4.9. FORMAS n-LINEALES. Y DETERMINANTES.

Def 4.9.1. Sea V un e.v. de dim n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una forma n-lineal es una aplicación $F: V \times \overset{n}{\cdots} \times V \longmapsto \mathbb{K}$ que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ cumple

(1) $F(\vec{v}_1, \ldots, \lambda \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n) = \lambda F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n), \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(2) $F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \vec{v}_i\,', \ldots, \vec{v}_n) = F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, v_n) + F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i\,', \ldots, \vec{v}_n)$

para $\vec{v}_i, \vec{v}_i\,' \in V$.

NOTA: Las propiedades (1) y (2) dicen que F es lineal en cada uno de sus factores, es decir multilineal. Cuando $n=1$ son las aplicaciones lineales y si $n=2$ se llaman formas bilineales.

Ej 4.9.1. (a) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^2$. En general, $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $F(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (producto escalar) con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ es una forma bilineal.

(b) (Determinante) $F: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ es una forma bilineal.

En general, por las propiedades demostradas para los determinantes $F: \mathbb{K}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{K}^n$, dada por

$$F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n] \quad \text{(por columnas)}$$

es una forma n-lineal.

(c) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1 - x_2, 2x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2) y_1 + 2 x_2 y_2$ es bilineal.

Sea $\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K}) = \{F : V \times \dots \times V \to \mathbb{K} : F \text{ n-lineal}\}$.

Pongamos las operaciones

(a) $(F+G)(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) = F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) + G(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)$, $F, G \in \mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})$

(b) $(\lambda F)(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) = \lambda (F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n))$, $F \in \mathcal{L}_n(V, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$

Es fácil comprobar que, con estas operaciones, $\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial. La aplicación $0 : V \times .. \times V \to \mathbb{K}$ dada por $0(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) = 0$ es el elemento neutro o nulo.

NOTA: Observa que $\mathcal{L}_1(V, \mathbb{K})$ es el espacio dual de V.

Def 4.9.2

Una forma n-lineal $F : V \times \overset{n}{\dots} \times V \to \mathbb{K}$ se dice <u>alternada</u> si cuando $i \neq j$ y $\vec{v}_i = \vec{v}_j$,

$$F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i, .., \vec{v}_j, .., \vec{v}_n) = 0.$$

Ej 4.9.2. Indica cuáles de las formas n-lineales del Ej 4.9.1 son alternadas.

Vamos a deducir algunas propiedades de las formas n-lineales alternadas.

Prop 4.9.3

(a) Si $F : V \times \overset{n}{\dots} \times V \to \mathbb{K}$ es una forma n-lineal alternada se cumple

(9.1) $F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i, .., \vec{v}_j, .., \vec{v}_n) = -F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_j, .., \vec{v}_i, .. \vec{v}_n)$, $i \neq j$

(b) Si se cumple (9.1) y $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica distinta de 2, F es alternada.

D/ (a) Como F es alternada

$$0 = F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_j + \vec{v}_i, \dots \vec{v}_n) \overset{(2)}{=}$$
$$= F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n) + F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$$
$$+ F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n) + F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_n) \overset{(1)}{=}$$
$$= F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) + F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n),$$

~~lo~~ que prueba (9.1).

(b) Si $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ con $i \neq j$ por (9.1)

$$F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n) = -F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n).$$

Como $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ se tiene

$$2F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_n) = 0,$$

lo que implica $F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_n) = 0$ porque $\mathbb{K}$ no tiene característica 2. ∎

Cor. 4.9.4.

> Sea $F: V \times \overset{n}{\dots} \times V \to \mathbb{K}$ una forma n-lineal alternada. Si $\sigma \in S_n$ es una permutación de n elementos
> $$F(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \text{signo}(\sigma)\, F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$$

D/ Como $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n$ (τ_j trasposiciones) y signo(σ) $= (-1)^n$, el resultado se deduce aplicando n veces la prop. 4.9.3. ∎

Prop 4.9.5

> Sea $F: V \times \overset{n}{\dots} \times V \to \mathbb{K}$ una forma n-lineal alternada.
> (a) Si $\vec{v}_i = \vec{0}$ para algún $i = 1, \dots n$, $F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) = 0$.
> (b) Si $\vec{v}_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k v_k$, $F(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = 0$.

$$\boxed{(c)\quad F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k \vec{v}_k, .., \vec{v}_n) = F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i, .., \vec{v}_n)}$$

D/ (a) Escribir $\vec{v}_i = \vec{0} = \lambda . \vec{v}_i$ y aplicar la propiedad (1) de la definición de forma n-lineal.

