Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2019-20.
Departamento de Matemáticas

Hoja 7

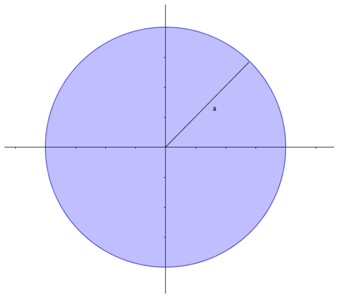
Cambio de variables.

1.- Dibujar la región Ω y expresar la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, donde $a > 0$.
(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Desarrollo:

(a) Primero vamos a dibujar la región Ω



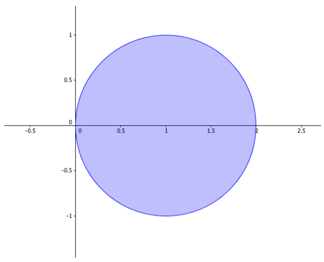
Una vez tenemos la región Ω dibujada pasemos a expresar la integral en coordenadas polares. Para ello recordemos que el Jacobiano del cambio a coordenadas polares viene dado por

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \qquad \left(\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \right)$$

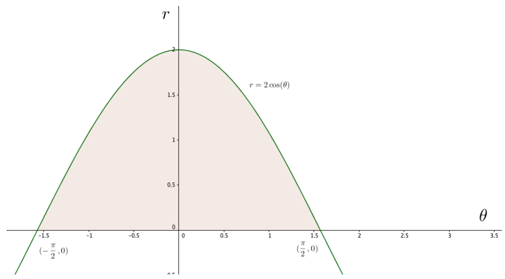
Por tanto

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\ |J(r,\theta)|\ dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr \right] d\theta.$$

(b) Primero vamos a dibujar la región Ω



Una vez tenemos la región Ω dibujada pasemos a expresar la integral en coordenadas polares. Esta vez es un poco más complicado calcular los límites de integración. ¿Qué región del plano, llamémosla T, al aplicarle la transformación a polares nos dará nuestra región Ω? Se puede ver que dicha región es



Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_T f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\ |J(r,\theta)|\ dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\right] d\theta.\end{aligned}$$

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v\,, \\ y = v - u^2\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen D mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

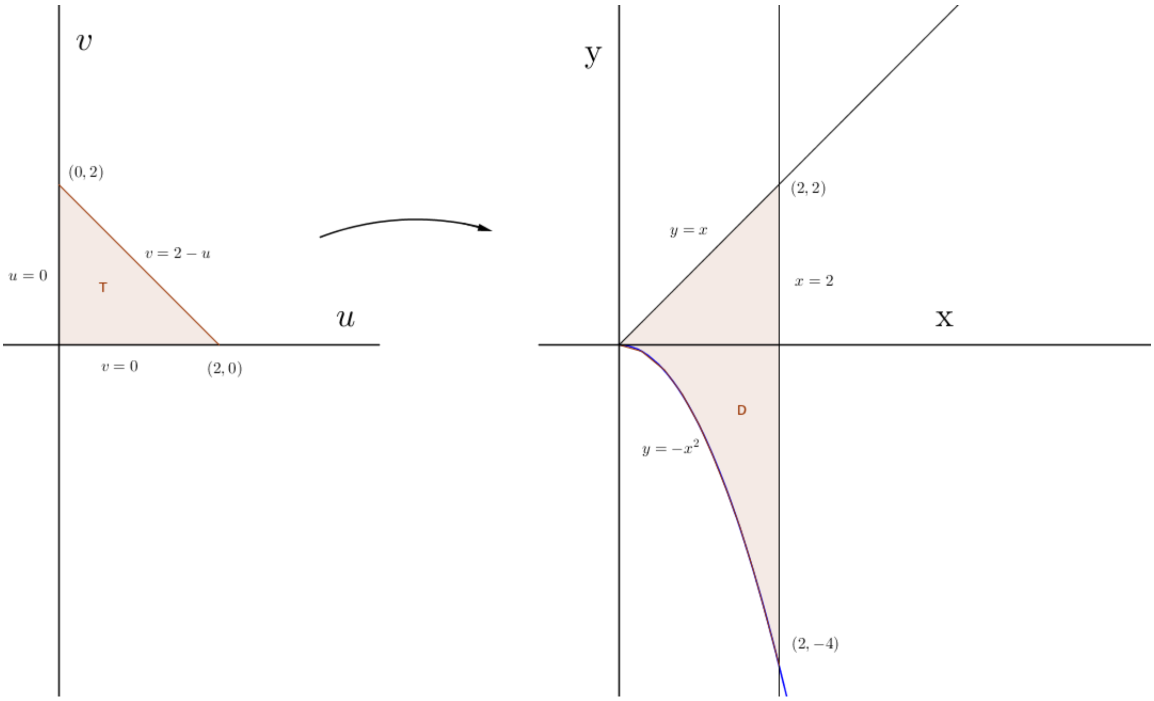
(c) Calcular $\int_D (x-y+1)^2\,dx\,dy$ directamente, y haciendo un cambio de variables para llevarla a la región T.

