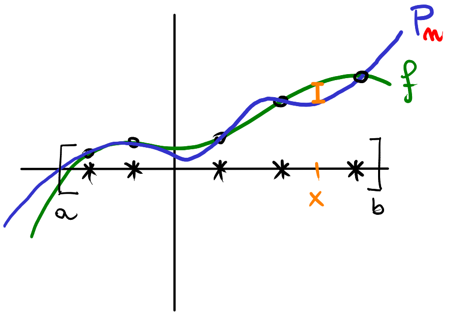
9.5 ERROR DE INTERPOLACIÓN



- conocemos una función solo por sus valores en ciertos $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ y calculamos el polinomio interpolador
- definimos el error de interpolación como $E[f,\{x_i\}_{i=0}^{n}] = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$

¿ cómo depende este error de los nodos de interpolación ?
¿ baja el error si aumenta el número de nodos n ?

<u>teorema</u> : sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ y sean $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

sea p_n el polinomio interpolador por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

$\Rightarrow \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \exists\, \xi_x \in (a,b)$ t.q.

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, \Pi_{n+1}(x) \;, \quad \text{donde } \Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

UTILIDAD DE ESTE TEOREMA PARA ESTUDIAR EL ERROR :

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| = \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\xi_x)| \cdot \max_{x\in[a,b]} |\Pi_{n+1}(x)|$$

$$\overset{\xi_x \in (a,b)}{\leq} \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}_{\text{ERROR CAUSADO POR } f} \cdot \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |\Pi_{n+1}(x)|}_{\text{ERROR CAUSADO POR LOS NODOS}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot (b-a)^{n+1}$$

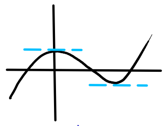
← si no sabemos nada sobre los nodos, lo único que podemos decir es $|x - x_j| \leq b-a$

demostración.

- si $x \in \{x_i\}_{i=0}^{n}$ es trivial: $0=0$
- si $x \notin \{x_i\}_{i=0}^{n}$, sea $\varphi_x(t) = f(t) - p_n(t) - \dfrac{f(x)-p_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\,\Pi_{n+1}(t)$

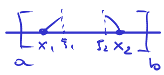
↳ en cada uno de estos x tenemos que
$$\begin{cases} \varphi_x \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b]) \\ \varphi_x \text{ se anula en } n+2 \text{ puntos: } x, \{x_i\}_{i=0}^{n} \end{cases}$$

lema: sea $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. si g se anula en k puntos de $[a,b]$
$\Rightarrow$ g' se anula en al menos $k-1$ puntos de (a,b)



demo: ejercicio de cálculo 1. idea: consideremos $k=2$, es decir g se anula en $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. si g no es $\equiv 0$ para todo $x \in [x_1, x_2]$
↳ en este caso $g' \equiv 0$
$\Rightarrow \exists\ \xi_1 > x_1,\ \xi_2 < x_2$ tales que $|g(\xi_1)| \neq 0$, $|g(\xi_2)| \neq 0$.

- si $g(\xi_1)$ y $g(\xi_2)$ tienen signo opuesto $\Rightarrow \exists\ c \in (\xi_1, \xi_2)$ donde $g(c) = 0$ (Bolzano)
  ↳ en este caso llamemos $x_2 = c$ y repetimos
- si $g(\xi_1)$ y $g(\xi_2)$ tienen el mismo signo, supongamos >0 $\Rightarrow$



  ↳ $g'(\xi_1) > 0$, $g'(\xi_2) < 0$ $\Rightarrow$ g' se anula en (ξ_1, ξ_2) por Bolzano

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'_x \text{ se anula en } n+1 \text{ puntos } \in (a,b) \\ \vdots \\ \varphi^{(k)}_x \text{ se anula en } n+2-k \text{ puntos } \in (a,b) \end{cases}, \quad k \leq n+1$$

en particular, $\varphi^{(n+1)}_x$ se anula en (al menos) 1 punto

nos interesa que haya uno: si hay más da igual

llamémoslo $\xi_x \in (a,b)$

ahora
$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\varphi_x(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left(f(t) - p_n(t) - \frac{f(x)-p_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\Pi_{n+1}(t)\right)$$

$$= f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{f(x)-p_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)} \overbrace{\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\Pi_{n+1}(t)}^{(n+1)!}$$

