4 Métricas y otros campos

Dada una superficie y un punto en ella, el plano tangente vectorial es, como su nombre indica, un espacio vectorial (de dimensión 2). Por lo tanto *todas* las nociones del Álgebra lineal se le aplican. Aquí vamos a establecer nombres y notaciones convenientes para los objetos que resultan, de modo que sea fácil manipularlos.

4.1 Diferenciales

Definición 51. *Sea S superficie regular en el espacio. Una aplicación $h : S \to \cdots$, de la superficie a algún sitio, es* ***suave*** *si depende suavemente de los parámetros. Esto quiere decir que, dada una parametrización regular $\Phi(u,v)$ para S, la compuesta $h \circ \Phi(u,v)$ sea función suave de (u,v). Esta condición se conserva al reparametrizar Φ por cualquier difeomorfismo entre abiertos del plano de parámetros, luego es una propiedad que sólo depende de h y S.*

Dado un punto $\mathbf{p} \in S$, los vectores tangentes $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ permiten derivar las aplicaciones suaves:

Definición 52. *La* ***derivada de*** *h* ***en*** $\mathbf{p}$ ***según*** $\mathbf{v}$ *es*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} h\big(\alpha(t)\big)$$

para cualquier camino $\alpha(t)$ en S que en el instante $t = t_0$ pasa por $\mathbf{p}$ con velocidad $\mathbf{v}$.

Teorema 53. *Esa derivada sólo depende de $h, \mathbf{p}, \mathbf{v}$, no del camino $\alpha(t)$ que elijamos. Además depende linealmente de $\mathbf{v}$.*

Demostración. Elegimos una parametrización regular $\Phi(u,v)$ de S con $\mathbf{p} = \Phi(u_0,v_0)$. El vector $\mathbf{v}$, tangente a S en $\mathbf{p}$, se escribe como $\mathbf{v} = a\Phi_u(u_0,v_0) + b\Phi_v(u_0,v_0)$. Los números a,b están determinados por $\mathbf{v}$, de quien dependen linealmente. Las curvas paramétricas $\alpha(t)$ en S, con $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$, son todas de la forma $\alpha(t) \equiv \Phi\big(u(t)\,,\,v(t)\big)$ con $u(t), v(t)$ dos funciones tales que $\big(u(t_0)\,,\,v(t_0)\big) = (u_0\,,\,v_0)$ y $\big(u'(t_0)\,,\,v'(t_0)\big) = (a\,,\,b)$, luego para todas esas curvas paramétricas se tiene

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} h\big(\alpha(t)\big) \;=\; a \cdot (h\circ\Phi)_u(u_0,v_0) + b \cdot (h\circ\Phi)_v(u_0,v_0)\,.$$

Fijada h y fijado el punto $\mathbf{p}$ de la superficie, esta fórmula nos da la derivada como función lineal del par (a,b), luego como función lineal de $\mathbf{v}$. □

Escribiremos h_u para $(h\circ\Phi)_u$ y h_v para $(h\circ\Phi)_v$.

Definición 54. *La* ***diferencial de*** *h* ***en*** $\mathbf{p}$ *es la función lineal $(dh)_{\mathbf{p}}$ que lleva cada vector tangente $\mathbf{v}$ a la derivada de h según $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{p} = \Phi(u_0,v_0)$ también la escribiremos como $(dh)_{(u_0,v_0)}$.*

Acabamos de ver que $(dh)_{\mathbf{p}}\big(a\Phi_u(u_0,v_0) + b\Phi_v(u_0,v_0)\big) = a\,h_u|_{(u_0,v_0)} + b\,h_v|_{(u_0,v_0)}$, es decir:

La diferencial $(dh)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \cdots$ es la aplicación lineal cuyo efecto sobre la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ es el siguiente: $$\Phi_u \longmapsto h_u \quad , \quad \Phi_v \longmapsto h_v \ , \ \big(\text{todo evaluado en } (u_0,v_0)\big)\,.$$

Si $h : S \to \mathbb{V}$, con $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, entonces $(dh)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{V}$. Un caso particular importante es el de $h : S \to \mathbb{R}$. Entonces $(dh)_{\mathbf{p}}$ es una **forma lineal** $(dh)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$.

Si $h : S \to S'$, con S' una superficie, entonces

$$(dh)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to T_{h(\mathbf{p})}S'\,,$$

porque si $\alpha(t)$ es cualquier camino en S con $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$ entonces $(dh)_{\mathbf{p}}\big(\alpha'(t_0)\big) = \big(h \circ \alpha(t)\big)'(t_0)$ y $h \circ \alpha(t)$ es un camino en S' que pasa por $h(\mathbf{p})$ en el instante $t = t_0$. Si $\Psi(\lambda, \mu)$ es una parametrización para S', tenemos un par de funciones suaves $\lambda(u,v), \mu(u,v)$ tales que

$$h\big(\Phi(u,v)\big) \equiv \Psi\big(\lambda(u,v), \mu(u,v)\big).$$

Entonces la matriz de $(dh)_{\mathbf{p}}$, usando la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ en salida y la $\{\Psi_\lambda, \Psi_\mu\}$ en llegada, es la jacobiana

$$D \begin{bmatrix} \lambda(u,v) \\ \mu(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_u & \lambda_v \\ \mu_u & \mu_v \end{bmatrix}.$$

Si además $(dh)_{\mathbf{p}}$ tiene rango 2, entonces esa jacobiana es invertible y la función $\big(\lambda(u,v), \mu(u,v)\big)$ es un difeomorfismo de un entorno de (u_0, v_0) a un entorno de (λ_0, μ_0). Esto se transmite a h, que resulta ser un difeomorfismo de un trozo de S alrededor de $\mathbf{p}$ a un trozo de S' alrededor de $h(\mathbf{p})$.

La diferencial se calcula por medio de las derivadas parciales de h y es una construcción local: está determinada por lo que vale h en un trozo de superficie, arbitrariamente pequeño, alrededor de $\mathbf{p}$. Nos podemos fijar en un trocito $S_1 \subset S$ parametrizado bicontinuamente por $\Phi(u,v)$, y entonces tenemos bien definidas las **funciones coordenadas curvilíneas** $u, v : S_1 \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$\Phi(u,v) \xmapsto{u} u \quad , \quad \Phi(u,v) \xmapsto{v} v.$$

Las líneas coordenadas $\Phi(u, \mathrm{cte}_2)$ son las curvas de nivel (en S_1) de la función coordenada v. Las líneas coordenadas $\Phi(\mathrm{cte}_1, v)$ son las curvas de nivel en S_1 de la función coordenada u. El efecto sobre el vector tangente general de las diferenciales de las funciones coordenadas curvilíneas es el siguiente:

$$(du)_{\mathbf{p}}\big(a\Phi_u + b\Phi_v\big) = a \quad , \quad (dv)_{\mathbf{p}}\big(a\Phi_u + b\Phi_v\big) = b \ , \ \big(\Phi_u \text{ y } \Phi_v \text{ evaluadas en } (u_0, v_0)\big).$$

Así, pues

Las formas lineales

$$(du)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R} \quad , \quad (dv)_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R},$$

son las **funciones coordenadas lineales** respecto de la base $\{\Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0)\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$.

