5.3 FORMA DE JORDAN DE MATRICES DE ORDEN 2.

Toda matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ es la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^2$ en una base. Queremos hallar una base en la que f tenga una matriz "sencilla" que se llamará FORMA DE JORDAN de A, y se denotará por J. Por tanto

$$J = C^{-1}AC \iff A = CJC^{-1}$$

donde C es la matriz del cambio de base.

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|,$$

con lo que $p_A(\lambda) = 0$ es una ecuación de segundo grado en la variable λ.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos dos casos diferentes:

CASO I. Las raíces del polinomio característico son distintas.
CASO II. Las dos raíces del polinomio característico coinciden.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tenemos tres casos diferentes:

CASO I. Las dos raíces del polinomio característico están en $\mathbb{R}$ y son distintas.
CASO II. Las dos raíces del polinomio característico coinciden y están en $\mathbb{R}$.
CASO III. El polinomio característico no tiene raíces reales.

Estudiaremos cada caso por separado, incluyendo ejemplos de cada uno de ellos.

CASO I. *Las raíces del polinomio característico son distintas*: $\lambda \neq \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

En este caso la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ (Proposición 5.2.6) su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

y la matriz P del cambio tiene como primera columna las coordenadas de un vector $\vec{x}$ que satisface $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ (esto es, $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$) y como segunda columna las coordenadas de un vector $\vec{y}$ que satisface $(A - \mu I)\vec{y} = \vec{0}$ (esto es, $\vec{y} \in \operatorname{Ker}(A - \mu I)$).

Ej 5.3.1. Halla la forma de Jordan sobre $\mathbb{C}$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

indicando el cambio de base. (o la matriz de paso)

CASO II. *Las raíces λ y μ del polinomio característico coinciden*: $\lambda = \mu$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
En este caso calculamos $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Si $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ tiene dimensión 2 podemos encontrar una base de autovectores de A y por la Proposición 5.2.4 la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$; su forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y la matriz del cambio queda determinada por cualquier base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
Si, por el contrario, $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ tiene dimensión 1 no podemos encontrar una base de autovectores en V; en este caso observamos que se tiene el siguiente resultado:

Lema 5.3.1
Si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tiene dos autovalores iguales λ, $(A - \lambda I)^2 = 0$.

D/ Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

Como $p_A(\lambda)$ tiene dos raíces iguales

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{a+d}{2}$$

o, equivalentemente,

$$(a-d)^2 + 4bc = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{a+d}{2} \qquad (3.1)$$

Entonces

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (a-\lambda)^2 + cb & (a-\lambda)c + c(d-\lambda) \\ b(a-\lambda) + b(d-\lambda) & bc + (d-\lambda)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 + cb & \frac{d-a}{2}\cdot c + c\cdot\frac{a-d}{2} \\ b\frac{d-a}{2} + b\frac{a-d}{2} & bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{por } 3.1). \blacksquare$$

Sea $E_1 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ y $E_2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$; el Lema 5.3.1 nos dice que E_2 coincide con el espacio vectorial V que estamos considerando y que es de dimensión dos. Como E_1 tiene dimensión 1 podemos encontrar $\vec{u}_2 \in E_2 - E_1$; tomar $\vec{u}_1 = (A - \lambda I)(\vec{u}_2)$. Los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, son linealmente independientes puesto que $\vec{u}_2 \notin E_1$ y $\vec{u}_1 \in E_1$ (ya que $(A-\lambda I)(\vec{u}_1) = (A-\lambda I)^2(\vec{u}_2) = 0(\vec{u}_2) = \vec{0}$) y ninguno de ellos es el vector nulo. Como V es un espacio de dimensión 2, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de V. En esta base tenemos

$$(A - \lambda I)(\vec{u}_1) = \vec{0} \iff A(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1$$
$$(A - \lambda I)(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \iff A(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2$$

con lo que la matriz de la transformación lineal cuya matriz es A en esta nueva base es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esta no es una matriz diagonal, pero es casi diagonal, y es la forma de Jordan de la matriz A sobre $\mathbb{K}$ en este caso.

Podemos resumir estos resultados sobre la forma de Jordan de matrices complejas en el siguiente teorema:

Teorema 5.3.2 (Teorema de Jordan para matrices complejas de orden 2)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de una cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de determinante no nulo, tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan de A sobre* $\mathbb{C}$.

Ej 5.3.2. Halla la forma de Jordan sobre $\mathbb{C}$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz del cambio de base.

CASO III. *El polinomio característico de A no tiene raíces reales.*

Como el polinomio característico $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ es de grado 2, sus raíces son números complejos de la forma $\lambda = \alpha - i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Consideramos el sistema $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{0}$, es decir

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)z_1 + \qquad a_{12}z_2 &= 0 \\ a_{21}z_1 + (a_{22} - \lambda)z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

donde $\vec{z} = (z_1, z_2)$. Este sistema es compatible indeterminado. Sea $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ una solución no nula de (3.2) con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Sustituyendo estos valores en (3.2) e igualando las partes reales e imaginarias se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Combinando (3.3) y (3.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

La matriz $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ se llama *matriz de Jordan real* de A en este caso. La matriz $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, formada por las partes reales e imaginarias de z_1 y z_2 es invertible. Si no lo fuera, sus vectores columna serían linealmente dependientes, por lo que existiría $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. De la ecuación (3.3) se deduciría

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta\gamma)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

lo que implicaría que A tendría $\alpha + \beta\gamma \in \mathbb{R}$ como autovalor, en contra de lo que hemos supuesto. La igualdad (3.5) puede entonces escribirse de la forma

$$A = PJP^{-1}.$$

Teorema 5.3.3 (Teorema de Jordan para matrices reales de orden 2)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de una cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \text{ no nulo,}$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de determinante no nulo, tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan real* de A.

NOTA: Cuando $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ podemos escribir $(\beta \neq 0)$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Tomando $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

$J = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es la matriz de un giro de ángulo θ en la base de Jordan (no en la canónica) seguido de una homotecia de razón $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Ej 5.3.3. Halla la matriz de Jordan real de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

y la base de Jodan (real) correspondiente.

S/ $J = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
