\left(\pm(1,1)\right) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $H_g\left(\pm(1,-1)\right) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$,

luego $(\pm 1, \pm 1)$ son mínimos, por las diapositivas anteriores.

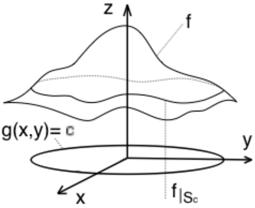
Extremos condicionados

El problema que trataremos aquí es el de hallar extremos de una función bajo ciertas condiciones o restricciones, llamados **extremos condicionados**.

El método principal que estudiaremos para hacer esto es el llamado método de los *multiplicadores de Lagrange*.

Vamos a describir el problema más precisamente.

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g, a saber $S_c = \{x : g(x) = c\}$. Denotemos por $f|_{S_c}$ la *restricción* de f a S_c, es decir la función $S_c \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.



¿Cómo estudiar los extremos de $f|_{S_c}$?

Usando el método de **multiplicadores de Lagrange**.

Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange

El método se basa en el resultado central siguiente.

Teorema (Multiplicadores de Lagrange)

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g. Supongamos que $x_0 \in S_c$ es tal que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si $f|_{S_c}$ tiene un extremo en x_0, entonces existe un número real λ_0 tal que $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$.

¿Cómo se usa?:
Para hallar los máximos y los mínimos de $f(x)$ sujetos a la restricción $g(x) = c$, donde $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- Hay que hallar los $\lambda \in \mathbb{R}$ y los puntos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0), \qquad g(x_0) = c.$$

- Después hay que calcular $f(x)$ en todos los puntos encontrados anteriormente; el mayor sera el máximo, el menor el mínimo.

Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange

Para hallar los máximos y los mínimos de $f(x)$ sujetos a más de una restricción, $g_1(x) = c$, $g_2(x) = c_2, \ldots, g_k(x) = c_k$ donde

$$f, g_1, \ldots, g_k : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ y } c_i \in \mathbb{R} :$$

(esto a veces se pide como maximizar y minimizar f en la superficie de nivel $S_c = \{g_1(x) = c_1, \ldots, g_k(x) = c_k\}$)

- hay que resolver el sistema

$$\begin{gathered}\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x_0), \\ g_1(x_0) = c_1, \quad g_2(x_0) = c_2, \quad \ldots, \qquad g_k(x_0) = c_k,\end{gathered}$$

  donde a menudo hay que hallar tanto las λ's como los x_0's, pero prestando especial atención a estos últimos;

- después evaluamos f en los x_0's encontrados; el mayor valor será el máximo de f, y el menor, el mínimo.

Extremos condicionados: ejemplo

Ejemplo: encontrar el máximo de $f(x,y,z) = x + z$ con la condición que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Para un parámetro real λ, utilizamos la función auxiliar $F = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - 1)$, con $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Consideramos λ como una nueva variable, y buscamos los puntos críticos de la función de *cuatro* variables $F(x,y,z,\lambda)$.

Tenemos $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - 2\lambda z$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 - z^2 + 1$.

Para que se anulen las tres primeras derivadas parciales, se necesita $\lambda \neq 0$, $y = 0$, $x = z = 1/(2\lambda)$. Por lo tanto la cuarta se anula también si $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$, i.e. si $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$.

Substituimos λ en $x = z = 1/(2\lambda)$, obteniendo los puntos críticos condicionales $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (máximo), y $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ (mínimo).

Extremos condicionados: ejemplo

Ejemplo: hallar los extremos de $f(x,y) = xy$ en $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Aquí haremos como en la clase anterior, a saber, estudiar primero los extremos en el interior $\overset{\circ}{D}$, y luego mirar si hay extremos en la frontera ∂D.

1) Estudio en $\overset{\circ}{D}$: aquí aplicamos el análisis de extremos visto anteriormente. Tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$
Tenemos pues $(0,0)$ como punto crítico en $\overset{\circ}{D}$, y $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tiene determinante negativo, luego $(0,0)$ es un punto de silla.

