Problema 10. Sea $\overline{A}$ el cierre de un conjunto (es decir, la unión de A con sus puntos de acumulación). Demuestra las siguientes propiedades:
1) $x \in \overline{A} \iff$ para todo entorno abierto V_x del punto x, se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$.
2) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists \{x_n\} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x\}$

$\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall V_x$ entorno abierto de x, se cumple $V_x \cap A \neq \emptyset\}$

Probar que $\overline{A} = \tilde{A}$

- $\overline{A} \subset \tilde{A}$

$x \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset A$ t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea V_x entorno abierto de $x \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_x \quad \forall n \geq N_0$. En particular $x_{N_0} \in V_x \cap A$
$\Rightarrow V_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \tilde{A}$

- $\tilde{A} \subset \overline{A}$

$x \in \tilde{A}$; para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$
$\exists\ x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$. Entonces $\{x_n\} \subset A$ y
y como $x_n \in B_{1/n}(x)$ se tiene $\|x - x_n\| < 1/n \to$
0 cuando $n \to \infty$. Luego $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in \overline{A}$

2) Si $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

$x \in \overline{A} = \tilde{A} \Rightarrow \forall V_x$ cumple $V_x \cap A \neq \emptyset$. Como
$V_x \cap B \supset V_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow V_x \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \tilde{B} = \overline{B}$

3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

• $x \in \overline{A \cup B} = \widetilde{A \cup B} \Rightarrow \forall V_x,\ V_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

Por tanto

$$(V_x \cap A) \cup (V_x \cap B) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow V_x \cap A \neq \emptyset$ ó $V_x \cap B = \emptyset \Rightarrow x \in \tilde{A} \cup \tilde{B}$

$= \bar{A} \cup \bar{B}$

• $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Si $x \in \bar{A} = \tilde{A}$, $\forall V_x,\ V_x \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow V_x \cap (A \cup B) = (V_x \cap A) \cup (V_x \cap B) \supset V_x \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow V_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \widetilde{A \cup B} = \overline{A \cup B}$

Si $x \in \bar{B}$, el razonamiento es similar.

Problema 11. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:

1) $\bigcap_{k=1}^{\infty}[-1,\frac{1}{k})$ en $\mathbb{R}$.
2) $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<x\leq y\}$ en $\mathbb{R}^2$.
4) $H=\{x\in\mathbb{R}^N\,|\,x_1=0\}$ en $\mathbb{R}^N$.
5) $\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,||x||=1\}$ en $\mathbb{R}^N$.
6) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ en $\mathbb{R}$.

Determinar el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

NOTACIÓN: $\mathring{A}$ = interior de A; $Fr(A)$ = frontera de A

A' = puntos de acumulación de A

$\bar{A}$ = clausura o cierre de A

RESPUESTAS:

1) A es cerrado y no es abierto pq $A=[-1,0]$

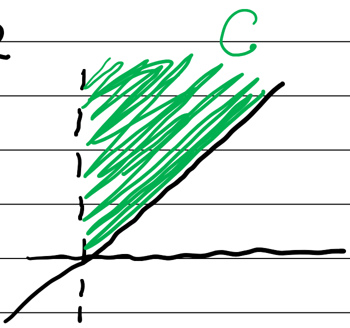
$\mathring{A}=(-1,0)$, $Fr(A)=\{-1,0\}$, $A'=[-1,0]=\bar{A}$

2) $B=(0,1)\cap\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ no es ni abierto, ni cerrado.

$\mathring{B}=\emptyset$, $Fr(B)=[0,1]$, $B'=[0,1]=\bar{B}$

3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x\leq y\}$ en $\mathbb{R}^2$

Ni abierto, ni cerrado

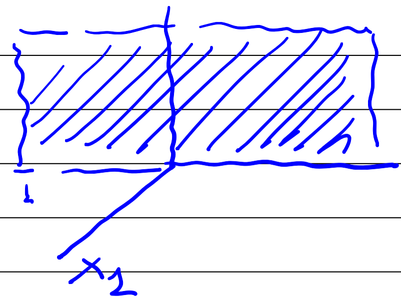


$\mathring{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y\}$

$Fr(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y\geq 0\}$
$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y, x\geq 0\}$

$C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y\}=\bar{C}$

4) $H = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = 0\}$ en $\mathbb{R}^N$



H es cerrado y no abierto

$\overset{\circ}{H} = \emptyset$, $Fr(H) = H$,

$H' = H = \overline{H}$

5) $D = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ en $\mathbb{R}^N$

D es cerrado y no es abierto

$\overset{\circ}{D} = \emptyset$, $Fr(D) = D$, $D' = \overline{D} = D$

6) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) = (1, 1/2) \cup (1/2, 1/3) \cup (1/3, 1/4) \cup \ldots$

$= \{x \in (0,1) : x \neq 1/n, \ n = 2, 3, 4, \ldots\}$

E es abierto pq es unión de abiertos

E no es cerrado

$\overset{\circ}{E} = E$, $Fr(E) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$

$E' = [0, 1] = \overline{E}$

Problema 17. Demuestra que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es continua.

$T : (\mathbb{R}^N, \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^M, \|\ \|)$ es lineal.

Probaremos que $\exists\ C > 0$ t.q. $\|Tx\| \leq C\,\|x\|_\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

Como T es lineal, $\exists\ A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{M,N}$ t.q.

