# 4DIC09.pdf

pakado

Ecuaciones Diferenciales

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

# Correccion - Parcial de EDO - 4/12/2009
# Curso Académico 2009-2010

NOTA

**Problema 1** *Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria del segundo orden*

$$y''(x) = \frac{1}{x}\,y'(x) - x\left[y'(x)\right]^2, \qquad con \;\; x \geq 1 .$$

*(a) Reducirla a una ecuación del primer orden y resolverla. Escribir la solución $y(x)$ en forma explicita.*
*(b) Encontrar aquella solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ , $y'(0) = 1$.*

**Solución.** *(a)* Esta ecuación se puede reducir a una de primer orden con el cambio $z(x) = y'(x)$. Encontramos una ecuación de Bernoulli:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\,z(x) - x\,z^2 .$$

Para resolverla es comodo el cambio de variable $z(x) = u(x)^{-1}$ , $u'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$ , que transforma la Bernoulli en una ecuación lineal completa

$$u'(x) = -\frac{1}{x}u(x) + x = -a(x)u(x) - b(x)$$

La ecuación lineal completa tiene la solución general dada por la formula, con $x_0 \geq 1$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\mathrm{d}\xi}\left\{u(x_0) - \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)\mathrm{d}\xi} b(\eta)\mathrm{d}\eta\right\} = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\eta}\frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\,\eta\,\mathrm{d}\eta\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\log(x)+\log(x_0)}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\log(\eta)-\log(x_0)}\,\eta\,\mathrm{d}\eta\right\} = \frac{x_0}{x}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{\eta^2}{x_0}\,\mathrm{d}\eta\right\} \\ &= \frac{x_0}{x}\left\{u(x_0) + \frac{1}{3x_0}\left(x^3 - x_0^3\right)\right\} = \frac{1}{x}\left\{x_0\,u(x_0) + \frac{x^3 - x_0^3}{3}\right\} . \end{aligned}$$

Regreso a la variable $y'(x) = z(x) = \frac{1}{u(x)}$ , y $u(x_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$, y obtengo $y'(x) = u(x)^{-1} = x\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{x^3 - x_0^3}{3}\right]^{-1}$.
Integrando en $[x_0, x]$ encuentro la forma esplicita de $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{\xi^3 - x_0^3}{3}\right]}\mathrm{d}\xi = y(x_0) + 3\int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{K+\xi^3}\mathrm{d}\xi = y(x_0) + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{-1}{K+\xi} + \frac{K+\xi}{K^2 - K\xi + \xi^2}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= y(x_0) + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{-1}{K+\xi} + \frac{1}{2}\frac{2\xi - K}{K^2 - K\xi + \xi^2} + \frac{3K}{2}\frac{1}{K^2 - K\xi + \xi^2}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= y(x_0) + \frac{1}{K}\log\left[\frac{K+x}{K+x_0}\right] + \frac{1}{2K}\log\left[\frac{K^2 - Kx + x^2}{K^2 - Kx_0 + x_0^2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{K}\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}\,K}}{1 + \left[\frac{2\xi}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2}\mathrm{d}\xi \\ &= y(x_0) + \frac{1}{K}\log\left[\frac{K+x}{K+x_0}\right] + \frac{1}{2K}\log\left[\frac{K^2 - Kx + x^2}{K^2 - Kx_0 + x_0^2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{K}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2x_0}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] \end{aligned}$$

donde $K = 3\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{-x_0^3}{3}\right]$.
*(b)* La condición inicial en $x_0 = 0$ no puede ser tomada, dado que la solución seria:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{\xi^3 - x_0^3}{3}\right]}\mathrm{d}\xi = 1 + \int_{0}^{x}\frac{3}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

y el integral (impropio) no existe. Se note también que para $x = 0$ los coeficientes de la ecuación degeneran.
*(b2)* Si consideramos otras condiciones iniciales $x_0 = 1$, $y(x_0) = y(1) = 0$ y $y'(x_0) = y'(1) = 3$, tenemos:

$$y(x) = \int_{1}^{x}\frac{3}{\xi^2}\mathrm{d}\xi = 3\left(1 - \frac{1}{x}\right) .$$

**Problema 2** *Dado el siguiente sistema homogéneo con coeficientes constantes*

$$\mathbf{X}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{X}\,.$$

*Hallar la solución general. Encontrar aquella solución tal que* $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$.

