

5 Superficies: curvatura extrínseca

Aquí estudiamos lo curvada que se ve una superficie mirada desde el espacio, fuera de la superficie misma.

5.1 Segunda forma fundamental

Supongamos elegida una normal unitaria N para una superficie S . En cada punto $\mathbf{p} \in S$ hay definida una función lineal $W_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la manera siguiente:

$$T_{\mathbf{p}}S \ni \mathbf{v} \longmapsto W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (dN)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}).$$

Teorema-definición 73. La función $W_{\mathbf{p}}$ toma todos sus valores dentro de $T_{\mathbf{p}}S$ y por lo tanto define un endomorfismo $W_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$ que se llama **endomorfismo de Weingarten** u **operador de forma** de S en \mathbf{p} . Se forma así un campo de endomorfismos W en S .

Demostración. Derivando en \mathbf{p} la identidad $N \cdot N \equiv 1$, obtenemos para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$:

$$0 = (d1)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = (dN)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \cdot N_{\mathbf{p}} + N_{\mathbf{p}} \cdot (dN)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 2N_{\mathbf{p}} \cdot W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}),$$

luego $W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \in \{N_{\mathbf{p}}\}^{\perp} = T_{\mathbf{p}}S$. Esto prueba que $W_{\mathbf{p}}$ es un endomorfismo de $T_{\mathbf{p}}S$. \square

A cada parametrización regular $\Phi(u, v)$ de S le asociamos las tres funciones siguientes:

$$\begin{aligned} e &\equiv N \cdot \Phi_{uu} \\ f &\equiv N \cdot \Phi_{uv} \\ g &\equiv N \cdot \Phi_{vv} \end{aligned} \tag{15}$$

Si queremos enfatizar su dependencia de Φ , escribiremos $e_{\Phi}, f_{\Phi}, g_{\Phi}$ para esas tres funciones.

Definición 74. La **segunda forma (cuadrática) fundamental** de S es el campo $II(\cdot)$ de formas cuadráticas en S definido de la manera siguiente:

$$II \equiv e(du)^2 + 2fdu dv + g(dv)^2. \tag{16}$$

La **segunda forma (bilineal) fundamental** es la forma polar $II(\cdot, \cdot)$ de $II(\cdot)$, es decir el campo de formas bilineales en S con el siguiente efecto sobre la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ de los planos tangentes:

$$\begin{aligned} II(\Phi_u, \Phi_v) &= e, \\ II(\Phi_u, \Phi_v) &= II(\Phi_v, \Phi_u) = f, \\ II(\Phi_v, \Phi_v) &= g. \end{aligned}$$

Atención: el endomorfismo de Weingarten y la segunda forma fundamental dependen de qué normal unitaria se ha elegido en S , de modo que si a N le corresponden W, II entonces a $-N$ le corresponden $-W, -II$.

Teorema 75. El campo de formas bilineales $II(\cdot, \cdot)$ viene dado por la siguiente fórmula (atención al signo):

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, -W_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})) \tag{17}$$

para todo punto $\mathbf{p} \in S$ y todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$.

La primera consecuencia es que el campo II sólo depende de la superficie S (y de la elección de N) y no de la parametrización que usemos en (15) y (16).

La segunda consecuencia es que el endomorfismo de Weingarten es **autoadjunto** respecto de I .

Demostración. Elegida una parametrización regular $\Phi(u, v)$, es suficiente demostrar:

$$\begin{aligned} I(\Phi_u, -W(\Phi_u)) &= e, \\ I(\Phi_u, -W(\Phi_v)) &= I(\Phi_v, -W(\Phi_u)) = f, \\ I(\Phi_v, -W(\Phi_v)) &= g. \end{aligned}$$

Empezando con la identidad $\Phi_u \cdot N \equiv 0$, calculamos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(\Phi_u \cdot N) = \Phi_{uv} \cdot N + \Phi_u \cdot N_v = f + I(\Phi_u, W(\Phi_v)),$$

de donde $I(\Phi_u, -W(\Phi_v)) = f$.

