Espacio vectorial euclídeo y hermíticos IV:
Aplicaciones ortogonales y unitarias.

1. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual. Escribir las ecuaciones de las siguientes aplicaciones ortogonales con respecto a la base canónica:

a) Simetría con respecto a la recta $y = 0$. **b) Giro de ángulo $\pi/3$.**

Solución a): En primer lugar buscamos una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que u_1 forme una base de la recta $y = 0$ y u_2 ortogonal a dicha recta. Por ejemplo:

$$u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (0, 1) \Longrightarrow C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = I_2.$$

En la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$ la matriz de la simetría S es de la forma

$$M_{\mathcal{B}_c}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow S(x, y) = (x, -y).$$

Solución b): La matriz de un giro G de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ con respecto a la base canónica es de la forma

$$M_{\mathcal{B}_c}(G) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}_c}(G) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ es

$$M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad o \quad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 & -2 \\ 1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determinar en qué caso f es ortogonal. En caso afirmativo, decidir si corresponde a un giro (en cuyo caso encontrar el ángulo de giro) o a una simetría (en cuyo caso encontrar el eje de simetría).

Solución: Sea $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación ortogonal tal que $M_i = M_{\mathcal{B}}(f_i)$. Para comprobar si f_i son aplicaciones ortogonales vamos en primer lugar a ver si la base $\mathcal{B}$ es ortonormal. Se tiene

$$C = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C \cdot C^t \neq I_3 \Longrightarrow C \text{ no es ortogonal} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ no es ortonormal.}$$

Así que vamos a calcular $M_i' = M_{\mathcal{B}_c}(f_i)$ ya que $\mathcal{B}_c$ es una base ortonormal y para comprobar si f_i es ortogonal será suficiente con ver si M_i' es ortogonal, es decir $M_i' \cdot (M_i')^t$ is la matriz identidad o no. Se tiene

$$M_i' = M_{\mathcal{B}_c}(f_i) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(f_i) C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = C M_i C^{-1},$$

por lo tanto:

$$M_1' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_1' \cdot (M_1')^t = I_2 \Longrightarrow M_1' \text{ es ortogonal} \Longrightarrow f_1 \text{ es ortogonal,}$$

$$M_2' = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2' \cdot (M_2')^t = I_2 \Longrightarrow M_2' \text{ es ortogonal} \Longrightarrow f_2 \text{ es ortogonal.}$$

Vamos a estudiar en primer lugar f_1:

$$M_1' = (M_1')^t \;\; \Longrightarrow f_1 \text{ es un simetría axial.}$$

La recta de simetría es el autoespacio de f_1 de autovalor 1:

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (M_1' - I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(1+\sqrt{2}, 1)\}).$$

<u>Conclusión:</u> f_1 es una simetría con respecto a la recta $\mathcal{L}(\{(1+\sqrt{2}, 1)\})$.

Por último, vamos a estudiar f_2:

$$M_2' \neq (M_2')^t \implies f_2 \text{ es un giro.}$$

Sabemos que se tiene

$$M_2' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \implies (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \implies \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

<u>Conclusión:</u> f_2 es un giro de ángulo $\frac{\pi}{6}$.

---

3. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Decide de manera razonada el resultado de componer:

a) Dos rotaciones en V; b) Dos simetrías en V; c) Una rotación con una simetría.

Solución: Recordemos que si $M = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ es la matriz de una aplicación ortogonal f de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{cases} |M| = 1 \iff f \text{ es un giro} \\ |M| = -1 \iff f \text{ es una simetría axial} \end{cases}$$

Observar que tanto la identidad como la aplicación -identidad se puede ver como un giro de ángulo 0 o π respectivamente.
Ahora sean M_1 y M_2 las matrices de dos aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\left.\begin{array}{lll} a) & \iff & |M_1| = 1 \text{ y } |M_2| = 1 \\ b) & \iff & |M_1| = -1 \text{ y } |M_2| = -1 \\ c) & \iff & |M_1| = 1 \text{ y } |M_2| = -1 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{ll} a) & |M_1 M_2| = 1 \\ b) & |M_1 M_2| = 1 \\ c) & |M_1 M_2| = -1 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{ll} a) & \text{Giro.} \\ b) & \text{Giro.} \\ c) & \text{Simetría axial.} \end{array}$$

---

4. Describe el efecto geométrico de las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \qquad g : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Indica qué tipo de aplicación ortogonal es $f \circ g$ (no es necesario indicar sus elementos geométricos).

