(5) Sean A, B, C, D matrices $n \times n$.

(a) Demuestra que $\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \cdot \det(B)$

Demostremos este mismo resultado para $A_{k \times k}$, $B_{\ell \times \ell}$, $C_{k \times \ell}$,

que implica lo que queremos demostrar para el caso $k = \ell \, (= n)$

Sea $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = (m_{ij})_{m \times m}$ $(k + \ell = m)$

con $m_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in \{k+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, k\}$

$$\Rightarrow \det(M) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sig}(\sigma) \prod_{i=1}^{m} m_{i,\sigma(i)} = \circledast$$

Pero sabemos que si para algún $i \in \{k+1, \dots, m\}$,

$\sigma(i) \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow m_{i,\sigma(i)} = 0 \Rightarrow$ podemos quitar del

sumatorio todas las σ que cumplan esto.

Nos quedamos con aquellas de la forma: $\sigma: i \in \{k+1, \dots, m\}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sigma(i) \in \{k+1, \dots, m\}$

es decir, si $i \in \{1, \dots, k\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \sigma(i) \in \{1, \dots, k\}$

Por lo que podemos expresar σ como (producto) composición de

dos permutaciones $\underset{(1)}{\rho} \in S_{m-k}$, $\underset{(2)}{\delta} \in S_k$

$\sigma = \rho \circ \delta$, ρ: permuta los elementos $\{k+1, \dots, m\}$

y δ: permuta los elementos $\{1, \dots, k\}$

$\Rightarrow \operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}(\rho) \cdot \operatorname{sig}(\delta)$

$$\circledast = \sum_{\rho \in S_{m-k}} \sum_{\delta \in S_k} (\operatorname{sig}(\rho) \cdot \operatorname{sig}(\delta)) \left(\prod_{i=1}^{k} m_{i\delta(i)} \cdot \prod_{i=k+1}^{m} m_{i\rho(i)} \right) =$$

$$= \sum_{\rho \in S_{m-k}} \left(sig(\rho) \cdot \prod_{i=k+1}^{m} m_{i\,\rho(i)} \cdot \sum_{\delta \in S_k} sig(\delta) \cdot \prod_{i=1}^{k} m_{i\,\delta(i)} \right)$$

$$= \left[\sum_{\rho \in S_{m-k}} sig(\rho) \prod_{i=k+1}^{m} \left(m_{i,\rho(i)} \right) \right] \left[\sum_{\delta \in S_k} sig(\delta) \prod_{i=1}^{k} m_{i,\delta(i)} \right]$$

$$= \det(A) \cdot \det(B). \quad \blacksquare$$