ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Problemas. 2 de Noviembre.

Ejercicio 11. Hoja 3. Determinad la clase de isomorfía de los subgrupos de Sylow de S_4.

Solución:

Recordamos que todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados entre sí y, por tanto, isomorfos. Se tiene que $|S_4| = 4! = 2^3 \cdot 3$. Los 2-subgrupos de Sylow tienen orden 8. Como vimos en el ejercicio 2 de esta hoja, D_8 es un grupo de orden 8 isomorfo a un subgrupo de S_4. Por tanto, la clase de isomorfía de los 2-subgrupos de Sylow es D_8. Por otro lado, los 3-subgrupos de Sylow tienen orden 3, por lo que, son cíclicos, con clase de isomorfía C_3.

Ejercicio 12. Hoja 3. Sea $|G| = p^a q^b$ con p y q número primos. Demostrad que $G = PQ$ donde $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

Solución:

Se tiene que $|P| = p^a$ y $|Q| = q^b$. Observamos que $P \cap Q$ es un subgrupo de P y de Q, por lo que $|P \cap Q|$ divide a p y a q. Pero $(p, q) = 1$, por tanto, $P \cap Q = \{1\}$. Entonces el subconjunto $PQ \subseteq G$ tiene cardinal

$$|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = |P||Q| = p^a q^b = |G|.$$

Por tanto, concluimos que $G = PQ$.

Ejercicio 13. Hoja 3. Sea G un grupo finito, p un número primo y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Demostrad que si P es el único p-subgrupo de Sylow de G y $f \colon G \to G$ es un homomorfismo, entonces $f(P) \leq P$. Concluid que si $P \trianglelefteq G$ entonces P es característico en G.

Solución:

Supongamos que P es el único p-subgrupo de Sylow de G. Sabemos que $f(P)$ es un subgrupo de G y, como consecuencia del Teorema de Lagrange, se tiene que $|f(P)|$ divide a $|P|$. Por tanto, $f(P)$ es un p-subgrupo de G. Sabemos que todo p-subgrupo de G está contenido en algún p-subgrupo de Sylow, como P es el único, necesariamente se tiene que $f(P) \leq P$.

Si P es normal en G, entonces es el único p-subgrupo de Sylow de G. Para todo $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ se tiene que $\alpha(P) \leq P$. Por tanto, P es característico en G.

Ejercicio 14. Hoja 3. Sea G un grupo finito, p un número primo y $H \trianglelefteq G$ con $|H| = p^k$. Demostrad que $H \subseteq P$ para todo P, p-subgrupo de Sylow de G.

Solución:

Sea H un p-subgrupo normal de G. Sabemos que H está contenido en algún p-subgrupo de Sylow P. Por otro lado, sabemos que el resto de p-subgrupos de Sylow son congujados de P, es decir, son de la forma gPg^{-1} para algún $g \in G$. Como $H \leq P$, se tiene que $gHg^{-1} \leq gPg^{-1}$. Pero H es normal, por lo que, $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$. Así, concluimos que $H \leq gPg^{-1}$, es decir, H está contenido en todo p-subgrupo de Sylow.

Ejercicio 15. Hoja 3. Si $H \leq G$ son grupos finitos y $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, probad que existe $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $P \cap H = Q$. Concluid que $\nu_p(H) \leq \nu_p(G)$.

Solución:

Sea $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Tenemos que $Q \leq H \leq G$ es un p-subgrupo de G. Por tanto, existe $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $Q \leq P$. Observamos que $Q \leq P \cap H \leq H$ y $P \cap H \leq P$, por lo que, $P \cap H$ es un p-subgrupo de H que contiene a Q. Pero Q tiene el mayor orden posible para un p-subgrupo, por tanto, $P \cap H = Q$.

Esto nos dice que por cada p-subgrupo de Sylow de H existe al menos un p-subgrupo de Sylow distinto en G. Si existieran $Q, Q' \in \mathrm{Syl}_p(H)$ y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $P \cap H = Q$ y $P \cap H = Q'$, entonces $Q = Q'$. Por tanto, $\nu_p(H) \leq \nu_p(G)$.

Ejercicio 16. Hoja 3. Sea G un grupo finito. Si $H \leq G$ tiene índice 2 en G, probad que $\nu_p(G) = \nu_p(H)$ para cada primo p impar. ¿Se satisface la misma igualdad si $p = 2$?