2) Estudio en $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$: aquí, podemos usar el método de los multiplicadores. Ponemos $F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x(1 - (2\lambda)^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad (x,y) = \pm(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}), \quad \text{máximos.}$$

Extremos condicionados: ejemplo

Ejemplo: hallar los extremos de $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ en $D : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$.

De nuevo, dividimos el análisis en dos partes.

1) Estudio en D^{o}: calculamos los extremos locales. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Tenemos pues $(0,0)$ como punto crítico en D^{o}, y $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene determinante positivo, luego $(0,0)$ es un mínimo local.

2) Estudio en $\partial D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 2\}$: de nuevo usamos multiplicadores. Sea $F(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \lambda(\frac{x^2}{2} + y^2 - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = x - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = y - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \pm 1,\ \lambda = 1/2, \text{ o bien} \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2},\ \lambda = 1 \end{array}$$

Obtenemos cuatro puntos críticos, a saber $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

Conclusión: $f(0,\pm 1) = \frac{1}{2}$, $\quad f(\pm\sqrt{2},0) = 1$, $\quad f(0,0) = 0$. Por tanto, en D

Extremos condicionados: ejemplo

En el ejemplo siguiente veremos que el método de multiplicadores se puede aplicar también en casos en que hay más de una condición.

Ejemplo: hallar los extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ bajo las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2, \quad x + z = 1.$

Sea $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = (x+y+z) - \lambda_1(x^2+y^2-2) - \lambda_2(x+z-1).$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2 - x^2 - y^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 1 - x - z = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda_1 x + 1 = 2\lambda_1 y = 1 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 \neq 0, \ \ x = 0, \ \ y = 1/(2\lambda_1) \\ \Rightarrow \quad x = 0, \ \ y = \pm\sqrt{2}, \ \ z = 1. \end{array}\right.$$

Obtenemos pues dos puntos críticos, a saber

$$(0, \sqrt{2}, 1) \quad (\text{máximo}), \qquad (0, -\sqrt{2}, 1) \quad (\text{mínimo}).$$

Extremos condicionados: ejercicio

Hallae los extremos de f restringido a S $(f|_S)$:

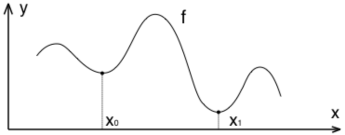
1. $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $f(x,y) = x + y + z$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 2 \text{ y } x + z = 1\}$.

Máximos y mínimos globales

Definición (Máximo y mínimo global)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in U$ es un **máximo global** (resp. **míni- mo global**) de f en U si $\forall\, x \in U$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Recordemos lo que ocurre para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



En x_0, tenemos un mínimo local de f.
En x_1, tenemos un mínimo *global*. Con los métodos vistos, detectamos que x_1 es un míni- mo local, pero *no* que es global.

Para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ más generalmente, se da el mismo problema de detección. El resultado siguiente nos da por lo menos la existencia de extremos globales bajo ciertas condiciones.

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto (i.e. cerrado y acotado), y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe al menos un mínimo global de f en D y al menos un máximo global de f en D.

Máximos y mínimos globales

En otras palabras, existen puntos del cerrado y acotado D en los cuales f *alcanza sus extremos globales* en D.

¿Cómo se hallan el máximo y el mínimo global de f en un compacto C? Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua.
Los valores máximo y mínimo de f en C se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

1. Los puntos críticos de f en el interior de C, denotado usualmente como $\overset{\circ}{C}$.
2. Los puntos donde f no sea diferenciable.
3. Los puntos máximo y mínimo de f en la frontera de C : $f|_{\partial C}$. En este punto, a veces se pueden usar extremos condicionados, pero a veces es más fácil otros argumentos.

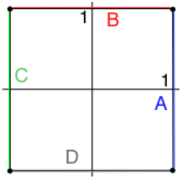
Una vez hallados todos, se calcula f sobre ellos. El mayor valor será el **maximo global**, y el menor valor será el **mínimo global**.

