2. Análisis de los errores

fuentes de error:

- numéricos
  - redondeo
  - aproximación / discretización

    ejemplo: $x = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $\hat{x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}$
- físicos: errores de medición

def: sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\hat{x}$ el resultado de su evaluación numérica. denotamos con

$$\delta x = \hat{x} - x$$

$E_{abs}(\hat{x}) = |\delta x|$ error absoluto sobre la eval. $\hat{x}$

$E_{rel}(\hat{x}) = \frac{|\delta x|}{|x|}$ error relativo

proposición: (roundoff error)

sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\hat{x}$ el número en floating point más cercano a x

$$\Rightarrow \quad E_{rel}(\hat{x}) \lesssim \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

esto quiere decir que lo que está a la izq. es $\leq$ de algo cuyo orden de magnitud no supera lo que está a la derecha

↳ recordar que, si tenemos una representación fl.p. con m dígitos de mantisa ($m = 52$ en doble precisión 64 bit)

$$\varepsilon \overset{def}{=} 2^{-m}$$

demostración:

- todo $x > 0$ se puede escribir en la forma

$$x = (1.\, d_1 d_2 \cdots d_m\, d_{m+1} \cdots)_2 \cdot 2^E$$

para ciertos $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$, $d_j \in \{0,1\}$, $E \in \mathbb{Z}$

$$103.2 = 1.032 \cdot 10^2$$

$$(1.\, d_1 d_2 d_3)_2 = 1 + d_1 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-2} + d_3 \cdot 2^{-3}$$

- $\hat{x} = (1.\, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)_2 \cdot 2^E$ $\qquad E \in \{-1022, \dots, 1023\}$

- caso peor: $d_{m+1} = 1$, $d_j = 0$ $j \neq m+1$

ejemplo: $m = 1$, $x = (1.01)_2$

NOTA: el IEEE 754 standard tiene una convención para elegir → ROUND TO EVEN

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = (1.0)_2 \\ \hat{x} = (1.1)_2 \end{array}\right. \longrightarrow |x - \hat{x}| = (0.01)_2 = 2^{-(m+1)}$$

$$= \frac{1}{2} 2^{-m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(ver Goldberg para más informaciones)

↳ la proposición sigue siendo cierta para cualquier elección de representación en fl. p. si se interpreta correctamente ≤

- qué pasa si $d_j = 1 \ \forall j > m$, $d_j = 0 \ \forall j \leq m$

ejemplo: $m = 1$, $x = (1.011)_2$

truncamiento $\hat{x} = (1.0)_2 \to |x - \hat{x}| = (0.011)_2$ — orden de magnitud 2^{-2}

redondeo $\hat{x} = (1.1)_2 \to |x - \hat{x}| = (0.001)_2$

este es el más cercano a x

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1}\quad \\ 1.011 \; + \\ 0.001 \\ \hline 1.100 \end{array} \leftarrow \hat{x}$$

- hemos evaluado sólo $|x - \hat{x}| = E_{abs}(\hat{x})$

hemos considerado sólo casos $E = 0$

si $E \neq 0$: $$\frac{|x - \hat{x}|}{|x|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\cancel{2^E}}{(1.\cancel{\ldots})2^E}$$

$$\| \quad E_{rel}(\hat{x})$$

#

proposición: (errores de aritmética)

sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y sean $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ sus evaluaciones numéricas

sean $y = x_1 + x_2$, $\hat{y} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$

$z = x_1 x_2$, $\hat{z} = \hat{x}_1 \hat{x}_2$

$$\Rightarrow \quad E_{abs}(\hat{y}) \leq E_{abs}(\hat{x}_1) + E_{abs}(\hat{x}_2)$$

$$E_{rel}(\hat{z}) \lesssim E_{rel}(\hat{x}_1) + E_{rel}(\hat{x}_2) .$$

demostración:

- $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = x_1 + \delta x_1 + x_2 + \delta x_2 \Rightarrow |x_1 + x_2 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$
- $\hat{x}_1 \hat{x}_2 = (x_1 + \delta x_1)(x_2 + \delta x_2) = x_1 x_2 + x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1 + \delta x_1 \delta x_2$

$$\frac{|\hat{x}_1 \hat{x}_2 - x_1 x_2|}{|x_1 x_2|} \leq \frac{|x_1 \delta x_2|}{|x_1 x_2|} + \frac{|x_2 \delta x_1|}{|x_1 x_2|} + \cancel{\frac{|\delta x_1 \delta x_2|}{|x_1 x_2|}}$$

$$\lesssim \frac{|\delta x_2|}{|x_2|} + \frac{|\delta x_1|}{|x_1|}$$

siempre en el análisis de los errores se hace la hipótesis implícita de $\frac{|\delta x|}{|x|} \ll 1$, pequeño.

$\#$

observación:

si tenemos un algoritmo con muchas operaciones puede haber propagación de los errores

ejemplo: tenemos $\{x_j\}_{j=1}^{10^5}$, $|\delta x_j| \sim 10^{-12}$

$$E_{abs}\left(\sum_{j=1}^{10^5} \hat{x}_j\right) \lesssim 10^{-7}$$