Universidad Autónoma de Madrid Curso 2021-22

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

Estructuras Algebraicas

Primer examen parcial. Martes, 5 de octubre de 2021

APELLIDOS: ____________________
NOMBRE: ____________________ DNI/NIE:____________________ GRUPO: ____________

Ejercicio 2.(5 puntos). Sean H y K dos subgrupos de un grupo G y denotemos por $HK = \{hk : h \in H \text{ y } k \in K\}$ su producto. Se pide:

a) (2 puntos). Demostrar que si H es un subgrupo normal, entonces $HK = KH$.

b) (2 puntos). Dar un ejemplo explícito de un grupo finito G y de dos subgrupos suyos H y K para los que la igualdad $HK = KH$ no se satisfaga.

c) (1 punto). Sea $G = GL_2(\mathbb{R})$ el grupo consistente de las matrices reales 2×2 invertibles y H el subgrupo cíclico generado por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si es posible definir un homomorfismo de G a algún grupo G' de forma que su núcleo sea precisamente H, y si no es posible justificar por qué.

---

a). Por ser H normal tenemos $Hk = kH$ para todo $k \in K$, luego

$$HK = \bigcup_{k\in K} Hk = \bigcup_{k\in K} kH = KH.$$

b). Tomemos como G el grupo dihedral D_6 y como H y K los subgrupos $H = \langle S \rangle$ y $K = \langle SR \rangle$ donde S y R son los generadors de D_6 que satisface las relaciones $S^2 = R^3 = I$ y $SR = R^2S$; entonces $(SR)^2 = SRSR = R^2SSR = R^3 = I$ y se podemos escribir:

$$HK = \langle S \rangle \langle SR \rangle = \{I, S\}\{I, SR\} = \{I, SR, S, S^2R\} = \{I, SR, S, R\}$$

mientras que

$$KH = \langle SR \rangle \langle S \rangle = \{I, SR\}\{I, S\} = \{I, S, SR, SRS\} = \{I, S, SR, R^2S^2\} = \{I, S, SR, R^2\}$$

Y como $R \neq R^2$ vemos que $HK \neq KH$.

c). No es posible porque el núcleo de cualquier homomorfismo es un subgrupo normal y H no lo es. En efecto:

Consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in HB$$

.

Pero $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin BH$ puesto que

$$BA^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}.$$