

## 9 Curvatura de una métrica

En este capítulo vamos a introducir una nueva curvatura que no es para curvas ni para superficies, sino para la métrica de Riemann misma  $Q$ . Se trata de una función escalar  $K[Q] : S \rightarrow \mathbb{R}$ . La denotamos simplemente  $K$  cuando no haya duda de cuál es  $Q$ .

Queremos enfatizar que *toda* métrica de Riemann en una superficie, tanto si es la primera forma fundamental como si no, tiene su propia curvatura. En *particular*, si la métrica es la primera forma fundamental entonces su curvatura coincide con la curvatura Gaussiana del apartado 5.6, es decir  $K[I] = k_1 k_2$ . Pero insistimos en que para  $Q \neq I$  la función  $K[Q]$  también existe y vamos a ver cómo calcularla a partir de  $Q$ . También damos unas cuantas consecuencias geométricas de esta curvatura de métricas: sobre los ángulos interiores de los triángulos geodésicos, sobre el crecimiento de las circunferencias geodésicas y sobre las isometrías.

### 9.1 Una regla de cálculo

En este apartado vamos a dar una primera definición de la curvatura de una métrica. Su significado geométrico se aclarará en los apartados siguientes.

En una superficie  $S$  la **derivada exterior** es una operación  $d$  que lleva 1-formas a 2-formas, con la siguiente descripción en unas coordenadas curvilíneas  $(u, v)$ :

$$d(adu + b dv) \equiv da \wedge du + db \wedge dv \equiv (b_u - a_v) du \wedge dv.$$

La derivada exterior es un cálculo de variaciones, por lo cual da el mismo resultado no importa en qué coordenadas curvilíneas se la calcule. Si  $\Phi(u, v)$  y  $\Psi(\lambda, \mu)$  son dos parametrizaciones de una superficie  $S$ , entonces cada forma de Pfaff tiene dos expresiones  $\omega \equiv adu + b dv \equiv \bar{a} d\lambda + \bar{b} d\mu$  y en general  $b_u - a_v$  y  $\bar{b}_\lambda - \bar{a}_\mu$  pueden ser *distintas funciones* escalares  $S \rightarrow \mathbb{R}$ , pero  $(b_u - a_v) du \wedge dv$  y  $(\bar{b}_\lambda - \bar{a}_\mu) d\lambda \wedge d\mu$  son *la misma 2-forma* en  $S$ .

Comprobemos esto en un ejemplo. Supongamos que los cambios entre coordenadas son  $u = \lambda$ ,  $v = e^\lambda \mu$  y consideramos el cálculo de la derivada exterior de  $\omega \equiv (u+v) du + 2u dv \equiv (\lambda + e^\lambda \mu + 2\lambda e^\lambda \mu) d\lambda + 2\lambda e^\lambda d\mu$  en unas y otras coordenadas. Las funciones:

$$(2u)_u - (u+v)_v \equiv 1, \quad (2\lambda e^\lambda)_\lambda - (\lambda + e^\lambda \mu + 2\lambda e^\lambda \mu)_\mu \equiv e^\lambda,$$

son claramente distintas (una es constante y la otra no), pero las 2-formas son idénticas:

$$(e^\lambda)(d\lambda \wedge d\mu) \equiv e^\lambda du \wedge d(e^{-\lambda} v) \equiv e^\lambda e^{-\lambda} du \wedge dv \equiv 1 \cdot du \wedge dv.$$

Vemos en este ejemplo que, al cambiar de coordenadas curvilíneas, el cambio en el factor  $b_u - a_v$  es compensado por el cambio en  $du \wedge dv$  y la 2-forma  $(b_u - a_v) du \wedge dv$  no cambia.

Recuerda que el resultado de la derivación exterior es una 2-forma, no una función escalar.

Dadas una superficie  $S$  y cualquier métrica  $Q$  en  $S$ , hallamos sucesivamente tres formas de Pfaff  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  y una función escalar  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  por la siguiente regla de cálculo:

$$\begin{array}{rcl} Q & = & \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ d\omega_1 & = & \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 & = & \omega_3 \wedge \omega_1 \\ d\omega_3 & = & K \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array} \quad (46)$$

Observa que las fórmulas mantienen el *orden cíclico* de los índices 1,2,3. Primero se descompone  $Q$  como suma de dos cuadrados, resultando dos formas de Pfaff  $\omega_1, \omega_2$ ; éstas determinan una única  $\omega_3$  que cumpla las igualdades segunda y tercera; una vez determinada  $\omega_3$ , la función escalar  $K$  queda determinada por la cuarta igualdad como el cociente  $d\omega_3/(\omega_1 \wedge \omega_2)$ .

**Ejemplo 1.** En una superficie  $S$  tenemos una métrica  $Q$  y unas coordenadas  $(u, v)$  en las que  $Q$  tiene matriz  $\begin{bmatrix} 1 & B \\ B & 1 \end{bmatrix}$  (coordenadas **de Chebichev**). Como ha de ser  $|B| < 1$ , podemos poner  $B \equiv \cos \theta(u, v)$  para cierta función suave  $0 < \theta(u, v) < \pi$ , y así:

$$Q \equiv (du)^2 + 2 \cos \theta(u, v) du dv + (dv)^2.$$

Completamos la parte  $(du)^2 + 2 \cos \theta(u, v) du dv$  a un cuadrado:

$$[(du)^2 + 2 \cos \theta(u, v) du dv] + \cos^2 \theta (dv)^2 \equiv (du + \cos \theta(u, v) dv)^2,$$

llegamos a  $Q \equiv (du + \cos \theta(u, v) dv)^2 + (\sin \theta(u, v) dv)^2$  y la siguiente pareja cumple la primera ecuación en (46):

$$\omega_1 \equiv du + \cos \theta(u, v) dv, \quad \omega_2 \equiv \sin \theta(u, v) dv.$$

Ahora hay que buscar  $\omega_3 \equiv a du + b dv$  que satisfaga las ecuaciones segunda y tercera en (46). La segunda ecuación es, en este caso:

$$-\theta_u \sin \theta du \wedge dv = \sin \theta dv \wedge \omega_3 \equiv -a \sin \theta du \wedge dv,$$

de donde  $a = \theta_u$  y  $\omega_3 \equiv \theta_u du + b dv$ . La tercera ecuación de (46) queda así:

$$\theta_u \cos \theta du \wedge dv = (\theta_u du + b dv) \wedge (du + \cos \theta dv) \equiv (\theta_u \cos \theta - b) du \wedge dv,$$

que es lo mismo que  $b = 0$ . Llegamos a  $\omega_3 \equiv \theta_u du$ . La cuarta ecuación de (46) es, pues:

$$-\theta_{uv} du \wedge dv = K \omega_1 \wedge \omega_2 \equiv K \sin \theta du \wedge dv,$$

y finalmente  $K = -\theta_{uv} / \sin \theta$ .

**Observa:** una vez elegidas  $\omega_1, \omega_2$ , cumpliendo la primera de las ecuaciones (46), las otras tres ecuaciones determinan  $\omega_3$  y  $K$  de manera única.

