

En este capítulo vamos a estudiar cómo se puede hacer integración con funciones multivariantes. Estudiaremos los siguientes temas:

- 3.1. Integral de Riemann, teorema de Fubini.
- 3.2. Teorema del cambio de variables.
- 3.3. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en \mathbb{R}^2 . Supongamos $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$. Hay una región $S \subset \mathbb{R}^3$ acotada por:

- por arriba por la gráfica de f , y por abajo por el rectángulo R ;
- por los planos $x = a$ y $x = b$,
- y por los planos $y = c$, e $y = d$:

¿Cuál es el volumen de S ? De momento lo denotamos como

$$\int \int_R f(x, y) dA, \quad \text{ó} \quad \int \int_R f(x, y) dx dy.$$

Principio de Cavalieri

Sea S un sólido, y, para $a \leq x \leq b$, sea P_x una familia de planos paralelos tal que

1. S está entre P_a y P_b ;
2. el área de la sección transversal de S cortada por el plano P_x está dada por una función $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

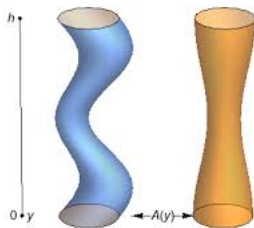
$$\int_a^b A(x) dx.$$

Demostración: Tomamos una partición de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Si $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

es el volumen de un cilindro que aproxima el volumen de la parte de S comprendida entre los planos P_{x_i} y $P_{x_{i+1}}$. La suma de todos esos cilindros es una suma de Riemann para la función $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$, así que en el límite

$$V(S) = \lim \sum A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b A(x) dx.$$



Integrales iteradas

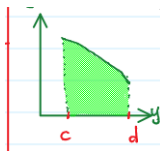
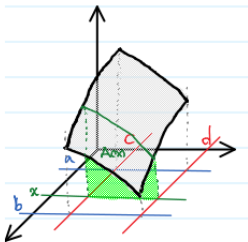
Usando el principio de Cavalieri podemos calcular el volumen de la región S de dos formas diferentes:

- Si seccionamos S con planos de la forma $x = x_0$, donde $a \leq x_0 \leq b$, el área de la sección es la integral de $y \rightarrow f(x_0, y)$ en el intervalo $[c, d]$, así que

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy,$$

y por el principio de Cavalieri,

$$V(S) = \int \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$



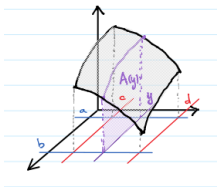
Integrales iteradas

- Si seccionamos S con planos $y = y_0$, donde $c \leq y_0 \leq d$, el área de la sección es la integral de $x \rightarrow f(x, y_0)$ en el intervalo $[a, b]$, así que

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx,$$

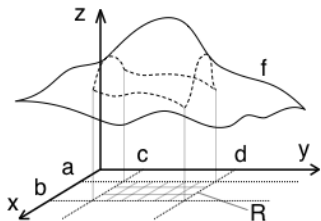
y por el principio de Cavalieri,

$$V(S) = \int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

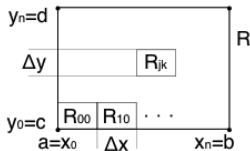


3.1. Integral de Riemann, teorema de Fubini

Para empezar, veamos cómo se puede calcular el volumen que hay “bajo” la gráfica de una función de dos variables. Más precisamente, sea $f(x, y) \geq 0$, sea R un rectángulo con lados paralelos a los ejes, $R = \{(x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$, y sea $B = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, z \in [0, f(x, y)]\}$.



¿Cómo podemos calcular el volumen de B ? Aproximándolo por uniones de paralelepípedos con base rectangular en R . Dividimos R en rectángulos similares cada vez más pequeños, para aproximar cada vez mejor el volumen.



Para cualquier selección de puntos $c_{jk} \in R_{jk}$, $j, k \in [0, n-1]$, la suma $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta_x \Delta_y$ es una aproximación del volumen de B . Nótese que S_n tiene sentido incluso si $f < 0$.

La suma S_n se llama **suma de Riemann** de f . Una pregunta natural es ¿Cómo se comporta S_n cuando $n \rightarrow \infty$?

