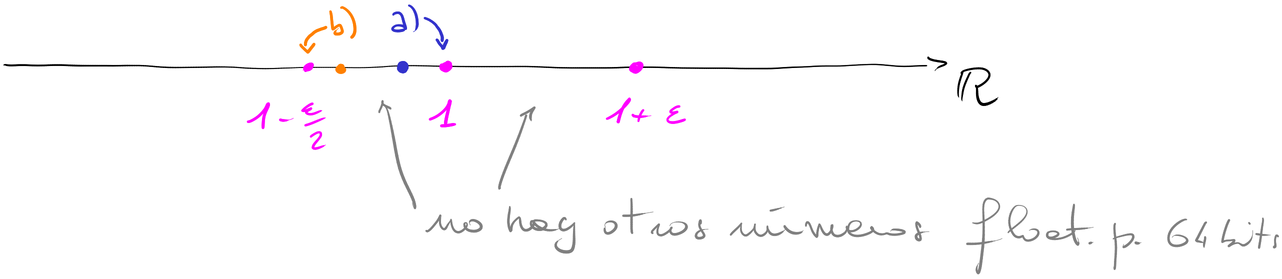
Ejemplo de error de redondeo

a) $x = 10^{-8}$, $\cos(x) = 1$ (en float.p. 64 bits)

b) $x = 1.2 \cdot 10^{-8}$, $\cos(x) = 1 - \varepsilon/2$ "



$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad , \quad \frac{\varepsilon}{2} = 2^{-53} = 1.1 \cdot 10^{-16}$$

a) $\frac{x^2}{2} = 0.5 \cdot 10^{-16} < \frac{\varepsilon}{2}$, $1 - \frac{x^2}{2}$ más cerca de 1 que de $1 - \frac{\varepsilon}{2}$

b) $\frac{x^2}{2} = 0.72 \cdot 10^{-16} < \frac{\varepsilon}{2}$, $1 - \frac{x^2}{2}$ más cerca de $1 - \varepsilon/2$ que de 1

$\cdot \sim \cdot$

proposición: (errores de cancelación)

↳ errores debidos a la precisión finita cuando se subtraen números de magnitud cercana

sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $y = x_1 - x_2$, $\hat{y} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ $\left(\begin{array}{l} \hat{x}_1 = x_1 + \delta x_1 \\ \hat{x}_2 = x_2 + \delta x_2 \end{array} \right)$

$$E_{rel}(\hat{y}) \lesssim \max\left\{ E_{rel}(\hat{x}_1), E_{rel}(\hat{x}_2) \right\} \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|}$$

demostración:

$$|x_1 - x_2 - (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)| = |x_1 - x_2 - x_1 - \delta x_1 + x_2 + \delta x_2| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$$

$$= \frac{|\delta x_1|}{|x_1|} |x_1| + \frac{|\delta x_2|}{|x_2|} |x_2| \leq \max\left\{ \frac{|\delta x_1|}{|x_1|}, \frac{|\delta x_2|}{|x_2|} \right\} (|x_1| + |x_2|)$$

$$\frac{|x_1 - x_2 - (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)|}{|x_1 - x_2|} = E_{rel}(\hat{y}) \leq \max\left\{ \frac{|\delta x_1|}{|x_1|}, \frac{|\delta x_2|}{|x_2|} \right\} (|x_1| + |x_2|) \frac{1}{|x_1 - x_2|} \quad \#$$

Condicionamiento numérico

problema: tenemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to \boxed{} \to y$

INPUT OUTPUT

y tenemos un error sobre los inputs.

¿cómo se repercute este error sobre los outputs?

proposición: sea $f \in C^1(x_0-\beta, x_0+\beta)$, $|f'(x_0)| \gg |\delta x_0|$

sea $y = f(x_0)$, $\hat{y} = f(\hat{x}_0)$ $\qquad \delta x_0 = \hat{x}_0 - x_0$

funciones continuas y derivables con derivada continua

$$\Rightarrow \quad E_{rel}(\hat{y}) \lesssim c(x_0)\, E_{rel}(\hat{x}_0)$$

donde $c(x) = \dfrac{|x f'(x)|}{|f(x)|}$ se llama condicionamiento numérico de f.

→ define la estabilidad en el cálculo de f en presencia de perturbaciones en el input

demostración:

$$|\hat{y} - y| = |f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)| \le |f'(x_0)| \cdot |\delta x_0| + o(\delta x)$$

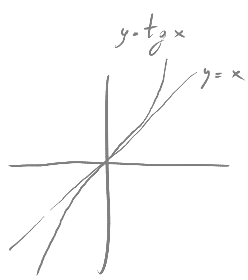
$$\Rightarrow E_{rel}(\hat{y}) = \frac{|\hat{y} - y|}{|y|} \lesssim \frac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|} \frac{|\delta x_0|}{|x_0|} |x_0| .$$

#

Ejemplos:

· $f(x) = \sin(x)$, $\quad c(x) = \left| \dfrac{x \cos x}{\sin x} \right| = \left| \dfrac{x}{tg(x)} \right|$

f estable bajo perturbaciones para todo $x \in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\quad \le 1$



· $f(x) = \log(x)$, $\quad c(x) = \left| \dfrac{1}{\log(x)} \right| \Rightarrow$ cerca de $x=1$ tenemos $\log x \sim 0$

cond. num. grande

el error abs sobre la evaluación de $\log x$ podría tener la misma magnitud de $\log(x)$