Hoja 4: Suma directa. Espacio cociente.

1. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Define su **suma** por

$$\sum_{j=1}^{k} V_j = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \mathbf{u}_j : \mathbf{u}_j \in V_j, j = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

(a) Prueba que $\sum_{j=1}^{k} V_j$ es un subespacio vectorial de V.

(b) Prueba que $\sum_{j=1}^{k} V_j = \langle \bigcup_{j=1}^{k} V_j \rangle$, es decir la suma de subespacios vectoriales coincide con el subespacio vectorial generado por su unión.

2. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que si $n \geq 3$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $V = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} V_j$.

(b) $V = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} V_j$ y $V_i \cap \left(\displaystyle\sum_{j \neq i} V_j \right) = \{\mathbf{0}\}$

3. Fijado un cuerpo $\mathbb{K}$, sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

(a) Considera el producto cartesiano $V_1 \times V_2$ y en él las operaciones de suma y producto por escalar, definidas de la manera siguiente: si $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') \stackrel{\text{def}}{=} (\, v_1 + v_1' \,,\, v_2 + v_2' \,) \quad , \quad a\,(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\, av_1 \,,\, av_2 \,) \,,$$

Demuestra que estas operaciones dan a $V_1 \times V_2$ una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, que llamamos **espacio vectorial producto.**

(b) Da, de manera análoga, la definición del producto $V_1 \times \cdots \times V_k$ de varios espacios vectoriales y demuestra la siguiente "asociatividad":

$$(V_1 \times \cdots \times V_s) \times (V_{s+1} \times \cdots \times V_k) \;=\; V_1 \times \cdots \times V_k \text{ como espacios vectoriales.}$$

(c) Demuestra que si para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos un subespacio vectorial $W_j \subseteq V_j$, entonces $W_1 \times \cdots \times W_k$ es un subespacio vectorial de $V_1 \times \cdots \times V_k$.

(d) Demuestra que $V_1 \times V_2 = \big(V_1 \times \{\mathbf{0}\}\big) \oplus \big(\{\mathbf{0}\} \times V_2\big)$ y que $\dim(V_1 \times \cdots \times V_k) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$.

4. Sea F el subespacio de $E = \mathbb{R}^4$ definido por

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{array} \right\}.$$

(i) Encuentra una base de F, complétala para obtener una de E y utiliza esta última para calcular una base de E/F.

(ii) Encuentra las cordenadas de los vectores $[(2,-2,0,0)], [(3,4,0,0)] \in E/F$ en la base de E/F hallada en el apartado anterior.

5. En cada uno de los apartados siguientes comprueba que los vectores dados con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes y halla una base de $\mathbb{R}^4$ que los contenga:

(a) $\mathbf{v}_1 = (3,5,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,2,-2),\ \mathbf{v}_3 = (1,0-3,4)$.

(b) $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,-3,2)$.

6. Considera el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\,,\ x_1 - x_3 = 0\},$$

donde las coordenadas están dadas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(a) Describe las ecuaciones paramétricas de un complementario de W.

(b) Da una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/W$.

7. En $\mathbb{R}^3$ considera una base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ y el subespacio vectorial F generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Halla una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^3/F$.

8. Sea $\mathcal{P}^3_{\mathbb{R}}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}.\}$, y considera el subespacio $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 : a,b \in \mathbb{R}.\}$. Da ecuaciones para W y para un complementario.

9. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $F \subseteq V$ un subespacio vectorial. Decimos que los vectores $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ son **linealmente independientes módulo F** si cumplen lo siguiente:

para cualesquiera $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{K}$, $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k \in F \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

a) Sea $F = \langle(1,2,-1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$. ¿Son $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ linealmente independientes módulo F? Misma pregunta para $(3,7,-1)$ y $(1,4,3)$.

b) Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $v_1, v_2, \dots, v_k$ son linealmente independientes módulo F.

(ii) $v_1 + F\,,\ v_2 + F\,,\ \dots\,,\ v_k + F$ son vectores de V/F linealmente independientes.

(iii) $v_1, v_2, \dots, v_k$ son linealmente independientes y además $F \cap \langle v_1\,,\ \dots\,,\ v_k\rangle = \{\mathbf{0}\}$.