4.3. MOVIMIENTOS EN UN ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

Def 4.3.1. Sea $\mathbb{A} = (A, E)$ un espacio afín euclídeo. Una aplicación afín $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ se llama <u>movimiento</u> o <u>isometría</u> si conserva las distancias entre puntos:

$$d(f(p), f(q)) = d(p,q) \qquad \forall p,q \in A.$$

Es fácil comprobar que la composición de dos movimientos f_1 y f_2 en un espacio afín euclídeo es otro movimiento ya que si $p,q \in A$

$$d(f_1 \circ f_2(p), f_1 \circ f_2(q)) = d(f_2(p), f_2(q)) = d(p,q).$$

<u>Proposición 4.3.2</u> Sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento en un espacio afín euclídeo y sea $\tilde{f}: E \to E$ su aplicación lineal asociada. Entonces, $\tilde{f}$ es una aplicación ortogonal.

D/ Recordar que $\tilde{f}$ es ortogonal si conserva la longitud de los vectores. Sean $p,q \in A$ y $\vec{pq} \in E$. Como f es una aplicación afín

$$\|\tilde{f}(\vec{pq})\| = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = d(f(p), f(q)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{movi.}}}{=} d(p,q) = \|\vec{pq}\|.$$

———— x ————

Elijamos un sistema de referencia ortonormal R en $\mathbb{A}$, e.a. de dim n. Las ecuaciones de f en R son

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a + Ax$$

donde A es ~~la~~ matriz de tamaño $n \times n$ de $\tilde{f}$ en R. Entonces A es una matriz ortogonal, e.d. $A^tA = AA^t = I_n$

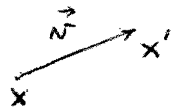
1. Fijado un sistema de referencia ortonormal R en $\mathbb{A}$ podemos identificar $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ usual y $E = \mathbb{R}^n$ usual, para escribir $f(x) = a + Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, con A matriz ortogonal de orden n

2. Como A es ortogonal, $|A| = \pm 1$. Si $|A| = 1$, f se dice <u>directo</u> y si $|A| = -1$, f se dice inverso.

3. Usaremos la clasificación de aplicaciones ortonormales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dada en el capítulo 1 para ~~estud~~ clasificar los movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO A Dado $\vec{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, la traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ es un movimiento y

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$



x

EJEMPLO B. En $\mathbb{R}^2$ una rotación o giro de ángulo α con centro en $P\in\mathbb{R}^n$ es un movimiento que se denotará por $G_{P,\alpha}$. Como $A=\tilde{G}_{P,\alpha}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ las ecuaciones de $G_{P,\alpha}$ en un s. de r. ortonormal son

$$G_{P,\alpha}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

y $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ se determina con el punto fijo: $G_{P,\alpha}(P)=P$.

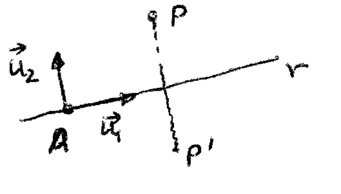
EJEMPLO C. Halla las ecuaciones de la rotación de centro $P=(1,2)$ y ángulo de giro $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

S/ $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Como $P=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ es fijo

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1/\sqrt{2}\\ 2+\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

x

EJEMPLO D. En $\mathbb{R}^2$ una reflexión respecto a una recta r, S_r -simetría- es un movimiento: a cada punto $p\in\mathbb{R}^2$ le hace corresponder el



punto $p'=S_r(p)$ que es el simétrico de P con respecto a r. Todos los puntos de r quedan fijos por S_r.

En una base $\beta'=\{A;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ con $A\in r$, $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ unitarios y $\vec{u}_1\parallel r$ la matriz de $\tilde{S}_r$ es $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Las ecuaciones de S_r en $\beta=\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ se hallan mediante un cambio de base.

