1 Superficies (de J. Ramos)

Una carta es una función $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple:
i) $\mathbb{X}(u, v)$ es diferenciable.
ii) $\mathbb{X}_u(u, v)$, $\mathbb{X}_v(u, v)$ son linealmente independientes ($\|\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\| \neq 0$) para todo $(u, v) \in U$.
iii) $\mathbb{X}(u, v)$ es homeomorfismo (basta ver que es inyectiva y $\mathbb{X}^{-1}$ es continua).

Una **superficie regular** S es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ tal que para todo $\mathbf{p} \in S$ podemos encontrar un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} \in W$, y una carta $\mathbb{X} : U \to \mathbb{R}^3$ con $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ (se le llama carta de S).

Si sólo necesitamos una carta $\mathbb{X}$ (es decir $\mathbb{X}(U) = S$), entonces decimos que $\mathbb{X}$ es una carta global.

Las **curvas coordenadas** son las curvas que salen cuando dejamos fija una de las variables de la carta $f(u) = \mathbb{X}(u, v_0)$ y $g(v) = \mathbb{X}(u_0, v)$.

Ayuda para saber que una superficie es regular:

- Si es la gráfica de una función $f(x, y)$ diferenciable (es decir $S = (x, y, f(x, y))$) entonces S es una superficie regular.

- Por lo anterior y el teorema de la función inversa también tenemos que si

$$S = F^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : F(x, y, z) = a\}$$

con U abierto y $F : U \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, entonces si $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular, es decir si $F^{-1}(a) \neq \emptyset$ y $\nabla F(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in S$, entonces la superficie es regular.

Además sabemos que si S es una superficie regular, entonces para cada punto $\mathbf{p} \in S$, podemos encontrar un abierto V que contiene a $\mathbf{p}$ en el que $V \cap S$ es la gráfica de cierta función diferenciable. Esto prueba, por ejemplo, que el cono con el vértice no es una superficie regular.

Ayuda para saber si $\mathbb{X}$ es carta:

Comprobar que $\mathbb{X}^{-1}$ es continua puede ser complicado.

- Para comprobar que $\mathbb{X}^{-1}$ es continua, basta probar que $\mathbb{X}(u_n, v_n) \to \mathbb{X}(u_0, v_0)$ implica $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$.

- Además si sabemos que una superficie S es regular, para ver que $\mathbb{X}$ es una carta de S, no es necesario demostrar que $\mathbb{X}^{-1}$ es continua.

Los cambios de carta son difeomorfismos.

Sea $\mathbf{p}$ un punto de una superficie regular S, y sean $\mathbb{X} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{Y} : V \mapsto \mathbb{R}^3$ cartas de S tales que $\mathbf{p} \in \mathbb{X}(U) \cap \mathbb{Y}(V) = W$. Definimos $\overline{U} = \mathbb{X}^{-1}(W)$ y $\overline{V} = \mathbb{Y}^{-1}(W)$. La función $h = \mathbb{Y}^{-1} \circ \mathbb{X} : \overline{U} \mapsto \overline{V}$ es un difeomorfismo (es decir, h es diferenciable y tiene una inversa diferenciable).

También trabajamos con la siguiente definición:

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, una aplicación $\mathbb{X} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ es una **superficie parametrizada regular** si i) $\mathbb{X}(u, v)$ es diferenciable. ii) $\mathbb{X}_u(u, v)$, $\mathbb{X}_v(u, v)$ son linealmente independientes ($\lVert\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\rVert \neq 0$) para todo $(u, v) \in U$.

Esta definición es más parecida a la de curvas ya que trata a la superficie como una aplicación, mientras que la definición de superficie regular trata a la superficie como un subconjunto de puntos.

Es más débil a priori que una superficie regular porque no se pide que $\mathbb{X}$ sea un homeomorfismo (es más débil que una carta), aunque se pide que $\mathbb{X}$ sea global (parametrice toda la superficie).

Ahora bien, sabemos que si $\mathbb{X} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular, entonces para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{X}(U)$, podemos encontrar un abierto V que contiene a $\mathbf{p}$ y tal que $X(V)$ es una superficie regular. Es decir, localmente las trazas de las superficies parametrizadas regulares son superficies regulares. Para trabajar con conceptos locales basta trabajar con superficies parametrizadas regulares.

