Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

Hoja 4

Funciones vectoriales. Regla de la cadena. Plano tangente a una superficie

1.- Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Solución. *Aplicando la regla de la cadena obtenemos que:*

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right), -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right)$$

2.- Sean $f(x,y) = x^2 + y$, $g(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$ y $h(u) = f(g(u))$. Calcular dh/du en $u = 0$ tanto de forma directa como usando la regla de la cadena.

Solución. *Primero de forma directa*

$$h(u) = f(g(u)) = \sin^2(3u) + \cos(8u)$$

Por tanto

$$\frac{dh}{du}(u) = 6\sin(3u)\cos(3u) - 8\sin(8u) \Rightarrow \frac{dh}{du}(0) = 0$$

Aplicando la regla de la cadena, si $g(u) = (g_1(u), g_2(u))$

$$\frac{dh}{du}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(0))\frac{dg_1}{du}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(0))\frac{dg_2}{du}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\frac{dg_1}{du}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\frac{dg_2}{du}(0) = 0$$

3.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y}\cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

Solución. *Aplicando la regla de la cadena obtenemos que:*

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{du}(t) \\
&= \left(e^{x(t)y(t)}\cos(x(t)y^2(t))y(t) - e^{x(t)y(t)}\sin(x(t)y^2(t))y^2(t)\right)(-\sin(t)) + \\
&\left(e^{x(t)y(t)}\cos(x(t)y^2(t))x(t) - e^{x(t)y(t)}\sin(x(t)y^2(t))2y(t)x(t)\right)\cos(t) \\
&= e^{\cos(t)\sin(t)}\left(\cos(\cos(t)\sin^2(t))(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \sin(\cos(t)\sin^2(t))\sin^3(t) - 2\cos^2(t)\sin(t)\right)
\end{aligned}$$

4.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcúlese la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$.

Solución. *Aplicando la regla de la cadena obtenemos que la matriz de $Df(x,y)$ es:*

$$\left(e^{\sin(\cos(x^2+y^2))}\cos((\cos(x^2+y^2))\right)_{1\times 1}\left(2x\sin(x^2+y^2) \qquad 2y\sin(x^2+y^2)\right)_{1\times 2} =$$

$$= \left(2xe^{\sin(\cos(x^2+y^2))}\cos((\cos(x^2+y^2))\sin(x^2+y^2) \quad 2ye^{\sin(\cos(x^2+y^2))}\cos((\cos(x^2+y^2))\sin(x^2+y^2)\right)_{1\times 2}$$

5.- Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$ definen u como función de las variables (s, t). Expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, en términos de las diversas derivadas parciales de f, x e y. Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que $x(s, t) = s\,t$, $y(s, t) = \dfrac{s}{t}$.

Solución. *Aplicando la regla de la cadena obtenemos:*

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Para el caso particular en que $x(s, t) = s\,t$, $y(s, t) = \dfrac{s}{t}$, obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = t\frac{\partial f}{\partial x}\left(st, \frac{s}{t}\right) + \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial y}\left(st, \frac{s}{t}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = s\frac{\partial f}{\partial x}\left(st, \frac{s}{t}\right) - \frac{s}{t^2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(st, \frac{s}{t}\right)$$

6.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \mathrm{sen}(2x + y)), \qquad g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x, y)$ y $Dg(u, v, w)$. Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$ y la matriz de $Dh(1, -1, 1)$.

Solución.

$$\textit{Matriz de } Df(x,y): \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(2x+y) & \cos(2x+y) \end{pmatrix}$$

y

$$\textit{Matriz de } Dg(u,v,w): \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial g_1}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial g_2}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4v+9v^2 & 0 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la función h

$$h(u,v,w) = f(g(u,v,w)) = \left(e^{u+2v^2+3v^3+4v-2u^2}, \sin(2u + 4v^2 + 6v^3 + 2v - u^2)\right)$$

Para calcular la matriz de $Dh(1, -1, 1)$ aplicamos la regla de la cadena (Podéis calcularla directamente y ver que coinciden)

$$Dh(1,-1,1) = Df(g(1,-1,1)) \circ Dg(1,-1,1) = Df(0,-3) \circ Dg(1,-1,1)$$

$$\textit{Matriz de } Dh(1,-1,1): \quad \begin{pmatrix} e^{-6} & 2e^{-6} \\ 2\cos(-3) & \cos(-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-6} & 9e^{-6} & 0 \\ 0 & 12\cos(-3) & 0 \end{pmatrix}.$$

7.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\,g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Solución. *Aplicando la regla de la cadena tenemos que:*

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial w}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial w}\right)$$
$$= \left(2u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, 2v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, 2w\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\|\nabla h\|^2 &= \left(2u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(2w\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(4u^2 + 4v^2 + 4w^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (4u + 4v + 4w)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

8.- (a) Hallar la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

(b) Hallar el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, donde

$$f(x,y) = \int_0^{x^3-2y} e^{t^2}\,dt\,, \qquad x\,, y \in \mathbb{R}\,.$$

Solución.

