APELLIDOS, NOMBRE: CUESTA SIERRA, PABLO.

DNI: 54194689 L

---

**1.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \overset{0}{\cancel{f(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - \overset{0}{\cancel{f(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} = 0.$$

$\Longrightarrow Df(0,0) = (0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - \overset{0}{\cancel{f(0,0)}} - \overset{0}{\cancel{Df(0,0)}} \binom{x}{y} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^4)} \right| = ¿L? \circledast$$

Si nos acercamos a $\vec{O}$ por rectas de la forma $(t, \lambda t)$ $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^3}{\sqrt{(1+\lambda^2)t^2}\,(t^2+\lambda^4 t^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda \cancel{t^3}}{\sqrt{1+\lambda^2}\,\cancel{t^3}(1+\lambda^4 t^2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Para cada $\lambda$ tenemos un valor diferente de $\circledast$ el límite.
por tanto, este límite no existe y entonces, <u>f no es diferenciable en (0,0).</u>

En el punto: $p = (1, 1, \frac{1}{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^4) - 2x^3y}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^4) - 4y^4x^2}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$$

Confirmamos que $f(1,1) = \frac{1}{2}$ ✓

Plano tangente a la gráfica de $f$: $\{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$ en el punto $(1, 1, 1/2)$:

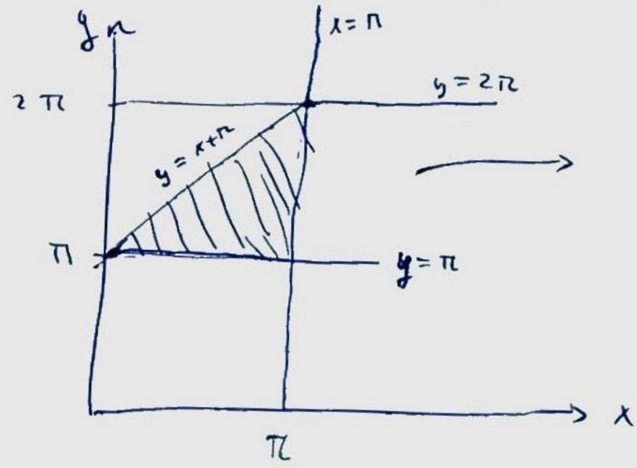
$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1/2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1/2)(y-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}.$$

$\boxed{2}$ (a) $$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\, dy = I$$

La superficie de integración: $D = \{ \pi \le y \le 2\pi,\ y-\pi \le x \le \pi \}$




$\Downarrow$ Invertimos orden de integración.

$D = \{ 0 \le x \le \pi,\ \pi \le y \le x+\pi \}$

$$\longrightarrow I = \int_0^{\pi}\int_{\pi}^{x+\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) dy\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,(x+\pi-\pi)\, dx =$$

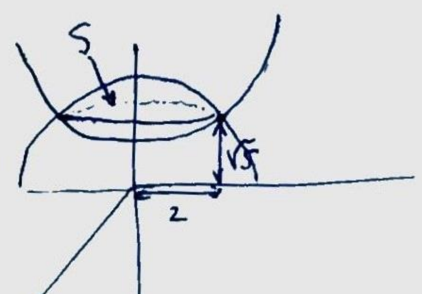
$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{2}}.$$

---

(b) $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dentro de $x^2+y^2+z^2=9$ y sobre la hoja superior de $x^2+y^2-z^2=-1$.

La intersección de ambas superficies: $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2-z^2=-1 \end{array} \right\}$ $2z^2=10 \Rightarrow z=\sqrt{5}$

Con coordenadas cilíndricas: $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array} \right\}$ Si $z=\sqrt{5} \Rightarrow r^2 = x^2+y^2 = 9-z^2 = 4$ $\Rightarrow r = 2$




Podemos describir ~~el~~ ~~superficie~~ volumen como

$S^* = \{ (r,\theta,z) : \theta \in [0,2\pi],\ r \in [0,2],\ z \in [\sqrt{r^2+1}, \sqrt{9-r^2}] \}$

La $z$ está acotada por arriba por la esfera $(r^2+z^2=9)$

y por debajo, por el hiperboloide $(z^2=r^2+1)$

Por debajo: $x^2+y^2-z^2=-1 \Rightarrow z^2 = r^2+1$

Por arriba: $x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow z^2 = 9-r^2$

