III. Primera forma fundamental

Geometría de curvas y superficies, 20-21

(José Luis Fernández/Pablo Fernández)

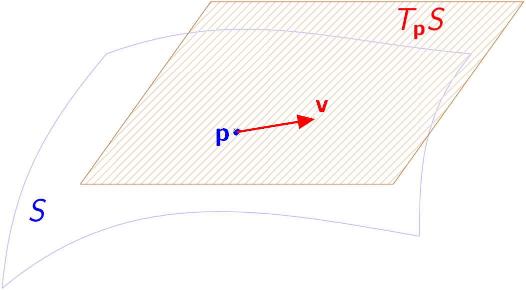
3.1 Primera forma cuadrática fundamental

Primera forma

Sea S una superficie regular.

Para cada punto $\mathbf{p} \in S$, denotamos por $\mathrm{I}_\mathbf{p}$ a la forma cuadrática (cuadrática fundamental) en el plano tangente $T_\mathbf{p}S$ que a cada $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S$ le asigna

$$\mathrm{I}_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2.$$



$\mathbf{I_p}$ es la primera forma cuadrática (fundamental) de S en el punto $\mathbf{p}$.

Es notación: $\mathbf{I_p}(\mathbf{v})$ es simplemente el módulo al cuadrado del vector $\mathbf{v}$ tangente a S en $\mathbf{p}$.

Cada $\mathbf{I_p}$ es una forma cuadrática definida positiva.

$\mathbf{I_p}$ es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_{\mathbf{p}}S \times T_{\mathbf{p}}S \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}.$$

Primera forma cuadrática en coordenadas

Sea $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ carta de S en $\mathbf{p}$.

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{X}(U)$. Pongamos que $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, v_0)$, donde $(u_0, v_0) \in U$.

La base natural del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ asociada a la carta $\mathbb{X}$ es

$$\big\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\big\}.$$

Vamos a expresar la primera forma fundamental $\mathbf{I}_{\mathbf{p}}$ de S en $\mathbf{p}$ en coordenadas con respecto a esa base natural de $T_{\mathbf{p}}S$.

Con notación tradicional que proviene de … Gauss, denotamos

$$
\begin{aligned}
{\color{red}E(u,v)} &= \langle \mathbb{X}_u(u,v), \mathbb{X}_u(u,v)\rangle = \|\mathbb{X}_u(u,v)\|^2,\\
{\color{red}F(u,v)} &= \langle \mathbb{X}_u(u,v), \mathbb{X}_v(u,v)\rangle = \langle \mathbb{X}_v(u,v), \mathbb{X}_u(u,v)\rangle,\\
{\color{red}G(u,v)} &= \langle \mathbb{X}_v(u,v), \mathbb{X}_v(u,v)\rangle = \|\mathbb{X}_v(u,v)\|^2.
\end{aligned}
$$

22 CAROLI FRIDERICI GAUSS

11.

Formulae modo inuentae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curuis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$
\begin{aligned}
aa + bb + cc &= E\\
aa' + bb' + cc' &= F\\
a'a' + b'b' + c'c' &= G
\end{aligned}
$$

Gauss: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828.

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

GOTTINGAE

TYPIS DIETERICHIANIS.

MDCCCXXVIII.

Las funciones E, F, G son C^∞ en el dominio U de parámetros.

- $E(u_0, v_0)$ es el cuadrado de la rapidez de la curva coordenada $\mathbb{X}(u, v_0)$ en $\mathbb{X}(u_0, v_0)$, cuyo vector velocidad es $\mathbb{X}_u(u, v_0)$.
- $G(u_0, v_0)$ es el cuadrado de la rapidez de la curva coordenada $\mathbb{X}(u_0, v)$ en $\mathbb{X}(u_0, v_0)$, cuyo vector velocidad es $\mathbb{X}_v(u_0, v)$.
- Si se tiene que $F \equiv 0$, entonces las curvas coordenadas se cortan perpendicularmente en cada intersección.

Para un vector tangente $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, dado respecto de la base $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ por

$$\mathbf{v} = a\,\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\,\mathbb{X}_v(u_0, v_0)\,,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle a\,\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\,\mathbb{X}_v(u_0, v_0), a\,\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\,\mathbb{X}_v(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2\,E(u_0, v_0) + 2ab\,F(u_0, v_0) + b^2\,G(u_0, v_0). \end{aligned}$$

La matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

es la matriz de la forma cuadrática $\mathbf{I_p}$ respecto de $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$.

Como $\mathbf{I_p}$ es forma definida positiva, se tiene que

$$\det \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} = E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2 > 0\,.$$

Por supuesto, $E(u_0, v_0) > 0$ y $G(u_0, v_0) > 0$.

Pero $F(u_0, v_0)$ puede ser positiva, negativa o cero.

Ejemplos de primera forma

Ejemplo 1. Plano. Carta (global) $X(u,v) = (u,v,0)$, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_u(u,v) &= (1,0,0) \\ \mathbb{X}_v(u,v) &= (0,1,0) \end{aligned} \qquad \Rrightarrow \begin{cases} E \equiv 1 \\ G \equiv 1 \\ F \equiv 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2. Cilindro. Carta $X(\theta,h) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, h)$, para $h \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 2\pi$. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_u(\theta,h) &= (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \\ \mathbb{X}_v(\theta,h) &= (0,0,1) \end{aligned} \qquad \Rrightarrow \begin{cases} E \equiv 1 \\ G \equiv 1 \\ F \equiv 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Grafo de función. Carta (global)

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v)), \qquad \text{para } (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_u(u,v) &= (1, 0, f_u(u,v)) \\ \mathbb{X}_v(u,v) &= (0, 1, f_v(u,v)) \end{aligned} \qquad \Rrightarrow \begin{cases} E(u,v) = 1 + f_u^2(u,v), \\ G(u,v) = 1 + f_v^2(u,v), \\ F(u,v) = f_u(u,v) f_v(u,v). \end{cases}$$

Si $f(u,v) = u + v$, entonces $f_u = f_v = 1$, y por tanto $F \equiv 1$.

