Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

Hoja 4

Funciones vectoriales. Regla de la cadena. Plano tangente a una superficie

1.- Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

2.- Sean $f(x,y) = x^2 + y$, $g(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$ y $h(u) = f(g(u))$. Calcular dh/du en $u = 0$ tanto de forma directa como usando la regla de la cadena.

3.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y} \cos x\, y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

4.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcúlese la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$.

5.- Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$ definen u como función de las variables (s,t). Expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, en términos de las diversas derivadas parciales de f, x e y. Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que $x(s,t) = s\,t$, $y(s,t) = \dfrac{s}{t}$.

6.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)), \qquad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$. Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$ y la matriz de $Dh(1,-1,1)$.

7.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u,v,w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

8.- (a) Hallar la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\, dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

(b) Hallar el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, donde

$$f(x,y) = \int_0^{x^3-2y} e^{t^2}\, dt\,, \qquad x\,, y \in \mathbb{R}\,.$$

9.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y, sea ésta $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

10.- Hállese la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(*a*) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(*b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

11.- Hállese la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 1, 0)$.

12.- Si (a, b, c) es un punto de la superficie $z = x\,y$, las dos rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} z = b\,x, \\ y = b, \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = a\,y, \\ x = a, \end{array} \right.$$

se cortan en (a, b, c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a, b, c) contiene a esas dos rectas.

13.- Hallar la ecuación de la única recta tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

14.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$, los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

15.- Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

(a) $f(x, y, z) = 3\,x - 5\,y + 2\,z$ en el punto $(2, 2, 1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.