Por tanto

$|JT|$, T transformación de cilíndricas (*)

$$Vol(S) = \iiint_S dxdydz = \iiint_{S^*} \overset{\downarrow}{r} \cdot drd\theta dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{r^2+1}}^{\sqrt{9-r^2}} r \; dzdrd\theta = 2\pi \int_0^2 r\left(\sqrt{9-r^2} - \sqrt{r^2+1}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(r\sqrt{9-r^2} - r\sqrt{r^2+1}\right) dr =$$

$$= 2\pi \left( \frac{(9-r^2)^{3/2}}{-2\cdot 3/2} - \frac{(r^2+1)^{3/2}}{2\cdot 3/2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{-2\pi}{3}\left(5^{3/2} + 5^{3/2} - 9^{3/2} - 1\right) =$$

$$= \frac{-2}{3}\pi\,(2\cdot 5\sqrt{5} - 28) = \frac{-4}{3}\pi\,(5\sqrt{5} - 14) = \boxed{\frac{4}{3}\pi\,(14 - 5\sqrt{5}) = Vol.(S)}$$

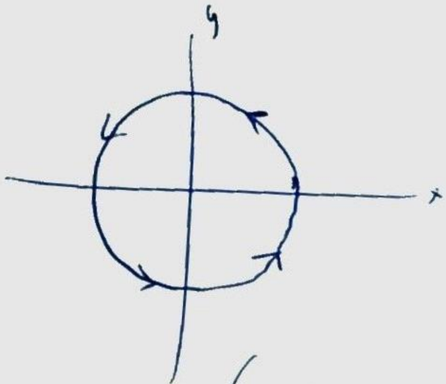
(*) Cambio de variable a coordenadas cilíndricas

$$T(r,\theta,z) = (\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\sin\theta}_{y}, \underbrace{z}_{z})$$

$$|JT| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |r\cos^2\theta + r\sin^2\theta| = r.$$

$\boxed{3}$ $\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy$ . $F=(F_1,F_2)$, $F(x,y)=(-y^3,x^3)$.

$C$ la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$ orientada en sentido antihorario.




$F(x,y)=(-y^3,x^3)$ es $C^1$, y $C=\partial B$, con $B=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ la bola unidad, orientada positivamente, $\rightarrow$ ($C$ en sentido antihorario) aplicamos el teorema de Green:

$$\int_C F\,ds = \int_B \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_B (3x^2+3y^2)\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\cdot r\,dr\,d\theta =$$

cambio a polares

$$= 2\pi\int_0^1 3r^3\,dr = 2\pi\cdot 3\,\frac{1}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{2}.}$$

$\boxed{4}$ Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua y $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$. (impar)

$S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$. Calcular $I = \int_S F dS$

---

Sea $\phi_1$ una param. positiva (vector normal hacia fuera)

$\phi_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \int_S F dS = \int_D f(\phi_1(u,v))\, \phi_{1u} \times \phi_{1v}\, du dv = I$, integrable porque $f$ es continua

Definimos $\phi_2$ por $\phi_2(u,v) = -\phi_1(u,v)$. $(\to \phi_2 : D \to S)$

de modo que como $\phi_1$ es biyectiva, y $\phi_2 = -\phi_1$,

$\phi_2$ también lo es.

Y si $\phi_1(u,v) = (x,y,z) \in S \Rightarrow \phi_2(u,v) = (-x,-y,-z) \in S$

Porque $1 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow 1 = (-x)^2+(-y)^2+(-z)^2$.

Por tanto $\phi_2$ es una reparametrización de $S$. Además bien orientada:

$\phi_{2u} = -\phi_{1u}$, $\phi_{2v} = -\phi_{1v}$

$\Rightarrow \phi_{2u} \times \phi_{2v} = (-\phi_{1u}) \times (-\phi_{1v}) = \phi_{1u} \times \phi_{1v}$

Por tanto: $I = \int_D f(\phi_1(u,v))\,(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\, du dv = \int_D f(\phi_2(u,v))\,(\phi_{2u} \times \phi_{2v})\, du dv$

$= \int_D f(-\phi_1(u,v))\,(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\, du dv = \int_D -f(\phi_1(u,v))\,(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\, du dv =$

por la def. de $\phi_2$ — Como $f$ es impar

$= -I. \Rightarrow \int_S F dS = -\int_S F dS = 0.$