Cálculo Numérico I

CURSO 2020-2021 | Hoja de problemas 8 | 1º MAT./2º D.G.

1) Hallar los polinomios interpoladores de segundo grado con nodos en $0, 1, -1$ y estimar el error máximo de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$ para las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$;

c) $f(x) = 1/(x + 2)$.

2) Para la función $\sin(x)$:

a) Hallar el polinomio interpolador de tercer grado con nodos en $0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$ y dar una cota superior para el error en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Hallar el polinomio interpolador de cuarto grado con nodos en $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ y dar una cota superior para el error en el intervalo $[0, \pi]$.

3) Se considera el polinomio $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ para nodos igualmente espaciados entre sí a una distancia h.

a) Demostrar que $|\pi_n(x)| \leq n!h^{n+1}$ si $x_0 \leq x \leq x_n$.

b) Si $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ con nodos igualmente espaciados, usar el resultado anterior para demostrar que

$$\max_{0\leq x\leq 1} |e^x - P_n(x)| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

4) Sea $f(x) = x^{27} - 10x^{16} + 12$, sean $\{x_j\}_{j=0}^{26}$ unos 27 números reales tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y sea p el polinomio interpolador de f en estos nodos. Demostrar que

$$f(x) - p(x) = \prod_{j=0}^{26}(x - x_j).$$

5) Sean $\{x_k\}_{k=-N}^{N} = \{x_{-N}, x_{-N+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$ unos $2N + 1$ números reales distintos tales que $x_0 = 0$ y $x_{-k} = -x_k$ para todo $k = 1, \ldots, N$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, es decir tal que $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que el polinomio p, interpolador de f en esos nodos, es una función impar. Deducir que p tiene grado $\leq 2N - 1$.

6) Sean $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ $n + 1$ nodos distintos en $\mathbb{R}$. Denotamos por $L_j(x) = \prod_{k=0}^{n}{}_{k\neq j} \dfrac{x - x_k}{x_j - x_k}$ los correspondientes polinomios característicos (o elementales) de Lagrange ($j = 0, \ldots, n$).

a) Dado un punto $x \in \mathbb{R}$ y una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, estimar el número de operaciones aritméticas necesarias para obtener el valor $L_3(x)$, y el número de operaciones aritméticas necesarias para calcular el valor $p(x)$, donde p es el polinomio interpolador de f en la forma de Lagrange con los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$.

b) Sea

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Demostrar que

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} (V^{-1})_{kj}\, x^k.$$

7) Se considera la función $f(x) = 2^{x+1}$.

a) Escribir el polinomio interpolador Q de esta función con nodos en $-1, 0, 2$.

b) Dar una cota superior para el error en el intervalo $[-1, 2]$.

c) Sea $P_t(x)$ el polinomio interpolador con nodos en $-1, 0, t$, donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro (de forma que $P_2 = Q$). Escribir P_t para un t general.

d) Calcular el límite $\lim_{t \to +\infty} P_t(x)$ (en función de x).

Indicación: Distinguir los casos cuando $-1 < x < 0$; $x = -1$ o $x = 0$; $x \notin [-1, 0]$.

8) Se indique por $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$, y sea $X = \{x_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos: $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Sean $\{L_j\}_{j=0}^n \subset \mathcal{P}_n$ los polinomios elementales de Lagrange asociados a X, y sean $\{N_k\}_{k=0}^n \subset \mathcal{P}_n$ los polinomios elementales de Newton asociados a X.

Si $n = 3$ y $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 8$, escribir el valor numérico de las constantes $\{c_k^{(j)} : j = 1, 2, 3,\ k = 0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ tales que

$$L_j = \sum_{k=0}^{2} c_k^{(j)} N_k.$$

9) Sea $p_n \in \mathcal{P}_n$ el polinomio interpolador de la función $f(x) = \sin(x)$ sobre los nodos $x_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{n}\pi$, por $i = 0, \ldots, n$, y sea

$$D_n = \sup_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_{n-1}(x)|.$$

Demostrar que $\lim_{n \to \infty} D_n = 0$.

10) Sean $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ los polinomios definidos por

$$T_0(x) = 1\ , \quad T_1(x) = x\ , \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n \geq 2.$$

Demostrar que $T_n \in \mathcal{P}_n$ para todo n, y escribir explicitamente T_6 y sus ceros.

11) Dados $c > 0$, $n > 0$ y $a < b$, sean $f(x) = e^{cx}$ y $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ nodos equiespaciados tales que $x_0 = a, x_n = b$.

a) Demostrar que existe un único polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ que satisface

$$p_n(x_k) = f(x_k) \quad \text{para todo } k = 0, \ldots, n; \tag{1}$$

escribir explicitamente x_k en función de k, a, b y n

b) Demostrar que existe un numero real M que depende unicamente de a, b, c y n tal que, para todo $x \in [a, b]$, tenemos $|f(x) - p_n(x)| \leq M$. Dar una estimación del valor de M.

c) Si $n = 2$, decimos $P_{a,b}(x) = p_1(x) = Kx + Q$ el polinomio de grado 1 que satisface (1), y sea $E = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{a,b}(x)|$.

- Calcular K y Q, y escribir E en función de K, Q y c.
- Si decimos $h = b - a$, demostrar que $E \to 0$ cuando $h \to 0$.

d) Imaginamos de dividir el intervalo $[-1, 1]$ en N subintervalos adyacentes, cada uno de longitud $h > 0$, y en cada uno de estos aproximar f con la recta que pasa por los extremos del subintervalo. Encontrar un valor de N tal que si cogemos almenos N subintervalos el error de aproximación no será mas grande que 10^{-4} (no hace falta que sea óptimo).