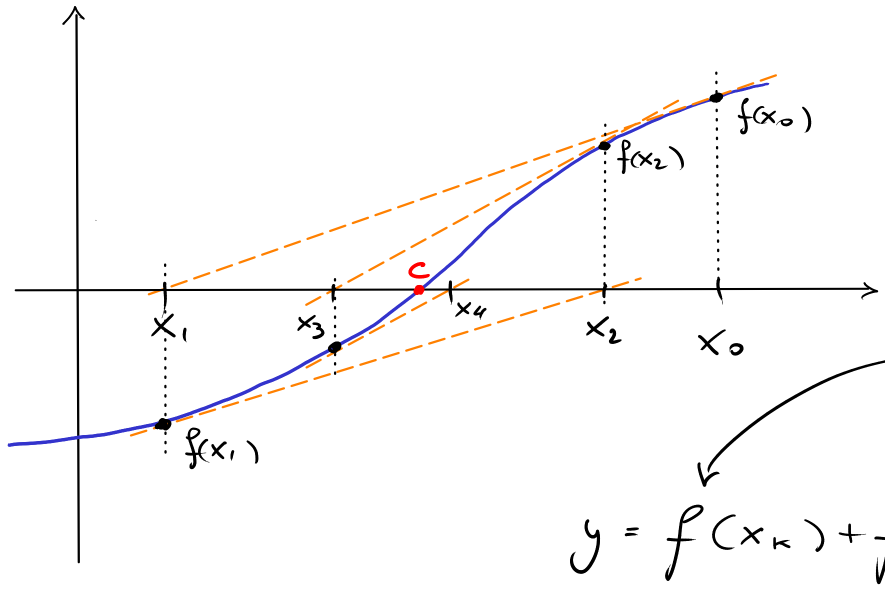
8.4 MÉTODO DE NEWTON



- ecuación $f(x)=0$
- iteración:

x_{k+1} = cero de la recta tangente a f en $(x_k, f(x_k))$

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$y = 0 \iff x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iteración de Newton: $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$

<u>objetivo</u>: $x_k \longrightarrow c$ t.q. $f(c) = 0$

<u>requisitos mínimos</u>: f tiene que ser derivable, se necesita conocer su derivada para establecer la iteración, y esta no tiene que anularse

<u>el método de Newton es una iteración de punto fijo</u> con función de iteración $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

↳ si $f \in \mathcal{C}^3$, tenemos

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}, \quad g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x)\left(\frac{f'''(x)}{(f'(x))^2} - \frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^3}\right)$$

$\Rightarrow$ si $f'(c) \neq 0$, entonces $g'(c) = 0$, $g''(c) = \frac{f''(c)}{f'(c)}$

y, por la proposición sobre la convergencia al orden q de las iteraciones de punto fijo, el método de Newton converge al menos al ORDEN 2 ← razón del interés por este método

Ejemplo: calcular $\sqrt[n]{t}$, $t > 0$ $\quad n \in \mathbb{N}$

- solución de $x^n = t \Rightarrow f(x) = x^n - t$
- $f'(x) = n x^{n-1} \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

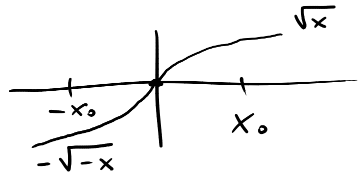
$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - t}{n x_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{t}{x_k^{n-1}}\right)$$

- $n = 2$, $t = 7$: $\sqrt{7}$. $\quad 3^2 = 9 \rightsquigarrow x_0 = 3$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{8}{3} , \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{127}{48}$$

$$x_2^2 = \left(\frac{127}{48}\right)^2 = 7.00043$$

No ejemplo: $f(x) = \sigma(x)\sqrt{|x|}$



signo de x

$$\sigma(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$
- $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 2\sigma(x)|x| = 2x \Rightarrow x_{k+1} = x_k - 2x_k = -x_k$

sucesión oscilante que no converge

EJERCICIO: sea $f(x) = \sigma(x)|x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ demostrar, usando el teorema de Ostrowski, que la iteración de Newton converge para algún punto inicial $\iff \alpha > 1/2$, y en este caso converge para todo punto inicial

teorema (convergencia del método de Newton)

sea $f \in \mathcal{C}^2([c-\delta, c+\delta])$, $f(c) = 0$

si $\exists\, m > 0$ t.q. $|f'(x)| \geq m \quad \forall\, x \in [c-\delta, c+\delta]$

$\Rightarrow$ el método de Newton converge almenos al ORDEN 2 para todo x_0 t.q.