$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^n = 0$

$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^{n+1} = (n+1)!$

$\Pi_{n+1}(t) = t^{n+1} + \ldots$

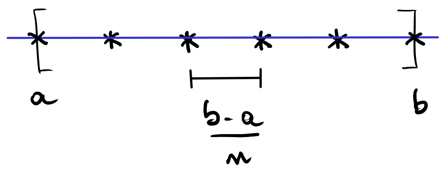
p_n

$$\Rightarrow \text{en } t = \xi_x \text{ tenemos } f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{(n+1)!}{\Pi_{n+1}(x)}\left(f(x) - p_n(x)\right)$$

#

NODOS EQUIESPACIADOS en $[a,b]$

repartición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud:



$$(*) \quad \boxed{x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n} \quad , \quad i \in \{0 \ldots n\}}$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = a \\ x_i = x_{i-1} + \dfrac{b-a}{n} \quad , \quad i \in \{1 \ldots n\} \end{cases}}$$

$n+1$ nodos equiespaciados

__proposición__: sea π_{n+1} el polinomio mónico por los nodos $(*)$.

$$\Rightarrow \quad |\pi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{4}\,\frac{n!}{n^{n+1}}\,(b-a)^{n+1} \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

observar que esto es mejor que la estimación $(b-a)^{n+1}$ para el caso en que no sabemos nada de la posición de los nodos

__demostración__: sea $\Delta = \frac{b-a}{n}$. si $x \in [a,b]$, podemos decir $x = a + s\,\Delta$, para un $s = s(x) \in [0,n]$

$$\Rightarrow |\pi_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| = \prod_{j=0}^{n} |a + s\Delta - a - j\Delta| = \prod_{j=0}^{n} (|s-j|\,\Delta)$$

$$= \Delta^{n+1} \prod_{j=0}^{n} |s-j| = \Delta^{n+1}\, p(s)$$

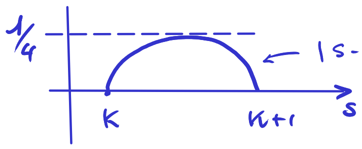
para demostrar el enunciado tenemos que demostrar que $p(s) \leq \frac{1}{4}\, n! \quad \forall\, s \in [0,n]$

• $f(0) = f(n) = 0$: solo es necesario mirar a $s \in (0,n)$

• sea $0 < s < n$, y sea $k = \lfloor s \rfloor$: parte entera de s

$k \in \mathbb{Z}$ t.q. $k \le s < k+1$. $0 < s < n \Rightarrow k \in \{0..n-1\}$

$$f(s) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} |s-j|\right) \cdot |s-k| \cdot |s-(k+1)| \cdot \left(\prod_{j=k+2}^{n} |s-j|\right)$$



$|s-k| \cdot |s-(k+1)| \overset{k \le s < k+1}{=} (k+1-s)(s-k)$

$= s-k-(s-k)^2$: si $x = s-k$

$= x - x^2$, $x \in [0,1)$

↳ max in $x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\le \frac{1}{4} \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) \prod_{j=k+2}^{n} (j-s) \overset{k \le s < k+1}{\le} \frac{1}{4} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} (k+1-j)}_{(k+1)!} \underbrace{\prod_{j=k+2}^{n} (j-k)}_{(n-k)!}$$

ahora observamos que $(k+1)!\,(n-k)! \le n!$ $\forall\, k < n$

porque

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underset{\substack{\geq \\ k+1}}{n}\ \underset{\substack{\geq \\ k}}{(n-1)}\ \underset{\substack{\geq \\ k-1}}{(n-2)} \cdots \underset{\substack{\geq \\ 2}}{(n-k+1)}$$

$= (k+1)!$

$\Rightarrow f(s) \le \frac{1}{4} n!$ $\forall\, s \in [0,n]$ #

· ⁓ ·

observación: a partir del teorema, de las desigualdades que siguen, y de la proposición, tenemos que

si $f \in C^{n+1}([a,b])$ y $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ son nodos equiespaciados en $[a,b]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{4(n+1)} \frac{1}{n^{n+1}} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|\,(b-a)^{n+1}$$