EDO-2020-21-parcial-soluciones.pdf

carlymb

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

1. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Existe una función F que depende explícitamente de t y de y tal que la ecuación $y' = F(t, y)$ tiene como solución $y(t) = e^{t^3}$.

(b) Sean f y g funciones de clase C^1 en $[a, b]$. Su Wronskiano es siempre 0 o nunca se anula en $[a, b]$.

(c) La ecuación $y' = y^{\frac{1}{3}}(1 + y^2)$ tiene solución única para todo dato inicial.

(d) La función $\mu(x, y) = 3xy$ es un factor integrante de la ecuación

$$\frac{|x|}{xy} + \frac{y'}{x} = 0.$$

(e) Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, la ecuación

$$xy'(x) + y(x) = p(x)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado n.

Solución:

(a) **Verdadero.** Sea $y(t) = e^{t^3}$. Entonces, si calculamos su derivada queda:

$$y'(t) = 3t^2 e^{t^3} = 3t^2 y(t) \tag{1}$$

Luego tomando $F(t, y) = 3t^2 y$ se tiene que $y' = F(t, y)$ tiene por solución $y(t) = e^{t^3}$.

(b) **Falso.** Sean $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. $f, g \in C^\infty[-1, 1]$, luego se tiene que en ese intervalo:

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

$W(f, g)$ se anula solo en 0 pero no en el resto de $[-1, 1]$.

(c) **Falso.** La ecuación $y' = y^{\frac{1}{3}}(1 + y^2)$ es autónoma con $f(y) = y^{\frac{1}{3}}(1 + y^2)$. Como $y^{\frac{1}{3}}$ e $(1 + y^2)$ son continuas, f es continua luego hay solución única para $y_0 \neq 0$. Por su parte, $f'(y) = \frac{1+y^2}{3y^{\frac{2}{3}}} + 2y^{\frac{4}{3}}$, que es continua en todo punto salvo en 0. Por tanto, para ver si hay unicidad en 0 hay que comprobar si es asíntota horizontal: como

$$x = x_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{f(y)} dt = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(u)} du,$$

tenemos que estimar

$$\int_0^y \frac{1}{f(u)} du = \lim_{y_0 \to 0} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}(1 + u^2)} du.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{y_0\to 0}\left|\int_{y_0}^{y}\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}(1+u^2)}du\right| &\leq \lim_{y_0\to 0}\int_{y_0}^{y}\left|\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}(1+u^2)}\right|du \\
&\leq \lim_{y_0\to 0}\int_{y_0}^{y}\left|\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}\right|du \\
&= \lim_{y_0\to 0}[\left|\frac{u^{2/3}}{2/3}\right|]_{u=y_0}^{u=y} \\
&= \lim_{y_0\to 0}\left|\frac{y^{2/3}}{2/3}-\frac{y_0^{2/3}}{2/3}\right| \\
&= \frac{|y^{2/3}|}{2/3} < \infty \ \forall\ y.
\end{aligned}$$

Como esta integral es finita, no hay solución única en $y_0 = 0$.

(d) **Verdadero.** Sean $P(x,y) = \frac{|x|}{xy}$ y $Q(x,y) = \frac{1}{x}$, de modo que:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0.$$

Sea la función $f(x,y) = \frac{3}{2}x|x| + \frac{3}{2}y^2$ definida en $\mathbb{R}^2\backslash\{x=0\}$ (no es necesario definirla en los puntos que cumplan $x = 0$ porque la ecuación diferencial no está definida en esos puntos).
Observamos que:

1) f es C^1 en $\mathbb{R}^2\backslash\{x=0\}$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3|x| = 3xy\cdot\frac{|x|}{xy} = \mu P(x,y)$.

3) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y = 3xy\cdot\frac{1}{x} = \mu Q(x,y)$.

Por tanto, la ecuación $\mu P(x,y) + \mu Q(x,y)y' = 0$ es una ecuación exacta lo que implica que $\mu(x,y)$ es un factor integrante.