Si $f(u,v) = u - v$, entonces $f_u = 1$ y $f_v = -1$, y por tanto $F \equiv -1$.

Ejemplo 4. Esfera unidad. Carta

$$\mathbb{X}(\theta,\phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi), \qquad \text{para } 0<\theta<2\pi, 0<\phi<\pi.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_\theta &= (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0), \\ \mathbb{X}_\phi &= (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi), \end{aligned} \qquad \Rrightarrow \begin{cases} E(\theta,\phi) = \operatorname{sen}^2\phi, \\ G(\theta,\phi) \equiv 1, \\ F(\theta,\phi) \equiv 0. \end{cases}$$

Meridianos y paralelos de la esfera se cortan perpendicularmente: $F \equiv 0$.

En la parametrización $\mathbb{X}$,

- los meridianos se recorren se recorren con rapidez 1,
- el paralelo de colatitud ϕ se recorre con rapidez $\operatorname{sen}\phi$.

Ejemplo 5. Helicoide. Carta (global)

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u \operatorname{sen}\theta, \theta), \qquad \text{para } \theta \in \mathbb{R},\ 0 < u < \infty.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_u(u,\theta) &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0),\\ \mathbb{X}_\theta(u,\theta) &= (-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 1),\end{aligned} \qquad \Rightarrow \begin{cases} E(u,\theta) \equiv 1,\\ G(u,\theta) = 1+u^2,\\ F(u,\theta) \equiv 0.\end{cases}$$

Las curvas $u =$ constante son hélices. Las curvas $\theta =$ constante son rayos/semirrectas/peldaños. Estas curvas coordenadas se cortan ortogonalmente en cada intersección ($F \equiv 0$).

Los rayos $\theta =$ constante están parametrizados por longitud de arco. La hélice $u = u_0$ se recorre con rapidez $\sqrt{1+u_0^2}$.

Ejemplo 5. Superficie de revolución.

Curva $\gamma(s) = (a(s), b(s))$ en el semiplano derecho del plano YZ (es decir, $a(s) > 0$) que se recorre con longitud de arco, de manera que $\dot{a}^2(s) + \dot{b}^2(s) \equiv 1$.

Carta: $\mathbb{X}(\theta, s) = (a(s)\cos\theta, a(s)\,\mathrm{sen}\,\theta, b(s))$, para $\theta \in (0, 2\pi), s \in I$. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_\theta(\theta, s) &= (-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta, 0) \\ \mathbb{X}_s(\theta, s) &= (\dot{a}(s)\cos\theta, \dot{a}(s)\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{b}(s)) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} E(\theta, s) = a^2(s), \\ G(\theta, s) = \dot{a}^2(s) + \dot{b}^2(s) \equiv 1, \\ F(\theta, s) \equiv 0. \end{cases}$$

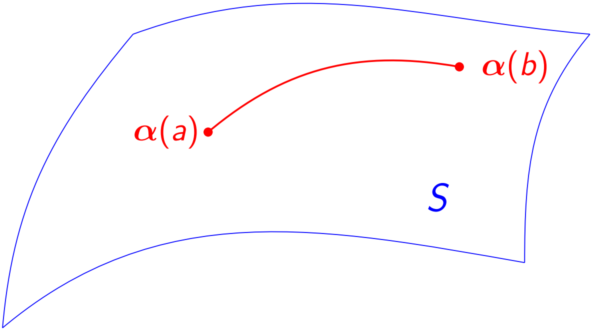
Meridianos y paralelos son perpendiculares. Los meridianos se recorren con rapidez 1.

3.2 Longitudes, ángulos, áreas

1. Longitudes

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva y $a, b \in I$, $a < b$, la longitud de la traza de α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ es

$$\text{longitud} = L(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt\,.$$



Si la traza de $\boldsymbol{\alpha}$ está contenida en una superficie regular S, de hecho, en $\mathbb{X}(U)$, donde $\mathbb{X}: U \to S$ es una carta de S, entonces

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))\,, \quad \text{para } t \in I\,.$$

$u(t), v(t)$ son las coordenadas respecto de $\mathbb{X}$ de la curva $\boldsymbol{\alpha}$.

Se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \dot{u}(t)\,\mathbb{X}_u(\boldsymbol{\alpha}(t)) + \dot{v}(t)\,\mathbb{X}_v(\boldsymbol{\alpha}(t)).$$

Si $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, obviando la variable t, se tiene

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \mathsf{I}_{\mathbf{p}}(\dot{\alpha}(t)) = \dot{u}^2\, E(u,v) + 2\dot{u}\dot{v}\, F(u,v) + \dot{v}^2\, G(u,v).$$

Por tanto, la longitud de α se escribe, obviando de nuevo la variable t,

$$\text{longitud}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\dot{u}^2\, E(u,v) + 2\dot{u}\dot{v}\, F(u,v) + \dot{v}^2\, G(u,v)}\; dt.$$

Se escribe (regla nemotécnica):

$$(\star) \quad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2.$$

A *ds* se le dice elemento de longitud:

$$\text{longitud} = \int ds.$$

A $(\star)$ también se le dice primera forma fundamental.

