3.8. APLICACIONES DUALES

Def. Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{L}(V, W)$. La <u>aplicación</u> <u>dual de A</u> es $A^*: W^* \longrightarrow V^*$ dada por $A^*(\omega^*) = \omega^* \circ A$ para todo $\omega^* \in W^*$.

Como la composición de aplicaciones lineales es lineal, $\omega^* \circ A \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = V^*$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "\omega^* \circ A"'] & W \arrow[d, "\omega^*"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Prop 8.1.

a) Si $A \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.

b) Si $A \in \mathcal{L}(V, W)$ y $B \in \mathcal{L}(W, X)$ se tiene

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*.$$

D/ a) <u>A^* es lineal</u>: $A^*(a\omega_1^* + b\omega_2^*) = (a\omega_1^* + b\omega_2^*) \circ A$

$$\overset{\text{Prop dist}}{=} a\omega_1^* \circ A + b\omega_2^* \circ A = aA^*(\omega_1^*) + bA^*(\omega_2^*).$$

b) Para comprobar la igualdad sea $x^* \in X^*$. Se tiene

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] & W \arrow[r, "B"] & X \\ V^* & W^* \arrow[l, "A^*"'] & X^* \arrow[l, "B^*"'] \end{tikzcd}$$

$$(B \circ A)^*(x^*) = x^* \circ (B \circ A) \overset{\text{asoc}}{=} (x^* \circ B) \circ A = A^*(x^* \circ B)$$

$$= A^*(B^*(x^*)) = A^* \circ B^*(x^*)$$

Como se cumple para todo $x^* \in X^*$ se deduce que $(B \circ A)^*$ y $A^* \circ B^*$ son iguales como aplicaciones. ■

Ej 8.1. Sea $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$M(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Halla la matriz de la aplicación dual A^* con respecto a la base canónica dual $\mathcal{B}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$.

S/ Escribimos $A^*(E_1^*) = a_{11} E_1^* + a_{21} E_2^* + a_{31} E_3^*$. Se tiene

$$\begin{aligned} \therefore\ a_{11} &= A^*(E_1^*)(\vec{e}_1) = E_1^*(A(\vec{e}_1)) = E_1^*(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 1 \\ a_{21} &= A^*(E_1^*)(\vec{e}_2) = E_1^*(A(e_2)) = E_1^*(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = -1 \\ a_{31} &= A^*(E_1^*)(\vec{e}_3) = E_1^*(A(\vec{e}_3)) = E_1^*(\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 0 \end{aligned}$$

Luego la primera columna de $M(A^*)$ es la primera fila de $M(A)$. De manera similar se calculan $A^*(E_2^*)$ y $A^*(E_3^*)$ para obtener que

$$M(A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M(A)^t,$$

la matriz traspuesta de A.

Prop 8.2.

Si $M(A)$ es la matriz de $A \in \mathcal{L}(V, W)$ en unas bases dadas, la matriz $M(A^*)$ de $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ en las bases duales es la traspuesta de $M(A)$, es decir

$$M(A^*) = M(A)^t.$$

D/ Sea $A \in \mathcal{L}(V,W)$ y $M(A)$ su matriz en las bases

$$\beta_1 = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_n\} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \{\vec{f}_1, .., \vec{f}_m\}.$$

Si $M(A) = (a_{ij})_{\substack{i=1,..,m \\ j=1,..,n}}$, sabemos que

$$A(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{f}_i. \qquad (8.1)$$

Sea $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ su aplicación dual. Llamemos $M(A^*)$ a la matriz de A^* respecto a las bases duales

$$\beta_2^* = \{F_1^*, .., F_m^*\} \quad \text{y} \quad \beta_1^* = \{E_1^*, .., E_n^*\}$$

de W^* y V^* respectivamente.