Solución a): En primer lugar calculemos la matriz de f con respecto a la base canónica

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que efectivamente es una aplicación ortogonal: $M \cdot M^t = I_2$. Vamos a estudiar f:

$$M \neq M^t \implies f \text{ es un giro.}$$

Sabemos que se tiene

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \implies (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \implies \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

<u>Conclusión:</u> f es un giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

Solución b): En primer lugar calculemos la matriz de f con respecto a la base canónica

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que efectivamente es una aplicación ortogonal: $M \cdot M^t = I_2$. Vamos a estudiar f:

$$M = M^t \implies f \text{ es un simetría axial.}$$

La recta de simetría es el autoespacio de f de autovalor 1:

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (M_f - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(1+\sqrt{2}, 1)\}).$$

<u>Conclusión:</u> f es una simetría con respecto a la recta $\mathcal{L}(\{(1+\sqrt{2}, 1)\})$.

Por último $f \circ g$ es una simetría axial por el ejercicio 3.

---

5. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual. Determinar los endomorfismos ortogonales f de $\mathbb{R}^2$ que verifican:

a) $f^2(x, y) = (x, y)$. **b)** $f^2(x, y) = -(x, y)$.

Solución a): Sea $M = M_{\mathcal{B}}(f)$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f^2(x,y) = (x,y) \\ f \text{ ortogonal} \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} M^2 = I_2 \\ M \cdot M^t = I_2 \end{array}\right\} \implies M = M^t.$$

Por lo tanto f es $\pm$ identidad o una simetría axial.
Solución b): Sea $M = M_{\mathcal{B}}(f)$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f^2(x,y) = -(x,y) \\ f \text{ ortogonal} \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} M^2 = -I_2 \\ M \cdot M^t = I_2 \end{array}\right\} \implies M = -M^t.$$

Por lo tanto f es un giro y se tiene

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \implies \cos(\alpha) = 0.$$

Concluyendo que f es un giro de ángulo $\pm\frac{\pi}{2}$

---

6. Calcular la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de:

a) la simetría respecto del plano $x = y$.
b) la simetría respecto al plano $2x + y + z = 0$.
c) giro de amplitud $\pi/2$ con eje $u = (0, 1, 1)$, con la orientación dada por el vector u.

Solución a): En primer lugar buscamos una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que u_2, u_3 formen una base del plano $x = y$ y u_1 ortogonal a dicho plano. Por ejemplo:

$$u_1 = (1, -1, 0), \quad u_2 = (0, 0, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1) \implies C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la base $\mathcal{B}$ la matriz de la simetría S es de la forma

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies M_{\mathcal{B}_c}(S) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(S) C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Observación:</u> En el caso de las simetría, la base no necesita ser ortonormal. Pero si hubiéramos tomado $\mathcal{B}$ ortonormal nos hubiera facilitado el cálculo de $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1}$, ya que $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{t}$.

Solución b): De forma análoga:

$$u_1 = (2,1,1), \quad u_2 = (1,0,-2), \quad u_3 = (0,1,-1) \Longrightarrow C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así:

$$M_{\mathcal{B}_c}(S) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución c): En este caso la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ necesita ser ortonormal y positivamente orientada. En este caso $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, entonces

$$\begin{array}{l} u_2 \perp u_1 \Longrightarrow u_2 = (1,0,0) \\ u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \end{array} \Longrightarrow C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

En la base $\mathcal{B}$ la matriz del giro G de ángulo $\pi/2$ con eje $u = (0,1,1)$, con la orientación dada por el vector u, es de la forma

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$M_{\mathcal{B}_c}(G) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(G) C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(G) C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observar que $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{t}$, ya que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal.

