Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

**Hoja 5**

## Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

**Solución:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0, \qquad \nexists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

**Desarrollo:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

Por otro lado si $(x,y) \neq (0,0)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Gracias a esto ya podemos calcular lo que nos falta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \nexists$$

2.- Sea

$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = 0\,.$$

Compruébese que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de segundo orden en el origen?

**Solución:** $f$ no es $C^2$ en un entorno del origen.

**Desarrollo:**

Para calcular las derivadas parciales mixtas primero tenemos que calcular lo siguiente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

y si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Con esto obtenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Lo único que podemos decir es que la función $f$ no es $C^2$ en un entorno del origen, porque si lo fuera las derivadas parciales mixtas deberían coincidir.

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1)$ , sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$$

**Solución:** $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1) = 8.$

**Desarrollo:**

Viendo $x$ e $y$ como una función de $u$ y $v$, podemos escribir $x(u,v) = u + v$ e $y(u,v) = uv^2$. Con esto, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right)(1,1) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)(1,1)$$

Pero sabemos que $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) = 1$ y $\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) = v^2$, así (usando también $\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) = 1$ y $\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) = 2uv$ y los datos que nos da el problema)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right)(1,1) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + v^2\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\right)(1,1) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(1,1),y(1,1))\frac{\partial x}{\partial v}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(1,1),y(1,1))\frac{\partial y}{\partial v}(1,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x(1,1),y(1,1)) + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(1,1),y(1,1))\frac{\partial x}{\partial v}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(1,1),y(1,1))\frac{\partial y}{\partial v}(1,1) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) \\
&= 1 + 2 + 2 + 1 + 2 \\
&= 8.
\end{aligned}$$

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x,y) = x\,e^{x+y}. \qquad (b) \quad f(x,y) = \operatorname{sen} x\,y + \cos x\,y. \qquad (c) \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}.$$

**Solución:**

$(a)$ $f(x,y) = x + x^2 + xy + o((x^2+y^2))$ $(b)$ $f(x,y) = 1 + xy + o((x^2+y^2))$ $(a)$ $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + o((x^2+y^2))$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

**Desarrollo:**

Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de la función $f$ necesitamos calcular el valor de la función en el origen así como el valor de todas las derivadas parciales de orden 1 y 2 en el origen. Recordar que la fórmula de Taylor para una función $f$ que va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ se escribe del siguiente modo

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right) + R_2$$

$(a)$ Primero $f(0,0) = 0$, además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+x)e^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2+x)e^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (1+x)e^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+x)e^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^{x+y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

(Fijaos que como $f$ es $C^2$ ya sabíamos de antemano que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0,0)$ de la función $f$ será

$$f(x,y) = x + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy\right) + R_2 = x + x^2 + xy + R_2.$$

(b) Primero $f(0,0)=1$, además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cos(xy) - y\sin(xy) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\cos(xy) - x\sin(xy) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -y^2\sin(xy) - y^2\cos(xy) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \cos(xy) - \sin(xy) - xy\sin(xy) - xy\cos(xy)) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \cos(xy) - \sin(xy) - xy\sin(xy) - xy\cos(xy)) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^2\sin(xy) - x^2\cos(xy) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0.
\end{aligned}$$

(Fijaos que como $f$ es $C^2$ ya sabíamos de antemano que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0,0)$ de la función $f$ será

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(2xy) + R_2 = 1 + xy + R_2.$$

(c) Primero $f(0,0)=1$, además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2(1+2x^2)e^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2(1+2y^2)e^{x^2+y^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2.
\end{aligned}$$

(Fijaos que como $f$ es $C^2$ ya sabíamos de antemano que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0,0)$ de la función $f$ será

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2\right) + R_2 = 1 + x^2 + y^2 + R_2.$$

## 5.- Comprobar que la función $f(x,y)=e^y\,\cos x$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

**Desarrollo:**

Recordemos que un punto $(x_0,y_0)$ tal que $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$, se denomina punto crítico. Por tanto lo que haremos será calcular el gradiente de $f$ e igualarlo al vector cero.

$$\nabla f(x,y) = \left(-e^y\sin(x)\,,\,e^y\cos(x)\right),$$

Así

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -e^y\sin(x)=0\\ e^y\cos(x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sin(x)=0\\ \cos(x)=0\end{array}\right.$$

y no existe ningún número real que cumpla estas dos condiciones.

