Lectura breve 1

Consideremos las siguientes funciones $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ $\quad (\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\})$.

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

$F_f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, $F_f(m,n) = f^m(n) = f \circ \overset{m}{\cdots} \circ f(n) \qquad (F_f(0,n) = n)$.

Por ejemplo $F_f(3,5) = 4$ pues $5 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4$.

Se conjetura que para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, existe un $m_n \in \mathbb{N}^*$ tal que $F_f(m_n, n) = 1$. De hecho, si $F_f(k,n) = 1$, entonces $F_f(k+1,n) = f(1) = 4$, $F_f(k+2,n) = f(4) = 2$ y $F_f(k+3,n) = f(2) = 1$, de nuevo, de manera que, a partir de un tal m_n la secuencia $4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$ se repite indefinidamente.

Así, de ser cierta la conjetura, tiene sentido definir para cada n el número $\mathrm{ord}_f(n)$ **como el primer** m **tal que** $F_f(m,n) = 1 \quad (\mathrm{ord}_f(1) = 0.)$

Del ejemplo anterior es sencillo comprobar que $F_f(5,5) = 1$:

$$5 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

y así $\mathrm{ord}_f(5) = 5$. Obsérvese que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ord}_f(2^k) = k$, de manera que, de tener sentido (es decir, si la conjetura es cierta), la función $\mathrm{ord}_f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ es sobreyectiva.

[ ]:

Ejercicio 1 (hasta 4 puntos)

1. Elaborar una función de Sagemath que para cada natural positivo n, indicando un número concreto de pasos m, devuelva la lista $[n, F_f(1,n), \ldots, F_f(m,n)]$.
2. Dando por cierta la conjetura, elaborar una función de Sagemath que para cada natural positivo n devuelva $\mathrm{ord}_f(n)$.
3. Mostrar, con una gráfica de puntos, los valores de $\mathrm{ord}_f(m)$ para $m \in [1, 12000]$.
4. Encontrar el primer natural x con $\mathrm{ord}_f(x) = 300$.

[ ]:

Lectura breve 2

Los números combinatorios $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, con $0 \leq k \leq m$ se suelen disponer en el triángulo de Pascal como sigue

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

En él, la m-ésima fila contiene los $m+1$ combinatorios $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$ flanqueando simétricamente la fila inmediatamente superior. Además, los combinatorios en los extremos de cada fila son siempre 1, y los intermedios se calculan sumando los dos inmediatamente superiores que lo flanquean, puesto que:

$$\text{si } k = 0 \text{ o } k = m,\ \binom{m}{k} = 1 \ \text{ y } \quad \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\ , \text{ para } 1 \leq k \leq m-1\,.$$

Los números combinatorios impares no son muy abundantes. De hecho, en un hipotético triángulo de Pascal infinito, elegido uno al azar es casi seguro que este será par. Aún así, en las filas que corresponden a m de la forma $2^j - 1$, todos los combinatorios son impares.

El cálculo de un número combinatorio involucra factoriales y, para números altos, estos son costosos de calcular. Para poder ampliar nuestra visión sobre los valores pares o impares en un triángulo de Pascal infinito, necesitamos un criterio *rápido* (evitando el cálculo de factoriales) para decidir si un combinatorio es par o impar. El siguiente resultado nos será muy útil:

> **Teorema de Lucas.** *Sean p un primo y m un entero positivo con desarrollo en base p: $m = m_t m_{t-1} \ldots m_0 \lrcorner_p$. Sea k un entero positivo menor que m y $k = k_t k_{t-1} \ldots k_0 \lrcorner_p$ su desarrollo en base p, completado, con 0's, si hiciera falta para que tenga la misma longitud que el de m. Entonces*
>
> $$\binom{m}{k} \equiv \prod_{j=0}^{t} \binom{m_j}{k_j} \pmod{p}\,.$$

Para el caso que nos ocupa, basta utilizar el teorema de Lucas para el primo $p = 2$, de manera que la variedad de factores en el miembro derecho es muy restringida: $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$ y $\binom{0}{1} = 0$.

Así, $\binom{m}{k}$ par equivale a la aparición de un dígito binario 0 en el desarrollo de m emparejado con un 1 en el desarrollo binario de k, **en la misma posición** que el 0. En particular si m es anterior a una potencia de 2, su desarrollo en base 2 no tiene ceros, y así $\binom{2^j-1}{k}$ es impar para cualquier $0 \leq k \leq 2^j - 1$.

