3. MÉTODOS DIRECTOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

(factorización LU: implementación numérica de la eliminación Gaussiana)

<u>problema</u>: sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$

encontrar $x \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$

↳ eliminación Gaussiana ← MÁS EFICIENTE

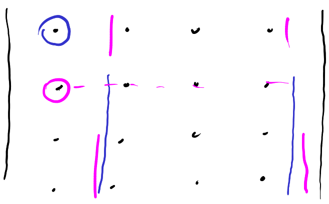
método de Cramer → NO ES EFICIENTE

ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 17 \\ 3 & 11 & 19 \\ 5 & 13 & 23 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$

↳ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 11 & 19 \\ 100 & 13 & 23 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 17 \\ 3 & 10 & 19 \\ 5 & 100 & 23 \end{pmatrix}$, A_3 ...

$x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$: requiere $n+1$ <u>determinantes $n\times n$</u>

denotamos con d_n el número de operaciones aritméticas



$$d_n = n\, d_{n-1} + n + n - 1$$

$$\geq n! \quad \left(d_n \overset{n \text{ grande}}{\sim} e\, n!, \text{ ver } (*) \right)$$

ejemplo: $n = 32$, $d_n \sim 7 \cdot 10^{35}$ flop (floating point operations)

el ordenador IBM más rápido hace $\sim 10^{17}$ flops (float. p. op/segundo)

↳ $7 \cdot 10^{18}$ segundos $\sim$ <u>$2 \cdot 10^{11}$ años</u>

$\vee$

$1.4 \cdot 10^{10}$ años $\sim$ vida est. del universo

(*) demostramos que $c_n = \dfrac{d_n}{n!} \xrightarrow{n \to \infty} e$, sabiendo que $c_2 = \dfrac{d_2}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$c_n = c_{n-1} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = c_{n-2} + \frac{2}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \ldots = c_2 + 2\left(\frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n!} + \ldots + \frac{1}{3!}\right)$$

$$= c_2 + \left(\frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{3!}\right) + 1 - \frac{1}{n!} = \underbrace{c_2 - \frac{1}{2}}_{1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \to \infty} e.$$

3.1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIANGULARES

triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - \ell_{21} x_1}{\ell_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \ell_{31} x_1 - \ell_{32} x_2}{\ell_{33}}$$

en $\mathbb{R}^n$: $x_1 = \dfrac{b_1}{\ell_{11}}$

(i-1) sumas (i-1) productos

(paso i) $$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} x_j}{\ell_{ii}}, \quad i = 2, \dots, n$$

1 cociente

triangular superior

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3}{u_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23} x_3}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{u_{33}}$$

en $\mathbb{R}^n$: $$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = n-1, \dots, 1$$

¿cuántas operaciones se necesitan? n^2

$$\underset{\text{op. el paso } i}{flop(i)} = \underset{\text{prod.}}{(i-1)} + \underset{\text{sumas}}{(i-1)} + 1 = 2i - 1$$

$$flop(\text{sol. sist. triang } n \times n) = \sum_{i=1}^{n} flop(i) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

$$= 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2}} - n = n(n+1) - n = n^2$$

si tenemos la posibilidad de descomponer

$$A = L\,U$$

FACTORIZACIÓN LU

L: triang. inf. U: triang. sup.

- ¿cuándo es posible?
- ¿cuánto cuesta (flop)?
- ¿cómo obtenerla?

$\Rightarrow$ podemos resolver $Ax = b$ con 2 sistemas triang

$$LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b & \leftarrow y \text{ nueva incógnita} \\ Ux = y & \leftarrow y \text{ nuevo dato} \end{cases}$$

Ejemplo: eliminación Gaussiana, $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 6x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 0 - 3x_2 = -14 \end{cases} \leftarrow \text{sistema triangular}$$

fila 2 = 1 fila 2 − 2 · fila 1

$$\underset{L^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}} = \underset{U}{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}} \Rightarrow A = LU$$

¿es invertible?

¿quién es L?

Ejemplo: factorización LU en $n=4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad -2 \quad -4 \quad -3$$

queremos 0 aquí

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad -3 \quad -4$$

queremos 0 aquí

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1}L_1^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad -1$$

eliminar

$$L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\hookrightarrow \quad A = L_1 L_2 L_3 U$$

preguntas:

1. ¿siempre podemos encontrar L_j?
2. ¿$L_1 L_2 L_3$ es triangular inferior?
3. ¿cómo automatizar la búsqueda de los coeficientes de las L_j^{-1}?
4. ¿cuántas operaciones aritméticas?