2 Plano tangente

Un vector $\mathbf{v}$ es un vector tangente a una superficie regular S en $\mathbf{p}$ si existe una curva con traza contenida en S, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y tal que $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$. El conjunto de los vectores tangentes a S en p se llama el **plano tangente** y lo denotamos por $T_{\mathbf{p}}S$.

Sea $\mathbb{X}$ una carta de una superficie S regular que contiene a $\mathbf{p} \in S$, el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ está generado por los vectores $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$. El vector normal unitario del plano tangente es $\mathbf{N} = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\lVert\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\rVert}$. Al plano tangente afín que pasa por $\mathbf{p}$ lo denotamos $T_{\mathbf{p}}S + p$.

Para una superficie dada como $S = F^{-1}(a)$, tenemos que

$$\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S + p = \{(x, y, z) : \quad ((x, y, z) - \mathbf{p}) \cdot \nabla F(\mathbf{p}) = 0\}.$$

3 Primera forma fundamental

Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, definimos la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ como $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \lVert\mathbf{v}\rVert^2$.

Es la forma cuadrática (definida positiva) de la forma bilineal simétrica $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$. Es simplemente la restricción del producto escalar en $\mathbb{R}^3$ a los vectores del plano tangente.

Si definimos

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbb{X}_u(u,v)\cdot\mathbb{X}_u(u,v),\\ F(u,v) &= \mathbb{X}_u(u,v)\cdot\mathbb{X}_v(u,v),\\ G(u,v) &= \mathbb{X}_v(u,v)\cdot\mathbb{X}_v(u,v). \end{aligned}$$

Entonces para $\mathbf{p}\in\mathbb{X}(u,v)$ podemos escribir cualquier vector $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}S$ como

$$\mathbf{v} = a\mathbb{X}_u(u,v) + b\mathbb{X}_v(u,v)$$

para ciertas coordenadas (a,b), y tenemos que

$$I_{\mathbf{p}}(v) = a^2E(u,v) + 2abF(u,v) + b^2G(u,v).$$

Observamos que $E(u,v), G(u,v) > 0$ y como $I_{\mathbf{p}}$ está definida positiva, $E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v) > 0$ para todo u,v.

Equivalentemente, con otra notación se dice que la primera forma fundamental es

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

donde du, dv son las aplicaciones lineales tales que $du(\mathbf{v}) = a$ y $dv(\mathbf{v}) = b$.

La primera forma fundamental es una métrica de Riemann, y nos sirve para hacer mediciones sin necesidad de saber cómo está inmersa nuestra superficie en $\mathbb{R}^3$. Estas mediciones son las que seres bidimensionales que vivan en la superficie son capaces de calcular: longitudes, ángulos y áreas. Veremos que otras magnitudes como la curvatura gaussiana o las geodésicas también se pueden calcular por medio exclusivamente de la primera forma fundamental.

3.1 Ángulos

Dadas dos curvas $\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_2)$ en el espacio, si sabemos que se cortan en $\mathbf{p} = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$, entonces el ángulo θ de la intersección es

$$\cos\theta = \frac{\dot\alpha_1(t_1)\cdot\dot\alpha_2(t_2)}{\|\dot\alpha_1(t_1)\|\|\dot\alpha_2(t_2)\|}.$$

Si las curvas están en ciertas superficies $\alpha_1(t) = \mathbb{X}(u_1(t), v_1(t))$ y $\alpha_2(t) = \mathbb{X}(u_2(t), v_2(t))$ y se cortan en un punto $\mathbf{p} = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$, entonces ($A, B, C$ las defino sólo para que me entren las fórmulas, no es notación)

$$\cos\theta = \frac{A}{BC}.$$

donde

$$A = \dot{u}_1(t_1)\dot{u}_2(t_2)E(u_1(t_1), v_1(t_1)) + (\dot{u}_1(t_1)\dot{v}_2(t_2) + \dot{u}_2(t_2)\dot{v}_1(t_1))F(u_1(t_1), v_1(t_1)) + \dot{v}_1(t_1)\dot{v}_2(t_2)G(u_1(t_1), v_1(t_1))$$
$$B = (\dot{u}_1^2(t_1)E(u_1(t_1), v_1(t_1)) + 2\dot{u}_1(t_1)\dot{v}_1(t_1)F(u_1(t_1), v_1(t_1)) + \dot{v}_1^2(t_1)G(u_1(t_1), v_1(t_1)))^{\frac{1}{2}}$$
$$C = (\dot{u}_2^2(t_2)E(u_2(t_2), v_2(t_2)) + 2\dot{u}_2(t_2)\dot{v}_2(t_2)F(u_2(t_2), v_2(t_2)) + \dot{v}_2^2(t_2)G(u_2(t_2), v_2(t_2)))^{\frac{1}{2}}.$$

Observamos que como se cortan en $\mathbf{p}$, entonces $E(u_1(t_1), v_1(t_1)) = E(u_2(t_2), v_2(t_2))$, $F(u_1(t_1), v_1(t_1)) = F(u_2(t_2), v_2(t_2))$, $G(u_1(t_1), v_1(t_1)) = G(u_2(t_2), v_2(t_2))$.

