HOJA DE EJERCICIOS 10
Análisis Matemático. (Grupo 130)
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ de clase al menos $\mathcal{C}^1$.

a) Para n cualquiera (incluyendo $n = 3$) demuestra que para todo $p \in U$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$d(F^\flat)_p(a,b) \;=\; a^t \left[\, (DF)^t - DF \,\right] b\ .$$

b) en el caso $n = 3$, demuestra que para $p \in U$ y $b \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\left[\, DF - (DF)^t \,\right]_p b \;=\; (\mathbf{rot}\, F)_p \times b\ ,$$

y deduce de ello que para todo $p \in U$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$d(F^\flat)_p(a,b) \;=\; (\mathbf{rot}\, F)_p^\natural\,(a,b) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \det\left[\, (\mathbf{rot}\, F)_p \mid a \mid b \,\right]\ ,$$

es decir que $d(F^\flat) = (\mathbf{rot}\, F)^\natural$.

---

a) $F = (f_1, \ldots, f_n)$; $(F^b)_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i$

$$d(F^b)_p = \sum_{i=1}^{n} d f_i(p) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) dx_j \Big) \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\, dx_j \wedge dx_i$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$

$$d(F^b)_p(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \det \begin{pmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \left[a_j b_i - a_i b_j \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\, a_j b_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\, a_j b_i\ .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) a_j b_i \qquad (*)$$

Por otro lado

$$a^t \left[(DF)^t - (DF) \right]_p b =$$

$$(a_1, \dots, a_n) \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1}^{n} - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} \right]_p \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) a_j b_i$$

que es la misma expresión anterior.

Problema 2. Calcula el "pull-back" $f^*\omega$ para cada una de las siguientes formas ω y funciones f:

a) $f:\mathbb{R}^2_{\mathbf{u}}\to\mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$, $f(u_1,u_2)=(u_1^2,u_2^2,e^{u_1u_2})$, $\omega=x_2\,dx_1+(x_1-x_2-x_3)\,dx_2-dx_3$.

b) $f:\mathbb{R}^2_{uv}\to\mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(u,v)=(u\cos v,u\operatorname{sen}v,e^u)$, $\omega=(x^2-y^2)\,dx\wedge dy-3\,(x^2+y^2)\,dy\wedge dz$.

c) $f:\mathbb{R}_t\to\mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,t)$, $\omega=(x^2+y^2+z^2)\,dx+(x-\cos z)\,dy+(x^2+y^2-1)\,dz$.

d) $f:\mathbb{R}^2_{xy}\to\mathbb{R}^2_{xy}$, $f(x,y)=\big(ax-by\,,\,bx+ay\big)$, a,b constantes, $\omega=xdy-ydx$.

e) $f:\mathbb{R}^2_{r\theta}\to\mathbb{R}^2_{xy}$, $f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$, $\omega=dx\wedge dy$.

---

a) $f(u_1,u_2)=(u_1^2,u_2^2,e^{u_1u_2})$, $\omega=x_2dx_1+(x_1-x_2-x_3)dx_2-dx_3$

$x_1=u_1^2 \Rightarrow dx_1=2u_1du_1$

$x_2=u_2^2 \Rightarrow dx_2=2u_2\,du_2$

$x_3=e^{u_1u_2} \Rightarrow dx_3=u_2e^{u_1u_2}du_1+u_1e^{u_1u_2}du_2$

Sustituyendo en ω:

$$f^*\omega = u_2^2(2u_1)du_1+(u_1^2-u_2^2-e^{u_1u_2})\,2u_2\,du_2 -$$
$$-u_2e^{u_1u_2}du_1-u_1e^{u_1u_2}du_2$$

b) $f(u,v)=(u\cos v, u\operatorname{sen}v, e^u)$

$\omega=(x^2-y^2)\,dx\wedge dy-3(x^2+y^2)\,dy\wedge dz$

$x=u\cos v \Rightarrow dx=(\cos v)du-(u\operatorname{sen}v)dv$

$y=u\operatorname{sen}v \Rightarrow dy=(\operatorname{sen}v)du+(u\cos v)dv$

$z=e^u \Rightarrow dz=e^u du$

$$f^*\omega = u^2(\cos^2v-\operatorname{sen}^2v)\,[u(\cos v)^2du\wedge dv-u(\operatorname{sen}v)^2dv\wedge du]$$
$$-3u^2\,u\,e^u\cos v\,dv\wedge du$$
$$=(u^3(\cos^2v-\operatorname{sen}^2v)+3u^3e^u\cos v)\,du\wedge dv$$