Una forma lineal cualquiera $\ell_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ se escribe:

$$\ell_{\mathbf{p}} \equiv c_1 (du)_{\mathbf{p}} + c_2 (dv)_{\mathbf{p}},$$

con constantes c_1, c_2 únicas, que son $c_1 = \ell_{\mathbf{p}}(\Phi_u)$ y $c_2 = \ell_{\mathbf{p}}(\Phi_v)$.

4.2 Campos

En este apartado S es la superficie imagen de una parametrización regular $\Phi(u,v)$. Al igual que hicimos para la normal unitaria $N(u,v)$ en el apartado 1.9, todos los campos definidos en este apartado serán funciones de los parámetros (u,v). Si Φ es bicontinua, podemos considerarlos función del punto en la superficie.

Campo escalar. Es, sencillamente, una función $h(u,v)$ con valores en $\mathbb{R}$. Si Φ es bicontinua entonces podemos reconvertirla a una $h : S \to \mathbb{R}$.

Campo de vectores tangentes. Es un objeto $\mathbf{V}$ que a cada valor (u,v) le asocia un vector $\mathbf{V}(u,v) \in T_{(u,v)}\Phi$. Si Φ es bicontinua, entonces podemos reconvertirlo a un objeto que a cada $\mathbf{p} \in S$ le asocia un vector $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$.
Caso particular son los campos Φ_u, Φ_v, que en cada valor (u,v) dan una base del plano $T_{(u,v)}\Phi$. Todo otro campo de vectores tangentes se escribe:

$$\mathbf{V} \equiv h_1(u,v)\,\Phi_u + h_2(u,v)\,\Phi_v,$$

para dos únicas funciones h_1, h_2.

Campo de formas lineales. También llamado **forma de Pfaff** o **1-forma,** es un objeto que a cada valor (u,v) le asocia una forma lineal $\ell_{(u,v)} : T_{(u,v)}\Phi \to \mathbb{R}$. Si Φ es bicontinua podemos reescribirlo como un objeto que a cada $\mathbf{p} \in S$ asocia una forma lineal $\ell_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$. Caso particular son las **formas de Pfaff exactas:** los campos dh formados por las diferenciales de una función escalar $h(u,v)$. Entonces los campos du y dv dan para cada valor (u,v) una base del espacio de formas lineales $T_{(u,v)}\Phi \to \mathbb{R}$. Todo otro campo de formas lineales se expresa:

$$\ell \equiv h_1(u,v)\,du + h_2(u,v)\,dv\,,$$

para dos únicas funciones h_1, h_2. Esto quiere decir que para cada valor (u_0, v_0) es:

$$\ell_{(u_0,v_0)} \equiv h_1(u_0,v_0)\cdot(du)_{(u_0,v_0)} + h_2(u_0,v_0)\cdot(dv)_{(u_0,v_0)}\,,$$

y el efecto del campo ℓ sobre el vector tangente general en el punto general es el siguiente:

$$\ell\big(a\Phi_u + b\Phi_v\big) \equiv h_1(u,v)\,a + h_2(u,v)\,b\,,$$

En particular $h_1 \equiv \ell(\Phi_u)$ y $h_2 \equiv \ell(\Phi_v)$.

Importante: no toda forma de Pfaff es exacta; si $a(u,v)\,du + b(u,v)\,dv$ lo es, entonces $a_v \equiv b_u$.

Campo de rectas vectoriales, o de direcciones tangentes. Es un objeto L que a cada valor (u,v) le asocia un subespacio vectorial unidimensional $L_{(u,v)} \subset T_{(u,v)}\Phi$, o sea, una **dirección tangente** en el valor (u,v). Una curva regular $\alpha(t) \equiv \Phi\big(u(t),v(t)\big)$ es una **línea integral** de L si $\alpha'(t) \in L_{(u(t),v(t))}$ para todo t. Si Φ es bicontinua podemos rescribir ℓ como un objeto que a cada $\mathbf{p} \in S$ asocia una dirección tangente $L_{\mathbf{p}} \subset T_{\mathbf{p}}S$ y las líneas integrales son las que cumplen $\alpha'(t) \in L_{\alpha(t)}$ para todo t.

Podemos definir un campo de rectas vectoriales dando un campo de vectores tangentes nunca nulo $\mathbf{V}$ y haciendo $L_{(u,v)} = \langle \mathbf{V}(u,v) \rangle$ para todo (u,v). También podemos definir L a partir de un campo de formas lineales ℓ nunca nulo, haciendo $L_{(u,v)} = \ker\big(\ell_{(u,v)}\big)$ para todo valor (u,v). Si podemos hallar un **factor integrante,** es decir una función φ que no se anula y tal que $\varphi\,\ell \equiv dh$ es exacta, entonces la líneas integrales vienen dadas como los *niveles* $\{h = \text{cte}\} \subset S$ de h en la superficie.

Forma cuadrática. Es una función $q(\cdot) : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ que, representada en coordenadas lineales, es un *polinomio homogéneo de segundo grado.* Es decir que existen tres números c_1, c_2, c_3 tales que

$$q\big(a\Phi_u + b\Phi_v\big) \equiv c_1\,a^2 + 2\,c_2\,ab + c_3\,b^2\,,$$

lo cual podemos escribir así:

$$q(\cdot) \equiv c_1\,(du)_{\mathbf{p}}^2 + 2\,c_2\,(du)_{\mathbf{p}}(dv)_{\mathbf{p}} + c_3\,(dv)_{\mathbf{p}}^2\,. \tag{12}$$

Forma bilineal. Es una función $\mathscr{B}(\cdot,\cdot) : T_{\mathbf{p}}S \times T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ que es lineal en cada uno de sus dos argumentos. *Recuerda:* mientras que una forma cuadrática es función de un solo vector: $q(\mathbf{v})$, una forma bilineal es función de dos variables vector: $\mathscr{B}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ (tangentes en un *mismo* punto $\mathbf{p}$).

Definición 55. *Dada una forma cuadrática $q(\cdot)$, su* ***forma bilineal polar*** *es la única forma bilineal $q(\cdot,\cdot)$ cumpliendo las dos condiciones siguientes:*

1. *Simétrica: $q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = q(\mathbf{w},\mathbf{v})$,*
2. *$q(\mathbf{v},\mathbf{v}) = q(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$,*

Para la forma cuadrática descrita en la fórmula (12), la forma bilineal polar está dada por:

$$\begin{aligned} q(\Phi_u\,,\Phi_u) &= c_1 \\ q(\Phi_u\,,\Phi_v) &= q(\Phi_v\,,\Phi_u) = c_2 \\ q(\Phi_v\,,\Phi_v) &= c_3 \end{aligned}$$

es decir que la matriz de $q(\cdot,\cdot)$ en la base $\{\Phi_u,\Phi_v\}$ es $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$.