3.1.1. Integral de Riemann

Definición (Integrabilidad de Riemann para funciones de 2 variables)

Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^2 y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si la sucesión (S_n) converge a un límite S cuando $n \rightarrow \infty$, y este límite es el mismo para cualquier selección de puntos $c_{jk} \in R_{jk}$, entonces decimos que f es **integrable sobre R** y escribimos $S = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy$.

Se puede abreviar la notación escribiendo $\int_R f \, dA$, o incluso $\int_R f$.
(Aquí dA denota el elemento infinitesimal de área $dx \, dy$.)

En la práctica queremos criterios simples para decidir si una función es integrable. El resultado siguiente nos da una condición suficiente que resulta ser muy útil.

Teorema

Cualquier función continua $f(x, y)$ definida en un rectángulo cerrado es integrable.

No obstante, a menudo queremos integrar sobre conjuntos más generales que rectángulos, e integrar incluso ciertas funciones discontinuas.

3.1.1. Integral de Riemann

Para tales integraciones más generales, nos ayudará el resultado siguiente.

Teorema

Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^2 y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si el conjunto de puntos donde f es discontinua es una unión de un número finito de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable sobre R .

Hemos definido la integral como límite de sumas de Riemann. De esta definición podemos deducir varias propiedades de la integral:

- Linealidad: para $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera, tenemos
$$\iint_R (\alpha f + \beta g) \, dA = \alpha \iint_R f \, dA + \beta \iint_R g \, dA.$$
- Monotonía: $(\forall (x, y), f(x, y) \geq g(x, y)) \Rightarrow \iint_R f \, dA \geq \iint_R g \, dA.$
- Aditividad: si Q es una unión de rectángulos $Q = \bigcup_i R_i$ tales que $\forall i \neq j, R_i^\circ \cap R_j^\circ = \emptyset$, entonces tenemos
$$\iint_Q f \, dA = \sum_i \iint_{R_i} f \, dA.$$

3.1.2. Teorema de Fubini

¿Cómo podemos calcular tales integrales en casos concretos?

Una herramienta muy útil para esto es el resultado siguiente, que nos permite evaluar una doble integral calculando dos integrales sucesivas.

Teorema de Fubini (para funciones continuas sobre rectángulos)

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en \mathbb{R}^2 y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

Este teorema se extiende muy naturalmente a funciones acotadas más generales.

Teorema de Fubini (para ciertas funciones discontinuas)

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en \mathbb{R}^2 y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada tal que las discontinuidades de f forman una unión de un número finito de gráficas de funciones continuas. Entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

3.1.2. Teorema de Fubini

Ejemplo: calcular $\iint_R (x^2 + y) dA$ para $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Podemos hacerlo de dos formas distintas: por un lado, la integral es

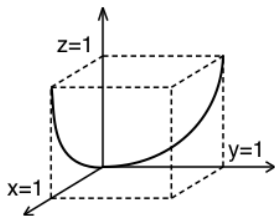
$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 + y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{3} + y \, dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Ahora calculemos la integral en el otro orden:

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 + y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Ejemplo: calcular el volumen del sólido acotado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.

Miremos primero la región en cuestión:



Tenemos $\iint_R x^2 + y^4 dA$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^4 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^4 x \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} + y^4 \, dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

3.1.2. Teorema de Fubini

Ejemplo: Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Calcule $\iint_R y e^{xy} dA$.

Solución: La función $f(x, y) = y e^{xy}$ es continua en la región R , por tanto podemos aplicar el Teorema de Fubini para funciones continuas:

Primer método:

$$\begin{aligned}\iint_R y e^{xy} dA &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy = \int_0^1 [e^{xy}]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (e^y - 1) dy = [e^y - y]_0^1 = e - 2.\end{aligned}$$

Segundo método:

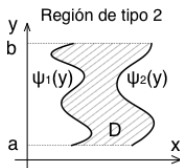
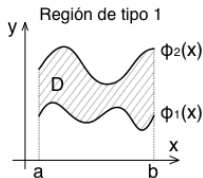
$$\iint_R y e^{xy} dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 y e^{xy} dy \right) dx = \dots$$

esta integral se resuelve por partes y, por tanto, este camino es más largo

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Vamos a ver cómo la definición de integrales vista anteriormente se puede extender para tomar integrales sobre regiones (dominios) más generales que rectángulos. Para esto, estudiaremos regiones delimitadas por gráficas de *funciones continuas*.

