ALGEO - H3.

1) $V_1 = \{x+y+z=0,\ x-y=0\}$. $V_2 = L(\vec{w_1}=(1,0,1),\ \vec{w_2}=(1,1,0))$

Proyección sobre V_1 en la dirección de V_2: (P_1)

$V_1 = L((1,1,-2))$. $(1,1,-2) = \vec{w_3}$

Tenemos la base: $\beta = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$.

Todo vector en $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = \alpha_1\vec{w_1} + \alpha_2\vec{w_2} + \alpha_3\vec{w_3}$.

En la base β: $P_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_\beta \longmapsto (0,0,\alpha_3)_\beta \in V_1$$

$$P_1(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \xrightarrow[C^{-1}]{Id} (\mathbb{R}^3, \beta) \xrightarrow[P_1(\beta)]{P_1} (\mathbb{R}^3, \beta) \xrightarrow[C]{Id} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & +1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

$$P_1(\mathcal{C}) = C\,P_1(\beta)\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x,y,z)_{\mathcal{C}} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2},\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2},\ -x+y+z\right).}$$

$P_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_\beta \longmapsto (\alpha_1,\alpha_2,0) \Rightarrow P_2(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_2(\mathcal{C}) = C\,P_2(\beta)\cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x,y,z)_{\mathcal{C}} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2},\ \frac{-x}{2} + \frac{3y}{2} + \frac{z}{2},\ x-y\right)}$$

2) $L(v_1=(1,1,-1,0),\ (0,0,2,1)=v_2) = W.$

$W^{\perp} = \{\ x+y-z=0,\ 2z+t=0\}$

$P_W\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(a,b,c,d)=\vec{x} = \vec{v_W} + \vec{v_{W^\perp}} \longmapsto \vec{v_W} = \underbrace{\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}}{} = P_W(\vec{x})$

$\vec{x} - P_W(\vec{x}) = (a,b,c,d) - (\alpha, \alpha, 2\beta-\alpha, \beta) \in W^{\perp}$

$\Rightarrow (a-\alpha, b-\alpha, c+\alpha-2\beta, d-\beta) \in W^{\perp}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-\alpha+b-\alpha-c-\alpha+2\beta = 0 \\ 2c+2\alpha-4\beta+d-\beta = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a+b-c-3\alpha+2\beta=0 \\ 2c+d+2\alpha-5\beta=0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(5\beta-2c-d)$

$a+b-c-\frac{3}{2}(5\beta-2c-d)+2\beta=0$

$\Rightarrow 2a+2b-2c-15\beta+6c+3d+4\beta=0 \Rightarrow \frac{1}{11}(2a+2b+4c+3d)=\beta$

$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{11}(2a+2b+4c+3d)-2c-d\right)$

$= \frac{1}{22}(10a+10b-2c+4d) = \frac{1}{11}(5a+5b-c+2d)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P_W(a,b,c,d) = \big((5a+5b-c+2d),\ (5a+5b-c+2d), \\ \quad (-a-b+9c+4d),\ (2a+2b+4c+3d)\big)\cdot(1/11). \end{array}}$$

3) Proyección ortogonal sobre $\ell = \{x = y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$\ell = L((1,1,1))$. $\ell^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

$$P_\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{v_\ell} = (\lambda, \lambda, \lambda) = P_\ell(\vec{x})$$
$$\vec{x} = \vec{v_\ell} + \vec{v_{\ell^\perp}}$$

$\vec{v_{\ell^\perp}} = \vec{x} - P_\ell(\vec{x}) = (x,y,z) - \lambda(1,1,1) = (x-\lambda, y-\lambda, z-\lambda) \in \ell^\perp$

$\Longrightarrow \quad x+y+z = 3\lambda \Rightarrow \boxed{P_\ell(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+y+z)\cdot(1,1,1)}$

$P_\ell(0,1,2) = (1,1,1)$.

4) Proyección ortogonal sobre $\ell = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$.

