

Hoja 2

Límites y continuidad de funciones de varias variables

1.- Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} (a) f(x, y) = x + y - 2 & (b) f(x, y) = x^2 + 4y^2 & (c) f(x, y) = -x^2 y^2 \\ (d) f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} & (e) f(x, y) = \max\{|x|, |y|\} & (f) f(x, y) = \cos^2(x^2 + y^2) \end{array}$$

2.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x, y, z) = x^2 + y^2. & (b) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2. \\ (c) f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2). & (d) f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z. \end{array}$$

3.- Para cada una de las funciones dadas, se pide determinar su dominio (es decir, el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde está definida).

$$(a) f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (b) f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y)}{x^2 - y}. \quad (c) f(x, y) = \frac{\log(x - y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

4.- Halla razonadamente los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 \sin y^2 + y^2 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{4xy}{5x^2 + 3y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

5.- ¿Cuál de los siguientes límites existe?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{5x^2 + 3y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos \frac{4xy}{5x^2 + 3y^2}.$$

6.- Sea

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

definida para los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

7.- Sea $f(x, y)$ definida mediante

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

en los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

y que no existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y}, & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

9.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$$(a) f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}. \quad (b) f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}. \quad (c) f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

10.- Se considera la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

¿Es f continua en $(1, 0)$?

11.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{7xy}{2x^2 + 5y^2}, \quad h(x, y) = \frac{1}{\log \sqrt{x^2 + y^2}}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

12.- Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ se define

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que f sea continua en $(0, 0)$?

13.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \geq x^2, \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y) \rightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x, y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

14.- Demuéstrese que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 1$. (Sugerencia. Obsérvese que $0 \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$.)

15.- Utilizando razonamientos con funciones continuas, demuestra que los siguientes conjuntos son cerrados:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 6y^2 = 30\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(x + y)\}. \end{aligned}$$

Demuestra también que los siguientes son abiertos:

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^6 + 2y^2 + z^4 < 7\}, \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, \exp(x^2 + y^2 - 5) < e\}. \end{aligned}$$