EJEMPLO E. Halla las ecuaciones de la reflexion S_r en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta r de ecuación $x+2y=4$

S/ Tomar $\vec{u}_1=(2,1)\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\vec{u}_2=(1,2)\frac{1}{\sqrt{5}}$. En la base $\beta'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$

la matriz de $\tilde{S}_r$ es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de S_r son

$$S_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

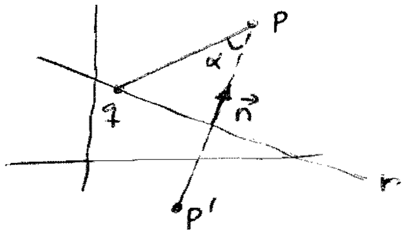
y $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ se calcula usando un punto (cualquiera) de $r: 2x+y=4$, que queda fijo: con $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$S_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x



Sol2/ Las ecuaciones de S_r pueden obtenerse de manera geométrica. Sea $\vec{n}$ un vector unitario $\perp$ a r. Dado $p \in \mathbb{R}^2$

$$p' = S_r(p) = p - \lambda \vec{n}$$

con $\lambda = \|\vec{PP'}\| = 2d(P,r)$. Con $q \in r$ y α como en la figura

$$d(P,r) = \|\vec{QP}\| \cos\alpha = \|\vec{QP}\| \frac{\langle \vec{QP}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{QP}\| \|\vec{n}\|} = \langle \vec{QP}, \vec{n} \rangle$$

Por tanto,

$$p' = S_r(p) = p - 2\langle \vec{QP}, \vec{n} \rangle \vec{n}$$

En el ejemplo, $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ produce

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{5}(x+2y-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

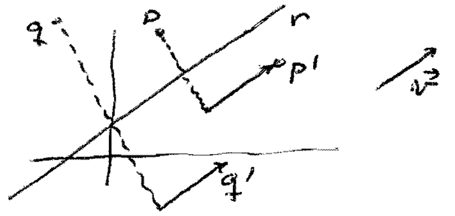
$$= \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x

NOTA: Puede calcularse $A = 2P - I$ con P la matriz de proyección sobre $r: \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ y P se calcula como en § 1.4.

EJEMPLO F. En $\mathbb{R}^2$ una reflexion / simetría con deslizamiento es la composición de una reflexión con respecto a una recta r seguida de una traslación de vector $\vec{v} \parallel r$: $S_{r,\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_r$. Como $\tilde{S}_{r,\vec{v}} = \tilde{T}_{\vec{v}} \circ \tilde{S}_r = \tilde{S}_r$ la parte lineal de $S_{r,\vec{v}}$ se halla como en el ejemplo E.

Ahora, $S_{r,\vec{v}}$ no tiene puntos fijos, pero r es invariante. Con esta información pueden calcularse las ecuaciones de la simetría con deslizamiento.



EJEMPLO G Halla las ~~refle~~ ecuaciones de la reflexion con deslizamiento de eje $r: x+2y=4$ y vector de traslación $\vec{v}=(1,3)$

S/ Sabemos del ejemplo E que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_{r,\vec{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

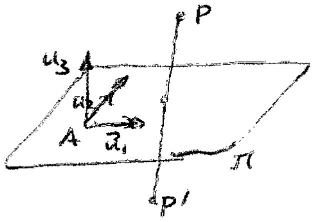
con $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$, $S_{r,\vec{v}}(q) = T_{\vec{v}} \circ S_r(q) = T_{\vec{v}}(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 31/5 \end{pmatrix}$$

| PROBAREMOS: TODOS LOS MOVIMIENTOS DE $\mathbb{R}^2$ SON DE ALGUNO DE LOS TIPOS ANTERIORES |

Ponemos ahora ejemplos de movimientos / isometrías en $\mathbb{R}^3$

EJEMPLO H. En $\mathbb{R}^3$ una reflexión / simetría, S_π, con respecto a un plano π es un movimiento. Todo punto P lo lleva a un punto $P' = S_\pi(P)$ tal que $\vec{PP'} \perp \pi$ y π divide al segmento $\overline{PP'}$ en dos partes iguales. En una base (o.n.) $\beta' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ como en la figura, con $\vec{u}_3 \perp \pi$ la matriz de $\tilde{S}_\pi$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se puede hallar S_π con respecto a $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ realizando un cambio de base.



EJEMPLO I. Halla las ecuaciones de la reflexión en $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano π de ecuación $2x+y+z=2$.