Del mismo modo, tomando $\partial/\partial u$ en la identidad $\Phi_v \cdot N \equiv 0$ se prueba $I(\Phi_v, -W(\Phi_u)) = f$.

Tomando $\partial/\partial u$ en $\Phi_u \cdot N \equiv 0$ se prueba $I(\Phi_u, -W(\Phi_u)) = e$.

Finalmente, tomando $\partial/\partial v$ en $\Phi_v \cdot N \equiv 0$ se prueba $I(\Phi_v, -W(\Phi_v)) = g$. □

5.2 Aceleración normal y curvatura normal

Definición 76. Sea S una superficie en la que se ha elegido un campo normal unitario N . Para cualquier curva paramétrica $\alpha(t)$ en S , definimos su **aceleración normal en S** como el escalar $\alpha''(t) \cdot N_{\alpha(t)}$, de modo que el vector $(\alpha''(t) \cdot N_{\alpha(t)})N_{\alpha(t)}$ es la componente de $\alpha''(t)$ normal a S .

Si $\alpha(t)$ es además regular, llamamos **curvatura normal** de α en S a la función escalar

$$k_{\alpha,n}(t) \equiv N_{\alpha(t)} \cdot \mathbf{k}_{\alpha}(t),$$

de modo que el vector $\mathbf{k}_{\alpha,n}(t) = k_{\alpha,n}(t)N_{\alpha(t)}$ es la componente de $\mathbf{k}_{\alpha}(t)$ normal a S .

Si $\alpha(t)$ es una parametrización por longitud de arco, entonces $\mathbf{k}_{\alpha}(t) \equiv \alpha''(t)$ y en este caso la aceleración normal coincide con la curvatura normal.

Si cambiamos de N a $-N$ se multiplican simultáneamente por -1 los campos W, II y las aceleraciones normales de todas las curvas en S .

Si $\beta(\tilde{s}) \equiv \alpha(-\tilde{s})$ es la curva recorrida en sentido inverso, entonces

$$\beta''(\tilde{s}) = (-1)^2 \alpha''(-\tilde{s}) = \alpha''(-\tilde{s}),$$

es decir que el paso de α a β no cambia la aceleración. En particular, fijados S y N la curvatura normal sólo depende de la forma de la curva y no del sentido en que se la recorra.

Teorema 77. (J. B. Meusnier, 1776). Dados un punto $\mathbf{p} \in S$ y un vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, todas las curvas en S que pasen por \mathbf{p} con velocidad \mathbf{v} tienen en \mathbf{p} aceleración normal igual a $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$. Por lo tanto cada curva regular α en S tiene $k_{\alpha,n} \equiv II(\mathbf{t}_{\alpha}) \equiv II(-\mathbf{t}_{\alpha})$.

Demostración. Tomamos una parametrización regular y bicontinua $\Phi(u, v)$ de un trocito de S rodeando a \mathbf{p} . Sea (u_0, v_0) el valor paramétrico con $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ y sean a, b los coeficientes tales que $\mathbf{v} = (a\Phi_u + b\Phi_v)_{(u_0, v_0)}$. Para todo camino $\alpha(t) \subset S$ que cumpla $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$ existen funciones $u(t), v(t)$ tales que:

$$\alpha(t) \equiv \Phi(u(t), v(t)) \quad , \quad (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) \quad , \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b) .$$

Es trivial obtener la siguiente identidad:

$$\alpha''(t) \equiv u''(t)\Phi_u + v''(t)\Phi_v + u'(t)^2\Phi_{uu} + 2u'(t)v'(t)\Phi_{uv} + v'(t)^2\Phi_{vv} , \quad (18)$$

en la que todas las derivadas parciales de Φ están evaluadas en $(u(t), v(t))$. Particularizando en $t = t_0$ y haciendo el producto escalar con $N_{\mathbf{p}}$, se obtiene:

$$\alpha''(t_0) \cdot N_{\mathbf{p}} = a^2\Phi_{uu} \cdot N_{\mathbf{p}} + 2ab\Phi_{uv} \cdot N_{\mathbf{p}} + b^2\Phi_{vv} \cdot N_{\mathbf{p}} ,$$

con $\Phi_{uu}, \Phi_{uv}, \Phi_{vv}$ evaluadas en (u_0, v_0) . Esto es:

$$\alpha''(t_0) \cdot N_{\mathbf{p}} = e(u_0, v_0)a^2 + 2f(u_0, v_0)ab + g(u_0, v_0)b^2 = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) .$$