## 6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2+x\,y-2\,x-4\,y+10.$

(b) $f(x,y)=3\,x^2-4\,y^2+x\,y.$

(c) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

(d) $f(x,y)=3-x^2-y^2-x^4y^2.$

(e) $f(x,y)=x\log(x^2+y^2).$

(f) $f(x,y)=x\,y\,e^{x-y}.$

(g) $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}.$

(h) $f(x,y)=e^{xy}+x^2.$

**Solución:**

(a) $(0,2)$ mínimo local

(b) $(0,0)$ punto de silla

(c) $(0,0)$ punto de silla y $(1,1)$ mínimo local

(d) $(0,0)$ máximo absoluto

(e) $(0,\pm1)$ puntos de silla, $\left(e^{-1},0\right)$ mínimo local y $\left(-e^{-1},0\right)$ máximo local

(f) $(0,0)$ punto de silla y $(-1,1)$ mínimo local

(g) $(1,1)$ mínimo local

(h) $(0,0)$ punto de silla

**Desarrollo:**

($a$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = (2x+y-2\,,\, 2y+x-4)\,,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-2=0 \\ 2y+x-4=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=2 \\ x+2y=4 \end{array} \right.$$

Por consiguiente el único punto crítico es el punto $(0,2)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora sus menores principales son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$ y $\det(Hf(0,0)) = 3 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un mínimo local.

($b$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = (6x+y\,,\, -8y+x)\,,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x+y=0 \\ x-8y=0 \end{array} \right.$$

Por consiguiente el único punto crítico es el punto $(0,0)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ahora el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0,0)$ es $\det(Hf(0,0)) = -49 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un punto de silla.

($c$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2-3y\,,\, 3y^2-3x\right)\,,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=x^2 \\ x=y^2 \end{array} \right.$$

Por consiguiente los puntos críticos de la función $f$ serán $(0,0)$ y $(1,1)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empecemos por el punto $(0,0)$, el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0,0)$ es $\det(Hf(0,0)) = -9 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un punto de silla.

Por otro lado, para el punto $(1,1)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$ y $\det(Hf(1,1)) = 27 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1,1)$ es un mínimo local.

($d$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left(-2x-4x^3y^2\,,\, -2y-2x^4y\right)\,,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-4x^3y^2=0 \\ -2y-2x^4y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1=2x^2y^2 \\ -1=x^4 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad x=y=0.$$

Por consiguiente el único punto crítico de la función $f$ será el $(0,0)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-12x^2y^2 & -8x^3y \\ -8x^3y & -2-2x^4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0,0)$ es $\det(Hf(0,0)) = 4 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$, el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un máximo local. Además viendo la función se observa rápidamente que $f(x,y) \leq 3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(0,0) = 3$ por tanto $(0,0)$ es en realidad un máximo global (absoluto).

$(e)$ Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\,,\ \frac{2xy}{x^2+y^2}\right).$$

Aquí vemos una cosa diferente, el gradiente de nuestra función no está definido en el punto $(0,0)$, por tanto este punto lo tenemos que dejar fuera del análisis. Así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \log(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) \\ 2xy = 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema(dejando fuera el punto $(0,0)$) obtenemos que los puntos críticos son $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ y $(-e^{-1},0)$. Ahora como para cada punto crítico la función es de clase $C^2$ en un abierto (suficientemente pequeño) que contiene al punto, podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} + \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2x}{x^2+y^2} - \dfrac{4y^3x}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ Hf(e^{-1},0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix} & Hf(-e^{-1},0) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix} \end{array}$$

Empecemos por los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ los determinantes de las matrices Hessianas en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ son $\det(Hf(0,1)) = \det(Hf(0,-1)) = -4 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,1)$ y $(0,-1)$ son puntos de silla.