Desarrollo:

(a)

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u.$$

(b)



(c) Primero lo calculamos directamente

$$\begin{aligned}\int_D (x-y+1)^2\,dx\,dy &= \int_0^2 \left[\int_{-x^2}^{x} (x-y+1)^2\,dy\right] dx = \int_0^2 \frac{-1}{3}(x-y+1)^3\Big|_{-x^2}^{x} dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 (x+x^2+1)^3\,dx - \frac{1}{3}\int_0^2 dx \\ &= \frac{1618}{35} \quad \text{(Aquí hay simplemente que desarrollar el cubo e integrar los monomios.)}\end{aligned}$$

Ahora calcularemos la integral haciendo el cambio de variable para llevarla a la región T, (si todo ha ido bien los resultados tienen que coincidir)

$$\begin{aligned}
\int_D (x-y+1)^2\, dx\, dy &= \int_T (u+v-(v-u^2)+1)^2\ |J(u,v)|\ du\, dv \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{2-u} (u^2+u+1)^2(1+2u)\, dv \right] du \\
&= \int_0^2 (u^2+u+1)^2(1+2u)(2-u)\, du \\
&= \frac{1618}{35}.
\end{aligned}$$

3.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_\Omega (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dx\, dy\,,$$

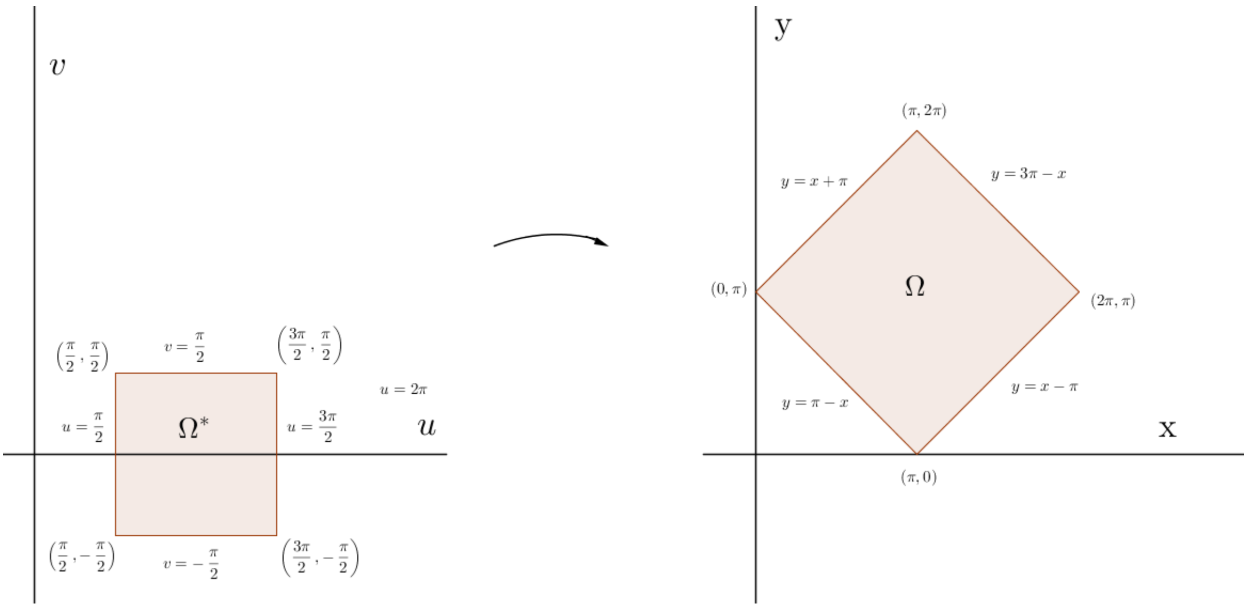
donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$.

