Energía electrostática: repaso y generalización

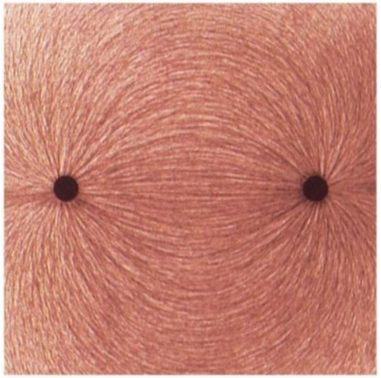
J.E. Prieto

Fuente principal de figuras:
“Physics for scientists and engineers” (5th edition),
P.A. Tipler, G. Mosca

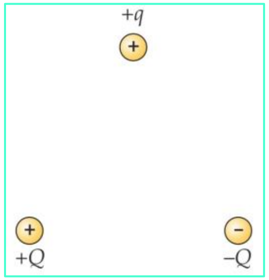
Energía electrostática: cargas puntuales

- *Energía potencial electrostática U_{12}* de interacción entre *dos cargas puntuales* q_1 y q_2 :

$$U_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



- Generalización: *Energía potencial electrostática U* de interacción entre *varias cargas puntuales* q_i :



$$\boxed{U = U_{12} + U_{13} + U_{23} + \ldots}$$

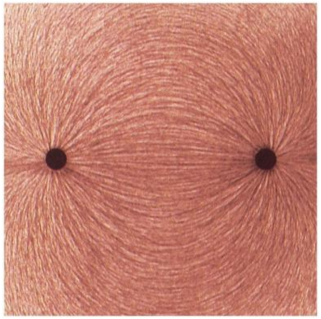
$$U = \frac{k\,q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k\,q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k\,q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots = \sum_{i>j} \frac{k\,q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

Suma a todos los *pares* de cargas

Energía electrostática: cargas puntuales

• Utilizando el concepto de *potencial eléctrico*, se puede escribir también la *Energía potencial electrostática U_{12}* de interacción entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 como el *producto* de la carga q_1 por el potencial $V(\boldsymbol{r}_1)$ en el lugar donde se encuentra ($\boldsymbol{r}_1$), que es el potencial creado por la carga q_2:

$$U_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$$U_{12} = q_1 V(\boldsymbol{r}_1)$$, con $$V(\boldsymbol{r}_1) = k\frac{q_2}{r_{12}}.$$

Pero también es igualmente válido:

$$U_{12} = q_2 V(\boldsymbol{r}_2)$$, con $$V(\boldsymbol{r}_2) = k\frac{q_1}{r_{12}}.$$

Energía electrostática: cargas puntuales

- Podemos escribir pues, para dos cargas puntuales q_1 y q_2:

$$U_{12} = \frac{1}{2}\left[q_1 V(\mathbf{r_1}) + q_2 V(\mathbf{r_2})\right]$$

Esto se puede generalizar a varias cargas puntuales:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\mathbf{r_i})}$$

, donde $V(\mathbf{r}_i)$ es el potencial en el lugar $\mathbf{r}_i$ donde se encuentra q_i, esto es, el potencial creado por todas las demás cargas q_j:

$$\boxed{V(\mathbf{r_i}) = \sum_j \frac{k\,q_j}{r_{ij}}}$$

Energía electrostática: cargas puntuales

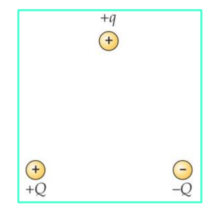
$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\boldsymbol{r_i})}$$

$$V(\boldsymbol{r}_i) = \sum_j \frac{k\,q_j}{r_{ij}} \quad \rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{k\,q_i\,q_j}{r_{ij}}}$$

Si sumamos a todas las *combinaciones* de cargas (*i*, *j*), estamos contando dos veces (!) la interacción de cada par U_{ij} : de ahí el factor 1/2

Ya sabíamos: Energía total *U* de interacción electrostática:

$$\boxed{U = U_{12} + U_{13} + U_{23} + \ldots}$$



$$U = \frac{k\,q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k\,q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k\,q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots = \sum_{i>j} \frac{k\,q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

Suma a todos los *pares* de cargas

Distribución continua de cargas

- *Energía potencial electrostática U* de *varias cargas puntuales* q_i:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi(\mathbf{r_i})}$$

, con $\phi(\mathbf{r_i})$ el potencial en el lugar $\mathbf{r_i}$ donde se encuentra q_i, esto es, el potencial creado por todas las demás cargas q_j:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r_i}) = \sum_j \frac{k\,q_j}{r_{ij}}}$$

Si tenemos una distribución continua de carga en volumen: $\rho = dq\,/\,dV$:

$$U = \frac{1}{2}\int \phi(\mathbf{r})\,dq \rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})\,dV}$$

(OJO: aquí $\phi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$: potencial eléctrico, para no confundir con volumen V)