□

El teorema de Meusnier nos permite considerar las curvaturas normales como *propiedades de la superficie*:

Definición 78. Dados una superficie regular S y un punto $\mathbf{p} \in S$, la **curvatura normal de una dirección tangente** $L \subset T_{\mathbf{p}}S$, o **curvatura normal de S en la dirección L** , es el número $II_{\mathbf{p}}(\pm \mathbf{t})$, siendo $\pm \mathbf{t}$ los dos vectores unitarios pertenecientes a L .

5.3 Invariancia por movimientos

Teorema 79. Al rotar y trasladar una superficie y su normal unitaria, las direcciones tangentes rotan con ella, cada una manteniendo intacta su curvatura normal.

Demostración. Cualquier rotación lineal en \mathbb{R}^3 se escribe $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{M}_0$, siendo $\mathbf{M}_0 \in \text{SO}(3)$ una matriz especial ortogonal constante (aquí representamos los vectores de \mathbb{R}^3 como filas). Si además \mathbf{c} es un vector constante y consideramos el movimiento $\varphi(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c} + \mathbf{x}\mathbf{M}_0$, la superficie movida $S' = \varphi(S)$ se parametriza por $\Psi(u, v) \equiv \mathbf{c} + \Phi(u, v)\mathbf{M}_0$, de donde se deducen fácilmente:

- Un vector \mathbf{v} es tangente a S en \mathbf{p} si y sólo si el rotado $\mathbf{v}\mathbf{M}_0$ es tangente a S' en $\varphi(\mathbf{p})$.
- El campo rotado $N' = N(u, v)\mathbf{M}_0$ es un campo normal unitario para S' .

Recordemos que \mathbf{M}_0 , por ser ortogonal, cumple $(\mathbf{v}\mathbf{M}_0) \cdot (\mathbf{w}\mathbf{M}_0) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ cualesquiera. Entonces $N' \cdot \Psi_{uu} \equiv (N\mathbf{M}_0) \cdot (\Phi_{uu}\mathbf{M}_0) \equiv N \cdot \Phi_{uu}$ y lo mismo para las otras dos derivadas parciales segundas. Concluimos que Φ y Ψ tienen las mismas funciones e, f, g , siempre que en S' se elija la normal rotada $N' = N\mathbf{M}_0$, luego $II_S(a\Phi_u + b\Phi_v) = II_{S'}(a\Psi_u + b\Psi_v)$ para cualesquiera a, b . Pero, como $\Psi_u = \Phi_u\mathbf{M}_0$ y $\Psi_v = \Phi_v\mathbf{M}_0$, en realidad es $a\Psi_u + b\Psi_v = (a\Phi_u + b\Phi_v)\mathbf{M}_0$ y llegamos a la identidad:

$$II_S(\mathbf{v}) \equiv II_{S'}(\mathbf{v}\mathbf{M}_0). \quad (19)$$

Esta identidad, aplicada a un vector unitario cualquiera $\mathbf{t} \in T_{\mathbf{p}}S$, nos dice que la dirección $\langle \mathbf{t} \rangle \subset T_{\mathbf{p}}S$ tiene la misma curvatura normal que la dirección rotada $\langle \mathbf{t}\mathbf{M}_0 \rangle \subset T_{\varphi(\mathbf{p})}S'$. □