Deducimos que el ángulo de dos curvas coordenadas que se cortan en $\mathbb{X}(u_0, v_0)$ es

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Con lo que deducimos que si y solo si $F \equiv 0$, entonces las curvas coordenadas se cortan perpendicularmente.

3.2 Longitudes

La longitud de una curva $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ en una superficie en el intervalo (a, b) se puede calcular como

$$L(\alpha, a, b) = \int_a^b \Big(\dot{u}^2(t)E(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F(u(t), v(t)) + \dot{v}^2(t)G(u(t), v(t))\Big)^{\frac{1}{2}} dt.$$

3.3 Áreas

$$\text{Área } \ \mathbb{X}(U) = \int_U \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| dudv = \int_U \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dudv.$$

4 Operador de Forma y Segunda Forma Fundamental

4.1 Operador de forma

Para $w \in T_{\mathbf{p}}S$ definimos el **operador de forma** $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w)$ (también llamado operador de Weingarten) como

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w) = -\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\Big|_{t=0},$$

donde α es una curva contenida en S, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y con dirección $\dot{\alpha}(0) = w$.

Recordamos, $\mathbf{N}(\mathbb{X}(u, v)) = \frac{\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)}{\|\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)\|}$.

El operador de forma $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ es un endomorfismo autoadjunto. Es decir,
i) Lineal: $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(aw_1 + bw_2) = a\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_1) + b\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_2)$.
ii) $\mathcal{F}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$.
iii) Autoadjunta: $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_1) \cdot w_2 = \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_2) \cdot w_1$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbb{X}_u) &= -\mathbf{N}_u \\ \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbb{X}_v) &= -\mathbf{N}_v \end{aligned}$$

así que en general para cualquier vector $w \in T_{\mathbf{p}}S$ que puede escribirse en la base $\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v$ como $w = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ tenemos

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w) = -a\mathbf{N}_u - b\mathbf{N}_v.$$

La matriz $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ asociada al operador de forma, es decir, si

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v) = c\mathbb{X}_u + d\mathbb{X}_v,$$

entonces la matriz cumple

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

puede calcularse a través de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} e &= -\mathbf{N}_u \cdot \mathbb{X}_u \\ g &= -\mathbf{N}_v \cdot \mathbb{X}_v \\ f &= -\mathbf{N}_u \cdot \mathbb{X}_v = -\mathbf{N}_v \cdot \mathbb{X}_u, \end{aligned}$$

que también se puede calcular así

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{uu} \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{vv} \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{uv}. \end{aligned}$$

En general, $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ no es diagonal, pero siempre podemos encontrar una base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ de $T_{\mathbf{p}}S$ en la que la matriz asociada a $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ es diagonal. Así que existen $k_1 \geq k_2$ en esa base tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_1) &= k_1\mathbf{e}_1 \\ \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_2) &= k_2\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

A los autovalores k_1, k_2 se les llaman **curvaturas principales** y a las direcciones dadas por $\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2$ se les llaman **direcciones principales**.

4.2 Segunda forma fundamental y curvatura normal

Para $w_1, w_2 \in T_{\mathbf{p}}S$ se define la **segunda forma fundamental** $II_{\mathbf{p}}$ como la forma bilineal simétrica

$$II_{\mathbf{p}}(w_1, w_2) = \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_1) \cdot w_2.$$

En particular, tenemos que

$$II_{\mathbf{p}}(w_1, w_2) = I_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(w_1), w_2).$$