Campo de formas cuadráticas. Es un objeto $Q(\cdot)$ que asocia a cada valor (u,v) una forma cuadrática $Q_{(u,v)}(\cdot): T_{(u,v)}\Phi \to \mathbb{R}$. Si Φ es bicontinua podemos reconvertirlo en un objeto que a cada $\mathbf{p}\in S$ asocia una forma cuadrática $Q_{\mathbf{p}}(\cdot): T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$.
Al multiplicar dos campos de formas lineales, resulta un campo $\ell_1\ell_2$ de formas cuadráticas. En particular $(du)^2$, $2\,du\,dv$ y $(dv)^2$ son campos de este tipo. Todo otro campo de formas cuadráticas se escribe:

$$Q(\cdot) \;\equiv\; h_1(u,v)\,(du)^2 + 2\,h_2(u,v)\,du\,dv + h_3(u,v)\,(dv)^2\,,$$

para tres únicas funciones h_1,h_2,h_3. El efecto de esta $Q(\cdot)$ sobre el vector tangente general en el punto general $\Phi(u,v)$ es:

$$Q_{(u,v)}\big(a\,\Phi_u + b\,\Phi_v\big) \;\equiv\; h_1(u,v)\,a^2 + 2\,h_2(u,v)\,ab + h_3(u,v)\,b^2\,,$$

y su **campo de formas bilineales polares,** o **campo polar** $Q(\cdot,\cdot)$ es el campo que asocia a cada valor (u,v) la forma bilineal $Q_{(u,v)}(\cdot,\cdot): T_{(u,v)}\Phi\times T_{(u,v)}\Phi \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned} Q_{(u,v)}(\Phi_u\,,\Phi_u) &= h_1(u,v) \\ Q_{(u,v)}(\Phi_u\,,\Phi_v) &= Q_{(u,v)}(\Phi_v\,,\Phi_u) \;=\; h_2(u,v) \\ Q_{(u,v)}(\Phi_v\,,\Phi_v) &= h_3(u,v)\,. \end{aligned}$$

Utilizaremos *la misma letra* para los dos campos: $Q(\cdot)$ para el cuadrático y $Q(\cdot,\cdot)$ para el polar.

2-forma. También llamada **forma de grado 2,** es un objeto Ω que a cada valor (u,v) le asocia una forma bilineal *antisimétrica* $\Omega_{(u,v)}: T_{(u,v)}\Phi\times T_{(u,v)}\Phi \to \mathbb{R}$. Si Φ es bicontinua podemos reinterpretarlo como un objeto Ω que a cada $\mathbf{p}\in S$ le asocia $\Omega_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}S\times T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$, forma bilineal antisimétrica.
Caso particular de este tipo de objeto es el **producto exterior** $\alpha\wedge\beta$ de dos formas de Pfaff α,β, que actúa sobre una pareja $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{(u,v)}\Phi$ (o bien $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S$) de la manera siguiente:

$$(\alpha\wedge\beta)_{(u,v)}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \alpha_{(u,v)}(\mathbf{v})\,\beta_{(u,v)}(\mathbf{w}) - \alpha_{(u,v)}(\mathbf{w})\,\beta_{(u,v)}(\mathbf{v})\,.$$

Para una 2-forma general Ω, la función escalar $h\equiv\Omega(\Phi_u,\Phi_v)$ permite escribir $\Omega\equiv h\cdot du\wedge dv$.

Campo de endomorfismos. Es un objeto $\mathscr{E}$ que asocia a cada valor (u,v) un endomorfismo $\mathscr{E}_{(u,v)}: T_{(u,v)}\Phi \to T_{(u,v)}\Phi$. Usando la base $\{\Phi_u,\Phi_v\}$ tanto en salida como en llegada, podemos considerar las matrices de los $\mathscr{E}_{(u,v)}$ y juntarlas en una matriz función $\mathbf{M}(u,v)_{2\times 2}$. Si Φ es bicontinua podemos reescribir $\mathscr{E}$ como un objeto que a cada $\mathbf{p}\in S$ asocia un endomorfismo $\mathscr{E}_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$, y la matriz como función del punto $\mathbf{M}(\mathbf{p})_{2\times 2}$.

Importante. Nos hemos concentrado en definir esos objetos en superficies porque es en ellas donde resulta más delicado definirlos, ya que *el espacio vectorial $T_{(u,v)}\Phi$ varía al variar* (u,v). Todos esos tipos de campo se definen de manera obvia en abiertos de $\mathbb{R}^n$, donde todo es más sencillo porque el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es el mismo en todos los puntos y lo único que varía de un punto a otro son los coeficientes del objeto.

4.3 Resultados globales 3

Enunciamos aquí un resultado *global* para superficies, conocido como **teorema de la bola peluda.**

Teorema 56. *La esfera no admite ningún campo de vectores tangentes que sea continuo, definido en toda la esfera y distinto de cero en todo punto.*

De hecho, algo un poco más fuerte es verdad: no hay ningún campo de direcciones definido en toda la esfera y continuo.

4.4 Cambio de parámetros

Sean $\Phi(u,v)$ y $\Psi(\tilde{u},\tilde{v})$ dos parametrizaciones regulares para la misma superficie S. Las *expresiones numéricas* para campos que hemos visto en el apartado 4.2 cambian al hacer el cambio de parámetros.
Lo más fácil es cambiar la expresión de un campo de formas, lineales o cuadráticas. Sólo necesitamos *expresar las coordenadas viejas en función de las nuevas* y entonces simplemente se reemplazan u,v por sus nuevas expresiones, tanto en $h_1(u,v),h_2(u,v)$ como en las diferenciales du,dv, se deriva en éstas y se reagrupa.
Para convencerte de lo fácil que es, veamos dos ejemplos con (r,θ) nuevas coordenadas tales que:

$$u \equiv r\cos\theta \quad , \quad u \equiv r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Primer ejemplo. Veamos cómo se expresa entonces $\ell \equiv v\,du - 2\,u\,dv$ en las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} v\,du-2u\,dv &\equiv r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d(r\cos\theta) - 2\,r\cos\theta\, d(r\,\mathrm{sen}\,\theta) \equiv \\ &\equiv r\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos\theta\, dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\,) - 2\,r\cos\theta\,(\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta\,) \equiv \\ &\equiv -r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, dr - r^2\cdot(\mathrm{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta)\, d\theta\,. \end{aligned}$$

Segundo ejemplo. Veamos cómo se expresa $Q_1 \equiv (du)^2 + (dv)^2$ en términos de (r,θ):

$$\begin{aligned} (du)^2+(dv)^2 &\equiv \big(d(r\cos\theta)\big)^2 + \big(d(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\big)^2 \equiv \\ &\equiv (\cos\theta\, dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\,)^2 + (\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta\,)^2 \equiv \\ &\equiv (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)\,(dr)^2 + (-2\,r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\, dr d\theta + \\ &\quad +(\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta)\,(d\theta)^2 \equiv (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2\,, \end{aligned}$$

Para un campo $\mathbf{V}$ de vectores tangentes, tendremos:

$$\mathbf{V} \equiv h_1\,\Phi_u + h_2\,\Phi_v \equiv \tilde{h}_1\,\Psi_{\tilde{u}} + \tilde{h}_2\,\Psi_{\tilde{v}}\,,$$

y el par de funciones $\tilde{h}_1,\tilde{h}_2 : S \to \mathbb{R}$ será diferente del par $h_1,h_2 : S \to \mathbb{R}$. Para hallar $\tilde{h}_1,\tilde{h}_2$ a partir de h_1,h_2 debemos *expresar las coordenadas nuevas en función de las viejas.* Concretamente, si $\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v)$ son las funciones tales que $\Phi(u,v) \equiv \Psi\big(\tilde{u}(u,v)\,,\,\tilde{v}(u,v)\big)$ entonces la regla de la cadena da las siguientes fórmulas para las derivadas de Φ:

$$\Phi_u \equiv \tilde{u}_u\,\Psi_{\tilde{u}} + \tilde{v}_u\,\Psi_{\tilde{v}} \quad , \quad \Phi_v \equiv \tilde{u}_v\,\Psi_{\tilde{u}} + \tilde{v}_v\,\Psi_{\tilde{v}}\,,$$

y esto permite expresar $h_1\,\Phi_u + h_2\,\Phi_v$ como combinación lineal de $\Psi_{\tilde{u}},\Psi_{\tilde{v}}$.