5.4 Hessianas y clasificación de puntos

Para una parametrización grafo $\Phi(x, y) \equiv (x, y, h(x, y))$ tenemos:

$$N \equiv \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}, \quad \Phi_{xx} \equiv (0, 0, h_{xx}), \quad \Phi_{xy} \equiv (0, 0, h_{xy}), \quad \Phi_{yy} \equiv (0, 0, h_{yy}),$$

y las fórmulas (15) y (16) dan directamente:

$$II \equiv \frac{h_{xx}(dx)^2 + 2h_{xy}dxdy + h_{yy}(dy)^2}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} \equiv \frac{\text{Hess}(h)}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}. \quad (20)$$

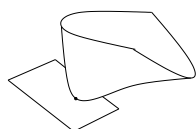
Si rotamos la superficie $\{z = h(x, y)\}$, se convierte en el grafo de una función distinta $\tilde{h}(x, y)$ con Hessiana muy distinta. Pero acabamos de ver en el apartado 5.3 que la segunda forma fundamental no cambia. Esto nos muestra la segunda forma fundamental como una “Hessiana a la que se le han hecho correcciones”, con ayuda de las derivadas primeras, para que sea invariante por rotación del grafo. Compáralo con lo dicho en el apartado 2.5.

Fijado un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$, podemos rotar la superficie (sin mover \mathbf{p}) hasta que el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ se ponga paralelo al plano xy y podamos elegir $N_{\mathbf{p}} = (0, 0, 1)$. Además la superficie rotada S' se describe, cerca del punto \mathbf{p} , como un grafo $\Phi(x, y) \equiv (x, y, h(x, y))$ donde h es una función con h_x, h_y nulas en (x_0, y_0) . La segunda forma fundamental $II'_{\mathbf{p}}$ de S' en \mathbf{p} coincide con la Hessiana $\text{Hess}(h)|_{(x_0, y_0)}$, la cual mide, con derivadas segundas, lo que el punto $(x, y, h(x, y))$ sube por encima del plano $\{z = z_0\}$,

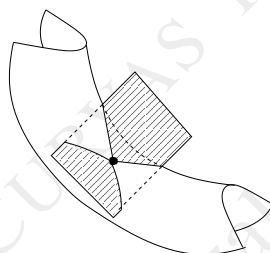
o lo que baja por debajo de él, cerca de \mathbf{p} (las derivadas primeras no intervienen porque son nulas en este punto).

Del mismo modo que el grafo S' es un rotado de la superficie inicial S , podemos ver S como una rotada de S' . Así, deshaciendo la rotación, concluimos que $II_{\mathbf{p}}$ mide, con derivadas segundas, la intensidad con que S se separa del plano tangente afín $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$ en la dirección normal $N_{\mathbf{p}}$.

Decimos que \mathbf{p} es un **punto elíptico** de S si $II_{\mathbf{p}}$ es definida (positiva o negativa). Entonces la Hessiana de h en (x_0, y_0) también es definida, mientras que las derivadas primeras de h en (x_0, y_0) son nulas, luego la parte del grafo de h cercana a \mathbf{p} tiene forma de cuenco y está toda por encima o toda por debajo del plano tangente en \mathbf{p} . La parte de S cercana a \mathbf{p} , rotada del grafo, también tiene forma de cuenco y está a un lado de su plano tangente afín en \mathbf{p} .



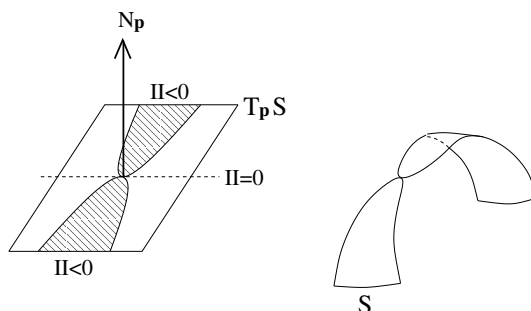
Decimos que \mathbf{p} es un **punto hiperbólico** de S si $II_{\mathbf{p}}$ es indefinida, es decir positiva en algunas direcciones de $T_{\mathbf{p}}S$ y negativa en otras. La Hessiana de h en (x_0, y_0) es también indefinida (y las derivadas primeras nulas), con lo cual cerca de \mathbf{p} el grafo de h tiene forma de silla y tiene partes a ambos lados del plano tangente en \mathbf{p} . Entonces la parte de S cercana a \mathbf{p} tiene forma de silla y tiene partes a ambos lados del plano tangente afín en \mathbf{p} .



