Ejercicios

1. sean $f(x) = 2^{x+1}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

   a) calcular el polinomio interpolador $p \in \mathcal{P}_2$

   b) dar una estimación del error de interpolación usando el teorema general

a) forma de Newton:

$$p(x) = f[x_0, x_1, x_2]\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{(x+1)\cdot x} + f[x_0, x_1](x+1) + f(x_0)$$

$$\begin{array}{lll}
f(x_0) = 1 & & \\
 & f[x_0, x_1] = \frac{2-1}{0+1} = 1 & \\
f(x_1) = 2 & & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3-1}{2+1} = \frac{2}{3} \\
 & f[x_1, x_2] = \frac{8-2}{2-0} = 3 & \\
f(x_2) = 8 & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \frac{2}{3}x(x+1) + 1\cdot(x+1) + 1 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$$

b) podríamos calcular directamente el error

$$E = \max_{[-1,2]} \left| 2^{x+1} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2 \right|$$

pero usamos que $E \leq \frac{1}{3!} \max_{[-1,2]} |f^{(3)}| \cdot \max_{[-1,2]} |\pi_{n+1}|$

- $f(x) = 2^{x+1} = 2e^{x \ln 2} \Rightarrow f'(x) = (\ln 2) f(x)$

  $\Rightarrow f'''(x) = (\ln 2)^3 2^{x+1} \leq (\ln 2)^3 \cdot 2^3 \quad \forall x \in [-1, 2]$

- $\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x(x+1)(x-2) = x^3 - x^2 - 2x$

  $\pi_{n+1}'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

  $\pi\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) \simeq -2$, $\pi\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \simeq 0.63$

$$\Rightarrow \max_{[-1,2]} |f - p| \leq \frac{(2\ln 2)^3}{3}$$

2. sean $f_1(x) = e^{cx}$; $f_2(x) = \ln(1+x)$, $x \geq 0$

estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[a,b]} |f - p_n|$

si no tenemos información sobre los nodos, y en el caso de nodos equiespaciados.

- $|f_1^{(n+1)}(x)| = |c|^n \, |f_1(x)| \leq |c|^n \max\{e^{ca}, e^{cb}\}$

para nodos cualesquiera:

$$\max_{[a,b]} |f_1 - p_n| \leq \frac{(|c|\cdot(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \max\{e^{ca}, e^{cb}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

este límite vale también para nodos equiespaciados

- $f_2(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \, n! \underbrace{\frac{1}{(1+x)^{n+1}}}_{\leq 1 \ \forall x \geq 0}$

para nodos cualesquiera:

$$\max_{[a,b]} |f_2 - P_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff b-a \leq 1$, $\xrightarrow{n\to\infty} \infty \iff b-a > 1$

para nodos equiespaciados:

$$\max_{[a,b]} |f_2 - p_n| \leq \frac{n!}{4(n+1)} \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

si $L = b-a$, $a_n = \dfrac{n!}{n+1} \dfrac{L^{n+1}}{n^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}_{\to \frac{1}{e}} L = \frac{L}{e}$$

$\Rightarrow$ por el criterio del cociente sabemos que si $b-a < e$, entonces $\max\limits_{[a,b]} |f_2 - p_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$