Potencial eléctrico

J.E. Prieto

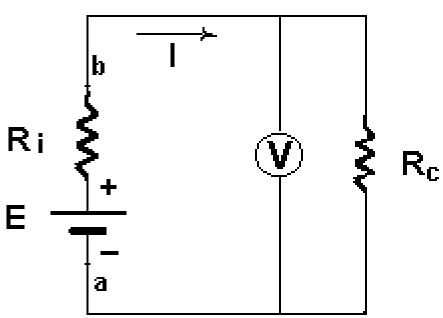
Fuente principal de figuras:
“Physics for scientists and engineers” (5th edition),
P.A. Tipler, G. Mosca

Concepto de *potencial eléctrico*

- *Potencial eléctrico* V ó φ:
  concepto *esencial* en electromagnetismo.

- Se mide en voltios (V):
  $[\varphi]$ = V

- Está estrechamente relacionado con la *energía potencial* electrostática U



Energía potencial

• Partimos del concepto de *trabajo* *W*.

• El trabajo *W* realizado por una fuerza ***F*** se define como:

$$\boxed{W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}}$$

• Si el campo de fuerzas ***F*** es *conservativo*, el trabajo $\boldsymbol{W_{ab}}$ *no depende del camino*, sino *sólo de los puntos inicial* $\boldsymbol{r_a}$ *y final* $\boldsymbol{r_b}$.

- recordemos: un criterio es: $$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

• En ese caso, se puede definir una *función escalar de las coordenadas*, llamada *energía potencial* *U(**r**)* asociada a ese campo de fuerzas, cuyo *gradiente* (negativo) es la fuerza ***F***:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})}$$

Energía potencial

- De esta manera, el trabajo $\boldsymbol{W_{ab}}$ realizado por la fuerza ***F*** (la *integral de línea* de ***F***) :

$$W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}$$

viene dado por la *diferencia de energía potencial U* entre *los puntos inicial* $\boldsymbol{r_a}$ *y final* $\boldsymbol{r_b}$:

$$\boxed{W_{ab} = -\Delta U = U(\boldsymbol{r_a}) - U(\boldsymbol{r_b})}$$

Esto quiere decir que podemos calcular la energía potencial en *r*, *U(**r**)*, como *el trabajo realizado en contra de **F*** (la energía introducida en el sistema) desde algún lugar de referencia $\boldsymbol{r_0}$ (donde decidimos arbitrariamente que $U(\boldsymbol{r_0}) = 0$) hasta ***r*** :

$$\Delta U = -W_{ab} \quad \rightarrow \quad \boxed{U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}}$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

- ¿Existe una *energía potencial electrostática*?:
  - ¿Es *conservativa* la fuerza electrostática?

- Consideremos el problema primero desde el punto de vista "*matemático*": ***F*** es la fuerza *electrostática* (Coulomb) entre cargas puntuales q_i (en el origen) y q en $\boldsymbol{r}$:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}} \quad , \quad \boxed{\boldsymbol{E} = k\frac{q_i}{r^2}\boldsymbol{u_r}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = k\frac{q_i q}{r^2}\boldsymbol{u_r}}$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = k\frac{q_i q}{(x^2+y^2+z^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,,y\,,z)}$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

$$\boldsymbol{F} = k \frac{q_i q}{(x^2+y^2+z^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x, y, z)$$

- Ejercicio de "*matemáticas*": verificar que:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

y, por tanto, encontrar una función escalar *U(**r**)* tal que

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

• Consideremos el problema (la existencia de una *energía potencial electrostática*) ahora desde una perspectiva más "física". Veamos si el trabajo W depende del camino seguido.

• Calculemos el trabajo W_{ab} realizado por la fuerza electrostática $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}$ al mover una carga q en el campo eléctrico (*Coulomb*) creado por la otra (q_i), desde un punto inicial $\boldsymbol{r}_a$ hasta un punto final $\boldsymbol{r}_b$:

$$W_{ab} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} \quad ,$$

con $\boldsymbol{F} = q_i \boldsymbol{E}$, tenemos:

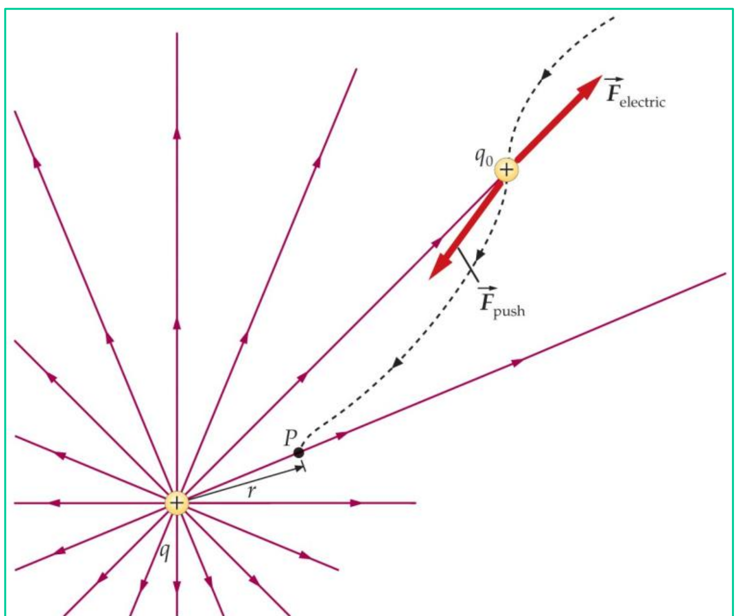
$$W_{ab} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = q_i \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

