Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra Lineal **Examen del 17 de abril de 2020**

Compromiso de honestidad

(Para copiar y firmar en la primera hoja del trabajo entregado)

Yo, ... Poner Nombre y Apellidos .... , con DNI .... me comprometo a realizar la prueba de evaluación de Álgebra Lineal de manera individual sin la ayuda de otras personas, ni ayuda externa (llamadas telefónicas, videoconferencia, o cuaquier modod análogo), ni material adicional, salvo las notas y mis apuntes de la asignatura.

Firma .... Fecha: ....

---

1. (**3 puntos**) a) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $T_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida, en la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, por

$$T_a(x,y,z) = (ax + 2y + 2z,\ 2x + ay + 2z,\ 2x + 2y + az)\,,$$

y sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ dada por los vectores $\vec{v}_1 = (1,1,0),\ \vec{v}_2 = (0,-1,1),\ \vec{v}_3 = (-1,0,1)\,.$

a) Halla la matriz de T_a con $\mathcal{C}$ en el espacio de salida y $\mathcal{B}$ en el espacio de llegada.

b) Halla una base de la imagen y una base del núcleo de T_a cuando $a = -2$

c) Determina $a \in \mathbb{R}$ para que el núcleo de T_a tenga la máxima dimensión posible.

---

2. (**2 puntos**)

a) Supongamos que hacemos dos operaciones elementales sobre las filas de una matriz 2×2 a la vez, de manera que pasamos de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} b - md & a - mc \\ c - \ell a & d - \ell b \end{pmatrix}.$$

Halla el determinante de B en función del determinante de A usando solo las propiedades de los determinantes (no se considera válida la respuesta si se calcula usando la definición del determinante de una matriz de orden 2)

b) Supongamos que hacemos dos operaciones elementales a la vez sobre las columnas de una matriz A de orden n, de manera que pasamos de

$$A = [C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n] \qquad \text{a} \qquad A = [C_1, \ldots, C_i - mC_j, \ldots, C_j - \ell C_i, \ldots, C_n]\,.$$

donde las matrices se han escrito por columnas. Halla el determinante de B en función del determinante de A.

Continúa detrás

3. (**3 puntos**) Sea $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios en x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que 3, con la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$. Para cada $k \in \mathbb{R}$ considera la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} T_k : V &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p(x) &\longmapsto \big(2p(0),\ kp'(1),\ p''(2)\big) \end{aligned}$$

donde en $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

a) Para cada $k \in \mathbb{R}$, calcula la matriz M_k de T_k en las bases dadas, indicando su rango.

b) Halla una base del núcleo de T_k para cada valor de $k \in \mathbb{R}$.

c) Considera la aplicación

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p(x) &\longmapsto \left(3p(0),\ 5p'(1),\ \frac{3}{2}p''(2)\right) \end{aligned}$$

¿Está T en el subespacio de $L(V, \mathbb{R}^3)$ generado por T_1 y T_2?

---

4. (**3 puntos**) Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ el conjunto de las matrices antisimétricas de orden 2. Sea

$$\mathcal{C} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base de V. Considera la colección

$$\mathcal{B} = \left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Prueba que $\mathcal{B}$ es una base de V. Calcula la base dual $\mathcal{B}^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ de $\mathcal{B}$ en función de los elementos de la base dual $\mathcal{C}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ de $\mathcal{C}$

b) Halla una base del anulador de $\langle U_1^* + U_3^* \rangle$.

c) Halla, si es posible, $g^* : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que Ann $\langle U_1, U_2 \rangle = \langle g^* \rangle$.

Tiempo: 2 horas.