El teorema espectral.

Tma 1 Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n. Sea $A : E \longrightarrow E$ una aplicación ortogonal. Entonces, existe una base ortonormal β tal que la matriz de A en esta base es de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & \\ & & & & & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\alpha_K & -\sin\alpha_K \\ & & & & & & & & & \sin\alpha_K & \cos\alpha_K \end{pmatrix}$$

Tma 2 (Teorema espectral)

Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n.

(1) Dada $\Theta \in O(n;\mathbb{R})$, existen $C \in O(n,\mathbb{R})$ y J como en el Tma1 tal que $\Theta = CJC^t$.

(2) Dada una matriz simétrica $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, existen $C \in O(n;\mathbb{R})$ y una matriz diagonal $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $S = CDC^t$.

Demostración

(1) Si $\Theta \in O(n;\mathbb{R})$ entonces, por el Tma1, $\Theta = CJC^{-1}$; pero C es la matriz de un cambio de base entre bases ortonormales. En consecuencia $CC^t = I$, y entonces $C^t = C^{-1}$.

(2) Si S es una matriz simétrica, S es diagonalizable

y sus autovalores son reales. En consecuencia $S = CDC^{-1}$, y como C es ortogonal, $C^{-1} = C^t$. Luego tenemos el resultado.

ESTRUCTURA DE LAS APLICACIONES LINEALES NO SINGULARES

Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n. Denotaremos por $GL(n, \mathbb{R})$ al conjunto de las aplicaciones lineales $A: E \to E$ no singulares. Es decir,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A: E \to E \ / \ A \text{ lineal}, \ \det(A) \neq 0 \},$$

conjunto que recibe el nombre de "grupo general lineal (sobre E)".

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Tma(*) Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Entonces, existen dos matrices $O \in O(n, \mathbb{R})$ y S simétrica tal que

$$\boxed{A = O \cdot S}$$

Nota. El teorema anterior afirma que toda aplicación lineal invertible es composición de una aplicación autoadjunt con una ortogonal.

Lema. Sea A una aplicación lineal en un espacio euclídeo de dimensión finita, y sea A^* su adjunta. Entonces la aplicación $B := A^* \circ A$ es autoadjunta y los autovalores de B son no negativos.

Demostración del lema: La aplicación B es autoadjunta, en consecuencia sus autovalores son reales. Además, si λ es un autovalor y $\vec{u}$ es un autovector unitario entonces $0 < \|A(\vec{u})\|^2 = \langle A(\vec{u}), A(\vec{u})\rangle = \langle \vec{u}, B(\vec{u})\rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{u}\rangle = \lambda$, es decir, λ es positivo.

Demostración del Tma[*].

Consideremos la transformación $B = A^* A$. Entonces existe una base ortonormal β de E en la que la aplicación autoadjunta B es de la forma

$$D_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{con } \lambda_i \geq 0, \forall i \text{ (por el lema)}$$

Sea S la aplicación autoadjunta que tiene por matriz

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \text{en base } \beta.$$

Además, $(\det S)^2 = \det(D_B) = \det(B) = \det(A^* A) = (\det(A))^2 \neq 0$

Luego $S \in GL(n;\mathbb{R})$

Definimos $\theta := A \cdot S^{-1}$, y demostraremos que θ es una transformación ortogonal. Para ello verificaremos que $\theta^* \cdot \theta = I$. En efecto,

$$\theta^* \cdot \theta = (A \cdot S^{-1})^* \cdot (A \cdot S^{-1}) = (S^{-1})^* A^* A S^{-1} =$$

$$= (S^{-1})^* B S^{-1} = S^{-1} B S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I,$$

luego, $\theta \in \mathcal{O}(n;\mathbb{R})$.