$\boxed{9.2}$ Sea A una matriz cuadrada, cuyo determinante vale $9 = |A|$ y sea n su orden

$$\Rightarrow \quad |A^5| = |A|^5 = 9^5 \qquad (\text{ya que } \det(A\cdot A) = \det(A)\cdot\det(A) \text{ si } A \text{ es cuadrada}).$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 9^{-1}, \text{ ya que } \quad A\cdot A^{-1} = I_n \to |A|\cdot|A^{-1}| = 1.$$

$$|7A| = 7^n |A| = 7^n \cdot 9,$$

$(7A)$ es la matriz A con cada fila multiplicada por 7, por lo que su determinante se multiplica por 7 debido a cada una de sus n filas.

(a) Calcular el determinante del endomorfismo de $M_{2\times2} = V$

$f: V \longrightarrow V.$ $\qquad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}.$

Sea $\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

la base canónica de V. La matriz $M(f;\mathcal{E},\mathcal{E})$ de f con esta base en salida y llegada. Ésta matriz tiene las imágenes de los elementos de $\mathcal{E}$ en las columnas.

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad f(E_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

$$\Rightarrow M(f;\mathcal{E},\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \operatorname{Det}(f) = 1.$$

(b) $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}) \arrow[r, "Id", "C"'] \arrow[rrr, bend right, "\substack{f \\ A}"'] & (V,\mathcal{E}) \arrow[r, "f", "M(f;\mathcal{E},\mathcal{E})"'] & (V,\mathcal{E}) \arrow[r, "Id", "C^{-1}"'] & (V,\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$$\to A = C^{-1}\cdot M(f;\mathcal{E},\mathcal{E})\cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \Leftarrow |A| = |C^{-1}|\,\underbrace{|M(f;\mathcal{E},\mathcal{E})|}_{\substack{\| \\ 1 \ (a)}}\cdot|C| = |C^{-1}|\cdot|C| = 1.$$

$\boxed{9.4}$ $R \subset \mathbb{R}^2$ es la región comprendida entre L y Γ:

$L = \{(x,y) : x + 10y = 0\}$, $\Gamma = \{(x,y) : (0{,}1x + y)[1 + (x+y)^2] = 1\}$.

(a) Halla $F(R)$, siendo $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 10y \end{cases}$ $\rightarrow$ hallemos la función inversa F^{-1}

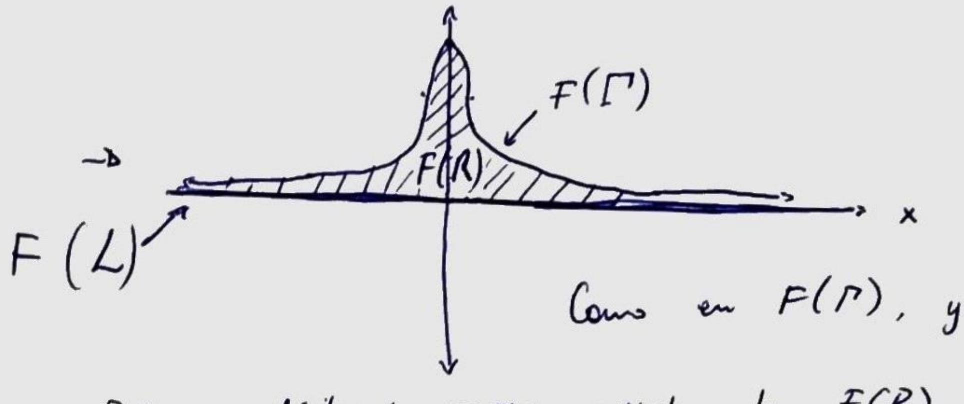
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 10/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right)$

$\rightarrow F^{-1}\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10/9 & -1/9 \\ -1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9}x' - \frac{1}{9}y' \\ y = -\frac{1}{9}x' + \frac{1}{9}y' \end{cases}$

$F(L) = \{(x',y') : (\frac{10}{9}x' - \frac{1}{9}y') + 10(-\frac{1}{9}x' + \frac{1}{9}y') = 0\}$

$= \{(x',y') : \quad y' = 0\}$

$F(\Gamma) = \{(x',y') : (\frac{1}{10}y')(1 + x'^2) = 1\} = \{(x',y') : y' = \frac{10}{1+x^2}\}$



Como en $F(\Gamma)$, $y' > 0$,

Podemos, fácilmente, expresar explícitamente $F(R)$

como $F(R) = \{(x,y) : \quad 0 \leq y \leq \frac{10}{1+x^2}\}$.

(b) Calculamos el área en $F(R)$:

$$A(F(R)) = \int_{-\infty}^{\infty} 10 \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = 10 \cdot \left(\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{S\to-\infty} \int_S^0 \frac{dx}{1+x^2} \right) =$$

$$= 10 \left(\lim_{R\to\infty} (\arctan(R) - \arctan(0)) + \lim_{S\to-\infty} (\arctan(0) - \arctan(S)) \right)$$

$$= 10 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 10\pi$$

$\rightarrow F(R) \xrightarrow{F^{-1}} R \Rightarrow A(R) = A(F(R)) \cdot \|M(F^{-1})\| = \frac{10}{9}\pi$.