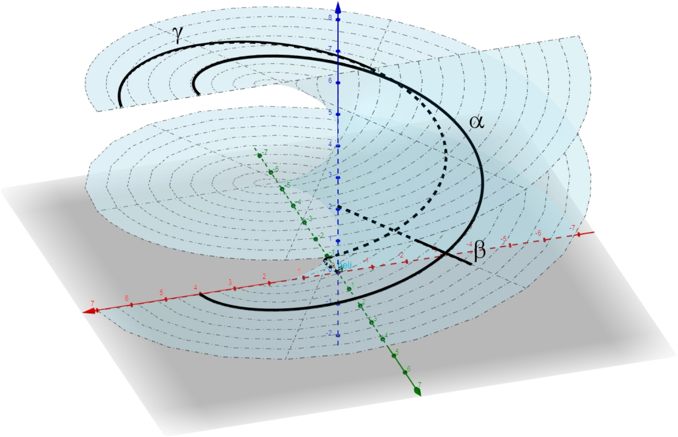
Ejemplo. En el helicoide,

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta),$$

con $E(u,\theta) = 1, \quad F(u,\theta) = 0, \quad G(u,\theta) = 1 + u^2.$

Calculamos la longitud de tres curvas sobre el helicoide:

- la curva $\alpha(t) = \mathbb{X}(u_0, t)$, con $t \in (0, 2\pi)$ (hélice, curva coordenada);
- la curva $\beta(t) = \mathbb{X}(t, \theta_0)$, con $t \in (0, 5)$ (segmento, curva coordenada);
- la curva $\gamma(t) = \mathbb{X}(t, t)$, $t \in (0, 2\pi)$.



(La curva $\alpha(t)$ se dibuja para $u_0 = 4$; la curva $\beta(t)$, con $\theta_0 = 2\pi/3$).

Para

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u_0, t) = (u_0 \cos t, u_0 \operatorname{sen} t, t), \qquad t \in (0, 2\pi),$$

tenemos $u(t) = u_0$ y $\theta(t) = t$. Así que $\dot{u}(t) = 0$ y $\dot{\theta}(t) = 1$. Por lo tanto,

longitud$(\boldsymbol{\alpha})$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{u}^2(t) E(u(t), \theta(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{\theta}(t) F(u(t), \theta(t)) + \dot{\theta}^2(t) G(u(t), \theta(t))}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + u_0^2}\, dt = 2\pi \sqrt{1 + u_0^2}.$$

Si $u_0 = 4$, entonces la longitud es aproximadamente 25.91.

Para

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbb{X}(t, \theta_0) = (t\cos\theta_0, t\,\mathrm{sen}\,\theta_0, \theta_0), \qquad t \in (0,5),$$

tenemos $u(t) = t$ y $\theta(t) = \theta_0$. Así que $\dot{u}(t) = 1$ y $\dot{\theta}(t) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{longitud}(\boldsymbol{\beta}) &= \int_0^5 \sqrt{\dot{u}^2\,E + 2\dot{u}\dot{\theta}F + \dot{\theta}^2\,G}\,dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{1}\,dt = 5. \end{aligned}$$

Finalmente, para

$$\gamma(t) = \mathbb{X}(t,t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t), \qquad t \in (0, 2\pi),$$

tenemos $u(t) = t$ y $\theta(t) = t$. Así que $\dot{u}(t) = 1 = \dot{\theta}(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{longitud}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{u}^2\, E + 2\dot{u}\dot{\theta}\, F + \dot{\theta}^2\, G}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (1+t^2)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2/2}\, dt \overset{t=\sqrt{2}\,h}{=} 2\int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{1+h^2}\, dh \\
&= 2\left[\frac{1}{2} h\sqrt{1+h^2} + \frac{1}{2}\ln\left(h + \sqrt{1+h^2}\right)\right]_{h=0}^{h=\pi\sqrt{2}} \\
&= \pi\sqrt{2+4\pi^2} + \ln(\pi\sqrt{2} + \sqrt{1+2\pi^2}) \approx 22.43.
\end{aligned}$$

Nota: por supuesto, se puede calcular la longitud de cualquiera de estas tres curvas entendiéndolas como curvas en $\mathbb{R}^3$.

Por ejemplo, para $\gamma(t) = \big(t\cos t, t \operatorname{sen} t, t\big)$, con $t \in (0, 2\pi)$, tendríamos

$$\dot\gamma(t) = \big(\cos t - t\operatorname{sen} t, t\cos t + \operatorname{sen} t, 1\big)$$

y

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = 2 + t^2.$$

En suma,

$$\text{longitud} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt.$$

Ejemplo. Las curvas más cortas en la esfera son los grandes círculos.

Carta usual de coordenadas esféricas:

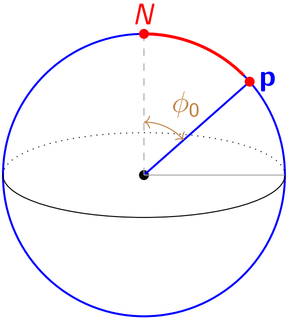
$$X(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

con $0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi$.

Se tiene

$$E = \operatorname{sen}^2\phi, \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Basta ver (las rotaciones conservan longitudes) que una curva α que va desde el polo Norte N hasta un punto $\mathbf{p}$ de la esfera que tiene coordenadas esféricas $\theta_0 = \pi/2$ y $\phi_0 \in (0, \pi)$ tiene longitud al menos ϕ_0, pues el meridiano entre el polo Norte N y $\mathbf{p}$ tiene longitud ϕ_0.