Solución: $\dfrac{1}{3}\pi^4$

Desarrollo: Definimos la aplicación (transformación)

$$\begin{cases} x = u+v\,, \\ y = u-v\,. \end{cases}$$

Ahora vamos a buscar la región Ω^*, de modo que la imagen de Ω^* mediante esta transformación sea exactamente nuestra región Ω.



Ahora, teniendo en cuenta que el Jacobiano viene dado por

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

ya podemos hacer la integral mediante el cambio de variable correspondiente,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}(x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dx\, dy &= \int_{\Omega^*}(2v)^2 \operatorname{sen}^2(2u)\, |J(u,v)|\; du\, dv \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v^2 \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(2u)du\right] dv \\
&= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v^2 dv \\
&= 4\pi \left.\frac{v^3}{3}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^4}{3}.
\end{aligned}$$

También podemos considerar la rotación $\phi(u,v)$ de ángulo $\pi/4$ con matriz en las bases estándar

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que gira el cuadrado $\widehat{\Omega} = [0, \sqrt{2}\pi] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ y lo transforma en el cuadrado con vértices $(0,0), (\pi,\pi), (0,2\pi)$ y $(-\pi,\pi)$. Y la traslación $T(u',v') = (u',v') + (\pi, 0)$. La composición $\Psi(u,v) = (T\circ\psi)(u,v)$ nos da un cambio de variables de $\widehat{\Omega}$ en Ω con Jacobiano 1.

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2\,, \\ \\ y = 2\,uv\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Determinar la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R cuyos vértices son $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω.