Solución:

Supongamos que $[G : H] = 2$, entonces H es normal en G y $|G| = 2|H|$. Si p es impar, entonces la máxima potencia que de p que divide a $|G|$ es la misma que la que divide a $|H|$. Por tanto, los p-subgrupos de Sylow de G y H tienen el mismo orden. En particular, como todo subgrupo de H es un subgrupo de G, se tiene que todo p-subgrupo de Sylow de H es un p-subgrupo de Sylow de G. De modo que, $\mathrm{Syl}_p(H) \subseteq \mathrm{Syl}_p(G)$. Veamos que, de hecho, es una igualdad. Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Como todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados entre sí, para cada $Q \in \mathrm{Syl}_p(H) \subseteq \mathrm{Syl}_p(G)$ existe $g \in G$ tal que $P = gQg^{-1}$. Por lo que

$$P = gQg^{-1} \leq gHg^{-1} = H,$$

por ser H normal en G. Por tanto, $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Es decir, $\mathrm{Syl}_p(H) = \mathrm{Syl}_p(G)$ y concluimos que $\nu_p(G) = \nu_p(H)$.

El resultado no es cierto para $p = 2$. Para encontrar un ejemplo, lo primero que observamos es que en un grupo abeliano G, todos los subgrupos son normales. Por tanto, existe un único p-subgrupo de Sylow de G para cada primo p. Además todo subgrupo de G es abeliano, por lo que, ocurre lo mismo con sus p-subgrupos de Sylow. Por tanto, para nuestro ejemplo, necesitaremos un grupo no abeliano.

Además, para buscar un ejemplo en que los 2-subgrupos de Sylow de G y de $H \leq G$ no sean triviales, es necesario que 2 divida a $|H|$, por lo que, $G = 2^2\ m$ para algún entero m. Por otro lado, si m es una potencia de 2, entonces los 2-subgrupos de Sylow de G y H coinciden con G y H respectivamente. Así que, debemos tomar m divisible por algún primo p impar.

Consideramos el grupo de orden 12 $G = D_{12} = \langle r, s\rangle$ y el subgrupo $H = \langle r\rangle$ de orden 6. Así, se tiene que $[G : H] = 2$ y 2 divide a $|H|$. Como H es cíclico, todos sus subgrupos son normales. Por tanto, existe un único 2-subgrupo de Sylow que tendrá orden 2, es decir, $\nu_2(H) = 1$. Sin embargo, vamos a ver que $\nu_2(G) = 3$. Los 2-subgrupos de Sylow de G tienen orden 4. Sabemos que en D_{12} no hay elementos de orden 4. Por tanto, estos subgrupos contendrán el elemento neutro y tres elementos de orden 2. Ahora, debemos ver que pares de elementos generan estos subgrupos. Si escogemos los elementos de orden dos, sr^i y sr^j, con $i \neq j$, tenemos que

$$sr^isr^j = s^2r^{j-i} = r^{j-i} \quad \text{y} \quad sr^jsr^i = r^{i-j}.$$

Por lo que, estos generan un grupo de orden 4 si y solo si $r^{i-j} = r^{j-i}$. Pero esto sucede solo si $r^{i-j} = r^3$. De esta forma, los únicos 2-subgrupos de Sylow son

$$\langle s, sr^3 \rangle, \quad \langle sr^2, sr^5 \rangle \quad \text{y} \quad \langle sr, sr^4 \rangle.$$

Concluimos que $\nu_2(H) = 1 < 3 = \nu_2(G)$.

Ejercicio 17. Hoja 3. (Argumento de Frattini) Sea G un grupo finito y $N \trianglelefteq G$. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$, probad que $G = N\mathbf{N}_G(P)$.

Solución:

Sea $P \in \mathrm{Syl}_P(N)$. Como N es normal en G, para cada $g \in G$, se tiene que $gPg^{-1} \subseteq gNg^{-1} = N$. Por lo que, $gPg^{-1} \in \mathrm{Syl}_P(N)$. Sabemos que todo p-subgrupo de Sylow de N es de la forma nPn^{-1}, para algún $n \in N$. Entonces tenemos que para cada $g \in G$, existe $n \in N$ tal que $gPg^{-1} = nPn^{-1}$, es decir, $n^{-1}gP(n^{-1}g)^{-1} = P$. Por tanto, se tiene que $n^{-1}g \in \mathbf{N}_G(P)$, equivalentemente, $g \in \mathbf{N}_G(P)N$. Pero $g \in G$ es arbitrario, por lo que $G = \mathbf{N}_G(P)N$.