(e) **Verdadero.** Reescribimos la ecuación inicial:

$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{p(x)}{x}$$

Sabemos que las soluciones de la ecuación son:

$$y(x) = e^{-\int\frac{1}{x}\,dx}\int\frac{p(x)}{x}e^{\int\frac{1}{x}\,dx}\,dx = \frac{1}{|x|}\int|x|\frac{p(x)}{x}\,dx = \frac{1}{x}\int p(x)\,dx$$

Sea $Q(x) = \int p(x)\,dx$; entonces, $Q(x)$ es un polinomio de grado $n+1$ y tomamos cte de integración tal que el término que no va acompañado por x es 0, es decir, si $Q(x) = q_0 + q_1x + ... + q_{n+1}x^{n+1}$ entonces $q_0 = 0$.
Así, la solución $y(x) = \frac{Q(x)}{x} = q_1 + q_2x + ... + q_{n+1}x^n$ es un polinomio de grado n.
Las demás soluciones son, para una cierta constante real C:

$$y(x) = \frac{1}{x}(Q(x)+C)$$

- Si $C = 0$, tenemos el polinomio solución que hallamos antes.
- Si $C \neq 0$ entonces $Q(x) = C + q_1x + ... + q_{n+1}x^{n+1}$
$\Longrightarrow y(x) = \frac{Q(x)}{x} = \frac{C}{x} + q_1 + q_2x + ... + q_{n+1}x^n$, que no es un polinomio.

Concluimos que la solución polinómica (de grado n) es única.

2. Una chuleta de ternera de 1 kg de peso, inicialmente a una temperatura de 30°, se deposita a las 12:00h en un horno que está a 200°. Treinta minutos más tarde, la temperatura interior de la chuleta es de 80°. Sabiendo que la chuleta estará bien asada cuando su interior llegue a los 105°, determinar a qué hora deberemos sacarla del horno.

Solución: Para resolver el ejercicio vamos a utilizar la ley de enfriamiento de Newton. Esta se puede enunciar como:

La tasa de pérdida de calor es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y sus alrededores.

Contaremos el tiempo desde el momento en el que la chuleta entra en el horno. Por tanto, si denotamos $T(t)$ a la temperatura del cuerpo (la chuleta de ternera) en función del tiempo y T_e a la temperatura exterior (temperatura del horno), tenemos que para alguna constante k:

$$T(t)' = k(T_e - T(t))$$

Esta es una ecuación en variables separables así que separamos las variables e integramos:

$$T(t)' = k(T_e - T(t)) \implies \frac{T(t)'}{(T_e - T(t))} = k \implies \int \frac{T(t)'}{(T_e - T(t))} dt = \int k\,dt \implies$$
$$\implies -\log|T_e - T(t)| = kt + c \overset{T_e \geq T(t)}{\implies} \log\big(T_e - T(t)\big) = -kt - c$$

Donde c es nuestra constante de integración. Ahora podemos despejar $T(t)$ aplicando la exponencial a ambos miembros. Asimismo sustituiremos la constante c por $c_1 := e^c$ para simplificar la expresión.

$$\log\big(T_e - T(t)\big) = -kt - c \implies T_e - T(t) = e^{-kt}e^{-c} \implies T(t) = T_e - e^{-kt}c_1$$

Esta expresión es razonable ya que si $t \to \infty$, la temperatura del cuerpo tiende a la temperatura exterior mientras que si $t = 0$, podemos ajustar c_1 para que $T(0)$ sea la temperatura inicial de la chuleta.

Para ajustar las constantes, hemos de establecer que mediremos el tiempo en medias horas y que $T_e = 200$. Asimismo, aplicaremos los dos datos:

- Al introducir la chuleta en el horno está a 30º $\implies T(0) = 30$
- Treinta minutos después, la chuleta está a 80º $\implies T(1) = 80$

Con el primer dato:

$$T(0) = 200 - e^0 c_1 \implies 30 = 200 - c_1 \implies c_1 = 170 \implies T(t) = 200 - 170e^{kt}$$

Con el segundo dato:

$$T(1) = 200 - 170e^k \implies 80 = 200 - 170e^k \implies e^k = \frac{120}{170} \implies k = \log\left(\frac{120}{170}\right) \implies$$
$$\implies T(t) = 200 - 170e^{\log\left(\frac{120}{170}\right)t} \implies T(t) = 200 - 170e^{\log\left(\frac{120}{170}\right)^t} \implies$$
$$\implies T(t) = 200 - 170\left(\frac{12}{17}\right)^t$$

Ahora solo nos falta responder la pregunta del enunciado. Hemos de encontrar el valor de t para el que T sea 105:

$$105 = 200 - 170\left(\frac{12}{17}\right)^t \implies \frac{95}{170} = \left(\frac{12}{17}\right)^t \implies t = \log_{\frac{12}{17}}\left(\frac{95}{170}\right)$$

Por tanto, hemos encontrado el tiempo final: $t_f = \log_{\frac{12}{17}}\left(\frac{95}{170}\right)$. Como estábamos midiendo el tiempo en medias horas, la chuleta estará cocinada $30 \cdot t_f$ minutos más tarde de las 12:00h.