S/ $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \pi$; $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, 2, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$$

En la base $\beta'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, $\tilde{S}_r' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ y en la base $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

$$A=\begin{pmatrix}0&-1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1/\sqrt{3}&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{4}{6}&-\frac{1}{3}-\frac{2}{6}&-\frac{1}{3}-\frac{2}{6}\\-\frac{1}{3}-\frac{2}{6}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}-\frac{2}{6}&-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&-2/3&-2/3\\-2/3&2/3&-1/3\\-2/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

Entonces

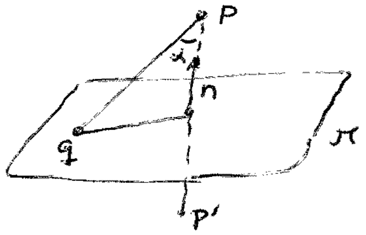
$$S_r\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Hallemos $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ usando que los puntos de S_r quedan fijos: $p=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ produce

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

——— x ———

SOL 2/ El ejemplo I puede resolverse geométricamente, como se hizo en el ejemplo E para la simetría respecto a una recta. La fórmula es



$$p'=S_\pi(p)=p-2\langle\vec{qp},\vec{n}\rangle\vec{n}$$

donde $q\in\pi$ y $\vec{n}$ es un vector unitario normal a π. Para el ejemplo

$$p=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad p'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},\quad q=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

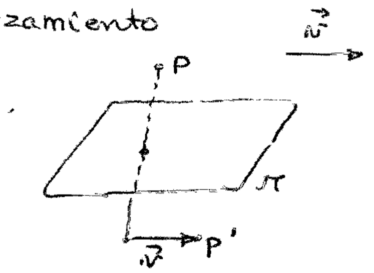
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-2\left\langle\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

——— x ———

NOTA: A puede calcularse con $A=I-2P_{\langle\vec{u}\rangle}$ con $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ y $P_{\langle\vec{u}\rangle}$ tiene como matriz $P_{\langle\vec{u}\rangle}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}(2,1,1)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$. Luego

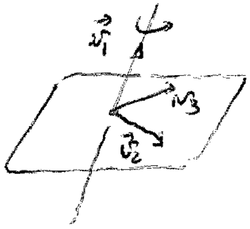
$$A=I-2P_{\langle\vec{u}\rangle}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}.$$

EJEMPLO J. Simetría (con respecto a un plano) con deslizamiento



La composición $S_{\pi,\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_\pi$ de una simetría S_π con respecto al plano π seguida de una traslación de vector $\vec{v} \parallel \pi$ es una simetría con deslizamiento. El plano π no es de puntos fijos, pero es invariante por $S_{\pi,\vec{v}}$ ya que $S_{\pi,\vec{v}}(p) = p+\vec{v}$ si $p \in \pi$. La parte lineal de $S_{\pi,\vec{v}}$ tiene como matriz la de S_π ya que la matriz de $T_{\vec{v}}$ es I. Esto nos permite calcular sus ecuaciones.

EJEMPLO K. La rotación / giro, $G_{r,\alpha}$, de ángulo α respecto a la recta $r: k + t\vec{v}_1$, orientada según $\vec{v}_1$ (unitario) es un movimiento de $\mathbb{R}^3$. En la base $\beta' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ o.n. y positivamente orientada ($\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$) la matriz de $\tilde{G}_{r,\alpha}$ es



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

A partir de aquí se obtiene la matriz A de $\tilde{G}_{r,\alpha}$ en la base $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ con un cambio de base. El punto $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ se halla usando que cualquier punto de r queda fijo.

EJEMPLO L. Halla las ecuaciones del giro de 90° con respecto a la recta $r = p + t\vec{v}$ orientada según $\vec{v} = (1,1,0)$. $(p = (1,0,-1))$

S/ Sea $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En la base $\beta' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ la matriz de $G_{r,\alpha}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y en la base β

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & +1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

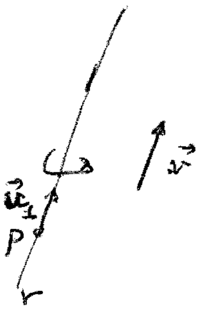
Entonces

$$G_{r,\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Con $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in r$ fijo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 - 1/\sqrt{2} \\ 1/2 + 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/\sqrt{2} \\ -1/2 - 1/\sqrt{2} \\ -1 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO M. Un movimiento helicoidal (MH) en $\mathbb{R}^3$ es la composición de una rotación $G_{r,\alpha}$ orientada y una traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ paralelo a r.



