Fracciones continuas periódicas II. Números irracionales cuadráticos

Sabemos que, entre los números reales, solo los racionales tienen un desarrollo decimal periódico. Podemos preguntarnos qué hay sobre este asunto en los desarrollos en fracción continua: ¿qué números reales tienen fracciones continuas periódicas?

1. Dos ejemplos de fracciones continuas periódicas

En la sesión anterior vimos el ejemplo de la razón áurea, con desarrollo

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, ...]$$

que denotaremos como $[\,\overline{1; 1}\,]$ para indicar que el 1 se repite.

Otro ejemplo es $\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, ...]$, que denotaremos $[2; \overline{1, 4}]$, al repetirse indefinidamente el bloque $1, 4$. Podemos comprobar *a mano* que ese es, en efecto, el desarrollo, calculando los primeros pasos del algoritmo que ya conocemos:

Denotemos $\xi_0 = \sqrt{8}$. En primer lugar, $a_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor = 2$ de manera que $\sqrt{8} = [2; a_1, a_2 \ldots]$. Luego, como sabemos, a_1 es la parte entera de $\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - a_0}$, pero como

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{8-4} = \frac{\sqrt{8}+2}{4}$$

y $1 < \frac{\sqrt{8}+2}{4} < 2$, se sigue que $a_1 = 1$. A continuación, a_2 es la parte entera de $\xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - a_1} = \frac{4}{\sqrt{8}-2}$, y como

$$\xi_2 = \frac{4}{\sqrt{8}-2} = \frac{4(\sqrt{8}+2)}{8-4} = \sqrt{8}+2$$

y $4 < \sqrt{8}+2 < 5$, se sigue que $a_2 = 4$. Si continuamos, hemos de definir $\xi_3 = \frac{1}{\xi_2 - a_2}$, pero nos encontramos entonces con que $\xi_3 = \xi_1$ y a partir de aquí el algoritmo entra en un bucle.

Antes de mostrar cómo se puede recuperar el valor $\sqrt{8}$ a partir de la fracción continua $[2; \overline{1, 4}]$, veamos otro ejemplo, esta vez con periodo puro. Desarrollemos nuestro algoritmo para $\sqrt{7}+2$, ahora de un modo un poco más esquemático:

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}+2 &= \mathbf{4} + (\sqrt{7}-2) = \mathbf{4} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}-2}} \\
\frac{1}{\sqrt{7}-2} &= \frac{\sqrt{7}+2}{3} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{7}-1}{3} = \mathbf{1} + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{7}-1}} \\
\frac{3}{\sqrt{7}-1} &= \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{7}-1}{2} = \mathbf{1} + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{7}-1}} \\
\frac{2}{\sqrt{7}-1} &= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{7}-2}{3} = \mathbf{1} + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{7}-2}} \\
\frac{3}{\sqrt{7}-2} &= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} = \sqrt{7}+2 \text{ (igual que empezamos)}
\end{aligned}$$

así que $\sqrt{7}+2 = [\,\overline{4; 1, 1, 1}\,]$.

2. Determinando el valor de una fracción continua periódica

Podemos recuperar el valor que representa la expresión $[\,\overline{4;1,1,1}\,]$ de un modo sencillo. Para ello basta con observar que

$$[\,\overline{4;1,1,1}\,] = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\boxed{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}}}} = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{[\,\overline{4;1,1,1}\,]}}}}.$$

Basta así con resolver la ecuación

$$x = [4;1,1,1,x]\,. \tag{1}$$

Desarrollando el miembro derecho se obtiene

$$[4,1,1,1,x] = \mathbf{4} + \frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{x}}}} = \mathbf{4} + \frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{x}{x+1}}} = \mathbf{4} + \frac{1}{\mathbf{1}+\frac{x+1}{2x+1}} = \mathbf{4} + \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{14x+9}{3x+2}\,.$$

La ecuación (1) es por tanto una ecuación cuadrática:

$$x = \frac{14x+9}{3x+2} \;\longleftrightarrow\; 3x^2 - 12x - 9 = 0$$

y su raíz positiva, $\frac{12+\sqrt{144+108}}{6} = 2+\sqrt{7}$, es el número buscado.

Con una pequeña variante también se puede recuperar el irracional correspondiente a un desarrollo periódico no puro, como $[2;\overline{1,4}]$. Basta observar que, si llamamos $x = [\,\overline{1;4}\,]$, entonces el número que buscamos es $[2;\overline{1,4}] = [2;x] = 2+\frac{1}{x}$.

Si desarrollamos $x = [1;4,x]$ llegamos a $x = \frac{5x+1}{4x+1}$, y de ahí a la ecuación cuadrática $4x^2-4x-1=0$. La raíz positiva es $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, y

$$2+\frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}\,.$$

En resumen, acabamos de ver cómo una ecuación del tipo

$$x = [\,\overline{a_0;a_1,\dots,a_m}\,] = [a_0;a_1,\dots,a_m,x]$$

nos ha llevado a una ecuación cuadrática, de coeficientes enteros si los a_i son enteros. Si los a_i son positivos, la solución positiva de esta ecuación cuadrática es el irracional con desarrollo en fracción continua periódico $[\,\overline{a_0;a_1,\dots,a_m}\,]$.

También hemos visto en un ejemplo que el caso periódico más general no es muy distinto, y podemos calcular el irracional con desarrollo

$$[a_0;a_1,\dots,a_\ell,\overline{b_0,b_1,\dots,b_m}\,]$$

a partir del irracional que es solución de la ecuación cuadrática

$$x = [b_0;b_1,\dots,b_m,x]\,.$$

Aunque hemos visto sólo un par de ejemplos, lo que sucede en otros casos es muy similar. En la sección siguiente enunciamos el resultado general, demostrado por Lagrange (1736–1813).