Esta igualdad es igual a (1), donde la matriz asociada a la segunda forma fundamental es $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$. Con lo que para $w = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ tenemos

$$II_{\mathbf{p}}(w, w) = a^2 e + 2abf + b^2 g.$$

La **curvatura normal** $k_{\mathbf{p}}$ se define para vectores $w \in T_{\mathbf{p}}$ **unitarios** como

$$k_{\mathbf{p}}(w) = II_{\mathbf{p}}(w, w).$$

En la base de direcciones principales las cosas se simplifican (mucho): si $w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$,

$$\begin{aligned} &I_{\mathbf{p}}(w, w) = a^2 + b^2 \\ &II_{\mathbf{p}}(w, w) = k_{\mathbf{p}}(w) = k_1 a^2 + k_2 b^2 = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Por lo que para todo $w \in T_{\mathbf{p}}$ unitario,

$$k_2 \le k_{\mathbf{p}}(w) \le k_1,$$

y k_2 será el valor mínimo de $k_{\mathbf{p}}$, y k_1 será su valor máximo.

¿Cuál es la relación entre la curvatura normal $k_{\mathbf{p}}(w)$ y la curvatura $\kappa_\alpha(0)$ de la la curva contenida en S, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y con dirección $\dot{\alpha}(0) = w$? Respuesta:

$$k_{\mathbf{p}}(w) = \kappa_\alpha(0) \cos\theta \tag{2}$$

donde θ es el ángulo de los vectores $\mathbf{n}_\alpha(0)$ y el normal a la superficie $\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$.

Fijado $w \in T_{\mathbf{p}}S$, la curva que cumple que $\cos\theta = \pm 1$ se llama sección normal por w, y sale al intersecar S con el plano con vectores generadores $\mathbf{N}_p$ y w. Por (2), tenemos que para esa curva la curvatura normal $k_{\mathbf{p}}(w)$ es, salvo signo, igual a su curvatura $\kappa(0)$. De esto se deduce que si $k_{\mathbf{p}}(w) > 0$ la superficie se curva acercándose hacia $\mathbf{N}_p$ y si $k_{\mathbf{p}}(w) < 0$ la superficie se curva alejándose hacia $\mathbf{N}_p$. Además $|k_{\mathbf{p}}(w)|$ mide cuánto se curva la superficie en la dirección w.

La identidad (2) se prueba gracias a la identidad de Meusnier, que afirma que

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p}} \cdot \ddot{\alpha}(0) = \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\alpha}(0)) \cdot \dot{\alpha}(0).$$

Es decir, la aceleración normal (que es la proyección $\ddot{\alpha}(0)$ sobre el vector normal $\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$) de una curva en una superficie depende solamente de su velocidad y la forma de la superficie.

4.3 Curvatura gaussiana, curvatura media y clasificación de puntos

La **curvatura gaussiana** se define como

$$K_{\mathbf{p}} = \det(\text{matriz de } \mathcal{F}_{\mathbf{p}}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = k_1 k_2.$$

Es intrínseca a la superficie. Lo que se prueba viendo que $eg - f^2$ se puede escribir en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

La **curvatura media** se define como

$$H_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\text{traza (matriz de } \mathcal{F}_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

No es intrínseca a la superficie.

En función de la curvatura gaussiana (y de las curvaturas principales), clasificamos los puntos $\mathbf{p} \in S$ de una superficie regular de la siguiente manera:

- Punto elíptico: si $K_{\mathbf{p}} = \det \mathcal{F}_{\mathbf{p}} > 0$ (es decir, $k_1 \geq k_2 > 0$ ó $0 > k_1 \geq k_2$);
- Punto hiperbólico: si $K_{\mathbf{p}} = \det \mathcal{F}_{\mathbf{p}} < 0$ (es decir, $k_1 > 0 > k_2$)
- Punto parabólico: si $K_{\mathbf{p}} = \det \mathcal{F}_{\mathbf{p}} = 0$ y $\mathcal{F}_{\mathbf{p}} \neq 0$ (es decir, $k_1 > k_2 = 0$ ó $0 = k_1 > k_2$)
- Punto planar: si $\mathcal{F}_{\mathbf{p}} \equiv 0$ (es decir, $k_1 = k_2 = 0$).