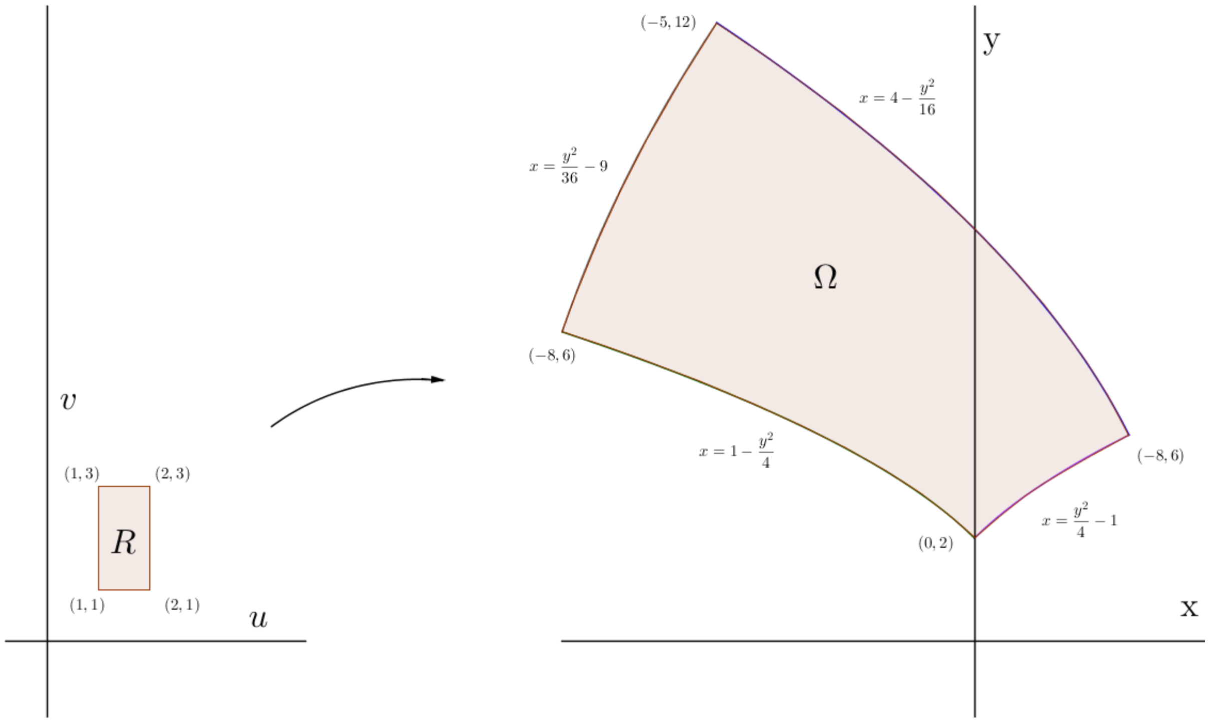
Solución: (a) $J(u,v) = 4(u^2+v^2)$ (c) $160/3$

Desarrollo:

(a)

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2).$$

(b)



(*c*) Ahora ya podemos calcular el área de Ω, para ello aplicaremos el cambio de variable visto antes

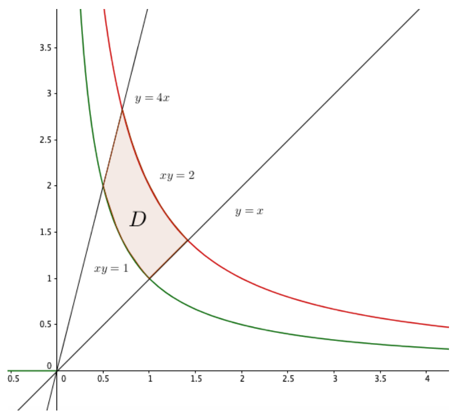
$$\begin{aligned}
\text{Área}(\Omega) &= \int_{\Omega} 1\, dx\, dy = \int_R |J(u,v)|\, du\, dv = \int_1^2 \left[\int_1^3 4(u^2+v^2)\, dv\right] du \\
&= 4\int_1^2 u^2\, v|_1^3 + \frac{v^3}{3}\bigg|_1^3\, du = 8\int_1^2 u^3\, du + \frac{104}{3} = 8\,\frac{u^3}{3}\bigg|_1^2 + \frac{104}{3} \\
&= \frac{160}{3}.
\end{aligned}$$

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\int_D f(xy)\, dx\, dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\, du\,,$$

siendo D la región del primer cuadrante limitada por las líneas $xy = 1$, $xy = 2$, $\dfrac{y}{x} = 1$, $\dfrac{y}{x} = 4$.

