3.9. ANULADOR Y PROPIEDADES.

En esta sección V será siempre un e.v. de dimensión finita, y denotaremos por $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ su e.v. dual.

Def. Sea S subconjunto de V. Se define el anulador de S como $Ann(S) = \{A \in V^* : A(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in S\} \subset V^*$

• Algunos autores escriben $Ann(S) = S^{\perp}$ y dicen que $S^{\perp}$ se llama ortogonal de S.

Prop 9.1. Sea S subconjunto de V (e.v).

a) $Ann(S)$ es un subesp. vectorial de V^*

b) Si $S \subset U$ se tiene $Ann(U) \subset Ann(S)$, U sub. de V

c) $Ann(V) = \{0\}$ y $Ann(\{\vec{0}\}) = V^*$

d) Si V_1 es un subs. vect. de V, $\dim(Ann(V_1)) = \dim(V) - \dim(V_1)$.

D/ a) Sean $a, b \in \mathbb{K}$, $A, B \in Ann(S)$. Si $\vec{v} \in S$

$(aA + bB)(\vec{v}) = aA(\vec{v}) + bB(\vec{v}) = a.0 + b.0 = 0$ pq. $A, B \in Ann(S)$. Entonces $aA + bB \in Ann(S)$.

b) Si $A \in Ann(U) \Rightarrow A(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in U$. Com $S \subset U$, $A(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in S \Rightarrow A \in Ann(S)$.

c) $Ann(V) = \{A \in V^* : A(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in V\} = \{0\}$

Como $A(\vec{0}) = 0 \ \forall A \in V^*$, $Ann(\{\vec{0}\}) = V^*$.

(Para estas tres propiedades no se ha usado que V sea de dim. finita)

d) Sea $\beta_1 = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_k\}$ base de V_1. Completémosla hasta obtener una base $\beta = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, .., e_n\}$ de V. Sea $\beta^* = \{E_1^*, .., E_k^*, E_{k+1}^*, .., E_n^*\}$ la base dual de β. Tenemos que $\forall\ j = k+1, .., n$ y $\forall\ i = 1, .., k$

$$E_j^*(\vec{e}_i) = \delta_{ji} = 0 \quad (\text{pq. } i \neq j).$$

Por tanto, si $\vec{v} \in V_1$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ y

$$E_j^*(\vec{v}) = E_j\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(\vec{e}_i) = 0$$

para todo $j = k+1, .., n$. Esto demuestra que $\beta_2^* = \{E_{k+1}^*, .., E_n^*\} \subset \text{Ann}(V_1)$. Si probamos que β_2^* es base de $\text{Ann}(V_1)$ se tendrá

$$\dim(\text{Ann}(V_1)) = n - k = \dim(V) - \dim(V_1).$$

- $\underline{\beta_2^* \text{ es L.I}}$: porque es un subconjunto de β^* que es base de V^*

- $\underline{\beta_2^* \text{ s. de g de Ann}(V_1)}$: si $A \in \text{Ann}(V_1) \subset V^*$, como β^* es base de V^*, $A = \sum_{j=1}^{n} a_j E_j^*$. Ahora bien, si $\ell = 1, .., k$, $\vec{e}_\ell \in V_1$ y por tanto $A(\vec{e}_\ell) = 0$ pq. $A \in \text{Ann}(V_1)$. Además $A(\vec{e}_\ell) = \sum_{j=1}^{n} a_j E_j^*(e_\ell) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{j\ell} = a_\ell$. Por tanto $a_\ell = 0$ si $\ell = 1, .., k$ y $A = \sum_{j=k+1}^{n} a_j E_j^*$.

Ej 9.1. Sea $V_1 = \langle \vec{e}_1 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Describe las ecuaciones de $Ann(V_1)$ en función de coordenadas en la base dual canónica de $\mathbb{R}^3$.