---

7. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal. Consideramos la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ definida por:

$$3f(u_1) = 2u_1 - 2u_2 + u_3, \quad 3f(u_2) = \alpha u_1 + u_2 - 2u_3, \quad 3f(u_3) = \beta u_1 + \gamma u_2 + 2u_3.$$

Hallar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de manera que f sea una aplicación ortogonal.

Solución: En primer lugar calculemos la matriz de f con respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$M = M_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ -2 & 1 & \gamma \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora utilizamos que f es ortogonal si y sólo si $M \cdot M^t = I_3$:

$$M \cdot M^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + 4 & \beta\gamma + \alpha - 4 & 2\beta - 2\alpha + 2 \\ \beta\gamma + \alpha - 4 & \gamma^2 + 5 & 2\gamma - 4 \\ 2\beta - 2\alpha + 2 & 2\gamma - 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

---

8. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. Demostrar que los siguientes endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales y estudiar de qué tipo, indicando sus elementos geométricos principales.

a) $f(x,y,z) = (z,x,y)$. **b)** $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$.

Solución a): En primer lugar calculemos la matriz de f con respecto a la base canónica

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que efectivamente es una aplicación ortogonal: $M \cdot M^t = I_3$. Vamos a estudiar f:

$$\left.\begin{array}{l} M \neq M^t \\ |M| = -1 \\ \text{traza}(M_f) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es un giro.}$$

Sabemos que existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal y positivamente orientada tal que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

El eje de giro es el autoespacio de f de autovalor 1:

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1)\}).$$

Denotemos $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Como $0 = \text{traza}(M) = 1 + 2\cos(\alpha)$ tenemos que el ángulo de $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$. Para determinar el signo del ángulo vamos a determinar u_2 y u_3:

$$\left.\begin{array}{l} u_2 \perp u_1 \Longrightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \\ u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{sen}(\alpha) = f(u_2) \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto hemos obtenido $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Por lo tanto $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
<u>Conclusión:</u> f es un giro de ángulo $2\frac{\pi}{3}$ con eje de simetría $\mathcal{L}(\{(1, 1, 1)\})$ en la dirección del vector $(1, 1, 1)$.

Solución b): En primer lugar calculemos la matriz de f con respecto a la base canónica

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que efectivamente es una aplicación ortogonal: $M \cdot M^t = I_3$. Vamos a estudiar f:

$$\left.\begin{array}{l} M = M^t \\ |M| = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es un simetría axial.}$$

La recta de simetría es el autoespacio de f de autovalor 1:

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (M_f - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z \right\}.$$

<u>Conclusión:</u> f es una simetría con respecto a la recta de ecuaciones $x = y = z$.

---

9. Determinar cuales de las siguiente aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar habitual) son ortogonales. En caso afirmativo clasificarlas geométricamente (no es necesario indicar sus elementos geométricos).

$$a)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Solución a): Asumimos que la matriz M_a corresponde a la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica. Comprobamos que $M_a \cdot M_a^t = I_3$, por lo tanto corresponde a una aplicación ortogonal. La clasificamos:

$$\left.\begin{array}{l} M_a = M_a^t \\ |M_a| = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Simetría con respecto a un plano.}$$

Solución b): Comprobamos que $M_b \cdot M_b^t = I_3$, por lo tanto corresponde a una aplicación ortogonal. La clasificamos:

$$\left.\begin{array}{l} M_b \neq M_b^t \\ |M_b| = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Antirotación.}$$

Solución c): Comprobamos que $M_c \cdot M_c^t \neq I_3$, por lo tanto no corresponde a una aplicación ortogonal.
Solución d): Comprobamos que $M_d \cdot M_d^t = I_3$, por lo tanto corresponde a una aplicación ortogonal. La clasificamos:

$$\left.\begin{array}{l} M_d \neq M_d^t \\ |M_d| = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Antirotación.}$$

10. Estudia las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ indicando sus elementos geométricos:

$$f : \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z. \end{array}\right. \qquad g : \left\{\begin{array}{l} x' = z \\ y' = -y \\ z' = -x. \end{array}\right.$$

Estudia la composición $f \circ g$ (no es necesario indicar sus elementos geométricos).