9.6 Sea E un Espacio vectorial de $\dim(E) = (n+m)$ y $f: E \to E$ un endomorfismo, $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i}, \dots, \vec{v}_{n+m}\}$ base de E y $F = \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \rangle$.

(a) (1) La matriz de f, usando $\mathcal{B}$ en salida y llegada es de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ con A matriz $n \times n$

(2) $\vec{v} \in F \Rightarrow f(\vec{v}) \in F$ i.e. $f(F) \subseteq F$.

---

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\vec{v} \in F \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ con } y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij}$$

$$\Rightarrow f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in F.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) si $f(F) \subseteq F \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f(\vec{v_i}) \in F$

$$\Rightarrow \forall j \in \{1 \dots n\},\ f(\vec{v_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \vec{v_i} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

y de $(E \setminus F)$ no sabemos nada, por lo que

$$\forall j \in \{n \dots, n+m\},\ f(\vec{v_j}) = \sum_{i=1}^{n+m} b_{ij} \vec{v_i} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{n+m,j} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,n+m} \\ \hline & & & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & & b_{n+m,n+1} & \cdots & b_{n+m,n+m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right].$$

$\boxed{9.6}$ (b) Demuestra que si $f(F) \subseteq F \Rightarrow \exists g, h$ endomorfismos bien definidos por:

$$g: \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ \vec{v} \longmapsto f(\vec{v}) \end{array} \quad , \quad h: \begin{array}{l} E/F \longrightarrow E/F \\ \vec{v}+F \longmapsto f(\vec{v})+F. \end{array}$$

- sea $\vec{v} \in F$, como $f(F) \subseteq F$, $f(\vec{v}) \in F$

$\Rightarrow g(\vec{v}) = f(\vec{v}) \in F$, además cada $\vec{v} \in F$ tiene una sola imagen, porque f está bien definida.

$\Rightarrow g$ bien definida.

- sea $\vec{v} \in E$, $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot \vec{v}_j$

$$\Rightarrow \vec{v} + F = \left(\sum_{j=1}^{n+m} x_j \vec{v}_j\right) + F \overset{⊛}{=} \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j (\vec{v}_j + F).$$

$\vec{v}_i \in F \quad \forall i = 1 \ldots n$

$$y \quad h(\vec{v}+F) = f(\vec{v}) + F = f\left(\sum_{j=1}^{n+m} x_j \vec{v}_j\right) + F =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n+m} x_j \, f(\vec{v}_j)\right) + F = \sum_{j=1}^{n+m} x_j \left(f(\vec{v}_j) + F\right) =$$

como $f(\vec{v}_j) \in F$ si $j = 1 \ldots n$, $\forall j = 1 \ldots n$, $f(v_j) + F = 0 + F$

$$= \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j \left(f(\vec{v}_j) + F\right) \in E/F$$

y sean $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$, $\vec{w} = (y_1, \ldots, y_{n+m}) \in E$.

$$\text{Si } \vec{v} + F = \vec{w} + F \overset{⊛}{\Longrightarrow} \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j (\vec{v}_j + F) = \sum_{j=n+1}^{n+m} y_j (\vec{v}_j + F)$$

como $\{\vec{v}_j + F : j = n+1, \ldots, n+m\}$ es base de E/F,

$\forall j \in \{n+1, \ldots, n+m\} \quad x_j = y_j$

$$\Rightarrow h(\vec{v}+F) = \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j \left(f(\vec{v}_j) + F\right) = \sum_{j=n+1}^{n+m} y_j \left(f(\vec{v}_j) + F\right) = h(\vec{w} + F).$$

$\Rightarrow h$ está bien definida.

La matriz de g en la base $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}_1$:

$$g(\vec{v_j}) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(F) \subseteq F}}{f(\vec{v_j}) =} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{v_i} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

$$M(g) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ corresponde con la matriz A vista en el apartado (a).

La matriz B del apartado anterior corresponde a las coordenadas de las imágenes de $\vec{v_j}$ con $j = n+1, \dots, n+m$ correspondientes a $\{\vec{v_{n+1}}, \dots, \vec{v_{n+m}}\}$, es decir, quitando sus componentes en los vectores $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$. Si $f(\vec{v_j}) = \sum_{i=1}^{n+m} b_{ij} \vec{v_i} \Rightarrow$

$$k(\vec{v_j} + F) = \left(\sum_{i=1}^{n+m} b_{ij} \vec{v_j}\right) + F \quad \underline{\underline{f(F) \subseteq F}}$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+m} b_{ij} (\vec{v_j} + F) = \begin{bmatrix} b_{n+1,j} \\ \vdots \\ \\ b_{n+m,j} \end{bmatrix}$$ en la base $\{\vec{v_{n+1}} + F, \dots, \vec{v_{n+m}} + F\}$

→ La matriz de h en esta base :

$$M(h) = \begin{bmatrix} b_{n+1,n+1} & b_{n+1,n+2} & \cdots & b_{n+1,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+m,n+1} & \cdots & & b_{n+m,n+m} \end{bmatrix} = B$$, misma B que tenemos en el apartado (a).

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por el ejercicio 5.}}}{=} \det(A) \cdot \det(B) = \det(g) \cdot \det(h)$$

H9-5