

Superficies parametrizadas. Integrales sobre superficies. Teoremas de Stokes y Gauss.

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

(b) $\Phi(u, v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0, 1, 1)$.

(c) $\Phi(u, \theta) = (\cosh u \cos \theta, \cosh u \sin \theta, \sinh u)$ en $(0, 1, 0)$.

(d) $\Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1, 1)$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ con $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$.

(b) $\Phi(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, r)$ con $0 < r < 5$, $0 < \theta < \pi$.

3.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi)$ con $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4.- (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

5.- Hallar el área del helicoides definido por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ y D es la región donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

6.- Un toro T se puede representar como el conjunto $\Phi(D)$ con $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos \theta) \cos \phi$, $y = (R + \cos \theta) \sin \phi$, $z = \sin \theta$, y $D = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi\}$. Calcular el área de T .

7.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \leq z < \infty$, “se puede llenar pero no se puede pintar” y explíquese el significado de esta frase.

8.- Calcular la integral de superficie $I = \int_S (x + z) dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz).

9.- Hallar la integral de superficie $\int_S F \cdot dS$, siendo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, -3z)$ y donde S denota la esfera unidad $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

10.- Hallar la integral del campo

$$F(x, y, z) = (x + \cos y - \log(1 + z^2), y + \sin \sqrt{1 + x^2 + z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

11.- Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int_S F \cdot dS.$$

12.- Transformar la integral de superficie

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $F(x, y, z) = (y, z, x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $F(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4 .

13.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \pi R^2 \sqrt{3}.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0, \quad \int_C y^2 dx + xy dy + xz dz = 0.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz = 2\pi a(a + b).$$

14.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int_S F \cdot dS$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$F(x, y, z) = (xz + e^{y \operatorname{sen} z}, 2yz + \cos(xz), -z^2 + e^x \cos y).$$

15.- Hallar la integral de superficie

$$\int_S F \cdot dS \quad \text{siendo} \quad F(x, y, z) = (x^3, y^3, -abz),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

orientado hacia el exterior.