> Al ir cambiando de parámetros, la expresión numérica de un campo va cambiando. Pero el campo es siempre el mismo. Por lo tanto, debes distinguir entre el campo y las funciones que lo representan en unos parámetros. Así, un campo de vectores tangentes *no es* un par de funciones. Esta distinción, que no existía en el Cálculo, es imprescindible aquí. Del mismo modo un campo de formas cuadráticas *no es* una terna de funciones, etc.

4.5 Campos métricos

Definición 57. *En una superficie S, una **métrica de Riemann** es un campo Q que asocia a cada punto* $\mathbf{p} \in S$ *una forma cuadrática* $Q_{\mathbf{p}}(\cdot) : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ *definida positiva y que depende suavemente de* $\mathbf{p}$.

Un abierto del plano $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un caso particular de superficie y nos ofrece una simplificación: los planos tangentes $T_{\mathbf{p}}U$ se identifican todos con $\mathbb{R}^2$ y entonces Q puede describirse como una aplicación suave de puntos de U a formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. Pero seguiremos escribiéndola en términos de $(dx)^2$, $2\,dxdy$, $(dy)^2$ para indicar que los vectores sobre los que actúa son velocidades de caminos en U. Esto se generaliza de una manera obvia a abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Toda métrica de Riemann determina un **campo polar** $Q(\cdot,\cdot)$ de formas bilineales simétricas. Esto permite ver cada métrica de Riemann como un **campo de productos escalares.**

Si S es una superficie con una parametrización regular $\Phi(u,v)$, entonces cada plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ tiene la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, respecto de la cual la forma polar $Q_{\mathbf{p}}(\cdot,\cdot)$ tiene una matriz $\begin{bmatrix} A_{\mathbf{p}} & B_{\mathbf{p}} \\ B_{\mathbf{p}} & C_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}$ y así Q determina tres funciones $A,B,C : S \to \mathbb{R}$ definidas como sigue:

$$\begin{aligned} A &\equiv Q(\Phi_u, \Phi_u) \\ B &\equiv Q(\Phi_u, \Phi_v) \equiv Q(\Phi_v, \Phi_u) \\ C &\equiv Q(\Phi_v, \Phi_v) \end{aligned}$$

Como campo de formas cuadráticas, tenemos (atención al factor 2):

$$Q(\cdot) \equiv A\,(du)^2 + 2B\,du dv + C\,(dv)^2 .$$

Para dar una métrica de Riemann en un abierto U del plano xy, basta dar tres funciones $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$: $U \to \mathbb{R}$ tales que la matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ sea definida positiva en todo punto de U. Entonces la siguiente expresión

$$Q(\cdot) \equiv A(x,y)\,(dx)^2 + 2B(x,y)\,dxdy + C(x,y)\,(dy)^2 ,$$

define la métrica de Riemann en U como campo de formas cuadráticas. El campo polar $Q(\cdot,\cdot)$ actúa de la siguiente manera sobre cada par de velocidades $(a_1,a_2),(b_1,b_2)$:

$$Q_{(x,y)}\big((a_1,a_2)\,,(b_1,b_2)\big) \equiv [\,a_1 \;\; a_2\,] \begin{bmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} ,$$

lo que equivale a:

$$\begin{aligned} Q_{(x,y)}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &\equiv A(x,y) \\ Q_{(x,y)}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &\equiv B(x,y) \equiv Q(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ Q_{(x,y)}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &\equiv C(x,y) \end{aligned}$$

En cuanto a métricas de Riemann en un abierto de $\mathbb{R}^n$, baste decir aquí que la métrica estándar tiene la siguiente expresión:

$$(dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2 ,$$

en particular $(du)^2 + (dv)^2$ es la **métrica Euclídea** del plano $\mathbb{R}^2_{uv}$.

Definición 58. *Cada métrica de Riemann define una* ***longitud de vectores:*** $\|\mathbf{v}\|_Q = \sqrt{Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})}$ *para todo* $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$. *Define también un* ***ángulo entre vectores*** $\angle_Q$ *de la manera siguiente:*

$$\text{para } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S, \quad \cos\angle_Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v},\mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\|_Q \cdot \|\mathbf{w}\|_Q} = \frac{Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v},\mathbf{w})}{\sqrt{Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})} \cdot \sqrt{Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})}} .$$

Dado un camino $\alpha(t) : J \to S$, *su* ***rapidez Riemanniana*** *es* $\|\alpha'(t)\|_Q = \sqrt{Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big)}$ *y su* ***longitud Riemanniana*** *es la integral de la rapidez:*

$$\text{longitud}_Q[\alpha] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t\in J} \|\alpha'(t)\|_Q\, dt = \int_{t\in J} \sqrt{Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big)}\, dt .$$

La longitud Riemanniana no cambia al reparametizar la curva α. Más aún, si $\phi : \widetilde{J} \to J$ es monótona y suprayectiva entonces α y $\alpha \circ \phi$ tienen igual longitud, aunque ϕ no sea inyectiva.

Definimos un **parámetro longitud (Riemanniana) de arco** $s(t)$ igual que hicimos en el apartado 1.5: cualquier integral indefinida de la rapidez Riemanniana. Una parametrización $\alpha(s)$ es por longitud Riemanniana de arco si y sólo si $Q_{\alpha(t)}\big(\alpha'(s)\big) \equiv 1$. Al igual que vimos al final del apartado 1.5, un camino

$\alpha(t)$ tiene rapidez Riemanniana constante c si y sólo si el parámetro t es igual a $1/c$ veces una longitud Riemanniana de arco.

Una métrica de Riemann dota a la superficie de una noción de **área** y de una noción de **integral respecto de este área.** Si en unas coordenadas (u,v) es $Q \equiv A(du)^2 + 2B\,du dv + C(dv)^2$, entonces la integral de cualquier función $a : S \to \mathbb{R}$ se define como la siguiente integral doble:

$$\int_S a\, d\,\text{área}_Q \;=\; \iint a\sqrt{AC - B^2}\, du dv\,.$$

Veamos que sólo depende de a y la métrica Q, y no de las coordenadas (u,v) que se usen para evaluarla. Sea $\Psi(\tilde{u},\tilde{v})$ una reparametrización de $\Phi(u,v)$, sea $Q \equiv \widetilde{A}\,(d\tilde{u})^2 + 2\widetilde{B}\,d\tilde{u}d\tilde{v} + \widetilde{C}\,(d\tilde{v})^2$ la expresión de la métrica en las nuevas coordenadas $(\tilde{u},\tilde{v})$ y $\sigma(\tilde{u},\tilde{v}) \equiv \big(u(\tilde{u},\tilde{v}),\, v(\tilde{u},\tilde{v})\big)$ la función tal que el punto general $\mathbf{p} \in S$ viene dado por $\mathbf{p} = \Psi(\tilde{u},\tilde{v}) \equiv \Phi\big(u(\tilde{u},\tilde{v}),\, v(\tilde{u},\tilde{v})\big)$. De las igualdades

$$\Psi_{\tilde{u}} \;\equiv\; \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\Phi_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\Phi_v \quad , \quad \Psi_{\tilde{v}} \;\equiv\; \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\Phi_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\Phi_v\,,$$

obtenemos, para $b,c \in \mathbb{R}$ cualesquiera:

$$Q_{\mathbf{p}}\big(b\Psi_{\tilde{u}} + c\Psi_{\tilde{v}}\big) \;=\; [b\;\; c]\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$

y también:

$$Q_{\mathbf{p}}\big(b\Psi_{\tilde{u}} + c\Psi_{\tilde{v}}\big) \;=\; [b\;\; c]\begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{B} & \widetilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$