$T(x) = Ax$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ (usar bases canónicas)

$$\|Tx\| = \left\| A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{Nj} x_j \end{pmatrix} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^N x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Nj} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^N |x_j| \left\| \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Nj} \end{pmatrix} \right\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^N \left\| \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Nj} \end{pmatrix} \right\| \right\}}_{C}$$

$$\leq C\,\|x\|_\infty$$

T es uniformemente continua en $(\mathbb{R}^N, \|\ \|_\infty)$:

Dado $\varepsilon > 0$, tomo $\delta = \varepsilon / C$ si $x, y \in \mathbb{R}^N$ con

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq$$

$$\leq C\,\|x-y\|_\infty < C\delta = C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Problema 18. Dada una transformación lineal entre dos espacios métricos $T : X \to Y$, definimos su norma

$$|||T||| \ = \ \max_{||x||_X=1} ||Tx||_Y.$$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Halla sus normas como operadores lineales en los siguientes casos:
a) $A : (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.
b) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$.
c) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.
d) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$.
e) $B : (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
Ejercicio optativo adicional: conjeturar la fórmula que debe obtenerse para una matriz genérica de dimensión $N \times M$ en los casos d) y e) anteriores.

$T : (X, \| \|_X) \longrightarrow (Y, \| \|_Y)$

$$|||T||| := \sup_{\|x\|_X = 1} \| T(x) \|_Y \left(= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \right)$$

a) $|||A||| = \sqrt{10}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} : (\mathbb{R}^3, \| \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \| \|_1)$

Si $\|x = (x_1, x_2, x_3)\|_\infty = 1 \iff \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = 1$

$\Rightarrow |x_1| \leq 1, \ |x_2| \leq 1, \ |x_3| \leq 1.$

$$\left\| B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |2x_2 + 2x_3|$$

$$\leq |x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| \leq 5$$

Tomar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\left\| B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2-2 \end{pmatrix} \right\|_1 =$

$= 1 + |-2-2| = 5$

Por tanto $|||B||_{\infty \to 1} = 5$

c) $\|B\|_{1\to 2} = 2$

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} : (\mathbb{R}^3, \|\ \|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\ \|_1)$

Sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $\|x\|_1 = 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$

$$\left\| B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |2x_2 + 2x_3| \leq |x_1| + 2|x_2| + 2|x_3|$$
$$= 2 - |x_1| \leq 2$$

Con $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|x\|_1 = 1$ y $\left\| B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_1$
$$= 0 + |-2| = 2$$

Por tanto, $|||B|||_{1\to 1} = 2$

e) $|||B|||_{\infty\to\infty} = 4$

f) Sea $B \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ con $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{M, N}$.

$$|||B|||_{1\to 1} = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{M} |b_{ij}|$$

$$|||B|||_{\infty\to\infty} = \max_{i=1,\dots,M} \sum_{j=1}^{N} |b_{ij}|$$

Problema 19. Sea $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le M}}$ una matriz $N \times M$.

Interpretando $A : (\mathbb{R}^M, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^N, ||\cdot||_2)$, demuestra que $|||A||| = \sqrt{\lambda^*}$, donde λ^* es el mayor de los autovalores de $A^T A$.

Indicación: *la matriz $A^T A$ es simétrica, y por lo tanto diagonalizable en la base adecuada.*

D/ Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$ los autovalores de A^TA. Observa que $\sigma_1 = \lambda^*$. Como A^TA es simétrica $\exists\ \mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N\}$ b.o. de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$A^TA = U^T \Sigma U$$

con $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_N \end{pmatrix}$. Entonces

$$\|A(x)\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle_2 = \langle A^TAx, x\rangle_2 =$$

$$= \langle U^T\Sigma U x, x\rangle_2 = \langle \Sigma \underbrace{Ux}_{y}, \underbrace{Ux}_{y}\rangle_2 =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_N y_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\rangle_2 = \sigma_1 y_1^2 + \dots + \sigma_N y_N^2 \leq$$

$$\leq \sigma_1 (y_1^2 + \dots + y_N^2) = \sigma_1 \|y\|_2^2 = \sigma_1 \|Ux\|_2^2$$

$$= \sigma_1 \|x\|_2^2 \Rightarrow |||A|||_{2\to 2}^2 \leq \sigma_1$$

Usando un autovector de norma 1 del autovalor σ_1 se obtiene $|||A|||_{2\to 2} \geq \sqrt{\sigma_1}$

Problema 20. (**Atención:** es muy instructivo comparar este ejercicio con el anterior. NO es lo mismo.) Consideramos las matrices

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix},$$

como operadores $A : (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.

a) Demuestra que $|||A(a)||| \geq \sqrt{1+a^2}$.

b) Calcula los autovalores de $A(a)$. Demuestra que no se puede estimar la norma $|||A(a)|||$ a partir de los autovalores obtenidos.

c) Usa el resultado del ejercicio anterior para calcular el valor exacto de $|||A(a)|||$.

a) Tomar $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tenemos $||x_0||_2 = 1$

$||Ax_0||_2 = \left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right|\right|_2 = \sqrt{1+a^2}$

Por tanto, $|||A|||_{2\to 2} \geq ||Ax_0||_2 = \sqrt{1+a^2}$

b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ a & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 1, \lambda = 2$

No se puede obtener la norma con estos autovalores, porque en a) hemos probado que $\lim_{a\to\infty} |||A|||_{2\to 2} = \infty$

c) $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a \\ 2a & 4 \end{pmatrix}$

Autovalores: $\begin{vmatrix} 1+a^2-\lambda & 2a \\ 2a & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(5+a^2) + 4 = 0$

$\lambda = \dfrac{5+a^2 \pm \sqrt{(5+a^2)^2 - 16}}{2} \Rightarrow \lambda^* = \dfrac{5+a^2 + \sqrt{(5+a^2)^2 - 16}}{2}$

$|||A|||_{2\to 2} = \sqrt{\lambda^*}$ (ejercicio 19)