Si $II_{\mathbf{p}}$ es semidefinida, es decir nula en una dirección y de signo constante (positivo o negativo) en todas las demás direcciones, decimos que \mathbf{p} es un **punto parabólico** de S . Hay una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$ tal que $II(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) \equiv cb^2$ con c constante no nula. Dependiendo de c y de cómo es el resto (al menos, cúbico) de Taylor de h en (x_0, y_0) , hay un exponente posiblemente fraccionario $\delta > 1$, y constantes $\mu > 0$, tales que en la siguiente parte del plano tangente (parte sombreada en el dibujo)

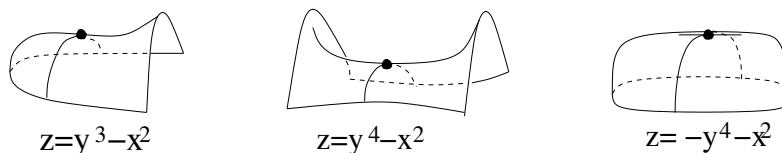
$$\{a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2; |b| > \mu|a|^\delta\},$$

la segunda forma fundamental es más fuerte que el resto (al menos, cúbico) de Taylor. La forma del grafo de h (igual a la de S) justo encima de la parte sombreada está, pues controlada por la segunda forma fundamental



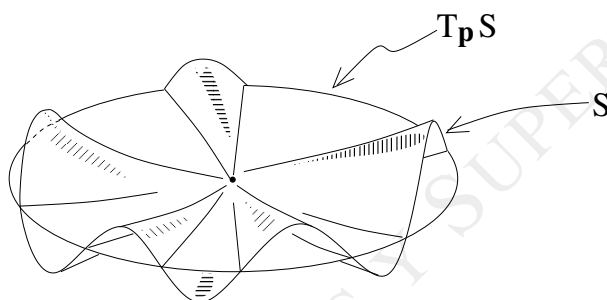
Fuera de la parte sombreada, la forma del grafo de h (y la de S) depende del resto (al menos, cúbico) de Taylor y puede ser muy variada.

Tres ejemplos sencillos son los siguientes:



pero de hecho fuera de la parte sombreada hay sitio para fenómenos más complejos. Por ejemplo, la superficie puede tener ahí una sucesión infinita de bultitos, unos por encima y otros por debajo del plano tangente afín, convergiendo al punto \mathbf{p} .

Si $II_{\mathbf{p}} \equiv 0$ decimos que \mathbf{p} es un **punto plano** de S . La forma del grafo de h cerca de \mathbf{p} puede estar controlada por el resto (al menos, cúbico) de Taylor, o ser impredecible si dicho resto degenera. Lo mismo le ocurre a S cerca de \mathbf{p} .



Un **punto umbilical** es un $\mathbf{p} \in S$ tal que $II_{\mathbf{p}} = (\text{un escalar}) \cdot I_{\mathbf{p}}$. Está obligado a ser o elíptico o plano.

5.5 Curvaturas principales

Como el endomorfismo de Weingarten es autoadjunto, es posible diagonalizarlo mediante una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$. Dicha base ortonormal diagonaliza simultáneamente las dos formas fundamentales; distinguimos dos casos:

- El punto \mathbf{p} no es umbilical. Entonces $W_{\mathbf{p}}$ no es un múltiplo de la identidad y sus autoespacios son dos *únicas* rectas que forman ángulo recto. Cada vector \mathbf{u}_j se toma en una de esas rectas y, si los elegimos unitarios, son automáticamente ortonormales.
- El punto \mathbf{p} es umbilical. Cualquier base ortonormal diagonaliza a $I_{\mathbf{p}}$ y también a $II_{\mathbf{p}}$, porque en este caso $II_{\mathbf{p}}$ es un múltiplo escalar de $I_{\mathbf{p}}$.

