DETERMINACIÓN DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LAS CUÁDRICAS DE $\mathbb{R}^3$.

En este apartado abordaremos los siguientes problemas:

(1) Determinación del centro en una cuádrica con centro.
(2) Determinación del eje principal de un paraboloide.
(3) Determinación del eje de un cilindro.

Sea S la superficie cuadrática definida por el polinomio f.

Problema (1)

Una cuádrica tiene por centro $P_0=(\alpha,\beta,\gamma)$ si P_0 satisface

$$f(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma)=0 \iff f(-x+\alpha,-y+\beta,-z+\gamma)=0,$$

es decir, si un punto está en la superficie entonces su simétrico respecto de P_0 también lo está.

Para calcular P_0 usaremos el desarrollo de Taylor de f centrado en P_0:

$$f(x,y,z)=f(P_0)+\nabla f(P_0)\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\\ z-\gamma\end{pmatrix}+(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,M\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\\ z-\gamma\end{pmatrix}.$$

Observa que si $P_0\in\{a\in\mathbb{R}^3 \mid \nabla f(a)=0\}$ entonces, para $p\in\mathbb{R}^3$, $p=(p_1,p_2,p_3)$,

$$f(P_0+p)=f(P_0)+(p_1,p_2,p_3)\,M\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix},$$

$$f(P_0-p)=f(P_0)+(-p_1,-p_2,-p_3)\,M\begin{pmatrix}-p_1\\ -p_2\\ -p_3\end{pmatrix},$$

y por tanto $f(P_0+p)=f(P_0-p)$. En consecuencia P_0 es un centro de S.

La variedad lineal $L_c = \{ a \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(a) = 0 \}$ se llama la variedad de centros de S. Observa que el sistema de ecuaciones $\nabla f = 0$ tiene por matriz $2A$ cuyo determinante es 8δ, que en este caso, es no nulo. Luego $\nabla f = 0$ es un sistema de ecuaciones lineales con solución única, el centro P_0 de S.

Ejemplo: Calcula el centro de la cuádrica de ecuación

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0.$$

Sol. El sistema lineal $\nabla f = 0$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4x = 0$$

cuya solución es $P_0 = (0,2,0)$, el centro de $S = \{ f = 0 \}$.

Problema (2).

El eje principal de un paraboloide tiene la dirección $\vec{u}_3$ correspondiente al autovalor $\lambda_3 = 0$. Los autovectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 determinan el plano tangente en el vértice $V = (\alpha, \beta, \gamma)$. Este plano tangente tiene por ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(V)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(V)(y-\beta) + \frac{\partial f}{\partial z}(V)(z-\gamma) = 0.$$

En consecuencia, para calcular V hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \nabla f \times \vec{u}_3 = \vec{0} \\ f(V) = 0 \end{cases}$$

que son las ecuacions que nos permiten calcular V y por tanto el eje $L = V + \langle \vec{u}_3 \rangle$.

Ejemplo: Considera la cuádrica de ecuación

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4xy + 4z + 3 = 0.$$

Calcula su eje.

Sol. El gradiente de f es $\nabla f = (2x+4y, 4y+4x, 4)$.
El autovector asociado al autovalor 0 es $\vec{u}_3 = (0,0,1)$.
Luego el sistema para hallar el vértice es

$$\begin{cases} \nabla f \times (0,0,1) = (4y+4x, -2x-4y, 0) = \vec{0} \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Entonces $V = \left(0, 0, \frac{-3}{4}\right)$ y el eje es la recta $L = V + \langle(0,0,1)\rangle$.

Problema (3). Los cilindros son superficies que tienen un eje de centros de simetría. Estos centros satisfacen las ecuaciones lineales $\nabla f = 0$. Este sistema lineal tiene por matriz $2A$, que es una matriz de rango 2, por lo que la variedad lineal $L = \{\nabla f = 0\}$ es una recta, es el eje del cilindro.

Ejemplo. Calcula el eje del cilindro de ecuación
$f(x,y,z) = y^2 + xy - xz - yz - y + z = 0$.

Sol. El sistema lineal $\nabla f = 0$ resulta ser

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - z - 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -x - y + 1 = 0.$$

Su solución es la recta $L = (1,0,0) + \langle(-1,1,1)\rangle$, que es el eje del cilindro $S = \{f = 0\}$.