$\boxed{8.2}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad |A| \underset{\substack{+100C_3 \\ +1000C_2 \\ +10000C_1}}{\overset{C_5+10C_4}{=\!=}} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 58786 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 30628 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 12831 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 80743 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 16016 \end{vmatrix} \overset{\text{Regla de Laplace}}{=}$$

$$= 58786 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 30628 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 12831 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 80743 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 16016 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Como 13 divide a 58786, 30628, 12831, 80743, 16016

entonces $|A|$ es divisible por 13.

$\boxed{8.4}$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n+1 \end{vmatrix} \overset{C_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_i}{=\!=\!=} \frac{(n+1)n+2}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{(n+1)n+2}{2} = \frac{(n+1)n+2}{2}.$$

A cada columna $i \in \{1, \dots, n-1\}$ le restamos i veces la columna n

---

$\boxed{8.6}$ Un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ y $a_n \neq 0$.

(a) Con $n+1$ valores distintos de la variable x tenemos el SEL

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f(x_{n+1}) \end{array} \right\}$$

que tiene $n+1$ incógnitas y $n+1$ ecuaciones.

Es equivalente al sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ los coeficientes de $f(x)$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$ los valores de $n+1$ valores distintos de x.

Este sistema es compatible determinado $\Leftrightarrow |A| \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$.

Por el determinante de Vandermonde, sabemos que

$$|A| = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$ y, como todos los valores son distintos,

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

$\Rightarrow f(x)$ queda unívocamente definido, por la única solución del sistema.

(b) Si tenemos $n+1$ soluciones (para un polinomio de grado n) tenemos el mismo sistema que antes, con $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times 1}$.

Por el mismo razonamiento, este sistema de ecuaciones lineales (homogéneo) es compatible determinado, es decir, tiene una única solución : $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo que $f(x) \equiv 0$. (el polinomio nulo).

$\boxed{8.8}$ ($\Leftarrow$) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ con $|A| = \pm 1$

entonces, sea $C = (c_{ij})_{n\times n}$ la matriz de los cofactores de A,

es decir, $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$,

donde $C^t \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ y como $|A| = \pm 1$, $A^{-1} = |A| C^t$

$\Rightarrow A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$, la inversa de A es una matriz con entradas enteras. $\square$

($\Rightarrow$) Existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ tal que $AB = BA = I_n$ (con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$). Entonces tanto $|A|$ como $|B|$ son enteros, y $\det(AB) = \det(I_n) = 1 = \det(A)\cdot\det(B)$

$\Rightarrow |A| = \frac{1}{|B|}$ y $|A|, |B| \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |A| = |B| = \pm 1$ $\square$

$\boxed{8.10}$ Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$ y antisimétrica si $A = -A^t$.

(a) Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$,

tomamos $D, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definidas de la siguiente forma:

$$D = (d_{ij})_{n\times n} \quad , \quad C = (c_{ij})_{n\times n} .$$

(1) $d_{ii} = b_{ii}$, $c_{ii} = 0$ $\quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

(2) $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ con $i < j$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{ij} = d_{ji} \quad , \quad c_{ij} = -c_{ji} , \\ d_{ij} + c_{ij} = b_{ij} \\ d_{ji} + c_{ji} = b_{ji} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} d_{ij} & -d_{ji} & & & = 0 \\ & & c_{ij} & + c_{ji} & = 0 \\ d_{ij} & & + c_{ij} & & = b_{ij} \\ & d_{ji} & & + c_{ji} & = b_{ji} \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene como matriz: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado, por lo que

$d_{ij}, d_{ji}, c_{ij}, c_{ji}$ están bien definidas para todo $1 \leq i < j \leq n$

y, por (1) también para todo $i = j = 1, \dots, n$.

Por construcción, tenemos que $d_{ij} = d_{ji}$ $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$
$c_{ij} = -c_{ji}$ $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$

es decir, D es simétrica y C es antisimétrica.

y $\quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $\quad b_{ij} = c_{ij} + d_{ij}$

$$\Rightarrow \quad B = D + C$$

$\therefore$ Para toda matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\exists\, D, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

t.q. $D + C = B$ y $D = D^t$, $C = -C^t$.