Además, un punto planar o (a veces) elíptico puede ser

- Punto umbilical: si $k_1 = k_2$ (existe λ tal que $e = \lambda E$, $f = \lambda F$ y $g = \lambda G$). Tenemos que $k_{\mathbf{p}}(w) = k_1 = k_2$. En estos puntos todas las direcciones son principales (en los puntos no umbilicales sólo hay dos direcciones principales y son ortogonales)

4.4 Calcular curvaturas y direcciones principales

Al buscar los autovalores y autovectores de $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, tenemos que las curvaturas principales k_1, k_2 deben ser las soluciones de la siguiente ecuación en la variable λ:

$$(e - \lambda E)(g - \lambda G) - (f - \lambda F)^2 = 0,$$

y las direcciones principales deben cumplir

$$\begin{pmatrix} e - k_i E & f - k_i F \\ f - k_i F & g - k_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2.$$

4.5 Direcciones asintóticas

Sea $w \in T_{\mathbf{p}}S$ unitario, entonces w es **dirección asintótica** si

$$k_p(w) = 0.$$

En coordenadas de la base de direcciones principales significa que si escribimos

$$w = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$

entonces

$$k_1 \sin^2\theta + k_2 \cos^2\theta = 0.$$

En la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ significa que si escribimos $w = x\mathbb{X}_u + y\mathbb{X}_v$, entonces

$$x^2 e + 2xyf + y^2 g = 0.$$

4.6 Curvas asintóticas, líneas de curvatura y curvas geodésicas

Sea S una superficie regular parametrizada por $\mathbb{X}(u,v)$.

> Las **curvas asintóticas** son curvas $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbb{X}(u(t),v(t))$ en S cuya curvatura normal se anula en todo punto.

Esto es equivalente a pedir que

$$e(u(t),v(t))\,\dot{u}(t)^2 + 2\,f(u(t),v(t))\,\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g(u(t),v(t))\,\dot{v}(t)^2 = 0\,.$$

> Las **líneas de curvatura** son curvas $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbb{X}(u(t),v(t))$ en S cuyos vectores tangentes en cada punto determinan una dirección principal.

Puesto que esto es equivalente a que los vectores

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$$

sean proporcionales en todo punto $\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(t)$, la ecuación diferencial que satisfacen las líneas de curvatura es (omitimos la dependencia de t en los coeficientes)

$$\begin{vmatrix} E(u,v)\,\dot{u}(t) + F(u,v)\,\dot{v}(t) & e(u,v)\,\dot{u}(t) + f(u,v)\,\dot{v}(t) \\ F(u,v)\,\dot{u}(t) + G(u,v)\,\dot{v}(t) & f(u,v)\,\dot{u}(t) + g(u,v)\,\dot{v}(t) \end{vmatrix} = 0\,,$$

o equivalentemente

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2(t) & -\dot{u}(t)\dot{v}(t) & \dot{u}^2(t) \\ E(u,v) & F(u,v) & G(u,v) \\ e(u,v) & f(u,v) & g(u,v) \end{vmatrix} = 0\,.$$

> Las **curva geodésica** son curvas $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbb{X}(u(t),v(t))$ en S tales que el vector aceleración $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ es siempre paralelo al vector normal a la superficie $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}(t)}(t)$. Una consecuencia es que $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}(t)}\| = \mu$ es constante, es decir $s = t/\mu$ es un parámetro de arco.

En cualquier coordenada local, las ecuaciones diferenciales que satisfacen una curva geodésica se pueden escribir de forma matricial como

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} E\,\dot{u} + F\,\dot{v} \\ F\,\dot{u} + G\,\dot{v} \end{array} \right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} E_u\,\dot{u}^2 + 2F_u\,\dot{u}\,\dot{v} + G_u\,\dot{v}^2 \\ E_v\,\dot{u}^2 + 2F_v\,\dot{u}\,\dot{v} + G_v\,\dot{v}^2 \end{array} \right)\,. \tag{3}$$

Ser geodésica es una propiedad intrínseca: la ecuación (3) nos demuestra que dependen sólo de la primera forma fundamental (métrica) y no de su inmersión en $\mathbb{R}^3$.

Las curvas que tienen longitud mínima entre dos puntos de una superficie son curvas geodésicas. Por ejemplo, en el plano son las rectas y en la esfera son las circunferencias máximas (grandes círculos).

5 Triedro de Darboux

Triedro alternativo al de Frenet, para curvas γ parametrizadas por longitud de arco que están contenidas en una superficie S. La base ortonormal orientada positiva para cada punto $\gamma(s)$ llamada triedro de Darboux es

$$\{\mathbf{t}_{\gamma(s)}(s), \mathbf{N}_{\gamma(s)}, \mathbf{C}_{\gamma(s)}\},$$

donde $\mathbf{C}_{\gamma(s)} = \mathbf{t}_{\gamma(s)}(s) \times \mathbf{N}_{\gamma(s)}$ es llamado el vector conormal (así que $\mathbf{C}_{\gamma(s)}$ y $\mathbf{t}_{\gamma(s)}(s)$ generan $T_{\gamma(s)}S$).