La matriz A de la parte lineal de un movimiento helicoidal es la misma que la de $\tilde{G}_{r,\alpha}$ ya que $\tilde{T}_{\vec{v}} = I$.

Este movimiento no tiene puntos fijos, pero si $p \in r$, $MH(p) = p + \vec{v}$.

EJEMPLO N. Halla las ecuaciones del movimiento helicoidal de ángulo $\alpha = 90^\circ$ con respecto a la recta $r = p + t\vec{u}_1$ con $\vec{u}_1 = (1,1,0)$ ($p = (1,0,-1)$) orientada según $\vec{u}_1$ y vector de traslación $\vec{v} = (-1,0,2)$

Ponerlo paralelo a r por ahora

S/ Del ejemplo L

$$MH\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como $MH\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

——— x ———

EJEMPLO O. Una antirrotación en $\mathbb{R}^3$ es la composición de un giro orientado $G_{r,\alpha}$ y una reflexión con respecto a un plano π, S_π, e.d. $Ar = S_\pi \circ G_{r,\alpha}$, de manera que π es perpendicular a r.

La matriz A de una antirrotación es $A = \tilde{S}_\pi \cdot \tilde{G}_{r,\alpha}$ y ambas matrices, $\tilde{S}_\pi$ y $\tilde{G}_{r,\alpha}$ sabemos calcularlas.

Las antirrotaciones tienen un único punto fijo, que es la intersección de r y π.

——— x ———

Cuando en la próxima sección estudiemos la clasificación de los movimientos/isometrías en $\mathbb{R}^3$ mostraremos que los estudiados son, esencialmente, todos los movimientos posibles en $\mathbb{R}^3$.

4.4. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Movimiento $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = a + Ax$, $a \in \mathbb{R}^n$, A matriz ortogonal. $\boxed{A^tA = AA^t = I}$

$\boxed{\textbf{Lema 4.4.1}.\ \text{Si } A \in O(n),\ \ker(A^t - I) = \ker(A - I)}$

D/ Si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|(A-I)x\| = \|(A - AA^t)x\| = \|A(I - A^t)x\| \underset{\text{A conserva la longitud de los vectores}}{=}$$

$$= \|(I - A^t)x\| = \|(A^t - I)x\| .$$ ∎

$\boxed{\textbf{Lema 4.4.2}.\ \text{Si } A \in O(n),\ \mathrm{Im}(A-I) = (\ker(A-I))^\perp}$

D/ Probaremos a) $\mathrm{Im}(A-I) \subset (\ker(A^t - I))^\perp$

b) $(\mathrm{Im}(A-I))^\perp \subset \ker(A^t - I)$

ya que a) y b) junto con el lema 4.4.1 prueba el lema 4.2.2.

a) Si $\vec{x} \in \mathrm{Im}(A-I)$, $\exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $(A-I)\vec{v} = \vec{x}$. Entonces, para todo $\vec{w} \in \ker(A^t - I)$,

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = \langle (A-I)\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A^t\vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle =$$

$$= \langle \vec{v}, (A^t - I)\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$$

Por tanto $\vec{x} \in (\ker(A^t - I))^\perp$

b) Sea $\vec{x} \in (\mathrm{Im}(A-I))^\perp$. Se tiene

$$\|(A^t - I)\vec{x}\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A conserva longitudes}}}{=} \|A(A^t - I)\vec{x}\|^2 = \|(I - A)x\|^2 = \langle (I-A)x, (I-A)x \rangle$$

$$= \langle x, \underbrace{(I-A)x}_{\in \mathrm{Im}(I-A)} \rangle + \langle A\vec{x}, (I-A)\vec{x} \rangle = 0 + \langle (I - A^t)A\vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$= \langle \underbrace{(A-I)\vec{x}}_{\in \mathrm{Im}(A-I)}, \vec{x} \rangle = 0 \ .\ \text{Por tanto } (A^t - I)\vec{x} = \vec{0}.$$ ∎