3. Fracciones continuas periódicas y números irracionales cuadráticos

Vamos a introducir algo de notación. Definimos los conjuntos

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dado $\xi = a + b\sqrt{d}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ o $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, se define su conjugado como $\overline{\xi} := a - b\sqrt{d}$. Con las operaciones habituales de suma y multiplicación, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un *anillo conmutativo*, y $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es un *cuerpo*. Además, la conjugación preserva las dos operaciones, es decir:

$$\text{si } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}], \text{ entonces} \quad \overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}\,.$$

Cuando d es un entero positivo que no es un cuadrado ($\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$), todo número $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ con $b \neq 0$ es irracional. Tales números se dicen *irracionales cuadráticos* porque se pueden poner como solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros:

$$\xi = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}], \text{ y su conjugado } \overline{\xi} = a - b\sqrt{d}, \text{ son las soluciones de}$$
$$(x - a)^2 - b^2 d = x^2 - 2a\,x + (a^2 - b^2 d) = 0.$$

Si multiplicamos por el mínimo común múltiplo de los denominadores de $2a$ y $a^2 - b^2 d$, obtenemos, efectivamente, un polinomio cuadrático con coeficientes enteros.

Ahora ya podemos enunciar el resultado de Lagrange:

Teorema 1 (Lagrange)**.** *Una fracción continua simple infinita es un irracional cuadrático si y solo si es periódica.*

Entre los irracionales cuadráticos los hay con fracción continua periódica pura. ¿Quiénes son? Nos los describió Galois (1811–1832).

Teorema 2 (Galois)**.** *Un irracional cuadrático ξ es puramente periódico si y solo si*

$$\xi > 1 \quad \text{y} \quad -1 < \overline{\xi} < 0\,.$$

4. El desarrollo en fracción continua de las raíces de los números naturales

Un caso especialmente llamativo es el de las raíces cuadradas de los enteros (no cuadrados). Dado que $\sqrt{d}$ es un irracional cuadrático, el Teorema de Lagrange asegura que su desarrollo en fracción continua es periódico. Es más, es un hecho conocido que dicho desarrollo tiene una forma muy concreta:

Teorema 3. *Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. La fracción continua para $\sqrt{d}$ es de la forma*

$$[a_0; \overline{a_1, \ldots, a_{n-1}, 2a_0}\,]$$

con $a_k \leq a_0$ para $1 \leq k < n$.

5. Una aplicación interesante: ecuaciones de Pell

Una ecuación de Pell es una ecuación diofántica de la forma

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2}$$

donde d es un entero, y para la que se buscan **soluciones enteras positivas**.

En el curso de Conjuntos y Números has aprendido a calcular las soluciones de ecuaciones diofánticas lineales, que es algo relativamente sencillo. Las ecuaciones diofánticas no lineales son, en general, muchísimo más difíciles de resolver: probablemente conozcas la historia del llamado *Último Teorema de Fermat*, que enuncia la no existencia de soluciones no triviales de la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$ si $n \geq 3$. Fermat lo anotó en el margen de un libro en 1637 y la primera persona en dar con una demostración completa fue Andrew Wiles en 1994 (¡eso son 357 años de diferencia!).

La ecuación de Pell admite siempre la solución trivial $x = 1$, $y = 0$. Si d es un cuadrado, no existen soluciones enteras no triviales, pero si d no es un cuadrado existen infinitas soluciones.

Observa que podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{x^2}{y^2} - d = \frac{1}{y^2}$$

así que si $(x, y) = (p, q)$ es una solución con q grande, entonces $\frac{p}{q}$ se acerca a $\sqrt{d}$, como le sucede a las convergentes de $\sqrt{d}$. Eso sugiere buscar las soluciones entre las convergentes. Esa resulta ser la estrategia correcta, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 4. *Si $(x, y) = (p, q)$ es una solución de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, entonces $\frac{p}{q}$ es una convergente de $\sqrt{d}$.*

Soluciones de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$

Como hemos dicho en el párrafo anterior, si (x, y) es una solución de la ecuación de Pell, entonces $x = p_i$, $y = p_i$, siendo p_i/q_i una convergente de $\sqrt{d}$. Sea $\{p_i/q_i\}$ la sucesión de convergentes de la fracción continua para $\sqrt{d}$. El par (p_i, q_i) con el i más pequeño que resuelve la ecuación de Pell se conoce como la *solución fundamental*. La denotamos por (x_1, y_1). ¿Por qué este nombre? Porque todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$x_k + y_k\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^k,$$

como demostró el matemático indio Brahmagupta en el siglo VII. Llegamos así al siguiente algoritmo.

Algoritmo de Brahmagupta

Se van calculando términos del desarrollo en fracción continua de $\sqrt{d}$, y a partir de ellos convergentes (recuerda las relaciones de convergencia de Wallis-Euler) hasta dar con la primera, p_i/q_i, tal que (p_i, q_i) sea solución de la ecuación de Pell. La solución fundamental será entonces $(x_1, y_1) = (p_i, q_i)$.

Las demás soluciones de la ecuación de Pell se obtienen por medio de las relaciones de recurrencia

$$x_{k+1} = x_1 x_k + d y_1 y_k, \qquad y_{k+1} = x_1 y_k + y_1 x_k.$$