Ecuaciones de Darboux:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{t}'_{\gamma(s)}(s) & = & + k_n\mathbf{N}_{\gamma(s)}(s) & -k_g\mathbf{C}_{\gamma(s)} \\
\mathbf{N}'_{\gamma(s)}(s) & = - k_n\mathbf{t}_{\gamma(s)}(s) & & +t_g\mathbf{C}_{\gamma(s)} \\
\mathbf{C}'_{\gamma(s)}(s) & = + k_g\mathbf{t}_{\gamma(s)}(s) & - t_g\mathbf{N}_{\gamma(s)}(s). &
\end{array}$$

donde k_n es la curvatura normal en la dirección $\gamma'(s)$ en el punto $\gamma(s)$, es decir

$$k_n = k_{\gamma(s)}(\gamma'(s)),$$

k_g es la curvatura geodésica y t_g la torsión geodésica.

Recordemos que las ecuaciones del triedro de Frenet son

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{t}'_{\gamma(s)}(s) & = & + \kappa\mathbf{n}_{\gamma(s)}(s) & \\
\mathbf{n}'_{\gamma(s)}(s) & = - \kappa\mathbf{t}_{\gamma(s)}(s) & & +\tau\mathbf{b}_{\gamma(s)} \\
\mathbf{b}'_{\gamma(s)}(s) & = & - \tau\mathbf{n}_{\gamma(s)}(s). &
\end{array}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
k_n &= \mathcal{F}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \cdot \gamma'(s) \quad \text{(ya lo sabíamos)} \\
t_g &= -\mathcal{F}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \cdot \mathbf{C}_{\gamma(s)}(s).
\end{aligned}$$

Si escribimos $w = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, tenemos que podemos escribir $k_n(w) = k_1 \sin^2\theta + k_2\cos^2\theta$ y $t_g(w) = (k_1 - k_2)\sin\theta\cos\theta$.

Por otro lado k_g cumple que

$$k_g^2 = \kappa_\gamma^2 - k_n^2.$$

De (2) sabemos que el valor mínimo de κ_γ es $|k_n|$, con lo que deducimos que se alcanza cuando $k_g = 0$.

$k_n \equiv 0$ en todo punto $\gamma(s)$ si y sólo si $\gamma(s)$ es una curva asintótica. Tenemos $\mathbf{t}'_{\gamma(s)}(s) = -k_g\mathbf{C}_{\gamma(s)}$, es decir, $\gamma''(s)$ es paralelo a $\mathbf{C}_{\gamma(s)}$, con lo que no tiene componente normal.

$t_g \equiv 0$ en todo punto $\gamma(s)$ si y sólo si $\gamma(s)$ es una línea de curvatura. Tenemos $\mathcal{F}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = -\mathbf{N}'_{\gamma(s)}(s) = k_n \mathbf{t}_\gamma(s) = k_n \gamma'(s)$.

$k_g \equiv 0$ en todo punto $\gamma(s)$ si y sólo si γ es una curva geodésica. Tenemos $\mathbf{t}'_{\gamma(s)}(s) = k_n \mathbf{N}_{\gamma(s)}(s)$, es decir, $\gamma''(s)$ es paralelo a $\mathbf{N}_{\gamma(s)}(s)$, con lo que sólo tiene componente normal.

6 Aplicaciones diferenciables e isometrías

Dadas dos superficies regulares S y $\overline{S}$ parametrizadas por $\mathbb{X} : U \to \mathbb{R}^3$ y $\overline{\mathbb{X}} : \overline{U} \to \mathbb{R}^3$ respectivamente, una aplicación continua $f : S \to \overline{S}$ se dice **diferenciable** si la composición

$$h = \overline{\mathbb{X}}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X} : \begin{array}{ccc} U & \to & \overline{U} \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

es diferenciable (estamos suponiendo que $f(\mathbb{X}(U)) \subset \overline{\mathbb{X}}(\overline{U})$).

La expresión local h de una aplicación f entre superficies nos permite estudiarla como función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Un **difeomorfismo** es una aplicación biyectiva $f : S \to \overline{S}$ tal que tanto f como f^{-1} son diferenciables.

