TEMA 1.- ESPACIOS NORMADOS

1.1.- Espacios normados

1.1.1.- Productos escalares

Def: Un producto escalar en un e.v. $\mathbb{V}$ es una función de dos variables

$$<,> : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longrightarrow <v, w>$$

que cumple:

(1) Bilineal: lineal en cada variable

(2) Simétrica: $<v, w> = <w, v>$

(3) Definida positiva: $<v, v> > 0 \quad \forall v \neq \vec{0}_{\mathbb{V}}$

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, todos los productos escalares cumplen $<x, y> = x^t A y$, donde A es una matriz simétrica definida positiva ($\lambda_i > 0$)

1.1.2.- Normas euclídeas

Def: La longitud euclídea o norma euclídea asociada al producto escalar $<\cdot, \cdot>$ es:

$$\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R} \quad , \quad \|v\| = \sqrt{<v, v>} \geq 0$$

que cumple:

(1) $\|v\| \geq 0$

(2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(4) Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|<v, w>| \overset{= \text{ si son l.d.}}{\leq} \|v\| \|w\|$

(5) Desigualdad triangular: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

1.1.3.- Homogeneidad de funciones

Def: Se dice que f es homogénea de grado k si

$$v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}, \lambda \neq 0 \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda^k f(v)$$

Para $a \in \mathbb{R}$, se dice que f es positivamente homogénea de grado a si

$$v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}, \lambda > 0 \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda^a f(v)$$

1.1.4.- Normas en general

Def: Una norma en $\mathbb{V}$ es cualquier función

$$\|\cdot\| : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow \|v\|$$

que cumple las propiedades (1), (2), (3) y (5) de las normas euclídeas

Un espacio normado es un par $(\mathbb{V}, \| \, \|)$ con $\mathbb{V}$ e v y $\| \, \|$ norma en $\mathbb{V}$

1.1.5.- Bolas y conjuntos acotados

Def. Dado $r > 0$, la bola abierta de centro el origen y radio r es

$$B(0, r) = \{ v \in \mathbb{V} : \|v\| < r \}$$

Dado $r \geq 0$, la bola cerrada de centro el origen y radio r es

$$\overline{B}(0, r) = \{ v \in \mathbb{V} : \|v\| \leq r \}$$

Un subconjunto es acotado si está contenido en alguna bola

1.1.6.- Descomposición polar

Cada vector $v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ tiene una factorización

$$v = \lambda w, \text{ con } \begin{cases} \lambda > 0 \quad t.q \quad \lambda = N(v) & (N \text{ norma}) \\ w \text{ vector unitario } t.q \quad w = \dfrac{v}{N(v)} \end{cases}$$

1.1.7.- Normas euclídeas y no euclídeas

Def. Un subconjunto $E \subset \mathbb{V}$ es un elipsoide centrado en x_0 si $\exists$ una forma cuadrática $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida positiva y $c > 0$ t.q.

$$E = \{ y \in \mathbb{V} : Q(y - x_0) = c \} = x_0 + \{ x \in \mathbb{V} : Q(x) = c \}$$

Un subconjunto $B \subset \mathbb{V}$ es un elipsoide sólido centrado en x_0 si $\exists$ una forma cuadrática $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida positiva y $c > 0$ t.q.

$$B = \{ y \in \mathbb{V} : Q(y - x_0) \leq c \} = x_0 + \{ x \in \mathbb{V} : Q(x) \leq c \}$$

Teorema: Una norma es euclídea si y sólo si cumple la regla del paralelogramo

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

1.1.8.- Conjuntos convexos

Def: El segmento rectilíneo de extremos x, y es

$$[x, y] = \{ (1-\lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

Un subconjunto $E \subseteq V$ es convexo si $x, y \in E \Rightarrow [x, y] \subseteq E$

1.1.9.- Convexidad de funciones

Def. Decimos que f es una función convexa si

$$x, y \in E, \ \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Decimos que f es una función cóncava si

$$x, y \in E, \ \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Teorema: Si f' es monótona no decreciente, entonces f es convexa

Si f' es monótona no creciente, entonces f es cóncava

1.1.10 - Teoría de Minkowski

Teorema (de Hermann Minkowski) Sea $N(\ )$ una función que cumple las propiedades (1), (2) y (3) de las normas euclídeas. Entonces $N(\cdot)$ cumple la desigualdad triangular si y sólo si el conjunto $\bar{B} = \{x \in \mathbb{V} \ N(x) \leq 1\}$ es convexo

1.1.11. - Las normas p en $\mathbb{R}$

Def. $1 \leq p \leq \infty$. La norma p en $\mathbb{R}^n$ es

$$\| \cdot \|_p \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\|\vec{x}\|_p \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Son normas, y para ellas la desigualdad triangular

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

se llama desigualdad de Minkowski

La norma infinito en $\mathbb{R}^n$ es

$$\| \cdot \|_\infty \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\|\vec{x}\|_\infty \longrightarrow \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

1.1.12. - Desigualdades de Young y Holder

Def. Dos números $1 < p, q < \infty$ son exponentes conjugados si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Teorema Dados p y q exponentes conjugados, entonces se cumple

Desigualdad de Young: $a, b \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Desigualdad de Holder $x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$

