$\boxed{4}$ Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua y $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$. (impar)

$S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$. Calcular $I = \int_S f dS$

Sea ϕ_1 una param. positiva (vector normal hacia fuera)

$\phi_1: D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \int_S f\,dS = \int_D f(\phi_1(u,v)) \|\phi_{1u} \times \phi_{1v}\| du\,dv = I$, integrable porque f es continua.

Definimos ϕ_2 por $\phi_2(u,v) = -\phi_1(u,v)$ $(\to \phi_2 : D \to S)$

de modo que como ϕ_1 es biyectiva, y $\phi_2 = -\phi_1$,

ϕ_2 también lo es.

Y si $\phi_1(u,v) = (x,y,z) \in S \Rightarrow \phi_2(u,v) = (-x,-y,-z) \in S$

Porque $1 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow 1 = (-x)^2+(-y)^2+(-z)^2$.

Por tanto ϕ_2 es una reparametrización de S. Además bien orientada:

$\phi_{2u} = -\phi_{1u}$, $\phi_{2v} = -\phi_{1v}$

$\Rightarrow \phi_{2u} \times \phi_{2v} = (-\phi_{1u}) \times (-\phi_{1v}) = \phi_{1u} \times \phi_{1v}$

Por tanto: $I = \int_D f(\phi_1(u,v)) \|(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\| du\,dv = \int_D f(\phi_2(u,v)) \|(\phi_{2u} \times \phi_{2v})\| du\,dv$

$= \int_D f(-\phi_1(u,v)) \|(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\| du\,dv = \int_D -f(\phi_1(u,v)) \|(\phi_{1u} \times \phi_{1v})\| du\,dv =$

por la def. de ϕ_2 — Como f es impar

$= -I. \Rightarrow \int_S f\,dS = -\int_S f\,dS = 0$.

4