$$(S)\begin{cases} Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}, \qquad J = [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon]$$

$$A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} Y_{01} \\ \vdots \\ Y_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n}$$

Teorema: Si A y B son continuas en J, (S) tiene solución y es única (para un entorno de t_0).

Para demostrar el teorema, utilizaré el teorema de la aplicación contractiva.

Demostraré que:

(PF1) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado,

$$\mathbb{X} := \mathbb{X}([a,b], K) := \{ g : [a,b] \to K \mid g \text{ continua} \} =$$

$$= \left\{ g : [a,b] \to K \;\middle|\; g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},\ g_i \in C([a,b]) \right\}.$$

$(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado completo, donde

$$\|g\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \|g_i\|_\infty \quad (\|\cdot\|_\infty \text{ aplicada a una función de } C([a,b])$$

es la función definida en clase).

(PF2) $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ es un operador bien definido y cuyo punto fijo resuelve (S).

(PF3) T es Lipschitz pequeño, es decir: $\|T\|_{Lip} < 1$.

(PF 1) (i) La norma está bien definida:

Sea $g \in \mathbb{X} = \mathbb{X}([a,b], \mathbb{K}) \Rightarrow g_i \in C([a,b]) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \|g\|_\infty = \max_{i=\{1,\dots,n\}} \|g_i\|_\infty$ es el máximo de un conjunto finito.

(N1) $\|g\|_\infty = 0 \Rightarrow \max_{i=1,\dots,n} \|g_i\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \ \|g_i\|_\infty = 0 \Rightarrow g_i \equiv 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow g \equiv 0$

(N2) $\|g + f\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \|g_i + f_i\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,n} (\|g_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty)$

$\leq \max_{i=1,\dots,n} \|g_i\|_\infty + \max_{j=1,\dots,n} \|f_j\|_\infty = \|g\|_\infty + \|f\|_\infty$

(N3) $\|\lambda g\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \|\lambda g_i\|_\infty = |\lambda| \, \|g\|_\infty$.

Nota: he utilizado que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $C([a,b])$.

(ii) $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\infty)$ es completo:

- Sea $G_k = \begin{pmatrix} g_k^1 \\ \vdots \\ g_k^n \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ \forall k \geq 1$, $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall k, m > n_0 \ \|G_k - G_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \ \|g_k^i - g_m^i\|_\infty < \varepsilon$.

Es decir, para $i \in \{1,\dots,n\}$ $\{g_k^i\} \subset C([a,b])$ es una sucesión de Cauchy⊕, y por tanto converge uniformemente a una $f_i \in C([a,b])$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{i,\varepsilon} : \forall k > n_{i,\varepsilon} \ \|f_i - g_k^i\|_\infty < \varepsilon$.

⊕ Con la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C([a,b])$

Sea $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon = \max\{n_{1,\varepsilon}, n_{2,\varepsilon}, \dots, n_{n,\varepsilon}\}$

tal que $\forall k > n_\varepsilon \geq n_{1,\varepsilon}, \dots, n_{n,\varepsilon}$:

$$\|G - F\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|f_i - g_k^i\|_\infty < \varepsilon.$$

Por tanto, si una sucesión es de Cauchy en $\mathbb{X} = \mathbb{X}([a,b], K)$

entonces converge a una función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Además, $F \in \mathbb{X}$, ya que $\forall t \in [a,b]$ se tiene

que como $G_k \in \mathbb{X}([a,b], K)$, $G_k(t) \in K$

y además, $G_k(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} F(t)$. Como K es

cerrado, $F(t) \in K$ para todo $t \in [a,b] \Rightarrow F \in \mathbb{X}$.

Queda demostrado (PF1)

(PF2)

- Como $A(s) = (a_{ij}(s))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ es continua,

$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ a_{ij} es continua

$\Rightarrow \exists L_{ij} > 0 : \forall s \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ $|a_{ij}(s)| \leq L_{ij}$, porque $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ compacto.

Entonces, para $L = \max_{i,j\in\{1,\dots,n\}} L_{ij}$, $|a_{ij}(s)| \leq L$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, s \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$.

- Defino ahora $I := [t_0-\rho, t_0+\rho]$ con $\rho = \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{2nL}\right\}$.

- Tomando $\mathbb{X} = \mathbb{X}(I, \mathbb{R}^n) = \{g : I \to \mathbb{R}^n : g \text{ continua}\}$,

- $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que

$$T(g)(t) := \int_{t_0}^{t} (A(s)g(s) + B(s))\,ds + y_0.$$

Claramente, T está bien definido: $T(g)$ continua y $T(g) : I \to \mathbb{R}^n$.

- Si $y \in \mathbb{X}$ es un punto fijo de T, $T(y) \equiv y$

$\Rightarrow y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$, además $y(t_0) = y_0$

$\Rightarrow y$ resuelve (S).

(PF3) Sean $g, h \in \mathbb{X}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow T(g)(t) - T(h)(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(g(s)-h(s))\,ds.$$

$$\Rightarrow \|T(g) - T(h)\|_\infty = \max_{\substack{t\in I \\ i\in\{1,\dots,n\}}} \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)(g_j(s)-h_j(s))\,ds \right| \leq$$

$$\leq \max_{\substack{t\in I \\ i\in\{1,\dots,n\}}} \int_{t_0}^{t} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)(g_j(s)-h_j(s)) \right| ds \leq$$

$$\leq \max_{\substack{t\in I \\ i\in\{1,\dots,n\}}} \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)|\,|g_j(s)-h_j(s)| \right) ds \underset{|a_{ij}(s)|\leq L}{\leq}$$

$$\leq \max_{t\in I} L \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j(s)-h_j(s)| \right) ds \leq$$

$$\leq L \max_{t\in I} \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\max_{s\in I} |g_j(s)-h_j(s)|}_{\|g_j-h_j\|_\infty \leq \|g-h\|_\infty} ds \leq$$

$$\leq L \cdot \|g-h\|_\infty \max_{t\in I} \int_{t_0}^{t} n \, ds \leq$$

$$\leq L n \rho \, \|g-h\|_\infty \leq L n \frac{1}{2nL} \|g-h\|_\infty .$$

máxima longitud del intervalo $[t_0, t]$ ó $[t, t_0]$, si $t \in I$.

$$\rho \leq \frac{1}{2nL}$$

Es decir, $\|T(g)-T(h)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g-h\|_\infty$

para cada $g, h \in \mathbb{X}$.

Como $T: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $\|T\|_{Lip} \leq 1/2 < 1$ y $\mathbb{X}$ es un espacio normado completo, por el teorema de la aplicación contractiva, $\exists! y \in \mathbb{X} : T(y) \equiv y$.

Como ya hemos visto, tal y es la única solución de (S) (y existe).