# Estructuras Algebraicas

**Segundo examen parcial. Martes 7 de diciembre de 2021.**

APELLIDOS: ______________________________
NOMBRE: ______________________ DNI/NIE: ________________ GRUPO: __________

---

**Ejercicio 1. (5 puntos)** Sea $G$ un grupo de orden 231 y $P \in \mathrm{Syl}_{11}(G)$.

(i) **(1 punto)** Prueba que $P \trianglelefteq G$.

(ii) **(1'5 puntos)** Construye un homomorfismo $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(P)$ con $\ker \alpha = \mathbf{C}_G(P)$.

(iii) **(1'5 puntos)** Deduce que el orden del grupo $G/\mathbf{C}_G(P)$ divide a 10.

(iv) **(1 punto)** Concluye que $\mathbf{C}_G(P) = G$ y, por tanto, que $P \subseteq \mathbf{Z}(G)$.

---

**Solución.**

(i) Tenemos que $|G| = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Ahora $\nu_{11}(G) = |G : \mathbf{N}_G(P)| \equiv 1 \bmod 11$ y además $\nu_{11}(G)$ divide a 21. Concluimos que $\nu_{11}(G)$ debe ser necesariamente $\nu_{11}(G) = 1$, es decir, $G = \mathbf{N}_G(P)$ y por tanto $P \trianglelefteq G$.

(ii) Como $P \trianglelefteq G$ podemos definir $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(P)$ de modo que $\alpha(g) = \alpha_g|_P$, donde $\alpha_g$ es el automorfismo de $P$ inducido por la conjugación por $g$. Es decir $\alpha(g) = gxg^{-1}$ para cada $x \in P$. Como $gPg^{-1} = P$ para todo $g \in G$, tenemos que $\alpha$ está bien definido y además $\alpha(g)$ es un automorfismo de $P$, por ser la restricción de un automorfismo. La aplicación $\alpha$ es un homomorfismo pues $\alpha(gh)(x) = ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \alpha(g)(\alpha(h)(x)) = \alpha(g)\alpha(h)(x)$.

El núcleo de $\alpha$ es $\ker \alpha = \{g \in G \mid \alpha(g)(x) = gxg^{-1} = x \ \forall x \in P\} = \mathbf{C}_G(P)$.

(iii) Por el primer Teorema de Isomorfía tenemos que $G/\mathbf{C}_G(P)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(P)$. Como $|P| = 11$, tenemos que $P \cong \mathsf{C}_{11}$ y $\mathrm{Aut}(P) \cong \mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{11})$. En particular, por el Teorema de Lagrange $|G/\mathbf{C}_G(P)|$ divide $|\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{11})| = \phi(11) = 10$.

(iv) Tenemos que $|G/\mathbf{C}_G(P)|$ divide tanto a 10, por el apartado anterior, como a $|G| = 231$. Por tanto $|G/\mathbf{C}_G(P)|$ divide al $\mathrm{mcd}(10, 231) = 1$. Esto fuerza que $|G/\mathbf{C}_G(P)| = 1$, es decir, $\mathbf{C}_G(P) = G$. En particular, $P \subseteq \mathbf{Z}(G)$ pues todo elemento de $G$ conmuta con todo elemento de $P$.