Solución: En primer lugar calculemos la matriz de f y g con respecto a la base canónica

$$M_f = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_g = M_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que efectivamente son aplicaciones ortogonales: $M_f \cdot M_f^t = I_3$ y $M_g \cdot M_g^t = I_3$.
Vamos a estudiar en primer lugar la aplicación f:

$$\left.\begin{array}{l} M_f = M_f^t \\ |M_f| = -1 \\ \text{traza}(M_f) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ simetría con respecto a un plano.}$$

El plano de simetría es el autoespacio de f de autovalor 1:

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (M_f - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y\sqrt{2} - z = 0 \right\}.$$

<u>Conclusión f:</u> f es una simetría con respecto al plano de ecuación $x - y\sqrt{2} - z = 0$.
Ahora vamos a estudiar g:

$$\left.\begin{array}{l} M_g \neq M_g^t \\ |M_g| = -1 \\ \text{traza}(M_g) = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ antirotación o giro compuesto con simetría con respecto a un plano.}$$

Sabemos que existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal y positivamente orientada tal que

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

El eje de giro es el autoespacio de g de autovalor -1:

$$L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (M_g + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(0,1,0)\}).$$

Denotemos $u_1 = (0,1,0)$. Como $-1 = \text{traza}(M) = -1 + 2\cos(\alpha)$ tenemos que el ángulo de $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$. Para determinar el signo del ángulo vamos a determinar u_2 y u_3:

$$\left.\begin{array}{l} u_2 \perp u_1 \Longrightarrow u_2 = (1,0,0) \\ u_3 = u_1 \times u_2 = (0,0,-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{sen}(\alpha) = g(u_2)\cdot u_3 = (0,0,-1)\cdot(0,0,-1) = 1$$

Por lo tanto hemos obtenido $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) = (0,1)$. Por lo tanto $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Por último nos falta por determinar el plano de simetría. Este es ortogonal a la recta L. Por lo tanto tiene ecuación $y = 0$.
Conclusión g: g es una composición de un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ con eje de simetría $\mathcal{L}(\{(0,1,0)\})$ en la dirección del vector $(0,1,0)$ y una simetría con respecto al plano $y = 0$.
Para finalizar vamos a calcular la composición de f y g:

$$M_{fg} = M_{\mathcal{B}_c}(f\circ g) = M_{\mathcal{B}_c}(f)\cdot M_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{gf} = M_{\mathcal{B}_c}(g\circ f) = M_{\mathcal{B}_c}(g)\cdot M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tanto para $M = M_{fg}$ o $M = M_{gf}$ se tiene

$$\left.\begin{array}{l} M \neq M^t \\ |M| = 1 \\ \text{traza}(M) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (f\circ g) \text{ y } (g\circ f) \text{ son giros.}$$

---

11. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y tomamos la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ donde $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$ y $u_3 = (1,2,0)$. Estudiar si son ortogonales los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados en esa base por las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Sea $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación ortogonal tal que $M_i = M_{\mathcal{B}}(f_i)$. Para comprobar si f_i son aplicaciones ortogonales vamos en primer lugar a ver si la base $\mathcal{B}$ es ortonormal. Se tiene

$$C = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C\cdot C^t \neq I_3 \Longrightarrow C \text{ no es ortogonal} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ no es ortonormal.}$$

