HOJA 11

Análisis Matemático
Clase del 10/12/2021.

1.
$$\boxed{\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i \Rightarrow d\omega = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j\right)\wedge dx_i}$$

$\omega = dx - z\,dy$, $v = (x^2+y^2+z^2)\, dx\wedge dz + (xyz)\, dy \wedge dz$

$d\omega = -dz\wedge dy = dy \wedge dz$

$\omega\wedge d\omega = (dx - z\,dy)\wedge(dy\wedge dz) = dx\wedge dy \wedge dz$

$dv = 2y\, dy\wedge dx \wedge dz + yz\, dx\wedge dy\wedge dz = [y(z-2)]\, dx\wedge dy\wedge dz$

$w\wedge v = (xyz)\, dx\wedge dy\wedge dz - z(x^2+y^2+z^2)\, dy\wedge dx\wedge dz$

$= z(xy + x^2+y^2+z^2)\, dx\wedge dy \wedge dz$

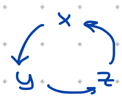
<u>Nota</u>: El producto exterior de dos 2-formas es una 4-forma.
Si el espacio en el que trabajamos es de dimensión ≤ 3, entonces existe dependencia y por tanto el producto es 0.

2. a) $(dx+dy-dz)\wedge(dx+dy+dz) =$

$= \cancel{dx\wedge dy} + dx\wedge dz + \cancel{dy\wedge dx} + dy\wedge dz - dz\wedge dx - dz\wedge dy$

$= 2(dy\wedge dz - dz\wedge dx)$

<u>Nota</u>: Se suele escribir $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$, siguiendo la orientación habitual.



b) $(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\wedge(x\,dy + y\,dz + z\,dx) =$

$= x^2\, dx\wedge dy + xy\, dx\wedge dz + y^2 dy\wedge dz + yz\, dy\wedge dx + xz\, dz\wedge dy + z^2 dz\wedge dx$

$= (x^2 - yz)\, dx\wedge dy + (z^2 - xy)\, dz\wedge dx + (y^2 - xz)\, dy\wedge dz.$

c) $(dx + 7\,dy)\wedge(-dx + x^2 dy + dz)\wedge(dy + dz) =$

$= [(x^2+7)dx\wedge dy - dz\wedge dx + 7\, dy\wedge dz]\wedge(dy+dz)$

$= -dz\wedge dx\wedge dy + (x^2+7)\, dx\wedge dy\wedge dz$

$= (x^2+6)\, dx\wedge dy\wedge dz.$

③ $$\left(\sum_{j=1}^{n} F_j\, dx_j\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} G_k\, dx_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_j G_k\, dx_j \wedge dx_k$$

$\boxed{dx_j \wedge dx_j = 0}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} F_j G_k\, dx_j \wedge dx_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} F_j G_k\, dx_j \wedge dx_k$$

intercambio $j \leftrightarrow k$ en el segundo sumando

$$= \sum_{1 \le j < k \le n} F_j G_k\, dx_j \wedge dx_k + \sum_{1 \le j < k \le n} F_k G_j\, dx_k \wedge dx_j =$$

$$= \sum_{1 \le j < k \le n} (F_j G_k - F_k G_j)\, dx_j \wedge dx_k .$$

④ 1. $\omega = (x^2+y+z^2)\, dx \wedge dz + xyz\, dy \wedge dz - \operatorname{sen}(yz)\, dx \wedge dy$

$d\omega = dy \wedge dx \wedge dz + yz\, dx \wedge dy \wedge dz - y\cos(yz)\, dz \wedge dx \wedge dy$

$= [-1 + yz - y\cos(yz)]\, dx \wedge dy \wedge dx.$

2. $\upsilon = x_3\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$

$d\upsilon = -\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$

$= 3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$

⑤ a) $\alpha = a(u,v)\, du + b(u,v)\, dv$. Utilizando la notación $a_u = \frac{\partial a}{\partial u}$, tenemos:

$d\alpha = a_v\, dv \wedge du + b_u\, du \wedge dv = (b_u - a_v)\, du \wedge dv = du \wedge dv$

$\iff b_u - a_v = 1$. Tomamos una solución particular: $a = 0$, $b = u$.

Por tanto, $\alpha = u\, dv$.

b) $(b_x - a_y)\, dx \wedge dy = (x^2 + yx + y^2)\, dx \wedge dy \Rightarrow b_x - a_y = x^2 + xy + y^2$

Por ejemplo: $a = 0$, $b = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} y + xy^2 \Rightarrow \alpha = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} y + xy^2\right) dy.$

c) $\alpha = a(x,y,z)\, dx + b(x,y,z)\, dy + c(x,y,z)\, dz$

$d\alpha = a_y\, dy \wedge dx + a_z\, dz \wedge dx + b_x\, dx \wedge dy + b_z\, dz \wedge dy + c_x\, dx \wedge dz + c_y\, dy \wedge dz$

$= (c_y - b_z)\, dy \wedge dz + (a_z - c_x)\, dz \wedge dx + (b_x - a_y)\, dx \wedge dy$

$= x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx - 2z\, dx \wedge dy.$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_y - b_z = x \\ a_z - c_x = y \\ b_x - a_y = -2z \end{cases}$$

Si $a_z = 0 \Rightarrow c_x = -y \Rightarrow c = -xy$
$a_y = 0 \Rightarrow b_x = -2z \Rightarrow b = -2xz$ $\Big\}$ $c_y - b_z = -x + 2x = x$

Por tanto, $\alpha = -2xz\,dy - xy\,dz$.

(6) ω es de orden 2 $\Rightarrow$ $d\omega$ es de orden 3 $\Rightarrow$ $\phi^* d\omega$ es de orden 3 en $\mathbb{R}^2_{uv}$, y por tanto $\phi^* d\omega = 0$. Se sigue un razonamiento similar para $d(\phi^*\omega)$: $\phi^*\omega$ es de orden 2 en $\mathbb{R}^2_{uv}$ $\Rightarrow$ $d(\phi^*\omega)$ es de orden 3 en $\mathbb{R}^2_{uv}$ $\Rightarrow$ $d(\phi^*\omega) = 0$.

(7) (a) $\operatorname{div} F = a\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y + e^z - e^z = (a-1)\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y$

Para que $\operatorname{div} F = cte \Rightarrow (a-1)\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y = -1 \Rightarrow a - 1 = -1 \Rightarrow a = -2$.

(b) Tenemos que

$$\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(\varphi_t(R)) = \int_{\varphi_t(R)} (\operatorname{div} F)\, dx\,dy\,dz. \qquad (99)$$

en los apuntes de J.G.

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Vol}(\varphi_t(R)) = -\int_{\varphi_t(R)} dx\,dy\,dz = -\operatorname{vol}(\varphi_t(R))$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{vol}(\varphi_t(R)) = e^{-t}\cdot cte$$

$$\Rightarrow \quad \text{En } t=0,\ \operatorname{vol}(R) = cte$$

Finalmente,

$$\operatorname{vol}(\varphi_t(R)) = e^{-t}\cdot \operatorname{vol}(R)$$