

## Hoja 8: la integral de Riemann

1.- Probar que la función  $y = [x]$  es integrable en  $[0, 5]$  y calcular  $\int_0^5 [x] dx$ .

2.- Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , no negativa, y que cumple  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Probar que  $f$  es cero en todos los puntos.

3.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo  $[a, b]$ , no integrable, y tal que  $f^2$  sea integrable.

4.- Sea una función continua en  $[a, b]$ . Definimos la *media* o *valor esperado* de  $f$  sobre  $[a, b]$  como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(a) Sean  $M$  y  $m$  respectivamente el máximo y el mínimo de  $f$  sobre  $[a, b]$ . Demostrar que  $m \leq E(f) \leq M$ . Si  $f$  es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Entonces, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

(c) Supongamos que  $f$  es impar (es decir,  $f(x) = -f(-x)$ ). Hallar  $E(f)$  sobre  $[-a, a]$ . Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar  $\int_{-a}^a x^7 \sin(x^4) dx$ .

5.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos  $F$  con  $F(0) = 0$  y  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , si  $x \in (0, 2]$ . Determinar  $F$  de forma explícita y probar que es continua en el intervalo  $[0, 2]$ , aunque  $f$  no lo sea.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\sin t^2) \log(1+t^2) dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^1 \cos^2 t^2 dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\sin^2 x} \cos(\log(2t^2)) dt.$$

7.- (\*) Encontrar una función  $f$  definida y continua en  $[0, \infty)$  tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t) f(t) dt = 6x^4.$$

8.- Sea  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x+a & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a  $a$  para que exista una función  $F$  en  $[0, 4]$  con  $F'(x) = f(x)$ ? Encontrar todas las funciones  $F$  posibles que cumplan la condición anterior.

9.- Calcular las primitivas siguientes:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx & (2) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} & (3) \int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{3x}} dx \\ (4) \int a^x dx & (5) \int (\tan x)^2 dx & (6) \int \frac{dx}{x^2 + 4} \\ (7) \int \frac{8x^2 + 6x + 4}{x+1} dx & (8) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} & \end{array}$$

**10.-** Calcular las primitivas siguientes, usando la fórmula de integración por partes:

$$\begin{array}{lll} (1) \int x^2 e^x dx & (2) \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx & (3) \int (\ln x)^3 dx \\ (4) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx & (5) \int \cos(\ln x) dx & (6) \int x(\ln(x))^2 dx \end{array}$$

**11.-** Calcular las primitivas siguientes, usando el cambio de variables adecuado en cada caso:

$$\begin{array}{lll} (1) \int e^x \operatorname{sen}(e^x) dx & (2) \int \frac{\ln x}{x} dx & (3) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \\ (4) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx & (5) \int x \sqrt{1-x^2} dx & (6) \int \ln(\cos x) \tan x dx \end{array}$$

**12.-** Calcular las primitivas siguientes, usando cambios de variable trigonométricos:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & (2) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} & (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ (4) \int \sqrt{1-x^2} dx & (5) \int \sqrt{4+x^2} dx & (6) \int \sqrt{x^2-4} dx \end{array}$$

**13.-** Calcular las primitivas siguientes, mediante descomposición en fracciones simples:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx & (2) \int \frac{x^3 + x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx & (3) \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} dx \\ (4) \int \frac{dx}{x^4 + 1} & (5) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} dx & \end{array}$$

**14.-** Calcular las primitivas siguientes:

$$\begin{array}{lll} (1) \int (6x^2 - 8)^{25} x dx & (2) \int \frac{dx}{2x^2 + 8} & (3) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2} dx \\ (4) \int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx & (5) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8} dx & (6) \int \frac{x^4}{x^2 + 4} dx \\ (7) \int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx & (8) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx & (9) \int x^2 \sqrt{1+x} dx \\ (10) \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5} & (11) \int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2} dx & (12) \int \frac{x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx \\ (13) \int \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx & (14) \int \frac{dx}{2 + 3 \cos x} & (15) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \\ (16) \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx & (17) \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} & (18) \int \frac{x^5 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ (19) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+3)} & (20) \int \frac{x}{1+x^4} dx & (21) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \\ (22) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} & (23) \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} & (24) \int \frac{dx}{\cos x} \\ (25) \int \frac{dx}{\cos^3 x} & (26) \int \log x dx & (27) \int x \log x dx \\ (28) \int x^2 \operatorname{sen} x dx & (29) \int x^3 e^{-2x} dx & (30) \int \cos(2x) e^{3x} dx \\ (31) \int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x dx & (32) \int \operatorname{sen}^3 x \cos^6 x dx & (33) \int \operatorname{sen}(2x) \cos(5x) dx \\ (34) \int \arctan x dx & (35) \int \left( \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx & (36) \int x^2 \operatorname{arc} \cos x dx \end{array}$$

**15.- (\*)**

- (a) Hallar  $\int \tan x \, dx$ ,  $\int \tan^2 x \, dx$ . Expresar  $\int \tan^n x \, dx$  en términos de  $\int \tan^{n-2} x \, dx$ . Como aplicación dar una fórmula para  $\int \tan^8 x \, dx$  y para  $\int \tan^7 x \, dx$ .
- (b) Hallar  $\int \sec^2 x \, dx$ ,  $\int \sec^3 x \, dx$ . Expresar  $\int \sec^n x \, dx$  en términos de  $\int \sec^{n-2} x \, dx$ . Como aplicación dar una fórmula para  $\int \sec^6 x \, dx$  y para  $\int \sec^7 x \, dx$ .

**16.- (\*)** Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right).$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}.$$

**17.-** Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1) \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} \, dx \quad (2) \int_2^\infty \frac{x}{x^2 - x - 2} \, dx \quad (3) \int_0^1 \log x \, dx \quad (4) \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx$$
$$(5) \int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} \quad (6) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2} \, dx \quad (7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

**18.-** Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1) \int_1^\infty e^{-x} x^\alpha \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2) \int_0^\infty \frac{dx}{2x + (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3) \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} \, dx$$
$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x} \, dx \quad (6) \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx$$

**19.- (\*)**

- (a) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^\alpha e^{\beta x} \, dx = \frac{1}{\beta} x^\alpha e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1} e^{\beta x} \, dx, \quad \text{para } \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

- (b) La función  $\Gamma$  se define para  $x > 0$  como  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$ . Demostrar que se tiene  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ . Deducir entonces que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

**20.-**

- (a) Hallar el área limitada entre las gráficas de  $f(x) = 8 - x^2$ ,  $g(x) = x^2$ .
- (b) Hallar el área limitada entre las gráficas de  $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}|x|$ .
- (c) Calcular el área comprendida entre las curvas  $y = x e^{-x}$ ,  $y = x^2 e^{-x}$  para valores de  $x \geq 1$ .
- (d) Hallar el área limitada por la curva  $y = \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$ , su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

**21.-** Sea  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ , y sea  $G$  su función inversa. Hallar  $G'(0)$ .

**22.- (\*)** Sean  $f, g$  continuas, con  $f \geq 0$  y  $g$  creciente. Demostrar que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = g(a) \int_a^c f(t) \, dt + g(b) \int_c^b f(t) \, dt.$$

**23.-** (\*) Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + x - 4}{\cos x + 2} dx$$

**24.-**

a) Sea  $f$  una función decreciente. Demostrar

$$f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1).$$

b) Aplicar la fórmula anterior con  $f(x) = \log x$  para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n-1}}$$

c) Usar el apartado anterior para demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

**25.-** Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},$$

según los valores de  $a > 0$ .