Así que vamos a calcular $M_i' = M_{\mathcal{B}_c}(f_i)$ ya que $\mathcal{B}_c$ es una base ortonormal y para comprobar si f_i es ortogonal será suficiente con ver si M_i' es ortogonal, es decir $M_i'\cdot(M_i')^t$ is la matriz identidad o no. Se tiene

$$M_i' = M_{\mathcal{B}_c}(f_i) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(f_i) C^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = C M_i C^{-1},$$

por lo tanto:

$$M_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_1'\cdot(M_1')^t \neq I_3 \Longrightarrow M_1' \text{ no es ortogonal} \Longrightarrow f_1 \text{ no es ortogonal,}$$

$$M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2'\cdot(M_2')^t \neq I_3 \Longrightarrow M_2' \text{ no es ortogonal} \Longrightarrow f_2 \text{ no es ortogonal,}$$

$$M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_3'\cdot(M_3')^t = I_3 \Longrightarrow M_3' \text{ es ortogonal} \Longrightarrow f_3 \text{ es ortogonal.}$$

12. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo o hermítico y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación tal que $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Demostrar que f es lineal. (Sugerencia: Calcular $\|f(u+v) - f(u) - f(v)\|$ y $\|f(\alpha u) - \alpha f(u)\|$).

Solución: Veamos que f es lineal, es decir para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(u+v) & = & f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) & = & \alpha f(u) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \|f(u+v) - f(u) - f(v)\| = 0 \\ \|f(\alpha u) - \alpha f(u)\| = 0 \end{array} \right\}$$

Vamos a utilizar la hipótesis del enunciado $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ y las siguiente propiedades de producto escalar o hermítico:

$$\begin{array}{l} \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle; \\ \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle. \end{array}$$

Veamos la primera igualdad:

$$\begin{array}{rcl} \|f(u+v) - f(u) - f(v)\|^2 & = & \langle f(u+v) - f(u) - f(v), f(u+v) - f(u) - f(v)\rangle = \\ & = & \langle f(u+v) - f(u) - f(v), f(u+v)\rangle \\ & & +\langle f(u+v) - f(u) - f(v), -f(u)\rangle \\ & & +\langle f(u+v) - f(u) - f(v), -f(v)\rangle \\ & = & \langle f(u+v), f(u+v)\rangle + \langle -f(u), f(u+v)\rangle + \langle -f(v), f(u+v)\rangle \\ & & +\langle f(u+v), -f(u)\rangle + \langle -f(u), -f(u)\rangle + \langle -f(v), -f(u)\rangle \\ & & +\langle f(u+v), -f(v)\rangle + \langle -f(u), -f(v)\rangle + \langle -f(v), -f(v)\rangle \\ & = & \langle f(u+v), f(u+v)\rangle - \langle f(u), f(u+v)\rangle - \langle f(v), f(u+v)\rangle \\ & & -\langle f(u+v), f(u)\rangle + \langle f(u), f(u)\rangle + \langle f(v), f(u)\rangle \\ & & -\langle f(u+v), f(v)\rangle + \langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle \\ & = & \langle u+v, u+v\rangle - \langle u, u+v\rangle - \langle v, u+v\rangle \\ & & -\langle u+v, u\rangle + \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle \\ & & -\langle u+v, v\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ & = & \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle - \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle \\ & & -\langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle + \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle \\ & & -\langle u, v\rangle - \langle v, v\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

Ahora la segunda igualdad:

$$\begin{array}{rcl} \|f(\alpha u) - \alpha f(u)\| & = & \langle f(\alpha u) - \alpha f(u), f(\alpha u) - \alpha f(u)\rangle \\ & = & \langle f(\alpha u), f(\alpha u) - \alpha f(u)\rangle + \langle -\alpha f(u), f(\alpha u) - \alpha f(u)\rangle \\ & = & \langle f(\alpha u), f(\alpha u)\rangle + \langle f(\alpha u), -\alpha f(u)\rangle + \langle -\alpha f(u), f(\alpha u)\rangle + \langle -\alpha f(u), -\alpha f(u)\rangle \\ & = & \langle f(\alpha u), f(\alpha u)\rangle - \overline{\alpha}\langle f(\alpha u), f(u)\rangle - \alpha\langle f(u), f(\alpha u)\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle f(u), f(u)\rangle \\ & = & \langle \alpha u, \alpha u\rangle - \overline{\alpha}\langle \alpha u, u\rangle - \alpha\langle u, \alpha u\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle u, u\rangle \\ & = & \alpha\overline{\alpha}\langle u, u\rangle - \overline{\alpha}\alpha\langle u, u\rangle - \alpha\overline{\alpha}\langle u, u\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle \alpha u, u\rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

---

13. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ que cumple $\langle u + f(u), u - f(u)\rangle = 0$ para todo $u \in V$.

a) Comprobar que f es ortogonal.

b) Supongamos que existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(u) + u$ es proporcional a v para todo $u \in V$ y la constante de proporcionalidad es no nula. ¿Qué endormorfismo es f?

Solución: *(a)* Desarrollando la hipótesis del enunciado:

$$0 = \langle u + f(u), u - f(u)\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, f(u)\rangle + \langle f(u), u\rangle - \langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle - \langle f(u), f(u)\rangle,$$

donde la última igualdad se debe a que el producto escalar es simétrico y por lo tanto $\langle u, f(u)\rangle = \langle f(u), u\rangle$. Así hemos obtenido: $\|f(u)\| = \|u\|$ y esto implica que f es ortogonal.

Solución: (b) En primer lugar el enunciado nos dice que existe $v \in V$, $v \neq 0_V$ tal que para todo $u \in V$ se tiene

$$f(u) + u = \lambda_u v$$

para $\lambda_u \in \mathbb{R}$ que depende de u. En particular si $u = v$ se tiene

$$f(v) + v = \lambda_v v \Longleftrightarrow f(v) = (\lambda_v - 1)v \tag{1}$$

Por el apartado anterior sabemos que f es ortogonal, por lo tanto $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2 = (\lambda_v - 1)^2\|v\|^2$, donde la última igualdad viene de (1). Así que $(\lambda_v - 1)^2 = 1$, que simplificando se obtiene $\lambda_v = 0$ o $\lambda_v = 2$.

- $\underline{\lambda_v = 0}$: Entonces $f(v) = -v$. Utilizando que f es ortogonal tenemos que $\forall u \in V$:

  $$\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle -u + \lambda_u v, -v\rangle = \langle u, v\rangle - \lambda_u\langle v, v\rangle \Longrightarrow \lambda_u = 0 \Longrightarrow f(u) = -u.$$

  Concluimos que $f = -id_V$.

- $\underline{\lambda_v = 2}$: Entonces $f(v) = v$. Utilizando de nuevo que f es ortogonal tenemos que $\forall u \in V$:

  $$\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle -u+\lambda_u v, v\rangle = -\langle u, v\rangle+\lambda_u\langle v, v\rangle \Longrightarrow \lambda_u = 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \Longrightarrow f(u) = 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v-u.$$

  Es decir que si $L = \mathcal{L}\{v\}$ es la recta generada por el vector v, entonces $P_L(u) = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$ es la proyección ortogonal de u sobre L. Así que tenemos

  $$f(u) = 2P_L(u) - u = u + 2(P_L(u) - u).$$

  Concluimos que f es una simetría axial con respecto a la recta L.

---

14. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo o hermítico y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal tal que $\|f(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in V$. Demostrar que $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$.