Por otro lado, para el punto $(e^{-1},0)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1},0) = 2e > 0$ y $\det\big(Hf(e^{-1},0)\big) = 4e^2 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(e^{-1},0)$ es un mínimo local.

Por último, para el punto $(-e^{-1},0)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^{-1},0) = -2e < 0$ y $\det\big(Hf(-e^{-1},0)\big) = 4e^2 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(-e^{-1},0)$ es un máximo local.

$(f)$ Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y}(y+xy)\,,\ e^{x-y}(x-xy)\right),$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{x-y}(y+xy) = 0 \\ e^{x-y}(x-xy) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -xy \\ x = xy \end{array}\right.$$

Por consiguiente los puntos críticos de la función $f$ serán $(0,0)$ y $(-1,1)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-y}(2y+xy) & e^{x-y}(1+x)(1-y) \\ e^{x-y}(1+x)(1-y) & -e^{x-y}x(2-y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Empecemos por el punto $(0,0)$, el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0,0)$ es $\det(Hf(0,0)) = -1 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un punto de silla.

Por otro lado, para el punto $(1,1)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = e^{-2} > 0$ y $\det(Hf(-1,1)) = e^{-4} > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(-1,1)$ es un mínimo local.

$(g)$ Como nuestra función $f$ no está definida en los puntos $(x,y)$ tales que $x=0$ o bien $y=0$, no consideraremos dichos puntos en nuestro análisis. Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{1}{x^2}\,,\ x - \frac{1}{y^2}\right).$$

Aquí vemos una cosa diferente, el gradiente de nuestra función no está definido en el punto $(0,0)$, por tanto este punto lo tenemos que dejar fuera del análisis. Así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x = \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el único punto crítico es el punto $(1,1)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en un abierto (suficientemente pequeño) que contiene al punto $(1,1)$, podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en el $(1,1)$,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales de la matriz Hessiana de $f$ en el punto $(1,1)$ son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$ y $\det(Hf(1,1)) = 3 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1,1)$ es un mínimo local.

($h$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy} + 2x \, , \, xe^{xy}) \, ,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ye^{xy} + 2x = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \dfrac{-2x}{e^{xy}} \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Por consiguiente el único punto crítico de la función $f$ será el $(0,0)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en el $(0,0)$,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} + 2 & e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}(1+xy) & x^2e^{xy} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0,0)$ es $\det(Hf(0,0)) = -1 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0,0)$ es un punto de silla.

## 7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x,y) = (x+y)^2. \qquad (b) \quad f(x,y) = \log(2 + \operatorname{sen} x\, y). \qquad (c) \quad f(x,y) = x^2y^2.$$

**Solución:** ($a$) $(x,-x)$ mínimos absolutos ($b$) $(0,0)$ punto de silla, $(x,y)$ con $xy = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ máximos absolutos, $(x,y)$ con $xy = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mínimos absolutos ($c$) $(x,y)$ con $xy = 0$ mínimos absolutos

**Desarrollo:**

($a$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = (2(x+y) \, , \, 2(x+y)) \, ,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2(x+y) = 0 \\ 2(x+y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \; x = -y \right.$$

Por consiguiente serán puntos críticos todos los puntos de la forma $(x,-x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en los puntos críticos,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x,-x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto para cualquier punto critico $\det(Hf(x,-x)) = 0$. Así el criterio de Sylvester no nos permite concluir nada. Pero no tenemos que rendirnos aquí, ya que observando la función se aprecia que $f(x,y) \geq 0$ para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y como $f(x,-x) = 0$ ya tenemos probado que todos los puntos críticos son en realidad mínimos globales (absolutos). (Sin duda esto hubiéramos podido hacerlo antes de calcular la matriz Hessiana).

($b$) Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{y\cos(xy)}{2 + \sin(xy)} \, , \, \frac{x\cos(xy)}{2 + \sin(xy)} \right) ,$$

así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{y\cos(xy)}{2+\sin(xy)} = 0 \\ \dfrac{x\cos(xy)}{2+\sin(xy)} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y\cos(xy) = 0 \\ x\cos(xy) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \text{o} \quad \cos(xy) = 0.$$

Por consiguiente serán puntos críticos el $(0,0)$ y todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ahora observemos lo siguiente $0 \leq f(x,y) \leq \log(3)$ y además

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x,y) = \log(3) & \text{si } xy = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ f(x,y) = 0 & \text{si } xy = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Con esto ya hemos probado que los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, con $xy=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ son máximos absolutos (globales) y los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, con $xy=\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ son mínimos absolutos (globales).