**Ejemplo 2.** En una superficie tenemos una métrica  $Q$  y coordenadas de Fermi  $(u, v)$  para  $Q$ , de modo que  $Q \equiv (du)^2 + C(u, v) (dv)^2$  siendo  $C$  una función suave y positiva. Entonces  $h \equiv \sqrt{C}$  también es suave y nos permite escribir  $Q \equiv (du)^2 + h^2 (dv)^2$ . Elegimos  $\omega_1 \equiv du$  y  $\omega_2 \equiv h dv$ , que en las ecuaciones segunda y tercera de (46) determinan  $\omega_3 \equiv -h_u dv$ , lo que llevado a la cuarta ecuación nos da:

$$Q \equiv (du)^2 + h^2 (dv)^2 \implies K \equiv \frac{-h_{uu}}{h}. \quad (47)$$

**Nota.** Si planteamos  $\omega_3 \equiv a \omega_1 + b \omega_2$ , entonces la segunda ecuación de (46) queda  $d\omega_1 = -a \omega_1 \wedge \omega_2$  y la tercera  $d\omega_2 = -b \omega_1 \wedge \omega_2$ , resultando fórmulas para  $a, b$  que se juntan en (atención a los signos):

$$\omega_3 \equiv -\frac{d\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \omega_1 - \frac{d\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \omega_2.$$

A veces se utiliza esta fórmula general y otras se determina  $\omega_3$  directamente a partir de las ecuaciones, como hemos hecho en los dos ejemplos anteriores.

**Teorema-definición 118.** Fijada una métrica  $Q$  en una superficie  $S$ , la regla de cálculo (46) produce la misma función escalar  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  para todas las parejas  $\omega_1, \omega_2$  que cumplan la primera ecuación. Luego  $K$  sólo depende de  $Q$ .

La función  $K$  se llama **curvatura Gaussiana de  $Q$** . Si queremos especificar la métrica a la que pertenece, la denotamos  $K[Q]$ .

**Demostración.** La identidad  $Q \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2$  significa lo siguiente:

En cada punto  $\mathbf{p} \in S$  las formas lineales  $\omega_{1\mathbf{p}}, \omega_{2\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$  son coordenadas ortonormales para el producto escalar  $Q_{\mathbf{p}}(\cdot, \cdot)$ .

De esto se deduce fácilmente que si  $\omega'_1, \omega'_2$  es otra pareja cumpliendo  $Q \equiv \omega_1'^2 + \omega_2'^2$  entonces  $S$  se recubre, con solapamiento, por trocitos de superficie en cada uno de los cuales hay definidas una función escalar suave  $\psi$  y una constante  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tales que:

$$\begin{aligned}\omega'_1 &\equiv \cos \psi \omega_1 + \sin \psi \omega_2, \\ \omega'_2 &\equiv \varepsilon \cdot (-\sin \psi \omega_1 + \cos \psi \omega_2),\end{aligned}$$

de donde  $\omega'_1 \wedge \omega'_2 \equiv \varepsilon \omega_1 \wedge \omega_2$ . Calculamos:

$$\begin{aligned}d\omega'_1 &\equiv d\psi \wedge (-\sin \psi \omega_1 + \cos \psi \omega_2) + \cos \psi \omega_2 \wedge \omega_3 + \sin \psi \omega_3 \wedge \omega_1 \equiv \\ &\equiv \varepsilon \cdot (-\sin \psi \omega_1 + \cos \psi \omega_2) \wedge \varepsilon \cdot (\omega_3 - d\psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\omega'_2 &\equiv \varepsilon d\psi \wedge (-\cos \psi \omega_1 - \sin \psi \omega_2) + \varepsilon (-\sin \psi \omega_2 \wedge \omega_3 + \cos \psi \omega_3 \wedge \omega_1) \equiv \\ &\equiv \varepsilon (\omega_3 - d\psi) \wedge (\cos \psi \omega_1 + \sin \psi \omega_2),\end{aligned}$$

es decir:

$$d\omega'_1 \equiv \omega'_2 \wedge \varepsilon (\omega_3 - d\psi) \quad \text{y} \quad d\omega'_2 \equiv \varepsilon (\omega_3 - d\psi) \wedge \omega'_1,$$

luego si ponemos  $\omega'_3 \equiv \varepsilon (\omega_3 - d\psi)$  entonces la terna  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  cumple la tres primeras ecuaciones de (46). La cuarta ecuación  $d\omega'_3 = K' \omega'_1 \wedge \omega'_2$  es entonces la siguiente:

$$\varepsilon d\omega_3 - \varepsilon d(d\psi) = K' \varepsilon \omega_1 \wedge \omega_2,$$

pero la derivada exterior de una forma de Pfaff exacta es cero, es decir que  $d(d\psi) \equiv 0$ , luego la función escalar  $K'$  determinada por la regla (46) a partir de la pareja  $\omega'_1, \omega'_2$  es:

$$K' \equiv \frac{\varepsilon d\omega_3}{\varepsilon \omega_2 \wedge \omega_2} \equiv \frac{d\omega_3}{\omega_2 \wedge \omega_2},$$

exactamente la misma que se determina a partir de la pareja  $\omega_1, \omega_2$ . Al ser esto cierto en cada uno de los trocitos de superficie con los que hemos recubierto  $S$ , queda demostrada la unicidad *global* de  $K$  en toda  $S$ .  $\square$

Sea  $Q \equiv A(du)^2 + 2Bdudv + C(dv)^2$  la escritura de  $Q$  en coordenadas cualesquiera. Podemos completar  $A(du)^2 + 2Bdudv$  a un cuadrado y obtener la descomposición  $Q \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2$  donde:

$$\omega_1 \equiv \sqrt{A}du + \frac{B}{\sqrt{A}}dv, \quad \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}}dv,$$

para la cual se calcula:

$$\omega_3 \equiv \frac{1}{2\sqrt{AC - B^2}} \left( (A_v - 2B_u)du - C_u dv + B \frac{dA}{A} \right),$$

y resulta la fórmula para la curvatura Gaussiana en coordenadas cualesquiera:

$$\begin{aligned}4(AC - B^2)^2 K &\equiv -2(AC - B^2)(A_{vv} - 2B_{uv} + C_{uu}) + \\ &+ A \cdot (A_v C_v - 2B_u C_v + C_u^2) + \\ &+ B \cdot (A_u C_v - A_v C_u - 2A_v B_v + 4B_u B_v - 2B_u C_u) + \\ &+ C \cdot (A_u C_u - 2A_u B_v + A_v^2).\end{aligned}$$

Sólo utilizaremos esta fórmula para deducir unos corolarios.

**Corolario 119.** Si en un punto  $\mathbf{p}$  se anulan las derivadas primeras de los coeficientes:

$$A_u|_{\mathbf{p}} = A_v|_{\mathbf{p}} = B_u|_{\mathbf{p}} = B_v|_{\mathbf{p}} = C_u|_{\mathbf{p}} = C_v|_{\mathbf{p}} = 0,$$

entonces en el punto  $\mathbf{p}$  (y tal vez sólo en el punto  $\mathbf{p}$ ) se tiene la igualdad:

$$K(\mathbf{p}) = \left. \frac{-\frac{1}{2}A_{vv} + B_{uv} - \frac{1}{2}C_{uu}}{AC - B^2} \right|_{\mathbf{p}}.$$

El siguiente corolario es una de las tres ecuaciones de compatibilidad que se mencionaron en el apartado 6.5.