Solución: Vamos a utilizar la identidad de polarización. Para espacios hermíticos nos dice que para todo vector $u, v \in V$:

$$4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

Para espacios eucídeos basta con tomar la parte real de la anterior igualdad. Esto es:

$$4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

Veamos la demostración en el caso hermítico ya que la correspondiente al caso euclídeo es completamente análogo. Vamos a partir de la identidad de polarización para los vectores $f(u), f(v)$:

$$\begin{aligned}
4\langle f(u), f(v)\rangle &= \|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2 + i\|f(u) + if(v)\|^2 - i\|f(u) - if(v)\|^2 \\
&= \|f(u + v)\|^2 - \|f(u - v)\|^2 + i\|f(u + iv)\|^2 - i\|f(u - iv)\|^2 \\
&= \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 \\
&= 4\langle u, v\rangle \\
&\Longrightarrow \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que f es lineal y en la tercera que $\|f(w)\| = \|w\|$.

---

15. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $S : V \to V$ es una simetría si $S^2 = I_V$. El subespacio $W_1 = \mathbf{Ker}(S + I_V)$ es la *dirección de la simetría* y el subespacio $W_2 = \mathbf{Ker}(S - I_V)$ es el *subespacio respecto al que se hace la simetría*.

a) Demuestra que una simetría siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \mathbf{Ker}(S + I_V) \oplus \mathbf{Ker}(S - I_V)$.

c) Observa que cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W_1 y otro en W_2, i.e., $u = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Demuestra que $S(u) = w_2 - w_1$.

d) Supongamos que es V un espacio vectorial euclídeo o hermítico. Demuestra que una

simetría es autoadjunta si y sólo si $W_1 \perp W_2$ (cuando $W_1 \perp W_2$ se dice que la simetría es ortogonal).

e) Demuestra que una simetría es una aplicación ortogonal (o unitaria) si y sólo si la simetría es ortogonal.

Solución b): En primer lugar demostremos b), es decir, veamos que $V = W_1 \oplus W_2$:

- $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$: Sea $v \in W_1 \cap W_2$, entonces

$$\begin{aligned} v \in W_1 &\Longrightarrow S(v) = -v \\ v \in W_2 &\Longrightarrow S(v) = v \end{aligned}$$

  Por lo tanto $2v = 0_V$ y concluimos $v = 0_V$.

- $W_1 + W_2 = V$: Sea $v \in V$, entonces

$$v = v_1 + v_2 \quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(v - S(v)) \Longrightarrow S(v_1) = \frac{1}{2}(S(v) - S^2(v)) = \frac{1}{2}(S(v) - v) = -v_1 \Longrightarrow v_1 \in W_1 \\ v_2 = \frac{1}{2}(v + S(v)) \Longrightarrow S(v_2) = \frac{1}{2}(S(v) + S^2(v)) = \frac{1}{2}(S(v) + v) = v_2 \Longrightarrow v_2 \in W_2 \end{cases}$$

Solución c): En particular, $S(v) = S(v_1) + S(v_2) = v_2 - v_1$.

Solución a): Por el apartado b) sabemos que tenemos $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_s\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{u_{s+1}, \dots, u_n\}$ bases de W_1 y W_2 respectivamente tal que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V. Obsérvese que se tiene $S(u_i) = -u_i$ para $u_i \in \mathcal{B}_1$ y $S(u_j) = u_j$ para $u_j \in \mathcal{B}_2$. Así que $\mathcal{B}$ es una base de V formada por autovectores de S. Es decir, S es diagonalizable.

Solución d): Recordemos que S es autoadjunta si $\langle S(u), v\rangle = \langle u, S(v)\rangle$ para todo $u, v \in V$. Veamos que S autoadjunta $\Longleftrightarrow W_1 \perp W_2$.