**Solución.** El polinomio caractéristico es $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$, entonces tenemos un autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algébrica y geometrica 1, y un autovalor $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad algébrica 2.
Buscamos una matriz $P$ de cambio de variable que transforme $A$ en su forma de Jordan $J$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad J = P^{-1} A\, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovectores: $\mathbf{v}_1$ es el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$, por lo tanto es solución del sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (0, 0, z)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$. $\mathbf{v}_2$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = 4$, es solución del sistema $(A - 4I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_2 = (x, -x, \frac{x}{2})$, y elijo $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 1)$. Está claro que la dimension del autoéspacio correspondiente a $\mathbf{v}_2$ es 1, es decir su multiplicidad geometrica es 1. Entonces la matriz no es diagonalizable, siendo 2 la multiplicidad algébrica de $\lambda_2$ mientras la geometrica es 1. Busco entonces el autovector generalizado $\mathbf{w}$, que es solución del sistema $(A - 4I)\mathbf{w} = \mathbf{v}_2$, y tiene la forma $\mathbf{w} = (x, -x - 1, \frac{x-1}{2})$, y elijo $\mathbf{w} = (3, -4, 1)$. Por lo tanto la matriz $P$ es dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Jordan $J = D + N$,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{D\,t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^{Nt} = I + Nt + \underbrace{N^2}_{=0} \frac{t^2}{2} + \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dado que $N^2 = 0$. Adémas $DN = ND$, es decir las dos matrices $N$ y $D$ comútan, entonces

$$\mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{Dt + Nt} = \mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{Nt} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} & t\,\mathrm{e}^{4t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix}$$

En fin calculo la matriz exponencial:

$$\mathrm{e}^{At} = P\,\mathrm{e}^{Jt}\,P^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - 2t)\,\mathrm{e}^{4t} & -2t\mathrm{e}^{4t} & 0 \\ 2t\mathrm{e}^{4t} & (2t + 1)\mathrm{e}^{4t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{2t} + (1 - t)\mathrm{e}^{4t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

y la solución general tendrá la forma $\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0)$. Si $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$, entonces la unica solución tiene la forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} (1 - 2t)\,\mathrm{e}^{4t} & -2t\mathrm{e}^{4t} & 0 \\ 2t\mathrm{e}^{4t} & (2t + 1)\mathrm{e}^{4t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{2t} + (1 - t)\mathrm{e}^{4t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 6t)\mathrm{e}^{4t} \\ (2 + 6t)\mathrm{e}^{4t} \\ -2\mathrm{e}^{2t} + (2 - 3t)\mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix}.$$

**Problema 3** *Encontrar una ecuación lineal de coeficientes constantes cuya solución general es:*

$$(a) \qquad \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x} + 1$$

$$(b) \qquad c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x) + \frac{x}{8}\,.$$

**Solución.** *(a)* Dado que la solución general es $y_G(x) = \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x} + 1$, la ecuación tiene que ser de orden 2. La solución de la omogenea es $y_H(x) = \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x}$, mientras la solución particular es $y_P(x) = 1$. Como consecuencia el polinomio característico tiene una raíz doble $\lambda = 3$ y es dado por $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, con lo cual la parte omogenea de la ecuación resulta ser $y'' - 6y' + 9y = 0$. Ahora solo falta encontrar el termino $b(x)$ tal que $y_G$ sea solución de la ecuación $y'' - 6y' + 9y = b(x)$ : dado que $y_P''(x) = y_P'(x) = 0$, sustituyendo $y_P(x) = 1$ en la ecuación es evidente que $9y_P = 9 = b(x)$, con lo cual la ecuación diferencial que buscamos resulta ser

$$y'' - 6y' + 9y = 9\,.$$

*(b)* Dado que la solución general es $y_G(x) = c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x) + \frac{x}{8}$, la ecuación tiene que ser de orden 2. La solución de la omogenea es $y_H(x) = c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x)$, mientras la solución particular es $y_P(x) = \frac{x}{8}$. La solución $y_H$ de la parte omogenea de la ecuación, corresponde al polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda - 5i)(\lambda + 5i) = \lambda^2 + 25$, con lo cual la parte omogenea de la ecuación resulta ser $y'' + 25y = 0$. Ahora solo falta encontrar el termino $b(x)$ tal que $y_G$ sea solución de la ecuación $y'' + 25y = b(x)$ : dado que $y_P''(x) = 0$, sustituyendo $y_P(x) = \frac{x}{8}$ en la ecuación es evidente que $25y_P = \frac{25}{8}x = b(x)$, con lo cual la ecuación diferencial que buscamos resulta ser

$$y'' + 25y = \frac{25}{8}x\,.$$

**Problema 4** *Hallar las soluciones de la ecuación diferencial*

$$\underbrace{\big(4x^3+3\cos(y)\big)}_{M}(x,y)\,\mathrm{d}x\underbrace{-x\sin(y)}_{N(x,y)}\mathrm{d}y=0\,.$$