$\ell = L((1+i, 0, 1)) = L(\vec{u_1})$.

$\ell^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \cdot \langle (x,y,z), (1+i, 0, 1)\rangle = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : (1-i)x + z = 0\}$.

$(x,y,z) - P_\ell(x,y,z) = (x,y,z) - \lambda(1+i, 0, 1) = (x - \lambda(1+i), y, z-\lambda) \in \ell^\perp$

$\Rightarrow (1-i)(x - \lambda(1+i)) + z - \lambda = 0$

$\Rightarrow (1-i)x + z - \lambda((1-i)(1+i)+1) = 0 \Rightarrow (1-i)x + z - \lambda(3) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}((1-i)x + z)$

$\Rightarrow \boxed{P_\ell(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x + (1+i)z, 0, (1-i)x + z)}$

H3-2

5) $\mathbb{R}^3$. Prod. escalar: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, en la base canónica.

$\overbrace{\text{Pr. ortogonal}}^{(P_W)}$ de $(1,1,1)$ sobre $\{y+z=0\} = W$.

$W = L((1,0,0),(0,1,-1))$.

$W^\perp = \{ \underbrace{x+y=0}_{<(x,y,z),(1,0,0)>},\ \underbrace{x-3z=0}_{<(x,y,z),(0,1,-1)>} \}$.

$P_W(1,1,1) \in W$, c.l. de $(1,0,0)$, $(0,1,-1)$

$(1,1,1) - P_W(1,1,1) = (1,1,1) - \overbrace{(\alpha, \beta, -\beta)}^{P_W(1,1,1)} \in W^\perp$

$\Rightarrow (1-\alpha, 1-\beta, 1+\beta) \in W^\perp$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2-\alpha-\beta=0 \\ -2-\alpha-3\beta=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \alpha+\beta=2 \\ \alpha+3\beta=-2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha = 2-\beta \\ \beta=-2, \quad \alpha = 4 \end{matrix}$

$\Rightarrow \boxed{P_W(1,1,1) = (4,-2,2)}$

$(-3, 3, -1)$

6) $V = M_2(\mathbb{C})$, $<A, B> = tr(A\overline{B}^t)$

$\mathcal{B} = \{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$.

$W = L((1,0,0,i) = u_1, u_2 = (0,i,0,0))$.

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W^\perp \Rightarrow <A, u_1> = 0, <A, u_2> = 0$

$\Rightarrow tr\left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right] = tr\left[\begin{pmatrix} x & \circledast \\ \circledast & -ti \end{pmatrix}\right] = x - ti = 0$.

$tr\left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} -iy & 0 \\ -it & 0 \end{pmatrix} = -yi = 0 \Rightarrow y = 0$

$W^\perp = \{ (x,y,z,t)_{\mathcal{B}} \in M_2(\mathbb{C}) : y = 0, x = ti \}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $P_W : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$

$A \longmapsto P_W(A) = \alpha u_1 + \beta u_2$

con $A - P_W(A) = \begin{pmatrix} x-\alpha & y-i\beta \\ z & t-i\alpha \end{pmatrix} \in W^\perp \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} y = i\beta \\ x-\alpha = it+\alpha \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \beta = -iy \\ \alpha = \frac{1}{2}(x-ti) \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow \boxed{P_W\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-ti}{2} & y \\ 0 & \frac{t+xi}{2} \end{pmatrix}}$

7. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

7a) Con $\langle , \rangle$ habitual, $\mathcal{B}_3$ es O.N. entonces la matriz de h^* es la traspuesta de $A = M(h)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = M(h^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

h es autoadjunta.

