HOJA DE EJERCICIOS 3 (Grupo 130)
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. De las siguientes fórmulas dí, razonadamente, cuáles son verdad y cuáles falsas (cerca del origen en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$).

$$\operatorname{sen} y = \mathrm{O}(|y|) \qquad x \operatorname{sen} y = \mathrm{O}(x^2+y^2) \qquad \operatorname{sen} x = \mathrm{o}(|x|)$$

$$1-\cos x = \mathrm{O}(x^2) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{o}(|x|) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{O}(|x|^{0'99})$$

Problema 2. Considera la función vectorial $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^2+y^3 \\ \\ 2x+7y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada vector $v=(a,b)$, calcula la derivada direccional $(D_v f)_{(1,1)}$ por el siguiente método:
calcula el camino $t \longmapsto f\big((1,1)+tv\big)$ como una función explícita de t y derívalo en $t=0$.

b) Calcula las siguientes matrices

$$M_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} , \qquad M_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} ,$$

y evalúa los producto matriciales $M_1 v$ y $M_2 v$ ¿Cuál de ellos es igual a $(D_v f)_{(1,1)}$?

c) ¿Cuál de las dos matrices M_1, M_2 es la jacobiana de f en $(1,1)$? Da una explicación.

Problema 3. Utiliza la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciables en todo punto.

a) $F(x,y) = f\big(h(x)\,,\, g(x,y)\big)$,

b) $G(x,y) = g\big(f(x,y)h(x)\,,\, y\big)$,

c) $H(x,y) = g\big(f\big(x,h(y)\big)\,,\, xy\big)$,

Problema 4. Es sabido que si en un entorno de x_0 existen las funciones $f_{x_1},\dots,f_{x_n}$ y son continuas, entonces $f(x_1,\dots,x_n)$ es diferenciable en x_0. Veamos que esta condición suficiente no es necesaria.

a) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{si } \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Comprueba que las funciones f_x, f_y están definidas en todo $\mathbb{R}^2$ pero no son continuas en $(0,0)$.

b) Demuestra que, de todas maneras, la función f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 5. Analícese, para cada una de las funciones siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales primeras y la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Problema 6. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, dotado de un producto escalar $< \cdot, \cdot >$ con norma asociada $|| \cdot ||$.

a) Demuestra que la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ||x||^2$ es diferenciable en todo $x \in E$, y que

$$(df)_x(u) \;=\; 2 < x, u > \quad \text{para cada } u \in E.$$

b) Dados un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y un camino diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$, demuestra que $\|\alpha(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$.

Problema 7. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo por caminos y $f : U \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable, tal que $(df)_x = 0$ para todo $x \in U$. Demuestra que f es constante.
Sugerencia: es válido suponer que cada dos puntos de U se pueden conectar por un camino diferenciable.

Problema 8. Sean $m > 0$ y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función *homogénea de grado* m, es decir que cumple lo siguiente:

$$f(tx) \;=\; t^m\, f(x) \quad \text{para cualesquiera } \; x \in \mathbb{R}^N \;\;,\;\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Demuestra que $\big\langle \nabla f(x)\,,\, x \big\rangle \equiv m\, f(x)$.

Problema 9. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) \;=\; \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Prueba que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \;=\; g_2(x,y)$.

b) Ayudándote del resultado en a), halla una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y\,.$$

c) Halla una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\,xy \quad , \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 - 2 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^z\,.$$

Problema 10. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado.
a) Dados $x_0 \in V$ y $r > 0$, prueba que el *cierre* de la bola abierta $B_{\|\cdot\|}(x_0, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x_0, r)$.
b) Demuestra que $d(x,y) = \text{mín}\{||x-y||, 1\}$ es una función de distancia en V.
c) Considerando sucesiones de puntos de V, demuestra que $||\cdot||$ y d definen la misma noción de convergencia y el mismo límite para cada sucesión convergente (por lo tanto, definen el mismo concepto de cierre para cada subconjunto de V).
d) Demuestra que $\|\cdot\|$ y d definen la misma bola unidad abierta con centro $\mathbf{0}$, pero que $\overline{B}_d(\mathbf{0}, 1)$ no coincide con $\overline{B}_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, 1)$. Luego $\overline{B}_d(\mathbf{0}, 1)$ no es el cierre de $B_d(\mathbf{0}, 1)$.

Problema 11. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado, y sean $A, B \subset V$. Se define

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$$

a) Demostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
b) Poner un ejemplo de un espacio V y dos cerrados A, B tales que $A + B$ no es cerrado.

Problema 12. Dado un producto escalar en $\mathbb{R}^N$, lo consideramos como una función

$$F : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x,y) \;=\; \langle x, y\rangle \,.$$

a) Halla $(dF)_{(a,b)}$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) \equiv F\big(\, f(t)\,,\, g(t)\,\big)$, calcula $h'(t)$.

Problema 13. *a)* Calcular las diferenciales de

$$f_1(x) \;=\; \langle a, x\rangle \quad , \quad f_2(x) \;=\; \langle x, L(x)\rangle \quad , \quad f_3(x,y) \;=\; \langle x, L(y)\rangle \,,$$

donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $(dB)_{(x,y)}$.

c) Definiendo $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, hallar la aplicación lineal $(df)_{(x,y)}$.
