4.3. CÁLCULO DE DETERMINANTES. REGLA DE LAPLACE.

En la sección anterior hemos visto varias propiedades de los determinantes a partir de su definición (Def 2.1). De ellas se deducen algunas reglas que son útiles para el cálculo de determinantes.

<u>REGLA 1</u> Si a una fila (o columna) de una matriz se le suma un múltiplo de otra fila (o columna) el determinante no varía (Prop 2.7)

<u>REGLA 2</u> Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ por un número λ, el determinante de la nueva matriz es $\lambda \det(A)$. (Propiedad 1)

<u>REGLA 3</u> Si se intercambian dos filas (o columnas) de una matriz, el determinante cambia de signo (Propiedad 3).

<u>REGLA 4</u>. Si una fila (o columna) de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es nula, $\det(A)=0$ (Proposición 2.5).

Necesitamos un ingrediente más, que es saber cómo se calcula el determinante de una matriz triangular.

Una matriz $A=(a_{ij})$ es triangular <u>superior</u> si $a_{ij}=0$ cuando $i>j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

Una matriz $A=(a_{ij})$ es triangular <u>inferior</u> si $a_{ij}=0$ cuando $i<j$.

Una matriz cuadrada se dice <u>triangular</u> cuando o bien es triangular superior o bien triangular inferior.

Proposición 3.1.

Si $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es triangular
$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$
es decir el producto de sus elementos diagonales.

D/ Lo hacemos en el caso en el que A sea triangular inferior. Sea $\sigma \in S_n$ una permutación, $\sigma \neq I$. Sea i_0 el primer elemento de $\{1,..,n\}$ tal que $\sigma(i_0)\neq i_0$. Entonces
$$\sigma(1)=1, \ldots, \sigma(i_0-1)=i_0-1, \quad \sigma(i_0)\neq 0$$
Por tanto, $\sigma(i_0) > i_0$ y $a_{i_0,\sigma(i_0)}=0$ pq. A es triangular inferior. Por tanto, cuando $\sigma \neq I$,
$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}=0.$$
En la definición de determinante solo queda el término $\sigma=I$ que produce $\det(A)=sig(I)\,a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Si A es triangular superior, A^t es triangular inferior y como $\det(A)=\det(A^t)$ y los elementos diagonales de A y A^t coinciden, se deduce el resultado para toda matriz triangular. ∎

Ej 3.1. Calcula el determinante de la matriz
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -3 & 0 & -4\\ 6 & -1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

S/

$$|A| \underset{\text{Regla 1}}{\overset{\substack{F_4-2F_1\\F_5-2F_3}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{F_1-F_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{F_3+3F_1}{=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 13 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{\substack{F_3-9F_2\\F_4+5F_2\\F_5+F_2}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_3+5F_1\\F_4+3F_1}}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 3}}{\overset{F_3/F_5}{=\!=\!=}} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -11 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 3}}{\overset{F_5-8F_4}{=\!=\!=}}$$

$$(-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} \overset{\text{Prop 3.1}}{=\!=\!=} (-1)(-1)(1)(1)(2)(-19) = -38.$$

Ej 3.2. Calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

S/

$$|A| \underset{\text{Regla 2}}{\overset{3F_2}{=\!=\!=}} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{F_2+2F_1}{=\!=\!=}} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{F_1-3F_4}{=\!=\!=}}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 3}}{\overset{\substack{F_1/F_4\\F_2/F_3}}{=\!=\!=}} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_3-6F_2\\F_4-3F_2}}{=\!=\!=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Regla 3}}{\overset{F_3/F_4}{=\!=\!=}} (-1)\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} \underset{\text{Regla 1}}{\overset{F_4+7F_3}{=\!=\!=}} -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-1)(15) = 5.$$

Ej 3.3. Calcula el determinante de la matriz de orden n dada por

$$A_n = \begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$$

S/ Restando la primera fila de cada una de las restantes se obtiene (Regla 1):

$$|A_n| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

Sumando a la primera columna todas las restantes se obtiene (Regla 1)

$$|A_n| = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \overset{\text{Prop 3.1}}{=\!=} [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

Daremos ahora una nueva expresión para el determinante de una matriz cuadrada que nos ayudará, en algunas ocasiones, para calcularlo rápidamente. También lo usaremos en la sección siguiente para hallar la inversa de una matriz cuadrada (cuando exista la inversa). Se llama REGLA DE LAPLACE.

Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K})$, dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] - a_{12}[a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}] + a_{13}[a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}]$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Esta expresión es el desarrollo de $|A|$ por la primera fila. Se pueden obtener expresiones similares para el desarrollo por cualquier otra fila o columna. Reduce el cálculo de un determinante de orden 3 a tres determinantes de orden 2.

