Matemáticas e Ingeniería Informática

Hoja 9: Determinantes

1. Encuestra una fórmula de recurrencia para calcular

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

en función de D_{m-1} y D_{n-2}. Utilizalá para calcular D_8 y D_9.

2. Sea A una matriz cuadrada cuyo deteminante vale 9. Determinar, si es posible, el determinante de las matrices A^5, A^{-1} y $7A$.

a) Calcular el determinante del endomorfismo de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz A de f respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

así como su determinante.

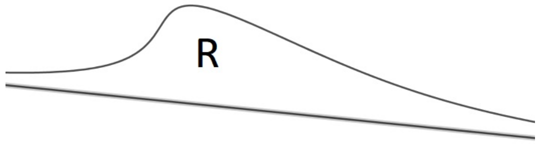
3. Sean a, b, c números reales positivos. El *elipsoide sólido de semiejes* a, b, c es la siguiente región sólida:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Halla la preimagen $f^{-1}(S)$, siendo $f(x,y,z) = (ax, by, cz)$. Demuestra que el volumen de S es $\frac{4}{3}\pi\, abc$.

4. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ la región plana comprendida entre la recta L y la curva de tercer grado Γ, dadas por:

$$L = \{ (x,y) \ : \ x + 10y = 0 \} \quad , \quad \Gamma = \left\{ (x,y) \ : \ \big((0'1)x + y\big) \cdot \left[1 + (x+y)^2 \right] = 1 \right\}.$$



a) Halla la imagen $F(R)$, siendo $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

b) Calcula explícitamente el área de R.

5. Sean A , B , C y D matrices de orden $n \times n$.

a) Demuestra que $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$.

b) ¿Es cierto que $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B - \det C \cdot \det D$?

6. Sean E un espacio vectorial de dimensión $n+m$ y $f : E \to E$ un endomorfismo. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+m}\}$ una base de E y pongamos $F = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$.

a) Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. La matriz de f, usando $\mathcal{B}$ en salida y en llegada, es de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, con A matriz $n \times n$ etc,

2. Se cumple $\mathbf{v} \in F \implies f(\mathbf{v}) \in F$, es decir $f(F) \subseteq F$.

b) Demuestra que, si $f(F) \subseteq F$, entonces hay endomorfismos g y h bien definidos por las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{rcccc} g & : & F & \longrightarrow & F \\ & & \mathbf{v} & \longmapsto & f(\mathbf{v}) \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcccc} h & : & E/F & \longrightarrow & E/F \\ & & \mathbf{v}+F & \longmapsto & f(\mathbf{v})+F \end{array} \quad ,$$

que la matriz de g en la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es A, que la matriz de h en la base $\{\mathbf{v}_{n+1} + F , \dots , \mathbf{v}_{n+m} + F\}$ es B y que el resultado del ejercicio **??** equivale a $\det f = \det g \cdot \det h$.

7. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 3} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Si F es el subespacio $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Big/ \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array} \right\}$, demostrar que f induce un endomorfismo $f_{|F} : F \to F$ definido por la misma fórmula que f. Calcular su determinante.

b)Probar que f induce también un endomorfismos $\overline{f}$ del espacio cociente $\mathcal{M}_{2\times 3}/F$. Calcular su determinante.

c)Relacionar los determinantes de f, $\overline{f}$ y $f_{|F}$.

8. Sea V un espacio vectorial, V^* su dual, y $f, g \in V^*$. Representamos por $f \wedge g : V \times V \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f\wedge g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1)g(\vec{v}_2) - f(\vec{v}_2)g(\vec{v}_1)$.

a) Demostrar que $f\wedge g$ es una forma bilineal sobre V, que es alternada y que satisface $f\wedge g = -g\wedge f$.

Representemos por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ su base canónica de $\mathbb{R}^2$ y por $\{E_1^*, E_2^*\}$ la base dual. Considerar la forma bilineal alternada $E_1^* \wedge E_2^*$ del apartado anterior.

b) Probar que si D es la única forma bilineal alternada sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$, entonces $D = E_1^* \wedge E_2^*$.