Consideremos las funciones $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$, con $\phi_1 \leq \phi_2$, o lo mismo cambiando x, y , es decir $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1 \leq \psi_2$.



Llamaremos las regiones de tipo 1 y 2 *regiones elementales*. Estas son las regiones sobre las cuales queremos integrar.

Es importante observar que en las regiones elementales, el borde de la región definida D , a saber ∂D , es una curva continua. Gracias a esto podremos aplicar los teoremas anteriores sobre integrales en un rectángulo, como lo vamos a explicar.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

1. Llamamos **regiones de Tipo 1** a aquellas que pueden escribirse como

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

$$\iint_{D_1} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2. Llamamos **regiones de Tipo 2** a aquellas que pueden escribirse:

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

$$\iint_{D_2} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

3. Llamamos **regiones de Tipo 3** a aquellas que son de *Tipo 1* y *Tipo 2* simultáneamente.

Consejo: Cuando una de las integrales iteradas es más fácil que la otra interesa aplicar un **cambio en el orden de integración**.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Sea $f(x, y)$ una función continua definida sobre una región elemental D .

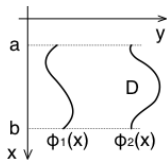
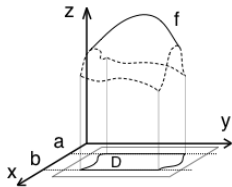
Sea R un rectángulo con $R \supset D$. Sea $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$

Los teoremas vistos implican que f^* es integrable. La propiedad de aditividad justifica entonces la definición siguiente:

La integral $\iint_D f \, dA$ se puede definir por $\iint_D f \, dA = \iint_R f^*(x, y) \, dA$.

Veamos ahora cómo hacer el cálculo de esta integral en concreto.

Vamos a centrarnos en el caso de regiones de tipo 1.



Para un x fijo en $[a, b]$, la variable y se mueve entre $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$.

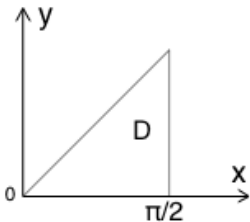
Esto nos dice que $\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

De modo similar, si la región es de tipo 2, la integral será de la forma

$$\int_a^b \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Ejemplo: Hallar $\iint_D x^3 y + \cos(x) dA$, donde D es el triángulo $\{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x\}$. Dibujemos primero la región:



Para cada x fijado entre 0 y $\pi/2$, la variable y crece de 0 a x .

Tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D x^3 y + \cos(x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x x^3 y + \cos(x) dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[x^3 \frac{y^2}{2} + y \cos(x) \right]_0^x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{x^5}{2} + x \cos(x) dx = \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx = \frac{\pi^6}{2^8 \cdot 3} + \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Integrando por partes, esto es } \frac{\pi^6}{2^8 \cdot 3} + \left[x \sin(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Interpretación de la integral doble como área de una región:

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada. Entonces

$$\text{Área}(D) = |D| = \iint_D 1 \, dA$$

Interpretación de la integral doble como volumen de un sólido: Sea

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, y el sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z \in [0, f(x, y)]\}$

$$\text{Volumen}(W) = \iint_D f(x, y) \, dA$$

Teorema del valor medio para integrales dobles:

Sean f continua en la región acotada $D \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = f(x_0, y_0) |D|$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: Dibuje y halle el área de la región D delimitada por las parábolas $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$, con $x, y \geq 0$.

Solución: Hallamos primero los puntos de corte entre las gráficas $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$:

$$3x^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

como nos han dicho que $x, y \geq 0$, la solución válida es $x = 1$ y, por el tanto, el punto de corte buscado es $(x, y) = (1, 3)$.

Región de Tipo 1:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 3x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \iint_D dA = \int_0^1 \left(\int_{3x^2}^{4-x^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (4 - 4x^2) dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: Halle el volumen del tetraedro T acotado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución: El plano $x + y + z = 1$ lo escribimos como la gráfica de la función $z = f(x, y) = 1 - x - y$, entonces T se describe como:

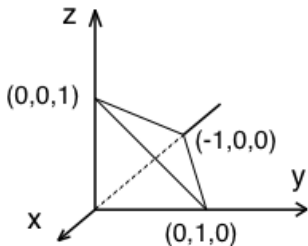
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, z \in [0, \underbrace{1 - x - y}_{f(x, y)}]\}$$

donde: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + x\}$.