**Corolario 120. (Ecuación de Gauss)** Si la métrica es la primera forma fundamental,  $Q \equiv I$ , entonces la curvatura Gaussiana coincide con el producto de las curvaturas principales:

$$K[I] \equiv k_1 k_2 .$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in S$  un punto cualquiera. Rotamos y trasladamos la superficie (lo cual no altera la primera forma fundamental, ni tampoco las curvaturas principales) hasta llevar el punto  $\mathbf{p}$  al origen  $(0,0,0)$ , el plano tangente  $T_{\mathbf{p}}S$  al plano  $\{z=0\}$ , y las direcciones principales de curvatura en  $\mathbf{p}$  a las de los ejes  $x$  e  $y$ . Hecho esto, un trocito de la superficie conteniendo a  $\mathbf{p}$  se describe ahora como un grafo  $z = (k_1/2)x^2 + (k_2/2)y^2 + R(x,y)$  donde  $R(x,y)$  es un resto de Taylor al menos cúbico. Tenemos la parametrización:

$$\Phi(x,y) \equiv \left( x, y, \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + R \right) ,$$

en la que  $\mathbf{p}$  corresponde a  $(x,y) = (0,0)$ . En esta parametrización, tenemos:

$$I \equiv (1 + k_1^2 x^2 + R_1)(dx)^2 + 2(k_1 k_2 xy + R_2) dx dy + (1 + k_2^2 y^2 + R_3)(dy)^2 ,$$

donde  $R_1, R_2, R_3$  son restos al menos cúbicos. En  $(x,y) = (0,0)$  se anulan las derivadas primeras de las funciones coeficiente, y además:

$$\left( -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} \right)_{(x,y)=(0,0)} = k_1 k_2 \quad , \quad (EG - F^2)_{(x,y)=(0,0)} = 1 ,$$

que llevado al corolario 119 nos da  $K(\mathbf{p}) = k_1 k_2$ . Como el punto  $\mathbf{p}$  era arbitrario, hemos terminado.  $\square$

## 9.2 Teorema de Gauss para triángulos

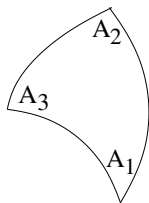
**Definición 121.** Sea  $(S, Q)$  una superficie dotada de una métrica de Riemann. Un **triángulo geodésico planar** es una parte de la superficie  $T \subset S$  que cumple las dos condiciones siguientes:

- Se puede poner  $T$  en correspondencia bicontinua con una región del plano limitada por una curva cerrada simple.
- $T$  está limitada por una curva cerrada simple formada por tres segmentos de geodésica para  $Q$ .

**Teorema 122. (Gauss).** Sea  $T \subset (S, Q)$  un triángulo geodésico planar. Entonces:

$$\int_T K d\text{área} = A_1 + A_2 + A_3 - \pi ,$$

siendo  $A_1, A_2, A_3$  los ángulos interiores en las esquinas de  $T$ , medidos mediante  $Q$ .



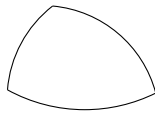
Puedes ver una demostración en el apartado 9.7.

**Ejemplo 1.** Parametrizamos la esfera de radio  $R = 1/c$ , menos los polos norte y sur, por:

$$\Psi(u,v) \equiv \frac{1}{c} \cdot \left( \cos(cu) \cos(cv), \cos(cu) \sin(cv), \sin(cu) \right) , \quad (u,v) \in \left( -\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c} \right) \times \mathbb{R} .$$

En esas coordenadas la primera forma fundamental se escribe  $Q \equiv (du)^2 + \cos^2(cu)(dv)^2$  y la fórmula (47) nos da  $K[I] = c^2 = 1/R^2$ , una constante positiva. Todo **triángulo esférico**  $T$  (triángulo geodésico en esta esfera) satisface:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi + c^2 \cdot \text{área}(T) .$$



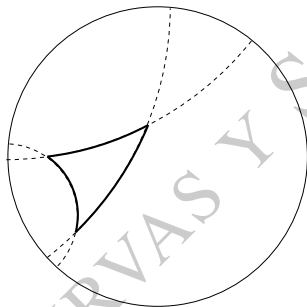
En un triángulo esférico los ángulos interiores suman más que  $\pi$ , siendo el exceso angular proporcional al área del triángulo.

*Tercera demostración del teorema 61 del apartado 4.8.* Si existiera una isometría de un trocito de esfera a un trocito de plano, llevaría un triángulo esférico a un triángulo Euclídeo. Esto es imposible porque una isometría preserva ángulos y, mientras que el triángulo esférico tiene exceso angular, el Euclídeo no lo tiene.  $\square$

**Ejemplo 2.** La métrica hiperbólica estándar  $Q \equiv (du)^2 + \cosh^2 u (dv)^2$  tiene  $K[Q] \equiv -1$ . Todo **triángulo hiperbólico** (triángulo geodésico en el plano hiperbólico) satisface:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi - \text{área}_Q(T).$$

En un triángulo hiperbólico los ángulos interiores suman menos que  $\pi$ , siendo el defecto angular igual al área hiperbólica estándar del triángulo.



**Teorema 123.** La curvatura Gaussiana es invariante por isometrías locales. Más concretamente, si  $\phi : (S_1, Q_1) \rightarrow (S_2, Q_2)$  es una isometría local que lleva el punto  $\mathbf{p} \in S_1$  al punto  $\phi(\mathbf{p}) \in S_2$ , entonces  $K_1(\mathbf{p}) = K_2(\phi(\mathbf{p}))$ , siendo  $K_1$  la curvatura Gaussiana de  $Q_1$  y  $K_2$  la de  $Q_2$ .

Esto puede enunciarse como  $K_1 \equiv K_2 \circ \phi$ , y también que  $\phi$  lleva cada conjunto de nivel  $\{K_1 = c\}$  en  $S_1$  dentro del conjunto del mismo nivel  $\{K_2 = c\}$  en  $S_2$ .

El caso particular de  $\phi : (S_1, I_1) \rightarrow (S_2, I_2)$  es el **teorema egregio de Gauss** (teorema 93, apartado 6.5).

*Primera demostración.* Dado  $\mathbf{p}$  encontramos un trozo  $U_1 \subset S_1$  conteniendo a  $\mathbf{p}$  y uno  $U_2 \subset S_2$  conteniendo a  $\phi(\mathbf{p})$  tales que  $\phi : U_1 \rightarrow U_2$  es biyectiva con inversa suave. Si  $T \subset U_1$  es un triángulo geodésico de  $Q_1$  conteniendo a  $\mathbf{p}$  en su interior, entonces  $\phi(T)$  es un triángulo geodésico de  $Q_2$  conteniendo a  $\phi(\mathbf{p})$  en su interior. Si  $T$  es planar  $\phi(T)$  también lo es, y:

$$\text{área}_{Q_1}(T) = \text{área}_{Q_2}(\phi(T)).$$

Asimismo, los ángulos interiores de  $T$  (medidos mediante  $Q_1$ ) coinciden con los ángulos interiores de  $\phi(T)$  (medidos mediante  $Q_2$ ). Todo esto, junto con el teorema 122, implica la igualdad:

$$\frac{1}{\text{área}_{Q_1}(T)} \int_T K_1 d\text{área}_{Q_1} = \frac{1}{\text{área}_{Q_2}(\phi(T))} \int_{\phi(T)} K_2 d\text{área}_{Q_2},$$

y, pasando al límite cuando  $T \rightarrow \mathbf{p}$ , se obtiene  $K_1(\mathbf{p}) = K_2(\phi(\mathbf{p}))$ .

*Segunda demostración.* Si  $\Phi(u, v)$  es una parametrización suave de un trozo  $U_1 \subseteq S_1$ , con  $Q_1 \equiv (du)^2 + h^2 \cdot (dv)^2$ , entonces  $\Psi(u, v) \equiv \phi \circ \Phi(u, v)$  es una parametrización suave de un trozo de  $S_2$  y, como  $\phi$  está dada en  $U_1$  por  $\Phi(u, v) \mapsto \Psi(u, v)$  y es isometría local, resulta que  $Q_2$  tiene en la parametrización  $\Psi(u, v)$  la misma expresión  $(du)^2 + h^2 \cdot (dv)^2$ . Entonces la fórmula (47) da  $K_1(\Phi(u, v)) \equiv -h_{uu}/h \equiv K_2(\Psi(u, v))$ , es decir  $K_1(\mathbf{p}) = K_2(\phi(\mathbf{p}))$  para todo punto  $\mathbf{p} \in U_1$ . Como toda  $S_1$  se recubre por dominios de coordenadas de Fermi, tenemos  $K_1 \equiv K_2 \circ \phi$  en toda  $S_1$ .  $\square$

Damos una tercera demostración al final del apartado 9.3.