———— x ————

Sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\ker(A-I)$. Como $\ker(P)=(\ker(A-I))^\perp$ por el lema 4.4.2 se tiene

$$\underline{\ker(P) = \mathrm{Im}(A-I)} \qquad (1)$$

Lema 4.4.3. Si $f(x)=a+Ax$ es un movimiento en $\mathbb{R}^n$, el punto $d=P(f(x)-x)$ es independiente de $x\in\mathbb{R}^n$ (diremos que d es el vector de <u>deslizamiento</u> de f)

D/ Si $x'=x+v$ es otro punto de $\mathbb{R}^n$,

$$P(f(x')-x') = P(a+Ax'-x') = P(a+Ax+Av-x-v) =$$
$$= P(f(x)-x+(A-I)v) = P(f(x)-x) + P((A-I)v) \overset{(1)}{=} P(f(x)-x). \blacksquare$$

Lema 4.4.4. Un movimiento $f(x)=a+Ax$ en $\mathbb{R}^n$ tiene puntos fijos $\iff d=0$

D/ $\Rightarrow$) Si existe $p\in\mathbb{R}^n$ fijo para f, $d=P(f(p)-p)=P(p-p)=0$

$\Leftarrow$) Si $d=0$, cualquier $x\in\mathbb{R}^n$ satisface $0=d=P(f(x)-x) \Rightarrow f(x)-x\in\ker P \overset{(1)}{=} \mathrm{Im}(A-I)$. Luego existe $v\in\mathbb{R}^n$ tal que $f(x)-x=(A-I)v \iff a+Ax-x=Av-v$ $\iff a+A(x-v)=x-v \iff f(x-v)=x-v$ y por tanto $x-v$ es un punto fijo de f. $\blacksquare$

———— x ————

Lema 4.4.5. Sea $f(x)=a+Ax$ un movimiento en $\mathbb{R}^n$ y $L=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=x+d\}$. Se tiene que L es una var. lineal con dirección $\ker(A-I)$ $(\dim L = \dim(\ker(A-I)))$

NOTA: Llamamos <u>variedad</u> <u>característica</u> de f.

D/ Probamos primero que $L\neq\emptyset$.

Si $x\in\mathbb{R}^n$, $d=P(f(x)-x) \Rightarrow P(d)=P^2(f(x)-x)=$

$= P(f(x)-x) \Rightarrow P(f(x)-x-d) = 0 \Rightarrow f(x)-x-d \in \ker(P)$

$\overset{(1)}{=} \mathrm{Im}(A-I)$. Por tanto, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av - v =$

$= f(x) - x - d \Rightarrow Av - v = a + Ax - x - d \Rightarrow a + A(x-v) = x - v + d$

$\Rightarrow f(x-v) = (x-v) + d$, con lo que $x - v \in L$ y $L \neq \emptyset$.

Tomemos $x_0 \in L$ fijo y $x \in L$ cualquiera. Tenemos que probar que $x - x_0 \in \ker(A-I)$:

$$x - x_0 = (x+d) - (x_0+d) = f(x) - f(x_0) = a + Ax - a - Ax_0 =$$

$$= A(x-x_0) \Rightarrow x - x_0 \in \ker(A-I).$$

4.4.2. Clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = a + Ax, \quad A^tA = AA^t = I$$

De la sección 1.7 tenemos los casos siguientes:

Tipos Autoadjuntos $A = A^t$: en una base adecuada $\beta = \{u_1, u_2\}$ — Movimiento f

	A	Autovalores	$\mathrm{tra}(A)$	Tipo	$d=0$	$d\neq 0$
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$1, 1$	2	$\tilde{f} = \mathrm{Id}.$	Id	Tras.
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$1, -1$	0	$\tilde{f}$ = Simetría en una recta, $\langle \vec{u}_1 \rangle$	Sime/reflexión axial	Sim desliz
3	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-1, -1$	-2	$\tilde{f}$ = Simetría respecto al origen (También giro de ángulo $180^{\underline{o}}$)	Sim central	X

Tipo no Autoadjunto:

