Estructuras Algebraicas

Hoja 2. Homomorfimos de grupos.

1. Demostrad que un grupo G es abeliano si y solamente si la función $f\colon G \to G$ dada por $f(g) = g^{-1}$ es un homomorfismo.

2. Se define $f\colon \mathsf{D}_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mediante $f(g) = [0]_2$ si g es una rotación y $f(g) = [1]_2$ si g es una simetría. Demostrad que f es un homomorfismo de grupos.

3. Demostrad que no existe un homomorfismo sobreyectivo $\mathsf{D}_6 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

4. Dados grupos G_1 y G_2 escribimos $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ para denotar el conjunto de homomorfismos $G_1 \to G_2$. Determinad $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathsf{D}_6)$ y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathsf{D}_6)$.

5. Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos con $(|G_1|, |G_2|) = 1$. Calcula $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

6. Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrad que $f(g^a) = f(g)^a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. ¿Cómo se relacionan $o(g)$ y $o(f(g))$ para un $g \in G$ cualesquiera?

7. Encontrad dos grupos finitos G y H no triviales y un homomorfismo $f\colon G \to H$ con la propiedad que $o(f(g)) < o(g)$ para todo $1 \neq g \in G$.

8. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos se pueden definir entre los siguientes grupos aditivos?

a) de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$, **b)** de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, y **c)** de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

9. Cuando sea posible, definid un homomorfismo entre los siguientes grupos:

a) de S_3 en $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, inyectivo; **b)** de S_3 en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, sobreyectivo; **c)** de S_3 en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, no constante.

10. Demostrad que el grupo cuaternio Q_8 introducido en la Hoja 1 es isomorfo al grupo dado por

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $(-1)^2 = 1$, ij=k , $ki = j$, $jk = i$, $ji = -k$, $ik = -j$, $kj = -i$.

11. Comprobad que todo subgrupo de Q_8 es normal y determinad la clase de isomorfía de cada cociente.

12. Sea $H \leq GL_2(\mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demostrad que $o(A) = 2$, $o(B) = 4$, $BA = AB^3$.

b) Demostrad que $H = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$ con $|H| = 8$.

c) Observad que se puede calcular la tabla de grupo de H con los datos de **a)**.

d) Demostrad que $\langle B \rangle \triangleleft H$ y que $\mathbf{Z}(H) = \langle B^2 \rangle$.

e) Hallad la clase de isomorfía de $H/\mathbf{Z}(H)$.

13. Sea $(G, \cdot)$ un grupo, definimos una nueva operación binaria sobre G como

$$g * h = h \cdot g\,,$$

para todo $g, h \in G$. Probad que $(G, *)$ es un grupo.

Calulad el producto de los elementos de S_3 dados por $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ respecto al producto en S_3 definido en clase y al introducido en el apartado anterior y comprobar que el esultado es distinto.

Demostrar, sin embargo, que $(G, \cdot) \cong (G, *)$.

(Nota: Si consultas varios libros encontrarás que unos usan un producto y otros el otro, pero el apartado anterior dice que ambas estructuras son equivalentes).

14. Sea G un grupo y sea N un subgrupo normal maximal en G, es decir, no existe ningún $N \subsetneq M \subsetneq G$ con $M \triangleleft G$. Demostrad que:

a) G/N es simple.

b) Si $H \triangleleft G$ entonces o bien $H \subseteq N$ o bien $G = NH$.

c) Suponiendo que G/N es abeliano y finito, si $H \leq G$, entonces o bien $H \subseteq N$ o bien $G = NH$. En el segundo caso, mostrad que $|H : N \cap H|$ es primo.

15. Sea $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

a) Demostrad que $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ con el producto usual es un grupo.

b) Encontrad un isomorfismo $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

c) Decidid si $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ son o no isomorfos, y si $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{C}^*$ son o no isomorfos.

16. Sea $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \leq \mathbb{C}^*$. Utilizad el primer teorema de isomorfía para demostrar que $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Hallad el subgrupo de $\mathbb{S}^1$ formado por todos los elementos de orden finito. ¿A qué subgrupo de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ corresponde?

17. Sean H_j, K_j grupos con $j \in \{1, 2\}$, y sean también H y K grupos.

a) Probad que si $H_1 \cong K_1$ y $H_2 \cong K_2$ entonces $H_1 \times K_1 \cong H_2 \times K_2$.

b) Probad que $H \times K \cong K \times H$.

18. Sea G un grupo con $H, K \triangleleft G$ tales que $G = HK$.

a) Demostrad que si $H \cap K = 1$ entonces $G \cong H \times K$.

b) Probad que, en general, $G/H \cap K \cong G/H \times G/K$.

19. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$ el conjunto de matrices unitriangulares superiores con entradas enteras.

a) Demostrad que $H \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.

b) Demostrad que $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \subseteq H$.

c) Razonad si $H \triangleleft \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.

d) Determinad la clase de isomorfía de H.

20. Sea A un grupo abeliano y $k \in \mathbb{Z}$.

a) Demostrad que la función $f_k \colon A \to A$ dada por $f_k(a) := a^k$ es un homomorfismo.

b) En el caso $k = -1$, demostrad que f_{-1} es un automorfismo de A.

c) En el caso $A = \mathbb{Q}$, ¿para qué valores de k es f_k un automorfismo de $\mathbb{Q}$?

21. Sea $G > 1$ un grupo abeliano de orden p^a donde p es un número primo. Suponed que G tiene un único subgrupo de orden p, y considerad el homomorfismo $f\colon G \to G$ dado por $f(g) := g^p$.

a) Demostrad que $K = \ker(f) \triangleleft G$ es el único subgrupo de orden p de G.

b) Probad que si $H < G$ entonces H tiene un único subgrupo de orden p. En particular, $f(G)$ tiene un único subgrupo de orden p.

c) Probad por inducción sobre $|G|$ que G es cíclico.

22. Sean G y H grupos. Si $G \cong H$, entonces $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H)$.

23. Probad que:

a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathsf{C}_2$. **b)** $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2) \cong \mathsf{S}_3$. **c)** $\mathrm{Aut}(\mathsf{S}_3) \cong \mathsf{S}_3$.

24. Probad que todo grupo no abeliano de orden 8 es isomorfo a Q_8 o D_8.

25. Probad que todo grupo de orden 6 es isomorfo a C_6 o S_3. Deducid que $\mathsf{D}_6 \cong \mathsf{S}_3$.

26. Demostrad que el subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ generado por las clases de $\frac{3}{2}$ y de $\frac{1}{5}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

27. Sea G un grupo y sea $g \in G$.

a) Demostrad que, si g tiene orden finito y $n \in \mathbb{N}$ es un múltiplo de $o(g)$, entonces existe un único homomorfismo $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ que satisface $f([1]_n) = g$.

b) Demostrad que existe un único homomorfismo $f\colon \mathbb{Z} \to G$ que satisface $f(1) = g$.

c) Probad que si G es cíclico entonces $G \cong \mathbb{Z}$ o $G \cong \mathsf{C}_n$ para algún n.

28. Sea f un homomorfismo sobreyectivo de G en $\mathbb{Z}$. Demostrad que para todo entero positivo $n \in \mathbb{Z}$, G tiene un subgrupo normal de índice n.

29. Hallad los inversos de los siguientes elementos, cada uno en su grupo correspondiente. Recordad que U_n, el conjunto de elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con inverso multiplicativo, es un grupo con el producto habitual.

a) $[11]_{23} \in U_{23}$, **b)** $[5]_{31} \in U_{31}$, **c)** $[4]_{15} \in U_{15}$, **d)** $[11]_9 \in U_9$.

30. Sean N y K grupos y θ un homomorfismo $K \to \mathrm{Aut}(N)$. Demostrad que si $N \rtimes_\theta K$ es abeliano entonces θ es constante (es decir, $N \rtimes_\theta K = N \times K$). ¿Es cierto el recíproco?

31. Sea p un número primo. Demostrad que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ no se puede escribir como producto semidirecto de dos subgrupos propios.

32. Demostrad que el grupo cuaternio Q_8 no es producto semidirecto de dos subgrupos propios.

33. Demostrad que $\mathsf{D}_8 \cong (\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2) \rtimes \mathsf{C}_2 \cong \mathsf{C}_4 \rtimes \mathsf{C}_2$.

34. Demostrad que la única estructura de producto semidirecto $(\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2) \rtimes_\theta \mathsf{C}_5$ es $(\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2) \times \mathsf{C}_5$.

35. Un subgupo $H \leq G$ se dice característico si $\alpha(H) = H$ para todo $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Probad los siguientes enunciados.

a) H es característico en G si, y solo si, $\alpha(H) \subseteq H$ para todo $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

b) Si H es característico en G, entonces $H \triangleleft G$.

c) $\mathbf{Z}(G)$ es característico en G.

d) Si H es característico en $N \triangleleft G$, entonces $H \triangleleft G$.

e) Si H cíclico es normal en G, entonces los subgrupos de H son normales en G.