- El campo eléctrico ***E*** es el campo de *Coulomb* creado por la carga q_i:

$$\boldsymbol{E} = k\frac{q_i}{r^2}\boldsymbol{u_r}$$

Debido al producto escalar ***E*** d***r***, *sólo contribuyen* a W_{ab} las partes *d**r*** del trayecto *paralelas* a ***E*** (o a $\boldsymbol{u_r}$), en ellas ***E*** d***r*** = *E dr* :



$$W_{ab} = q_i\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow \quad W = q_i\int_{r_a}^{r_b}E\,dr$$

y sólo cuentan las *distancias inicial* r_a y *final* r_b del trayecto.

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

• Es fácil convencerse de que el trabajo W_{ab} no depende del camino seguido sino sólo de r_a y r_b:

$$W_{ab} = q\int_{r_a}^{r_b} E\,dr = k\,q\,q_i\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}$$

$$W_{ab} = \frac{-k\,q_i\,q}{r_b} - \frac{-k\,q_i\,q}{r_a}$$

• Esto implica la existencia de una *energía potencial electrostática* $U(\mathbf{r})$ asociada a la interacción electrostática de Coulomb:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \frac{k\,q_i\,q}{r}}$$

tal que:

$$\Delta U = -W_{ab}$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

• Alternativamente, recordemos que podemos calcular la energía potencial en *r*, *U(**r**)*, como *el trabajo realizado en contra de **F*** (la energía introducida en el sistema) desde algún lugar de referencia $\boldsymbol{r_0}$ (donde decidimos arbitrariamente que $U(\boldsymbol{r_0}) = 0$) hasta ***r*** :

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} \rightarrow \quad U(\boldsymbol{r}) = -q\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow \quad U(\boldsymbol{r}) = -q\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \frac{kq_i}{r^2}\, dr = \frac{kqq_i}{r} - \frac{kqq_i}{r_0}$$

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* entre dos *cargas puntuales*

- Hemos llegado a

$$U(\boldsymbol{r}) = -q\int_{r_0}^{r} \frac{kq_i}{r^2}\,dr = \frac{k\,q\,q_i}{r} - \frac{k\,q\,q_i}{r_0}$$

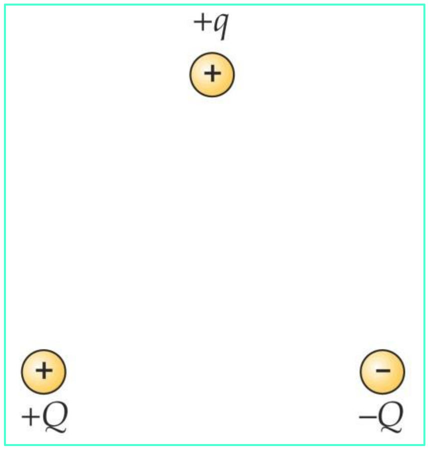
- Eligiendo $r_0 = \infty$ (es equivalente a decir: $\boldsymbol{U} = 0$ en $r_0 = \infty$):

$$\boxed{U(\boldsymbol{r}) = \frac{k\,q\,q_i}{r}}$$

U: *energía potencial electrostática* de dos cargas puntuales *q* y q_i separadas por una distancia *r*.

Ejemplo: Energía potencial *electrostática* de un sistema de varias cargas q_i

- Generalización: varias cargas puntuales



- ¿Energía total *U* de interacción electrostática?

Sabemos calcular U_{12} de un *par* de cargas q_1 y q_2

$$U_{12}(\boldsymbol{r}) = \frac{k\, q_1 q_2}{r}$$

Solución: suma a todos los *pares* de cargas:

$$\boxed{U = U_{12} + U_{13} + U_{23} + \ldots}$$

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{k\, q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k\, q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k\, q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots = \sum_{i>j} \frac{k\, q_i q_j}{r_{ij}}$$

Concepto de potencial *electrostático*

- Hemos llegado a

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{k\,q\,q_i}{r}$$

- Al igual que en el concepto de campo, si suponemos que q_i *crea el campo* y q es la "carga de prueba" que lo experimenta, vemos que $U(\boldsymbol{r})$ es *proporcional a la carga de prueba* q :