1.1.13.- Normas de operador

Def: Llamamos aplicación lineal acotada de $(\mathbb{V}, \|\ \|_{\mathbb{V}})$ a $(\mathbb{W}, \|\ \|_{\mathbb{W}})$ a cualquier aplicación lineal $L: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ t.q el conjunto $L(\bar{B}_{\mathbb{V}}(0,1))$ es acotado. Es decir, $\exists M$ t.q

$$L(\bar{B}_{\mathbb{V}}(0,1)) \subset \bar{B}_{\mathbb{W}}(0, M)$$

Dada L ap. lineal acotada, su norma de operador es

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_{\mathbb{W}}}{\|x\|_{\mathbb{V}}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{V}}=1} \|L(x)\|_{\mathbb{W}}$$

Se verifica $\|L(v)\| \leq |||L||| \, \|v\|$

$$|||L_2 \circ L_1||| \leq |||L_2||| \, |||L_1|||$$

Si la matriz de L (A) es cuadrada invertible, entonces

$$|||L||| = \sqrt{\lambda_1} \text{, donde } \lambda_1 = \max\{\lambda : \lambda \text{ a.v. de } A^t A\}$$

1.2.- Espacios métricos y topología

1.2.1.- Funciones distancia

Def. Una función distancia en X es cualquier función que cumpla

(1) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un espacio métrico es un par (X,d)

Una distancia d proveniente de una norma $\| \ \|$ es

$$d(v,w) = \|v - w\|$$

1.2.2.- Bolas métricas y conjuntos acotados

Def. La bola abierta con centro x_0 y radio $r>0$ es

$$B_d(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

La bola cerrada con centro x_0 y radio $r \geq 0$ es

$$\overline{B}_d(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$$

Un subconjunto $E \subseteq X$ es acotado si está contenido en alguna bola, es decir, si $E \subseteq \overline{B}_d(x_0, r)$ para algún x_0, r

1.2.3.- Convergencia de sucesiones

Def. Una sucesión de eltos de X es una aplicación

$$\{1, 2, ..\} \to X, \quad n \to x_n$$

Se la indica como una lista infinita $x_1, x_2, \dots$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o $\{x_n\}$

Una cola de la sucesión es el resultado $x_k, x_{k+1}, \dots$ de suprimir los $k-1$ primeros términos para algún k

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0 ($\{x_n\} \to x_0$) si cada bola $B(x_0, r)$ contiene una cola de dicha sucesión

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice convergente si converge a algún x_0

1.2.4.- Abiertos, cerrados y topología

Def: Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto en (X,d) si

$$x \in U \Rightarrow \exists r>0 \text{ t.q } B(x,r) \subseteq U$$

Dado x_0, un entorno de x_0 es cualquier abierto t.q $x_0 \in U$

Un subconjunto $E \subseteq X$ es cerrado si

$$\forall \{x_n\} \subset E, \ \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow x_0 \in E$$

Los únicos conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente en $\mathbb{R}^n$ son el vacío ($\emptyset$) y $\mathbb{R}^n$

Prop Un subconjunto $C \subseteq X$ es cerrado $\Leftrightarrow X \setminus C$ es abierto

1.2.5 - Continuidad

Def: Decimos que f es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q.

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

Prop: Si f es continua y g es continua entonces $g \circ f$ es continua

Teorema Son equivalentes

1) f es continua
2) $V \subseteq X'$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto
3) $C \subseteq X'$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado
4) $\{x_n\} \subset X$, $\{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x_0)$

Prop $f: (X, d) \to (\mathbb{R}^k, \|\ \|_\infty)$, $x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$

es continua si y sólo si $\forall k$ f_k es continua

1.2.6 - Compacidad

Def: Dado $K \subseteq X$, los recubrimientos de K son las familias $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X t.q. $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

Teorema Dado $K \subseteq X$, son equivalentes

(1) Propiedad de sucesiones o de Bolzano-Weierstrass. Toda sucesión $\{x_n\} \subset K$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ convergente a algún punto de K

(2) Propiedad de recubrimiento o de Heine-Borel. Todo recubrimiento de K por abiertos de X tiene una subfamilia finita $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ que también recubre K, es decir $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$

Def: Un subconjunto compacto es cualquier $K \subset X$ que cumple estas propiedades

Prop: Un subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado

Si $f: X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto $\Rightarrow f(K) \subseteq Y$ compacto

1.2.7 - Funciones Lipschitzianas

Def Dada $f: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$, decimos que $M > 0$ es una constante de Lipschitz para f si

$$d_2(f(p), f(q)) \leq M \cdot d_1(p, q)$$

Decimos que f es Lipschitziana si existe una cte. de Lipschitz para ella

Prop: Toda aplicación Lipschitziana es continua

1.2.8.- Normas equivalentes

Def: Dos normas $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ son equivalentes si $\exists c, C > 0$ t.q

$$c\|v\|' \leq \|v\| \leq C\|v\|' \quad \forall v \in V$$

Teorema: En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes entre sí

1.2.9.- Conexión

Def: Un camino es cualquier ap. continua $\alpha: I \to X$ cuyo dominio I es un intervalo de la recta real

Un subcjto $E \subseteq X$ es conexo por caminos si para cada par $p, q \in E$ se puede unir por un camino en E, es decir:

$$\exists \alpha(t): [0,1] \to E \text{ t.q } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha(1) = q$$

1.3.- Extra

1) La unión finita ó infinita de abiertos es un abierto
2) La intersección finita de abiertos es abierto
3) La unión finita de cerrados es un cerrado
4) La intersección finita o infinita de cerrados es un cerrado

Interior de E: $(\mathring{E})$: $x \in \mathring{E}$ si $\exists r > 0$ t.q $B(x,r) \subseteq E$

Cierre de E $(\bar{E})$: $x \in \bar{E}$ si $\exists \{x_n\} \subseteq E$ t.q $\{x_n\} \to x$