Nos queda ver que pasa con el punto $(0,0)$, como la función $f$ es de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto $(0,0)$. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en el $(0,0)$,

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\dfrac{y^2(\sin(xy)(\sin(xy)+2)+\cos^2(xy))}{(\sin(xy)+2)^2} & \dfrac{-xy\sin(xy)+\cos(xy)}{\sin(xy)+2}-\dfrac{xy\cos^2(xy)}{(\sin(xy)+2)^2}\\ \dfrac{-xy\sin(xy)+\cos(xy)}{\sin(xy)+2}-\dfrac{xy\cos^2(xy)}{(\sin(xy)+2)^2} & -\dfrac{x^2(\sin(xy)(\sin(xy)+2)+\cos^2(xy))}{(\sin(xy)+2)^2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Por tanto como $\det(Hf(0,0))=-1/4<0$ el criterio de Sylvester nos permite concluir que $(0,0)$ es un punto de silla.

$(c)$ Primero calculemos los puntos críticos de la función $f$

$$\nabla f(x,y)=\left(2xy^2\,,\,2x^2y\right),$$

así

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2xy^2=0\\ \\ 2x^2y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0\ \text{ o }\ y=0$$

Por consiguiente serán puntos críticos todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, con $xy=0$. Ahora observemos lo siguiente $f(x,y)\geq 0$ y además

$$f(x,y)=0\quad \text{si } xy=0$$

Por consiguiente los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, con $xy=0$ son mínimos absolutos (globales).

8.- Considérese el polinomio $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$ y la función $g(t)=f(t,ct)$ de $t\in\mathbb{R}$ con $c\in\mathbb{R}$. Demostrar que $g$ tiene un mínimo en $t=0$, pero el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de $f$.

**Desarrollo:** Veamos primero que $(0,0)$ no es un mínimo local de $f$. $f(0,0)=0$ si conseguimos encontrar una sucesión de puntos $x_n=(a_n,b_n)$ de modo que $x_n\to(0,0)$ y $f(x_n)<0$, $\forall n\geq 1$ ya lo tenemos.

Consideramos $x_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n^2}\right)$ claramente $x_n\to(0,0)$ y además $f(x_n)=\dfrac{-1}{n^4}<0$, por tanto $(0,0)$ no es un mínimo local de $f$.

Veamos ahora que la función $g$ tiene un mínimo en el 0.

$$g(t)=f(t,ct)=(ct-3t^2)(ct-t^2)=3t^4-4ct^3+c^2t^2.$$

$g(t)$ es un polinomio con $g'(0)=0$ y $g''(0)=c^2>0$, así $g(t)$ tiene un mínimo en el 0.

9.- $(a)$ Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, $a$ y $b$, se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+1}{3}\geq\sqrt[3]{a\,b}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a=b=1$.

$(b)$ Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos $x$, $y$ y $z$ satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x=y=z$.

**Desarrollo:**

$(a)$ Consideremos el conjunto $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ y la función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(a,b)=\frac{a+b+1}{3}-\sqrt[3]{a\,b}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que esta función tiene único mínimo absoluto(global) en el punto $(1,1)$ (En este punto la función vale 0).