Un **difeomorfimo local** es una aplicación $f : S \to \overline{S}$ tal que, para todo $\mathbf{p} \in S$, existe un abierto $V \in S$, con $\mathbf{p} \in V$, y la restricción de f a V es un difeomorfismo de $V \mapsto f(V)$.

Ya que las cartas $\mathbb{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto S$ son difeomorfismos de U sobre $\mathbb{X}(U)$ (ejercicio), las superficies regulares no son otra cosa que los conjuntos de $S \subset \mathbb{R}^3$ que son difeomorfos localmente a $\mathbb{R}^2$.

Una aplicación diferenciable $f : S \to \overline{S}$ induce una aplicación lineal $T_\mathbf{p} f : T_\mathbf{p} S \to T_{f(\mathbf{p})}\overline{S}$ llamada la **aplicación tangente de** f y definida por $\mathbf{w} \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ \boldsymbol{\gamma})(0)$ para una curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ en S tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \mathbf{w}$.

$T_\mathbf{p} f$ no es otra cosa que la diferencial de f.

Si la expresión local $h = \overline{\mathbb{X}}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$ de f viene dada por $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, entonces en las bases $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ y $\{\overline{\mathbb{X}}_x, \overline{\mathbb{X}}_y\}$ de $T_\mathbf{p} S$ y $T_{f(\mathbf{p})}\overline{S}$ la aplicación tangente de f viene dada por multiplicación por la matriz jacobiana. Es decir, si $\mathbf{v} = a\,\mathbb{X}_u + b\,\mathbb{X}_v$, entonces $T_\mathbf{p} f(\mathbf{v}) = c\,\mathbb{Y}_x + d\,\mathbb{Y}_y$ donde

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Un difeomorfismo local $f : S \to \overline{S}$ es una **isometría local** si su aplicación tangente preserva longitudes, es decir si para todo $\mathbf{p} \in S$

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\| &= \|\mathbf{w}\|\,, && \text{para todo } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S \text{ o, equivalentemente,} \\ \langle T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}), T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\,, && \text{para todo } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S. \end{aligned}$$

Una isometría local que sea difeomorfismo se llama isometría.

Las isometrías locales preservan longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes y áreas de regiones (ejercicios 1 y 2 de la Hoja 5).

Dado un difeomorfismo local $f : S \to \overline{S}$, consideramos la carta $\mathbb{X} : U \mapsto S$ de S y la carta de $\overline{S}$ definida por

$$\overline{\mathbb{X}}(u, v) = f \circ \mathbb{X}(u, v),$$

es decir, cuando $h(u, v) = (u, v)$ (por lo que se tiene en particular que $T_{\mathbf{p}}f(\mathbb{X}_u) = \overline{\mathbb{X}}_u$ y $T_{\mathbf{p}}f(\mathbb{X}_v) = \overline{\mathbb{X}}_v$).
En estas circunstancias, el difeomorfismo local f es una isometría local si y sólo si para todo $(u, v) \in U$,

$$\overline{E}(u, v) = E(u, v)\,, \qquad \overline{F}(u, v) = F(u, v)\,, \qquad \overline{G}(u, v) = G(u, v)\,.$$

En las ecuaciones de las geodésicas solamente intervienen los coeficientes de la primera forma fundamental, así que las isometrías locales llevan geodésicas a geodésicas, ya que preservan la primera forma fundamental.

7 Curvatura gaussiana

La curvatura gaussiana se puede expresar de forma intrínseca (es decir en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental):

Coordenadas ortogonales: Si $F(u, v) \equiv 0$, la curvatura gaussiana viene dada por

$$K_{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

Fórmula de Brioschi: Para coordenadas generales la curvatura gaussiana es igual a

$$K_{\mathbf{p}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}\,.$$

Esta fórmula prueba el **Teorema Egregio de Gauss**:

> Si $f : S \to \overline{S}$ es una isometría local entre dos superficies regulares S y $\overline{S}$, entonces sus curvaturas $K_{\mathbf{p}} = \overline{K}_{f(\mathbf{p})}$ coinciden para todo punto $\mathbf{p} \in S$.

Si dos superficies regulares tienen distintas curvaturas gaussianas, entonces nunca podrán ponerse en correspondencia isométrica.

Ojo, lo que se puede escribir en términos de la primera forma fundamental es $eg - f^2$, pero cada uno de los coeficientes e, g, f por separado no tienen esa expresión. No son cantidades intrínsecas. Tampoco lo es la curvatura media H_p.