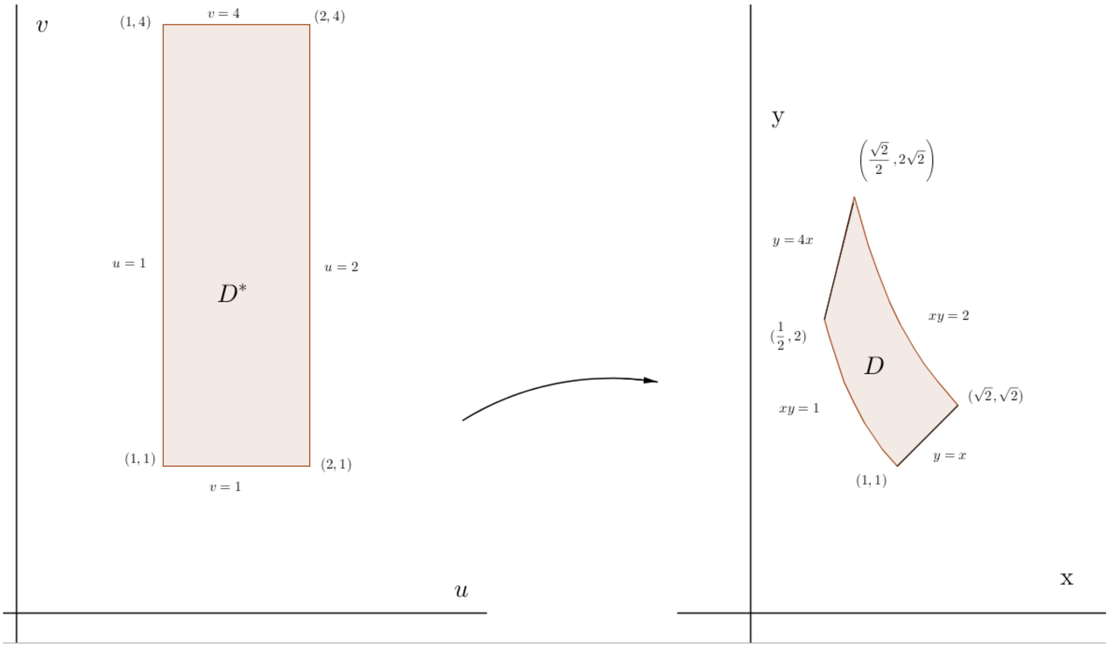
Desarrollo: Lo que vamos a hacer es encontrar el cambio de variable adecuado para poder demostrar la igualdad. Primero que todo dibujamos D.



Consideramos la aplicación (transformación) definida por

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}\,, \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

¿Por qué hemos elegido esta transformación? Primero que todo hay que fijarse que $u = xy$ para que $f(xy)$ se transforme en $f(u)$, además viendo el dibujo deducimos que $v = y/x$, para que los límites de integración respecto de la variable v sean 1 y 4 y así no dependan de u. Ahora ya tendríamos que $y^2 = uv$ y $x = \dfrac{u}{y} = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$.
Ahora vamos a dibujar la región D^*, de modo que la imagen de D^* mediante esta transformación sea exactamente nuestra región D.



Ahora, teniendo en cuenta que el Jacobiano viene dado por

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\frac{1}{v}}{2\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}} & \dfrac{\frac{-u}{v^2}}{2\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}} \\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

ya podemos aplicar el teorema de cambio de variable para obtener,

$$\int_D f(xy)\,dx\,dy = \int_{D^*} f(u)\,|J(u,v)|\,du\,dv = \int_1^2 f(u)\left[\int_1^4 \frac{1}{2v}\,dv\right] du$$
$$= \frac{1}{2}\log v\Big|_1^4 \int_1^2 f(u)\,du = \log(2)\int_1^2 f(u)\,du.$$

6.- Para cada $R > 0$ considérese $I(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,dt$.

(a) Demostrar que

$$I(R)^2 = \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$

siendo Q el cuadrado $Q = [-R,R]\times[-R,R]$.