$\rightarrow$ *dividiendo* entre q, obtenemos una *caracterización del espacio* en r *independiente de la carga de prueba* q

- Definición de ***potencial eléctrico**:*
  energía potencial electrostática por unidad de carga:

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{U(\boldsymbol{r})}{q}}$$

Potencial ES $\leftrightarrow$ Energía potencial ES

- *Potencial eléctrico: energía potencial por unidad de carga:*

$$\boxed{V(\mathbf{r}) \equiv \frac{U(\mathbf{r})}{q}}$$

- Unidades: [*V*] = [*U*] / [*q*] = J / C = V (Voltio)

$\rightarrow$ la energía potencial de una carga *q* en un lugar ***r*** del espacio donde el potencial es *V(**r**)* vale:

$$U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$$

Potencial ES $\leftrightarrow$ Energía potencial ES

- Puesto que la energía potencial se calcula como:

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$$

y tenemos

$$U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r}) \quad , \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$\rightarrow$ *V* se puede calcular como:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}}$$

- El *potencial* en ***r***, *V(**r**)*, es la integral de línea *del campo eléctrico* ***E*** (cambiado de signo) desde algún lugar de referencia $\boldsymbol{r_0}$ (donde decidimos que $V(\boldsymbol{r_0}) = 0$) hasta ***r***.

Ejemplo: Potencial de Coulomb

- Energía potencial en el campo de Coulomb (campo creado por una carga puntual q_i):

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{k\,q\,q_i}{r}$$

energía potencial de dos cargas puntuales en interacción electrostática mutua

- Calculamos *potencial de Coulomb V(**r**)* creado por una carga *puntual* q_i:

$$V(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{U(\boldsymbol{r})}{q} = \frac{kq_i}{r}$$

(recordamos: hemos elegido $\boldsymbol{V} = 0$ en $r_0 = \infty$)

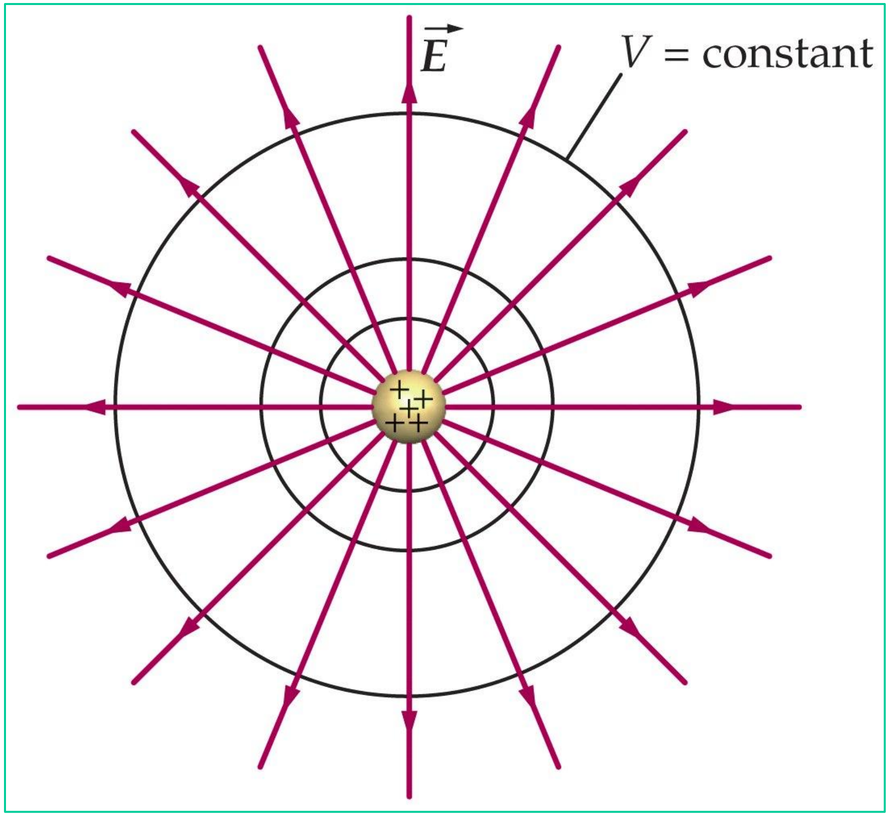
Ejemplo: Potencial creado por una carga puntual q_i (Coulomb)

• Potencial de Coulomb:

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{kq_i}{r}$$

• *Superficies equipotenciales* (regiones con V = cte.): aquéllas con r = cte:

Esferas centradas en q_i



E es *perpendicular* a las superficies *equipotenciales* (V = cte.)

Potencial V $\leftrightarrow$ campo $\boldsymbol{E}$

Relación en forma *integral*:

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}$$

$$dU = -\boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = -q\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

$$dV = \frac{dU}{q} = -\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

Definición: diferencia de potencial.