Pongamos que $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\theta(t), \phi(t))$ y que

$$\theta(a) = \pi/2 = \theta(b)$$

y que

$$\phi(a) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(b) = \phi_0.$$

La longitud de $\boldsymbol{\alpha}$ entre $\boldsymbol{\alpha}(a)$ y $\boldsymbol{\alpha}(b)$ es

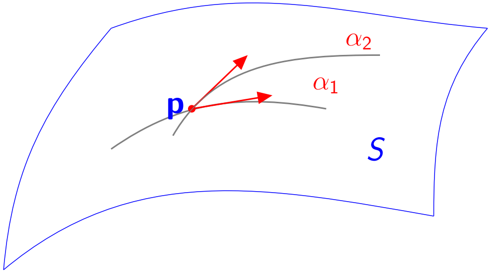
$$\begin{aligned}
\text{longitud} &= \int_a^b \sqrt{\dot\theta^2\, E + 2\dot\theta\dot\phi\, F + \dot\phi^2\, G}\; dt \\
&\qquad [\text{usando } E = \operatorname{sen}^2\phi, F \equiv 0, G \equiv 1] \\
&= \int_a^b \sqrt{\dot\phi^2(t) + \operatorname{sen}^2\phi(t)\,\dot\theta^2(t)}\; dt \\
&\geq \int_a^b \sqrt{\dot\phi^2(t)}\, dt = \int_a^b |\dot\phi(t)|\; dt \\
&\geq \Big| \int_a^b \dot\phi(t)\, dt \Big| = |\phi(b) - \phi(a)| = \phi_0.
\end{aligned}$$

2. Ángulos

Tenemos dos curvas $\boldsymbol{\alpha}_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2$ cuyas trazas están contenidas en una superficie regular S.

En tiempos respectivos, t_1 y t_2, pasan por un cierto punto $\mathbf{p}$ de S:

$$\boldsymbol{\alpha}_1(t_1) = \mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}_2(t_2).$$



El ángulo ω con el que se cortan al pasar por $\mathbf{p}$ es tal que

$$\cos\omega = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1(t_1), \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2(t_2)\rangle}{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1(t_1)\|\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2(t_2)\|}.$$

Si $\mathbb{X}(u,v)$ es carta alrededor de $\mathbf{p}$ y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1(t) &= \mathbb{X}(u_1(t), v_1(t)),\\ \boldsymbol{\alpha}_2(t) &= \mathbb{X}(u_2(t), v_2(t)),\end{aligned}$$

son dos curvas que se cortan en $\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}_1(t_1) = \boldsymbol{\alpha}_2(t_2)$, se tiene que (obviando evaluación en t_1, t_2)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 &= \mathbb{X}_u\,\dot{u}_1 + \mathbb{X}_v\,\dot{v}_1,\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 &= \mathbb{X}_u\,\dot{u}_2 + \mathbb{X}_v\,\dot{v}_2,\end{aligned}$$

Por lo tanto (obviando de nuevo la evaluación en t_1, t_2),

$$\cos\omega = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1{}^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1{}^2}\sqrt{E\dot{u}_2{}^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2{}^2}}.$$

Las funciones E, F y G se evalúan en $(u_1(t_1), v_1(t_1))$, o lo que es lo mismo, en $(u_2(t_2), v_2(t_2))$. Las derivadas $\dot{u}_1$ y $\dot{v}_1$ se evalúan en t_1, mientras que las derivadas $\dot{u}_2$ y $\dot{v}_2$ se evalúan en t_2.

Ejemplo 1. El caso $F \equiv 0$, curvas coordenadas perpendiculares.

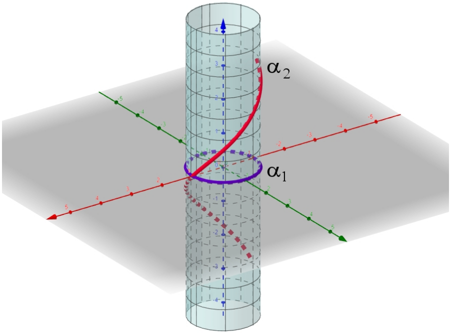
Carta genérica $\mathbb{X}(u, v)$, con $(u, v) \in U$, para la que $F \equiv 0$. Las curvas coordenadas son

- $\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \mathbb{X}(u_1(t), v_1(t)) = \mathbb{X}(t, v_0)$;
- $\boldsymbol{\alpha}_2(t) = \mathbb{X}(u_2(t), v_2(t)) = \mathbb{X}(u_0, t)$.

Se cortan en $\boldsymbol{\alpha}_1(t_1) = \boldsymbol{\alpha}_2(t_2)$, donde $t_1 = u_0$ y $t_2 = v_0$.

Como $\dot{v}_1 = 0$ y $\dot{u}_2 = 0$, solo quedaría el término $F \dot{u}_1 \dot{v}_2$, que es también nulo.

Ejemplo 2 (fácil). Ángulo de corte de dos curvas en el cilindro.



Se cortan en el punto $(1, 0, 0)$.

Tomamos la carta del (medio) cilindro:

$$\mathbb{X}(\theta, h) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, h), \qquad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), h \in \mathbb{R},$$

para la que $E(\theta, h) = G(\theta, h) = 1$, $F(\theta, h) = 0$.

Queremos calcular el ángulo con el que se cortan las curvas

- $\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \mathbb{X}(\theta_1(t), h_1(t)) = \mathbb{X}(t, 0)$, con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- $\boldsymbol{\alpha}_2(t) = \mathbb{X}(\theta_2(t), h_2(t)) = \mathbb{X}(t, t)$, con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$;

Las curvas se cortan en el punto $(1, 0, 0) = \mathbb{X}(0, 0)$, por el que $\boldsymbol{\alpha}_1$ pasa en tiempo $t_1 = 0$ y $\boldsymbol{\alpha}_2$, en tiempo $t_2 = 0$.