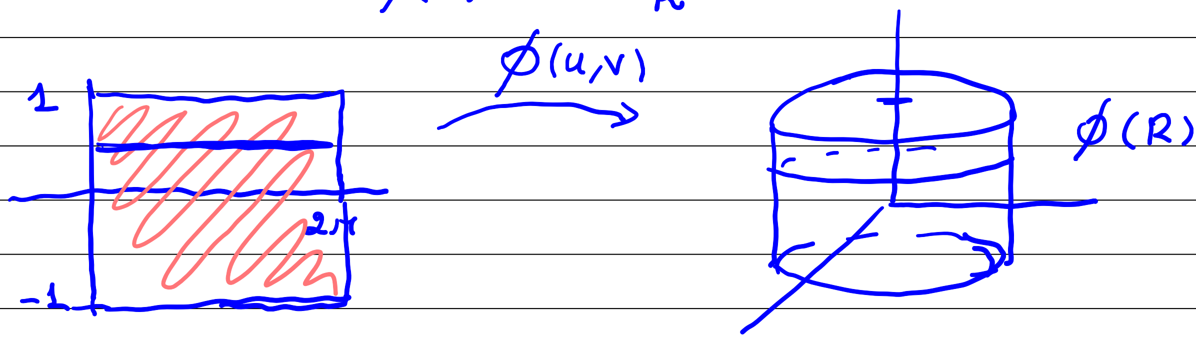
Problema 3. En cada caso, dibuja la imagen $\phi(R)$, de la región R que se indica, y calcula $\int_{\phi|_R} \Omega$:

a) $\phi(u,v) \equiv (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $R = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, $\Omega = x^3\, dz \wedge dx$.

b) $\phi(u,v) \equiv (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u)$, $R = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$, $\Omega = z\, dx \wedge dy$.

Recuerda: $\int_{\phi(R)} \Omega = \int_R \phi^* \Omega$

a)

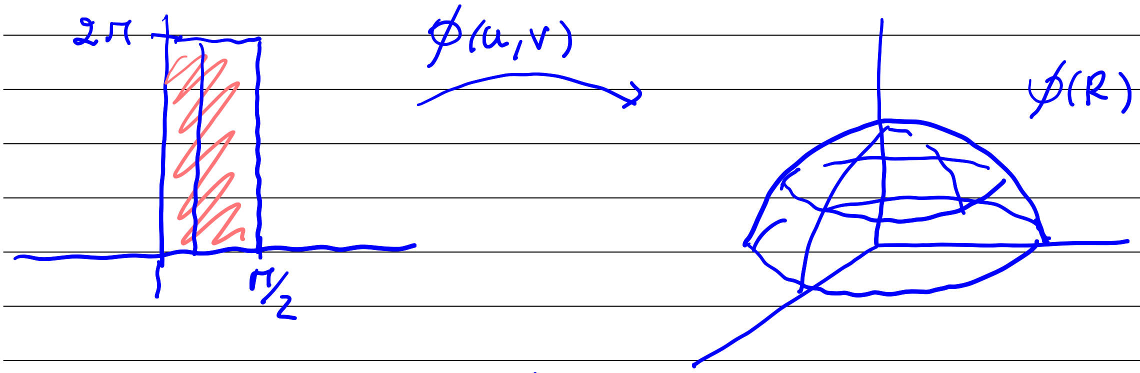


$$\left.\begin{array}{lll} x = \cos u & \Rightarrow & dx = (-\operatorname{sen} u)\, du \\ y = \operatorname{sen} u & \Rightarrow & dy = (\cos u)\, du \\ z = v & \Rightarrow & dz = dv \end{array}\right\} \quad \Omega = x^3\, dz \wedge dx$$

$$\phi^*\Omega = (\cos^3 u)\, dv \wedge (-\operatorname{sen} u)\, du = (\cos^3 u)(-\operatorname{sen} u)\, dv\, du$$

$$\int_{\phi(R)} \Omega = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (\cos^3 u)(-\operatorname{sen} u)\, dv\, du = 0$$