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q} = -\int_a^b \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

Diferencia *finita* de potencial: integración de *dV.*

Relación en forma *diferencial*:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})}$$

Ejemplo: Campo eléctrico creado por un conjunto *discreto* de cargas puntuales q_i

- Las fuerzas son *aditivas* $\rightarrow$ el campo ***E*** es *aditivo*
- La fuerza y el campo son *vectores*

$\rightarrow$ *Principio de* ***superposición***

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{r}) = \sum_i \boldsymbol{E}_{i,P} = \sum_i \frac{k q_i}{r_{i,P}^2} \hat{\boldsymbol{u}}_{i,P} = \sum_i \frac{k q_i}{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)^2} \hat{\boldsymbol{u}}_{i,P}$$

Campo eléctrico ***E*** en el punto *P* (en ***r***) producido por un conjunto de cargas *puntuales* q_i situada cada una en $\boldsymbol{r}_i$.

E es el resultante de la *suma vectorial* de los campos $\boldsymbol{E}_i$ creados por cada una de las cargas q_i

Ejemplo: Potencial creado por un conjunto *discreto* de cargas puntuales q_i

- El campo ***E*** es *aditivo*
- La relación entre ***E*** y *V* es *lineal*

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})}$$

→ *Principio de **superposición*** para el potencial *V:*

$$\boxed{V = \sum_i V_i}$$

- *V* es el resultante de la *suma (algebraica: el potencial es un escalar!)* de los potenciales V_i creados por cada una de las cargas q_i

- Para un conjunto de cargas *puntuales* q_i, (pot. Coulomb):

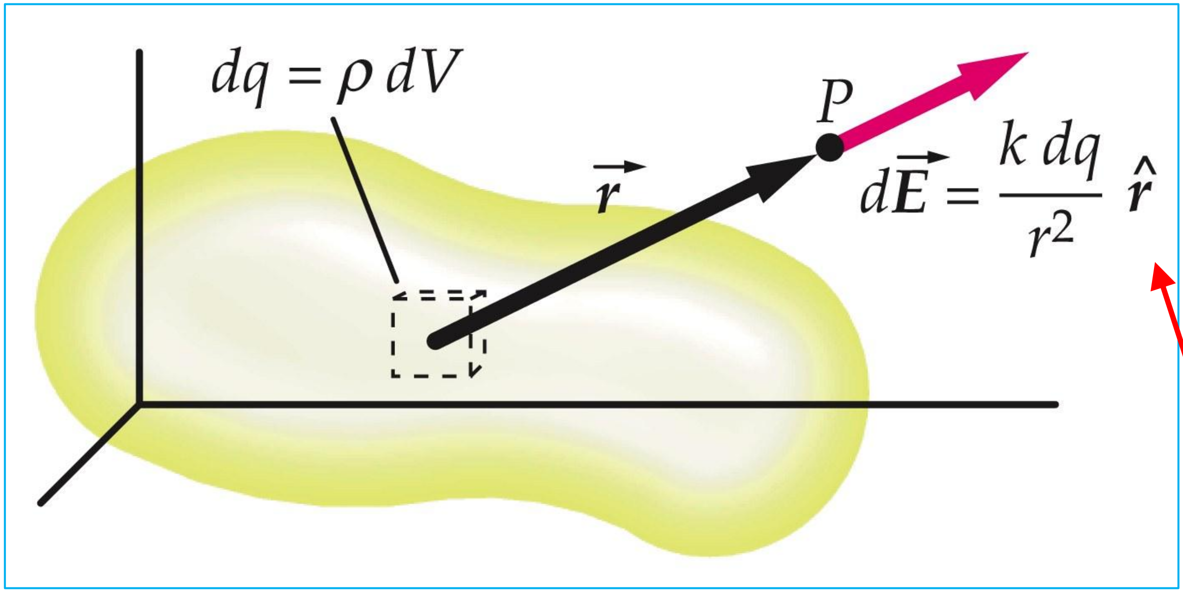
$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) = \sum_i k \frac{q_i}{r_{i,P}} = \sum_i k \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_i}|}}$$

Ejemplo: Campo eléctrico creado por una distribución *continua* de carga

• Principio de superposición: ***E*** es el resultante de la *suma vectorial* de los campos *d**E*** creados por todos los elementos de carga *dq*

Concepto importante:
densidad de carga $\rho = dq / dV$

→ suma se transforma en *integral*



campo *d**E***
creado en ***r*** por
carga $dq = \rho\, dV$

vector *unitario* en
la dirección de ***r*** :
de *dq* hacia *P*

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \int \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{\mathbf{u}}_{dq,P}$$