	A		$\mathrm{tra}(A)$	Tipo	$d=0$	$d\neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi$		$2\cos\alpha$	$\tilde{f}$ = giro de ángulo α con centro el origen	Giro/rotación	X

1. <u>Identidad y traslaciones</u> (mov. directos)

$f(x) = a + x$: si $a = 0$, f es la identidad $(d = 0)$; si $a \neq 0$, f es una traslación $(d \neq 0)$

2. <u>Simetría axial o simetría deslizante</u> (mov. inversos)

Si $d = 0$, tiene puntos fijos ~~e.d.~~ simetría

Si $d \neq 0$, no tiene puntos fijos e.d. simetría deslizante.

3. <u>Simetría central</u>

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - I) = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$

$$P_{\ker(A-I)} = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \text{tiene puntos fijos}$$

4. <u>Giro o rotación</u>

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \; ; \; |A - I| = 2 - 2\cos\alpha \neq 0 \; (\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi)$$

$\ker(A-I) = \{\vec{0}\}$ y $P_{\ker(A-I)} = 0 \Rightarrow d = 0$ y tiene siempre puntos fijos

———— x ————

<u>Ejemplo A</u>. Identifica el movimiento ~~que~~ en $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones

$$\mathcal{M}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

S/ $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ es autoadjunta; $\operatorname{tra}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ es simetría o simetría deslizante.

$$(A - I) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 \\ 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 \\ 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) x + \frac{1}{2} y = 0$$

$$\ker(A - I) = \left\langle \vec{u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Sección 1.4)
$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + (2-\sqrt{3})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} (1, 2-\sqrt{3}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8 - 4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 7-4\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tomando $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$

$$d=P\left(f(0)-0\right)=P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 2-\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & 7-4\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}\neq 0$$

No tiene puntos fijo: es una simetría deslizante.

$$L:\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}\iff$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8-4\sqrt{3}}-1\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$L:\ \frac{1}{2}x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)y=\frac{1}{4}$$

Esta es la recta característica (invariante)

Con $p=(\frac{1}{2},0)\in L$,

$$p'=f(p)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}+1\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}\text{. luego}$$

$$\vec{v}=\vec{pp'}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}+1\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Observa que $\vec{v}=d$ (vector de deslizamiento) p.q

$$\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8+4\sqrt{3}}{64-48}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8+4\sqrt{3}}{16}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

x

<u>EJEMPLO B</u> Identifica el movimiento $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

S/ $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\underset{\text{traA}=0}{\text{autoadjunta}}$; simetría o simetría con deslizamiento

$(A-I)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $\ker(A-I)=\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$; $P_{\ker(A-I)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$d=P(f(0)-0)=P\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vector de deslizamiento ($d\neq 0$ sim-desl.)

$L:\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\iff x=1$

recta de simetría

x

4.4.3. Clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^3$

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = a + Ax, \quad A^tA = AA^t = I$$

Tipos Autoadjuntos ($A = A^t$)

	Autovalores	A en una base adecuada $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ o.n.	Traza(A)	Tipo de $\tilde{f}$
1.	1, 1, 1	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	3	Identidad
2.	1, 1, -1	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	1	Reflexión/simetría en el plano $W = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ $\tilde{S}_W$
3.	1, -1, -1	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	-1	Reflexión/simetría axial en la recta $L = <\vec{u}_1>$ $\tilde{S}_{D,\alpha}$ (También rotación de 180°)
4.	-1, -1, -1	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	-3	~~Reflexión~~ Simetría central $\tilde{S}_0$ en el origen. (También antirotación de 360°)

Tipos No Autoadjuntos ($A \neq A^t$)

	det(A)			
5.	1	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ En base orientada β $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$	$1 + 2\cos\alpha$ ($\operatorname{sen}\alpha = \langle A\vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle$)	Rotación axial/Giro con respecto a recta $r = p + <\vec{u}_1>$ orientada según $\vec{u}_1$: $\tilde{G}_{r,\alpha}$
6.	-1	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ En una base orientada β $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$	$-1 + 2\cos\alpha$ ($\operatorname{sen}\alpha = \langle A\vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle$)	Antirrotación / $\tilde{S}_\pi \circ \tilde{G}_{r,\alpha}$ con recta $r = p + <\vec{u}_1>$ y plano $\pi = <\vec{u}_2, \vec{u}_3>$ perp a r.

