Ejercicios

1) sean P, Q proyecciones ortogonales $\boxed{\begin{array}{l} P^* = P \\ P^2 = P \end{array}}$

demostrar que PQ p.o. $\Leftrightarrow$ $PQ = QP$

$\Rightarrow)$ $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

$\Leftarrow)$ $(PQ)^* = PQ$, $(PQ)^2 = PQPQ = P^2 Q^2 = PQ$

2) sea U matriz cuadrada. demostrar que

U unitaria, $U^2 = I$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ P p.o. t.q $U = I - 2P$

$\Rightarrow)$ sea $P = \frac{1}{2}(I - U)$

$P^2 = \frac{1}{4}(I + U^2 - 2U) = \frac{1}{2}(I - U)$

$P^* = \frac{1}{2}(I - U^*) = \frac{1}{2}(I - U)$

$\Leftarrow)$ $U^2 = (I - 2P)(I - 2P) = I - 4P + 4P^2 = I$

esto es como decir $U^{-1} = U$, y

$U^* = (I - 2P)^* = I - 2P = U = U^{-1} \Rightarrow U$ unitaria

3) sea $A \in \mathbb{C}^{\underline{m \times n}}$, $T \in \mathbb{C}^{\underline{n \times p}}$ tales que

$\underline{\ker A = \{0\}}$ $\Rightarrow m \geq n$, $\underline{\ker T = \{0\}}$ $\Rightarrow$ $n \geq p$

sea $b \in \mathbb{C}^m$, sea $C = AT$ y sean

- $x \in \mathbb{C}^n$ sol. de mínimos cuadrados $Ax = b$
- $y \in \mathbb{C}^p$ " $Cy = b$

problema I

demostrar que $\|b - Ax\|_2 \leq \|b - Cy\|_2$

y que si $\underline{n = p}$ se tiene la identidad

$\hookrightarrow$ T invertible

para ver la desigualdad:

$$\| b - Cy \|_2 = \| b - A \underbrace{Ty}_{x'} \|_2 = \| b - Ax' \|_2 \geq \| b - Ax \|_2$$

x solución de mínimos cuadrados

para ver la identidad:

- T invertible: sea $y_0 = T^{-1}x$

  $\Rightarrow \| b - Cy_0 \| = \| b - ATT^{-1}x \| = \| b - Ax \|$

- y solución única de mínimos cuadrados

  $\Rightarrow \| b - Cy \| \leq \| b - Cy_0 \|$

- usando las desigualdades e identidades obtenidas

  $$\| b - Ax \| \leq \| b - Cy \| \leq \| b - Cy_0 \| = \| b - Ax \|$$

  $$\Rightarrow \| b - Cy \| = \| b - Ax \|$$

4) si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, sea $\| A \|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|^2$

a) demostrar que $\forall\, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitarias, $\| UAV^* \|_F = \| A \|_F$

b) si $A = U \Sigma V^*$ SVD $\Rightarrow \| A \|_F = \left(\sum_{k=1}^{r} \sigma_k^2 \right)^{1/2}$

$r = rg(A)$

observaciones:

- en la prueba de existencia de la SVD hemos también esencialmente demostrado que $||| UAV^* |||_2 = ||| A |||_2$
- b) se obtiene a partir de a) ...

para demostrar a) empezamos con $\| U A \|_F^2$

$$= \sum_i \sum_j |(UA)_{ij}|^2 = \sum_j \left(\sum_i \Big| \underbrace{\sum_k U_{ik} A_{kj}}_{\langle A^{(j)}, \overline{U_{(i)}} \rangle} \Big|^2 \right)$$

U unitaria

$\Rightarrow \{ U_{(i)} \}_{i=1}^m , \{ U^{(i)} \}_{i=1}^m$

son BON de $\mathbb{C}^m$

$$= \sum_j \| A^{(j)} \|_2^2 = \sum_j \sum_k |A_{kj}|^2 = \| A \|_F^2$$

para ver $\| A V \|_F = \| A \|_F$ $\forall$ V unitaria

se procede de la misma manera ...