(b) $R = (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)$



$$\begin{array}{lll} x = \cos u \cos v & \Rightarrow & dx = (-\operatorname{sen} u)(\cos v)\, du - (\operatorname{sen} v)(\cos u)\, dv \\ y = \cos u \operatorname{sen} v & \Rightarrow & dy = (-\operatorname{sen} u)(\operatorname{sen} v)\, du + (\cos v)(\cos u)\, dv \\ z = \operatorname{sen} u & \Rightarrow & dz = (\cos u)\, du \end{array}$$

$\Omega = z\,dx \wedge dy$

$\phi^* \Omega = (\operatorname{sen} u)\Big[-(\operatorname{sen} u)(\cos v)^2 \cos u \, du \wedge dv$

$\qquad + (\operatorname{sen} v)^2 (\operatorname{sen} u)(\cos u)\, dv \wedge du\Big]$

$= \operatorname{sen} u \,[\operatorname{sen} u \cos u \qquad]\, dv \wedge du$

$= \operatorname{sen}^2 u \cos u \, dv \wedge du$

$$\int_{\phi(R)} \Omega = \int_R \phi^* \Omega = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u \cos u \, dv\, du = 0$$

Problema 4. Sea $R \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ una región limitada por curvas cerradas disjuntas que son las imágenes de unos caminos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, el exterior antihorario y los demás horarios.
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto en el que tenemos un campo de vectores $F : U \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi(u,v) : R \to U$.
La versión para estos objetos de la fórmula de Stokes es:

$$\sum_{1 \le j \le k} \int_{\varphi \circ \alpha_j} F \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_R \varphi_u^t \left[(DF)^t - DF \right]_{\varphi(u,v)} \varphi_v \, dudv \, .$$

a) Comprueba la fórmula en los siguientes casos, donde $n = 4$:

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= (u, u^2, u+v, uv) \;\;, \;\; R = \{0 \le v \le u \le 1\} \;\;, \;\; F \;=\; (x_1 x_3, 1, x_3, x_2) \;, \\ \varphi(u,v) &= (v, 3u, uv, u+v) \;\;, \;\; R = \{u^2 + v^2 \le 1\} \;\;, \;\; F \;=\; (0, x_1, 0, x_3) \;. \end{aligned}$$

b) Vuelve a comprobar los dos casos, usando el lenguaje de la formas diferenciales aplicado a $\omega = F^\flat$.

$\varphi(u,v) = (v, 3u, uv, u+v)$, $R = \{u^2+v^2 \le 1\}$

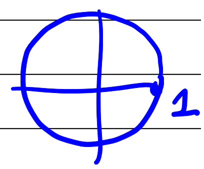
$F = (0, x_1, 0, x_3)$

$\varphi_u^t = (0, 3, v, 1)$, $\varphi_v^t = (1, 0, u, 1)$

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iint_R \varphi_u^t \left[(DF)^t - (DF) \right]_{\varphi(u,v)} \varphi_v \, dudv$$

$$= \iint_R (0,3,v,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} dudv$$



$$= \iint_R (-3 - u + v) \, dudv =$$

$u = r\cos\alpha$
$v = r\sin\alpha$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3 - r\cos\alpha + r\sin\alpha) \, r \, dr \, d\alpha$$

= - —

Por otro lado $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_{\varphi\circ\alpha} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} x_1\,dx_2 + x_3\,dx_4 =$$

$\varphi\circ\alpha = (\operatorname{sen} t, 3\cos t, \underbrace{\cos t \operatorname{sen} t,}_{} \cos t + \operatorname{sen} t)$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t)(-3\operatorname{sen} t)\,dt + \int (\cos t \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t + \cos t)\,dt$$

$$= \ldots = -3\pi$$

Problema 5. Considera la región $R = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 2\}$ y la siguiente aplicación

$$\psi : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(u,v) \equiv \big((1-u^2-v^2)u\, ,\, v\, ,\, u^2+v^2\big)\, .$$

Elige un camino $\alpha(t)$ que le dé una vuelta antihoraria al borde de R.

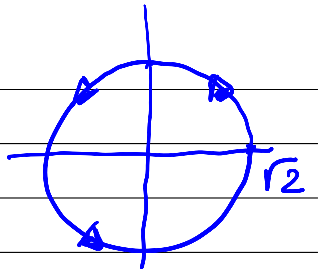
a) Para $\omega = ydx - xdy + dz$, comprueba que se cumple la fórmula de Stokes

$$\int_\psi d\omega = \int_{\psi\circ\alpha} \omega\, .$$

b) ¿Es la imagen $\psi(R)$ parte de una subvariedad? (Mírala de perfil, en la dirección del eje y).