$\Longrightarrow$ Sea $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $S(v_1) = -v_1$ y $S(v_2) = v_2$. Veamos que $v_1 \perp v_2$ utilizando que S es autoadjunta y que $S^2 = I_V$:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle -S(v_1), S(v_2)\rangle = \langle -v_1, S^2(v_2)\rangle = \langle -v_1, v_2\rangle = -\langle v_1, v_2\rangle.$$

Por lo tanto, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

$\Longleftarrow$ Supongamos $W_1 \perp W_2$. Sean $u, v \in V$ entonces existen $u_i, v_i \in W_i$, $i = 1, 2$, tales que $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$. Además $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ y $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} \langle S(u), v\rangle &= \langle S(u_1) + S(u_2), v_1 + v_2\rangle = \\ &= \langle S(u_1), v_1\rangle + \langle S(u_1), v_2\rangle + \langle S(u_2), v_1\rangle + \langle S(u_2), v_2\rangle = \\ &= \langle -u_1, v_1\rangle + \langle -u_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \\ &= -\langle u_1, v_1\rangle - \langle u_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \\ &= -\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, S(v)\rangle &= \langle u_1 + u_2, S(v_1) + S(v_2)\rangle = \\ &= \langle u_1, S(v_1)\rangle + \langle u_1, S(v_2)\rangle + \langle u_2, S(v_1)\rangle + \langle u_2, S(v_2)\rangle = \\ &= \langle u_1, -v_1\rangle + \langle u_1, v_2\rangle + \langle u_2, -v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \\ &= -\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_1, v_2\rangle - \langle u_2, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \\ &= -\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle S(u), v\rangle = \langle u, S(v)\rangle$.

Solución e): Recordemos que S es ortogonal si $\langle S(u), S(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Veamos que S ortogonal $\Longleftrightarrow W_1 \perp W_2$.

$\Longrightarrow$ Sea $u \in W_1$, $v \in W_2$, entonces $S(u) = -u$ y $S(v) = v$. Por lo tanto

$$\langle u, v\rangle = \langle S(u), S(v)\rangle = \langle -u, v\rangle = -\langle u, v\rangle \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

Por lo tanto $W_1 \perp W_2$.

$\Longleftarrow$ Sean $u, v \in V$ entonces existen $u_i, v_i \in W_i$, $i = 1, 2$, tales que $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$. Además $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle S(u), S(v) \rangle &= \langle S(u_1) + S(u_2), S(v_1) + S(v_2) \rangle = \\
&= \langle S(u_1), S(v_1) \rangle + \langle S(u_1), S(v_2) \rangle + \langle S(u_2), S(v_1) \rangle + \langle S(u_2), S(v_2) \rangle = \\
&= \langle -u_1, -v_1 \rangle + \langle -u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, -v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle = \\
&= \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle = \\
&= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \langle u_1 + u_2, v_1 + v_2 \rangle = \\
&= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle = \\
&= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle S(u), S(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

---

16. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$:

a) Encuentra la expresión en coordendas de la simetría ortogonal respecto a la recta $l = \{x - iz = 0, y = 0\}$. ¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

b) Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$. ¿Es autoadjunta?

Solución (a): Vamos a buscar una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ ytal que $l = \mathcal{L}(\{u_1\})$ y $l^\perp = \mathcal{L}(\{u_1, u_2\})$. Tenemos

$$l = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ : \ \begin{array}{r} x - iz = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(i, 0, 1)\}).$$

Entonces

$$l^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot \overline{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ : \ z - xi = 0 \right\} = \mathcal{L}(\{(0, 1, 0), (1, 0, i)\}).$$

Así tenemos que la matriz de la simetría ortogonal S con respecto a la recta l en la base $\mathcal{B} = \{(i, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, i)\}$ es:

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la matriz de cambio de base

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$M_{\mathcal{B}_c}(S) = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}}(S) C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $S(x, y, z) = (iz, -y, -iz)$.
Solución (b): En este caso tenemos

$$l = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ : \ \begin{array}{r} x - (1+i)z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(1+i, 0, 1)\}).$$

Por lo tanto la proyección ortogonal Pr sobre la recta l viene dado por

$$\mathrm{Pr}(x, y, z) = \frac{\langle (x, y, z), (1+i, 0, 1) \rangle}{\langle (1+i, 0, 1), (1+i, 0, 1) \rangle}(1+i, 0, 1) = \frac{x(1-i) + z}{3}(1+i, 0, 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$