Por ejemplo, como aplicación directa de este teorema, con $p = 2$, vemos, sin tener que calcularlo, que el combinatorio $\binom{1501}{213}$ es impar, puesto que

$$\begin{aligned} 1501 &= \quad 10111011101\lrcorner_2 \\ 213 &= \quad 00011010101\lrcorner_2 \end{aligned}$$

y ninguno de los tres ceros del desarrollo de 1501 en base 2 está en la misma posición que un 1 en el desarrollo binario de 213.

[ ]:

Ejercicio 2 (hasta 4 puntos)

Se pretende investigar sobre la paridad de los combinatorios. Para ilustrar nuestra investigación podríamos destacar los lugares en el triángulo de Pascal en los que hay un número impar. Para ello se propone

> *marcar con un punto los impares, mostrando cada combinatorio* $\binom{m}{k}$ *impar en el punto de coordenadas* $(k - \frac{m}{2}, -m)$.

1. Sin utilizar el Teorema de Lucas: ilustrar, de esta manera, la paridad de los combinatorios $\binom{m}{k}$ con $0 \leq m \leq 2^7 - 1$; contabilizar la proporción de pares entre todos los combinatorios considerados.

   (*Nota:* Existe la función `binomial()` en Sagemath.)

2. Definir, utilizando el Teorema de Lucas, una función `es_par(m,k)`, que devuelva True si es par el combinatorio $\binom{m}{k}$, False si es impar.

   Utilizar esta función para resolver el apartado anterior con $0 \leq m \leq 2^{12} - 1$.

[ ]:

Lectura breve A

Tómese cualquier entero positivo y contemos la cantidad de dígitos pares, digamos que salen a, y el de impares, b. Si apuntamos a seguido de b y de $a+b$, tenemos un nuevo número "$ab(a+b)$" (con un cero delante si $a=0$). Por ejemplo, si el número inicial tuviera 300 cifras, y de ellas 208 fuesen pares, formaríamos el número 20892300 ($a=208$, y $b=92$ pues el número inicial era de 300 cifras). Desde un número con un millón de cifras, con la mitad más una pares, se formaría el número 5000014999991000000. Desde un número con 30 cifras se llegaría a 30030 si todas fueran pares, pero a 03030 si todas fueran impares.

Si se repite el proceso varias veces, siempre a partir del nuevo número, se llega, en algún momento, a **123** y ya no se sale de ese **agujero negro matemático**, pues **123** tiene un par y dos impares.

[ ]:

Ejercicio A (hasta 2 puntos)

1. Comprobar esta afirmación para listas "largas" de dígitos (un millón, por ejemplo) elegidos al azar
2. Generar una gráfica de puntos $(m, p(m))$ para m los enteros entre 1 y 10^4 y $p(m)$ el número de pasos que se tardará en llegar al 123 a partir de m, siguiendo el procedimiento descrito arriba.

Sugerencias: Utilizar listas de dígitos en lugar de números. Pueden ser útiles `randint(0,9)` para generar dígitos al azar, así como los métodos `.digits()` y `.ndigits()` (ver qué devuelven ambos métodos para el caso 0).

[ ]:

Lectura breve B

La proporción áurea, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puede definirse como la relación existente entre el lado de cualquier decágono regular y el radio de la circunferencia circunscrita al mismo. Utilizando geometría básica se llega a que este es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

De manera análoga se define la proporción cordobesa, $c = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$, como la relación entre el lado de cualquier octógono regular y el radio de la circunferencia circunscrita al mismo. Es la solución > 1 a la ecuación bicuadrática $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$. Este número debe su nombre al arquitecto cordobés Rafael de la Hoz Arderius (1924-2000), que la encontró, en lugar de la proporción áurea, en muchos de los monumentos de la ciudad de Córdoba.

[ ]:

Ejercicio B (hasta 2 puntos)

1. Calcular los primeros 30 términos de la fracción continua de la proporción cordobesa c, y los primeros 1000 de la de su cuadrado c^2. (*Sugerencia*: utilizar para c^2 la expresión $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.)
2. Aproximar, utilizando convergentes, c, con un error menor que $5 \cdot 10^{-10}$.

[ ]: