4.8 VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO

En las secciones precedentes hemos visto algunas aplicaciones de los determinantes

- Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada (Sec. 4.4)
- Cálculo del rango de una matriz usando menores (Sec. 4.5)
- Resolución de sistemas lineales (Sec. 4.4 y 4.6)

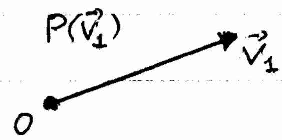
En esta sección vamos a ver como se calcula el "volumen" de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^n$ usando determinantes.

Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$. El <u>PARALELEPÍPEDO</u> $P = P(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ generado por $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ se define como

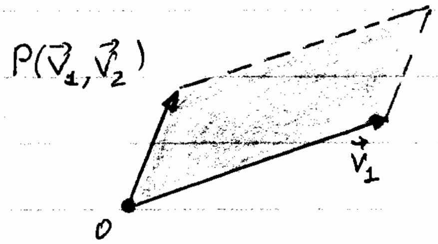
$$P = \{ t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : 0 \le t_i \le 1, \ i = 1, \dots, k \}.$$

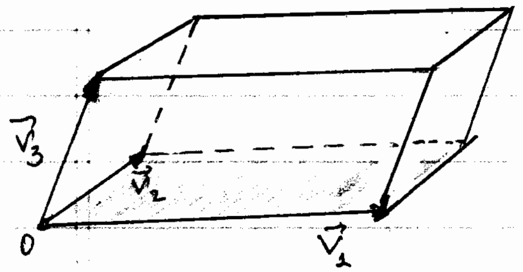
Los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ son <u>aristas</u> de P.

- $P(\vec{v}_1)$ es un segmento en $\mathbb{R}^n$



- $P(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ es un paralelogramo en $\mathbb{R}^n$ ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ l.i.)



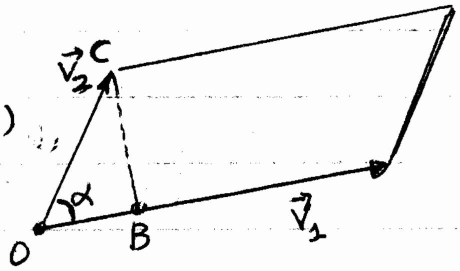


- $P(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ es un paralelepípedo en $\mathbb{R}^n$ ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.i.).

Para $P(\vec{v}_1)$ su "volumen" 1-dimensional es la longitud. Si $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ su <u>longitud</u> o <u>norma</u> es

$$\ell(P) = \|\vec{v}_1\| = \left(\sum_{i=1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Para un paralelogramo $P(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ en $\mathbb{R}^n$ su "volumen" 2-dimensional es el área (ver dibujo):



(4.8.1)
$$\text{Área}(P) = \|\vec{v}_1\| \|\vec{BC}\| = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \operatorname{sen} \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

donde $\vec{OB}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}_2$ sobre $\langle \vec{v}_1 \rangle$ y $\vec{v}_2 = \vec{OB} + \vec{BC}$.

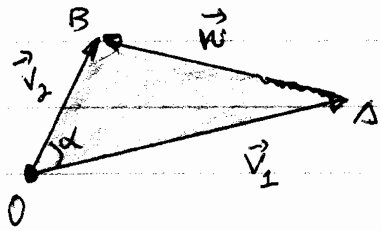
Necesitamos ahora la noción de producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Dados $\vec{v}_1 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v}_2 = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ su producto escalar es

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

(El producto escalar es lineal en cada una de sus variables.)

Observa que si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

El ángulo $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ puede calcularse con la fórmula del coseno. Como $\vec{w} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$ de



$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos\alpha$$

se deduce

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos\alpha$$

Simplificando (si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$)

$$\cos\alpha = \cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\|} \qquad (4.8.2)$$

Observa que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ serán ortogonales/perpendiculares cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ e.d. cuando $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$

Proposición 4.8.1.

Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$,

$$\text{Área}(P(\vec{v}_1,\vec{v}_2)) = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \\ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \end{vmatrix}} = \sqrt{|A^t A|}$$

donde A es la matriz $n \times 2$ cuyas columnas son las coordenadas de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

D/ Por (4.8.1) y (4.8.2),

$$\text{Área}(P)^2 = \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 (\operatorname{sen} \alpha)^2 = \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 [1 - \cos^2 \alpha]$$

$$= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 \left[1 - \frac{(\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle)^2}{\|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2}\right]$$

$$= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 - (\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle)^2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \\ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \end{vmatrix}$$

La segunda igualdad es fácil:

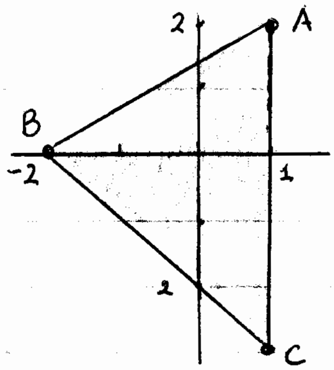
$$A^T A = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle^2 & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \\ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle^2 \end{pmatrix}$$

NOTA: Para el caso particular de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, la matriz A de la prop. 4.8.1 es cuadrada y por las propiedades de los determinantes $|A^t A| = |A^t||A| = |A|^2$. Entonces, para este caso, $(n=2)$

$$\text{Área}(P) = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| \qquad (4.8.3)$$

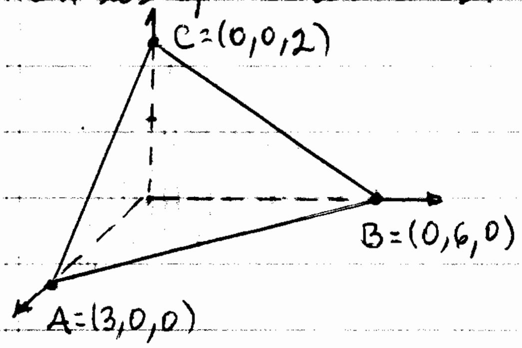
donde $\vec{v}_1 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v}_2 = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $P = P(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Ej 4.8.1. Hallar el área del triángulo de vértices $A=(1,2)$, $B=(-2,0)$ y $C=(1,-3)$ en $\mathbb{R}^2$



S/ Área $= 15/2$ u.c.

Ej 4.8.2. Hallar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x+y+3z=6$ con los ejes coordenados.



S/ Área $= 3\sqrt{14}$ u.c

La proposición 4.8.1, que vale para dos vectores en $\mathbb{R}^n$, puede generalizarse para incluir k vectores en $\mathbb{R}^n$ $(k \le n)$. Pensando con $k=3$ el volumen del paralelepípedo $P(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ será el producto del área de la "base" por su "altura".

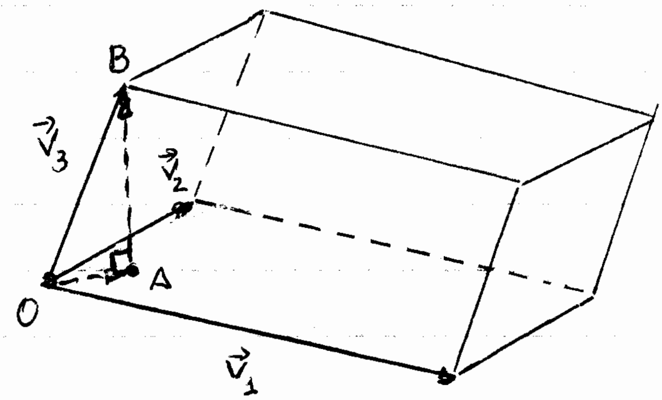
Esta altura es un vector $\vec{AB}$ tal que

$$\vec{V}_3 = \vec{OA} + \vec{AB}$$

con $\vec{OA} \in \langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle$ y

$\vec{AB}$ perpendicular a $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$

y por tanto a $\langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle$.



Para hallar este vector de "altura" necesitamos conocer el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Proposición 4.8.2 (Gram-Schmidt)

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_k$ vectores l.i en $\mathbb{R}^n$. Existe una colección de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_k\}$ tal que

i) $<\vec{e}_1, .., \vec{e}_j> = <\vec{v}_1, .., \vec{v}_j> \quad \forall j = 1, 2, .. k$

ii) $\vec{e}_j$ es perpendicular a $\vec{e}_1, .., \vec{e}_{j-1} \quad \forall j = 2, 3, ..$

D/. Tomar $\vec{e}_1 = \vec{v}_1$. Para $j=2$, elegir $\vec{e}_2 = \vec{v}_2 + \alpha \vec{e}_1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$:

$$0 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2> = <\vec{e}_1, \vec{v}_2 + \alpha \vec{e}_1> = <\vec{e}_1, \vec{v}_2> + \alpha <\vec{e}_1, \vec{e}_1>.$$

Por tanto, basta elegir $\alpha = - \frac{<e_1, \vec{v}_2>}{\|\vec{e}_1\|^2}$.