7b) $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $(y_1, y_2) = \vec{y}$.

$$\langle h(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2), (y_1, y_2) \rangle$$
$$= (x_1 + x_2)y_1 + (2x_1 + 3x_2)(y_1 + y_2)$$
$$(*) \quad = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$$

$$(*) \quad \langle \vec{x}, h^*(\vec{y}) \rangle = \langle (x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta y_2, \gamma y_1 + \lambda y_2) \rangle$$
$$= x_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + (x_1 + x_2)((\alpha + \gamma)y_1 + (\beta + \lambda)y_2)$$
$$= (2\alpha + \gamma)x_1y_1 + (2\beta + \lambda)x_1y_2 +$$
$$+ (\alpha + \gamma)x_2y_1 + (\beta + \lambda)x_2y_2$$

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \gamma \\ 4 = \alpha + \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 = 2\beta + \lambda \\ 3 = \beta + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \beta = -1 \\ \lambda = 4 \end{matrix}$$

$\alpha = -1$, $\gamma = 5$

$$\Rightarrow h^*(x, y) = (-x - y, 5x + 4y).$$

(8) $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,0)\}$. $\mathbb{R}^3=E$ ($\langle,\rangle$ habitual)

$$A(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-4&-5&-6\\4&2&7\\3&5&4\end{pmatrix}$$

$$E_{\mathcal{C}} \xrightarrow[P^{-1}]{Id.} E_{\mathcal{B}} \xrightarrow[A(\mathcal{B})]{A} E_{\mathcal{B}} \xrightarrow[P]{Id} E_{\mathcal{C}}, \text{ con } P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\1&0&2&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A(\mathcal{C})=P\cdot A(\mathcal{B})\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-5&-6\\4&2&7\\3&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&2&5\\2&5&2\\4&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&+1\\2&0&3\\1&3&1\end{pmatrix}=A(\mathcal{C})^t$$

En la base canónica, $A(\mathcal{C})$, la matriz de A es simétrica.
(b.o.n.) $\Rightarrow$ <u>A es autoadjunta.</u>

---

(9) a) $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ $\to$ Simétrica en la base $\mathcal{C}$. (o.N). por tanto autoadjunta

$|A-\lambda I|=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3$, $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1$ ó $\lambda_2=3$

$E(\lambda_1)=Ker(A-I)=L((1,-1))=L(\vec{u}_1=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}))$. $A(\vec{u}_1)=\vec{u}_1$.

$E(\lambda_2)=Ker(A-3I)=L((1,1))=L(\vec{u}_2=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{+1}{\sqrt2}))$. $A(\vec{u}_2)=3\vec{u}_2$

Base de Jordan: $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2),\vec{u}_2=(1/\sqrt2,1/\sqrt2)\}$ ortonormal.

$J=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$. $P=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. $A=P\cdot J\cdot P^{-1}$

9b) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. (A autoadjunta, su matriz es simétrica en una base ortonormal).

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2-(-3\lambda)=-\lambda^3+3\lambda+2.$$

$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \underset{\text{doble}}{\lambda_1=-1}$ ó $\lambda_2=2$

$$E(-1)=\mathrm{Ker}(A+I)=L(\overbrace{(1,-1,0),(1,1,-2)}^{(\perp)})=$$
$$=L(\vec{u_1}=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2,0),\ \vec{u_2}=(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6))$$

$A(\vec{u_1})=-\vec{u_1}$, $A(\vec{u_2})=-\vec{u_2}$

$$E(2)=\mathrm{Ker}(A-2I)=L((1,1,1))=L(\vec{u_3}=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3)).$$

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$A(\vec{u_3})=2\vec{u_3}$. $\mathcal{B}=\{\vec{u_1}=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2,0),\ \vec{u_2}=(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6),\ \vec{u_3}=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3)\}$ base de Jordan, ortonormal.

$$J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

---

(10)

$V=M_2(\mathbb{R})$. $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^t)$. $f:V\to V$, $A\mapsto A^t$

$\langle A,f(B)\rangle=\mathrm{tr}(AB^{tt})=\mathrm{tr}(AB)$

$\langle f(A),B\rangle=\mathrm{tr}(A^tB^t)=\mathrm{tr}((A^tB^t)^t)=\mathrm{tr}(BA)=\mathrm{tr}(AB)=\langle A,f(B)\rangle$

f es autoadjunta $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ b. on. en la que $M_{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal.