Cálculo de máximos y mínimos globales

<u>Ejemplo</u>: encontrar los mínimos y máximos globales de la función $f(x,y) = xy$ en el rectángulo $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$.

Calculamos primero los puntos críticos $x_0 \in \mathring{D}$: tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, luego $x_0 = (0,0)$. Calculando, $f(0,0) = 0$.

f es diferenciable en todos puntos, así que no hay que considerar puntos de no diferenciabilidad. Queda estudiar f en la frontera de D .



A: $f(1,y) = y$, $y \in [-1,1] \Rightarrow$ mínimo -1 en $(1,-1)$.

B: $f(x,1) = x$, $x \in [-1,1] \Rightarrow$ mínimo -1 en $(-1,1)$.

C: $f(-1,y) = -y$, $y \in [-1,1] \Rightarrow$ mín. -1 en $(-1,1)$.

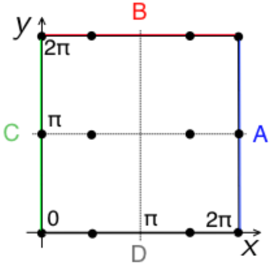
D: $f(x,-1) = -x$, $x \in [-1,1] \Rightarrow$ mín. -1 en $(1,-1)$.

Los mínimos globales se alcanzan pues en $(1,-1)$ y $(-1,1)$. De modo similar se ve que los máximos globales se alcanzan en $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

Cálculo de máximos y mínimos globales

Ejemplo: encontrar los mínimos y máximos globales de la función
$f(x, y) = \text{sen}(x) + \cos(y)$ en $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$.

Como antes, calculamos primero los puntos críticos en el *interior* D°. Tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\,\text{sen}(y)$. En D°, estas derivadas se anulan respectivamente en $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $y = \pi$. En estos puntos, $f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 0$, $\quad f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = -2$.
Cuidado: queda estudiar lo que pasa en la *frontera* ∂D.



A: $f(2\pi, y) = \cos(y) \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 1 \text{ en } y = 0, 2\pi \\ \text{mín -1 en } y = \pi \end{cases}$

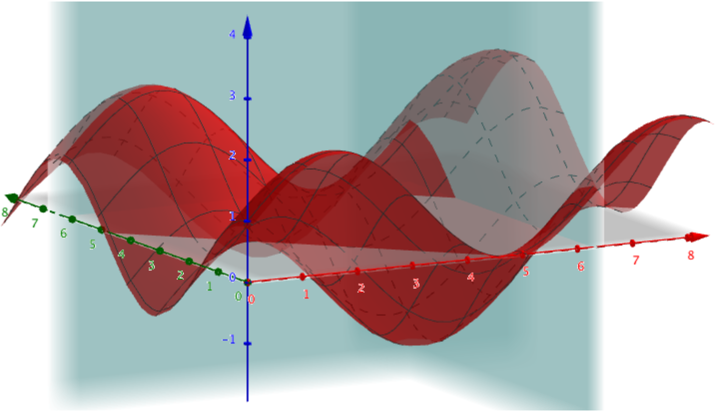
B: $f(x, 2\pi) = \text{sen}(x) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 2 \text{ en } x = \pi/2 \\ \text{mín } 0 \text{ en } x = 3\pi/2 \end{cases}$

C: $f(0, y) = \cos(y) \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 1 \text{ en } y = 0, 2\pi \\ \text{mín -1 en } y = \pi \end{cases}$

D: $f(x, 0) = \text{sen}(x) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 2 \text{ en } x = \pi/2 \\ \text{mín } 0 \text{ en } x = 3\pi/2 \end{cases}$

Cálculo de máximos y mínimos globales

Conclusión del estudio: en $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi\}$, la función $f(x,y) = \mathrm{sen}(x) + \cos(y)$ alcanza su máximo global 2 en los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, y alcanza su mínimo global -2 en el punto $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$.



Ejercicio de cálculo de extremos globales

Halle los extremos globales de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

en el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$$