HOJA DE EJERCICIOS 2
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Sea $f : (X, d) \to (Z, \rho)$ una aplicación entre espacios métricos.
Decimos que f es **Lipschitziana,** o simplemente **Lipschitz,** si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\rho\big(\, f(x)\,,\, f(y)\big) \;\leq\; M\, d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in X \;,$$

y de un tal número M decimos que es una **constante de Lipschitz para f**.

Decimos que f es **localmente Lipschitziana,** o **localmente Lipschitz,** si para cada punto $x_0 \in X$ existen un entorno U de x_0 en X y un número $M_U \geq 0$ tales que

$$\rho\big(\, f(x)\,,\, f(y)\big) \;\leq\; M_U\, d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in U \;,$$

es decir que la restricción $f|_U$ es Lipschitz.

Problema 1. Demuestra que toda aplicación localmente Lipschitz es continua.

Problema 2. Determina, para cada una de la siguientes funciones continuas:

1. si es localmente Lipschitz o no,
2. si es Lipschitz o no.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto x^2$.
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \sqrt{1 + x^2}$.
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \arctan x$.
$(-1, 1) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arc\,sen} x$.
$[-1, 1] \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arc\,sen} x$.
$(0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \log x$.

Problema 3. Sea $L : (\mathbb{V}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{W}, \|\cdot\|')$ una aplicación lineal entre dos espacios normados. Demuestra que son equivalentes:

1. L es continuna en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$.
2. L es lineal acotada.
3. L es Lipschitz para las distancias $\|v_1 - v_2\|$ en $\mathbb{V}$ y $\|w_1 - w_2\|'$ en $\mathbb{W}$.

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico. Fijado un punto $a \in X$, demuestra que la siguiente función

$$d_a : X \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad , \quad d_a(x) \;=\; d(x, a) \;,$$

es Lipschitziana en (X, d).
Deduce que, en todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, la norma es una función Lipschitz.
¿Cuál es la constante de Lipschitz para esas funciones?

Problema 5. Sea $1 < p < \infty$. Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n\, \|v\|_\infty \,.$$

Problema 6. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en $\mathbb{R}^n$.

- Demuestra que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado para $\|\cdot\|$ si y sólo si es acotado para $\|\cdot\|'$.
- Demuestra que si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es una **sucesión de Cauchy** para $\|\cdot\|$ (es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $k = k(\varepsilon)$ tal que $n, m \geq k \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$), entonces es una sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|'$; y viceversa.
- Dado cualquier subconjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$, con las distancias $d_E(x, y) = \|x - y\|$ y $d'_E(x, y) = \|x - y\|'$, y dada cualquier función $f : E \to \mathbb{R}$, demuestra que f es Lipschitz en (E, d) si y sólo si es Lipschitz en (E, d').

Problema 7. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Definimos la **distancia a A** como la siguiente función

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{dist}(x, A) \ = \ \inf \{ \, d(x, y) \ : \ y \in A \, \} \ .$$

1. Demuesta que $\operatorname{dist}(\cdot, A)$ es una función Lipschitz en (X, d) ¿con qué constate de Lipschitz?
2. Si además A es compacto, demuestra que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$; es decir, un **punto más cercano a x** entre los puntos de A.

Problema 8. Fijamos $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ el primer vector de la base estándar. Demuestra que:

1. Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1)$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1)$ no son conexos por caminos.
2. Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1) \cup \{\mathbf{e}_1\}$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1) \cup \{t\mathbf{e}_1 \, : \, 1 < t < 2\}$ son conexos por caminos.

Problema 9. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado.
a) Dados $x_0 \in V$ y $r > 0$, prueba que el cierre de la bola abierta $B(x_0, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.
b) Considera la distancia $d(x, y) = \min\{||x - y||, 1\}$. Demuestra que $||\cdot||$ y d definen los mismos abiertos en V (y, por lo tanto, definen los mismos cerrados y el mismo concepto de cierre).
c) Comprueba que se tiene $B_d(\mathbf{0}, 1) = B_{||\cdot||}(\mathbf{0}, 1)$ pero el cierre de este conjunto no es la bola cerrada $\overline{B}_d(\mathbf{0}, 1)$.

Problema 10. a) Sea X conexo por caminos, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Determinar cómo es f si $f(X) \subset \mathbb{Z}$. Lo mismo para $f(X) \subset \mathbb{Q}$. Lo mismo para $f(X) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
b) Sea X conexo por caminos y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua no constante. Demostrar que $f(X)$ es no numerable.
c) Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Problema 11. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. Dados subconjuntos $A, B \subset V$, se define

$$A + B = \{ \, a + b \, : \, a \in A, \, b \in B \, \}$$

a) Demostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
b) Poner un ejemplo de un espacio V y dos cerrados A, B tales que $A + B$ no es cerrado.

Problema 12. Sean (X, d_1), (Y, d_2) dos espacios métricos. Decimos que $f : X \to Y$ es una **isometría** si satisface:

$$d_2\big(\, f(x) \, , \, f(y) \, \big) \ = \ d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X \, .$$

Demostrar que toda isometría entre dos espacios métricos satisface:
a) Es inyectiva.
b) Es continua en X.
c) La inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ también es isometría.

Problema 13. Sea $(F, ||\cdot||)$ un espacio normado.
a) Demuestra que toda aplicación lineal $T:\mathbb{R}\to F$ es acotada, con $|||T||| = \|T(1)\|$.
b) Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R},F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales $T:\mathbb{R}\to F$. Si definimos $\phi:\mathcal{L}(\mathbb{R},F)\to F$ mediante $\phi(T)=T(1)$, demostrar que ϕ es una aplicación lineal y una isometría.

Problema 14. Para cada función analícese , en el punto $(0,0)$, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Problema 15. Considérese la siguiente función vectorial, definida en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$f(x,y) \;=\; \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{y}{x^2+y^2}\right)\,.$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0,0)$ de forma que la f extendida sea continua en este punto?
Calcula la matriz de la diferencial $Df(x,y)$, respecto de las bases estándar en $\mathbb{R}^2$, en cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Halla la función inversa de f.

Problema 16. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $<\cdot,\cdot>$ y de la norma asociada $||\cdot||$. Demuestra que la función $f:E\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=||x||^2$ es diferenciable en todo punto, y que

$$(Df)_x u = 2<x,u> \quad \text{para cualesquiera } \; x,u\in E\,.$$

Problema 17. Sean $g_1, g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y)=\int_0^x g_1(t,0)\,dt+\int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=g_2(x,y)\,.$$

b) Hallar una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=y\,.$$

c) Hallar una función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2\,xy\,, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=x^2-2\,y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=e^z\,.$$

Problema 18. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si una tal f es diferenciable, probar que

$$\big\langle \nabla f(x)\,,\, x \big\rangle \;=\; m\, f(x) \qquad \text{en cada } \; x \in \mathbb{R}^N .$$

Problema 19. Consideremos $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle\,,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a, b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcular $h'(t)$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

Problema 20. *a)* Calcular las diferenciales de $f_1(x) = \langle a, x \rangle$, $f_2(x) = \langle x, L(x) \rangle$ y $f_3(x, y) = \langle x, L(y) \rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $DB(x, y)$.

c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Hallar la aplicación lineal $Df(x, y)$.

Problema 21. Dadas $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables, utiliza la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones,

a) $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$,

b) $G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y))$,

c) $H(x, y, z) = g(f(x, y, h(x)), g(z, y))$,