La fórmula para el ángulo de corte se simplifica, para el cilindro así parametrizado, a

$$\cos\omega = \frac{\dot\theta_1\,\dot\theta_2 + \dot h_1\,\dot h_2}{\sqrt{\dot\theta_1^2 + \dot h_1^2}\,\sqrt{\dot\theta_2^2 + \dot h_2^2}}.$$

Como $\dot\theta_1 = \dot\theta_2 = \dot h_2 = 1$ y $\dot h_1 = 0$, queda simplemente

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y el corte es con ángulo $\pi/4$.

Ejemplo 3 (espeluznante). Ángulo de corte de dos curvas en el helicoide.

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta),$$

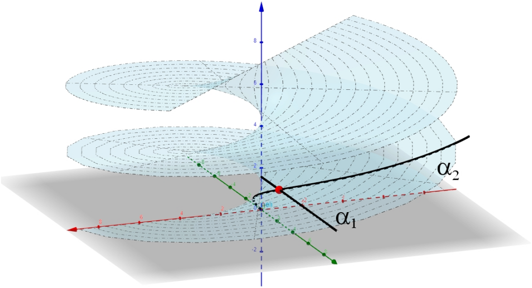
con $E(u,\theta) = 1, \quad F(u,\theta) = 0, \quad G(u,\theta) = 1 + u^2.$

La fórmula para el ángulo de corte se simplifica, en este caso, a

$$\cos\omega = \frac{\dot{u}_1\,\dot{u}_2 + G\,\dot{\theta}_1\,\dot{\theta}_2}{\sqrt{\dot{u}_1^2 + G\,\dot{\theta}_1^2}\,\sqrt{\dot{u}_2^2 + G\dot{\theta}_2^2}}.$$

Calculamos el ángulo con el que se cortan las curvas

- $\alpha_1(t) = \mathbb{X}(t^2, \pi/2)$, con $t \in (0, 5)$;
- $\alpha_2(t) = \mathbb{X}(\sinh t, t)$, $t \in (0, 2\pi)$.



Para $\boldsymbol{\alpha}_1(t) = (u_1(t), \theta_1(t))$, se tiene

$$\begin{cases} u_1(t) = t^2, \\ \theta_1(t) = \pi/2, \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{u}_1(t) = 2t, \\ \dot{\theta}_1(t) = 0. \end{cases}$$

Para $\boldsymbol{\alpha}_2(t) = (u_2(t), \theta_2(t))$, se tiene

$$\begin{cases} u_2(t) = \sinh t, \\ \theta_2(t) = t, \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{u}_2(t) = \cosh t, \\ \dot{\theta}_2(t) = 1. \end{cases}$$

¿Punto de corte? Como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1(t) &= \mathbb{X}(t^2, \pi/2) = (t^2\cos(\pi/2), t^2\operatorname{sen}(\pi/2), \pi/2) = (0, t^2, \pi/2),\\ \boldsymbol{\alpha}_2(t) &= \mathbb{X}(\sinh t, t) = (\sinh t\cos t, \sinh t\operatorname{sen} t, t),\end{aligned}$$

las curvas se cortan en el punto

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = (0, \sinh(\pi/2), \pi/2) &= \mathbb{X}(\sinh(\pi/2), \pi/2)\\ &= \boldsymbol{\alpha}_1\big(\underbrace{\sqrt{\sinh(\pi/2)}}_{=t_1}\big) = \boldsymbol{\alpha}_2(\underbrace{\pi/2}_{=t_2}).\end{aligned}$$

Aprovechando que $\dot\theta_1 \equiv 0$, la fórmula para el coseno del ángulo de corte vienen resulta ser

$$\cos\omega = \frac{\dot u_1(\sqrt{\sinh(\pi/2)}\,)\,\dot u_2(\pi/2)}{\sqrt{\dot u_1^2(\sqrt{\sinh(\pi/2)})}\,\sqrt{\dot u_2^2(\pi/2) + G(\sinh(\pi/2),\pi/2)\,\dot\theta_2^2(\pi/2)}}$$

$$[\dot u_1(t) = 2t,\, \dot u_2(t) = \cosh(t), \dot\theta_2(t) = 1,\, G(u,\theta) = 1 + u^2]$$

$$= \frac{2\sqrt{\sinh(\pi/2)}\,\cosh(\pi/2)}{\sqrt{4\sinh(\pi/2)}\,\sqrt{\cosh^2(\pi/2) + (1 + \sinh^2(\pi/2))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

¡Vaya!

Ejemplo 4. Curvas en el cilindro que cortan a las circunferencias horizontales con ángulo fijo de $\pi/4$.

Carta usual: $\mathbb{X}(\theta, h) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, h)$, con

$$E \equiv G \equiv 1, \quad F \equiv 0.$$

Las circunferencias horizontales se pueden parametrizar como

$$\boldsymbol{\alpha}_{h_0}(t) = \mathbb{X}(t, h_0),$$

donde h_0 indica la altura a la que se encuentra esa circunferencia. Se tiene que $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{h_0} = \mathbb{X}_\theta$.

Tomamos una curva genérica

$$\gamma(t) = \mathbb{X}(\theta(t), h(t)).$$

Así que $\dot{\gamma} = \mathbb{X}_\theta\, \dot{\theta} + \mathbb{X}_h\, \dot{h}$.

