RESPUESTAS AL EXAMEN

Ejercicio 1

a) $k \leq n$ porque n es el cardinal de una base de V y sabemos que todo conjunto de vectores linealmente independientes se puede ampliar a una base.

b)

b.1 No es cierto. Por ejemplo la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x,y)$ no es inyectiva porque $f(0,0,1) = \vec{0}$. Pero si tomamos los vectores $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ sí se cumple que v_1, v_2 son l.i. y $f(v_1) = (1,0)$, $f(v_2) = (0,1)$ también lo son.

b.2 Si $k = n$, entonces $\{v_1, .., v_k\}$ es una base de V y en este caso el hecho de que $f(v_1), .., f(v_k)$ sean l.i sí implica que f es inyectiva, i.e. que $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Veamoslo: Sea $v \in \operatorname{Ker} f$. Podemos escribir $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$, para ciertos $\lambda_i \in K$. Ahora

$$v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \vec{0} = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k) =$$

$$= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_k f(v_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \text{ (porque estamos asumiendo que } f(v_1), .., f(v_k) \text{ son l.i) } \Rightarrow$$

$$v = 0 \cdot v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_k = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{v = \vec{0}}}.$$

Ejercicio 2

a) $F\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = (0,-1,1,1) = 1\cdot(1,0,0,0) - 1(1,1,0,0) + 1(0,0,1,1) + /$

$F\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = (0,-2,2,2) = 2\cdot(1,0,0,0) - 2(1,1,0,0) + 2(0,0,1,1) + /$

$F\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = (1,-2,5,4) = 3(1,0,0,0) - 2(1,1,0,0) + 4(0,0,1,1) + 1\cdot(0,0,1,0)$

$F\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = (1,2,1,0) = -(1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + / + 1(0,0,1,0)$

Luego $A = M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix}1&2&3&-1\\-1&-2&-2&2\\1&2&4&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

b) Transformamos A mediante operaciones de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\-1&-2&-2&2\\1&2&4&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&0&1&1\\0&0&2&2\\0&0&1&1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- Vemos que rango(A) = 2 y que la 1ª y la 3ª columna son l.i.

Por tanto una base de Im f está dada por $\left\{F\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = (0,-1,1,1),\ F\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = (1,-2,5,4)\right.$

- Para encontrar una base de Ker F buscamos las soluciones (x_1,x_2,x_3,x_4) del sistema homogéneo que la matriz A representa (espacio nulo)

$$\left.\begin{array}{r}x_1+2x_2+4x_3=0\\x_3+x_4=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=-2x_2+4x_4\\x_3=-x_4\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Base del espacio nulo: } \left\{\begin{array}{l}(-2,1,0,0)\\(4,0,-1,1)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{Base de Ker}F = \left\{-2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-1,&1\\0,&0\end{pmatrix}}},\ 4\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}4,&0\\0,&1\end{pmatrix}}}\right\}$$

c) $\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1,&1\\1,&1\end{pmatrix} \Rightarrow$ las coordenadas de $F\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ en la base B_2 son:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}5\\-3\\7\\2\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3

a) Estudiamos la relación de dependencia lineal entre estos vectores usando una matriz de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Vemos que

$\dim W_1 = 2$ y una base es $\{v_1, v_2\}$

$\dim W_2 = 2$ " " " " $\{v_4, v_5\}$

$\dim(W_1+W_2) = 3$ " " " $\{v_1, v_2, v_4\}$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1+W_2) = 2+2-3 = 1$

Una solución del sistema lineal homogéneo representado por esta matriz de Gauss es $(3,1,0,-1,1)$. Esto significa que $3v_1 + v_2 + \underline{0 v_3} - v_4 + v_5 = 0 \Rightarrow \underbrace{v_5 - v_4}_{\in W_1} = -3\underbrace{v_1 - v_2}_{\in W_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v_5 - v_4} \in W_1 \cap W_2$ y como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, es una base de $W_1 \cap$

b) Si cambiamos v_5 por v_5' el mismo procedimiento nos lleva a una matriz reducida de Gauss de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \text{ Por tanto } \begin{cases} \dim W_1 = 2 \to \text{base } \{v_1, v_2\} \\ \dim W_2 = 2 \to \text{base } \{v_4, v_5'\} \\ \dim(W_1+W_2) = 4 \to \text{base } \{v_1, v_2, v_4, v_5'\} \\ \dim W_1 \cap W_2 = 0 . \end{cases}$$

(Observación: $\dim(W_1+W_2) = 4 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$, luego aquí vale cualquier base de $\mathbb{R}^4$).