Primero calculemos los puntos críticos de $f$ en el interior de $\Omega$.

$$\nabla f(a,b)=\left(\frac{1}{3}\left(1-a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)\,,\,\frac{1}{3}\left(1-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-2}{3}}\right)\right),$$

así

$$\nabla f(a,b)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}\left(1-a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)=0\\ \frac{1}{3}\left(1-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-2}{3}}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b=a^2\\ a=b^2\end{array}\right.$$

Por consiguiente el único punto crítico será el $(1,1)$. Ahora como la función es de clase $C^2$ en $\operatorname{int}(\Omega)$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de $f$ en el $(1,1)$,

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial a}(a,b)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{9}a^{\frac{-5}{3}}b^{\frac{1}{3}} & \frac{-1}{9}a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{-2}{3}}\\ \frac{-1}{9}a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{-2}{3}} & \frac{2}{9}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-5}{3}}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad Hf(1,1)=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}.$$

Los menores principales de la matriz Hessiana de $f$ en el punto $(1,1)$ son $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(1,1)=\frac{2}{9}>0$ y $\det(Hf(1,1))=\frac{1}{27}>0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1,1)$ es un mínimo local (Recordemos aquí que el criterio nos dice más ya que nos dice que este mínimo local es estricto). Para convencernos de que es absoluto (en $\Omega$) podemos pensar en el siguiente argumento:

Fijamos $N>0$ (Suficientemente grande, digamos $N>27$) y estudiamos $f$ restringida al rectángulo $R_N=[0,N]\times[0,N]$, es decir, $f|_{R_N}$, y como $R_N$ es compacto y $f$ continua sabemos que tiene mínimo absoluto. Comprobemos que $(1,1)$ es el único mínimo absoluto de $f|_{R_N}$ para todo $N>27$.

Por lo que ya hemos visto el único punto crítico en el interior de $R_N$ es el $(1,1)$, comprobemos que el valor de $f$ en la frontera de $R_N$ es mayor que $f(1,1)=0$.

Para $b=0$ y $0\le a\le N$ (frontera horizontal inferior) :

$$f(a,0)=\frac{a+1}{3}>0.$$

Para $a=0$ y $0\le b\le N$ (frontera vertical izquierda) :

$$f(0,b)=\frac{b+1}{3}>0.$$

Para $y=N$ y $0\le a\le N$ (frontera horizontal superior) :

$$f(a,N)=\frac{a+N+1}{3}-\sqrt[3]{Na}\ge\frac{N}{3}-N^{\frac{2}{3}}>0$$

Esto ocurre ya que $N>27$ (Como es de esperar el $N$ lo he elegido una vez he llegado hasta este paso en mis cálculos)

Para $a=N$ y $0\le b\le N$ (frontera vertical derecha) :

$$f(N,b)=\frac{N+b+1}{3}-\sqrt[3]{Nb}\ge\frac{N}{3}-N^{\frac{2}{3}}>0.$$

Por tanto

$$f(a,b)>f(1,1)\quad\text{para todo}\quad(x,y)\in R_N=[0,N]\times[0,N]$$

pero cuando $N\to+\infty$ los $R_N$ tienden a $\Omega$.

$(b)$ Si uno de los tres números es igual a 0 entonces la desigualdad es obvia. Supongamos que ninguno de los tres números es 0, entonces consideramos $a=\frac{x}{z}$ y $b=\frac{y}{z}$ y aplicando el apartado anterior obtenemos que

$$\frac{a+b+1}{3}\ge\sqrt[3]{a\,b}\Leftrightarrow\frac{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1}{3}\ge\sqrt[3]{x\,y\,z^{-2}}\Leftrightarrow\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y la igualdad solo se alcanza en $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}=1$ es decir en $x=y=z$.

10.- Escribir un número dado $a>0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

**Solución:** $a=a^{1/4}a^{1/4}a^{1/4}a^{1/4}$

**Desarrollo:** El método de resolución es análogo al del Ejercicio 17, también se podría hacer demostrando la desigualdad aritmético-geométrica para 4 números.

11.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2+2xy+3y^2=9$.