(b) Por (1) y (2) de la def 4.9.1

$$F(\vec{v}_1, .. \vec{v}_j, .. \vec{v}_i) = \sum_{k\neq j} \lambda_k F(\vec{v}_1, .. \underbrace{\vec{v}_k}_{j}, .., \vec{v}_n).$$

En cada sumando de la derecha aparece $\vec{v}_k$ en las posiciones j y $k\neq j$. Como F es alternada todos los sumandos son cero.

(c) Como F es lineal en cada variable

$$F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k \vec{v}_k, .., \vec{v}_n) = F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i, .., \vec{v}_n)$$

$$+ F(\vec{v}_1, .., \sum_{k\neq i} \lambda_k \vec{v}_k, .., \vec{v}_n) = F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_i, .., \vec{v}_n)$$

por (b). ■

Sea $\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ el subconjunto de $\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})$ formado por las formas n-lineales <u>alternadas</u>. Es fácil ver que $\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})$.

El resultado siguiente muestra que cuando $\dim(V) = n$ $\dim(\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})) = 1$.

Teorema 4.9.6.

Sea V un e.v. de dimensión $n \neq 0$ sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,..,\vec{e}_n\}$ una base de V. Existe una única forma n-lineal alternada $D_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}_n(V,\mathbb{K})$ tal que $D_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)=1$.

Además, si $F \in \mathcal{A}_n(V,\mathbb{K})$, entonces $F=\lambda D$ con $\lambda = F(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)$. Por tanto, $\mathcal{A}_n(V,\mathbb{K})$ tiene dim 1.

D/ Sean $\vec{v}_1,..,\vec{v}_n \in V$ y escribamos $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\vec{e}_j$ en la base $\mathcal{B}$, $i=1,..,n$. Entonces

$$F(\vec{v}_1,..,\vec{v}_n) = F\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\vec{e}_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\vec{e}_j\Big)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{j_1=1,..,j_n=1}^{n} F(a_{1,j_1}\vec{e}_{j_1},..,a_{n,j_n}\vec{e}_{j_n})$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{j_1=1,..,j_n=1}^{n} a_{1,j_1}\cdots a_{n,j_n} F(\vec{e}_{j_1},..,\vec{e}_{j_n}) \qquad (9.2)$$

En esta última cada subíndice $j_1,..,j_n$ puede tomar valores cualesquiera en $\{1,2,..,n\}$, es decir, hay n^n sumandos. Pero como F es alternada, $F(\vec{e}_{j_1},..,\vec{e}_{j_n})=0$ siempre que dos de los $\vec{e}_k$ sean iguales. Por tanto, en la suma anterior solo pueden ser no nulos los términos en los que los $j_1,..,j_n$ son todos distintos; es decir, cuando $\{j_1,..,j_n\}$ es una permutación de $\{1,2,..,n\}$. Poniendo $\sigma(k)=j_k$ la suma (9.2) se reduce a

$$F(\vec{v}_1,..,\vec{v}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)} F(\vec{e}_{\sigma(1)},..,\vec{e}_{\sigma(n)})$$

$$\underset{\text{Cor 4.9.4}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \text{signo}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)} F(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)$$

$$= F(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)\left[\sum_{\sigma\in S_n} \text{signo}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right]. \quad (9.2)$$

Definamos ahora una aplicación $D_\beta : V\times\overset{n}{\cdots}\times V \to \mathbb{K}$ por

$$D_\beta(\vec{v}_1,..,\vec{v}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{signo}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \quad (9.3)$$

donde $(a_{i,1},..,a_{i,n})$ son las coordenadas de $\vec{v}_i$ en la base β, e.d $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\vec{e}_j$. Ya hemos probado en la sección 4.2 las propiedad de D_β que prueban que es una forma n-lineal alternada. Se llama determinante de los vectores $\vec{v}_1,..,\vec{v}_n$ en la base β. Además,

$$D_\beta(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n) = 1.$$

Con esta notación, la fórmula (9.2) se escribe

$$F(\vec{v}_1,..,\vec{v}_n) = F(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)\, D_\beta(\vec{v}_1,..,\vec{v}_n) \quad (9.4)$$

para todo $(v_1,..,v_n)\in V\times\overset{n}{\cdots}\times V$, es decir $F = F(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)\, D_\beta$ (como aplicaciones).