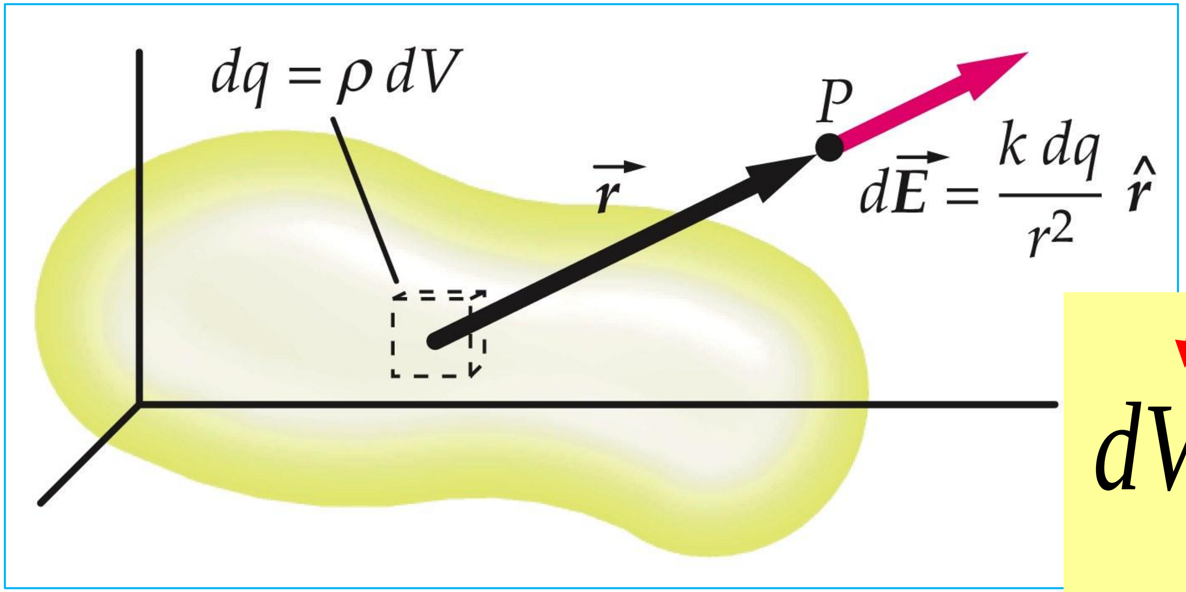
• *d**E*** se suma a todas las cargas *dq*:
→ se integra $\rho\, dV$ al volumen *V*

Ejemplo: Potencial eléctrico creado por una distribución *continua* de carga

• Principio de superposición: *V* es el resultante de la *suma (escalar !)* de los potenciales *dV* creados por todos los elementos de carga *dq*

Concepto importante:
densidad de carga $\rho = dq / dV$

→ suma se transforma en *integral*



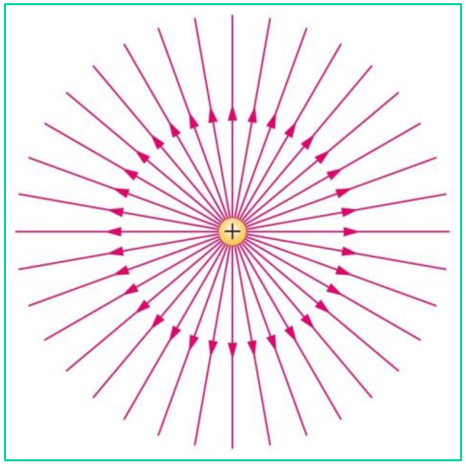
potencial *dV* creado en ***r*** por carga $dq = \rho\, dV$

$$dV(\boldsymbol{r}) = k\,\frac{dq}{r}$$

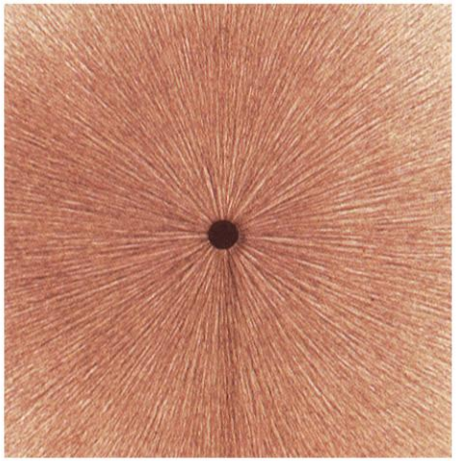
$$V(\boldsymbol{r}) = k\int\frac{dq}{r} = k\int\frac{\rho\, dV}{r}$$

