Cálculo Numérico I

Curso 2020-2021 | Hoja de Problemas 4 | 1º Mat./2º D.G.

1) Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Estudiar también, cuando ambos métodos converjan, cuál lo hace más rápido.

2) Sea $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Escribir las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema $Cx = y$ y demostrar que Jacobi converge si y solamente si Gauss-Seidel converge. ¿Se puede establecer alguna relación entre sus velocidades de convergencia?

3) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema $Ax = b$ se usa el siguiente método iterativo:

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b,$$

a) Encontrar condiciones sobre α, β y γ que garanticen la convergencia de la sucesión de iteradas $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ para todo $x^{(0)}$ y para todo b.

b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ¿qué sucede?

c) Si $\alpha = \gamma = 0$ ¿es cierto que se necesitan tan sólo tres iteraciones para calcular la solución? Razonar la resupesta.

4) Sea A una matriz cuadrada de un tamaño $m \times m$, representada como $A = M - N$, donde las matrices M, N son invertibles. Se plantean dos métodos iterativos para resolver el sistema $Ax = b$:

$$Mx_{n+1} = Nx_n + b; \tag{1}$$

$$Nx_{n+1} = Mx_n - b. \tag{2}$$

a) Demostrar que si en alguno de estos dos casos, los vectores aproximantes $x_n \in \mathbb{R}^m$ tienen un límite x, entonces $Ax = b$.

b) Demostrar que los métodos (1) y (2) no pueden converger a la vez. ¿Pueden los dos métodos ser divergentes?

c) Considerar el caso especial: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, donde $a, b \neq 0$ son parámetros reales. ¿Para qué valores de a y b converge el método (1)? ¿Para qué valores de a y b converge el método (2)?

d) Supongamos que para las matrices del apartado c), el método (1) converge. Demostrar que existe un $\rho \in (0, 1)$ tal que los errores $e_n = x_n - x$ satisfacen $\|e_n\|_2 = \rho^n \|e_0\|_2$ para todo n. ¿Es cierta esta afirmación para las p-normas, en vez de la 2-norma?