demostración del teorema de Ostrowski:

i. si g' es continua en un intervalo $[c-h, c+h]$,

y $|g'(c)| < 1 \Rightarrow |g'(x)|$ se va a quedar < 1 en todo un intervalo $[c-\delta, c+\delta]$

lema: sea $f \in \mathcal{C}[c-h, c+h]$.

si $|f(c)| < 1 \Rightarrow \exists\, \delta \in (0,h)$, $\exists\, L < 1$ t.q. $|f(x)| \leq L \quad \forall\, x \in [c-\delta, c+\delta]$

demostración: $|f(x)| = |f(x) - f(c) + f(c)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c)|$

f continua alrededor de $c \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ t.q. $|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \forall\, |x-c| < \delta_\varepsilon$

si $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f(c)|) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |f(c)| = \frac{1}{2}(1 + |f(c)|) \quad \forall\, |x-c| < \delta_\varepsilon$.

ahora $L = \frac{1}{2}(1 + |f(c)|) < 1 \Rightarrow$ el lema es demostrado para $\delta = \min\{\delta_\varepsilon, h\}$.

sean $L < 1$, $\delta \in (0,h)$ tales que $|g'(x)| \leq L \quad \forall\, |x-c| < \delta$

por el teorema del valor medio, para todos $x, y \in [c-\delta, c+\delta]$, $x < y$ $\exists\, t \in (x,y)$ t.q.

$$|g(x) - g(y)| \leq |g'(t)|\, |x-y| \leq L\, |x-y|$$

$\hookrightarrow$ g es una contracción en $[c-\delta, c+\delta]$:

por el teorema de Banach-Caccioppoli

si $x_0 \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow x_{k+1} = g(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} c$

ii. si g' es continua en un intervalo $[c-h, c+h]$,

y $|g'(c)| > 1 \Rightarrow |g'(x)|$ se va a quedar > 1 en todo un intervalo $[c-\delta, c+\delta]$

lema: sea $f \in \mathcal{C}[c-h, c+h]$.

si $|f(c)| > 1 \Rightarrow \exists\, \delta \in (0,h)$, $\exists\, L > 1$ t.q. $|f(x)| \geq L \quad \forall\, x \in [c-\delta, c+\delta]$

demostración: supongamos, por contradicción, que $\forall\, \delta \in (0,h)$ y $\forall\, L > 1$ $\exists\, y \in [c-\delta, c+\delta]$ t.q. $|f(y)| < L$. sea $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ una sucesión $\delta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ sea $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ una sucesión $L_k \xrightarrow{k\to\infty} 1$ y sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [c-\delta, c+\delta]$ una sucesión tal que $x_k \in [c-\delta_k, c+\delta_k]$, $f(x_k) < L_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow x_k \longrightarrow c$, y, como f es continua, $f(x_k) \longrightarrow f(c)$. pero $f(x_k) < L_k \Rightarrow f(c) \leq 1$.

sean $\delta \in (0,h)$, $L > 1$ tales que $|g'(x)| \geq L$ $\forall x \in [c-\delta, c+\delta]$

y sea $x_0 \in [c-\delta, c+\delta]$, $x_0 \neq c$. por el teo. valor medio

$\hookrightarrow$ $|x_1 - c| = |g(x_0) - g(c)| = |g'(t)|\,|x_0 - c| \geq L\,|x_0 - c|$

ahora, si x_1 ya se ha salido de $[c-\delta, c+\delta]$ hemos terminado. si no, podemos iterar el mismo argumento

$$|x_2 - c| \geq L\,|x_1 - c| \geq L^2\,|x_0 - c|$$

$$\dots \quad |x_k - c| \geq L^k\,|x_0 - c|$$

la condición de tener $x_k \notin [c-\delta, c+\delta]$ es dada por

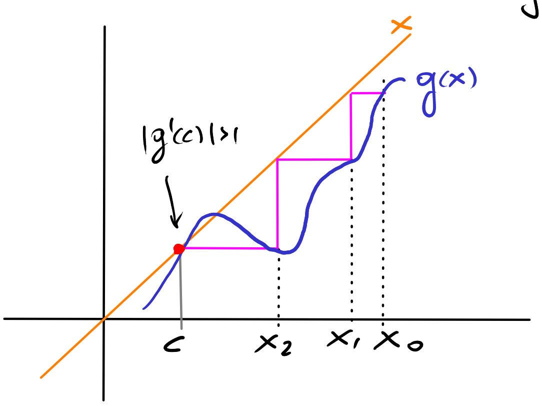
$$L^k\,|x_0 - c| > \delta \iff k > \log_L \frac{\delta}{|x_0 - c|} = \bar{k} \qquad \#$$

observaciones :