### 9.3 Ecuación de Jacobi

Dada una expresión en coordenadas de Fermi  $Q \equiv (du)^2 + h^2 (dv)^2$ , la fórmula  $K = -h_{uu}/h$  puede interpretarse como que la función  $h$  cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$h_{uu} + Kh = 0 \quad (48)$$

Se trata de una EDO en la que  $u$  es la variable independiente mientras que  $v$  juega solamente el papel de *parámetro*. Se la llama **ecuación de Jacobi**. Vamos a sacar dos consecuencias de esta ecuación, una en este apartado y otra en el siguiente.

Veamos una interpretación elemental de la curvatura Gaussiana. Fijamos un punto  $\mathbf{p}$  de la superficie y para  $r > 0$  pequeño definimos la **circunferencia Riemanniana**  $C_r$  centrada en  $\mathbf{p}$  como el conjunto de puntos que se unen con  $\mathbf{p}$  mediante geodésicas de  $Q$ -longitud  $r$ . Las  $C_r$  son curvas cerradas cercanas a  $\mathbf{p}$ . Entonces definimos, para un  $\varepsilon$  pequeño, la siguiente función:

$$\ell_{\mathbf{p}}(r) : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \ell_{\mathbf{p}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \text{longitud}_Q(C_r).$$

Con el auxilio de la ecuación de Jacobi se demuestra el siguiente resultado (ver apartado 9.8).

**Teorema 124.** *La función  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en el sentido más fuerte: se extiende a una función  $\mathcal{C}^\infty$  en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Además, da los valores siguientes:*

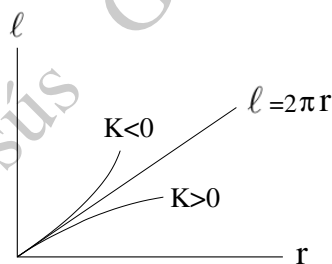
$$\ell_{\mathbf{p}}(0) = 0 \quad , \quad \ell'_{\mathbf{p}}(0) = 2\pi \quad , \quad \ell''_{\mathbf{p}}(0) = 0 \quad , \quad \ell'''_{\mathbf{p}}(0) = -2\pi K(\mathbf{p}).$$

Tenemos, pues, el desarrollo:

$$\ell_{\mathbf{p}}(r) \equiv 2\pi \left( r - \frac{K(\mathbf{p})}{6} r^3 \right) + O(r^4). \quad (49)$$

Si  $K(\mathbf{p}) > 0$ , entonces cada  $C_r$  tiene longitud menor que  $2\pi r$ , o sea es más corta que una circunferencia Euclídea del mismo radio. De hecho  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$  es función cóncava cerca de  $r = 0$ .

Si  $K(\mathbf{p}) < 0$ , entonces  $C_r$  tiene longitud mayor que  $2\pi r$ , o sea es más larga que una circunferencia Euclídea del mismo radio. En este caso  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$  es función convexa cerca de  $r = 0$ .



Es instructivo hacer esta comparación de longitudes de las  $C_r$  en el caso  $Q \equiv I$ : en un punto elíptico las  $C_r$  están acortadas respecto a las circunferencias Euclídeas, en cambio en un punto hiperbólico las  $C_r$  deben “subir y bajar” por encima y por debajo del plano tangente afín  $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$  y eso las alarga con respecto a las circunferencias Euclídeas.

*Tercera demostración del teorema 123.* Como una isometría  $\phi : (S, Q) \rightarrow (S', Q')$  lleva geodésicas a geodésicas, lleva cada curva  $C_r$  centrada en  $\mathbf{p}$  a la curva  $C'_r$  centrada en  $\mathbf{q} = \phi(\mathbf{p})$  del mismo radio  $r$ . Entonces las funciones  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$  y  $\ell_{\mathbf{q}}(r)$  son idénticas para  $r$  pequeño y la fórmula (49) implica que  $K(\mathbf{p}) = K'(\mathbf{q})$ .  $\square$

## 9.4 Teorema de Minding

La segunda consecuencia de la ecuación de Jacobi es el siguiente resultado.

**Teorema 125. (Ferdinand Minding, 1839).** *Dos métricas con la misma curvatura Gaussiana constante son localmente isométricas.*

*Demostración.* En realidad vamos a demostrar más:

Sean  $(S_1, Q_1), (S_2, Q_2)$  dos superficies con métricas que tienen curvaturas Gaussianas idénticas a una misma constante  $a$ . Dados cepillos geodésicos (noción definida en el apartado 8.3) con el mismo dominio  $J \times J'$ :

$$\Phi(u, v) : J \times J' \longrightarrow S_1, \quad \Psi(u, v) : J \times J' \longrightarrow S_2,$$

con  $v$  longitud Riemanniana de arco para los nervios de esos cepillos y con  $\Phi$  bicon-  
tinua, la aplicación:

$$\phi : \Phi(J \times J') \longrightarrow \Psi(J \times J') \quad , \quad \Phi(u, v) \xrightarrow{\phi} \Psi(u, v), \quad (50)$$

es una isometría local.

En el trozo de superficie  $V_1 = \Phi(J \times J')$  tenemos  $Q_1 \equiv (du)^2 + C(u, v)(dv)^2$ . Son hipótesis adicionales que el camino  $v \mapsto \Phi(0, v)$ , que parametriza al nervio  $\{u = 0\}$  del cepillo, es un camino geodésico unitario; esto se traduce en  $C_u(0, v) \equiv 0$  (para que  $\{u = 0\}$  sea una línea geodésica) y en  $C(0, v) \equiv 1$  (para que el camino sea unitario). Haciendo  $h \equiv \sqrt{C(u, v)}$ , las tres condiciones:

$$\left. \begin{aligned} h_{uu} + ah &= 0 \\ h(0, v) &= 1 \\ h_u(0, v) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

son un problema completo de valores iniciales para la ecuación de Jacobi, con  $v$  actuando solamente como parámetro. La consecuencia es que la función  $h(u, v) : J \times J' \rightarrow \mathbb{R}$  queda unívocamente determinada por la constante  $a$ . Se sigue que en el trozo de superficie  $V_2 = \Psi(J \times J')$  tenemos la misma  $h$  y por lo tanto la misma  $C \equiv h^2$ , es decir  $Q_2 \equiv (du)^2 + C(u, v)(dv)^2$  con exactamente la misma función  $C(u, v)$  que teníamos para  $Q_1$  en  $V_1$ . Esto demuestra que  $\phi$ , dada por (50), es una isometría local.  $\square$

El caso más sencillo es el  $K_1 \equiv 0$ , es decir  $a = 0$ . Entonces la solución de (51) es  $h \equiv 1$  y la métrica  $Q \equiv (du)^2 + (dv)^2$  no sólo es **localmente Euclídea**, sino que además queda *escrita en forma estándar* en cualquier cepillo geodésico unitario.