• *dV* se suma a todas las cargas *dq*:
→ se integra $\rho\, dV$ al volumen *V*

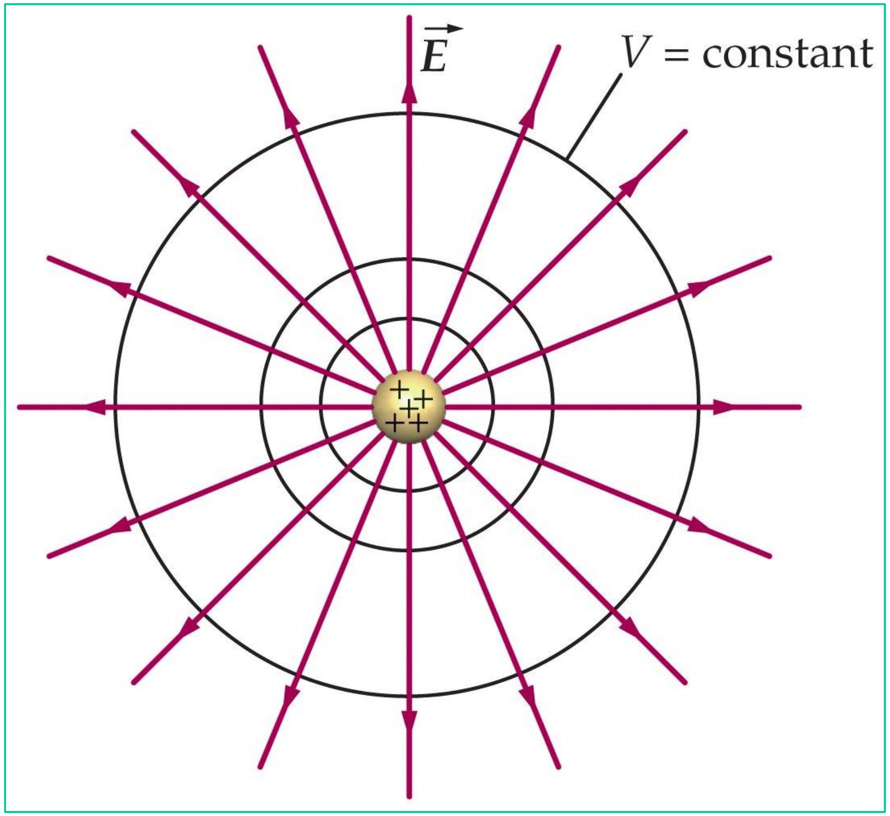
Ejemplo: Campo eléctrico y potencial creados por una carga puntual



Líneas de campo ***E***



Visualización de líneas de campo ***E*** con hebras de hilo suspendidas en aceite

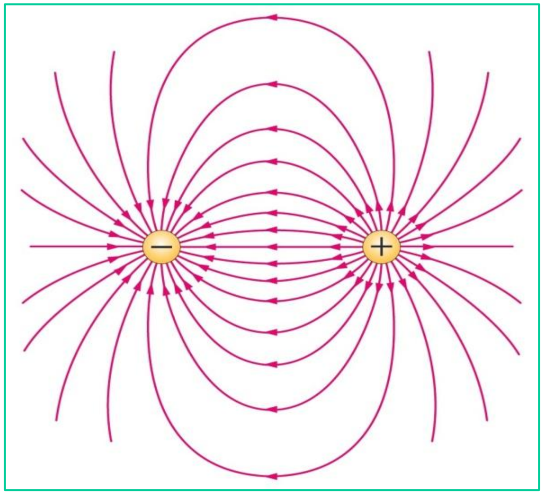


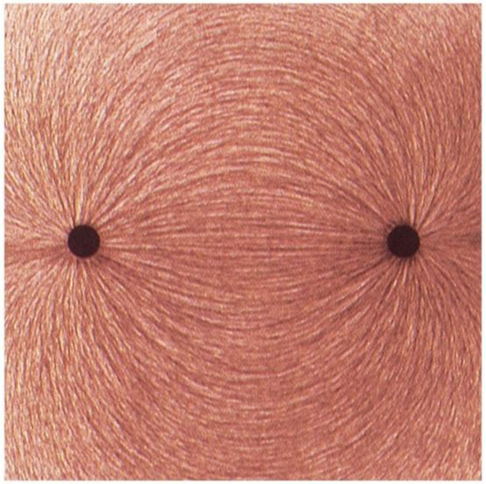
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})}$$

E es *perpendicular* a las superficies *equipotenciales* (V = cte.)

