TEMA 5. ESTRUCTURA DE LOS ENDOMORFISMOS
(Forma de Jordan de matrices cuadradas)

5.1. INTRODUCCIÓN

Ej 5.1.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$f(x, y) = (6x - 2y, 6x - y)$$

Halla la matriz A de f en la base canónica $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y la matriz D de f en la base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Escribe $C \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que cumpla $D = C^{-1}AC$.

S/ $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = C^{-1}AC.$$

PREGUNTA. Dado $f \in \mathrm{End}(V)$, V e.v. de dim. finita, ¿se puede encontrar una base β de V tal que la matriz $M(f;\beta)$ sea diagonal?

RESPUESTA: NO

Ej 5.1.2. Prueba que no puede encontrarse una matriz $C \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ con $|C| \neq 0$ tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal cuando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S/ Si existiera $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|C| \neq 0$ y $C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ se tendría $A = CDC^{-1}$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{|C|}$$

$$= \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} ad\alpha - bc\beta & -abd + ab\beta \\ cd\alpha - cd\beta & -bc\alpha + ad\beta \end{pmatrix}.$$

Comparando

$$1 = \frac{1}{|C|}(ad\alpha - bc\beta) \qquad (1.1)$$

$$0 = cd(\alpha - \beta) \qquad (1.2)$$

$$1 = \frac{1}{|C|} ab(-\alpha + \beta) \qquad (1.3)$$

$$1 = \frac{1}{|C|}(-bc\alpha + ad\beta) \qquad (1.4)$$

De (1.2), o bien $c=0$, o bien $d=0$, o bien $\alpha=\beta$

- Si $c=0$, de (1.1) y (1.4), $ad\alpha = |C| = ad\beta$
  Como $a\neq 0$ y $d\neq 0$ pq. $|C| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$; se tiene $\alpha=\beta$, que puesto en (1.3) produce la contradicción $1=0$.
- Si $d=0$, se obtiene una contradicción con un razonamiento similar
- Si $\alpha=\beta$, (1.3) produce la contradicción $1=0$.

Si una matriz (cuadrada) se puede diagonalizar el cálculo de sus potencias es sencillo

Ej 5.1.3. Para $n=1,2,3,\ldots$, calcula A^n con $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.
(Ver Ej 5.1.1)

S/

$$A^n = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \ldots$$