Consideremos: $\mathcal{C}=\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$

$$\left\{\begin{array}{l}e_1\xmapsto{f}e_1\\ e_2\mapsto e_3\\ e_3\mapsto e_2\\ e_4\mapsto e_4\end{array}\right\}\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=A,\ \cancel{|A-\lambda I|=\lambda^2\ldots=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)}$$

$\cancel{\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1}$

~~E(0) = Ker~~

$$|A-\lambda I| = (\lambda-1)^2(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^3(\lambda+1). \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$$
(triple)

$$E(-1) = \mathrm{Ker}(A+I) = L((0,1,-1,0)) = L\left(u_1 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\right).$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad f(u_1) = -u_1$$

$$E(1) = \mathrm{Ker}(A-I) = L(\underbrace{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)}_{\text{ya ortogonales}})$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \ \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \ \|e_4\|^2 = 1$$

$$\Rightarrow E(1) = L\left(u_2 = (1,0,0,0), u_3 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1/\sqrt{2}, 0), u_4 = (0,0,0,1)\right)$$

$f(u_2) = u_2$
$f(u_3) = u_3$
$f(u_4) = u_4$.

$$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

base de Jordan ortonormal

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

M3-4

11. Sea V un espacio vectorial euclídeo o hermítico de dimensión finita y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) ${I_V}^* = I_V$;

b) $(f^*)^* = f$;

c) $(f+g)^* = f^* + g^*$;

d) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

e) Si f es biyectiva, entonces $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$;

g) $(\text{Ker} f)^\perp = \text{Im}(f^*)$.

a) $\forall x, y \in V, \quad \langle x, y \rangle = \langle I_V(x), y \rangle = \langle x, I_V(y) \rangle$

$\Rightarrow \quad I_V^* = I_V.$

b) $\forall x, y \in V, \; f \in End(V),$

$\langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f^{**}(y) \rangle$

(def. Adjunta)

$\Rightarrow \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle x, f^{**}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V, \; f \in End(V)$

$\Rightarrow \langle x, f(y) - f^{**}(y) \rangle = 0 \quad \forall x, y \in V, \; f \in End(V).$

$\Rightarrow \| f(y) - f^{**}(y) \| = 0 \quad \forall y \in V, \; f \in End(V)$

$\Rightarrow \quad f = (f^*)^* \quad \forall f \in End(V).$

c) $\forall x, y \in V, \forall f, g \in End(V):$

$\langle (f+g)(x), y \rangle = \langle x, (f+g)^*(y) \rangle$

$= \langle f(x), y \rangle + \langle g(x), y \rangle$

$= \langle x, f^*(y) \rangle + \langle x, g^*(y) \rangle = \langle x, (f^* + g^*)(y) \rangle$

$(f+g)^* = f^* + g^*$

d) Sean $x, y \in V$, $f, g \in End(V)$:

$$<(f \circ g)(x), y> = <f(g(x)), y> = <g(x), f^*(y)> =$$

$$= <x, g^*(f^*(y))> = <x, (g^* \circ f^*)(y)>$$

$\Rightarrow (f \circ g)^* = (g^*) \circ (f^*)$.

e) Sean $x, y \in V$, $f \in End(V)$ BIYECTIVA.

$\Rightarrow \exists f^{-1} \in End(V)$ tq:

$$(f \circ f^{-1}) = I_V$$

$$(f \circ f^{-1})^* = I_V^* = I = \underbrace{(f^{-1})^* \circ f^*}$$

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

f) $(Im\ f)^{\perp} = Ker(f^*)$

$(\subseteq)$ Sea $x \in (Im\ f)^{\perp} \Rightarrow \forall y \in V$, $f(y) \perp x$.

$$\Rightarrow <f(y), x> = 0 = \underbrace{<y, f^*(x)> \quad (\forall y \in V)}$$

Si $y = f^*(x) \Rightarrow \|f^*(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f^*(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f^*)$.