S/a) Sea $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{E}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ su base dual. Si escribimos $A \in V^*$ como $A = x E_1^* + y E_2^* + z E_3^*$, queremos hallar las relaciones que cumplen x, y, z para que $A \in Ann(V_1)$. Como $A(\vec{e}_1) = 0$ se tiene

$$0 = A(\vec{e}_1) = x E_1^*(\vec{e}_1) + y E_2^*(\vec{e}_1) + z E_3^*(\vec{e}_1) = x$$

Por tanto,

$$Ann(V_1) = \{ y E_2^* + z E_3^* : y, z \in \mathbb{R} \}.$$

b) (Otra forma) Como $\beta_1 = \{\vec{e}_1\}$ es base de V_1, se completa con $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ para obtener una base de $\mathbb{R}^3$. Por la demostración de la prop. 9.1 d), $\{E_2^*, E_3^*\}$ es base de $Ann(V_1)$. Por tanto

$$Ann(V_1) = \{ y E_2^* + z E_3^* : y, z \in \mathbb{R} \}$$

y su ecuación es $x = 0$.

Ej 9.2. Sea $V_1 = \langle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Halla una base de $Ann(V_1)$ en función de vectores de la base dual canónica de $\mathbb{R}^4$ y describe sus ecuaciones en esta base.

S/a) Completamos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para tener una base de $\mathbb{R}^4$ (Comprueba que es base). Por la demostración de la Prop 9.1. a), $\{U_3^*, U_4^*\}$ es base de $Ann(V_1)$. Ahora hay que hallar la expresión de U_3^* y de U_4^* en función de $\mathcal{E}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*\}$. Esto se hace como en el ejercicio 7.2:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$U_3^* = E_1^* - E_2^* \quad , \quad U_4^* = -E_3^* + E_4^*$$

Ecuaciones implícitas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y+x \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & t+z \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+x=0 \\ t+z=0 \end{array}\right\}$$

b) Otra forma de hallar las ecuaciones es escribir

$Ann(V_1) \ni A = x E_1^* + y E_2^* + z E_3^* + t E_4^*$ y observar que

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A(\vec{u}_1) = A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = x + y \\ 0 = A(\vec{u}_2) = A(\vec{e}_3 + \vec{e}_4) = z + t \end{array}\right\}$$

Queremos ahora definir el anulador de un subconjunto B de V^*. Tenemos dos opciones:

1. Como antes, definiéndolo como subconjunto del dual de V^*:

$$Ann(B) = \{\alpha \in V^{**} : \alpha(w^*) = 0, \forall w^* \in B\} \subset V^{**}.$$

2. Definiéndolo como subconjunto del espacio inicial V:

$$Ann(B) = \{\vec{u} \in V : w^*(\vec{u}) = 0, \forall\ w^* \in B\} \subset V.$$

Estos dos anuladores se corresponden por el isomorfismo canónico de la prop 8.3. Si $\alpha \in V^{**}$, existe $\vec{u} \in V$ tal que $\alpha = \varphi(\vec{u}) = \Phi_{\vec{u}}$. Entonces,

$$\{\alpha \in V^{**} : \alpha(w^*) = 0\ \forall w^* \in B\} = \{\Phi_u \in V^{**} : \Phi_{\vec{u}}(w^*) = 0, \forall w^* \in B\}$$

$$= \{\Phi_u \in V^{**} : w^*(\vec{u}) = 0, \forall w^* \in B\}$$

$$\longleftrightarrow \{\vec{u} \in V : w^*(\vec{u}) = 0, \forall w^* \in B\}.$$

Para el anulador de $B \subset V^*$ definido tanto de la forma 1 como la 2 se cumplen las propiedades de la Prop 9.1. La proposición siguiente nos da otras tres propiedades.

Prop 9.2.

a) Si $S \subset V$, $Ann(Ann(S)) = \langle S \rangle$. En particular si V_1 es s.v. de V, $Ann(Ann(V_1)) = V_1$.

b) Si V_1, V_2 son s.v. de V,

$$Ann(V_1 \cap V_2) = Ann(V_1) + Ann(V_2) \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Ann}(V_1+V_2) = \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$$

c) Si V_1, V_2 s.v. de V y $V = V_1 \oplus V_2$, entonces

$$V^* = \mathrm{Ann}(V_1) \oplus \mathrm{Ann}(V_2)$$

D/ a) $\mathrm{Ann}(S)$ es s.v. de V^* y $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S))$ es s.v. de E por la Prop 9.1. a). Como $S < \langle S \rangle$, por la Prop 9.1. b),

$\mathrm{Ann}(\langle S \rangle) < \mathrm{Ann}(S)$ y $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S)) < \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\langle S \rangle))$.