(a) Gracias al teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt = e^{-xy}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{xy} = e^{-xy}\frac{y}{2\sqrt{xy}}.$$

(b) En este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x^3-2y} e^{t^2}\,dt = e^{(x^3-2y)^2}3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3e^9.$$

9.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y, sea ésta $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

Solución. *Primero calculemos k. Definamos la función $F(x,y) = y^2 + xf(x,y) + f^2(x,y) - e^{f(x,y)} - k$, como $F(x,y) = 0$, por una parte tenemos que*

$$0 = F(0,e) = e^2 + 4 - e^2 - k \Rightarrow k = 4$$

Y por otra parte $\nabla F(x,y) = (0,0)$, aplicando la regla de la cadena obtenemos que

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y) = \Bigg(& f(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,, \\ & 2y + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Bigg).\end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}(0,0) = \nabla F(0,e) &= \left(f(0,e) + 2f(0,e)\frac{\partial f}{\partial x}(0,e) - e^{f(0,e)}\frac{\partial f}{\partial x}(0,e)\,, 2e + 2f(0,e)\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) - e^{f(0,e)}\frac{\partial f}{\partial y}(0,e)\right) \\ &= \left(2 + 4\frac{\partial f}{\partial x}(0,e) - e^2\frac{\partial f}{\partial x}(0,e)\,, 2e + 4\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) - e^2\frac{\partial f}{\partial y}(0,e)\right).\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,e) = \frac{-2}{4-e^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) = \frac{-2e}{4-e^2}.$$

Por tanto $\nabla f(0,e) = \left(\dfrac{-2}{4-e^2}, \dfrac{-2e}{4-e^2}\right)$.

10.- Hállese la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

Solución. (a) *La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1,0)$ viene dada por*

$$z = f(1,1) + < \nabla f(1,1), (x-1, y-1) >$$

Como $f(1,1) = 0$ y $\nabla f(1,1) = (2,-2)$ obtenemos $z = 0 + 2(x-1) - 2(y-1)$, es decir,

$$2x - 2y - z = 0.$$

(b) *La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en un punto genérico (x_0, y_0, z_0) viene dada por*

$$z = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) >$$

Como $f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2$ y $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0)$ obtenemos $z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$, es decir,

$$2x_0 x + 2y_0 y - z = x_0^2 + y_0^2$$

Los puntos donde será paralelo al plano $x = z$ serán aquellos donde $x_0 = 1/2$ y $y_0 = 0$, es decir solo lo cumplirá el punto $(1/2, 0, 1/4)$ (Recordad dos planos $Ax + By + Cz = D$ y $A'x + B'y + C'z = D'$ son paralelos si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$, si además estas fracciones coinciden con $\dfrac{D}{D'}$ son coincidentes)

11.- Hállese la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - z = 0$ en el punto $(1,1,0)$.

Solución. *Si miráis con un poco de cuidado este ejercicio es exactamente el mismo que el Ejercicio 10 apartado a).*

12.- Si (a,b,c) es un punto de la superficie $z = x\,y$, las dos rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} z = b\,x, \\ y = b, \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = a\,y, \\ x = a, \end{array} \right.$$

se cortan en (a,b,c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a,b,c) contiene a esas dos rectas.

Solución. *Primero calculamos la ecuación del plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto (a,b,c). Si definimos $F(x,y,z) = xy - z$ dicha ecuación viene dada por*

$$\nabla F(a,b,c) \cdot ((x,y,z) - (a,b,c)) = 0$$

(Si os fijáis bien estamos haciendo siempre lo mismo, si definimos así la función F entonces el gradiente en un punto es perpendicular al plano tangente en ese punto, podéis verlo así también en los ejercicios anteriores) Como

$$\nabla F(x,y,z) = (y, x, -1) \Rightarrow \nabla F(a,b,c) = (b, a, -1)$$

por tanto la ecuación del plano tangente viene dada por (recordad como (a,b,c) está en la superficie $c = ab$)

$$b(x-a) + a(y-b) - (z-c) = 0$$

$$bx + ay - z = ba.$$

Sólo nos falta ver que este plano contiene a las dos rectas, esto hay varias formas de verlo, pero la más directa puede ser la siguiente. Cogemos un punto cualquiera de la primera recta, es decir un punto de la forma $(\lambda, b, b\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y vemos que satisface la ecuación del plano tangente. (Simplemente sustituir). Después hacemos lo mismo con la segunda recta, en este caso el punto genérico es de la forma $(a, \lambda, a\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

13.- Hallar la ecuación de la única recta tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

