Estructuras Algebraicas

Hoja 4. Grupos de permutaciones.

1. Demuestra que S_3 es isomorfo a un subgrupo de S_4.

2. Dado $n \geq 3$, halla dos ciclos que no conmuten en S_n. Halla una potencia de un ciclo que no sea un ciclo en algún $n \geq 4$.

3. Escribe las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos:

a) $(12)(23)(34)$.

b) $(246)(147)(135)$.

c) $(12)(53214)(23)$.

d) $(1234)(2345)$.

4. Escribe las siguientes permutaciones como un producto de trasposiciones:

a) $(14)(27)(523)(34)(1472)$.

b) $(7236)(85)(571)(1537)(486)$.

5. Halla las órbitas de los elementos de $\Omega = \{1, \ldots, 8\}$ bajo la acción de σ por evaluación, para cada permutación σ del ejercicio anterior.

6. Sea $\sigma = (a_1a_2a_3a_4a_5a_6) \in \mathsf{S}_6$. Encuentra σ^i para cada $i = 1, 2, \ldots, 6$.

7. Demuestra que el orden de τ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos cuyo producto es τ y calcula el orden de τ^{1000} para cada una de las siguientes permutaciones:

a) $\tau = (14)(27)(523)(34)(1472)$ y **b)** $\tau = (7236)(85)(571)(1537)(486)$.

8. Calcula el orden de cada una de las permutaciones siguientes:

a) $\alpha = (456)(567)(671)(123)(234)(345)$, **b)** $\beta = (45)(431)$ y **c)** $\gamma = (345)(234)(123)(671)(567)(456)$.

9. Demuestra que el subgrupo G de S_4 generado por los elementos $\sigma = (1432)$ y $\tau = (24)$ es isomorfo a D_8.

10. Si σ es un k-ciclo con k impar, demuestra que existe un ciclo τ tal que $\tau^2 = \sigma$.

11. Sea σ un k-ciclo de S_n. Demuestra que σ^2 es un ciclo si y solo si k es impar.

12. Sea σ un producto de ciclos disjuntos de igual longitud. Demuestra que σ es una potencia de un ciclo.

13. Indica cuáles de estas permutaciones son pares:

a) (2468) **b)** $(246)(134)$ **c)** $(12)(123)(1234)$

14. Calcula el orden y el signo de la permutación $\sigma = (5739)(42)(385)(164)$ de S_9. Calcula σ^{26} y σ^{-1}.

15. Encuentra la descomposición en ciclos disjuntos de cada una de las potencias del ciclo (123456).

16. Dadas las permutaciones $\alpha = (12)(34)$ y $\beta = (56)(13)$, encuentra una permutación γ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

17. Demuestra que no existe ninguna permutación α tal que $\alpha(123)\alpha^{-1} = (13)(578)$.

18. Calcula el conjugado de β_i mediante α_i para:

$\alpha_1 = (12)$ $\quad\beta_1 = (12)(23)$,
$\alpha_2 = (123)$ $\quad\beta_2 = (345)$,
$\alpha_3 = (14)(23)$ $\quad\beta_3 = (321)(45)$,
$\alpha_4 = (13)(247)$ $\quad\beta_4 = (256)(143)$.

19. Sea p un número primo. Demuestra que los únicos elementos de orden p en S_n son los productos de p-ciclos disjuntos.

20. Demuestra que D_{2n} es isomorfo a un subgrupo de S_n, para cada $n \geq 3$.

21. Dado $\sigma \in \mathsf{S}_n$, el tipo de σ en S_n es una tupla $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_s \geq 1$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = n$ si σ admite una expresión como producto de s ciclos disjuntos de longitud λ_i (incluyendo "ciclos de longitud uno"). Por ejemplo, $1 \in \mathsf{S}_n$ tiene tipo $(1, \ldots, 1) = (1^n)$. La tupla λ es una partición de n, y escribimos $\lambda \in \mathcal{P}(n)$.

a) Observa que hay tanto tipos de permutaciones en S_n como $|\mathcal{P}(n)|$ particiones de n.

b) Demuestra que dos elementos $\sigma, \tau \in \mathsf{S}_n$ tienen el mismo tipo si, y solo si, son conjugados. Deduce que el número de clases de conjugación en S_n es $|\mathcal{P}(n)|$.

c) Indica cuántas clases de conjugación hay en S_4 y en S_5.

d) Demuestra que $\{1, (12), (12)(34), (123), (1234)\}$ es un sistema completo de representantes de las clases de conjugación de S_4.

e) Halla $|\mathrm{cl}_{\mathsf{S}_4}(\sigma)|$ y calcula el subgrupo $\mathbf{C}_{\mathsf{S}_4}(\sigma)$ para los distintos representantes en las clases de conjugación de S_4.

f) Demuestra $|\mathrm{cl}_{\mathsf{S}_5}((13)(24))| = 15$ y $\mathbf{C}_{S_5}((13)(24)) \cong \mathsf{D}_8$.

22. Fijada la permutación $\sigma = (12345)$ en S_5:

a) Demuestra que $|\mathrm{cl}(\sigma)| = 4!$ y $\mathbf{C}_{S_5}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.

b) Observa que el grupo $\langle\sigma\rangle$ contiene 4 elementos de orden 5. Indica, cuántos conjugados tiene el grupo $\langle\sigma\rangle$ y concluye que la inclusión $\mathbf{C}_{S_5}(\sigma) \leq \mathbf{N}_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$ es estricta.

23. Demuestra que $\mathbf{Z}(\mathsf{S}_n) = 1$ si $n \geq 3$.

24. Demuestra que $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23), 1\}$ es normal en S_4.

25. Prueba que si $n \geq 3$ entonces la acción de A_n por evaluación sobre $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ es transitiva.

26. Dado $N \trianglelefteq G$.

a) Prueba que N es unión de clases de conjugación de G.

b) Deduce que A_5 es simple[1].

27. Comprueba que A_5 está generado por los 3-ciclos.

28. Dado $n \geq 5$, prueba que A_n es el único subgrupo normal propio de S_n (usando que A_n es simple).

29. Supongamos que $n \geq 2$. Prueba que si $H \leq \mathsf{S}_n$ tiene índice n, entonces $H \cong \mathsf{S}_{n-1}$.

30. ¿Cuántos homomorfismos hay de D_6 en A_4?

---

[1] Los grupos A_n con $n \geq 5$ son simples, podéis encontrar la prueba de este resultado en el libro de Navarro, por ejemplo.