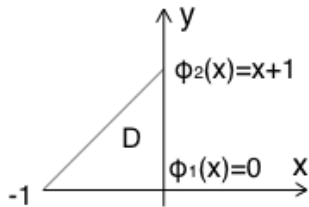
$$\begin{aligned}\text{Volumen}(T) &= \iint_R f(x, y) dA = \iint_R (1 - x - y) dA = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1+x} (1 - x - y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1+x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{-1}{2} \left[\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: hallar el volumen V del tetraedro acotado por los cuatro planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $y - x + z = 1$.



Región de
integración \rightarrow



El volumen V es la integral de la función $z = f(x, y) = x - y + 1$ sobre D .
Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - y + x) \, dA = \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (1 - y + x) \, dy \, dx = \int_{-1}^0 \left[y - \frac{y^2}{2} + xy \right]_0^{1+x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^2}{2} \, dx = \left[\frac{(1+x)^3}{6} \right]_{-1}^0 = 1/6. \end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

A continuación, vamos a generalizar a integrales triples todo lo que hemos visto acerca de integrales dobles. El método será similar y se basará en una generalización natural de las sumas de Riemann ya vistas.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Sea f una función real de variables x, y, z , definida sobre una región $B = [a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1]$. En este caso, las sumas de Riemann son de la forma siguiente:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta v.$$

Una tal suma se obtiene dividiendo cada lado de B en n intervalos iguales. Sean B_{ijk} , $i, j, k \in [0, n-1]$ los n^3 paralelepípedos resultantes que dividen B , todos de volumen Δv . Elegimos un punto c_{ijk} en cada B_{ijk} .

Del mismo modo que para una integral doble, tenemos lo siguiente.

Si S_n converge cuando $n \rightarrow \infty$ y el límite no depende de la elección de los puntos c_{ijk} , decimos que f es **integrable** sobre B .

En este caso, el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se denota como sigue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_B f \, dV = \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Del mismo modo que para la doble integral, tenemos un resultado que nos permite integrar funciones continuas y ciertas funciones discontinuas.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

Sea $B = [a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1]$ un paralelepípedo rectangular en \mathbb{R}^3 , y sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada cuyas discontinuidades están contenidas en una unión finita de gráficas de funciones continuas (como $x = a(y, z)$, $y = b(x, z)$, $z = c(x, y)$). Entonces f es integrable sobre B .

Observación: Si f es continua en B , es integrable.

El teorema de Fubini se extiende a estas triple integrales, de modo que podemos permutar el orden de las integraciones en $\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Teorema de Fubini

Si $f : Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en Q y continua en salvo por un conjunto finito de superficies como antes, entonces f **es integrable** y se verifica

$$\begin{aligned}\iiint_Q f(x, y, z) dV &= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz = \dots\end{aligned}$$

De hecho, los puntos suspensivos incluyen cualquiera de los seis posibles órdenes en que queramos hacer las integrales iteradas.

Cuidado: esto no es así cuando el dominio de integración es diferente a un producto de intervalos.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: Si B es el paralelepípedo $B = [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$, queremos evaluar

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz.$$

Por el teorema de Fubini, esta integral es igual a

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_0^1 (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz$$

, que iterando integrales, queda

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left[\frac{(x+2y+3z)^3}{3} \right]_0^1 dy dz = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{3} ((1+2y+3z)^3 - (2y+3z)^3) dy dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24} [(1+2y+3z)^4 - (2y+3z)^4]_{-\frac{1}{2}}^0 dz = \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{1}{3}} ((3z+1)^4 - 2(3z)^4 + (3z-1)^4) dz = \\ &= \frac{1}{24 \cdot 15} [(3z+1)^5 - 2(3z)^5 + (3z-1)^5]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{24 \cdot 15} (2^5 - 2) = 1/12. \end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: integrar e^{x+y+z} sobre $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^1 [e^{x+y+z}]_0^1 \, dy \, dz \\&= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) \, dy \, dz = \int_0^1 [e^{1+y+z} - e^{y+z}]_0^1 \, dz \\&= \int_0^1 (e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z) \, dz = [e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z]_0^1 \\&= e^3 - 2e^2 + e - e^2 + 2e - 1 = e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e - 1)^3.\end{aligned}$$

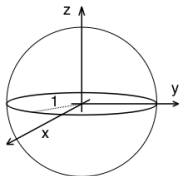
3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Como hicimos con integrales dobles, vamos a ver ahora como calcular integrales triples en regiones más generales que los paralelepípedos rectangulares $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1]$. Más precisamente, vamos a definir lo que llamaremos regiones elementales en \mathbb{R}^3 . Estas son regiones que se obtienen restringiendo sucesivamente cada una de las tres variables.