Para generalizar este resultado necesitamos un poco de notación. Dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ **adjunta** al elemento que ocupa el lugar (i,j) a la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz A. Se denota por $A_{i,j}$ y se tiene $A_{i,j} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$. Se llama **menor** de a_{ij} a $\det(A_{ij}) = |A_{ij}|$. La matriz **adjunta** de A, $Ad(A)$, es la matriz de orden $n\times n$ cuyo elemento (i,j) es el menor $|A_{ij}|$.

Ej. 3.4. En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$,

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad |A_{1,2}| = 14 - 15 = -1$$

y

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad |A_{2,2}| = 7 + 10 = 17$$

Proposición 3.2 (Regla de Laplace)

Dada una matriz $A=(a_{i,j})\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ se tiene
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}| \quad , i=1,2,\dots n \quad (3.1)$$
(desarrollo del determinante por la fila i-ésima)

y
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}| \quad , j=1,2,\dots n \quad (3.2)$$
(desarrollo del determinante por la columna j-ésima)

D/ Vamos a comenzar demostrando (3.1) para $i=1$, es decir, el desarrollo de $|A|$ por la primera fila. Como antes, denotamos por $\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n$ las filas de A. En particular $\vec{f}_1 = (a_{11},\dots,a_{1n}) = a_{11}\vec{e}_1+\dots+a_{1n}\vec{e}_n$ donde $\vec{e}_j=(0,\dots,\underset{j}{1},\dots 0)$.

Por las propiedades 1 y 2 de los determinantes
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \det\begin{bmatrix}\vec{e}_j\\ \vec{f}_2\\ \vdots\\ \vec{f}_n\end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Para $j=1$
$$\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{f}_2\\ \vdots\\ \vec{f}_n\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{\text{REGLA } 1}{\overset{F_j - a_{j,1}F_1}{\underset{j=2,\dots n}{=}}} \begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \overset{\text{def de det}}{=}$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Como $a_{1,\sigma(1)}=0$ si $\sigma(1)\neq 1$ y $a_{1,1}=1$, toda permutación $\sigma\in S_n$ con $\sigma(1)=1$ se reduce a una permutación $\tilde{\sigma}$ de $\{2,3,\dots,n\}$ con $\operatorname{sig}(\tilde{\sigma})=\operatorname{sig}(\sigma)$ y Entonces
$$\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{f}_2\\ \vdots\\ \vec{f}_n\end{bmatrix} = \sum_{\tilde{\sigma}\in S_{n-1}} \operatorname{sig}(\tilde{\sigma})\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = |A_{1,1}|.$$

Para $j \neq 1$, intercambiamos la columna j, una a una, con las anteriores:

$$\det\begin{bmatrix}\vec{e}_j\\ \vec{f}_1\\ \vdots\\ \vec{f}_n\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{\text{Regla 3}}{=} (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{2j} & a_{21} & & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{nj} & a_{n1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Regla 1}]{F_\ell - a_{\ell,j}F_e,\ \ell=2,\dots,n} (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{21} & & a_{2,j-2} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{n,n}\end{vmatrix} = (-1)^{j+1}|A_{1,j}|$$

pq $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$. Sostituyendo en (3,3) se tiene

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\,(-1)^{j+1}\,|A_{1,j}|$$

que es (3.1) para $i=1$.

Para hacer el desarrollo por la fila i, usamos la regla 3 para poner la fila i en primer lugar haciendo trasposiciones de filas consecutivas. Como se necesitan $i-1$ trasposiciones

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{j+1}(-1)^{i-1}|A_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}|A_{i,j}|.$$

Las igualdades (3.2) se deducen de (3.1) porque ya sabemos que $|A| = |A^t|$ (prop. 2.2 de la sección 4.2). ∎

La regla de Laplace permite simplificar el cálculo de determinantes. Para ello se desarrolla por una fila o columna con varios ceros. Si no los hubiere se puede usar la regla 1 para hacer varios ceros en una fila o columna.

Ej 3.5. Calcula el determinante de $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

S/ Multiplicamos por 2 la segunda columna y se la restamos a la primera:

$$|A| \overset{C_1-2C_2}{\underset{\text{Regla 1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -9 & 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(se ha desarrollado por la primera columna). Ahora

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\underset{\text{Regla 1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4+2=6$$

y

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_3-C_1 \\ C_2-C_1}}{\underset{\text{Regla 1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2-12=-14.$$

Por tanto,

$$|A| = -9(6)+5(-14) = -54-70 = -124.$$