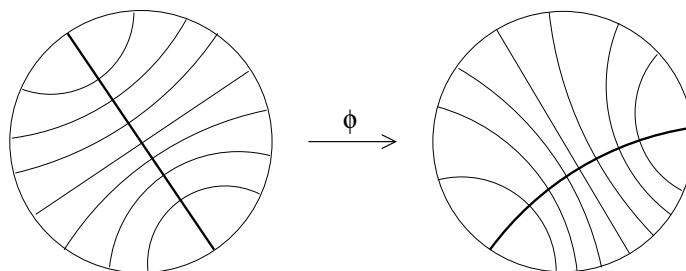
Veamos ahora el caso en que  $K_1$  es una constante positiva:  $a = c^2$  con  $c > 0$ . En este caso la solución de (51) es  $h(u, v) \equiv \cos(cu)$  (independiente de  $v$ ) y  $Q_1 \equiv (du)^2 + \cos^2(cu)(dv)^2$  no sólo es **localmente esférica de curvatura  $c^2$** , sino que además queda escrita con la misma expresión que hemos visto en el ejemplo 1 del apartado 9.2 para la primera forma fundamental de una esfera de radio  $1/c$ . Es preciso señalar que la parametrización  $\Psi$  que hemos dado en el apartado 9.2 es un cepillo geodésico unitario en la esfera de radio  $1/c$ : el camino  $v \mapsto \Psi(0, v)$  parametriza el ecuador por longitud de arco y cada camino  $u \mapsto \Psi(u, v_0)$  parametriza por longitud de arco un meridiano ortogonal al ecuador, cruzándolo en  $u = 0$ .

Finalmente supongamos que  $K_1$  es una constante negativa:  $a \equiv -c^2$  con  $c > 0$ . La solución del correspondiente sistema (51) es  $h(u, v) \equiv \cosh(cu)$ , de nuevo independiente de  $v$ . La expresión que resulta,  $Q_1 \equiv (du)^2 + \cosh^2(cu)(dv)^2$ , define una métrica **localmente hiperbólica de curvatura  $-c^2$** . El caso  $c = 1$  es el de la métrica localmente hiperbólica estándar, con curvatura constante  $-1$ .

Sea  $(S, Q)$  el disco de Poincaré y apliquémosle la demostración del teorema 125. Cada geodésica maximal es infinitamente larga en ambas direcciones y su parametrización  $\beta(v)$  por longitud de arco hiperbólico está definida en  $v \in J = (-\infty, \infty)$ . Lo mismo ocurre con las “cerdas” del cepillo con nervio  $\beta$ , el cual resulta estar definido en  $J \times J' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y de hecho es un difeomorfismo:

$$\Phi(u, v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S.$$

Utilizando dos cepillos de éstos, la aplicación  $\phi$  definida por (50) resulta ser una *isometría global* del disco de Poincaré consigo mismo. Dados dos puntos cualesquiera  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in S$  y cualesquiera bases  $Q$ -ortonormales:  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $T_{\mathbf{p}_1}S$  y  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  de  $T_{\mathbf{p}_2}S$ , es fácil ajustar la isometría global  $\phi$  para que sea  $\phi(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2$  y  $(d\phi)_{\mathbf{p}_1}$  lleve la base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  a la  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ .



El plano hiperbólico es tan simétrico como la esfera o el plano Euclídeo: tiene isometrías globales que llevan un par dado (punto, dirección tangente) a cualquier otro.

## 9.5 Búsqueda de isometrías

**Ejemplo 1.** Demuestra que la métrica  $Q \equiv 2 \frac{v^2}{u^2} (du)^2 - 2 \frac{v}{u} du dv + (dv)^2$  es localmente isométrica a la Euclídea  $(dx)^2 + (dy)^2$ .

Descomponemos  $Q \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2$  con  $\omega_1 \equiv \frac{v}{u} du$  y  $\omega_2 \equiv \frac{v}{u} du - dv$ . De  $\frac{d\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \equiv \frac{d\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \equiv \frac{1}{v}$  sacamos  $\omega_3 \equiv \frac{-1}{v} \omega_1 + \frac{-1}{v} \omega_2 \equiv -\frac{2}{u} du + \frac{1}{v} dv$ , claramente exacta. Luego  $d\omega_3 \equiv 0$  y  $K[G] \equiv 0$ . Por el teorema de Minding,  $Q$  es localmente Euclídea.

**Ejemplo 2.** Tenemos superficies  $S_1, S_2$  parametrizadas respectivamente por  $\Phi(u, v)$ ,  $u > 0$ , y por  $\Psi(\lambda, \mu)$ ,  $\lambda > 0$ . Les damos las métricas:

$$Q_1 \equiv (du)^2 + u^6 (dv)^2, \quad Q_2 \equiv (d\lambda)^2 + \lambda^{-4} (d\mu)^2.$$

Demuestra que ningún trocito de  $(S_1, Q_1)$  es isométrico a ningún trocito de  $(S_2, Q_2)$ .

Calculamos  $K[Q_1] \equiv \frac{-6}{u^2}$  y  $K[Q_2] \equiv \frac{-6}{\lambda^2}$ . Una isometría entre trocitos, de existir, sería de la forma  $\Phi(u, v) \xrightarrow{h} \Psi(\lambda(u, v), \mu(u, v))$  y tendría que cumplir:

$$\frac{-6}{u^2} \equiv K[Q_1] \equiv K[Q_2] \circ h \equiv \frac{-6}{\lambda(u, v)^2},$$

de donde  $\lambda(u, v) \equiv u$  y también  $\Phi(u, v) \xrightarrow{h} \Psi(u, \mu(u, v))$ . Queda por ver qué condiciones tendría que cumplir  $\mu(u, v)$ ; para ello escribimos la identidad que expresa que  $h$  sea isometría local:

$$(du)^2 + u^{-4} (d\mu(u, v))^2 \equiv (du)^2 + u^6 (dv)^2.$$

Esta identidad entre campos de formas cuadráticas equivale al sistema:

$$1 + u^{-4} \mu_u^2 = 1, \quad u^{-4} \mu_u \mu_v = 0, \quad u^{-4} \mu_v^2 = u^6.$$

La primera ecuación da  $\mu_u \equiv 0$ , con lo cual la segunda ecuación se cumple sea cual sea  $\mu_v$ , y la tercera ecuación da  $\mu_v \equiv \pm u^5$ . Pero en ningún trocito de  $S_1$  existe una función  $\mu(u, v)$  que cumpla  $d\mu \equiv 0 \cdot du \pm u^5 dv$ , porque  $u^5 dv$  no es exacta en ningún trocito de  $S_1$ .

**Ejemplo 3.** Halla todas las isometrías de  $Q \equiv (du)^2 + u^6 (dv)^2$  consigo misma.

Una tal isometría es de la forma  $\Phi(u, v) \xrightarrow{h} \Phi(U(u, v), V(u, v))$  y ha de cumplir:

$$\frac{-6}{u^2} \equiv K[Q] \equiv K[Q] \circ h \equiv \frac{-6}{U(u, v)^2},$$



de donde  $U(u, v) \equiv u$  y  $\Phi(u, v) \xrightarrow{h} \Phi(u, V(u, v))$ . La función  $V(u, v)$  tiene que cumplir la siguiente identidad entre campos de formas cuadráticas:

$$(du)^2 + u^6 (dV(u, v))^2 \equiv (du)^2 + u^6 (dv)^2,$$

equivalente al sistema:

$$1 + u^6 V_u^2 = 1, \quad u^6 V_u V_v = 0, \quad u^6 V_v^2 = u^6.$$

Este sistema se convierte en  $dV \equiv 0 \cdot du \pm dv$ , con soluciones  $V \equiv \text{cte} \pm v$ . Finalmente, las siguientes son (todas) las isometrías de  $Q$  consigo misma:  $\Phi(u, v) \mapsto \Phi(u, \text{cte} \pm v)$ .