Ejemplo: Campo eléctrico creado por dos cargas puntuales

Dos cargas de
signos opuestos

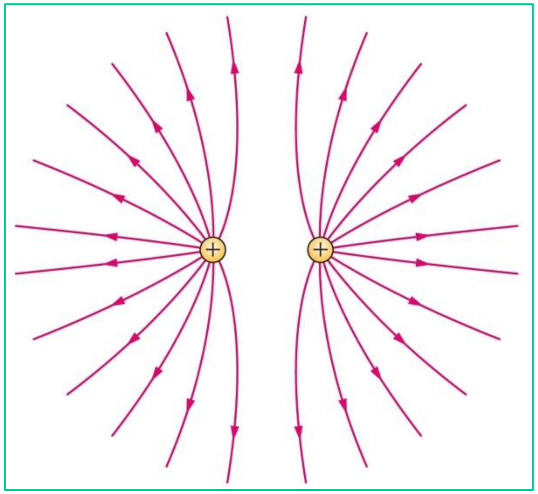


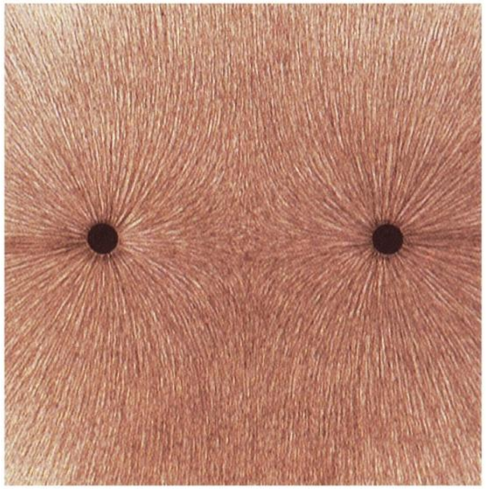


Cálculo de ***E***:

Principio de
superposición

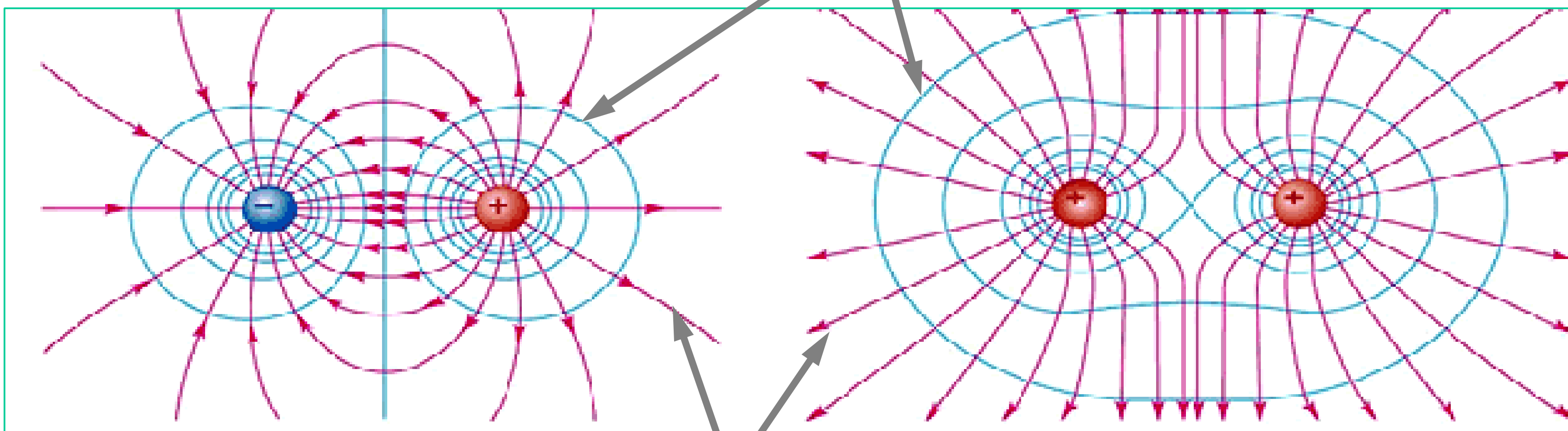
Dos cargas del
mismo signo





Ejemplo: Campo eléctrico y potencial creados por *dos* cargas puntuales

Superficies equipotenciales V = cte.



