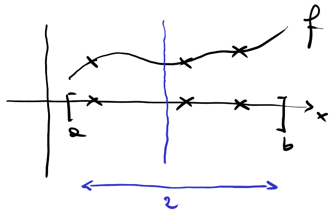
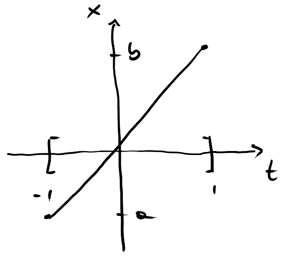
NODOS DE CHEBYSHEV

- queremos trabajar en $[-1,1]$





$$x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad : \quad x(-1) = a \, , \quad x(1) = b$$

$$t(x) = \frac{2x-(b+a)}{b-a} \quad : \quad t(a) = -1 \, , \quad t(b) = 1$$

si $f : [a,b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{f}(t) = f(x(t)) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

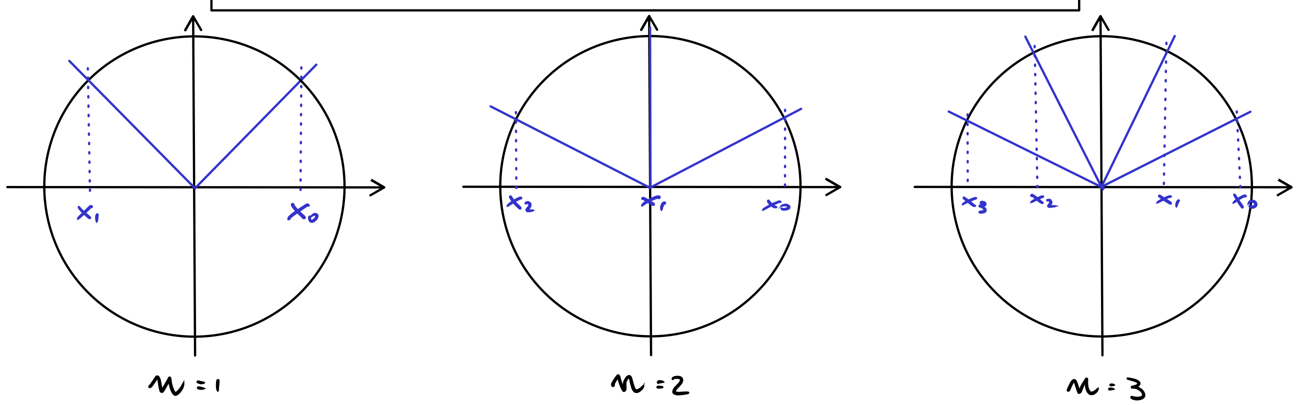
es t.q. $\tilde{f} : [-1,1] \to \mathbb{R}$

si $u : [-1,1] \to \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{u}(x) = u(t(x)) = u\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$

es t.q. $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$

- <u>def</u> : sea $n > 0$. los nodos de Chebyshev en $[-1,1]$ son

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \, , \quad k \in \{0..n\}} . \qquad (*)$$



decimos $\mathring{T}_{n+1}$ el polinomio mónico con ceros dados por (*)

- <u>teorema</u> : sea Π_{n+1} un polinomio mónico de grado $n+1$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |\Pi_{n+1}(x)| \geq \max_{x \in [-1,1]} |\mathring{T}_{n+1}(x)| .$$

$\downarrow$

los nodos de Chebyshev son óptimos para la componente del error de interpolación que no depende de f

. **def**: los polinomios de Chebyshev $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ son los polinomios $T_n \in P_n$ dados por

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

. **observaciones**:

- $T_n \in P_n$: $T_1 \in P_1$, $T_2 = 2x T_1 .. \in P_2$, ...

- $T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow \mathring{T}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

  $T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x \Rightarrow \mathring{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$

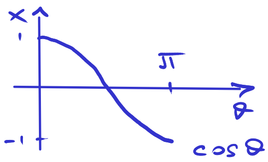
  ...