**Ejemplo 4.** Tenemos superficies  $S_1, S_2$  parametrizadas respectivamente por  $\Psi(\lambda, \mu)$ ,  $\lambda > 2$ , y por  $\Phi(u, v)$ ,  $u > 0$ . Les damos las métricas:

$$Q_1 \equiv (d\lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} (d\mu)^2, \quad Q_2 \equiv (du)^2 - 2dudv + \left(1 + \frac{1}{u}\right) (dv)^2.$$

Encuentra una isometría  $h: (S_1, Q_1) \rightarrow (S_2, Q_2)$ .

Calculamos:

$$K[Q_1] \equiv -\frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \Big/ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \equiv \frac{-12}{(\lambda^2 - 4)^2}.$$

Descomponemos  $Q_2 \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2$  con  $\omega_1 = du - dv$  y  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{u}} dv$ . De  $d\omega_1 \equiv 0$  sacamos  $\omega_3 = b dv$  y entonces de  $d\omega_2 \equiv \frac{-1}{2u^{3/2}} du \wedge dv$  sacamos  $\omega_3 = \frac{1}{2u^{3/2}} dv$ , de donde:

$$K[Q_2] \equiv \frac{d\omega_3}{\omega_1 \wedge \omega_2} \equiv \frac{-3/4}{u^2}.$$

La isometría buscada vendrá dada por  $\Psi(\lambda, \mu) \xrightarrow{h} \Phi(u(\lambda, \mu), v(\lambda, \mu))$  y debe cumplir:

$$\frac{-12}{(\lambda^2 - 4)^2} \equiv K[Q_1] \equiv K[Q_2] \circ h \equiv \frac{-3/4}{u(\lambda, \mu)^2},$$

de donde se despeja  $u(\lambda, \mu) \equiv \frac{\lambda^2}{4} - 1$ , por ser  $u > 0$ , y  $\Psi(\lambda, \mu) \xrightarrow{h} \Phi\left(\frac{\lambda^2}{4} - 1, v(\lambda, \mu)\right)$ . Para determinar  $v(\lambda, \mu)$  escribimos la siguiente identidad, que expresa el hecho de que  $h$  sea isometría local:

$$\left(d\left(\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)\right)^2 - 2d\left(\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)dv(\lambda, \mu) + \left[1 + \frac{1}{\frac{\lambda^2}{4} - 1}\right] (dv(\lambda, \mu))^2 \equiv (d\lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} (d\mu)^2,$$

la simplificamos:

$$\left(\frac{\lambda}{2} d\lambda\right)^2 - 2\left(\frac{\lambda}{2} d\lambda\right)(v_\lambda d\lambda + v_\mu d\mu) + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} (v_\lambda d\lambda + v_\mu d\mu)^2 \equiv (d\lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} (d\mu)^2.$$

Esta identidad entre campos de formas cuadráticas equivale al siguiente sistema de EDPs:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{4} - \lambda v_\lambda + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} v_\lambda^2 &= 1 \\ -\frac{\lambda}{2} v_\mu + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} v_\lambda v_\mu &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} v_\mu^2 &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

La tercera ecuación nos da  $v_\mu = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Entonces la segunda queda  $\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda^2 v_\lambda}{\lambda^2 - 4}$ , de donde se despeja  $v_\lambda = \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{\lambda}$ , valor que, por suerte, satisface también la primera ecuación. De este modo el sistema (52) queda convertido en el siguiente, mucho más sencillo:

$$v_\lambda = \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{\lambda}, \quad v_\mu = \varepsilon,$$

que se resuelve de inmediato, dándonos por fin las isometrías:

$$\Psi(\lambda, \mu) \xrightarrow{h} \Phi\left(\frac{\lambda^2}{4} - 1, \varepsilon\mu + \frac{\lambda^2}{4} - 2\log\lambda + \text{cte}\right).$$

## 9.6 Gradientes

El teorema 123 proporciona un invariante escalar de las isometrías locales, pero a veces nos viene bien tener otro; veamos cómo construirlo.

**Definición 126.** Dadas una superficie con métrica  $(S, Q)$  y una función escalar  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ , el **gradiente de  $h$  respecto de  $Q$**  es el campo de vectores  $\nabla^Q h$  tangente a la superficie y tal que en todo punto  $\mathbf{p} \in S$  se tiene  $(dh)_\mathbf{p}(\cdot) \equiv Q(\cdot, \nabla^Q h_\mathbf{p})$ .

El gradiente es único y fácil de calcular. Si  $\Phi(u, v)$  es una parametrización regular de  $S$  que nos da la expresión  $Q \equiv A(du)^2 + 2Bdudv + C(dv)^2$ , escribimos  $[Q]$  para  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$  y entonces:

$$\nabla^Q h \equiv a\Phi_u + b\Phi_v \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \equiv [Q]^{-1} \begin{bmatrix} h_u \\ h_v \end{bmatrix},$$

De donde fácilmente se deduce (atención al exponente):

$$Q(\nabla^Q h) \equiv [h_u \ h_v] [Q]^{-1} \begin{bmatrix} h_u \\ h_v \end{bmatrix}. \quad (53)$$

**Proposición 127.** Sean  $\phi : (S_1, Q_1) \rightarrow (S_2, Q_2)$  una isometría local y  $h_j : S_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , funciones escalares tales que  $h_1 \equiv h_2 \circ \phi$ . Entonces para todo  $\mathbf{p} \in S_1$  la diferencial  $(d\phi)_\mathbf{p}$  lleva el vector  $(\nabla^{Q_1} h_1)_\mathbf{p}$  al vector  $(\nabla^{Q_2} h_2)_{\phi(\mathbf{p})}$ . Por lo tanto  $Q_1(\nabla^{Q_1} h_1)_\mathbf{p} = Q_2(\nabla^{Q_2} h_2)_{\phi(\mathbf{p})}$ .

Observa que esta proposición implica:

$$\left. \begin{array}{l} \phi \text{ isometría local} \\ h_1 \equiv h_2 \circ \phi \end{array} \right\} \implies Q_1(\nabla^{Q_1} h_1) \equiv Q_2(\nabla^{Q_2} h_2) \circ \phi. \quad (54)$$

Este invariante adicional para isometrías no aporta nada en los ejemplos del apartado 9.5, porque en todos ellos los coeficientes de la métrica dependen de sólo una de las dos coordenadas, por ejemplo  $u$ , y entonces las funciones  $u, K, Q(\nabla^Q K)$  dependen unas de otras.

Veamos un ejemplo en el que el invariante adicional  $Q(\nabla^Q h)$  es importante para concluir. En el cuadrante  $S_0 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  ponemos la métrica  $Q_0 \equiv y^2(dx)^2 + x(dy)^2$ . Vamos a probar que, para cualquier trocito  $S \subset S_0$ , la única isometría local respecto de  $Q_0$  de  $S$  a otro trocito de  $S_0$  es la identidad  $\text{id}_S$ .

Descomponemos  $Q_0 \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2$  con  $\omega_1 = ydx$  y  $\omega_2 = \sqrt{x}dy$ . Planteamos  $\omega_3 = a dx + b dy$ . La segunda ecuación en (46) queda  $d\omega_1 \equiv -dx \wedge dy = \sqrt{x}dy \wedge (a dx + b dy) \equiv -a\sqrt{x}dx \wedge dy$ , de donde  $a = 1/\sqrt{x}$ . Entonces la segunda ecuación en (46) se convierte en:

$$d\omega_2 \equiv \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \wedge dy = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} dx + b dy \right) \wedge y dx \equiv -by dx \wedge dy,$$

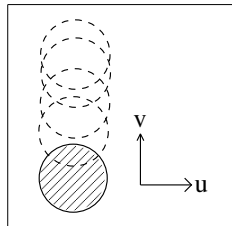
y obtenemos  $\omega_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2y\sqrt{x}} dy$ , con lo cual  $d\omega_3 \equiv \frac{1/4}{yx^{3/2}} dx \wedge dy$  y  $K[Q_0] \equiv \frac{1/4}{x^2 y^2}$ .