$|x_0 - c| < \min\left\{\delta, \frac{2m}{M}\right\}$, donde $M = \max\limits_{[c-\delta, c+\delta]} |f''|$

observación: pedir que $|f'(x)| \geq m > 0$ en un entorno de c es equivalente a pedir $f'(c) \neq 0$, porque f es continua

misma condición que permite usar la proposición sobre convergencia al orden 2 para la iteración de punto fijo, si $f \in \mathcal{C}^3$

este teorema
- pide solo $f \in \mathcal{C}^2$
- define cuantitativamente un entorno de c donde poner un punto inicial

demostración: sea $|x_0 - c| < \delta$

- $$0 = f(c) = f(x_0) + f'(x_0)(c - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(c - x_0)^2$$

ξ_0 entre c y x_0

formula de Taylor con resto de Lagrange

$$\Rightarrow f(x_0) = -(c - x_0) f'(x_0) - \frac{1}{2}(c - x_0)^2 f''(\xi_0)$$

- primer paso de la iteración de Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = c + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} (c - x_0)^2$$

$$\Rightarrow |x_1 - c| = \left| \frac{f''(\xi_0)}{2 f'(x_0)} \right| |x_0 - c|^2$$

- si $|x_0-c| < \frac{2m}{M} \Rightarrow \left|\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}\right| |x_0-c| \leq \frac{M}{2m}|x_0-c| < 1$

↳ hemos demostrado que, si $|x_0-c| < \min\{\delta, \frac{2m}{M}\}$

esto quiere decir que x_0 está en el intervalo $x_0 \in [c-h, c+h]$, con $h = \min\{\delta, \frac{2m}{M}\}$

$\Rightarrow |x_1-c| < |x_0-c|$: x_1 se mantiene en el mismo entorno de c en el que está x_0

podemos repetir el argumento obteniendo

$$|x_{k+1}-c| = \left|\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\right| |x_k-c|^2 \quad \forall k \geq 0$$

- veamos que $x_k \to c$: sea $a_k = |x_k - c|$

$$a_k \leq \underbrace{\frac{M}{2m}}_{= L} a_{k-1}^2 \leq L\left(L a_{k-2}^2\right)^2 = L^{1+2} a_{k-2}^{2^2}$$

$$\leq L^{1+2}\left(L a_{k-3}^2\right)^{2^2} = L^{1+2+2^2} a_{k-3}^{2^3}$$

$$\leq L^{1+2+2^2}\left(a_{k-4}^2\right)^{2^3} = L^{1+2+2^2+2^3} a_{k-4}^{2^4}$$

$$\ldots \leq L^{1+2+\ldots+2^{k-1}} a_0^{2^k} = L^{2^k-1} a_0^{2^k} = \frac{1}{L}(L a_0)^{2^k}$$

como $L a_0 = \frac{M}{2m}|x_0-c| < 1 \Rightarrow a_k \to 0$

- veamos ahora que la convergencia es al menos al orden 2:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k^2} = \left|\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\right|, \quad \text{donde } f \in \mathcal{C}^2$$

- $x_k \to c \Rightarrow f'(x_k) \to f'(c)$

- ξ_k está entre c y x_k $\Rightarrow \xi_k \to c \Rightarrow f''(\xi_k) \to f''(c)$

$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k^2} \longrightarrow \left|\frac{f''(c)}{2f'(c)}\right|$: si $f''(c) \neq 0$ esto da convergencia al orden 2 (pero podría ser incluso más rápida) #