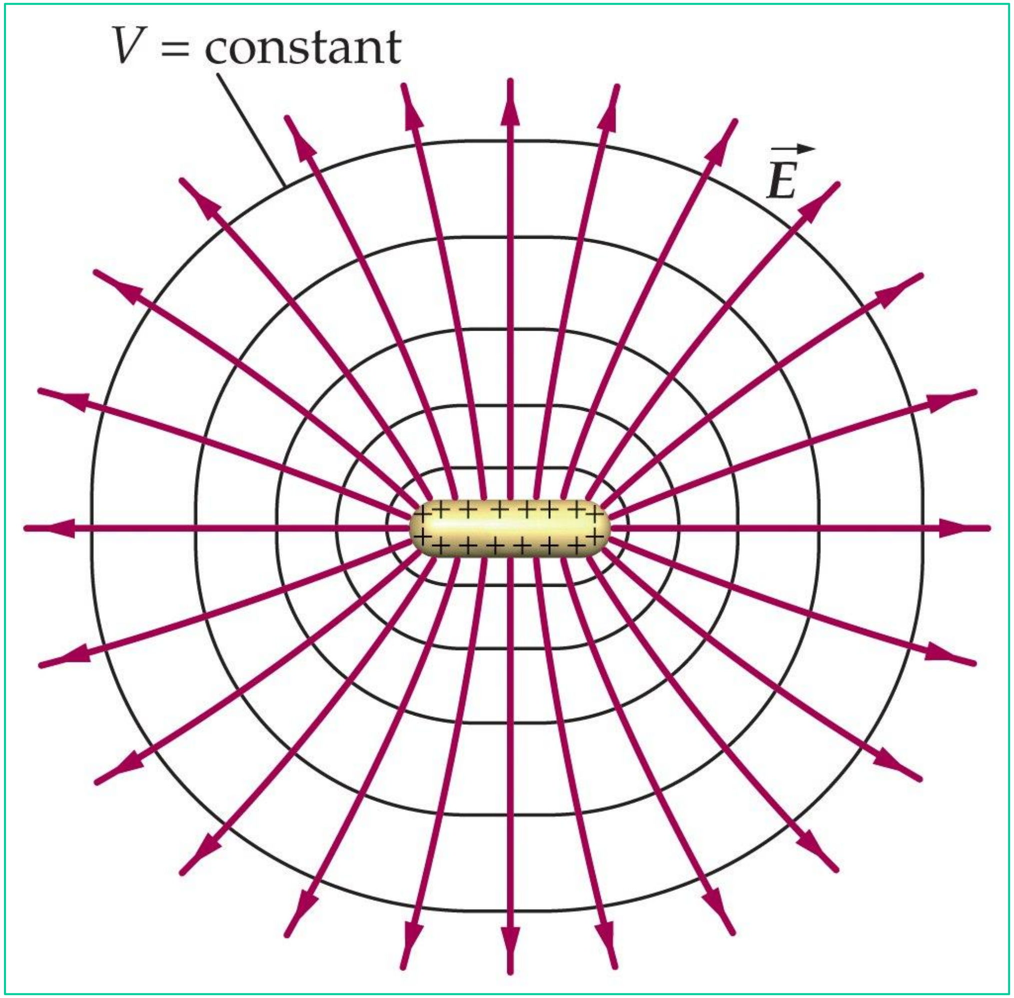
Dos cargas de *signos opuestos*

Líneas de campo ***E***

Dos cargas del *mismo signo*

E es SIEMPRE *perpendicular* a las superficies *equipotenciales* (*V* = cte.)

Campo eléctrico y potencial creados por una distribución arbitraria de carga



$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})}$$

E es SIEMPRE *perpendicular* a las superficies *equipotenciales* (*V* = cte.)

Potencial V $\leftrightarrow$ campo $\boldsymbol{E}$

Relación en forma *diferencial*:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$$

Relación en forma *integral*:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

En componentes:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- ***E*** se obtiene de *V* por *derivación*
- *V* se obtiene de ***E*** por *integración*

- Además: *V* es un *escalar*, ***E*** es un *vector* :

→ ***En general***, es *más fácil* calcular
1) primero *V* y, a partir de ahí,
2) después ***E***.

[excepción: cuando sea *muy* fácil calcular ***E***… lo veremos próximamente (Ley de Gauss)]

Resumen (1)

- El campo electrostático es *conservativo*.

- *Energía potencial electrostática* de *dos cargas puntuales*:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \frac{k\,q\,q_i}{r}}$$

- *Energía potencial electrostática* de un conjunto de *cargas puntuales*:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k\,q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k\,q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k\,q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots = \sum_{i>j} \frac{k\,q_i q_j}{r_{ij}}$$

Resumen (2)

- *Potencial eléctrico V*:

$$V(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{U(\boldsymbol{r})}{q}$$

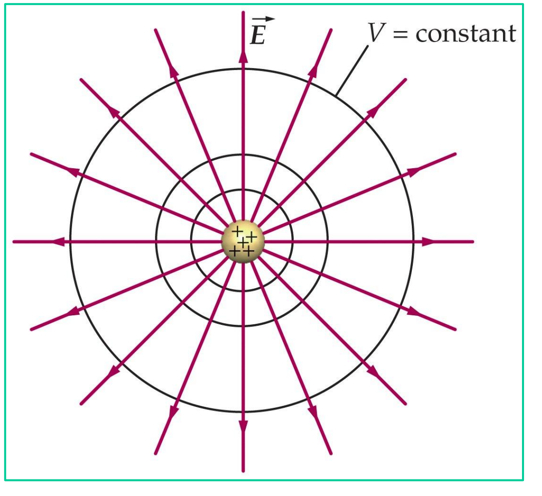
- Relación campo ***E*** ↔ potencial *V*:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$$

- Potencial *V* creado por una carga puntual q_i (Coulomb):

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{kq_i}{r}$$



Resumen (3)

- Principio de superposición para el potencial *V*:

$$V = \sum_i V_i$$

- Distribución discreta:

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_i k \frac{q_i}{r_{i,P}}$$

Distribución continua:

$$V(\boldsymbol{r}) = k \int \frac{dq}{r}$$

- ***E*** es SIEMPRE **perpendicular** a las *superficies equipotenciales* (*V* = cte.)