

Cálculo Numérico I

CURSO 2020-2021

Hoja de Problemas 1

1º MAT./2º D.G.

1) Dar una estimación de los errores absoluto y relativo que se cometen en el cálculo de e^3 y de e^e si se usa $\hat{e} = 2.7183$ como aproximación de e .

2) Una aproximación al valor de $\sin(x)$ viene dada por su polinomio de Taylor en 0:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

a) Usarla para aproximar $\sin(27)$ con un error menor que 10^{-5} . ¿Qué n se necesita?

b) ¿Cómo se podría mejorar (mucho) el n de manera sencilla?

3) Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

Si x es pequeño $f(x) \approx 1$; sin embargo, si calculamos $f(10^{-16})$ en Matlab se obtiene, aproximadamente, 0.5551. ¿Qué está pasando? ¿Cómo se puede corregir?

4) Se considera la función $f(x) = 2^x \log(1 + 2^{-x})$. Para x grande el valor de esa función es, aproximadamente, 1.

a) Calcular con Matlab $f(x)$ para valores enteros $x = \{1, \dots, 60\}$. ¿Qué se observa? ¿Qué está pasando?

b) Dibujar con Matlab $f(x)$ en el intervalo $x \in [44, 54]$ tomando, al menos, 1000 puntos. ¿Qué se observa? ¿Qué está pasando?

5) Se considera el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2)^9 \\ &= x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512 \\ &= -512 + x \left(2304 + x \left(-4608 + x \left(5376 + x \left(-4032 + x (2016 + x (-672 + x (144 + x (-18 + x)))) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

a) ¿Cuántas operaciones aritméticas son necesarias para el cálculo de $P(x)$ en un punto x dado, en cada una de esas expresiones?

b) Dibujar en los puntos $x = 1.920, 1.921, 1.922, \dots, 2.080$ los gráficos, superpuestos, para las primeras dos formas de expresarlo. ¿A qué se pueden deber las discrepancias?

c) La tercera expresión se llama también forma de Horner. Sea P un polinomio general $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$, y sea x un punto dado. Cuántas operaciones aritméticas son necesarias para calcular $P(x)$ en esta forma? El algoritmo de Horner para calcular $P(x)$

```
function p = polyhorn(a,x)
    N = length(a);
    p = a(N);
    for n = N-1:0
        p = a(n) + x*p;
    end
end
```

Cuántas operaciones aritméticas requiere este algoritmo?

6) Encontrar la expresión en notación posicional de los siguientes números racionales

a) $x = 81/3 + 2/3 + 1/81$, en base $b = 3$

b) $x = (1.00110101)_2$, en base $b = 10$

c) 1.5625, en base $b = 2$