

Hoja de ejercicios 4 (Ecuaciones lineales de orden alto. Sistemas)**1.- Resolver**

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3. \end{cases}$$

2.- Sabiendo que $i - 1$ es raíz del polinomio característico, calcular la solución general de

$$y^{(iv)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

3.- Demostrar que si $a_0 \neq 0$ entonces la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^k$ tiene una única solución polinómica y esta es de grado k .**4.-** Hallar la solución general de $y''' - 2y'' + y' = x^2$.**5.-** Sean las funciones vectoriales

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

(a) Demostrar que \vec{x}_1 y \vec{x}_2 son linealmente independientes sobre el eje real.**(b)** Calcular el determinante wronskiano $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ e interpretar el resultado de acuerdo con el apartado anterior.**6.-** Hallar la solución del sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.- Para el siguiente sistema, hallar una matriz fundamental $\Phi = \Phi(t)$ que cumpla $\Phi(0) = \text{Id}$:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

8.- Hallar la solución de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9.- Resolver el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.- Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

11.- Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

12.- Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

13.- Hallar la solución general $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}.$$

Indicación: Es más rápido buscar una solución particular de un tipo especial que aplicar el método de variación de las constantes.**14.-** Resolver

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} \operatorname{cosec} t \\ \sec t \end{pmatrix}.$$

15.- Hallar la solución $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}.$$

Escribir su matriz fundamental Φ en la forma $\Phi(x) = B(x)e^{xL}$, donde $B(x)$ sea una matriz cuyas entradas son funciones periódicas y L una matriz constante.

16.- Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ soluciones de

$$X'' + pX' + qX = 0$$

que cumplen que $X_1(0) = 1$, $X_2(0) = 0$, $X_1'(0) = 0$ y $X_2'(0) = 1$.

(a) Demostrar que $X_1''(0) + q = 0$, $X_2''(0) + p = 0$, y $X_1' = -qX_2$ y $X_2' = X_1 - pX_2$.

(b) Sea A una matriz real 2×2 cualquiera cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$. Demostrar que

$$\exp(tA) = X_1(t)I + X_2(t)A.$$

Indicación: Usar el teorema de Cayley-Hamilton.