(b) Sean D_R y D_{2R} los discos de centro el origen y radios R y $2R$, respectivamente. Demostrar que

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < I(R)^2 < \int_{D_{R2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que $I(R) \to \sqrt{\pi}$ cuando $R \to +\infty$. Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

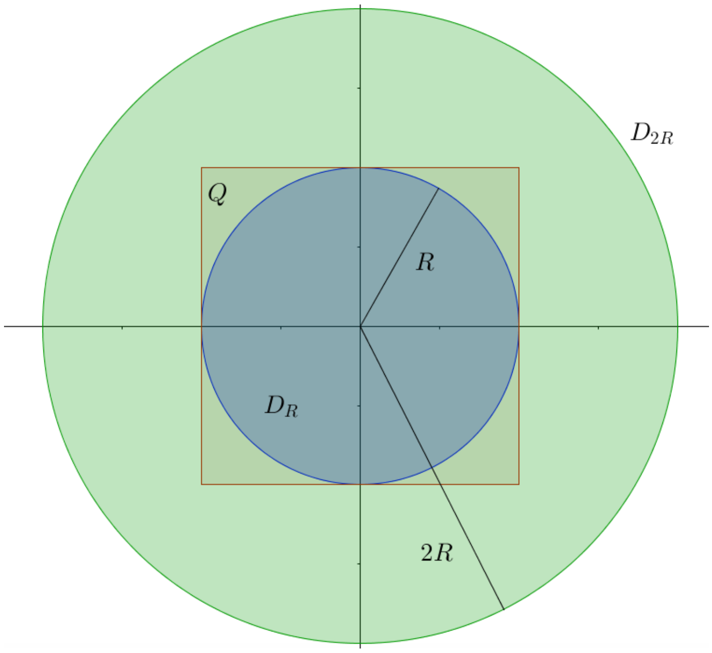
Desarrollo:

(a) Solo hay que expresar la integral $\int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ como una integral iterada

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-R}^{R}\left[\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right]dy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right]dy\\ &= \int_{-R}^{R} e^{-y^2}\left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right]dy = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\\ &= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

(b) Para ver esto, lo único que tenemos que recordar es que dada una función positiva, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, y dos conjuntos $A,B\subset\mathbb{R}^2$ tales que $A\subsetneq B$ entonces $\int_A f(x,y)\,dx\,dy < \int_B f(x,y)\,dx\,dy$.

En nuestro caso $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ es positiva en todo $\mathbb{R}^2$. Además $D_R\subsetneq Q\subsetneq D_{2R}$.



Así

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \int_{D_{R2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,. \tag{1}$$

(c) Haciendo el cambio de variables a coordenadas polares (recordar $J(r,\theta)=r$) obtenemos que

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^R = \pi\left(1-e^{-R^2}\right),$$

$$\int_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2R} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^{2R} = \pi\left(1-e^{-4R^2}\right).$$

Ahora tomando límites cundo $R\to\infty$ en (1) obtenemos que

$$I(R)^2 = \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \to \pi,$$

por tanto $I(R)\to\sqrt{\pi}$ cuando $R\to\infty$. La última observación se deduce directamente de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p,R)=\int_{D_R}\frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

sobre el disco $D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p,R)$ tiene límite cuando $R\to+\infty$.

Solución: Para $p>1$, $\lim\limits_{R\to+\infty} I(p,R)=\dfrac{\pi}{p-1}\dfrac{1}{p^{2(p-1)}}$

Desarrollo: Para calcular la integral vamos a hacer una cambio de variable a coordenadas polares (recordar $J(r,\theta)=r$)

$$I(p,R)=\int_{D_R}\frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{r\,dr}{(p^2+r^2)^p}\right]d\theta=\pi\int_0^R 2r(p^2+r^2)^{-p}\,dr$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{-p+1}\dfrac{1}{(p^2+R^2)^{p-1}}-\dfrac{\pi}{-p+1}\dfrac{1}{p^{2(p-1)}} & p\neq 1\\[2ex] \pi\log(1+R^2) & p=1\end{cases}$$

Por tanto, $I(p,R)$ tiene límite cuando $R\to+\infty$ si $p>1$ y el límite vale $\dfrac{\pi}{p-1}\dfrac{1}{p^{2(p-1)}}$.

