8. SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

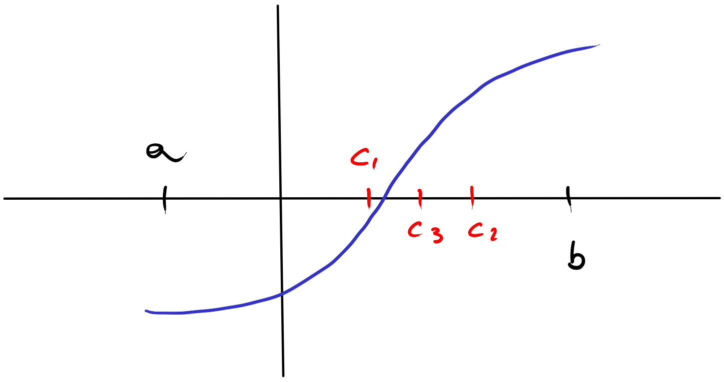
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontrar $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$

8.1 MÉTODO DE LA BISECCIÓN

teorema (Bolzano) : si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$: $f(c) = 0$.

demostración : de cálculo I



c_n sucesión de puntos intermedios en intervalos de longitud $\frac{b-a}{2^{n-1}}$

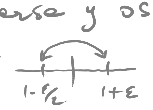
```
function c = bisec (f, a, b, tol1, tol2)
    if f(a)f(b) > 0
        ERROR
    elseif f(a)==0
        c=a; RETURN
    elseif f(b)==0
        c=b; RETURN
    end
    c = (a+b)/2
    while |f(c)| > tol1 && |b-a| < tol2
        if f(a)f(c) < 0
            b = c;
        else
            a = c;
        end
        c = (a+b)/2
    end
```

c_n

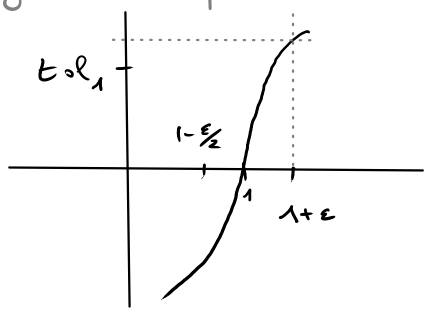
¿qué podría fallar?

- en $\mathbb{R}$: $|f(c)| \to 0$ $|b-a| \to 0$
- en float64 : $|b-a|$ podría no anularse y oscilar.

  ejemplo:



- $|f(c)|$ podría ser muy grande respecto a tol_1



8.2 ORDEN DE CONVERGENCIA

una ecuación no lineal no se puede, en general, resolver con un método directo - es decir: con un número finito de operaciones aritméticas / float (ni $x^2=7$ lo permite). se necesitan entonces métodos iterativos, como bisección, cuyas operaciones se repiten hasta llegar a la precisión deseada.

↳ el número de iteraciones necesarias es el principal criterio de calidad para un método iterativo. por esto se introduce la siguiente

def (ORDEN DE CONVERGENCIA)

decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

- converge linealmente a $c \in \mathbb{R}$ si $\exists\, \mu \in (0,1)$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-c|}{|x_n-c|} = \mu$
- converge al orden $q>1$ a $c\in\mathbb{R}$ si $x_n \to c$ y $\exists\, \mu>0$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-c|}{|x_n-c|^q} = \mu$
- converge ALMENOS al orden $q \geq 1$ si $\exists\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $a_n \to 0$ al orden $q\geq 1$ y $|x_n - c| \leq a_n$

Ejemplo: bisección converge almenos linealmente

- $|c_n - c| \leq \frac{b-a}{2}\frac{1}{2^n}$
- $a_n = \frac{b-a}{2}\frac{1}{2^n}$ es ≥ 0 , $a_n \to 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = \mu < 1$: linealmente

proposición: sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$

i. si $a_n \to 0$ linealmente, con constante μ

$\Rightarrow \forall L \in (\mu, 1) \ \exists k_L \in \mathbb{N}$ t.q.

$$a_{k+n} < L^n a_k \quad \forall k > k_L, \forall n > 0$$

ii. si $a_n \to 0$ al orden $q > 1$

$\Rightarrow \forall L \in (0,1) \ \exists k_L \in \mathbb{N}$ t.q.

$$a_{k+n} < L^{q^n - 1} a_k \quad \forall k > k_L, \forall n > 0.$$

corolario: sea D_n el número de dígitos decimales generados con la aproximación al paso $k+n$ respecto a la aproximación al paso k $(k > k_L)$

ejemplo:

$\sqrt{7} = 2.6\ldots$

- $(2.2)^2$
- $(2.8)^2$
- $(2.6)^2 < 7$
- $(2.7)^2 > 7$

$\rightarrow$ es decir D_n t.q.

$$a_{k+n} \leq 10^{-D_n} a_k$$

i. si $q = 1$ $\quad D_n = \left(\log_{10} 1/L\right) n \sim n$

ii. si $q > 1$ $\quad D_n = \left(\log_{10} 1/L\right)(q^n - 1) \sim q^n$

demostración:

esta es una reformulación de la proposición anterior:

i. $a_{k+n} \leq 10^{-D_n} a_k \quad : \quad L^n = 10^{-D_n}$

ii. $a_{k+n} \leq 10^{-D_n} a_k \quad : \quad L^{q^n - 1} = 10^{-D_n}$

#