Forma canónica de Jordan

El objetivo de esta presentación es ilustrar el siguiente resultado:

Si el polinomio mínimo de $f \in \mathrm{End}(E)$ descompone en factores lineales, existe una base de E en la cual la matriz de f es de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(a_1, k_1)} & & & \\ & \boxed{J(a_2, k_2)} & & \text{\Huge 0} \\ \text{\Huge 0} & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(a_s, k_s)} \end{pmatrix}.$$

La matriz J se llama la matriz canónica de Jordan de f. Sus cajas son de la forma:

$$J(a_j, k_j) = \begin{pmatrix} a_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_j \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo

Consideremos el endomorfismo f que, dada la base $B_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, tiene la siguiente tabla de valores:

v	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$f(v)$	u_1	$2u_1 + u_2$	$3u_2 + u_3$	$4u_3 + u_4$	$5u_4 + u_5$

En otras palabras, en la base dada B_1 tiene la siguiente matriz:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuentas

Con un *sencillo* cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(x) = \det(f - x\mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Cuentas

Con un *sencillo* cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(x) = \det(f - x\mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^5$$

Cuentas

Con un *sencillo* cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(x) = \det(f - x\mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^5$$

De esta manera, en la descomposición en irreducibles del polinomio mínimo, $m_f(x)$, solo puede aparecer el factor $(x-1)$

Cuentas

Con un *sencillo* cálculo obtenemos su polinomio característico, $p_f(x) = \det(f - x\mathrm{Id})$:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^5$$

De esta manera, en la descomposición en irreducibles del polinomio mínimo, $m_f(x)$, solo puede aparecer el factor $(x-1)$ y las únicas opciones, en este caso, para polinomio mínimo son:

$$(x-1)\,, \quad (x-1)^2\,, \quad (x-1)^3\,, \quad (x-1)^4 \text{ o } (x-1)^5.$$

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x - 1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad. Probemos con el segundo.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad. Probemos con el segundo. De ser $(x-1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x - 1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad. Probemos con el segundo. De ser $(x - 1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f - \mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad. Probemos con el segundo. De ser $(x-1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base B_1, luego, en esa base, la matriz de $(f-\mathrm{Id})^2$ es:

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad.
Probemos con el segundo. De ser $(x-1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base B_1, luego, en esa base, la matriz de $(f-\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

El polinomio mínimo

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad. Probemos con el segundo. De ser $(x-1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base B_1, luego, en esa base, la matriz de $(f-\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f-\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De los candidatos anteriores a polinomio mínimo, el primero, $(x-1)$, es fácilmente descartable pues nuestro endomorfismo no es la identidad.
Probemos con el segundo. De ser $(x-1)^2$ polinomio mínimo de f tendría que *anularlo*. Para ello, ha de ocurrir que $(f-\mathrm{Id})^2$ sea el endomorfismo $0 : E \longrightarrow E$. Basta comprobar, entonces, si la matriz de dicho endomorfismo (en cualquier base), tiene todas sus entradas nulas.
Del endomorfismo f tenemos su matriz en la base B_1, luego, en esa base, la matriz de $(f-\mathrm{Id})^2$ es:

$$(A_f-\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos así que $(x-1)^2$ no es $m_f(x)$.

El polinomio mínimo

Cálculos análogos muestran que:

El polinomio mínimo

Cálculos análogos muestran que:

$$(A_f - \mathrm{Id})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio mínimo

Cálculos análogos muestran que:

$$(A_f - \mathrm{Id})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_f - \mathrm{Id})^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio mínimo

Cálculos análogos muestran que:

$$(A_f - \mathrm{Id})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_f - \mathrm{Id})^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, finalmente, $(f - \mathrm{Id})^5$ es el endomorfismo 0. De manera que $m_f(x) = (x-1)^5$.

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id}))\subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big)\subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^3\big)\subset \dots$$

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big) \subset \mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^3\big) \subset \dots$$

no se *estabiliza* hasta el quinto paso.

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f - 2\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Nuc}\big((f - 2\mathrm{Id})^2\big) \subset \mathrm{Nuc}\big((f - 2\mathrm{Id})^3\big) \subset \dots$$

no se *estabiliza* hasta el quinto paso.
Adoptamos la siguiente notación:

$$E_j(1) = \mathrm{Nuc}((f - \mathrm{Id})^j) \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

para estos espacios f-invariantes.

Cadena de núcleos

Estamos pues con un endomorfismo para el que podemos afirmar que la cadena de inclusiones

$$\mathrm{Nuc}((f-2\mathrm{Id}))\subset\mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^2\big)\subset\mathrm{Nuc}\big((f-2\mathrm{Id})^3\big)\subset\dots$$

no se *estabiliza* hasta el quinto paso.
Adoptamos la siguiente notación:

$$E_j(1)=\mathrm{Nuc}((f-\mathrm{Id})^j)\qquad j=1,2,3,4,5$$

para estos espacios f-invariantes. La cadena queda:

$$E_1(1)\subsetneq E_2(1)\subsetneq E_3(1)\subsetneq E_4(1)\subsetneq E_5(1)=E\,.$$

Generadores de los núcleos

Para calcular generadores de cada uno de ellos, utilizaríamos el algoritmo de Gauss, pues de cada uno tenemos las matrices de los endomorfismos $(f - \mathrm{Id})^j$ en la base B_1.

Generadores de los núcleos

Para calcular generadores de cada uno de ellos, utilizaríamos el algoritmo de Gauss, pues de cada uno tenemos las matrices de los endomorfismos $(f - \mathrm{Id})^j$ en la base B_1. En este caso, la situación es bastante sencilla:

Para calcular generadores de cada uno de ellos, utilizaríamos el algoritmo de Gauss, pues de cada uno tenemos las matrices de los endomorfismos $(f - \mathrm{Id})^j$ en la base B_1. En este caso, la situación es bastante sencilla:

$$
\begin{aligned}
&E_1(1) =< u_1 > \\
&\subsetneq E_2(1) =< u_1, u_2 > \\
&\quad \subsetneq E_3(1) =< u_1, u_2, u_3 > \\
&\qquad \subsetneq E_4(1) =< u_1, u_2, u_3, u_4 > \\
&\qquad\quad \subsetneq E_5(1) =< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >
\end{aligned}
$$

Base de Jordan para f

Recuperamos la matriz del endomorfismo $f - \mathrm{Id}$ para el cálculo de la base de Jordan:

Base de Jordan para f

Recuperamos la matriz del endomorfismo $f - \mathrm{Id}$ para el cálculo de la base de Jordan:

Base de Jordan para f

Recuperamos la matriz del endomorfismo $f - \mathrm{Id}$ para el cálculo de la base de Jordan:

$$A_f - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base de Jordan para f

Recuperamos la matriz del endomorfismo $f - \mathrm{Id}$ para el cálculo de la base de Jordan:

$$A_f - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniendo la siguiente base:

$$v_5 = u_5,\ v_4 = (f - \mathrm{Id})(v_5) = 5u_4,\ v_3 = (f - \mathrm{Id})(5u_4) = 20u_3,$$
$$v_2 = (f - \mathrm{Id})(20u_3) = 60u_2,\ v_1 = (f - \mathrm{Id})(60u_2) = 120u_1\ .$$