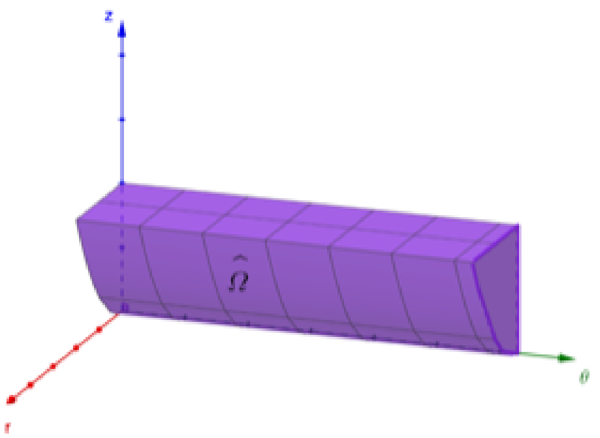
8.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

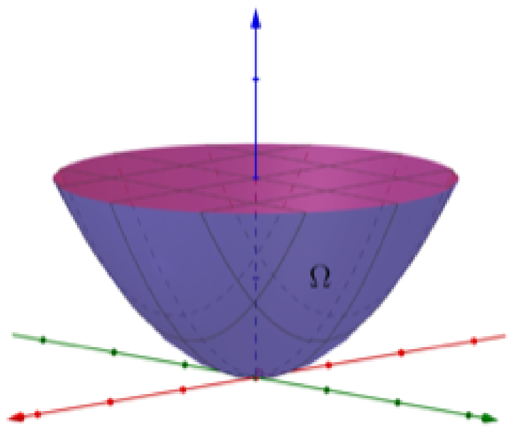
(a) $\displaystyle\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2=2\,z$ y el plano $z=2$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2=1$.

Solución: (a) $\dfrac{16}{3}\pi$ (b) $\dfrac{1}{8}\pi$

Desarrollo: (a) El cambio de coordenadas $\phi(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ transforma $\widehat{\Omega}$ en Ω biyectivamente salvo en un conjunto de 3-medida cero.





Por tanto

$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_{\widehat{\Omega}} rr^2\,dr\,d\theta\,dz=\int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\left[\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3\,dz\right]d\theta\right]dr=\int_0^2\left[\int_0^{2\pi} r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)d\theta\right]dr=$$

$$=2\pi\int_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)dr=2\pi\left(2\frac{r^4}{4}-\frac{1}{2}\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{3}$$

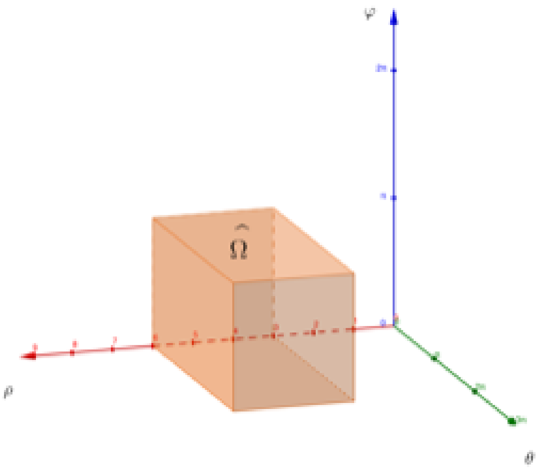
9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

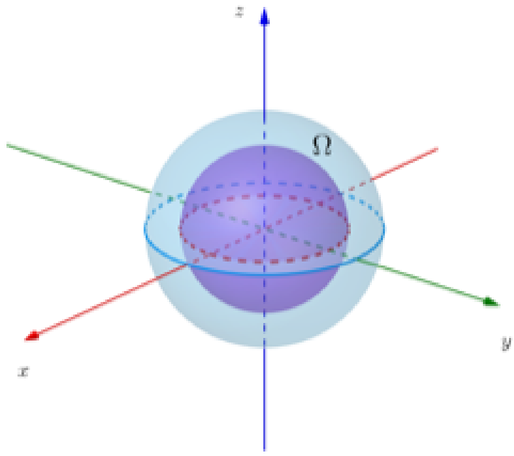
(a) $\displaystyle\int_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (b) $\frac{124}{5}\pi a^5$