La condición es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbb{X}_\theta \rangle}{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}\| \|\mathbb{X}_h\|} = \frac{\dot{\theta}(t)}{\sqrt{\dot{\theta}^2(t) + \dot{h}^2(t)}},$$

que equivale a

$$\dot{\theta}^2(t) \equiv \dot{h}^2(t).$$

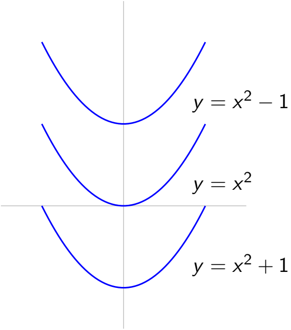
Así que

$$\theta(t) = \pm h(t) + \text{cte}.$$

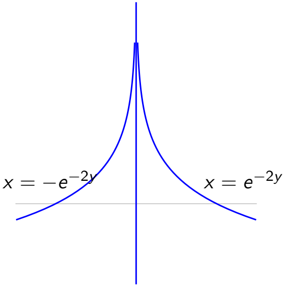
¡Hélices!

Ejemplo 5. En el plano, interesan las trayectorias ortogonales $\mathcal{G}$ al sistema de curvas $\mathcal{F}$: $y = x^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

Cada punto (x_0, y_0) del plano está en una y solo una curva de la familia $\mathcal{F}$.



CURVAS $\mathcal{F}$



CURVAS $\mathcal{G}$

Fijamos un punto del plano $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que estará en la curva de $\mathcal{F}$ de parámetro $a_0 = y_0 - x_0^2$.

Esa curva de $\mathcal{F}$ se parametriza como

$$\boldsymbol{\alpha}_{a_0}(t) = (t, a + t^2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

y pasa por $\mathbf{p}$ para $t = x_0$, es decir, $\boldsymbol{\alpha}_{a_0}(x_0) = (x_0, y_0)$.

Se tiene que $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{a_0}(t) = (1, 2t)$.

Así que la curva pasa por $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ con vector velocidad $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{a_0}(x_0) = (1, 2x_0)$.

Tomamos una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, que pase por el punto **p**, digamos, en tiempo $t^\star$. Es decir, $x(t^\star) = x_0$ e $y(t^\star) = y_0$.

La velocidad con la que pasa por **p** es

$$\dot{\gamma}(t^\star) = (\dot{x}(t^\star), \dot{y}(t^\star)).$$

Exigimos que

$$(\dot{x}(t^\star), \dot{y}(t^\star)) \perp (1, 2x_0) = (1, 2x(t^\star)).$$

La conclusión es que buscamos las curvas $(x(t), y(t))$ tales que en cada t se cumpla que

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \perp (1, 2x(t)).$$

Es decir, curvas $(x(t), y(t))$ tales que

$$x'(t) + 2y'(t)\, x(t) = 0$$

(volvemos a las ' como notación habitual de ecuaciones diferenciales).

Suponemos $x(t) > 0$. Entonces

$$x'(t) + 2y'(t)\, x(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad x'(t)/x(t) = -2y'(t) \quad\Rightarrow\quad (\ln(x(t)))' = -2y'(t)$$
$$\Rightarrow\quad \ln(x(t)) = -2y(t) + \text{cte} \quad\Rightarrow\quad x(t) = b\, e^{-2y(t)}, \quad \text{con } b > 0.$$

En general, debe cumplirse que

$$x(t) = b\, e^{-2y(t)} \qquad \text{para } b \in \mathbb{R}.$$

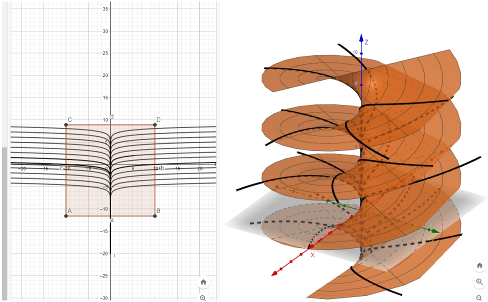
La familia de curvas $\mathcal{G}$ está compuesta por las curvas $x = b\, e^{-2y}$, una por cada valor del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 6. En el helicoide, con carta (global)

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta), \quad \text{con } u \in \mathbb{R} \text{ y } \theta \in \mathbb{R},$$

para la que $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G(u,\theta) = 1 + u^2$, buscamos las trayectorias ortogonales $\mathcal{G}$ al sistema de curvas $\mathcal{F} = \{u = Ce^{2\theta}\}$.

Cada punto **p** del helicoide está en una y sólo una curva de la familia $\mathcal{F}$.



Fijamos un punto $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u_0, \theta_0)$ del helicoide. Entonces $\mathbf{p}$ está en la curva de $\mathcal{F}$ de parámetro $C_0 = u_0 e^{-2\theta_0}$.

Esa curva de $\mathcal{F}$ se parametriza

$$\boldsymbol{\alpha}_{C_0}(t) = \mathbb{X}(C_0 e^{2t}, t).$$

Se tiene que $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{C_0}(t) = \mathbb{X}_u(C_0 e^{2t}, t)\, 2C_0 e^{2t} + \mathbb{X}_\theta(C_0 e^{2t}, t)$.

La curva pasa por $\mathbf{p}$ cuando $t = \theta_0$: $\boldsymbol{\alpha}_{C_0}(\theta_0) = \mathbb{X}(u_0, \theta_0)$.

Su vector velocidad al pasar por $\mathbf{p}$ es

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{C_0}(\theta_0) &= \mathbb{X}_u(u_0, \theta_0) 2C_0 e^{2\theta_0} + \mathbb{X}_\theta(u_0, \theta_0) \\ &= 2u_0\, \mathbb{X}_u(u_0, \theta_0) + \mathbb{X}_\theta(u_0, \theta_0). \end{aligned}$$

Tomamos una curva $\gamma(t) = \mathbb{X}(u(t), \theta(t))$ que pase por $\mathbf{p}$, digamos en tiempo $t^\star$; es decir, $u(t^\star) = u_0$ y $\theta(t^\star) = \theta_0$.