Ejercicio 18. Hoja 3. Si $|G| = pq$ donde $p > q$ son números primos, demostrad que G tiene un único p-subgrupo de Sylow. ¿Cuántos elementos de orden p tiene G? ¿Y de orden q?

Solución:

El teorema de Sylow nos dice que $\nu_p = 1 + kp$ para algún $k \geq 0$ y que ν_p divide a q. Como $q < p$ y $\nu_p \leq q$, necesariamente se tiene $k = 0$ y $\nu_p = 1$. Es decir, G tiene un único p-subgrupo de Sylow.

Todo elemento de orden p genera un p-subgrupo de Sylow de G. Como G solo tiene un p-subgrupo de Sylow, entonces todos los elementos de orden p están contenidos en ese subgrupo. Por el Teorema de Lagrange, el orden de cualquier elemento divide al orden del grupo. Por tanto, todos los elementos no triviales del p-subgrupo de Sylow tienen orden p. De manera que, existen $p - 1$ elementos de orden p en G.

Si G es abeliano, entonces $\nu_q = 1$. Repitiendo el argumento anterior, G tiene $q - 1$ elementos de orden q. Si G no es abeliano, entonces no contiene ningún elemento de orden pq, si lo tuviera sería cíclico. Entonces, por el Teorema de Lagrange, sabemos que los posibles órdenes de los elementos de G son 1, p y q. Como existen pq elementos en total, donde 1 elemento tiene orden 1 y $p-1$ elementos tienen orden p, concluimos que $pq - 1 - (p - 1) = pq - p = p(q - 1)$ elementos tienen orden q.

Ejercicio 19. Hoja 3. Si $|G| = p^2q$ donde p y q son primos, demostrad que G no es simple.

Solución:

($p > q$) Por el Teorema de Sylow, tenemos que ν_p divide a q y $\nu_p = 1 + kp$ para algún $k \geq 0$. Entonces $\nu_p \leq q < p$. Por lo que, $k = 0$ y $\nu_p = 1$. De esta forma, G tiene un único p-subgrupo de Sylow que es normal.

($p < q$) De nuevo, por el Teorema de Sylow, tenemos que ν_q divide a p^2 y $\nu_q = 1 + tq$ para algún $t \geq 0$. Si $\nu_q > 1$, entonces $\nu_q > q > p$. Por lo que, $\nu_q = p^2$. Entonces tendríamos que $tq = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Como q es primo, necesariamente q divide a $p - 1$ o a $p + 1$. Pero $q > p$, por lo que, q divide a $p + 1$ y solo es posible si $q = p + 1$. Esto sucede solo para $p = 2$, $q = 3$ y $|G| = 12$.

Veamos que todo subgrupo de orden 12 tiene algún subgrupo normal. Por los Teoremas de Sylow, se tiene que $\nu_2 \in \{1, 3\}$ y $\nu_3 \in \{1, 4\}$. Si alguno de ellos es igual a 1, entonces tiene un subgrupo normal. Supongamos que $\nu_2 = 3$ y $\nu_3 = 4$. Entonces G tiene 8 elementos de orden 3, dejando 4 elementos de otro orden. Esto da para formar un único grupo de orden 4, dando lugar a una contradicción. Por tanto, G tiene algún subgrupo normal.

Ejercicio 20. Hoja 3. Demostrad que todo grupo de orden 175 es abeliano.

Solución:

Sea G un grupo de orden 175. Se tiene $|G| = 175 = 5^2 \cdot 7$. Por el Teorema de Sylow, tenemos que

$$\nu_5 \equiv 1 \mod 5, \quad \nu_5 | 7, \qquad \nu_7 \equiv 1 \mod 7, \quad \nu_7 | 25.$$

Por tanto, $\nu_5 = 1$ y $\nu_7 = 1$, es decir, $\mathrm{Syl}_5(G) = \{P\}$ y $\mathrm{Syl}_7(G) = \{Q\}$. Entonces los subgrupos P y Q son normales en G. Además, $|P \cap Q| = \{1\}$, puesto que $|P \cap Q|$ es divisor común de $|P| = 25$ y $|Q| = 7$. El subgrupo PQ tiene orden

$$|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = \frac{25 \cdot 7}{1} = 175.$$

Por tanto, $PQ = G$ y se tiene que $G \cong P \times Q$. Finalmente, como $|P| = 5^2$, sabemos que P es abeliano. Por otro lado, como $|Q| = 7$, sabemos que Q es cíclico y en consecuencia abeliano. Por tanto, G es producto de dos grupos abelianos y concluimos que G es abeliano.