Si queremos calcular el valor numérico, vemos que $t_f \approx 1{,}67$. Por tanto, han de pasar 50 minutos y la chuleta estará cocinada a las 12:50h.

3. El puente de Cangas de Onís, en Asturias, vibra de manera natural de acuerdo con la ecuación

$$y''(t) + \epsilon y'(t) + y(t) = 0,$$

donde $\epsilon \geq 0$. Por el mismo están cruzando unos manifestantes contrarios a los cierres de las minas de carbón de la zona. El impacto agregado de sus pasos se puede considerar una fuerza externa F dada por $F(t) = \cos(t)$. Calcular la magnitud de la oscilación del puente en función del valor de ϵ.

Solución: Vamos a resolver primero la EDO lineal de segundo orden $y''(t)+\epsilon y'(t)+y(t) = \cos(t)$, que es la ecuación diferencial que cumple la oscilación $y(t)$ del puente para tiempo t cuando está siendo atravesado por los manifestantes. Consideramos pues la ecuación homogénea asociada $y''(t) + \epsilon y'(t) + y(t) = 0$, cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + \epsilon\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}.$$

Debemos tener en cuenta ahora tres casos:
Caso 1: $\epsilon^2 - 4 < 0$. En este caso tenemos dos raíces complejas distintas, a saber $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ donde $a = -\frac{\epsilon}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{4-\epsilon^2}}{2}$. En este supuesto, tenemos que la solución general de la ecuación homogénea es $y_g(t) = e^{at}[C_1 \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt)]$ donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Caso 2: $\epsilon^2 - 4 = 0$. En este caso tenemos una única raíz real, a saber $\lambda = -\frac{\epsilon}{2}$. En este supuesto, tenemos que la solución general de la ecuación homogénea es $y_g(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$ donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Caso 3: $\epsilon^2 - 4 > 0$. En este caso tenemos dos raíces reales distintas, a saber $\lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2-4}}{2}$. En este supuesto, tenemos que la solución general de la ecuación homogénea es $y_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para resolver completamente la ecuación debemos encontrar una solución particular $y_p(t)$, pues en ese caso tendremos que la ecuación tiene solución general $y(t) = y_g(t) + y_p(t)$. Por el método de los coeficientes indeterminados, vamos a buscar una solución del tipo $y_p(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t)$. Como se cumple que $y_p'(t) = -A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$ e $y_p''(t) = -A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t) = -y_p(t)$; si imponemos la ecuación:

$$-y_p(t) + \epsilon(-A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)) + y_p(t) = \cos(t) \Rightarrow \epsilon(-A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)) = \cos(t) \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{\epsilon},$$

donde hemos supuesto en el último paso que $\epsilon \neq 0$.
Si tenemos, por contra, que $\epsilon = 0$, entonces tratamos de encontrar una solución particular del tipo $y_p(t) = At\cos(t) + Bt\operatorname{sen}(t)$. Como se cumple que $y_p'(t) = A\cos(t) - At\operatorname{sen}(t) + B\operatorname{sen}(t) + Bt\cos(t)$ y, por lo tanto, $y_p''(t) = -At\cos(t) - Bt\operatorname{sen}(t) - 2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t) = -y_p(t) - 2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t)$; si imponemos la ecuación (teniendo en cuenta que $\epsilon = 0$):

$$-y_p(t) - 2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t) + y_p(t) = \cos(t) \Rightarrow -2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t) = \cos(t) \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}$$

Así pues, vamos a escribir la expresión de la oscilación y analizar la evolución con el tiempo de su amplitud en cada caso:

- Si $\epsilon = 0$ la oscilación es
$$y(t) = C_1\cos(t) + C_2\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$$
De esta manera, $|y(t)| \leq |C_1|+|C_2|+\frac{1}{2}t$ e $y(t)$ oscila entre las rectas $|C_1|+|C_2|+\frac{1}{2}t$ y $-|C_1|-|C_2|-\frac{1}{2}t$. Con lo cual, la amplitud de la oscilación A crece como $\frac{1}{2}t$; y, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} A = +\infty$, es decir, la amplitud no está acotada (fenómeno de resonancia).