Para clasificar los movimientos f de $\mathbb{R}^3$ solo hay que estudiar d en cada uno de los casos anteriores. Recuerda

$$d = P_{\ker(A-I)}(f(x) - x) \quad \text{para cualquier } x \in \mathbb{R}^n \text{ (p.e. } x = 0\text{) (Deslizamiento)}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x + d\} \text{ (variedad característica)}$$

1. Identidad y traslaciones

1a) Si $d=0$, identidad ($L=\mathbb{R}^3$, todos los punto de $\mathbb{R}^3$ fijos)

1b) Si $d\neq 0$, traslación de vector d ($L=\mathbb{R}^3$)

---

2. Reflexión/ simetría o Simetría deslizante

2a) Si $d=0$ (hay puntos fijos) Reflexión o simetría con respecto a un plano $\pi = L = \ker(A-I) = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$

2b) Si $d\neq 0$ (No hay puntos fijos) Simetría deslizante con respecto al plano $\pi = L = a_0 + \ker(A-I) = a_0 + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ y vector de traslación d.

---

3. Reflexión / simetría axial ~~con o sin deslizamiento~~

3a) Si $d=0$ (hay puntos fijos) Reflexion o simetría axial con respecto a la recta $r = L = \underbrace{\ker(A-I)}_{a_0 +} = \langle \vec{u}_1 \rangle$ $a_0 +$

3b) Si $d\neq 0$ (No hay puntos fijos) Reflexión o simetría axial con respecto a la recta $r = L = a_0 + \ker(A-I) = a_0 + \langle \vec{u}_1 \rangle$ y vector de traslación d (Mov. helicoidal con $\alpha = \pi$)

---

4. Reflexión / simetría central

Como $A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\ker(A-I) = \{\vec{0}\}$ y $P_{\ker(A-I)} = 0$

Entonces $d = P_{\ker(A-I)}(f(0)-0) = \vec{0}$ y siempre tiene puntos fijos.

La variedad característica L es un punto (el centro de simetría)

---

5. Rotación / simetría axial o Movimiento helicoidal

5a) Si $d=0$ (hay puntos fijos) Giro $G_{r,\alpha}$ con respecto a la recta orientada $L = a_0 + \langle \vec{u}_1 \rangle$ y ángulo α , $\dim L = 1$

5b) Si $d\neq 0$ (No hay puntos fijos) Movimiento helicoidal $T_{\vec{v}} \circ G_{r,\alpha}$ con $r = a_0 + \langle \vec{u}_1 \rangle = L$ orientada, ángulo α y vector de traslación $\vec{v} = d$ ($\dim L = 1$).

---

6. <u>Antirrotación</u> $S_\pi \circ G_{r,\alpha}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq \pi, \quad \ker(A-I) = \{\vec{0}\}, \quad P_{\ker(A-I)} = 0$$

Entonces $d = P_{\ker(A-I)}(f(0) - 0) = 0$ y siempre tiene puntos fijos.

Como $\dim L = \dim(\ker(A-I)) = 0$, solo tiene un punto fijo

$r = a_0 + \langle \vec{u}_1 \rangle$ orientada y $\pi \perp r$ con $\pi = b_0 + \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$.

MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^3$

Tipo $A = A^t$ (autoadjuntos)

	$d = 0$	$d \neq 0$
1. $\|A\| = 1$ Directo	Identidad	Traslación de vector d
2. $\|A\| = -1$ Inverso	Simetría / reflexión respecto a un plano $\pi = L$ (S_π)	Simetría deslizante $T_d \circ S_\pi$ con $\pi = L$.
3. $\|A\| = 1$ Directo	Simetría / reflexión axial S_r con $r = L$.	Simetría / reflexión axial deslizante $T_d \circ S_r$ con $r = L$
4. $\|A\| = -1$ Inverso	Reflexión / simetría central con centro $L = \{p\}$	X