Definición (Regiones de tipo 1 en \mathbb{R}^3)

Decimos que $W \subset \mathbb{R}^3$ es una **región de tipo 1** si existen $a, b \in \mathbb{R}$, funciones continuas $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una región $D \subset \mathbb{R}^2$ de tipo 1, y funciones continuas $\gamma_1, \gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $\gamma_1(x, y) \leq \gamma_2(x, y)$, tales que tengamos $W = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)], z \in [\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y)]\}$.

Ejemplo: consideremos la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



Podemos definirla como la región

$$\{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Aquí la región D es el disco $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Diremos que W es de tipo 1 también si en la previa definición se intercambian y, x y si la región D es de tipo 2. Es decir, que en general **W es de tipo 1 si se obtiene acotando z entre 2 funciones continuas de x, y .**

Del mismo modo que para integrales dobles, si W es una región elemental del tipo visto anteriormente, se tiene

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

En particular, si ponemos $f = 1$ en todo W , entonces esta integral es el volumen de W .

Llamaremos regiones de tipo 2 las que se obtienen de forma similar pero acotando x entre dos funciones continuas de y, z , y regiones de tipo 3 las que se obtienen de forma similar pero acotando y entre dos funciones continuas de x, z .

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Llamamos **regiones de Tipo 1** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dA(x, y)$$

Llamamos **regiones de Tipo 2** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, \chi_1(y, z) \leq x \leq \chi_2(y, z)\}$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\chi_1(y, z)}^{\chi_2(y, z)} f(x, y, z) dx dA(y, z)$$

Llamamos **regiones de Tipo 3** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, \gamma_1(x, z) \leq y \leq \gamma_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{W_3} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\gamma_1(x, z)}^{\gamma_2(x, z)} f(x, y, z) dy dA(x, z)$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Interpretación geométrica de la integral triple

Si $W \subset \mathbb{R}^3$ es una región acotada, entonces su volumen se calcula como

$$\text{Volumen}(W) = \iiint_W 1 \, dV$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: Calcular el volumen de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Se trata de calcular $\iiint_W 1 \, dx \, dy \, dz$ con W la región vista anteriormente, es decir $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx$. Esto es

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [z]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dy \, dx.$$

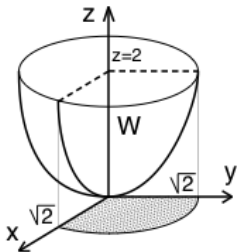
Para calcular la primitiva de $\sqrt{1-x^2-y^2}$, nótese que para todo $a \in \mathbb{R}$ tenemos $\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{a^2\pi}{2}$, pues esta integral es el área del semidisco de radio a centrado en $(0,0)$.

Sustituyendo $a^2 = 1 - x^2$, obtenemos que la integral $\iiint_W 1 \, dx \, dy \, dz$ es igual a $2 \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)\pi}{2} dx = \pi \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \pi [x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}$.

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, y contenida en el primer octante ($x, y, z \geq 0$). Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$, y dibujar la región W .

Representemos primero la región.



¿Cómo describimos la región W ?

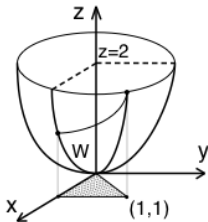
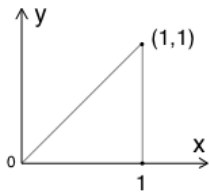
Tenemos $W = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos pues } \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \left[(2 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3} (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{5} (2 - x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2^{7/2}}{15}. \end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo: Calcular $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx$, y representar la región de integración.

Representemos primero la región.



La región es
 $W = \{(x, y, z) :$
 $0 \leq x \leq 1,$
 $0 \leq y \leq x,$
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$

Tenemos

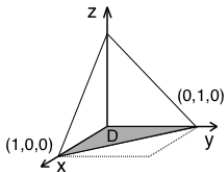
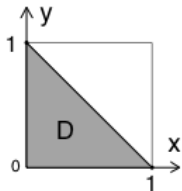
$$\begin{aligned} \iiint_W 1 dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{12} \right]_0^1 = 2/3. \end{aligned}$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Ejemplo:

Representar $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 - (x + y), & x + y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Determinar el conjunto de discontinuidades de f , justificar la existencia de la integral, y calcularla.