Tanto en un caso como en el otro, podemos caracterizar la pareja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ por las siguientes condiciones: ambos unitarios, ortogonales respecto de $I_{\mathbf{p}}$ y ortogonales respecto de $II_{\mathbf{p}}$.

Existen, pues, números k_1, k_2 tales que

$$k_1 \leq k_2 \quad \text{y} \quad II_{\mathbf{p}}(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) \equiv k_1 a^2 + k_2 b^2. \quad (21)$$

Importante: Si cambiamos de N a $-N$, la pareja $k_1 \leq k_2$ se cambia a la pareja $-k_2 \leq -k_1$.

Las posibles curvaturas normales de curvas en S al pasar por \mathbf{p} son los valores de $II(\mathbf{u})$ con \mathbf{u} recorriendo los vectores unitarios tangentes a S en \mathbf{p} . Esos valores son los $k_1 a^2 + k_2 b^2$ para todas las parejas (a, b) con $a^2 + b^2 = 1$, o sea el conjunto:

$$\{\lambda k_1 + \mu k_2 : \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\} = [k_1, k_2],$$

luego:

k_1 es la mínima curvatura normal en \mathbf{p} y k_2 es la máxima.

Llamamos a k_1, k_2 las **curvaturas principales** de S en \mathbf{p} . Las direcciones de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son las que producen curvatura normal mínima y máxima, respectivamente, y son llamadas **direcciones principales de curvatura** de S en \mathbf{p} .

En un punto elíptico, k_1, k_2 son ambas positivas o ambas negativas.

En un punto hiperbólico, tenemos $k_1 < 0$ y $k_2 > 0$.

En un punto parabólico, una de las curvaturas principales es nula y la otra no.

En un punto plano es $k_1 = k_2 = 0$.

Un punto es umbilical si y sólo si $k_1 = k_2$.

En un punto umbilical todas las direcciones tangentes tienen la misma curvatura normal, el máximo y el mínimo coinciden y toda dirección sirve como dirección principal de curvatura. En cambio, en un punto no umbilical las direcciones principales de curvatura son únicas y ortogonales entre sí.

Los vectores principales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ diagonalizan el endomorfismo $W_{\mathbf{p}}$, con autovalores respectivos $-k_1, -k_2$.

En general, diremos que un vector \mathbf{v} , tangente a la superficie en \mathbf{p} pero no necesariamente unitario, es un **vector principal** si su dirección es una dirección principal de curvatura. Ahora sabemos que:

Los vectores principales, en un punto \mathbf{p} de la superficie, son los *autovectores* del endomorfismo $W_{\mathbf{p}}$.
Las curvaturas principales son los *autovalores* de $-W_{\mathbf{p}}$ (atención al signo).

Volvamos ahora con $\mathbf{M}_0 \in \text{SO}(3)$, el movimiento rígido $\varphi(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c} + \mathbf{x}\mathbf{M}_0$ y la superficie $S' = \varphi(S)$, rotada y trasladada de S . Si dos vectores ortonormales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dan las direcciones principales de curvatura de S en \mathbf{p} , entonces $\mathbf{v}_1\mathbf{M}_0, \mathbf{v}_2\mathbf{M}_0$ son vectores ortonormales tangentes a S' en $\varphi(\mathbf{p})$. Además, puesto que $II_{S', \varphi(\mathbf{p})}(\mathbf{v}\mathbf{M}_0) \equiv II_{S, \mathbf{p}}(\mathbf{v})$, deducimos de inmediato que el valor máximo de $II_{S', \varphi(\mathbf{p})}$ en vectores unitarios se alcanza para los vectores $\pm \mathbf{v}_2\mathbf{M}_0$, y el mínimo se alcanza para $\pm \mathbf{v}_1\mathbf{M}_0$. Luego $\mathbf{v}_1\mathbf{M}_0, \mathbf{v}_2\mathbf{M}_0$ dan las direcciones principales de curvatura de S' en $\varphi(\mathbf{p})$, con curvaturas principales respectivas *las mismas que para S en \mathbf{p}* .