Sea  $\phi : S \rightarrow S_0$  una isometría local. De la identidad  $K[Q_0] \equiv K[Q_0] \circ \phi$  obtenemos la más sencilla  $xy \equiv (xy) \circ \phi$ . Podemos aplicar a  $h \equiv xy$  la proposición 127 y la fórmula (54):

$$Q_0(\nabla^{Q_0}(xy)) \equiv Q_0(\nabla^{Q_0}(xy)) \circ \phi .$$

Pero  $Q_0(\nabla^{Q_0}(xy)) \equiv [y \ x] \begin{bmatrix} 1/y^2 & \\ & 1/x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \equiv 1 + x$ . En definitiva  $x \circ \phi \equiv x$  y  $(xy) \circ \phi \equiv xy$ , luego también  $y \circ \phi \equiv y$  y así  $\phi \equiv \text{id}_S$ .

**Comentario.** Los trocitos  $S$  del cuadrante  $S_0$  están “inmovilizados” para la métrica  $Q_0$ . En cambio, para una métrica que se escriba como en el teorema 114 del apartado 8.5, un trocito de superficie tiene infinitas isometrías a otros trocitos, descritas como traslaciones  $(u, v) \mapsto (u, v + \text{cte})$  en las coordenadas del teorema 114.



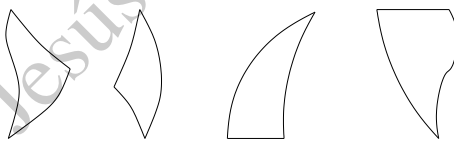
Concluimos que no existen coordenadas curvilíneas  $(u, v)$  en las que los coeficientes de la métrica  $Q_0$  sólo dependan de  $u$ . No podemos, pues, calcular las geodésicas de  $Q_0$  por el método de conservación del momento.

## 9.7 Demostración del teorema de Gauss para triángulos

No vamos a probar el caso general, sino el más particular de un triángulo geodésico  $T \subset S$  contenido en el dominio de unas coordenadas de Fermi  $(u, v)$  en las cuales  $Q \equiv (du)^2 + h^2 (dv)^2$ . Como hemos demostrado en el apartado 8.3 que hay coordenadas de Fermi alrededor de todo punto de la superficie, el teorema 122 quedará demostrado para triángulos geodésicos suficientemente pequeños.

La imagen de  $T$  en el plano de parámetros es la región acotada por una curva cerrada simple  $\partial T$  hecha de tres tramos geodésicos para  $Q$ . Las curvas  $\{v = \text{cte}\}$  son geodésicas, que llamamos *horizontales*. Cada geodésica no horizontal recorre un grafo  $\{u = u(v)\}$  en el que  $u$  es función suave de  $v$ , porque no es tangente a ninguna horizontal. El correspondiente camino geodésico unitario se describe en el plano de parámetros como  $s \mapsto (u(v(s)), v(s))$  con la derivada  $v'(s)$  nunca nula. Si  $v'(s) > 0$  decimos que la geodésica está orientada en *sentido ascendente*. Si  $v'(s) < 0$  decimos que la geodésica está orientada en *sentido descendente*.

Hay cuatro posibilidades para la colocación de los lados de  $T$  en ese sistema de coordenadas, descritas por las siguientes figuras



Analizaremos solamente la primera posibilidad, dejando las otras tres como ejercicios. Elegida la primera posibilidad, orientamos  $\partial T$  de la siguiente manera: los dos lados de la derecha ascendentes y el lado izquierdo descendente. Numeramos 1, 2, 3 los vértices del triángulo, de modo que el vértice 1 es el que tiene el valor mínimo de  $v$  y la secuencia 1, 2, 3 corresponde a la orientación que hemos definido para  $\partial T$ . Vamos a utilizar los resultados del apartado 8.6. Parametrizamos  $\partial T$  por una longitud Riemanniana de arco  $s$  y definimos una función angular  $\varphi(s)$  de modo que en cada lado sea:

$$(u'(s), v'(s)) \equiv \left( \cos \varphi(s), \frac{1}{h} \sin \varphi(s) \right),$$

y además  $0 < \varphi < \pi$  si el lado es ascendente, o  $-\pi < \varphi < 0$  si el lado es descendente. Esta función  $\varphi(s)$  sólo es discontinua en los vértices, de modo que en el vértice  $j$  tenemos el valor  $\varphi_{j-}$ , procedente del lado que llega, y el valor  $\varphi_{j+}$  procedente del lado que sale.

La integral de área de cualquier función escalar  $\eta$  es  $\int \eta \, d\text{área}_Q = \iint \eta \, h \, du \, dv$ , luego:

$$\int -\frac{h_{uu}}{h} \, d\text{área}_Q = \iint -h_{uu} \, du \, dv.$$

El interior de  $T$  es unión de segmentos geodésicos horizontales que van sin interrupción de un lado descendente (a la izquierda) a un lado ascendente (a la derecha).



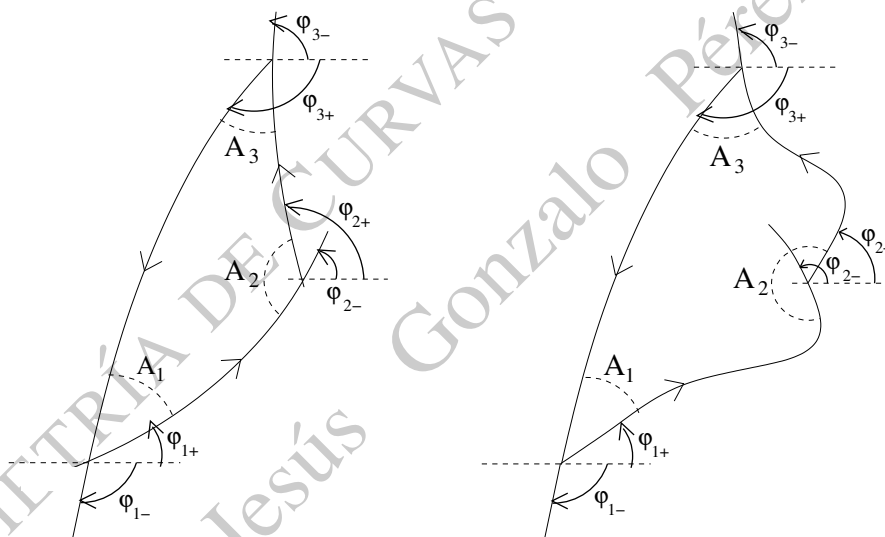
Podemos utilizar  $v$  como parámetro para parametrizar tanto la parte derecha como la izquierda de  $\partial T$ . Entonces el lado izquierdo es  $(u, v) = (u_-(v), v)$ , con  $u_-(v)$  función suave en  $v \in [a, b]$ , y la parte derecha es  $(u, v) = (u_+(v), v)$  con  $u_+(v)$  función suave a trozos en  $[a, b]$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_T -h_{uu} du dv &= \int_{v=a}^{v=b} \left( \int_{u=u_-(v)}^{u=u_+(v)} -h_{uu} du \right) dv = \\ &= \int_a^b -h_u(u_+(v), v) dv - \int_a^b -h_u(u_-(v), v) dv = \\ &= \int_a^b -h_u(u_+(v), v) dv + \int_b^a -h_u(u_-(v), v) dv = \\ &= \int_{\partial T} -h_u dv = \int_{\partial T} -h_u v'(s) ds. \end{aligned}$$

