Ejercicios

Ej. 3 hoja 6

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2}{\varepsilon}$, ε "ε - máquina"
en float64 $\varepsilon = 2^{-52}$

$$x(b) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\sigma_k} \underbrace{\langle b, U^{(k)} \rangle}_{b_k} V^{(k)}$$

$$= \frac{b_1}{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{b_3}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $A\,x(b) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ✓

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \widehat{x(b)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} & (1-\varepsilon/2) \\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} & \boxed{(1+\varepsilon/2)} \\ & b_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 1$

sea $\hat{b}$ la repr. float64 $A\widehat{x(b)}$

$$\widehat{A\widehat{x(b)}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ \boxed{1-\varepsilon/4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow 1 \qquad \Rightarrow \hat{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq b$$

tenemos un error $\|\hat{b} - b\| = 1/2$ debido a los redondeos

↳ miremos qué pasa con la regularización de Tikhonov $\alpha > 0$

- problema regularizado $\underbrace{(A^t A + \alpha I)}_{M \text{ (simétrica)}} x_\alpha(b) = A^t b$

$$K_2(M) = \frac{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ autov } M\}}{\min\{|\lambda| : \lambda \text{ autov } M\}}$$

$$= \frac{\sigma_1^2 + \alpha}{\sigma_3^2 + \alpha} = \frac{4 + \alpha}{\underbrace{\varepsilon^2 + \alpha}} < K_2(A) \quad \text{si } \alpha > \varepsilon^3$$

$\varepsilon^2 (1 + \frac{\alpha}{\varepsilon^2})$

sea v_λ : $A^t A v_\lambda = \lambda v_\lambda$

$\Rightarrow$ $(A^t A + \alpha I) v_\lambda = (\lambda + \alpha) v_\lambda$

: los autovectores de $A^t A$ son autovectores de $A^t A - \alpha I$, y son todos porque se pueden elegir como una BON

- $x_\alpha(b) = \underset{x}{\arg\min} \; \|Ax - b\|^2 + \alpha \|x\|^2$

si $\alpha = 0$ y A es invertible esto es x_b

$$x_\alpha(b) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} b_k V^{(k)} = \frac{2}{4+\alpha} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \alpha} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $\alpha < \varepsilon^3$, en float64 esto es $= x(b)$

en float64 (en precisión finita) se tiene $x_\alpha(b) = x(b)$ para α pequeño pero > 0

¿cuánto? depende del problema

- $b_\alpha = A x_\alpha(b) = \begin{pmatrix} \frac{4}{4+\alpha} \\ \frac{1}{1+\alpha} \\ \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \|b - b_\alpha\|^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{16 + 8\alpha + \alpha^2} + \frac{1}{1 + 2\alpha + \alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\alpha + \alpha^2} \right)$$

donde $\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\alpha + \alpha = \alpha^2\left(1 + \frac{2}{\alpha}\varepsilon^2 + \frac{1}{\alpha^2}\varepsilon^4\right)$:

en float64 esto es 1 si $\alpha > 2\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\|b - b_\alpha\| > 1$ si $\alpha > 2\varepsilon$

observaciones:

- la solución regularizada tiene un error $\|A x_\alpha(b) - b\|$ más grande de $\|\hat{b} - b\|$ ← que se debe a la inestabilidad de A, reflejada en un κ grande

  pero esto no es un problema: pasar a la solución regularizada implica aceptar un $\|Ax - b\|$ potencialmente más grande a cambio de más estabilidad: $x_\alpha(b)$ es menos sensible a los errores, aunque sí para este b en concreto da un resultado b_α más lejos de b respecto a $\hat{b}$

- en este caso A es esencialmente singular: σ_3 es casi cero respecto a σ_1, σ_2 (en float64)

  si tuviéramos $\sigma_3 = 0$, entonces la solución (de mínimos cuadrados I+II) con SVD sería

$$x_b = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sigma_k} b_k V^{(k)}$$

→ desaparecería la contribución de b_3

↳ en b_α, la tercera componente es $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \alpha}$: mucho más pequeña de las otras dos

$\Rightarrow$ la solución regularizada considera A como casi singular, y por esto da menos importancia a b_3

$\boxed{\text{Ej. 1 hoja 5}}$

sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $rg(A) = m < n$. demostrar que existen unos <u>únicos</u> $\hat{Q}$, $\hat{R}$ t.q. $A = \hat{Q}\hat{R}$ y $\hat{R}_{kk} > 0 \ \forall k$