La función es continua.
Por lo tanto es integrable.

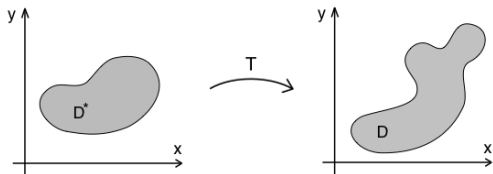
Tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D (1 - x - y) \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \left[\frac{-(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = 1/6. \end{aligned}$$

3.2. La fórmula del cambio de variables

Hasta ahora hemos podido calcular integrales tomadas sobre regiones elementales. A continuación veremos como se puede calcular integrales más generales, usando cambios de variables.

Para describir esto, sea D^* un abierto en \mathbb{R}^2 , sea una función $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable, y escribamos $D = T(D^*)$.



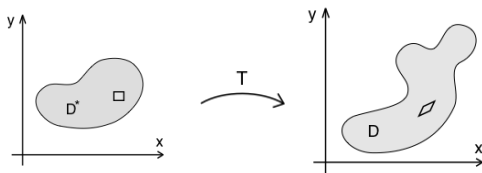
Se dice que T es *biyectiva* si $\forall (x, y) \in D, \exists! (u, v) \in D^*$ tal que $T(u, v) = (x, y)$.

Nuestro objetivo es, dada una integral, aplicar una transformación T de este tipo para transformar la región de integración en una más simple.

Dicho de otro modo, dadas dos regiones elementales D, D^* en \mathbb{R}^2 tales que $T(D^*) = D$ para una función diferenciable T , y dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, queremos expresar $\iint_D f(x, y) dA$ como una integral de $f \circ T$ sobre D^* .

3.2. La fórmula del cambio de variables

Un hecho que hay que tomar en cuenta es que la transformación T transforma también los elementos infinitesimales dA que aparecen en la integral original. Para ver esto, recordamos que, de la definición de diferenciabilidad se deduce que la función T se aproxima localmente en cada punto $x_0 \in D^*$ por la transformación lineal definida por la matriz jacobiana $DT|_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u} & \frac{\partial T_1}{\partial v} \\ \frac{\partial T_2}{\partial u} & \frac{\partial T_2}{\partial v} \end{pmatrix}$. Si aplicamos esta transformación lineal a un cuadrado en \mathbb{R}^2 , el volumen de la imagen es el volumen original multiplicado por $|\det(DT)|$. Por lo tanto el volumen del elemento infinitesimal dA en x_0 cambia por un factor $|\det(DT)(x_0)|$.



$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$
 \Rightarrow el *determinante jacobiano*
 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det(DT(u, v))$ es
la función que nos permite
tomar en cuenta cómo cam-
bia el elemento de área.

3.2. La fórmula del cambio de variables

Definición (Determinante jacobiano)

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ una transformación de clase \mathcal{C}^1 dada por $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. El **jacobiano** de T , denotado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \text{ es el determinante de } DT, \text{ a saber } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

(Cuidado: no confundir el jacobiano con la matriz jacobiana). Con esto ya podemos enunciar el resultado principal acerca de cambios de variables.

Teorema (Cambio de variables para una doble integral)

Sean D , D^* dos regiones elementales en \mathbb{R}^2 , y sea $T : D^* \rightarrow D$ una aplicación biyectiva de clase \mathcal{C}^1 . Entonces, para cualquier función integrable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv,$$

donde $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

3.2. La fórmula del cambio de variables

Para integrales triples podemos también querer hacer un cambio de variables. La teoría es similar a la de integrales dobles, pero ahora hay que tomar en cuenta cómo cambia el elemento infinitesimal de *volumen* dV bajo el cambio. Como en el caso de integrales dobles, este cambio de dV se toma en cuenta con un determinante jacobiano, que aquí será un determinante de una matriz 3×3 . Obtenemos el teorema siguiente.