Al rotar y trasladar una superficie, la normal unitaria y las direcciones principales de curvatura se mueven por la misma rotación (lineal) y las curvaturas principales son preservadas.

5.6 Curvaturas Gaussiana y media

Definición 80. La *curvatura Gaussiana extrínseca* de S en \mathbf{p} es el escalar $K(\mathbf{p}) = \det W_{\mathbf{p}}$.

La *curvatura media* de S en \mathbf{p} es el escalar $H(\mathbf{p}) = (k_1 + k_2)/2 = \text{traza}(-W_{\mathbf{p}})/2$.

El *vector curvatura media* de S en \mathbf{p} es el vector $\vec{H}_{\mathbf{p}} = H(\mathbf{p})\mathbf{N}(\mathbf{p})$.

Tanto K como H son funciones escalares $S \rightarrow \mathbb{R}$, mientras que \vec{H} es un campo de vectores normal a la superficie.

La curvatura Gaussiana extrínseca es $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$, producto de las curvaturas principales. No cambia al cambiar la normal unitaria a la superficie, porque para matrices 2×2 el determinante no cambia al multiplicar la matriz por -1 .

Al cambiar la normal unitaria, tanto \mathbf{N} como H se multiplican por -1 y su producto, que es el vector \vec{H} , queda igual que estaba.

El escalar K y el vector \vec{H} sólo dependen de la forma de la superficie, y no de la elección que hagamos para la normal unitaria.

La curvatura Gaussiana extrínseca es positiva en los puntos elípticos, negativa en los hiperbólicos, y nula en los parabólicos y en los planos.

En los puntos elípticos, el vector \vec{H} apunta hacia el lado cóncavo de la superficie (compárese con el vector curvatura de curvas en el plano).

En los puntos hiperbólicos con $|k_1| \neq |k_2|$, el vector \vec{H} es no nulo y apunta hacia “el lado más cóncavo” de la superficie. Lo mismo ocurre en los puntos parabólicos.

Finalmente, el vector \vec{H} se anula en los puntos planos y en los puntos hiperbólicos con k_1 y k_2 opuestas la una de la otra.

De lo dicho al final del apartado 5.5, deducimos:

Al rotar y trasladar una superficie la curvatura Gaussiana extrínseca es preservada, y el vector \vec{H} experimenta la misma rotación lineal.

Definición 81. Una superficie S es **minimal** si tiene $\vec{H} \equiv \mathbf{0}$. Esto equivale a $H \equiv 0$ para una cualquiera de las normales unitarias.

5.7 Resultados globales 4

Dedicamos este apartado a varios resultados globales que involucran la segunda forma fundamental. El primero es muy parecido al teorema 37 del apartado 2.8.

Teorema 82. Si una superficie cerrada simple S está contenida en una bola cerrada de radio r , entonces existen puntos elípticos en S con las dos curvaturas principales no menores que $1/r$ en valor absoluto.

El segundo resultado es de 1897 y se lo conoce como **caracterización de Hadamard de los ovaloides**:

Teorema 83. Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie cerrada simple con todos sus puntos elípticos, entonces S es el borde de un sólido convexo.

Terminamos con dos **teoremas de rigidez**.

Teorema 84. (H. Liebmann, 1899) Una superficie cerrada en \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana constante es una esfera.

Teorema 85. (A. D. Alexandroff, 1958) Una superficie cerrada y simple en \mathbb{R}^3 que tenga curvatura media constante es una esfera.

5.8 Algunos cálculos

Sea $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ la matriz del endomorfismo de Weingarten respecto de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ del plano tangente vectorial, es decir que para todo vector tangente $a' \Phi_u + b' \Phi_v$ se tiene:

$$W(a' \Phi_u + b' \Phi_v) = a'' \Phi_u + b'' \Phi_v \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} a'' \\ b'' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}.$$

¡Ojo! Aunque W es autoadjunto, a menudo la matriz \mathbf{A} no es simétrica porque la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ no suele ser ortonormal.