Como los lados de  $T$  son geodésicas, la fórmula (43) del apartado 8.6 da  $-h_u v'(s) = \varphi'(s)$  a lo largo de esos lados, luego:

$$\int_T -\frac{h_{uu}}{h} d\text{área}_Q = \int_{\partial T} \varphi'(s) ds = (\varphi_{2-} - \varphi_{1+}) + (\varphi_{3-} - \varphi_{2+}) + (\varphi_{1-} - \varphi_{3+}),$$

expresión que reagrupamos como  $(\varphi_{1-} - \varphi_{1+}) + (\varphi_{2-} - \varphi_{2+}) + (\varphi_{3-} - \varphi_{3+})$  para poder estudiarla separadamente en cada vértice. La figura de la izquierda representa el caso en que  $A_2$  es un *ángulo convexo* (inferior a  $\pi$ ) y la figura de la derecha el caso en que  $A_2$  es un *ángulo cóncavo* (mayor que  $\pi$ ). El caso  $A_2 = \pi$  también es posible, pero lo dejamos como ejercicio. Los ángulos  $A_1, A_3$  están contenidos en semiplanos y son siempre convexos.



La figura está en el plano  $\mathbb{R}_{uv}^2$ , pero dotado de la métrica  $Q$ . Los ángulos no son, pues, los Euclídeos. Sin embargo las *relaciones aditivas* entre ángulos en cada vértice están correctamente representadas en las figura. También el ángulo de  $\pi$  radianes está correctamente representado. Esto se debe a que ambas nociones (ángulo llano y suma de ángulos adyacentes) dependen sólo de los conceptos de semirrecta y recta, que son los mismos para todos los posibles productos escalares en cada vértice. Dicho esto, en ambas figuras se ve que:

$$\varphi_{1-} - \varphi_{1+} = A_1 - \pi, \quad \varphi_{2-} - \varphi_{2+} = A_2 - \pi, \quad \varphi_{3-} - \varphi_{3+} = A_3 + \pi.$$

La suma de esas tres cantidades da  $A_1 + A_2 + A_3 - \pi$ ; así hemos probado que:

$$\int_T -\frac{h_{uu}}{h} d\text{área}_Q = A_1 + A_2 + A_3 - \pi.$$

## 9.8 Demostración del teorema 124

Vamos a hacer uso de las parametrizaciones  $\phi(u, v)$  y  $\psi(r, \theta)$  descritas al final del apartado 8.3.

Sea  $Q \equiv A(du)^2 + 2B du dv + C(dv)^2$  la expresión de la métrica en las coordenadas definidas por  $\phi(u, v)$  cerca del punto  $\mathbf{p}$ .

Las curvas  $C_r \subset S$ , cuya  $Q$ -longitud es la función  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$ , son las imágenes  $C_r = \{\psi(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , luego definiendo  $h(r, \theta) = \|\psi_{\theta}(r, \theta)\|_Q$  tenemos la siguiente igualdad para todo  $r \in [0, \varepsilon)$ :

$$\ell_{\mathbf{p}}(r) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} h(r, \theta) d\theta. \quad (55)$$

Lo que vamos a hacer es extender  $h$  a una función  $\tilde{h}(r, \theta)$  suave en  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$ , con lo cual la extensión suave de  $\ell_{\mathbf{p}}$  se obtiene poniendo  $\tilde{h}$  en lugar de  $h$  en (55). Esta extensión de  $\ell_{\mathbf{p}}(r)$  tiene, para cada entero  $n \geq 0$ , derivada  $n$ -ésima igual a

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} ((\partial_r)^n \tilde{h}) d\theta,$$

luego el teorema 124 quedará demostrado si probamos las cuatro identidades siguientes:

$$\tilde{h}(0, \theta) \equiv 0, \quad \tilde{h}_r(0, \theta) \equiv 1, \quad \tilde{h}_{rr}(0, \theta) \equiv 0, \quad \tilde{h}_{rrr}(0, \theta) \equiv -K(\mathbf{p}). \quad (56)$$

Un cálculo rápido nos muestra que

$$\psi_{\theta} \equiv r \cdot (-\sin \theta \phi_u(r \cos \theta, r \sin \theta) + \cos \theta \phi_v(r \cos \theta, r \sin \theta)),$$

y también  $h^2 \equiv Q_{\psi(r, \theta)}(\psi_{\theta}) \equiv r^2 \cdot w$ , siendo:

$$w \equiv A(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta - 2B(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \cos \theta + C(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos^2 \theta.$$

Esta  $w$  es una función suave de  $(r, \theta) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$ . Además, con la notación del apartado 8.3:

$$w(0, \theta) \equiv Q_{\mathbf{p}}(-\sin \theta \phi_u(0, 0) + \cos \theta \phi_v(0, 0)) \equiv Q_{\mathbf{p}}(-\sin \theta \mathbf{u}_1 + \cos \theta \mathbf{u}_2) = 1.$$

con lo cual  $w(r, \theta) > 0$  para  $|r|$  pequeño. Entonces la siguiente función:

$$\tilde{h}(r, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot \sqrt{w(r, \theta)},$$

es suave en  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$  y coincide con  $h$  en  $r \geq 0$ . ¡Ojo!  $\tilde{h}$  es negativa en  $r < 0$ . Veamos los dos primeros valores:

$$\tilde{h}(0, \theta) \equiv 0 \cdot \sqrt{w(0, \theta)} \equiv 0, \quad \tilde{h}_r(0, \theta) \equiv \sqrt{w(0, \theta)} + 0 \cdot (\sqrt{w})_r|_{r=0} \equiv 1 + 0 = 1.$$

Sabemos que  $(r, \theta)$  son buenas coordenadas polares alrededor de  $\mathbf{p}$  y además son coordenadas de Fermi para la métrica  $Q$ , es decir  $Q \equiv (dr)^2 + h^2 \cdot (d\theta)^2$  en  $0 < r < \varepsilon$ , con  $h \equiv \|\psi_{\theta}\|_Q$  la función que estamos estudiando. Entonces en  $0 < r < \varepsilon$  la función  $h$  satisface la ecuación de Jacobi, puesta en la forma:

$$h_{rr} + K(r \cos \theta, r \sin \theta) h = 0. \quad (57)$$

Podemos reemplazar  $h$  por  $\tilde{h}$  en (57) y la ecuación se sigue cumpliendo en  $0 < r < \varepsilon$ . Pero  $K(r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $\tilde{h}(r, \theta)$  son suaves en el entorno de  $r = 0$ , luego tomando el límite de (57) cuando  $r \searrow 0$  obtenemos la identidad

$$\tilde{h}_{rr}(0, \theta) \equiv -K(0, 0) \tilde{h}(0, \theta) \equiv -K(0, 0) \cdot 0 = 0.$$

Queda por determinar la derivada tercera. Derivamos en (57) y obtenemos para  $0 < r < \varepsilon$ :

$$h_{rrr}(r, \theta) + h_r(r, \theta) \cdot K(r \cos \theta, r \sin \theta) + h(r, \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} K(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0.$$

Tomamos límite cuando  $r \searrow 0$  y resulta  $\tilde{h}_{rrr}(0, \theta) + 1 \cdot K(\mathbf{p}) + 0 = 0$ , lo que completa la prueba de (56) y del teorema 124.