La velocidad con la que γ pasa por $\mathbf{p}$ es

$$\dot{\gamma}(t^\star) = \mathbb{X}_u(u(t^\star), \theta(t^\star))\, \dot{u}(t^\star) + \mathbb{X}_\theta(u(t^\star), \theta(t^\star))\, \dot{\theta}(t^\star).$$

¡Exigimos! que este vector velocidad sea ortogonal a

$$2u_0\, \mathbb{X}_u(u_0, \theta_0) + \mathbb{X}_\theta(u_0, \theta_0),$$

es decir, a

$$2u(t^\star)\, \mathbb{X}_u(u(t^\star), \theta(t^\star)) + \mathbb{X}_\theta(u(t^\star), \theta(t^\star)).$$

La conclusión es que buscamos curvas $\mathbb{X}(u(t), \theta(t))$ tales que, para cada t,

$$\big(\dot{u}(t)\mathbb{X}_u + \dot{\theta}(t)\mathbb{X}_\theta\big) \perp \big(2u(t)\mathbb{X}_u + \mathbb{X}_\theta\big).$$

En esta expresión, $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_\theta$ están evaluadas en $(u(t), \theta(t))$.

Es decir, queremos (usando $E \equiv 1, F \equiv 0, G = (1 + u^2)$) que

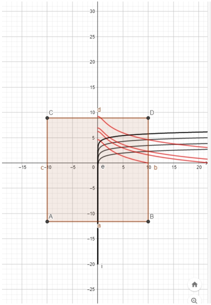
$$2u(t)\dot{u}(t) + (1 + u(t)^2)\,\dot{\theta}(t) = 0.$$

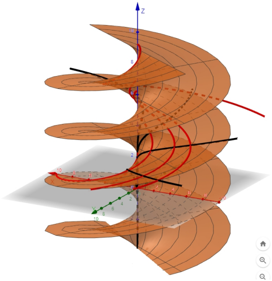
Detalle:

$$2u(t)\dot{u}(t)+(1+u(t)^2)\,\dot{\theta}(t) = 0 \implies \dot{\theta}(t) = -2\,\frac{u(t)\,\dot{u}(t)}{1+u(t)^2} \implies \theta(t) = \ln\frac{1}{1+u(t)^2}+\text{cte.}$$

La familia $\mathcal{G}$ está compuesta de las curvas (una por cada valor de $K>0$):

$$u = \pm\sqrt{Ke^{-\theta}-1}\,, \quad \text{para } \theta < \ln K\,.$$

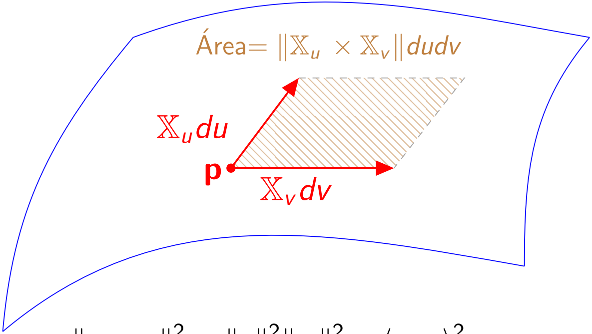




3. Áreas

$$\text{Área de } \mathbb{X}(U) = \int_U \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| \, dudv$$

Idea:



$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2,$$

$$\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Ejemplo 1. Gráfica de una función, con carta (global)

$$\mathbb{X}(u,v) = (u, v, f(u,v)), \qquad \text{para } (u,v) \in U,$$

para la que $E = 1 + f_u^2$, $G = 1 + f_v^2$ y $F = f_u f_v$.

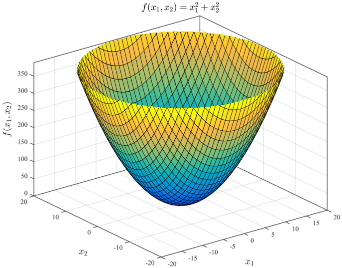
Se tiene que

$$\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + f_u^2(u,v) + f_v^2(u,v)},$$

y por tanto,

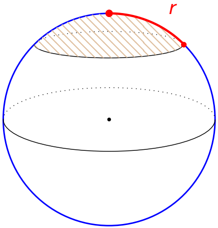
$$\text{área de } \mathbb{X}(U) = \int_U \sqrt{1 + f_u^2(u,v) + f_v^2(u,v)}\, du dv.$$

Ilustración: sección del paraboloide, para el que $f(u,v) = u^2 + v^2$, con $u^2 + v^2 < R^2$:



$$\text{área} = \int_{u^2+v^2<R^2} \sqrt{1 + 4(u^2+v^2)}\, dudv \overset{\text{polares}}{=} 2\pi \int_0^R \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{12} (1+4r^2)^{3/2} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{6} \big((1+4R^2)^{3/2} - 1 \big).$$

Ejemplo 2. Casquete polar. Dato: $r \in (0, \pi)$.



Con $\mathbb{X}$ usual de coordenadas esféricas,

$$\sqrt{EG - F^2} = \operatorname{sen} \phi.$$

Sea $C(r) = \{\text{distancia a polo Norte es} \leq r\}$. Entonces

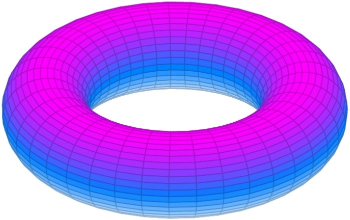
$$C(r) = \mathbb{X}\big(\{(\theta, \phi) : \theta \in [0, 2\pi], 0 < \phi < r\}\big).$$

Por tanto,

$$\text{Área de } C(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \operatorname{sen} \phi d\phi \, d\theta = 2\pi \int_0^r \operatorname{sen} \phi \, d\phi = 2\pi(1 - \cos r) < \pi r^2 .$$

(la comparación es con el área en el plano del disco de radio r).