Sean $[I], [II]$ las matrices de I, II en la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, respectivamente. Poniendo $\mathbf{v} = a \Phi_u + b \Phi_v$ y $\mathbf{w} = a' \Phi_u + b' \Phi_v$, convertimos la identidad (17) en:

$$[a \ b] [II] \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \equiv -[a \ b] [I] \mathbf{A} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \quad \text{para cualesquiera } a, b, a', b',$$

luego (17) equivale a la igualdad matricial $[II] = -[I] \mathbf{A}$, es decir $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathbf{A}$.

Advertencia. En el libro de Do Carmo (página 160 de la edición española, página 155 de la edición inglesa) encontramos la fórmula $-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, que tiene a_{12} y a_{21} cambiados de su posición habitual y en realidad es $-[II] = \mathbf{A}^t [I]$, resultado de trasponer y multiplicar por -1 en $[II] = -[I] \mathbf{A}$.

Sabemos que $-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$, pero con frecuencia no hace falta hallar la inversa ni efectuar el producto de matrices (salvo si has de calcular cada curvatura principal por separado, que son los autovalores de $-\mathbf{A}$).

Si lo que necesitamos es el determinante de W (la curvatura Gaussiana extrínseca), sabemos, por las propiedades de los determinantes, que es igual a lo siguiente:

$$K \equiv \begin{vmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{-1} \equiv \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

¡No dividas las matrices! divide tan sólo los determinantes.

Si lo que necesitamos es hallar los autovectores de la matriz \mathbf{A} , tampoco en ese caso hace falta invertir ni multiplicar matrices. En vez de eso, observa que para a, b cualesquiera las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1. El vector numérico $[I]^{-1}[II] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es proporcional a $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.
2. Los vectores numéricos $[II] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $[I] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ son proporcionales: su determinante es nulo.

Ese razonamiento es fácil de recordar, y demuestra lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ es autovector de } \pm \mathbf{A} \iff \begin{vmatrix} Ea + Fb & ea + fb \\ Fa + Gb & fa + gb \end{vmatrix} = 0,$$

es decir: el vector $a\Phi_u + b\Phi_v$ es principal si y sólo si $\begin{vmatrix} Ea + Fb & ea + fb \\ Fa + Gb & fa + gb \end{vmatrix} = 0$.

Otra cosa que no debes hacer es arrastrar en tus cálculos la función $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$, que es una raíz cuadrada. Con frecuencia su valor exacto no importa, y entonces la dejamos indicada como $\ell(u, v)$ o simplemente ℓ . Entonces $\ell N \equiv \Phi_u \times \Phi_v$ es un vector normal a la superficie pero que no contiene raíces cuadradas, y nos permite calcular $\ell II \equiv (\ell e)(du)^2 + 2(\ell f)dudv + (\ell g)(dv)^2$ donde

$$\begin{aligned} \ell e &\equiv (\ell N) \cdot \Phi_{uu} \\ \ell f &\equiv (\ell N) \cdot \Phi_{uv} \\ \ell g &\equiv (\ell N) \cdot \Phi_{vv} \end{aligned}$$

son funciones sin raíces cuadradas. En particular:

$$\text{el vector } a\Phi_u + b\Phi_v \text{ es principal} \iff \begin{vmatrix} Ea + Fb & (\ell e)a + (\ell f)b \\ Fa + Gb & (\ell f)a + (\ell g)b \end{vmatrix} = 0.$$

También:

$$K \equiv \frac{1}{\ell^2} \cdot \frac{(\ell e)(\ell g) - (\ell f)^2}{EG - F^2},$$

que es una fórmula sin raíces cuadradas. En el caso de un grafo, esta última fórmula nos da:

$$S = \{z = h(x, y)\} \implies K \equiv \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}.$$