Teorema (Cambio de variables para una integral triple)

Sean D , D^* dos regiones elementales en \mathbb{R}^3 , y sea $T : D^* \rightarrow D$ una aplicación biyectiva de clase \mathcal{C}^1 . Entonces, para cualquier función integrable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ es igual a

$$\iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw,$$

donde $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ es el **determinante jacobiano** $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$

3.3. Coordenadas polares, cilíndricas, y esféricas

Vamos a estudiar algunos de los cambios de variables más habituales.

1) Cambio a coordenadas polares: dado por el sistema $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$.

El jacobiano es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$.

Ejemplo: Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ y } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ con $a < b$. Halle $\iint_D e^{x^2+y^2} dA$.

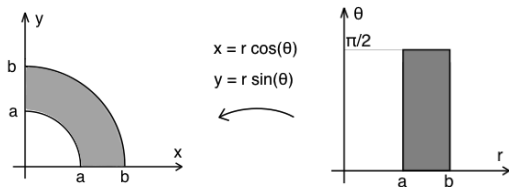
Solución: La región D está dada en polares como $r \in [a, b]$ y $\theta \in [0, \pi/2]$.

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dA &= \int_0^{\pi/2} \int_a^b \underbrace{e^{r^2}}_{f(T(r,\theta))} \underbrace{r}_{|JT|} dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_a^b e^{r^2} r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} [e^{r^2}]_a^b = \frac{\pi}{4} (e^{b^2} - e^{a^2}) \end{aligned}$$

3.3. Coordenadas polares, cilíndricas, y esféricas

Ejemplo: evaluar $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \text{ con } 0 < a < b.$$



Esta segunda región es de un tipo que sabemos tratar fácilmente.

Tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x^2 + y^2) dy dx &= \int_a^b \int_0^{\pi/2} \log(r^2) r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b r \log(r^2) dr \\ &= \pi \int_a^b r \log(r) dr. \end{aligned}$$

Usando integración por partes, vemos que esta integral es

$$\begin{aligned} \pi \left(\left[\frac{r^2}{2} \log(r) \right]_a^b - \int_a^b \frac{r}{2} dr \right) &= \pi \left[\frac{r^2}{2} \log(r) - \frac{r^2}{4} \right]_a^b \\ &= \pi \left(\frac{b^2}{2} \log(b) - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} \log(a) + \frac{a^2}{4} \right). \end{aligned}$$

3.3. Coordenadas polares, cilíndricas, y esféricas

2) Cambio a coordenadas cilíndricas: dado por el sistema $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$.

El jacobiano esta vez es el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) = r. \end{aligned}$$

3.3. Coordenadas polares, cilíndricas, y esféricas

3) Cambio a coordenadas esféricas: dado por
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\phi) \end{cases} .$$

De nuevo el jacobiano $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ es el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{vmatrix} \\ &= -r^2 \sin(\phi)^3 \cos(\theta)^2 - r^2 \sin(\theta) \sin(\phi) (\sin(\theta) \cos(\phi)^2 + \sin(\theta) \sin(\phi)^2) \\ &\quad - r^2 \cos(\theta)^2 \cos(\phi)^2 \sin(\phi) \\ &= -r^2 \sin(\phi) \cos(\theta)^2 - r^2 \sin(\phi) \sin(\theta)^2. \\ &= -r^2 \sin(\phi). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8: Resolver $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dV$ donde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ usando:

1. el cambio a *cilíndricas*.
2. el cambio a *esféricas*.

Cilíndricas: donde $1/2 \leq z \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq r \leq \sqrt{1 - z^2}$

$$\begin{aligned}
 & \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \underbrace{(r^2 + z^2)^{-1/2}}_{f(T(r, \theta, z))} \underbrace{r}_{|JT|} dr dz d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (r^2 + z^2)^{-1/2} r dr dz \right) \\
 &= 2\pi \int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{2} \frac{(r^2 + z^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz = 2\pi \int_{1/2}^1 (1 - z) dz = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Esféricas: donde $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/3]$ y $\frac{1}{2\cos\phi} \leq r \leq \sqrt{1-z^2}$

$$\begin{aligned}
 & \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 \underbrace{\frac{1}{r}}_{f(T(r,\theta,\phi))} \underbrace{(r^2 \sin\phi)}_{|JT|} dr d\phi d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 r \sin\phi dr d\phi \right) \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cos^2\phi} \right) \sin\phi d\phi \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{2} [-\cos\phi]_0^{\pi/3} + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{-\cos\phi} \right]_0^{\pi/3} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{1/2} + 1 \right) \right) = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$