Desarrollo: (b) El cambio de coordenadas $\psi(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\rho\cos\varphi)$ transforma $\widehat{\Omega}$ en Ω biyectivamente salvo en un conjunto de 3-medida cero.





Por tanto

$$\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\int_{\widehat{\Omega}}\rho^2(\rho^2\operatorname{sen}\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int_a^{2a}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\rho^4\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\right]d\varphi\right]d\rho=$$

$$=2\pi\int_a^{2a}\left[\int_0^{\pi}\rho^4\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right]d\rho=2\pi\int_a^{2a}\rho^4(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\,d\rho=4\pi\frac{\rho^5}{5}\Big|_a^{2a}=\frac{124}{5}\pi a^5$$

10.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=z\big\}$.

Solución: $\frac{\pi}{10}$

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2\ge x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución: $\frac{4\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2+y^2=4\,z$.

(b) $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\ge0,\ y\ge0,\ z\ge0,\ \sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}+\sqrt{\frac{z}{15}}\le1\}$.

Solución: (a) $\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)$ (b) 1

Desarrollo: (a) Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5\\ x^2+y^2=4z\end{cases}$$

y nos queda $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 1$, que es la curva intersección entre las dos superficies.

Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 4\}$, y consideremos las funciones escalares f y g definidas en Ω por

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \sqrt{5 - (x^2 + y^2)}.$$

Tenemos que $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega$ y el sólido S es el limitado por las gráficas de ambas funciones, por tanto

$$\begin{aligned}\text{Volumen } (S) &= \int_\Omega \left(\sqrt{5 - (x^2 + y^2)} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right) dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r \left(\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^2}{4} \right) d\theta \right] dr \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(r\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^3}{4} \right) dr = 2\pi \left(-\frac{(5 - r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{16} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{3} \left(5\sqrt{5} - 4 \right)\end{aligned}$$

13.- Demostrar que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi\, a\, b$. Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen del sólido S limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \dfrac{4}{3}\,\pi abc$.

Desarrollo: Consideramos el interior de la elipse $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ con $a, b > 0$. El cambio de variable $F(r, \theta) = (ar\cos\theta, br \operatorname{sen}\theta)$ transforma el rectángulo $\widehat{\Omega} = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ en Ω y el valor de su Jacobiano es abr. Por tanto

$$\text{área } (\Omega) = \int_\Omega dx\, dy = \int_{\widehat{\Omega}} abr\, dr\, d\theta = ab \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} r\, d\theta \right] dr = 2\pi ab \int_0^1 r\, dr = 2\pi ab \frac{r^2}{2} \Bigg|_0^1 = \pi ab.$$

Para $|z_0| < c$ la intersección del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y el plano $z = z_0$ nos da una elipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{con} \qquad \alpha = a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}} \qquad \text{y} \qquad \beta = b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$$

en el plano $z = z_0$. El área en el plano $z = z_0$ limitada por esta elipse es

$$A(z_0) = \pi\alpha\beta = \frac{\pi ab}{c^2}\,(c^2 - z_0^2)$$

Por el principio de Cavaliere

$$\text{Volumen } (S) = \int_{-c}^{c} A(z)\, dz = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^{c} (c^2 - z^2) dz = \frac{\pi ab}{c^2} \left(c^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_{-c}^{c} = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

14.- Sea T el toro sólido en $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar el círculo $(y - a)^2 + z^2 = b^2$ del plano $x = 0$ alrededor del eje Z. Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de T es $2\,\pi^2\, a\, b^2$.