Prob 1

S/ Sea $f(x)=f(y)$, $x,y\in U$

$$g(1)-g(0)=\langle f(x)-f(y), x-y\rangle=0$$

$$g(1)-g(0)\overset{T.V.M}{=}g'(t_0) \quad \text{para algún } t_0\in[0,1] \Rightarrow g'(t_0)=0$$

$$g'(t_0)=\langle Df(\underbrace{t_0x+(1-t_0)y}_{\sigma(t_0)})(x-y),(x-y)\rangle$$

$$=\langle \nabla f(\sigma(t_0))(x-y),(x-y)\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\sigma(t_0))}{\partial x_i}\underbrace{(x_i-y_i)}_{\xi_i}\underbrace{(x_j-x_j)}_{\xi_j}=0 \iff \xi=0$$

$$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Prob 2

a) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ pos. hom de grado $p<1$ con $f(0)=0$ y no nula

$\Rightarrow$ f no es diferenciable en 0.

S/ sea $g(t)=f(tx)$ para $x\in\mathbb{R}^n$ fijo. Tenemos, $\forall t>0$, $g(t)=t^pf(x)$

Si f fuera dif en $x=0$, g sería dif. en $t=0$.

$$g'(0)=\langle\nabla f(0),x\rangle, \quad g'(t)=pt^{p-1}f(x) \Rightarrow g'(0)=f(x)\cdot p\cdot\infty$$

Otra manera de verlo es con el límite.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0,\dots,0)-0}{|h|}=\lim_{h\to0}\frac{h^p\overbrace{f(e_1)}^{cte}}{|h|}=\lim_{h\to0}h^{\overbrace{p-1}^{<0}}f(e_1)=\infty$$

(b) Si $p=1$, f es lineal

Como antes con $p=1$, $\langle\nabla f(0),x\rangle=f(x)$ es lineal. A fortiori,

$$f(\alpha x+\beta y)=\langle\nabla f(0),\alpha x+\beta y\rangle=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

(c) ¿Hay alguna norma que sea dif en $\mathbb{R}^n$?

$f(x) = \|x\|$ es pos. homogénea de grado 1 $\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ f lineal e.d $f(tx) = t \cdot f(x)$

Pero $f(x) = \|x\|$ no es lineal pues si $t < 0$, $f(tx) \neq t f(x)$

<u>Obs:</u> $\|\cdot\|$ es cualquiera en $\mathbb{R}^n$.

<u>Prob 3</u>

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea $g(x) = f(Ax)$. ¿Hess g?

S/ sea $P(x)$ el pol. de Taylor de f de grado 2. en $x = b$, e.d,
$P(x)$ es el único pol de grado ≤ 2 t.q. $f(x) - P(x) = o(\|x-b\|^2)$

$$P(x) = f(b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(b)(x_i - b_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - b_i) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_j - b_j)$$

$$= f(b) + \langle \nabla f(b), x-b \rangle + \frac{1}{2}(x-b)^t \, H f(b) \, (x-b)$$

sea $Q(x)$ el pol de Taylor de g de gr. 2 en $x = b$, e.d,
$Q(x)$ es el único pol de grado ≤ 2 t q $g(x) - Q(x) = o(\|x-b\|^2)$

$$Q(x) = g(b) + \langle \nabla g(b), x-b \rangle + \frac{1}{2}(x-b)^t \, H g(b) \, (x-b)$$

Entonces, $g(x) - P(Ax) = f(Ax) - P(Ax) = o(\|Ax - Ab\|^2) = o(\|x-b\|^2)$,
pues

$$\lim_{x\to b} \frac{|g(x) - P(Ax)|}{\|x-b\|^2} = \lim_{x \to b} \frac{|g(x) - P(Ax)|}{\|Ax - Ab\|^2} \cdot \underbrace{\frac{\|Ax-Ab\|^2}{\|(x-b)\|^2}} = 0$$

$h(x) = Ax$ es lineal acotada.
$\Rightarrow \div \leq K$

Como Q es único, $Q(x) = P(Ax) \overset{(1)}{=} f(Ab) + \langle \nabla f(Ab), A(x-b) \rangle +$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(A(x-b))^t \, H f(Ab) \, A(x-b)}$$
$$= \frac{1}{2}(x-b)^t A^t \, H f(Ab) \, A(x-b)$$

Comparando con (2)

$$Hg(b) = A^t\, Hf(Ab)\, A$$

④ (a) $P_2(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \frac{1}{2} h^t \, \mathrm{Hess} f(a)\, h$

$$= 6 + \frac{1}{2} h^t \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) $\nabla f(a) = \vec{0}$, $Hf(a)$ es def. negativa: $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = -4 < 0 \\ \Delta_2 = 7 > 0 \\ \Delta_3 = -3 < 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$ $f(a)$ es máx. local.