$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t)$



$$\int_\psi d\omega = \int_\psi (dy\wedge dx - dx\wedge dy) = \int_\psi 2\, dy\wedge dx$$

$$= \int_R \psi^*(d\omega)$$

$x = (1-u^2-v^2)u \Rightarrow dx = (1-3u^2-v^2)du - 2vu\, dv$

$y = v \Rightarrow dy = dv$

$z = u^2+v^2 \Rightarrow dz = 2u\,du + 2v\,dv$

$\psi^*(d\omega) = 2(1-3u^2-v^2)\, dv\wedge du$ $\quad -du\wedge dv$ $\quad \begin{Bmatrix} u = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \end{Bmatrix}$

$$\int_\psi d\omega = -\iint_R 2(1-3u^2-v^2)\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2(1-3r^2\cos^2 t - r^2\,\mathrm{sen}^2 t)\, r\, dr\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2(1-r^2-2r^2\cos^2 t)\, r\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[r^2\right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{2r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} - (\cos^2 t)\left[\frac{4r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - 2 - 4\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} -4(\cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\, \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = -2(2\pi) = -4\pi$$

$+$

Por otro lado $\varphi\circ\alpha(t) = \varphi(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$

$$= ((1-2\cos^2 t - 2\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2)$$

$$= (-\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2)$$

y

$$\int_{\varphi\circ\alpha} \omega = \int_{\varphi\circ\alpha} (y\,dx - x\,dy + dz)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\operatorname{sen} t)(\sqrt{2}\operatorname{sen} t)\,dt + (\sqrt{2}\cos t)(\sqrt{2}\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$$

b) $\varphi(u,v) = ((1-u^2-v^2)u, v, u^2+v^2)$

$$D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} (1-3u^2-v^2) & -2uv \\ 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

rango $D\varphi(u,v) = 1$ si $v=0$, $-\sqrt{2}<u<\sqrt{2}$

Como $1<2$ no es sup dif. porque rango $D\varphi(u,0) = 1 < 2$

Problema 6. Para cada una de las siguientes formas de Pfaff decide si es exacta y, en caso afirmativo, encuentra un **potencial,** es decir una función escalar h tal que $\omega \equiv dh$.

a) $\omega = (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $\omega = y\cos(yz)\,dx + \big(\,x\cos(yz) - xyz\,\mathrm{sen}(yz) + 2yz\,\big)dy + \big(\,y^2 - xy^2\,\mathrm{sen}(yz)\,\big)\,dz$ en $\mathbb{R}^3$.

---

a) $d\omega = dy\wedge dx - dx\wedge dy = 2\,dy\wedge dx \neq 0$

luego ω no es cerrada. Tampoco puede ser exacta

pq. si lo fuera $\exists\, f$ t.q. $df=\omega \Rightarrow$

$d(\omega) = d(df) = 0$ y de antes $d\omega \neq 0$

Si existiera f t.q. $df = \omega$, $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = x+y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y-x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y)$$

$$y - x = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y - 2x$$

b) Sale $d\omega = 0 \Rightarrow \omega$ es cerrada y exacta

y el potencial es $h(x,y,z) = xy\cos(yz) + y^2 z$

Problema 7. Halla una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal manera que la forma $\omega = x^2 y\, dx + f(x)\, dy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2$.

$$0 = d\omega = x^2 dy \wedge dx + f'(x) dx \wedge dy$$

$$= (x^2 - f'(x))\, dy \wedge dx$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$$

Problema 9. Sean abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U' \subseteq \mathbb{R}^s$. Sean $f : U \to U'$ al menos de clase $\mathcal{C}^2$ y ω una forma diferencial en U'.

a) Demuestra que si ω es cerrada entonces $f^*\omega$ es también cerrada.

b) Demuestra que si ω es exacta entonces $f^*\omega$ también es exacta.

Teorema: $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

a) ω cerrada $\Rightarrow d\omega = 0 \Rightarrow d(f^*\omega) =$

$= f^*(d\omega) = f^*(0) = 0 \Rightarrow f^*\omega$ cerrada

b) ω exacta $\Rightarrow \exists \eta$ función t.q. $d\eta = \omega$

$d(f^*\eta) = f^*(d\eta) = f^*(\omega) \Rightarrow f^*\omega$ es exacta