Al valer las dos expresiones lo mismo para cualesquiera b,c, deducimos igualdad de matrices porque ambas son simétricas:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{B} & \widetilde{C} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix}.$$

Tomando determinantes:

$$\widetilde{A}\widetilde{C} - \widetilde{B}^2 \;\equiv\; \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right)^2 (AC - B^2)\,,$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$ denota el determinante jacobiano del cambio de coordenadas σ. Finalmente, tomando raíces cuadradas obtenemos:

$$\sqrt{\widetilde{A}\widetilde{C} - \widetilde{B}^2} \;\equiv\; \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right| \sqrt{AC - B^2}\,.$$

Por otra parte, usando la fórmula para el cambio de variables en integrales dobles:

$$\iint a\sqrt{\widetilde{A}\widetilde{C} - \widetilde{B}^2}\, d\tilde{u}d\tilde{v} \;=\; \iint a\sqrt{AC - B^2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right| d\tilde{u}d\tilde{v} \;=\; \iint a\sqrt{AC - B^2}\, du dv\,,$$

que nos dice que $\int a\, d\,\text{área}_Q$ es la misma utilizando las coordenadas $(\tilde{u},\tilde{v})$ o las (u,v).

Por supuesto, si cambiamos la métrica entonces cambia el valor de $\int a\, d\,\text{área}_Q$.

4.6 La primera forma fundamental

Empezamos definiendo la primera forma fundamental de una superficie.

Definición 59. *Dada una superficie S en el espacio, podemos ver sus vectores tangentes como vectores del espacio y utilizar el producto escalar estándar del espacio para multiplicarlos. Esto define para cada punto $\mathbf{p} \in S$ un producto escalar en $T_{\mathbf{p}}S$, y por consiguiente una métrica de Riemann en S que llamamos* ***primera forma fundamental de* S** *y que denotaremos siempre por la letra I.*

Como campo de formas bilineales $I(\cdot,\cdot)$, es $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ para cualesquiera $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S$, vectores tangentes en un mismo punto.
Como campo de formas cuadráticas $I(\cdot)$, es $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ Para todo $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}S$.

Dada una parametrización *regular* $\Phi(u,v)$ de S, denotaremos los coeficientes de la primera forma fundamental por las letras E,F,G, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E & \equiv & \Phi_u\cdot\Phi_u \\ F & \equiv & \Phi_u\cdot\Phi_v \\ G & \equiv & \Phi_v\cdot\Phi_v \end{array}} \tag{13}$$

Entonces:

$$\big(a\,\Phi_u + b\,\Phi_v\big)\cdot\big(a'\,\Phi_u + b'\,\Phi_v\big) \;=\; [\,a\;\;b\,]\begin{bmatrix} E & F \\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' \\ b'\end{bmatrix},$$

o sea que $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G\end{bmatrix}$ es la matriz de $I(\cdot,\cdot)$ respecto de la base $\{\Phi_u,\Phi_v\}$, luego definida positiva en cada punto de la superficie. Como campo de formas cuadráticas, tenemos (atención al factor 2):

$$I(\cdot) \;\equiv\; E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2 .$$

Importante: la primera forma fundamental es sólo una entre las infinitas métricas de Riemann que admite una superficie.

Vamos ahora a introducir una noción sumamente útil: la **primera forma fundamental de una parametrización.** Sea U un dominio en el plano uv y sea $\Phi(u,v)\equiv\big(x(u,v)\,,\,y(u,v)\,,\,z(u,v)\big)$ cualquier parametrización con dominio de parámetros U. Definimos tres funciones E_Φ,F_Φ,G_Φ exactamente igual que en las fórmulas del recuadro de arriba, pero *vistas como funciones en el dominio plano U;* ahora vemos u,v como funciones coordenadas (cartesianas) en el dominio plano U y, por lo tanto, vemos $du\,,dv$ como campos de formas lineales en U; finalmente definimos el siguiente *campo de formas cuadráticas en U* (no en la superficie):

$$I_\Phi \overset{\text{def}}{\equiv} E_\Phi\,(du)^2 + 2\,F_\Phi\,du\,dv + G_\Phi\,(dv)^2\,,$$

es decir para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2_{uv}$ es $\big(I_\Phi\big)_{(u,v)}(\mathbf{v}) = (d\Phi)_{(u,v)}(\mathbf{v})\cdot(d\Phi)_{(u,v)}(\mathbf{v})$. Esto resulta muy cómodo, porque I_Φ está bien definida sin importar que se use una aplicación inyectiva o no: aunque Φ defina una superficie con autointersecciones, el campo I_Φ es *suave y univaluado* en todo el dominio plano U, propiedades que perdería si intentásemos verlo como un campo en la imagen $\Phi(U)$. Tampoco hace falta que el rango de Φ sea 2 en todo punto, sólo que si Φ no tiene rango 2 en $(u_0,v_0)\in U$ entonces $(I_\Phi)_{(u_0,v_0)}$ no es definida positiva.

Si Φ tiene rango constante 2 entonces I_Φ es una métrica de Riemann en el dominio plano U.

Más en general, definimos I_ϕ para una aplicación suave $\phi: S\to\mathbb{R}^3$ como el campo de formas cuadráticas en S que tiene el siguiente efecto sobre cada $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}S$: $I_\phi(\mathbf{v}) \overset{\text{def}}{=} (d\phi)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\cdot(d\phi)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$.

El integrando para el área respecto de la primera forma fundamental cumple la siguiente identidad:

$$\sqrt{EG-F^2} \;\equiv\; \|\Phi_u\times\Phi_v\|\,,$$

procedente de la siguiente fórmula para los productos escalar y vectorial habituales en $\mathbb{R}^3$:

$$\|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\| \;=\; \|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|\,\Big|\operatorname{sen}\angle(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\Big| \;=\; \sqrt{(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)-(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)^2}\,.$$

4.7 Isometrías

Definición 60. *Sean $(S,Q),(S',Q')$ superficies dotadas de sendas métricas de Riemann. Una aplicación $h: S \to S'$ es una **isometría local de** (S,Q) **a** (S',Q') si es suave y sus diferenciales conservan el producto escalar.*
Cuando al hablar de isometría local entre dos superficies no se especifica la métrica de alguna de ellas, se sobreentiende que es la primera forma fundamental.
*Una **isometría** es una isometría local que además es biyectiva.*

Esta definición quiere decir lo siguiente. Para todo punto $\mathbf{p} \in S$ y todo par $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$, se cumple la igualdad:

$$Q'_{h(\mathbf{p})}\big((dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\,,\,(dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})\big) \;=\; Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\,.$$

En particular $Q'_{h(\mathbf{p})}\big((dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\big) = Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{p} \in S$ y todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$. Eso implica, en particular, lo siguiente:

Una isometría local trasforma los caminos conservando su longitud.

