lema: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A = U \Sigma V^*$ su SVD

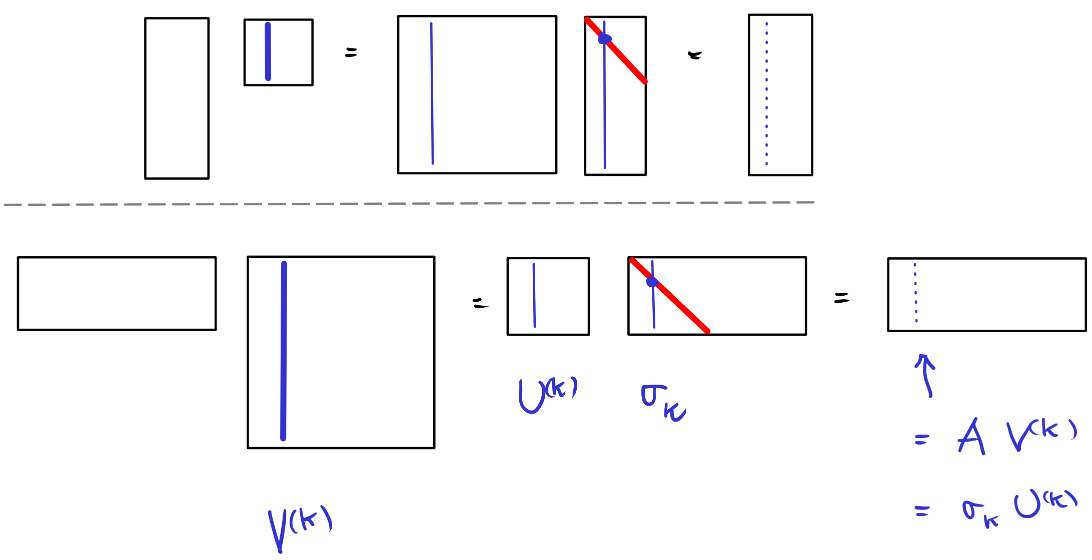
y sea $p = \min\{n, m\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\, V^{(k)} = \sigma_k\, U^{(k)} \\ A^*\, U^{(k)} = \sigma_k\, V^{(k)} \end{cases} \quad \forall\, k \in \{1..p\}$$

vectores columna

demo:

- $A \; V = U \; \Sigma$



- para la otra identidad: $A^* U = V \Sigma^*$

observación:

- $A = U \Sigma V^* \iff A^* = V \Sigma^* U^*$

  ambas son SVD

- en el procedimiento para calcular SVD hemos dicho empezar con $A^*A = V \Lambda V^*$ y de allí obtener U: $AV = U\Sigma$

  también podemos empezar con $AA^* = U \Lambda U^*$ y de allí obtener V: $A^*U = V\Sigma^*$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- empezamos con $A^*A = V \Sigma^t \Sigma V^*$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

- $A^*A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A^*A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ autovalor 0
- $A^*A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow A^*A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma^t \Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}}_{V^*}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$AV = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & -2 & 0 \\ \sqrt{10} & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{(1)} & U^{(2)} \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

• empezamos con $AA^* = U\Sigma\Sigma^t U^*$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$AA^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^* = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\Sigma\Sigma^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U^*}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma^t}$$

estas condiciones determinan $V^{(k)}$, $k \in \{1..p\}$: $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$

para $V^{(3)}$ hay que usar la condición V unitaria y completar la base ortonormal

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 0 & -1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

esta es distinta de la V anterior:

- por el signo de su segunda columna (corresponde a la diferencia de signo que también hay en la U)
- por el signo de su última columna, que es una cualquier compleción de base ortonormal

volviendo al ejemplo de la clase anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$: si empezamos con AA^* y elegimos como U la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$ obteniendo también $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ahora V está totalmente determinada por

$$A^* U = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ v^{(1)} & v^{(2)} \\ | & | \end{pmatrix} \Sigma^t$$

$$\Rightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$: esta V

- sigue diagonalizando A^*A (que es un múltiplo de la identidad)
- es distinta de la V anterior, porque U se ha tomado distinta