ANÁLISIS MATEMÁTICO TEMA 2

OES DE LANDAU

E, F espacios normados. $x_0 \in U \subseteq E$. $f: U \to F$ $\varphi(x) > 0$ $\forall x \neq x_0$

$\varphi: U \to [0, +\infty)$

$$f \text{ es: } \begin{cases} O(\varphi) \text{ si } \exists\, C \geq 0 \,/\!/ \\ \quad \|f(x)\| \leq C\varphi(x)\ \forall x \in U \\ o(\varphi(x)) \text{ cuando } x \to x_0 \text{ si } \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{\|f(x)\|}{\varphi(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } f = o(\varphi) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f = O(\varphi)}$$

DIFERENCIABILIDAD: DERIVADAS DE ORDEN 1

$f: U \to F$ diferenciable si $\exists L: E \to F$ lineal acotada //

$U \subseteq E$

$R_1(x) = f(x) - [f(x_0) + L(x - x_0)] = o(\|x - x_0\|)$

Resto de Taylor de primer orden.

f diferenciable en U si lo es para todo punto.

$f'(x_0) = 0 \iff f(x) = o(\|x - x_0\|)$

diferencial de f en x_0

$\underline{L \equiv (df)_{x_0}}$ ÚNICA

f diferenciable en $x_0 \Rightarrow f$ continua en x_0

suma, resta, producto por escalar diferenciable.

SIGNIFICADO ANALÍTICO

$f(x_1, \dots, x_n)$ diferenciable en $x_0 \iff$ satisface la regla de la cadena a lo largo de todos los caminos diferenciables cuando pasan por x_0.

Regla de la cadena $\equiv$ $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ diferenciable

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = x_1'(t) \cdot f_{x_1}(\alpha(t)) + \dots + x_n'(t) \cdot f_{x_n}(\alpha(t))$$

(Para ver continuidad acercarme por $y=f(x)$) (debe de valer lo mismo para cualquier camino)

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

$L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $L(x)=mx$. f diferenciable en x_0: $\exists\, m$ $\|$ $f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)=o(|x-x_0|)$

$f'(x_0)=m \Rightarrow$ m es la pendiente de la recta tg a f en x_0 (en $\mathbb{R}^2$)

En $\mathbb{R}^n$:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 $\iff$ el grafo: $\{(x,y) \,\|\, y=f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

tiene cono tangente en $p_0=(x_0, f(x_0))$ y ese cono es un hiperplano afín no contenido en ninguna recta afín vertical.

MATRIZ JACOBIANA

$$(df)_{x_0}(v) = (D_v f)(x_0) = (Df)_{x_0} v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Imagen del vector por la diferencial

Derivada direccional en x_0

Matriz jacobiana por el vector

Regla de la cadena $\equiv$ como producto de matrices $\quad \dfrac{d}{dt} f(\alpha(t)) = (Df)_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t)$

$$\alpha(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix} \qquad (D\alpha)_t = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)\end{bmatrix} = \alpha'(t)$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad Df = [f_{x_1} \; f_{x_2} \; \cdots \; f_{x_n}]$

Gradiente de f

$\nabla f \equiv (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = (Df)_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) = \nabla f_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t)$$

REGLA DE LA CADENA PARA DIFERENCIALES Y JACOBIANAS

f diferenciable en x_0 y g diferenciable en $f(x_0)$ $g \circ f$ diferenciable y en x_0

$(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)} \circ (df)_{x_0}$ En dimensión finita es equivalente:

$$(D(g \circ f))_{x_0} = (Dg)_{f(x_0)} \cdot (Df)_{x_0}$$

FUNCIONES DE CLASE C^l

$f \in C^l \iff$ todas las derivadas parciales desde orden 0 a l $\exists$ y son continuas. $C^\infty \equiv C^l \; \forall l$.

$f: U \to \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ $\exists$ y son continuas en x_0

$\implies f$ diferenciable en x_0

Lema de Schwarz: $\quad f \in C^2 \implies f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$

Para C^l se cumple también, NO importa el orden de derivación pero sí el número de derivadas de cada variable $\left(f_{xxy} = f_{xyx} \neq f_{yxy} \right)$ $f \in C^3$

no tiene por qué

NOTACIÓN MULTIÍNDICE $\quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_k \geq 0$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad D^\alpha f \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \qquad \left(f_{xxy} = D^{(2,1)} f \right)$$

REGLA DE LEIBNIZ (escalar)

$$D(fg)_{x_0} = g(x_0) \cdot Df_{x_0} + f(x_0) \cdot Dg_{x_0}$$

Si $f, g \in C^l \implies f \cdot g \in C^l$ | Compuesta de $C^l \implies C^l$

DESARROLLOS DE TAYLOR Y EXTREMOS LOCALES

$f \in C^2$ $\quad$ $Hess(f)_a = \left[f_{x_i x_j}(a)\right]_{n\times n}$ simétrica

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}(\nabla f)_a \cdot h + \frac{1}{2!} h^t \, Hess(f)_a \cdot h + R(h)$$

$R(h) = o(\|h\|^2)$ o $O(\|h\|^3)$ si $f \in C^3$.

EXTREMOS LOCALES

- a punto crítico de f si $\nabla f_a = 0$

Si a es un punto crítico de f: $(A = Hess(f)_a)$

- A def pos: mínimo local estricto
- A def neg: máximo local estricto
- A indefinida: ni máximo ni mínimo.

DESARROLLO GENERAL DE TAYLOR

$f \in C^l$ y $a \in U$ abierto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists!$ polinomio $P_l(x)$ //

1. $P_l(x)$ tiene grado $\leq l$ y 2. $D^\alpha f(a) = D^\alpha P_l(a)$ para todo multíndice α con $0 \leq |\alpha| \leq l$

$P_l(x) \equiv$ polinomio de Taylor de orden l de f en a.

$f(x) - P_l(x) = o(\|x-a\|^l)$ (si f es C^{l+1}

$f(x) - P(x) = O(\|x-a\|^{l+1})$