$(\supseteq)$ Sea $x \in Ker(f^*) \Rightarrow f^*(x) = 0 \Rightarrow \forall y \in V$ $<f^*(x), y> =$

$= 0 = <x, f(y)> \Rightarrow x \perp f(y)$ $\forall y \in V$

$\Rightarrow x \in (Im\ f)^{\perp}$

g) $(\ker f)^{\perp} = \operatorname{Im} f^*$

Por (f): Sabemos ya que $\forall g \in \operatorname{End}(V)\ (\operatorname{Im} g)^{\perp} = \ker(g^*)$

Sea $g = f^* \Rightarrow (\operatorname{Im}(f^*))^{\perp} = \ker(f^{**}) = \ker f$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f^*)^{\perp\perp} = (\ker f)^{\perp}$

$\Rightarrow (\ker f)^{\perp} = \operatorname{Im}(f^*).$

12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio Ker P es la *dirección de la proyección* y el subespacio Im P es el *subespacio sobre el que se proyecta.*

a) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

b) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

c) Si V es euclídeo o hermítico, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\text{Im}P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con $\text{Im } P = W$. Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

d) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba que* $\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv\rangle$.

a) Si $x \in \text{Im}(P) \Rightarrow \exists y \in V$ tq $P(y) = x$,
$(x \neq 0)$

1. $\Rightarrow P(x) = P^2(y) = P(y) = x \neq 0$
$\Rightarrow x \notin \text{Ker}(P)$.

2. Si $x \in \text{Ker}(P) \Rightarrow$ $(x \neq 0)$
$$\left[\begin{array}{l} \text{Supongamos } x \in \text{Im}(P) \\ \Rightarrow \exists y \text{ tq } P(y) = x \Rightarrow P(x) = P^2(y) = P(y) = x \neq 0 \\ \Rightarrow x \notin \text{Ker}(P) \quad \# \end{array}\right.$$

$x \notin \text{Im}(P)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Im}(P) \cap \text{Ker}(P) = \{\vec{0}\}. \\ \dim(\text{Im } P) + \dim(\text{Ker } P) = \dim V \end{array}\right\} \underline{V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P.}$$

b) Podemos tomar una base de $\text{Im}(P)$:

$B_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ y otra de $\text{Ker}(P)$:

$B_2 = \{e_{r+1}, \dots, e_n\}$. $B = B_1 \cup B_2$ base de V.

~~Def $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^t \cdot I_V \cdot \vec{y}$~~

~~Con $\vec{x}, \vec{y}$ en sus coord. en la base $\mathcal{B}$.~~
~~Por def. $\mathcal{B}$ es una base ortonormal.~~

La matriz de P en la base $\mathcal{B}$:

$$M(P) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right) = \cancel{M(\mathcal{B})}$$

Matriz Diagonal.

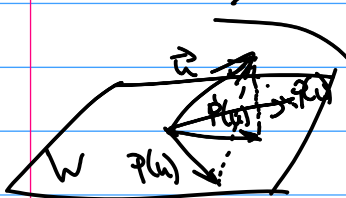
~~Como la matriz de P en una base O.N. es simétrica, P es autoadjunta $\Rightarrow$ diagonalizable.~~

c) Si V es euclídeo o hermítico, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\mathrm{Im}P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con $\mathrm{Im}\ P = W$. Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

c) Sea $P \in X = \{P: V \to V : \mathrm{Im} P = W\}$, $W \subset V$ (s.v.)

Si $u \in V \Rightarrow \|u - P(u)\|^2 = \|T(u) + u' - P(u)\|^2 =$



$(u = T(u) + u',\ u' \in \ker T)$ $\quad u' \perp \overset{W}{\overset{\cup}{(T(u)-P(u))}}$

$= \|T(u) - P(u)\|^2 + \|u'\|^2 \geq \|u'\|^2 =$

$= \|u - T(u)\|^2$

$$\Rightarrow \min_{P \in X} (\|u - P(u)\|) \geq \|u - T(u)\|.$$