Supongamos que hemos elegido $\vec{e}_1, .., \vec{e}_j$ cumpliendo con i) y ii). ¿Cómo se elige $\vec{e}_{j+1}$? Suponemos que es de la forma $\vec{e}_{j+1} = \vec{v}_{j+1} + \alpha_1 \vec{e}_1 + .. + \alpha_j \vec{e}_j$ y calculamos $\alpha_i, i = 1, .. j$ con la condición $\vec{e}_{j+1} \perp \vec{e}_i \ \forall i = 1, 2, .. n$. Así se cumplirán las condiciones i) y ii) para $j+1$. Entonces

$$0 = <\vec{e}_i, \vec{e}_{j+1}> = <\vec{e}_i, \sum_{l=1}^{j} \alpha_l \vec{e}_l> = \sum_{l=1}^{j} \alpha_l <\vec{e}_i, \vec{e}_l> =$$

$$= \alpha_i \|\vec{e}_i\|^2$$

pq $\{\vec{e}_1, .., \vec{e}_j\}$ son ortogonales entre sí por elección. Entonces $\alpha_i = - \frac{<\vec{e}_i, \vec{e}_{j+1}>}{\|\vec{e}_i\|^2}$ y

$$\vec{e}_{j+1} = \vec{v}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \frac{<\vec{e}_i, \vec{e}_{j+1}>}{\|\vec{e}_i\|^2} \vec{e}_i. \qquad \blacksquare$$

Ej 4.8.3. Aplica el procedimiento de Gram-Schmidt a los vectores $\vec{v}_1=(0,1,-1)$, $\vec{v}_2=(1,-2,0)$, $\vec{v}_3=(2,1,1)$ para hallar tres vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ que satisfagan las conclusiones del teorema 4.8.2.

S/ $\vec{e}_1=\vec{v}_1=(0,1,-1)$; $\vec{e}_2=(1,-1,-1)$; $\vec{e}_3=(2,1,1)$.

Proposición 4.8.2.

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ vectores l.i en $\mathbb{R}^n$; existen vectores $\vec{b}$ y $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{v}_k=\vec{b}+\vec{c}$ con $\vec{b}$ perpendicular a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ y $\vec{c} \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle$.

D/ Aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt a los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ para hallar vectores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}$ tal que sean ortogonales entre sí y $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j \rangle$ $\forall j=1,\dots,k-1$

Sea $\vec{c}=\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{e}_j \rangle}{\|\vec{e}_j\|^2}\vec{e}_j \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ y $\vec{b}=\vec{v}_k-\vec{c}$. Falta probar que $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$: si $i=1,\dots,k-1$

$$\langle \vec{b}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{e}_j \rangle}{\|\vec{e}_j\|^2}\vec{e}_j, e_i \rangle$$

$$= \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, \vec{e}_j \rangle}{\|\vec{e}_j\|^2} \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle \overset{e_i \perp e_j \ (i \neq j)}{=}$$

$$= \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle - \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle = 0$$

Por tanto, $\vec{b} \perp \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1} \rangle \overset{G-S}{=} \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ y en particular $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$. ∎

El volumen del paralelepípedo $P(\vec{v}_1, .., \vec{v}_k)$ se define por inducción en k. Su volumen es el producto del volumen de su <u>base</u>, que es $P(\vec{v}_1, .., \vec{v}_{k-1})$, y de la longitud de su <u>altura</u> que es $\vec{b}$, como en la prop 4,8,2. Diremos que este es el volumen k-dimensional de P, $V_k(P)$ es la notación.

NOTA: Una vez demostrado el próximo resultado veremos que el volumen de P no depende de la elección que se haya hecho de la base para definir el volumen.

Teorema 4.8.3.

> Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_k$ vectores l.i. en $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$. Se tiene
>
> $$V_k(P(\vec{v}_1, .., \vec{v}_k)) = \sqrt{|A^t A|}$$
>
> donde A es la matriz $n \times k$ cuyas columnas son las coordenadas de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_k$.

D/ Observar que como $A \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$, $A^t A$ es una matriz cuadrada de orden k y podemos escribir su determinante $|A^t A|$.

Haremos la demostración por inducción en k. El caso $k=2$ es la prop. 4.8.1. Incluso el caso $k=1$ es cierto (¡comprobar!)

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $V_{k-1}(P(\vec{v}_1, .., \vec{v}_{k-1})) = (|B^t B|)^{1/2}$ con B la matriz $n \times (k-1)$ cuyas columnas son las coordenadas de $\vec{v}_1, .., \vec{v}_{k-1}$.

Para el caso k sea $A = [\vec{v}_1; \dots, \vec{v}_k]$ (por columnas).