Solución. *Empecemos escribiendo la ecuación del plano tangente a la primera superficie,* $x^2+y^2+2\,z^2=4$ *en el punto* $(1,1,1)$*. Si definimos* $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-4$ *entonces la ecuación que define el plano tangente a dicha superficie en el punto* $(1,1,1)$ *viene dada por*

$$\nabla F(1,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,1,1))=0$$

$$(2,2,4)\cdot((x,y,z)-(1,1,1))=0$$
$$2(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0$$
$$x+y+2z=4.$$

Ahora si definimos $G(x,y,z)=e^{x-y}-z$ *entonces la ecuación que define el plano tangente a la superficie* $z=e^{x-y}$ *en el punto* $(1,1,1)$ *viene dada por*

$$\nabla G(1,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,1,1))=0$$

$$(1,-1,-1)\cdot((x,y,z)-(1,1,1))=0$$
$$(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$$
$$x-y-z=-1.$$

Ahora encontrar la recta que pasa por ambos planos tangentes es simplemente hacer la intersección de dichos planos. Podemos escribir dicha recta como

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=4,\\ x-y-z=-1.\end{array}\right.$$

o también como

$$\gamma(t)=(1,1,1)+\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{3}{2},\,1\right)t \qquad \textit{con } t\in\mathbb{R}$$

14.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x-c)^2+y^2+z^2=3$ y $x^2+(y-1)^2+z^2=1$, los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

Solución. *Sea* (x_0,y_0,z_0) *un punto cualquiera de la intersección de ambas esferas, esto quiere decir que*

$$\left\{\begin{array}{l} (x_0-c)^2+y_0^2+z_0^2=3 \quad (*)\\ x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2=1\end{array}\right.$$

Claramente también se tendrá que $-2x_0c+c^2+2y_0=3 \quad (**)$ *(Restar la primera menos la segunda ecuación). Ahora nos pide que los planos tangentes en dichos puntos a cada una de las superficies sean perpendiculares, esto quiere decir que* $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot\nabla G(x_0,y_0,z_0)=0$ *donde* $F(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2-3$ *y* $G(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2-1$*. (Los planos tangentes serán perpendiculares sí, y solo sí estos gradientes son ortogonales.)*

$$\begin{array}{l}\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot\nabla G(x_0,y_0,z_0)=0 \Leftrightarrow (2(x_0-c)\,,\,2y_0\,,\,2z_0)\cdot(2x_0\,,\,2(y_0-1)\,,\,2z_0)=0\\ \quad\Leftrightarrow 4x_0^2-4cx_0+4y_0^2-4y_0+4z_0^2=0 \Leftrightarrow x_0^2-cx_0+y_0^2-y_0+z_0^2=0\\ \quad\Leftrightarrow (x_0-c)^2+y_0^2+z_0^2+cx_0-y_0-c^2=0 \Leftrightarrow^{(*)} cx_0-y_0-c^2=-3.\end{array}$$

Por último si multiplicamos por dos esta ecuación y la sumamos a $(**)$ *obtenemos que* $c^2=3$ *por tanto* $c=\pm\sqrt{3}$*.*

15.- Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

(a) $f(x,y,z)=3\,x-5\,y+2\,z$ en el punto $(2,2,1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

(b) $f(x,y,z)=x^2-y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2+y^2+z^2=4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.

Solución. *(a) La normal exterior a la esfera* $x^2+y^2+z^2=9$ *en el punto* $(2,2,1)$ *viene dada por el vector* $\nabla G(2,2,1)$ *donde* $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$*. Aunque no lo ponga suponemos que buscamos el vector unitario (sino habrían infinitas posibilidades), esto quiere decir que la dirección que buscamos es*

$$v=\frac{\nabla G(2,2,1)}{\|\nabla G(2,2,1)\|}=\frac{(4,4,2)}{\|(4,4,2)\|}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Por tanto

$$D_v f(2,2,1)=\nabla f(2,2,1)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=(3,-5,2)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

(b) La normal exterior a la superficie $x^2+y^2+z^2=4$ *en el punto cualquiera* (x_0,y_0,z_0) *viene dada por el vector* $\nabla G(x_0,y_0,z_0)$ *donde* $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$*. Aunque no lo ponga suponemos que buscamos el vector unitario (sino habrían infinitas posibilidades), esto quiere decir que la dirección que buscamos es*

$$\begin{aligned}v&=\frac{\nabla G(x_0,y_0,z_0)}{\|\nabla G(x_0,y_0,z_0)\|}=\frac{(2x_0,2y_0,2z_0)}{\|(2x_0,2y_0,2z_0)\|}=\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)\\&=\frac{1}{2}(x_0,y_0,z_0).\quad(\textit{ Recordar que }\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=4\,)\end{aligned}$$

Por tanto

$$D_v f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2},\frac{z_0}{2}\right)=(2x_0\,,\,-2y_0\,,\,0)\cdot\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2},\frac{z_0}{2}\right)=x_0^2-y_0^2=f(x_0,y_0,z_0).$$