**Solución:**

$$\text{distancia mínima }\frac{3}{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{2}\right)^{1/2}\text{ en los puntos }\pm\frac{3}{2}(1-\sqrt{2},-1)$$
$$\text{distancia máxima }\frac{3}{\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2}\right)^{1/2}\text{ en los puntos }\pm\frac{3}{2}(1+\sqrt{2},-1)$$

**Desarrollo:** La función a minimizar sería la distancia al origen pero tiene los mismos mínimos que la distancia al cuadrado así que consideramos $f(x,y)=x^2+y^2$,

$$X:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ g(x,y)=0\}\quad\text{con}\quad g(x,y)=x^2+2xy+3y^2-9,$$

y usamos el método de los multiplicadores de Lagrange para estudiar $f|_X$. Tenemos

$$\nabla g(x,y)=2(x+y,x+3y)\qquad\text{y}\qquad\nabla f(x,y)=2(x,y)$$

Comprobamos $\nabla g(x,y) = 2(x+y, x+3y) = (0,0) \iff (x.y) = (0,0)$ y por tanto $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ en $X$. También tenemos que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ en $X$.

Tenemos que resolver $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y por esto el sistema que nos dará los puntos críticos es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda(x+y) \longleftrightarrow (1-\lambda)x = \lambda y \\ y = \lambda(x+3y) \longleftrightarrow (1-3\lambda)y = \lambda x \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

Como sabemos que $\lambda \neq 0$, ya que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ en $X$, obtenemos de las dos primeras ecuaciones

$$y = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) x \quad \text{y} \quad x = \left(\frac{1-3\lambda}{\lambda}\right) y \quad \Longrightarrow y = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{1-3\lambda}{\lambda}\right) y$$

Es fácil comprobar que si $y = 0$ el sistema no tiene solución, asíque $y \neq 0$ y obtenemos la ecuación $\lambda^2 = (1-\lambda)(1-3\lambda)$, es decir, $2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, que tiene raices $\lambda = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Los sistemas quedan

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (1-\sqrt{2})x \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{para } \lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (1+\sqrt{2})x \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{para } \lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los puntos críticos son: $\pm\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{2}, -1)$ (soluciones del sistema para $\lambda = 1+\sqrt{2}/2$) y $\pm\dfrac{3}{2}(1-\sqrt{2}, -1)$ (soluciones del sistema para $\lambda = 1-\sqrt{2}/2$). Evaluando $f$ en esos puntos tenemos

$$f\left(\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}, -\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{-3(1-\sqrt{2})}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(2-\sqrt{2})$$

$$f\left(\frac{3(1+\sqrt{2})}{2}, -\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{-3(1+\sqrt{2})}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(2+\sqrt{2})$$

y llegamos a la solución. Sabemos que se alcanzan máximos y mínimos absolutos pues $f$ es continua en $X$ compacto.

12.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$ en la región

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\right\}.$$

**Solución:** mínimo absoluto en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1, \pm 1)$ con valor $-\sqrt{2}$ y máximo absoluto en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$ con valor $\sqrt{2}$

**Desarrollo:** Como $f$ es continua en $\Omega$ compacto sabemos que se alcanzan los mínimos y máximos absolutos. Debemos encontrar todos los puntos críticos y entre ellos estarán los mínimos y máximos absolutos, sabremos cuales son al evaluar la $f$. Lo hacemos por partes.

1. Puntos críticos de $f$ en el interior de $\Omega$: no hay
   $\nabla f(x,y) = 3(x^2+y^2, 2xy)$ y $\nabla f(x,y) = (0,0) \longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin \text{int}\,(\Omega)$
2. Puntos críticos de $f$ en segmento de recta $X_1 = \Omega \cap \{(x,y) \ : g_1(x,y) = 0\}$ con $g_1(x,y) = x - y$ :
   $\nabla g_1(x,y) = (1,-1)$ y si buscamos solución para $\nabla f(x,y)$ y $\nabla g_1(x,y)$ proporcionales y $g_1(x,y) = 0$ nos queda el sistema

   $$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \lambda \\ 2xy = -\lambda \\ x - y = 0 \end{array} \right. \qquad \text{que tiene solución } x = y = \lambda = 0$$

   Por tanto $(0,0)$ es punto crítico, pero también lo son los extremos del segmento de recta $X_1$, es decir, las soluciones del sistema

   $$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{array} \right. \qquad \text{que son } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Puntos críticos de $f$ en arco de circunferencia $X_2 = \Omega \cap \{(x,y) \ : g_2(x,y) = 0\}$ con $g_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ :
   $\nabla g_2(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ en $X_2$ y si buscamos solución para $\nabla f(x,y)$ y $\nabla g_2(x,y)$ proporcionales y $g_2(x,y) = 0$ nos queda el sistema

   $$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \lambda x \\ 2xy = \lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

   Las soluciones $(x, y, \lambda)$ de este sistema son:

   $$\pm(1,0,1), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

   Los puntos críticos $(x,y)$ en $X_2$ son

   $$(-1,0), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   Los últimos dos son también los extremos del arco de circunferencia $X_2$.