Tenemos que $S < \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S))$: si $\vec{v} \in S$, $\omega^*(\vec{v}) = 0$ $\forall\, \omega^* \in \mathrm{Ann}(S) \Rightarrow S \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S))$. Como $\langle S \rangle$ y $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S))$ son s.v, $\langle S \rangle < \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S)) < \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\langle S \rangle))$.

Pero por la Prop 9.1. d)

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\langle S \rangle)) &= \dim(V) - \dim(\mathrm{Ann}\langle S \rangle)) \\ &= \dim(V) - (\dim(V^*) - \dim(\langle S \rangle)) \\ &= \dim(\langle S \rangle) \end{aligned}$$

Como tienen la misma dimensión, $\langle S \rangle = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S))$.

b) $V_1 \cap V_2 < V_1$ y $V_1 \cap V_2 < V_2 \xRightarrow{\text{Prop } 9.1,\, b)}$

$\mathrm{Ann}(V_1) < \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2)$ y $\mathrm{Ann}(V_2) < \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) \Rightarrow$

$\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) < \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2)$, (9.1)

$V_1 + V_2 \supset V_1$ y $V_1 + V_2 \supset V_2 \xRightarrow{\text{Prop } 9.1\, b)}$

$\mathrm{Ann}(V_1+V_2) < \mathrm{Ann}(V_1)$ y $\mathrm{Ann}(V_1+V_2) < \mathrm{Ann}(V_2) \Rightarrow$

$\mathrm{Ann}(V_1+V_2) < \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$. (9.2)

Por la parte a),

$$V_1 \cap V_2 = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2)) \overset{(9.1)}{\subset} \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)) \overset{(9.2)}{\subset}$$

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V_1)) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V_2)) = V_1 \cap V_2$$

y todas las desigualdades son igualdades. Por tanto

$$V_1 \cap V_2 = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2))$$

y por la parte a)

$$\mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) = \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2).$$

La otra igualdad se hace de manera similar (ejercicio).

c) $V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \iff$

$\{0\} = \mathrm{Ann}(V) = \mathrm{Ann}(V_1 + V_2) \overset{b)}{=} \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ y

$V^* = \mathrm{Ann}(\{\vec{0}\}) = \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) \overset{b)}{=} \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) \iff$

$$V^* = \mathrm{Ann}(V_1) \oplus \mathrm{Ann}(V_2) \qquad \blacksquare$$

Prop. 9.3.

Sea $A : V \to W$ ap. lin. entre e.v. de dim. finita, y $A^* : W^* \to V^*$ su apli. dual. Se tiene

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Img}(A)) = \ker(A^*) \quad \text{y} \quad \mathrm{Ann}(\ker(A)) = \mathrm{Img}(A^*)$$

D/ • $\mathrm{Ann}(\mathrm{Img}(A)) = \ker(A^*)$

$w^* \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Img}(A)) \iff w^*(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathrm{Img}(A)$

$\iff w^*(A(\vec{u})) = 0 \quad \forall \vec{u} \in V \iff A^*(w^*)(\vec{u}) = 0 \quad \forall u \in V$

$\iff A^*(w^*) = 0$ en $V^* \iff w^* \in \ker(A^*)$

Para probar la otra igualdad, comienza probando que $\operatorname{Ann}(\operatorname{Img}(\Delta^*)) = \operatorname{Ker}(\Delta)$ y concluye usando la prop 9.2 a).

Podemos probar ahora de manera sencilla que el rango de una matriz A coincide con el rango de A^t. Sea Δ una aplicación que tiene A como matriz en unas bases dadas. Por el Teor. 4.3

$$\operatorname{rango}(\Delta) = \dim(\operatorname{Img}(\Delta)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(\Delta)).$$

Como A^t es la matriz de la aplicación Δ^* en las bases duales,

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(A^t) &= \dim(\operatorname{Img}(\Delta^*)) \overset{\text{Prop 9.3}}{=\!=} \\ &= \dim(\operatorname{Ann}(\operatorname{Ker}(\Delta))) \overset{\text{Prop 9.1 d)}}{=\!=} \\ &= \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(\Delta)), \end{aligned}$$

lo que prueba

$$\operatorname{rango}(\Delta) = \operatorname{rango}(A^t)$$

Por tanto, da igual calcular el rango de una matriz haciendo transformaciones elementales sobre sus filas que sobre sus columnas.