. **proposición**:

i. T_n satisface la identidad

$$\boxed{T_n(\cos(\vartheta)) = \cos(n\vartheta) \qquad \forall\, \vartheta \in [0,\pi]}$$

$\hookrightarrow \vartheta \in [0,\pi] \iff \boxed{x = \cos\vartheta} \in [-1,1]$



bijección $[0,\pi] \to [-1,1]$

$\cos\vartheta$: monotona en $[0,\pi]$

ii. T_{n+1} se anula en (*)

iii. los valores extremos de T_n en $[-1,1]$ se obtienen en los puntos

$$\xi_j^{(n)} = \cos\left(\tfrac{j}{n}\pi\right) \quad , \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

y $T_n(\xi_j^{(n)}) = \begin{cases} 1 , & j \text{ par} \\ -1 , & j \text{ impar} \end{cases}$

iv. si $T_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell^{(n)} x^\ell \Rightarrow a_n^{(n)} = 2^{n-1}$.

demostración:

i. sea $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_n(x) = \cos(n \cdot \operatorname{acos}(x))$$

en $[-1,1]$

$u_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$: es la función de x que queremos ver ser igual a $T_n(x)$ en $[-1,1]$

queremos ver que u_n cumple la propiedad recursiva que define T_n

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\hookrightarrow \quad u_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta)$$

$$= \cos\theta \cos(n\theta) - \sin\theta \sin(n\theta)$$

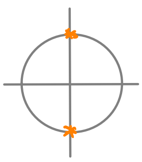
$$u_{n-1}(\cos\theta) = \cos\theta \cos(n\theta) + \sin\theta \sin(n\theta)$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1}(\cos\theta) + u_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta \cos n\theta$$

$$= 2\cos\theta \, u_n(\cos\theta)$$

$$x = \cos\theta : \quad u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = 2x\, u_n(x)$$

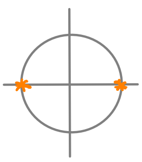
ii. busquemos los valores de θ donde se anule $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$



$$\hookrightarrow \quad (n+1)\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_k^{(n+1)} = \frac{2k+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$$

T_{n+1} se anula en $x_k^{(n+1)} = \cos(\theta_k^{(n+1)})$, $k \in \{0, \dots, n\}$ (*)

iii. los valores extremos de T_n en $[-1,1]$ son $+1$ y -1 porque T_n es un coseno en ese intervalo



$$\hookrightarrow \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\theta = j\pi, \ j \text{ par} \\ -1 & \text{si } n\theta = j\pi, \ j \text{ impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \xi_j^{(n)} = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$$: puntos extremales de T_n en $[-1,1]$

iv. desde la definición de T_n

$$a_0^{(0)} = 1 \ , \ a_1^{(1)} = 1$$

$$a_{n+1}^{(n+1)} = 2\, a_n^{(n)} \quad : \quad a_2^{(2)} = 2 \ , \ a_3^{(3)} = 2^2 , \ a_4^{(4)} = 2^3$$

$$\Rightarrow \ a_n^{(n)} = 2^{n-1} \quad \#$$

<u>observaciones</u>:

- $$\mathring{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$ $$x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$
- $$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i^{(n)})$$

<u>demostración</u> del teorema de optimalidad de los nodos de Chebyshev

demostremos que si $\pi_n \in P_n$ es mónico

$$\Rightarrow \max_{x\in[-1,1]} |\pi_n(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\mathring{T}_n(x)|$$

por contradicción: supongamos que $\exists\, \pi_n \in P_n$ mónico

t.q. $\max_{x\in[-1,1]} |\pi_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. sea $d_n(x) = \underbrace{\mathring{T}_n(x)}_{x^n + \dots} - \underbrace{\pi_n(x)}_{x^n+\dots}$

- $d_n \in P_{n-1}$ porque $\mathring{T}_n, \pi_n$ mónicos en P_n
- $d_n(\xi_0^{(n)}) = \frac{1}{2^{n-1}} - \pi_n(\xi_0^{(n)}) > 0$ por la hp. de contrad.

  $d_n(\xi_1^{(n)}) = -\frac{1}{2^{n-1}} - \pi_n(\xi_1^{(n)}) < 0$ "

  ⋮

  $\Rightarrow d_n(\xi_0^{(n)}) > 0 , \ d_n(\xi_1^{(n)}) < 0, \dots, (-1)^n d_n(\xi_n^{(n)}) > 0$

  $\Rightarrow$ por Bolzano d_n tiene n ceros

pero $d_n \in P_{n-1} \Rightarrow d_n = 0 \Rightarrow \pi_n = \mathring{T}_n$: contradicción #

porque $\max_{x\in[-1,1]} |\mathring{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$

observación final:

los nodos de Chebyshev no solo son óptimos respecto a la componente del error que no depende de f, sino que también garantizan la convergencia uniforme del polinomio interpolador para una amplia familia de funciones

teorema (Dini-Lipschitz)

sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in Lip([a,b])$

$\exists\, L > 0$ t.q.
$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$
$\forall\, x, y \in [a,b]$

y sea $p_n \in \mathcal{P}_n$ el pol. interp.
de f por los nodos de Chebyshev en $[a,b]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$