Ejercicio 4, hoja 8

sea $f(x) = x^{27} - 10x^{16} + 12$, y sea

p el polinomio interpolador de f por $\{x_i\}_{i=0}^{26}$ $\quad x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{26} (x - x_i).$$

demostración 1: (usando el teorema de aproximación)

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{26} (x - x_i), \quad n = 26, \quad f^{(27)}(x) = 27!$$

demostración 2:

$$q(x) = f(x) - p(x) = x^{27} + \underbrace{\ldots}_{P_{26}} \quad : \quad q \in P_{27} \text{ mónico}$$

$$q(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = 0 \quad i \in \{0 \ldots 26\} \quad \Rightarrow \quad q(x) = \prod_{i=0}^{26} (x - x_i)$$

Ejercicio 5, hoja 8

sean $\{x_k\}_{k=-N}^{N} \subset \mathbb{R}$, $x_k \neq x_\ell$ si $k \neq \ell$ $\leftarrow$ $2N+1$ nodos ($n = 2N$)

t.q. $x_0 = 0$, $x_{-k} = -x_k$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar $(f(-x) = -f(x))$

$\Rightarrow$ el polinomio interpolador de $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=-N}^{N}$ es una función impar.

- sea $p \in P_{2N}$ el p. int.: queremos ver que $p(-x) = -p(x)$, o, equivalentemente, que el polinomio $q(x) = -p(-x)$ es $q = p$

- $q \in P_{2N}$, y $q(x_k) = -p(-x_k) = -p(x_{-k}) = -f(x_{-k}) = -f(-x_k) = f(x_k)$

  $\Rightarrow q$ es interpolador

$\Rightarrow q = p$ por unicidad.