Ejemplo 3. Área del toro. Tenemos $R > r > 0$.



Carta:

$$\mathbb{X}(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u\big).$$

Cálculos:

$$\mathbb{X}_u(u,v) = \big(- r \operatorname{sen} u \cos v, -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u\big),$$
$$\mathbb{X}_v(u,v) = \big(- (R + r\cos u) \operatorname{sen} v, (R + \cos u)\cos v, 0\big).$$

Así que

$$E = r^2\,, \quad F \equiv 0\,, \quad G = (R + r\cos u)^2\,, \quad \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| = r(R + r\cos u)\,.$$

Con $U = \{(u,v) : 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Área toro} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos u)dudv \\ &= 4\pi^2 Rr + 2\pi r \int_0^{2\pi} \cos u\, du = 4\pi^2 Rr = (2\pi R)(2\pi r). \end{aligned}$$

Ejercicio: Comprobación de que la mitad "exterior" tiene área $2\pi r(R\pi + 2r)$, mientras que la mitad "interior" tiene área $2\pi r(R\pi - 2r)$.

Ejemplo 3. Área de superficie de revolución. Curva $\gamma(s) = (a(s), b(s))$ en semiplano derecho del plano YZ (es decir, $a(s) > 0$) que se recorre con longitud de arco, de manera que $\dot{a}^2(s) + \dot{b}^2(s) \equiv 1$.

Carta:

$$\mathbb{X}(\theta, s) = (a(s)\cos\theta, a(s)\operatorname{sen}\theta, b(s)), \qquad \text{para } \theta \in (0, 2\pi), 0 < s < L.$$

Se tiene

$$E(\theta, s) = a^2(s), \quad G(\theta, s) \equiv 1, \quad F(\theta, s) \equiv 0.$$

Así que

$$\sqrt{EG - F^2} = a(s).$$

y por tanto,

$$\text{área} = \int_0^{2\pi} \int_0^L a(s)\, d\theta ds = 2\pi \int_0^L a(s)\, ds.$$

Nota 1. Si γ no está parametrizada por longitud de arco, entonces $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG} = a(t)\sqrt{\dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t)}$.

Nota 2. Cálculo del área del toro como superficie de revolución: o bien parametrizando la curva generadora (circunferencia) en el plano YZ como

$$\gamma(t) = (R + r\cos t, r\operatorname{sen} t), \qquad t \in (0, 2\pi),$$

(no parametrizada por longitud de arco), o bien como

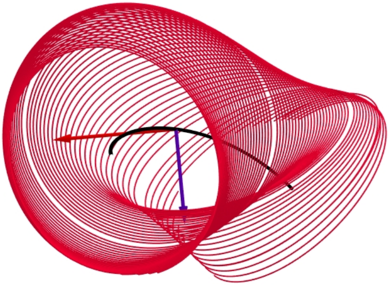
$$\gamma(s) = (R + r\cos(s/r), r\operatorname{sen}(s/r)), \qquad s \in (0, 2\pi r),$$

que sí está parametrizada por longitud de arco.

Ejemplo 4. Área del tubo de radio r alrededor de una curva $\boldsymbol{\alpha}$ (parametrizada por longitud de arco). Suponemos que la curvatura de $\boldsymbol{\alpha}$ cumple que $\kappa(s) < 1/r$.Carta:

$$\mathbb{X}(s,\theta) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r\,(\cos\theta\,\mathbf{n}(s) + \sin\theta\,\mathbf{b}(s)),$$

con $0 \leq s \leq L$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Cálculos con fórmulas de Frenet–Serret (s es longitud de arco):

$$\mathbb{X}_s(s,\theta) = (1-\kappa(s) r\cos\theta)\,\mathbf{t}(s) + r\tau(s)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{n}(s) - r\tau(s)\cos\theta\,\mathbf{b}(s),$$
$$\mathbb{X}_\theta(s,\theta) = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{n}(s) + r\cos\theta\,\mathbf{b}(s)\,.$$

De manera que

$$\begin{aligned} E(s,\theta) &= (1-\kappa(s) r\cos\theta)^2 + r^2\tau^2(s), \\ F(s,\theta) &= -r^2\tau(s), \\ G(s,\theta) &= r^2, \\ EG - F^2 &= r^2(1-\kappa(s)\,r\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\sqrt{EG-F^2} = r(1-\kappa(s)\,r\cos\theta).$$

Así que

$$\text{Área de tubo} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \big(r - r^2\kappa(s)\cos\theta\big)\, d\theta ds$$
$$= (2\pi r)L - r^2 \int_0^L \kappa(s)\, ds \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = (2\pi r)L.$$

Pero la mitad del tubo que apunta en dirección de $\mathbf{n}$, es decir, para $0 \leq s \leq L$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, tiene área

$$\int_0^L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r - r^2\kappa(s)\cos\theta)\, d\theta ds = \pi r L - 2r^2 \int_0^L \kappa(s)\, ds$$

La otra mitad del tubo (que apunta en dirección contraria a $\mathbf{n}$) tiene área

$$rL\pi + 2r^2 \int_0^L \kappa(s)\, ds.$$

Ejercicio. Interpretar el toro como un tubo: caras interior y exterior.