- sean $A = \hat{Q}_1\hat{R}_1 = \hat{Q}_2\hat{R}_2$ dos QR reducidas

$$\begin{cases} \hat{Q}_2^* \hat{Q}_1 = \hat{R}_2\hat{R}_1^{-1} \Rightarrow \hat{Q}_2^*\hat{Q}_1 \text{ es triangular superior} \\ \hat{Q}_1^*\hat{Q}_2 = \hat{R}_1\hat{R}_2^{-1} \Rightarrow \hat{Q}_2^*\hat{Q}_1 = \left(\hat{R}_1\hat{R}_2^{-1}\right)^* \text{ es triangular inferior} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = \hat{Q}_1^*\hat{Q}_2$ es diagonal, y $\hat{Q}_2^*\hat{Q}_1 = \bar{\Delta}$

compleja conjugada

- $\hat{Q}_2 = \hat{Q}_1\hat{R}_1\hat{R}_2^{-1} = \hat{Q}_1\Delta$

y $\underbrace{\hat{Q}_2^*\hat{Q}_2}_{I} = \bar{\Delta}\ \underbrace{\hat{Q}_1^*\hat{Q}_1}_{I}\ \Delta \Rightarrow |\Delta_{kk}| = 1$

los elementos diagonales de Δ son complejos de modulo 1

- $\hat{R}_2 = \hat{Q}_2^*\hat{Q}_1\hat{R}_1 = \bar{\Delta}\hat{R}_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{Q}_2 = \hat{Q}_1\Delta \\ \hat{R}_2 = \bar{\Delta}\hat{R}_1 \end{cases}$$

: dada una factorización QR reducida de A, todas las demás difieren solo por un producto con una matriz diagonal de elementos $|\cdot| = 1$

- si pedimos $(\hat{R}_2)_{kk} > 0$, obtenemos

$$(\hat{R}_2)_{kk} = \bar{\Delta}_{kk}(\hat{R}_1)_{kk} > 0 \iff \Delta_{kk} = \frac{(\hat{R}_1)_{kk}}{|(\hat{R}_1)_{kk}|}$$

$\Rightarrow$ esta condición fija todos los elementos de Δ, y, si ya $(\hat{R}_1)_{kk} > 0 \Rightarrow \Delta = I$ $\not\equiv$

$\boxed{\text{Ej. 5 hoja 5}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\hat{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{R}}$$

solución de mínimos cuadrados (I)

para $Ax = b$: $\quad Ax = \hat{Q}\hat{R}x = b$

una tal x existe solo si $b \in \mathrm{Ran}(A)$

resolver $\hat{R}x = \hat{Q}^* b$: este sistema siempre tiene solución porque $\hat{R}$ es invertible. su solución es la solución de $Ax = \mathbb{P}_{\mathrm{Ran}(A)} b$.

- $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$: $\quad \hat{Q}^t b_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_1 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = b_1$: solución de verdad, $b_1 \in \mathrm{Ran}(A)$

- $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\quad \hat{Q}^t b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_2 \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: en este caso $b_2 \in \mathrm{Ran}(A)^\perp$

  $\Rightarrow$ el problema $Ax = \mathbb{P}_{\mathrm{Ran}(A)} b_2 = 0$ tiene solo la solución $x = 0$ (porque A tiene rg máximo $\Rightarrow \ker A = \{0\}$)

- en general $\|b - Ax_s\| = \|b - \mathbb{P}_{\mathrm{Ran}(A)} b\| = \|\mathbb{P}_{\mathrm{Ran}(A)^\perp} b\| \leq \|b\|$ siempre

si P proyección ortogonal, todo v es $v = Pv + (I-P)v = v_1 + v_2$, con $v_1 \perp v_2$
$\Rightarrow \|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \geq \|v_1\|^2$

Ejercicio Householder

sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar los reflectores de Householder y la QR completa

- $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\|x\| = 3$, $\text{signo}_+(x_1) = \text{signo}_+(1) = 1$

$\Rightarrow v = x + \|x\| e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_v = \frac{1}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} (- v -) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} (4\ 2\ {-2})$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 16 & 8 & -8 \\ 8 & 4 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q_1 = I - 2\mathbb{P}_v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

para el segundo paso: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v = x + \underbrace{\text{signo}_+(0)}_{1} \|x\| e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_{2\times 2} - 2\mathbb{P}_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- $Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$, $A = \underbrace{(Q_2 Q_1)^t}_{Q} R$

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$