Criterio general: para saber si $h:(S,Q) \to (S',Q')$ es una isometría local, tomamos una parametrización regular $\Phi(u,v)$ de S y entonces h es una isometría local si y sólo si se cumplen las tres identidades siguientes:

$$\begin{aligned}
Q_{(u,v)}(\Phi_u,\Phi_u) &\equiv Q'_{h(\Phi(u,v))}\big((h\circ\Phi)_u\,,\,(h\circ\Phi)_u\big)\,,\\
Q_{(u,v)}(\Phi_u,\Phi_v) &\equiv Q'_{h(\Phi(u,v))}\big((h\circ\Phi)_u\,,\,(h\circ\Phi)_v\big)\,,\\
Q_{(u,v)}(\Phi_v,\Phi_v) &\equiv Q'_{h(\Phi(u,v))}\big((h\circ\Phi)_v\,,\,(h\circ\Phi)_v\big)\,.
\end{aligned}$$

Dicho de otra manera, si utilizamos $h\circ\Phi(u,v)$ como parametrización para la parte $h(S) \subseteq S'$ y consideramos las respectivas expresiones:

$$Q \;\equiv\; A\,(du)^2 + 2B\,du\,dv + C\,(dv)^2 \quad , \qquad Q'|_{h(S)} \;\equiv\; A'\,(du)^2 + 2B'\,du\,dv + C'\,(dv)^2\,,$$

entonces h es isometría local si y sólo si $(A,B,C) \equiv (A',B',C')$. Una consecuencia es:

Una isometría local transforma trozos de superficie, en los que sea inyectiva, conservando su área.

Por otra parte $(A',B',C') \equiv (A,B,C)$ es consecuencia fácil de imponer en todo punto $\mathbf{p}$ la igualdad $Q'_{h(\mathbf{p})}\big((dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\big) = Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ a los tres vectores $\mathbf{v} = \Phi_u$, $\mathbf{v} = \Phi_v$ y $\mathbf{v} = \Phi_u + \Phi_v$. Dicha igualdad dice que $\|(dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\|_{Q'} = \|\mathbf{v}\|_Q$ para todo punto $\mathbf{p} \in S$ y todo vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Una isometría local es una aplicación $S \to S'$ cuyas diferenciales conservan la longitud de vectores tangentes. Esto obliga a las diferenciales a conservar también el producto escalar, y por lo tanto los ángulos.

Veamos ahora dos casos particulares de uso del criterio general. Primero, dada una parametrización $\Phi(u,v): U \to S$ tenemos que $\Phi: (U, I_\Phi) \to (S, I)$ es una isometría local. Por ejemplo, dados el cilindro circular $S = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=1\}$ y la parametrización $\Phi(u,v) \equiv (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, que no es inyectiva, se tiene $I_\Phi \equiv (du)^2 + (dv)^2$, luego Φ es una isometría local del plano Euclídeo al cilindro.
Eso es cierto a pesar de que plano y cilindro no son **congruentes:** uno no es imagen del otro por un movimiento del espacio.

Una isometría local no es necesariamente inyectiva, y puede existir entre superficies que no sean congruentes.

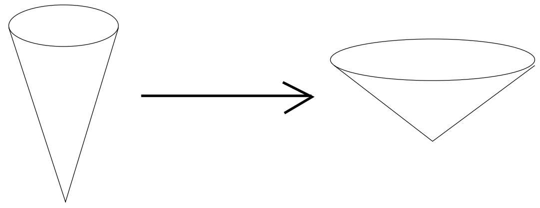
Segundo, consideramos el caso particular en que Q,Q' son las respectivas primeras formas fundamentales, es decir nos preguntamos cuándo una aplicación $h: S \to S'$ es una isometría local de (S, I_S) a $(S', I_{S'})$. Vemos de inmediato que las tres identidades del criterio general significan en este caso que $I_\Phi \equiv I_{h\circ\Phi}$, luego:

$$\boxed{h \text{ es isometría local, de } S \text{ a } S' \iff I_\Phi \equiv I_{h\circ\Phi} \text{ como campos en el dominio plano } U.}$$

Ejemplo. Sea S el cono agudo parametrizado por $\Phi(u,v) \equiv \big(u\cos v\,,\, u\,\mathrm{sen}\, v\,,\, \sqrt{3}\,u\big)$ y sea S' el cono obtuso parametrizado por $\Psi(u,v) \equiv \big(u\cos v\,,\, u\,\mathrm{sen}\, v\,,\, (3/4)\,u\big)$, ambas parametrizaciones con dominio $(u,v) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Veamos que la fórmula

$$\Phi(u,v) \;\longmapsto\; \Psi\left(\frac{8}{5}u\,,\,\frac{5}{8}v\right)$$

define isometrías h de trozos de S a trozos de S'.



Para ello hay que ver que $I_\Phi \equiv I_\chi$, donde $\chi \equiv h\circ\Phi$ viene dada por:

$$\chi(u,v) \;\equiv\; \frac{8}{5}\cdot\left(u\cos\frac{5v}{8}\,,\, u\,\mathrm{sen}\frac{5v}{8}\,,\,\frac{3}{4}u\right).$$

Calculamos:

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi_u & \equiv & (\cos v\,,\,\mathrm{sen}\, v\,,\,\sqrt{3}) \\ \Phi_v & \equiv & u\cdot(-\mathrm{sen}\, v\,,\,\cos v\,,\,0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} \chi_u & \equiv & \frac{8}{5}\big(\cos\frac{5v}{8}\,,\,\mathrm{sen}\frac{5v}{8}\,,\,\frac{3}{4}\big) \\ \chi_v & \equiv & u\cdot\big(-\mathrm{sen}\frac{5v}{8}\,,\,\cos\frac{5v}{8}\,,\,0\big) \end{array}\right\}$$

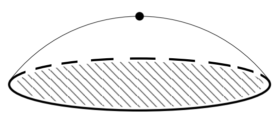
y comprobamos que $I_\Phi \equiv 4(du)^2 + u^2(dv)^2 \equiv I_\chi$.

4.8 La esfera no es localmente Euclídea

Hemos visto que dos superficies pueden ser isométricas sin ser congruentes. Veamos un importante ejemplo en el que no hay isometrías.