Evaluando en los puntos críticos tenemos: $f(0,0)=0$, $\quad f(-1,0)=-1$, $\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$ $\quad$ y

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}.$

Por tanto, máximo absoluto en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y mínimos absolutos en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

13.- Hallar los extremos de la función $f(x,y)=x^2-3\,x\,y+y^2$ bajo la restricción $x^2+y^2\leq 2$.

**Solución:** mínimo absoluto en $\pm(1,1)$ con valor $-1$ y máximo absoluto en $\pm(1,-1)$ con valor 5

14.- Hallar los extremos de la función $f(x,y)=x^4+x^2+2y^2$ en $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4x^2+y^2\leq 25\}$.

**Solución:** mínimo absoluto en $(0,0)$ con valor 0 y máximo absoluto en $(0,\pm 5)$ con valor 50

15.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y)=\frac{1}{1+(x-2)^2+y^2} \qquad \text{en} \qquad K=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 9\}.$$

**Solución:** mínimo absoluto en $(-3,0)$ con valor $1/26$ y máximo absoluto en $(2,0)$ con valor 1.

(Sugerencia: Estudiar $h(x,y)=1+(x-2)^2+y^2$)

16.- Para la función $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=x^4+y^4+a(2x^2+y^2)$, se pide:

($a$) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro $a$.

($b$) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1\}$ en los casos $a=-1$ y $a=5$.

**Solución:** (a) Para $a\geq 0:(0,0)$ mínimo absoluto. Para $a<0:(0,0)$ máximo local, $\quad (0,\pm(|a|/2)^{1/2}),(\pm(|a|)^{1/2},0)$, puntos de silla y $\pm(|a|^{1/2},\pm(|a|/2)^{1/2})$ mínimos locales.

(b) Para $a=-1$ mínimo absoluto en $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3},\pm 1)$ con valor$-9/8$ y máximo absoluto en $(0,0)$ y $(0,\pm 1)$ mínimo absoluto con valor 0. Para $a=5$ mínimo absoluto en $(0,0)$ con valor 0 y máximo absoluto en $(\pm 1,0)$ con valor 11.

17.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo $V_0$. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

**Solución:** largo = ancho = alto = $V_0^{1/3}$

**Desarrollo:** Sean $x$ = largo, $y$ = ancho, $z$ = alto de la caja. Tenemos $V_0=xyz$ y además $x>0$, $y>0$, $z>0$ (para que realmenta sea una caja). La superficie $S$ de la caja con tapa verifica:

$$S=2(xy+yz+xz)=2\left(xy+y\frac{V_0}{xy}+x\frac{V_0}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{V_0}{x}+\frac{V_0}{y}\right)$$

Sea $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y>0\}$ y $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ la función $f(x,y)=2\left(xy+\frac{V_0}{x}+\frac{V_0}{y}\right)$. Queremos buscar mínimo absoluto de $f$.

Como el conjunto $\Omega$ es abierto así que buscamos los puntos críticos como siempre.