Si escribimos $M(A^*) = (a^*_{ji})_{\substack{j=1,..,n \\ i=1,..,m}}$ se tiene

$$A^*(F_i^*) = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ji} E_j^*. \qquad (8.2)$$

Para $l = 1, 2, .., m$ y $k = 1, .., n$ tenemos

$$A^*(F_l^*)(\vec{e}_k) \overset{(8.2)}{=\!=} \left(\sum_{j=1}^{n} a^*_{jl} E_j^*\right)(\vec{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} a^*_{jl} E_j^*(\vec{e}_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a^*_{ji}\, \delta_{j,k} = a^*_{kl}.$$

Por otro lado,

$$a^*_{kl} = A^*(F_l^*)(\vec{e}_k) \overset{\text{Def de } A^*}{=\!=\!=} F_l^* \circ A(\vec{e}_k) \overset{(8.1)}{=\!=} F_l^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{f}_i\right)$$

$$\overset{F_l^* \text{ es lineal}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} F_l^*(\vec{f}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, \delta_{li} = a_{lk}. \quad \blacksquare$$

NOTA: Como las aplicaciones lineales se corresponden con matrices una vez fijadas bases, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$, las prop 8.1 y 8.2 producen

$$(B\cdot A)^t = A^t \cdot B^t$$

Sea V e.v. sobre $\mathbb{K}$; como $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ es también e.v. sobre $\mathbb{K}$, podemos considerar el espacio dual de V^*, es decir $(V^*)^* = \mathcal{L}(V^*, \mathbb{K})$, que denotaremos V^{**} y llamaremos <u>BIDUAL</u> de V.

Dado $\vec{u} \in V$, sea $\Phi_{\vec{u}} : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\Phi_{\vec{u}}(A) = A(\vec{u})$ cuando $A \in V^*$. La aplicación $\Phi_{\vec{u}}$ es lineal, e.d. $\Phi_{\vec{u}} \in V^{**}$. Definir

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \vec{u} & \longrightarrow & \varphi(\vec{u}) = \Phi_{\vec{u}} \end{array}\right\} \quad (8.3)$$

que se llama <u>aplicación canónica</u> de V en V^{**}

> Prop 8.3. Considerar $\varphi : V \to V^{**}$ dada en (8.3).
> a) φ es una aplicación lineal
> b) Si V tiene dimensión finita, φ es un isomorfismo

D/ a) <u>φ es lineal</u>: $a, b \in \mathbb{K}$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Para toda $A \in V^*$

$$\varphi(a\vec{u}+b\vec{v})(A) = \Phi_{a\vec{u}+b\vec{v}}(A) = A(a\vec{u}+b\vec{v}) \overset{A \text{ lineal}}{=\!=\!=}$$

$= a A(\vec{u}) + b A(\vec{v}) = a \Phi_{\vec{u}}(A) + b \Phi_{\vec{v}}(A) = (a\varphi(\vec{u}) + b\varphi(\vec{v}))(A).$

Como esta igualdad es válida $\forall A \in V^*$ se tiene

$$\varphi(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\varphi(\vec{u}) + b\varphi(\vec{v}).$$

b) Tenemos que ver que φ es inyectiva, o, equivalentemente (Prop 4.1), $\ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$: sea $\vec{u} \in \ker(\varphi)$; se tiene $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$. Por (8.3), $\Phi_{\vec{u}} = \vec{0} \in V^{**} = \mathcal{L}(V^*, K)$. Entonces, $\forall A \in V^*$,

$$\varphi(\vec{u})(A) = \Phi_{\vec{u}}(A) = A(\vec{u}) = 0 \qquad (8.4)$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, existe una base de V de la forma $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{u}_2, .., \vec{u}_n\}$. Considerar $A_0 \in V^*$ dada por $A_0(\vec{u}) = 1$, $A_0(\vec{u}_j) = 0$, $j = 2, .. n$. Para esta $A_0 \in V^*$,

$$\varphi(\vec{u})(A_0) = \Phi_{\vec{u}}(A_0) = A_0(\vec{u}) = 1$$

que contradice (8.4). Luego $\vec{u} = \vec{0}$ y $\ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$.

Como φ es inyectiva y $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$ (Prop 6.1), por los resultados de la sección 3.4, φ es suprayectiva y, por tanto, isomorfismo. ■

Ej 8.2. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

dos bases de $\mathbb{R}^3$. Halla la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_2^*$ a $\mathcal{B}_1^*$.

S/ La matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ con respecto a la base $\mathcal{B}_1$. Equivalentemente, P es la matriz de la aplicación $I : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1)$.
Como $I^* : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1^*) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2^*)$, por la proposición 8.2,

$$M(I^*; \mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*) = M(I; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^t = P^t$$

Por tanto, la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_2^*$ a $\mathcal{B}_1^*$ es P^t.