Teorema 61. *No existe ninguna isometría entre un trocito de esfera y un trocito de plano.*

Demostración. Lo vamos a demostrar utilizando la *desigualdad isoperimétrica* (teorema 21 del apartado 1.11).
Sea $S_{\mathbf{p}}$ un casquete esférico pequeño, centrado en un punto $\mathbf{p}$. El borde Γ de $S_{\mathbf{p}}$ es una circunferencia que yace en un plano, y consideramos el disco D en ese plano cuyo borde es también Γ. Rotando la figura hasta que dicho plano se ponga horizontal, el casquete $S_{\mathbf{p}}$ se convierte en un grafo $\{z = h(x,y)\}$ sobre el disco D



Para un grafo hallamos:

$$\Phi(x,y) \;\equiv\; \big(x\,,\,y\,,\,h(x,y)\big) \;\Longrightarrow\; \|\Phi_x\times\Phi_y\| \equiv \sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\,,$$

y el área del grafo, respecto de su primera forma fundamental, es $\iint_D \sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\,dxdy$. Por lo tanto el casquete $S_{\mathbf{p}}$ tiene área estrictamente mayor que la del disco D. Sea l la longitud espacial de Γ, igual al perímetro del disco D. No existe ninguna isometría de $S_{\mathbf{p}}$ a ningún dominio del plano, pues tal dominio plano tendría perímetro l y más área que D, en contradicción con la desigualdad isoperimétrica.
Entonces no puede existir una isometría $S \to U$, siendo S un trocito de esfera y U un trocito de plano, porque induciría una isometría de cualquier casquete esférico $S_{\mathbf{p}} \subset S$ a un dominio del plano. $\square$

Aviso. Más adelante veremos otras pruebas del teorema 61, basadas en ideas distintas de la desigualdad isoperimétrica. Véanse los apartados 9.3 y 10.2.

Si intentamos aplanar la cáscara de media naranja, ésta se resquebraja en los bordes porque el área que tiene necesita una curva más larga que el borde de la cáscara para rodearla en el plano. Si intentamos aplanar un casquete esférico de plástico delgado, con el borde reforzado para que no se rompa, se arruga en el interior y se solapa sobre sí mismo al forzarlo, de nuevo porque tiene demasiada área para ese borde en el plano.

Definición 62. *Sean $(S,Q),(S',Q')$ dos superficies, dotadas de métricas de Riemann.*
*Decimos que son **isométricas** si existe una isometría de una a otra.*
*Decimos que son **localmente isométricas** si S se recubre, con solapamiento, por trocitos cada uno isométrico a un trocito de S'.*

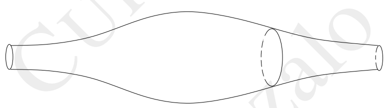
El ejemplo que acabamos de ver (esfera y plano) muestra que esta definición *no está vacía de contenido,* pues hay parejas de superficies que no son localmente isométricas.

4.9 ¿Es toda métrica una primera forma fundamental?

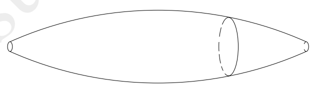
Si tenemos una métrica $Q \equiv A\,(du)^2 + 2B\,du\,dv + C\,(du)^2$ en un abierto de $\mathbb{R}^2_{uv}$, puede ayudarnos mucho a "visualizarla" encontrar una parametrización $\Phi(u,v)$ tal que $Q \equiv I_\Phi$, pues la forma de la superficie imagen de Φ nos dice mucho sobre la geometría de Q.
Un ejemplo es $Q_1 \equiv \left(1+4u^2 e^{-2u^2}\right)(du)^2 + e^{-2u^2}(dv)^2$, que es igual a I_{Φ_1} donde Φ_1 es la siguiente parametrización:

$$\Phi_1(u,v) \equiv \left(u\,,\, e^{-u^2}\cos v\,,\, e^{-u^2}\operatorname{sen} v\right)\,.$$

En vista de la forma de $\Phi_1(\mathbb{R}^2)$, sabemos que "la métrica Q_1 es infinitamente larga y adelgaza mucho cuando $|u|$ es grande".



Otro ejemplo es $Q_2 \equiv \dfrac{1+5u^2}{(1+u^2)^4}(du)^2 + \dfrac{1}{(1+u^2)^2}(dv)^2$, que se realiza como primera forma fundamental de $\Phi_2(u,v) \equiv \left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,,\,\dfrac{1}{1+u^2}\cos v\,,\,\dfrac{1}{1+u^2}\operatorname{sen} v\right)$, cuya imagen es el resultado de rotar el trozo de parábola $\{z=1-x^2\,,\,y=0\,,\,-1<x<1\}$ alrededor del eje x,



y vemos que Q_2 no es "infinitamente larga" pero se estrecha "con límite cero" en los extremos. Es mucha la información acerca de esas métricas que nos aportan Φ_1 y Φ_2.

Es natural preguntarse: ¿es toda métrica en un abierto del plano isométrica, o al menos localmente isométrica, a una primera forma fundamental? La noción general es la siguiente:

Definición 63. *Sea (S,Q) una superficie dotada de una métrica de Riemann. Llamamos **inmersión isométrica de** (S,Q) **en el espacio** a una $\phi: S \to \mathbb{R}^3$, inyectiva o no, tal que $Q \equiv I_\phi$.*

En el caso de $Q \equiv A(u,v)(du)^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)(dv)^2$, métrica en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2_{uv}$, buscamos funciones $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, definidas en todo o parte de U, que resuelvan el siguiente sistema de EDPs

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_u^2+y_u^2+z_u^2 &=& A \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v &=& B \\ x_v^2+y_v^2+z_v^2 &=& C \end{array}} \qquad (14)$$

Este sistema tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones y es de primer orden, pero es completamente no lineal.

Acerca de la **existencia local** de solución, mencionamos tres resultados.

Teorema 64. (A. V. Pogorelov, 1971). Existen métricas de clase $\mathscr{C}^{2,1}$ en el plano para las que el sistema (14) no tiene solución, de clase $\mathscr{C}^2$ o mejor, en ningún entorno del origen $(0,0)$.

Teorema 65. (N. Nadirashvili, Y. Yuan, 2002) Existen métricas de clase $\mathscr{C}^\infty$ en el plano para las que el sistema (14) no tiene solución, de clase $\mathscr{C}^3$ o mejor, en ningún entorno del origen.

Es decir:

> Una métrica de Riemann suave en el plano puede que no sea localmente isométrica a la primera forma fundamental de ninguna superficie suave.

La situación es mejor si la métrica es analítica real (noción definida en el apartado 1.12):

Teorema 66. (M. Janet 1926, E. Cartan 1927) Para una métrica $\mathscr{C}^\omega$ en un dominio del plano, el sistema (14) tiene soluciones locales $\mathscr{C}^\omega$ alrededor de cada punto.

Acerca de la existencia **global** de solución, mencionamos dos resultados.

Teorema 67. (D. Hilbert, 1901) Para la métrica $Q \equiv (du)^2 + \cosh^2 u\,(dv)^2$ en el plano, el sistema (14) no tiene soluciones globales suaves.

El plano *uv* con la métrica $(du)^2 + \cosh^2 u\,(dv)^2$, se llama **plano hiperbólico** o **plano de Lobachevski.**

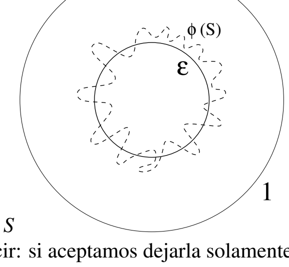
> El plano hiperbólico es una importante estructura geométrica que no admite ninguna inmersión isométrica global suave en el espacio: no corresponde globalmente a ninguna superficie espacial suave, ni siquiera con autointersecciones.