⑤ (a) P_3 en $(1,0)$ para $f(x,y) = \dfrac{e^{y^2}}{x}$ usando "oes" de Landau.

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \;;\; e^{y^2} = 1 + y^2 + \overbrace{\frac{1}{2}y^4}^{o(y^3) \text{ con } y \text{ cerca de } 0} + o(y^4)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x-1)+1} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o(|x-1|^3)$$

$$f(x,y) = [1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3](1+y^2) + o(\|(x,y)\|^3)$$

$$\Longrightarrow P_3(x,y) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + y^2 - (x-1)y^2$$

$$= 1 - (x-1) + [(x-1)^2 + y^2] - [(x-1)^3 + (x-1)y^2]$$

(b) $f(x,y) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{1-y^2}$ en $(0,0)$

$$\operatorname{sen}(x) = 0 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^4)$$

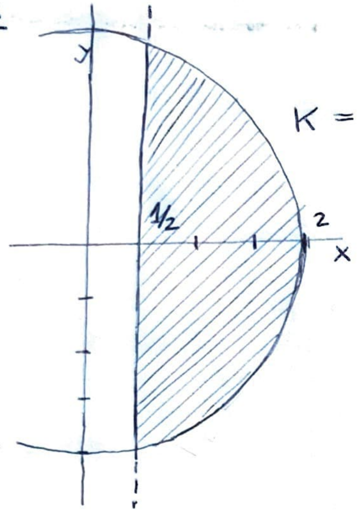
$$\frac{1}{1-y^2} = 1 + y^2 + y^4 + o(|y|^3) \qquad (1 = 1 - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} - \cancel{y^4} + \cancel{y^4} - y^6 \ldots)$$

$$f(x,y) = \frac{x}{(1+y^2)} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{1+y^2}\right)^3 + o\left(\left|\frac{x}{1-y^2}\right|^4\right) = x(1 + y^2 + y^4 + o(|y|^6)) - \frac{1}{6}(1 + y^2 + y^4 + o(|y|^6))$$

$$\Longrightarrow P_3(x,y) = x + xy^2 - \frac{1}{6}x^3 = x + [xy^2 - \frac{1}{6}x^3]$$

Prob 6

(a)



$K = \{ \|x-y\|_2 \leq 2 \} \cap \{ x \geq \frac{1}{2} \}$

Es Compacto, pues es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$.

(b) si $x^2+y^2 > 4 \Rightarrow f(x,y) > \frac{1}{x} + 4 > 4 > 2$

si $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x,y) > 2 + x^2+y^2 > 2$

$(\frac{1}{x} > 2)$

(c) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$, pero $< 2 \Rightarrow (x_0, 0) \in K$.

$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} + 2 = 6$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$

$\Bigg\}$ $\text{Hess}(f)_p = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es def. pos. $\Rightarrow$ es mínimo local

¿Es mínimo abs.? Sí, porque $f(x,y) \to +\infty$. Además,

$f(x_0, 0) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} < 2 \overset{(b)}{\Rightarrow}$ es mín. absoluto.

Prob 7

$f(x,y) = e^{3x}\left(\frac{x}{2} - x^2 - y^2\right)$

(a) Puntos críticos y prueba que uno de ellos es máximo local.

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3x}\left(-\frac{x}{2} - 3x^2 - 3y^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \implies x = \frac{1}{3} \text{ ó } -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{3x} \cdot y = 0 \iff y = 0$

$A = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$
$B = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$(\text{Hess} f)_A = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$ def. negativa $\implies$ f(A) es máx. local.

(b) $r = \|(x,y)\|_2$. Prueba que $f(x,y) \leq e^{3x}\left(\frac{r}{2} - r^2\right)$. Concluye $f(x,y) \leq 0$ para $r \geq \frac{1}{2}$.

$r^2 = x^2 + y^2$, $f(x,y) \leq e^{3x}\left(\frac{x}{2} - r^2\right)$. Como $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = r \implies$

$\implies f(x,y) \leq e^{3x}\left(\frac{r}{2} - r^2\right) = e^{3x}\, r\left(\frac{1}{2} - r\right) \leq 0 \iff \frac{1}{2} - r \leq 0 \iff r \geq \frac{1}{2}$

Como es un compacto alcanza su máximo y su mínimo.

$f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{e}{18} > 0$ val. máximo

$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2} e^{-3/2} < 0$

No tiene ínfimo.