Por el lema 4.8.2 existen $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{v}_k = \vec{b} + \vec{c}$ con $\vec{c} \in \langle \vec{v}_1, .., \vec{v}_{k-1} \rangle$ y $\vec{b} \perp \vec{v}_j$, $j = 1, .., k-1$.

Sea $\tilde{A} = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{b}]$ (por columnas)

Como $\vec{b} = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \vec{v}_j$ se puede pasar de A a $\tilde{A}$ restando a la última columna $\alpha_j \vec{v}_j$ con $j = 1, 2, \dots k-1$. Por tanto existen matrices elementales $E_1, \dots, E_{k-1} \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ del tipo $E_k^j(\alpha)$ con det 1, tal que $\tilde{A} = A E_1 \dots E_{k-1}$. Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes (para matrices cuadradas)

$$\det(\tilde{A}^t \tilde{A}) = \det(E_{k-1}^t \dots E_1^t A^t A E_1 \dots E_{k-1})$$

$$= \det(A^t A).$$

Para usar la hipótesis de inducción sea, $B = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}] \in M_{n \times (k-1)}(\mathbb{R})$ obtenida de A quitando la última columna.

Se tiene

$$\underset{(k \times n)}{\tilde{A}^t \tilde{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{v}_{k-1}^{\,t} \\ \vec{b}^{\,t} \end{bmatrix}} \underset{(n \times k)}{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{b}]} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}_1\|^2 & \dots & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_{k-1} \rangle, & \langle \vec{v}_1, \vec{b} \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_1 \rangle, & \dots & \|\vec{v}_{k-1}\|^2, & \langle \vec{v}_{k-1}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{v}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{b}, \vec{v}_{k-1} \rangle & \|\vec{b}\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} & B^T B & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \|\vec{b}\|^2 \end{array} \right)$$

pq. $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$

Desarrollando el determinante por la última fila (o columna)

$$\det(A^t A) = \det(\tilde{A}^t \tilde{A}) = \|\vec{b}\|^2 \det(B^T B)$$

Como $\|\vec{b}\|$ es la longitud de la altura y $(\det(B^T B))^{1/2}$ es el volumen de la base por la hipótesis de inducción se deduce que

$$V_k(P) = (|A^t A|)^{1/2}.$$

∎

NOTA: Observa que A^tA es una matriz de orden k con determinante positivo porque coincide con el cuadrado de un volumen. Por otro lado, AA^t es una matriz de orden n cuyo determinante es cero cuando $k<n$. ¿Por qué? $(A \in M_{n\times k}(\mathbb{K}))$.

Corolario 4.8.4.

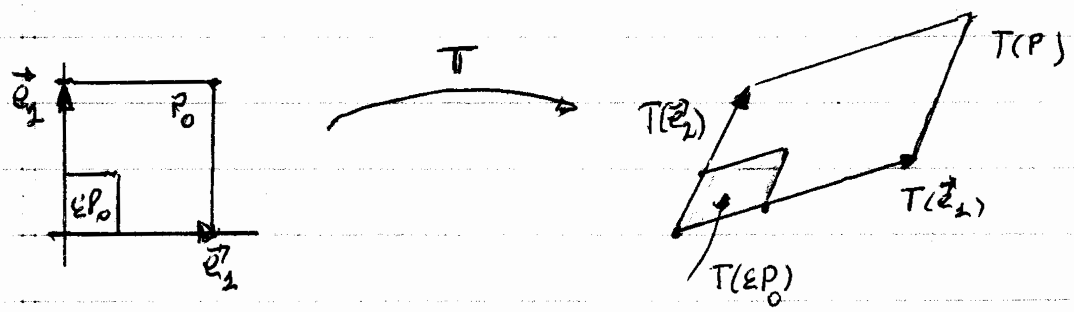
Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son n vectores l.i. en $\mathbb{R}^n$, $V_n(P) = |\det(A)|$ donde $P = P(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ y A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

D/ Como A es una matriz cuadrada, $\det(A^tA) = \det(A^t)\cdot\det(A) = [\det(A)]^2$. Como $V(P) = \sqrt{\det(A^tA)} = \sqrt{[\det(A)]^2}$ el resultado se deduce inmediatamente. ∎

Ej 4.8.4. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,-3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,2)$ y $\vec{v}_3 = (1,2,-1)$

S/ $V_3(P(v_1, v_2, v_3)) = 10$

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $P_0 = P(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ el "cubo" unidad determinado por los vectores coordenadas de $\mathbb{R}^n$. El volumen de P_0 es 1. ¿Cuál es el volumen de $T(P_0)$?