Esto permite probar que D_β es única, puesto que si $D' \in \mathcal{A}_n(V,\mathbb{K})$ con $D'(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)=1$, poniendo $F=D'$ en (9.4)

$$D' = D'(\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)\cdot D_\beta = D_\beta.$$

La fórmula (9.4) prueba que $\{D_\beta\}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$ y como $D_\beta \neq 0$ porque $D_\beta(\vec{e_1}, .., \vec{e_n}) = 1$, es base. Por tanto,

$$\dim(\mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})) = 1. \qquad \blacksquare$$

Las propiedades de D_β (definido en (9.3)) son las mismas que las propiedades del determinante que hemos estudiado en las secciones anteriores. En particular, destacamos

Prop 4.9.6.

> Sea V e.v. de dim. n sobre $\mathbb{K}$ y β una base de V. Los vectores $\vec{v}_1, .., \vec{v}_n$ son l.i si y solo si
> $$D_\beta(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) \neq 0.$$

Como corolario de este resultado y la fórmula (9.4) se obtiene que si $0 \neq F \in \mathcal{A}_n(V, \mathbb{K})$, $\{\vec{v}_1, .., \vec{v}_n\}$ son l.i $\Leftrightarrow$ $F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) \neq 0$.

Ej. 4.9.3. Sea $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$ y $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{v}_2 = -e_1 + 2e_3$, $\vec{v}_3 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

a) Calcula $D_\beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

Sea $e_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2\,' = -e_1 + e_3$, $\vec{e}_3\,' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

b) Prueba que β' es base de $\mathbb{K}^3$ y calcula $D_{\beta'}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

S/ a) $D_\beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13.$

b) Se hallan las coordenadas de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ en la base β'

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \multicolumn{6}{c}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ e'_1 & e'_2 & e'_3 & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$D_{\beta'}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

Prop 4.9.7.

Sean $\beta = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_n\}$ y $\beta' = \{\vec{e}\,'_1, .., \vec{e}\,'_n\}$ bases de un e.v. V de dim n. Entonces

$$D_{\beta'}(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) = \frac{D_\beta(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)}{D_\beta(e'_1, .., e'_n)}$$

para todo $\vec{v}_1, .., \vec{v}_n \in V$. (Observa que $D_\beta(\vec{e}\,'_1, .., \vec{e}\,'_n) \neq 0$ por la prop 4.9.6).

D/ Para cualquier $F \in \mathcal{A}_n(V; \mathbb{K})$,

$$F(\vec{v}_1, .. \vec{v}_n) \overset{(9.4)}{=\!=} F(\vec{e}_1, .., \vec{e}_n)\, D_\beta(\vec{v}_1, .. \vec{v}_n)$$

y también

$$F(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) \overset{(9.4)}{=\!=} F(\vec{e}\,'_1, .., e'_n)\, D_{\beta'}(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)$$

$$\overset{(9.4)}{=\!=} F(\vec{e}_1, .., \vec{e}_n)\, D_\beta(\vec{e}\,'_1, .., \vec{e}\,'_n)\, D_{\beta'}(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)$$

Tomar $F \in \mathcal{A}_n(V; \mathbb{K})$ tal que $F(\vec{e}_1, .., \vec{e}_n) \neq 0$ (vale cualquier $F \neq 0$) para obtener

$$D_\beta(\vec{e}\,'_1, .., \vec{e}\,'_n) \cdot D_{\beta'}(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n) = D_\beta(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n). \quad \blacksquare$$

NOTA: (b) del Ej 4.9.3 es sencillo pq. $D_{\beta'}(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = 2$.