Tipo $A \neq A^t$

5. $\|A\| = 1$ (directo)	Rotación / giro $G_{r,\alpha}$ con $r = L$ orientada	Movimiento helicoidal $T_d \circ G_{r,\alpha}$ con $r = L$ orientada
6. $\|A\| = -1$ (inverso)	Antirrotación $S_\pi \circ G_{r,\alpha}$, r = orientada, $\pi \perp r$ y L un punto $= r \cap \pi$	X

4.5 IDENTIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^3$: EJEMPLOS

Ejemplo A. Identifica el movimiento f de ecuaciones

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

S/ $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$, $A=A^t$, traza $A=1$: S_π ó $T_d\circ S_\pi$

(Simetría S_π o Simetría deslizante)

$$A-I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \ker(A-I)=\{x+y+z=0\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle^\perp$$

$$P_{\ker(A-I)}=I-P_{(\ker(A-I))^\perp}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,1)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$d=P_{\ker(A-I)}(f(0)-0)=P_{\ker(A-I)}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Es una simetría deslizante con $d=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$. El plano de simetría es

$$L:\ \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\iff$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\iff\boxed{x+y+z=3}$$

EJEMPLO B Identifica el movimiento f de ecuaciones

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

S/ $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $A\neq A^t$, $|A|=-1$: Antirrotación $S_\pi\circ G_{r,\alpha}$

traza $A=-1=-1+2\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=0$, $\boxed{\alpha=\pi/2 \text{ ó } \alpha=\frac{3\pi}{2}}$

Hay que calcular una base de autovectores $\mathcal{B}'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ orientada

$\boxed{\lambda=-1}$

$$\ker(A+I):\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\qquad \vec{u}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{y}\ \vec{u}_3=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix};$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \langle A\vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle = -1$$

$$\boxed{\text{Ángulo de giro } \alpha = 3\pi/2}$$

$r = p + \langle \vec{u}_1 \rangle$ (orientada según $\vec{u}_1$) y $\pi = p + \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle \perp r$

El punto p ~~puede ser~~ es L: como $d = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y = 1, \quad \left.\begin{matrix} x + z = 2 \\ -x + z = 2 \end{matrix}\right\} \quad z = 2,\ x = 0 \qquad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle \iff r\begin{pmatrix} 0 & x-0 \\ 1 & y-1 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$$

$$\pi : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle^{\perp} \iff \boxed{y = 1}$$

EJEMPLO C. Identifica el movimiento f de ecuaciones

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

S/ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A = A^t$; $\operatorname{traza}(A) = -1$: simetría axial o movimiento helicoidal con $\alpha = \pi$.

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \ker(A-I): \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ y = z \end{matrix}$$

$$\ker(A-I) = \langle \vec{u}_1 \rangle \text{ con } \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\ker(A-I)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(0,1,1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d = P_{\ker(A-I)}(f(0) - 0) = P_{\ker(A-I)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

El vector de deslizamiento es $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

$$L: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ -y + z = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$f = T_d \circ S_r \text{ con } r = \left\{\begin{matrix} x = 1/2 \\ -y + z = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

EJEMPLO D a) Halla las ecuaciones de la composición de un giro /rotación de ángulo π con respecto a la recta $L: (0,0,1)+<(0,1,1)>$ con la traslación de vector $\vec{v} = (1,1,0)$: $T_{\vec{v}} \circ G_{L,\pi} = T_{\vec{v}} \circ S_L$.

b) Identifica el movimiento obtenido

S/a) Puede hacerse con cambios de base como se hizo en la sección 4.3. Pero también podemos aprovechar los resultados de la sección 4.4. Como

$$L = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} >$$

$$\ker(A-I) = < \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} > \quad \text{y} \quad P_{\ker(A-I)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}(0,1,1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Como A es una simetría respecto a $\ker(A-I)$:

$$A = 2P_{\ker(A-I)} - I = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Por tanto

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

con $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T_{\vec{v}} \circ S_r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T_{\vec{v}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. luego

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\+1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b) Este es el movimiento del ejemplo C, luego es una simetría axial deslizante con eje de giro $r = \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} >$ y vector de deslizamiento $d = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$. Observa que $r \parallel L$, pero no coinciden y $d \neq \vec{v}$ *

— x —