- la condición $|g'(c)| < 1$ es una condición de ser localmente (en un entorno de c) una contracción
  - $\hookrightarrow$ las condiciones puntuales (que, si hay continuidad, son condiciones locales) permiten entonces obtener convergencia solo para puntos iniciales que están suficientemente cerca de la solución
    - $\hookrightarrow$ ¿ cuánto? es la g, en este caso, que lo dice
- el teorema de Ostrowski, que se basa en el de Banach-Caccioppoli por lo que se refiere a convergencia, da condiciones suficientes: dice que, si una iteración de p.f. empieza en la región alrededor de c donde $|g'| < 1$, entonces converge a c. esto no impide que, para alguna g, se pueda llegar a c empezando fuera de esa región.

• si un p. f. c es inestable, el teorema de Ostrowski no impide que se pueda llegar a c iterando la g en un número finito de pasos

↙ ejemplo: aquí lo único que dice Ostrowski es que x_2 NO está en un intervalo que incluye c en el que $|g'|$ es siempre >1



---

pregunta: ¿cuándo se tiene convergencia a un orden más grande que el lineal?

proposición: sea $m \geq 2$, $g \in \mathcal{C}^m([c-h, c+h])$, $g(c) = c$

si $g'(c) = g''(c) = \ldots = g^{(m-1)}(c) = 0$, $g^{(m)}(c) \neq 0$ ← CONDICIÓN PUNTUAL (local)

$\Rightarrow$ la iteración $x_{k+1} = g(x_k)$ converge al orden m

y $$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - c|}{|x_k - c|^m} = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}.$$

si x_0 está suficientemente cerca de c

demostración:

. la sucesión converge, porque $|g'(c)| = 0 < 1$: Ostrowski

• $$x_{k+1} - c = g(x_k) - g(c) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{g^{(j)}(c)}{j!}(x_k - c)^j + \frac{g^{(m)}(c)}{m!}(x_k-c)^m + o\left((x_k-c)^{m+1}\right)$$

→ formula de Taylor para $g \in \mathcal{C}^m$

$$\Rightarrow \frac{|x_{k+1} - c|}{|x_k - c|^m} = \frac{g^{(m)}(c)}{m!} + \underbrace{o(x_k - c)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}$$

#

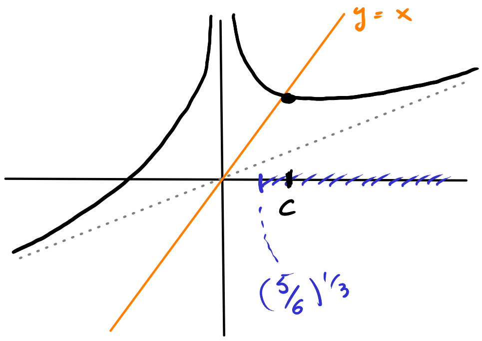
Ejemplo: $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2}$

- $g(c) = c \iff \frac{2}{3}c + \frac{1}{c^2} = c \iff \underline{c = 3^{1/3}}$

- $g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{x^3} \Rightarrow g'(c) = 0$

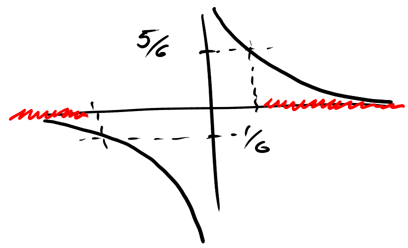
  $g''(x) = \frac{6}{x^4} \Rightarrow g''(c) \neq 0$

  $\to$ CONVERGENCIA de orden 2



el criterio principal para saber donde iniciar es lo de tener x_0 en un intervalo alrededor de c donde g es una contracción

$|g'(x)| < 1 \iff -1 < \frac{2}{3} - \frac{2}{x^3} < 1 \iff \ldots \iff -\frac{1}{6} < \frac{1}{x^3} < \frac{5}{6}$



$\Rightarrow g$ es una contracción

en $x > \left(\frac{6}{5}\right)^{1/3}$ $\leftarrow$ incluye c

y en $x < (-6)^{1/3}$

- por lo visto con el teorema de Ostrowski (y su prueba), si $x_0 > (6/5)^{1/3}$ tenemos convergencia de $x_{n+1} = g(x_n) \longrightarrow c$
- como hemos observado antes, esta es una condición suficiente: para esta g se puede demostrar que hay convergencia $\forall\, x_0 \in \left((-3/2)^{1/3}, +\infty\right) \setminus \{0\}$