$\nabla f(x,y)=2\left(y-\frac{V_0}{x^2},x-\frac{V_0}{y^2}\right)$ y $\Omega$ es abierto, los puntos críticos son las soluciones de $\nabla f(x,y)=(0,0)$, es decir la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{V_0}{x^2} \\ \\ x=\dfrac{V_0}{y^2}\end{array}\right. \qquad \text{que es } x=y={V_0}^{1/3} \quad (\text{ Igualar } V_0 \text{ y recordar que } xy\neq 0\ )$$

El único punto crítico es $({V_0}^{1/3},{V_0}^{1/3})$ y la matriz Hessiana es

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{4}{x^3}V_0 & 2\\ 2 & \frac{4}{y^3}V_0\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad H(V_0^{1/3},V_0^{1/3})=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Como $\det H(V_0^{1/3},V_0^{1/3})=12>0$ y $4>0$, sabemos que $({V_0}^{1/3},{V_0}^{1/3})$ es un mínimo local. Para convencernos de que es absoluto podemos pensar en el siguiente argumento:

Fijamos $\epsilon>0$ (pequeño) y estudiamos $f$ restringida al rectángulo $R_\epsilon=\left[\epsilon,\frac{1}{\epsilon^2}\right]\times\left[\epsilon,\frac{1}{\epsilon^2}\right]$, es decir, $f|_{R_\epsilon}$, y como $R_\epsilon$ es compacto y $f$ continua sabemos que tiene mínimo absoluto. Comprobemos que $({V_0}^{1/3},{V_0}^{1/3})$ es un mínimo absoluto de $f|_{R_\epsilon}$ para todo $\epsilon>0$ tal que $3\epsilon<V_0^{1/3}<1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$

Por lo que ya hemos visto el único punto crítico en el interior de $R_\epsilon$ es $({V_0}^{1/3}, {V_0}^{1/3})$, comprobemos que el valor de $f$ en la frontera de $R_\epsilon$ es mayor que $f({V_0}^{1/3}, {V_0}^{1/3}) = 6V_0^{2/3}$.

Para $y = \epsilon$ y $\epsilon \leq x \leq 1/\epsilon^2$ (frontera horizontal inferior) :

$$f(x, \epsilon) = 2x\epsilon + \frac{2V_0}{\epsilon} + \frac{2V_0}{x} > \frac{2V_0}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \qquad \text{pues } 3\epsilon < V_0^{1/3}$$

Para $y = 1/\epsilon^2$ y $\epsilon \leq x \leq 1/\epsilon^2$ (frontera horizontal superior) :

$$f(x, 1/\epsilon^2) = \frac{2x}{\epsilon^2} + 2V_0\epsilon^2 + \frac{2V_0}{x} > \frac{2x}{\epsilon^2} > \frac{2\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{2}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \qquad \text{pues } V_0^{1/3} < 1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Para $x = \epsilon$ y $\epsilon \leq y \leq 1/\epsilon^2$ (frontera vertical izquierda) :

$$f(\epsilon, y) = 2\epsilon y + \frac{2V_0}{y} + \frac{2V_0}{\epsilon} > \frac{2V_0}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \qquad \text{pues } 3\epsilon < V_0^{1/3}$$

Para $x = 1/\epsilon^2$ y $\epsilon \leq y \leq 1/\epsilon^2$ (frontera vertical derecha) :

$$f(1/\epsilon^2, y) = \frac{2y}{\epsilon^2} + \frac{2V_0}{y} + 2V_0\epsilon^2 > \frac{2y}{\epsilon^2} > \frac{2\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{2}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \qquad \text{pues } V_0^{1/3} < 1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Por tanto

$$f(x, y) \geq f({V_0}^{1/3}, {V_0}^{1/3}) \qquad \text{para todo} \qquad (x, y) \in R_\epsilon = \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2}\right] \times \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2}\right]$$

pero cuando $\epsilon \to 0$ los $R_\epsilon$ tienden a $\Omega$.

18.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

**Solución:** radio base = altura = $\pi^{-1/3}$

**Desarrollo:** Sean $r$ = radio de la base, $h$ = altura del cilindro. Tenemos $\pi r^2 h = 1$ y además $r, h > 0$. La superficie $S$ de metal empleada verifica

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \frac{1}{h} + 2\pi h \left(\frac{1}{\pi h}\right)^{1/2} = \frac{1}{h} + 2\sqrt{\pi h}$$

El problema ahora sería encontrar el mínimo absoluto de la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(h) = \dfrac{1}{h} + 2\sqrt{\pi h}$ y esto lo sabéis hacer por Cálculo 1.

19.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?

**Solución:** radio base = $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ altura = $2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}$