4.4. INVERSA DE UNA MATRIZ. REGLA DE CRAMER.

Para una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $|A| \neq 0$, queremos hallar una fórmula para calcular ~~la~~ inversa A^{-1}. Según la regla de Laplace (Proposición 3.2), si $A = (a_{ij})$, desarrollando su determinante por la fila i-ésima se tiene

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}| = (-1)^{i+1} a_{i,1} |A_{i,1}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{i,n} |A_{i,n}|.$$

Llamamos <u>cofactor</u> del elemento a_{ij} de la matriz A al número $c_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$. Con esta notación la fórmula anterior se escribe

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j} = a_{i,1} c_{i,1} + a_{i,2} c_{i,2} + \dots + a_{i,n} c_{i,n} \qquad (4.1)$$

Llamemos $\mathrm{cof}(A) = C = (c_{i,j})_{i,j=1\dots n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de los cofactores de elementos de A, que llamamos <u>matriz de cofactores</u> de A.

Con esta notación, y debido a (4.1) la matriz $A\cdot C^t$ tiene valor $|A|$ en su diagonal principal:

$$AC^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & ? \\ & |A| & \\ ? & & \ddots \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

Si logramos probar que los términos que no están en la diagonal principal de AC^t son todos nulos, se tendría $AC^t = |A| I_n$ y por tanto $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$. Hacemos la demostración en el teorema siguiente.

Teorema 4.1. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $|A| \neq 0$, su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$, donde C es la matriz de cofactores de A

D/. Por lo dicho anteriormente solo falta probar que si $i \neq j$ la expresión $a_{i,1}C_{j,1} + a_{i,2}C_{j,2} + \dots + a_{i,n}C_{j,n}$ es cero. Esta expresión coincide con el desarrollo por la fila j-ésima (según la regla de Laplace) del determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } j \\ \\ \end{array}$$

que se obtiene de A sustituyendo la fila j-ésima por la i-ésima. Puesto que B tiene dos filas iguales, por la proposición 2.3, $|B| = 0$. Por tanto $a_{i,1}C_{j,1} + \dots + a_{i,n}C_{j,n} = 0$ si $i \neq j$. ■

Ej 4.1. Halla la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando el Teorema 4.1.

S/ Sus cofactores son

$$C_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{1,2} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{1,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{2,1} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{2,3} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

La matriz de cofactores de A es

$$\operatorname{cof}(A) = C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por la regla de Laplace, desarrollando el determinante por la fila 1,

$$|A| = a_{1,1} C_{1,1} + a_{1,2} \cdot C_{1,2} + a_{1,3} C_{1,3} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0(-1) = 7 \neq 0.$$

Por el Teorema 4.1,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nota: Una matriz cuadrada con determinante nulo se dice que es SINGULAR. Cuando su determinante es no nulo se llama NO SINGULAR

Ej 4.2. Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

S/ $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

El Teorema 4.1 nos permite hallar las soluciones de un SEL con tantas ecuaciones como incógnitas y cuya matriz de coeficientes tenga determinante no nulo. Considerar el SEL

$$\left.\begin{array}{c} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Si $A=(a_{i,j})\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\vec{x}=(x_1,..,x_n)^t$ y $\vec{b}=(b_1,..b_n)^t$ el SEL (4.2) se escribe $A\vec{x}=\vec{b}$. Si $|A|\neq 0$, por el Teorema 4.1

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\frac{1}{|A|}C^t\vec{b}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \cdots & c_{n,1}\\ c_{1,2} & c_{2,2} & \cdots & c_{n,2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & c_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1c_{1,1}+b_2c_{2,1}+\cdots+b_nc_{n,1}\\ \vdots\\ b_1c_{1,j}+b_2c_{2,j}+\cdots+b_nc_{n,j}\\ \vdots\\ b_1c_{1,n}+b_2c_{2,n}+\cdots+b_nc_{n,n}\end{pmatrix} \leftarrow \text{componente } j$$

Por tanto, para todo $j=1,2,..,n$ se tiene

$$x_j=\frac{1}{|A|}\left[b_1c_{1,j}+b_2c_{2,j}+\cdots+b_nc_{n,j}\right].$$

Observa que la expresión entre paréntesis es el desarrollo por la columna j-ésima del determinante de la matriz

$$\begin{array}{cc} & \\ \hat{A}_j= & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\\ & \qquad\qquad\quad\uparrow\\ & \qquad\qquad\text{columna } j\text{-ésima}\end{array}$$

Se ha probado el siguiente resultado:

Teorema 4.2 (Regla de Cramer)

Si $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ satisface $|A|\neq 0$, el SEL $A\vec{x}=\vec{b}$ de n ecuaciones y n incógnitas es compatible determinado y su solución es

$$x_j=\frac{|\hat{A}_j|}{|A|}, \quad j=1,2..,n$$

donde $\hat{A}_j$ es la matriz que se obtiene de A sustituyendo su columna j-ésima por el vector $\vec{b}$.

Ej 4.3. Prueba que el SEL $\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2 = 8 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 4 \end{array}\right\}$ es compatible determinado y halla su solución con la regla de Cramer.

S/ $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4+3 = -1 \neq 0$$

Esto prueba que el sistema es compatible determinado. Por el Teorema 4.2.

$$x_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12+13 = 1.$$

$$x_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_4 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Ej 4.4. Usa la regla de Cramer para resolver el SEL $A\vec{x} = \vec{b}$ con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

S/ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$