ex2-sols.pdf

pakado

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**EDO** **CURSO ACADÉMICO 2008-2009**	NOTA **10**

Nombre y Apellidos ____

Grupo ____

Problema 1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial hallando el factor integrante oportuno.*

$$\underbrace{\mathrm{e}^x}_{M(x,y)}\ \mathrm{d}x \underbrace{- \left[\mathrm{e}^x \tan(y) + \frac{(y+1)e^y}{\cos(y)}\right]}_{N(x,y)} \mathrm{d}y = 0.$$

Solución. La ecuación dada no es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\mathrm{e}^x \tan(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = -\frac{\mathrm{e}^x \tan(y)}{\mathrm{e}^x} = -\frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

Busco un factor integrante $\mu(x,y)$ que dependa solo de y: $\mu(x,y) = \mu(y)$, entonces $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$:

$$\frac{\partial \mu\, M}{\partial y} = \frac{\partial \mu\, N}{\partial x} \quad \Longleftrightarrow \quad M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = -\frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

Integrando en dy encuentro la expresión del factor integrante

$$\log\big[\mu(y)\big] = \log\big[\cos(y)\big] + C \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = \cos(y)$$

dado que la constante puedo elegirla como quiero, he puesto $C = 0$. Ahora es fácil averiguar que la ecuación

$$\widetilde{M}\,\mathrm{d}x + \widetilde{N}\mathrm{d}y = \mu\, M\,\mathrm{d}x + \mu\, N\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\ \cos(y)\,\mathrm{d}x - [\mathrm{e}^x\ \sin(y) + (1+y)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y = 0$$

es exacta:

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\ \sin(y) \ = \ \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} = -\mathrm{e}^x\ \sin(y)\,.$$

Entonces existe un potencial $P(x,y)$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x} = \widetilde{M}$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = \widetilde{N}$, y puedo encontrarlo integrando:

$$P(x,y) = \int \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + c(y) = \int \widetilde{M}\,\mathrm{d}x + c(y) = \cos(y)\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + c(y) = \mathrm{e}^x\ \cos(y) + c(y)$$

usando la expresión de $\widetilde{N}$ puedo encontrar $c(y)$

$$-\mathrm{e}^x\ \sin(y) - (1+y)\mathrm{e}^y = \widetilde{N} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\ \sin(y) + c'(y) \quad \Rightarrow \quad c'(y) = -(1+y)\mathrm{e}^y \quad \Rightarrow \quad c(y) = -y\mathrm{e}^y + K$$

donde K es una constante arbitraria. El potencial será

$$P(x,y) = \mathrm{e}^x\ \cos(y) - y\mathrm{e}^y + K$$

y las soluciones del problema serán dadas para la ecuación implicita $P(x,y) = \mathcal{K}$, es decir la solución $y(x)$ es definida implicitamente en la ecuación

$$P(x,y) = \mathcal{K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x\ \cos(y) - y\mathrm{e}^y + K = \mathcal{K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x\ \cos(y) - y\mathrm{e}^y = \mathcal{K} - K = \mathcal{C}\,,$$

donde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria que define la familia uníparametrica de soluciones. Se podría explicítar en términos de x: $x = \log\left[(\mathcal{C} + y\mathrm{e}^y)/\cos(y)\right]$, pero solo para los y tales que $\cos(y) \neq 0$. □

Problema 2 *Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria del segundo orden*

$$y''(x) = 2\,y'(x) - \frac{\big[y'(x)\big]^2}{y(x)}\,, \qquad \textit{con} \ \ y(x) > 0, \ \ y'(x) > 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Reducirla a una ecuación del primer orden y resolverla. Escribir la solución $y(x)$ en forma esplicita.
(b) Encontrar aquella solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. ¿Es unica?

Solución. Ponemos $z = y'$; entonces $y'' = z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$, es decir: hemos puesto y como variable independiente y hemos hecho depender z de y en lugar que de x. Substituyo en la ecuación

$$z(y)\frac{\mathrm{d}z(y)}{\mathrm{d}y} = 2\,z(y) - \frac{z^2(y)}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}z(y)}{\mathrm{d}y} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{a(y)}\, z(y) \underbrace{-2}_{b(y)} = 0$$

Que es una ecuación lineal del primer orden completa para $z(y)$, cuya solución es:
(la formula se obtiene en varias maneras: factor integrante, variación de la constante...)

$$\begin{aligned} z(y) &= \mathrm{e}^{-\int_{y_0}^{y} a(\xi)\mathrm{d}\xi}\left\{ z(y_0) - \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{\int_{y_0}^{\eta} a(\xi)\mathrm{d}\xi} b(\eta)\mathrm{d}\eta \right\} = \mathrm{e}^{-\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\left\{ z(y_0) - \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{\int_{y_0}^{\eta} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\,(-2)\,\mathrm{d}\eta \right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\log(y)+\log y_0}\left\{ z(y_0) + 2\int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{\log(\eta)-\log(y_0)}\mathrm{d}\eta \right\} = \frac{y_0}{y}\left\{ z(y_0) + \frac{2}{y_0}\int_{y_0}^{y} \eta\mathrm{d}\eta \right\} \\ &= \frac{1}{y}\left\{ y_0\, z(y_0) - y_0^2 + y^2 \right\} = \frac{C + y^2}{y} \end{aligned}$$

Regresando a la variable y, recordando que $C = y_0\, z(y_0) - y_0^2 = y_0\, y_0' - y_0^2$, (y recuerdo las notaciones habituales $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$)

$$y'(x) = \frac{C + y^2}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y\,y'}{C + y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y(\xi)\,y'(\xi)}{C + y^2(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^{x} 1\mathrm{d}\xi = x - x_0$$

resolviendo el integral (recuerdo que $\int \frac{f'}{f} = \log f$) obtengo
(también se podia resolver como una Bernoulli con parametro -1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\left(\frac{C + y^2}{C + y_0^2}\right) = x - x_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad C + y^2 = (C + y_0^2)\mathrm{e}^{2(x-x_0)} \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{(C + y_0^2)\mathrm{e}^{2(x-x_0)} - C} \\ &\Longleftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{(y_0\,y_0' - y_0^2 + y_0^2)\mathrm{e}^{2(x-x_0)} - y_0\,y_0' + y_0^2} \end{aligned}$$

finalmente la solución general es dada por

$$y(x) = \sqrt{y_0\,y_0'(\mathrm{e}^{2(x-x_0)} - 1) + y_0^2}\,,$$

y depende de DOS paramétros: $y_0 = y(x_0)$ y $y_0' = y'(x_0)$. La solución que satisface las condiciones del punto (b) se obtiene ponendo $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = y(0) = 1$, $y'(x_0) = y_0' = y'(0) = 1$ en la espresión de y

$$y(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{x}.$$

esta solución es la unica que cumple las condiciones iniciales del apartado (b). $\square$