Recuerda que $M(T) = [T(\vec{e}_1), \ldots, T(\vec{e}_n)]$ (por columnas) y según el Corolario 4.8.4.

$$V_n(T(P_0)) = |\det M(T)| \quad .$$

Si partimos de un "cubo" de lado ε, digamos εP_0, como T es lineal $T(\varepsilon \vec{e}_j) = \varepsilon T(\vec{e}_j)$ y

$$V_n(T(\varepsilon P_0)) = \varepsilon^n |\det M(T)| \quad .$$

Si consideramos el "cubo" εP_0 trasladado por el vector $\vec{v}$, como T es lineal

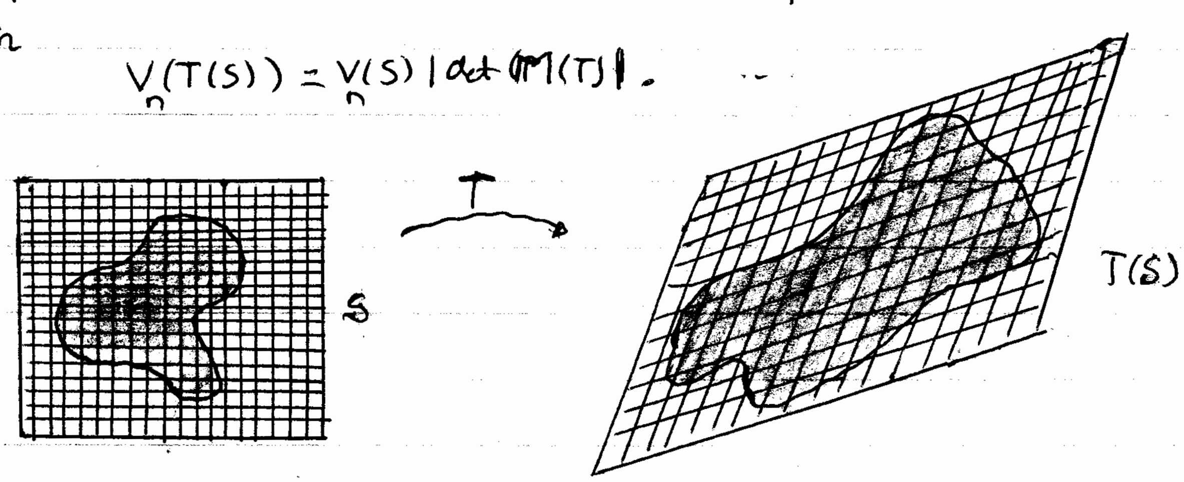
$$V_n(T(\vec{v}+\varepsilon P_0)) = V_n(T(\vec{v}) + T(\varepsilon P_0)) = V_n(T(\varepsilon P_0)) = \varepsilon^n |\det(M(T))| .$$

Es decir, el volumen de los "cubos" de lado ε se escala multiplicando por $|\det(M(T))|$.

Sea ahora S una región cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Su volumen se puede aproximar por "cubos" de la forma $\vec{v} + \varepsilon P_0$, de manera que el volumen de S es el límite (cuando $\varepsilon \to 0$) de la suma de los volúmenes de cada cubo (Cálculo de varias variables).

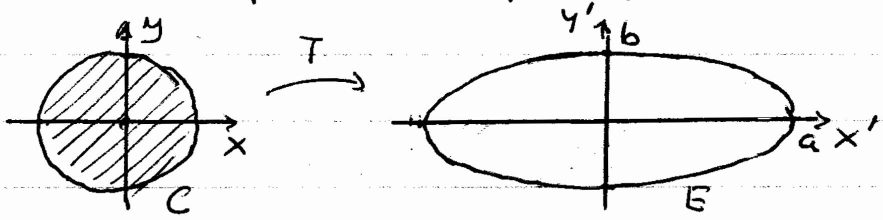
La región $T(S)$ se aproxima por paralelepípedos $T(\vec{v} + \varepsilon P_0)$ cuyo volumen es $\varepsilon^n |\det(M(T))|$. Sumando el volumen de todos estos paralelepípedos que aproximan $T(S)$ y haciendo que $\varepsilon \to 0$ se puede concluir

$$V_n(T(S)) = V_n(S) |\det(M(T))| .$$



Ej. 4.8.5. Halla el área de una elipse (E) de semiejes $a, b > 0$

S/. Sea
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Si $C = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ es el círculo de radio 1 y centro 0, como $x' = ax$, $y' = by$ se tiene $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = x^2+y^2 \leq 1$ es una elipse de semiejes $a, b > 0$. Por tanto

$$\mathrm{Vol}(E) = \mathrm{Vol}(C) \cdot |\det M(T)| = \pi \cdot ab.$$