**Solución.** La ecuación diferencial que estamos considerando no es exacta: $-3\sin(y)=\partial_y M\neq\partial_x N=-\sin y$. Entonces es oportuno buscar un factor integrante. Dado que el cociente $\frac{\partial_y M}{\partial_x N}=1$, es decir, no depende ni de $x$ ni de $y$, es comodo buscar un factor integrante $\mu$ que dependa solo de una variable, pongamos solo de la $x$:

$$\partial_y\left[\mu(x)\,M(x,y)\right]=\partial_x\left[\mu(x)\,N(x,y)\right]\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\mu}{N}\left[\partial_y M-\partial_x N\right]=\frac{2}{x}\mu(x)\,.$$

Ahora integramos la ecuación $\mu'=\frac{2}{x}\mu$ y obtenemos como solución $\log\mu(x)=2\log(x)+K$, y elegimos $K=0$ (se podría elegir cualquier otro $K\in\mathbb{R}$). El factor integrante resulta ser $\mu(x)=x^2$. Por lo tanto la ecuación

$$\underbrace{\big(4x^5+3x^2\cos(y)\big)}_{\widetilde{M}(x,y)}\,\mathrm{d}x\underbrace{-x^3\sin(y)}_{\widetilde{N}(x,y)}\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

resulta ser exacta. Calculamos el potencial $P(x,y)$:

$$P(x,y)=\int\widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x+c(y)=\int\big(4x^5+3x^2\cos(y)\big)\,\mathrm{d}x+c(y)=\frac{2}{3}x^6+x^3\cos(y)+c(y)$$

luego queremos que

$$\partial_y P(x,y)=\widetilde{N}(x,y)\qquad\Longleftrightarrow\qquad -x^3\sin(y)+c'(y)=-x^3\sin(y)\qquad\Longleftrightarrow\qquad c'(y)=0$$

lo cual significa que $c(y)=k_0$, donde $k_0$ es una constante real. Las soluciones de la ecuación (1) son dadas implicitamente para la ecuación

$$P(x,y)=k_1\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{2}{3}x^6+x^3\cos(y)+k_0=k_1\qquad\Longleftrightarrow\qquad\cos(y)=\frac{k_1-k_0}{x^3}-\frac{2}{3}x^3$$

podemos despejar la $y$

$$y=\arccos\left[\frac{k_1-k_0}{x^3}-\frac{2}{3}x^3\right]=\arccos\left[\frac{k}{x^3}-\frac{2}{3}x^3\right]$$

donde $k=k_1-k_0$ es una constante real.
*Otra forma de calcular el potencial:* Para encontrar el potencial, se puede integrar a lo largo del cualquier camino que va de $(x_0,y_0)$ hasta $(x,y)$, y una elección practica resulta ser integrar sobre el segmento $[x_0,x]\times\{y_0\}$ y luego $\{x\}\times[y_0,y]$:

$$\begin{aligned}P(x,y)&=\int_{x_0}^{x}\widetilde{M}(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi+\int_{y_0}^{y}\widetilde{N}(x,\eta)\mathrm{d}\eta=\int_{x_0}^{x}\big(4\xi^5+3\xi^2\cos(y_0)\big)\mathrm{d}\xi-\int_{y_0}^{y}x^3\sin(\eta)\mathrm{d}\eta\\&=\left[\frac{2}{3}\xi^6+x^3\cos(y_0)\right]_{\xi=x_0}^{\xi=x}+\left[x^3\cos(\eta)\right]_{\eta=y_0}^{\eta=y}=\frac{2}{3}x^6+x^3\cos(y)\underbrace{-\frac{2}{3}x_0^6-x_0^3\cos(y_0)}_{k_0}\end{aligned}$$

lo cual lleva a la misma solución que hemos encontrado arriba poniendo $P(x,y)=k_1$.