- Si $\epsilon \in (0, 2)$ la oscilación es
$$y(t) = e^{-\frac{\epsilon}{2}t}[C_1\cos(\frac{\sqrt{4-\epsilon^2}}{2}t) + C_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{4-\epsilon^2}}{2}t)] + \frac{1}{\epsilon}\operatorname{sen}(t)$$

De esta manera, como $e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$ decrece exponencialmente, tras un período de tiempo debemos solamente tener en cuenta la parte estacionaria $\frac{1}{\epsilon}\operatorname{sen}(t)$, entonces la amplitud de la oscilación, a largo plazo, está acotada y es igual a $\frac{1}{\epsilon}$.

- Si $\epsilon = 2$ la oscilación es

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)$$

Al igual que antes, como e^{-t} y te^{-t} decrecen exponencialmente, tras un período de tiempo debemos solamente tener en cuenta la parte estacionaria $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)$, entonces la amplitud de la oscilación, a largo plazo, está acotada y es igual a $\frac{1}{2}$.

- Por último, si $\epsilon \in (2, +\infty)$ la oscilación es

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-4}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2-4}}{2}t} + \frac{1}{\epsilon}\operatorname{sen}(t)$$

Sabemos que si $\epsilon \in (2, +\infty)$, $\frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-4}}{2} < \frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2}}{2} = 0$ y que $\frac{-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2-4}}{2} < 0$. En ese caso, $e^{\frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-4}}{2}t}$ y $e^{\frac{-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2-4}}{2}t}$ decrecen exponencialmente. Luego, tras un período de tiempo debemos solamente tener en cuenta la parte estacionaria $\frac{1}{\epsilon}\operatorname{sen}(t)$, entonces la amplitud de la oscilación, a largo plazo, está acotada y es igual a $\frac{1}{\epsilon}$.

4. Sabiendo que

$$G(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

es solución de

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

encontrar todas las demás.

Solución: La solución general del problema viene dada por la suma de la solución general del homogéneo y una solución particular del no homogéneo. Como la solución particular ya nos la han dado, nos centraremos en encontrar la solución general del homogéneo, que viene dada de la siguiente forma:

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x)$$

donde c_1, c_2 son unas constantes e Y_1, Y_2 son soluciones linealmente independientes del homogéneo. Hallemos Y_1, Y_2.

Sea A la matriz del sistema. Estudio si se puede diagonalizar, calculo su polinomio característico:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

La única raíz de este polinomio es el 2. Tenemos por tanto, un autovalor de multiplicidad doble:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Estudio los autovectores asociados a este autovalor. Sea v autovector, entonces:

$$v \in \ker(A - 2I) = ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomo

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como solo hemos obtenido un autovector, nuestra matriz A se puede escribir como:

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \qquad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P tiene como columnas los vectores v y w, donde w cumple que

$$(A - 2I)w = v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya conocemos P e invirtiendo obtenemos P^{-1}:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La soluciones de nuestro problema homogéneo serán las columnas de la matriz

$$exp(Ax) = exp(PJxP^{-1}) = Pexp(Jx)P^{-1}$$

Como J lo podemos escribir como J = D + N, donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda aplicando propiedades de la exponencial

$$Pexp(Jx)P^{-1} = Pexp((D+N)x)P^{-1} = Pexp(Dx)exp(Nx)P^{-1}$$

La exponencial de Dx al ser diagonal D nos queda

$$exp(Dx) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Y la exponencial de Nx, aplicando Taylor y sabiendo que las potencias de N se anulan nos queda

$$exp(Nx) = I + N * x + N^2 * x^2 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con todo ello la matriz que estamos buscando tiene la siguiente expresión

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xe^{2x} + e^{2x} & -xe^{2x} \\ xe^{2x} & xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}$$

Las soluciones Y_1, Y_2 son las columnas de esta matriz. Por tanto, las soluciones buscadas son de la forma

$$Y = c_1 \begin{pmatrix} -xe^{2x} + e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -xe^{2x} \\ xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$