Teorema 68. (N. H. Kuiper, 1955). Dada cualquier superficie S, cualquier métrica de Riemann Q en S, y cualquier aplicación $\phi_0 : S \to \mathbb{R}^3$ de rango constante 2, bicontinua y cumpliendo $I_{\phi_0} < Q$ (o sea $Q - I_{\phi_0}$ es definida positiva en cada punto de S), hay una $\phi : S \to \mathbb{R}^3$ *sólo de clase* $\mathscr{C}^1$, tan cercana a ϕ_0 como se quiera, bicontinua y tal que $Q \equiv I_\phi$.

Este teorema proporciona una superficie $\Sigma = \phi(S)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que (Σ, I_Σ) es isométrica a (S,Q). Pero esta Σ es sólo de clase $\mathscr{C}^1$, y la teoría que vamos a desarrollar en los capítulos siguientes requiere superficies de clase $\mathscr{C}^2$ o mejor. En particular *el plano de Lobachevski sí es isométrico a superficies de clase* $\mathscr{C}^1$ *en el espacio, dotadas de su primera forma fundamental,* pero esas superficies no nos ayudan en absoluto a entender el plano hiperbólico.

Algunos trozos del plano hiperbólico admiten inmersiones isométricas $\mathscr{C}^\omega$ en el espacio. Hay unas partes de dicho plano, los **horodiscos,** que admiten una inmersión isométrica no inyectiva llamada **pseudoesfera de Beltrami**.

Veamos un consecuencia sorprendente del teorema de Kuiper. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1, sea $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión y sea ε una constante positiva menor que 1. Entonces la aplicación $\phi_0 \equiv \varepsilon i : S \to \mathbb{R}^3$ cumple las hipótesis del teorema para $Q \equiv I_S$, luego hay una $\phi : S \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathscr{C}^1$, bicontinua y tal que $I_\phi \equiv I_S$. Esta ϕ es muy cercana a ϕ_0, pero muy arrugada. La imagen $\phi(S)$ es una superficie *isométrica a la*



esfera S pero metida toda ella dentro de una bola de radio casi igual a ε.
Es decir: si aceptamos dejarla solamente de clase $\mathscr{C}^1$, es posible "apretujar" la esfera y meterla *isométricamente* dentro de una región espacial arbitrariamente pequeña. Sin embargo en la literatura encontramos varias demostraciones del siguiente resultado clásico:

Teorema 69. **(Rigidez global de la esfera).** *Si una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es al menos de clase $\mathscr{C}^3$ y es isométrica a la esfera de radio 1, entonces Σ es una esfera de radio 1.*

La versión de este teorema, teniendo en cuenta el de Kuiper, es la siguiente (dejamos abierto el caso $\mathscr{C}^2$):

La esfera es **globalmente rígida** entre las superficies en $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathscr{C}^3$ o mejor, pero no es nada rígida entre las de clase $\mathscr{C}^1$.

4.10 Aplicaciones especiales y coordenadas especiales

A las diferenciales de una isometría local se le piden dos cosas: que conserven longitudes y que conserven ángulos. Pero hay condiciones menos exigentes que definen clases importantes de aplicaciones.

Definición 70. *Sea $h:(S,Q)\to(S',Q')$ una aplicación diferenciable, con las diferenciales todas invertibles, entre dos superficies dotadas de sendas métricas de Riemann.*
*Se dice que h es **conforme** si sus diferenciales conservan los ángulos. Es decir que para todo punto $\mathbf{p}\in S$ y todo par de vectores no nulos $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S$ se tiene:*

$$\angle_Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) \;=\; \angle_{Q'}\big((dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\,,\,(dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})\big)\,.$$

*Se dice que h es **equiárea** si para todo trocito $\Sigma\subseteq S$ en el que h sea inyectiva se tiene:*

$$\text{área}_Q(\Sigma) \;=\; \text{área}_{Q'}\big(h(\Sigma)\big)\,.$$

*Se dice que h es una **homotecia** si hay una constante positiva c tal que para todo $\mathbf{p}\in S$ y para todo $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}S$ se cumple que $Q'_{h(\mathbf{p})}\big((dh)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})\big)=c^2\cdot Q_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$.*

Por una parte, es evidente que toda isometría local es conforme, equiárea y homotecia.
Por otra parte, tomemos $(S,Q)=(S',Q')=\big(\mathbb{R}^2,(dx)^2+(dy)^2\big)$. Si $c\neq 0,1,-1$ entonces $(x,y)\mapsto(cx,cy)$ es conforme y homotecia, sin ser equiárea. El *deslizamiento* $(x,y)\mapsto(x+y,y)$ es aplicación equiárea sin ser conforme ni homotecia. La aplicación $(x,y)\mapsto(\,e^x\cos y\,,\,e^x\operatorname{sen} y\,)$ es conforme sin ser homotecia ni equiárea.

No es necesario comprobar las infinitas parejas $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S$ ni los infinitos trocitos $\Sigma\subseteq S$. Tenemos criterios basados en las funciones coeficiente.

Teorema 71. *Sean $\Phi(u,v)$ parametrización regular de S y $h:(S,Q)\to(S',Q')$ una aplicación diferenciable con todas sus diferenciales invertibles. Utilicemos $h\circ\Phi(u,v)$ como parametrización para $h(S)\subseteq S'$ y consideremos las respectivas expresiones:*

$$Q\;\equiv\;A\,(du)^2+2B\,du dv+C\,(dv)^2 \qquad,\qquad Q'|_{h(S)}\;\equiv\;A'\,(du)^2+2B'\,du dv+C'\,(dv)^2\,.$$

La aplicación h es: (1) conforme si y sólo si existe una función escalar positiva $\rho(u,v)$ tal que $(A',B',C')\equiv\rho^2\cdot(A,B,C)$; (2) homotecia si además ρ es constante.
La aplicación h es equiárea si y sólo si $A'C'-B'^2\equiv AC-B^2$.

Las clases especiales de parametrizaciones son aquellas que *simplifican la expresión de la métrica.* Definimos a continuación las más utilizadas.

Definición 72. *Sea (S,Q) una superficie dotada de una métrica de Riemann.*

*Si $Q\equiv A\,(du)^2+C\,(dv)^2$, decimos que Φ es **parametrización ortogonal,** o que (u,v) son **coordenadas ortogonales,** para la métrica Q (porque entonces Φ_u y Φ_v son Q-ortogonales).*

*Si $A\equiv C$ y $B\equiv 0$, es decir $Q\equiv A\,(du)^2+A\,(dv)^2$, decimos que (u,v) son **coordenadas conformes** para la métrica Q (porque $\Phi(u,v)$ es entonces aplicación conforme del plano con la métrica estándar a (S,Q)).*

*Si $AC-B^2\equiv 1$ decimos que (u,v) son **coordenadas equiáreas** para la métrica Q (porque $\Phi(u,v)$ es entonces aplicación equiárea del plano uv con la métrica estándar a (S,Q)).*

*Si $A\equiv 1$ y $B\equiv 0$, es decir $Q\equiv(du)^2+C\,(dv)^2$, decimos que (u,v) son **coordenadas de Fermi** para la métrica Q.*

*Si $A\equiv C\equiv 1$, es decir $Q\equiv(du)^2+2B\,du dv+(dv)^2$, decimos que (u,v) son **coordenadas de Chebichev** para la métrica Q.*