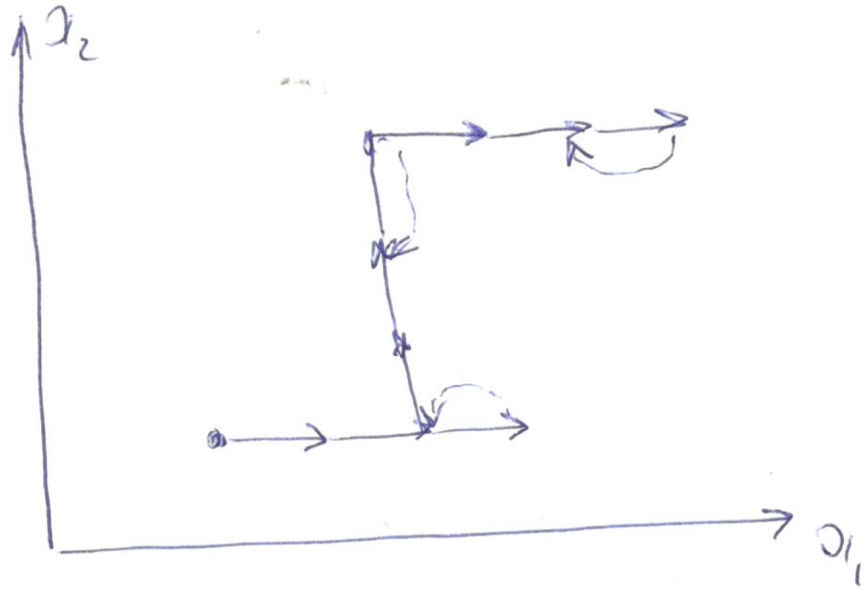
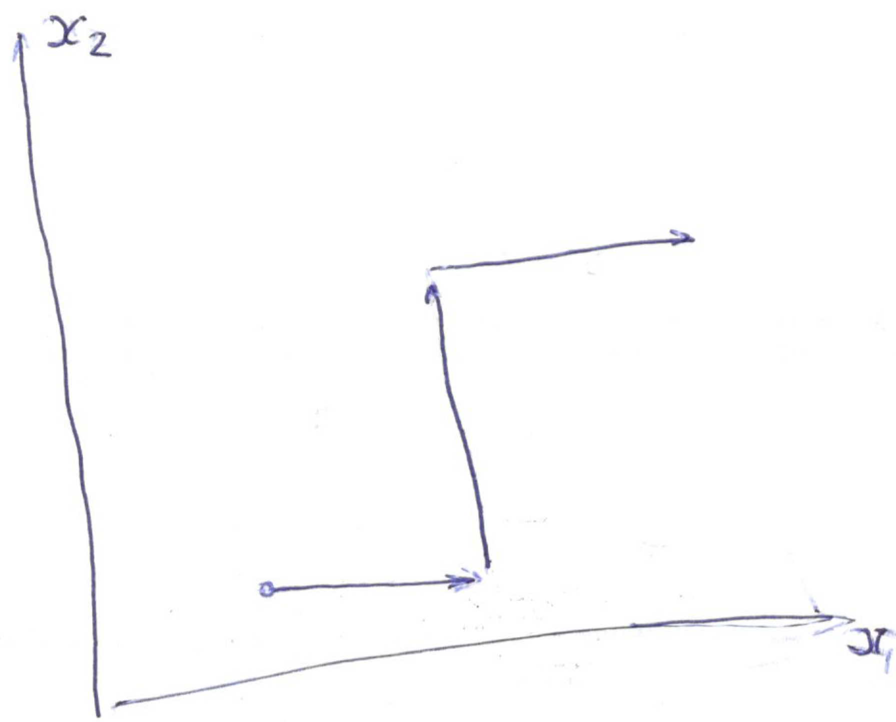
Descida Coordenada



· Descida Coordenada com Otimização de Comprimento do Passo



Métodos de Gradiente

Falamos sobre minimização.
Se estamos no ponto $x^{(p)}$ com $F(x^{(p)})$, antigradiente $-\nabla F(x^{(p)})$ permite chegar ao ponto $x^{(p+1)}$ com $F(x^{(p+1)}) < F(x^{(p)})$.

Para qualquer metodo numerico:

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + a_p e^{(p)}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

vetor unitario que caractoriza direção movimento

Para nosso caso

$$e^{(p)} = - \frac{\nabla F(x^{(p)})}{|\nabla F(x^{(p)})|}$$

onde

$$|\nabla F(x^{(p)})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_i} \right]^2}$$

Temos

$$x_1^{(p+1)} = x_1^{(p)} - a_p \frac{\frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_i} \right]^2}}$$

$$\cdots$$

$$x_n^{(p+1)} = x_n^{(p)} - a_p \frac{\frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_n}}{\cdots}$$

Exemplo:

$$F(x_2,x_3) = \frac{1}{110^2}\Big[(65-x_2-x_3)^2\cdot 0{,}1 + (55-x_2-x_3)^2\cdot 0{,}2 +$$
$$+ (30-x_2)^2\cdot 0{,}3 + x_2^2\cdot 0{,}4 + (5-x_3)^2\cdot 0{,}5 + x_3^2\cdot 0{,}6\Big]$$

Temos $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0\ \text{Mvar}$, $a_p = a = 5\ \text{Mvar}$

$$\frac{\partial F(x_2,x_3)}{\partial x_2} = \frac{1}{110^2}\left[-53 + 2x_2 + 0{,}6x_3\right]$$
$$\frac{\partial F(x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{1}{110^2}\left[-40 + 0{,}6x_2 + 2{,}2x_3\right]$$

$p=0$:
$$\frac{\partial F(x_2^{(0)},x_3^{(0)})}{\partial x_2} = \frac{1}{110^2}\left[-53\right] = -0{,}00438$$
$$\frac{\partial F(x_2^{(0)},x_3^{(0)})}{\partial x_3} = \frac{1}{110^2}\left[-40\right] = -0{,}00321$$

$$\sqrt{\left[\frac{\partial F(x_2^{(0)},x_3^{(0)})}{\partial x_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial F(x_2^{(0)},x_3^{(0)})}{\partial x_3}\right]^2} = 0{,}00548$$

---

p=1:

$$x_2^{(1)} = 0 - 5\,\frac{-0{,}00438}{0{,}00548} = 4{,}00$$

$$x_3^{(1)} = 0 - 5\,\frac{-0{,}00321}{0{,}00548} = 3{,}02$$

$$\frac{\partial F(x_2^{(1)}, x_3^{(1)})}{\partial x_2} = \frac{1}{110^2}\left[-53 + 2\cdot 4 + 0{,}6\cdot 3{,}02\right] = -0{,}00357$$

$$\frac{\partial F(x_2^{(1)}, x_3^{(1)})}{\partial x_3} = \frac{1}{110^2}\left[-40 + 0{,}6\cdot 4 + 2{,}8\cdot 3{,}02\right] = -0{,}00241$$

$$\sqrt{\left[\frac{\partial F(x_2^{(1)}, x_3^{(1)})}{\partial x_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial F(x_2^{(1)}, x_3^{(1)})}{\partial x_3}\right]^2} = 0{,}00430$$

---

p=2:

$$x_2^{(2)} = 4{,}00 - 5\,\frac{-0{,}00357}{0{,}00430} = 8{,}15$$

$$x_3^{(2)} = 3{,}02 - 5\,\frac{-0{,}00241}{0{,}00430} = 5{,}82$$

. . . .

Métodos da segunda ordem permitem otimizar o comprimento do passo.

Critérios para Parar Cálculos

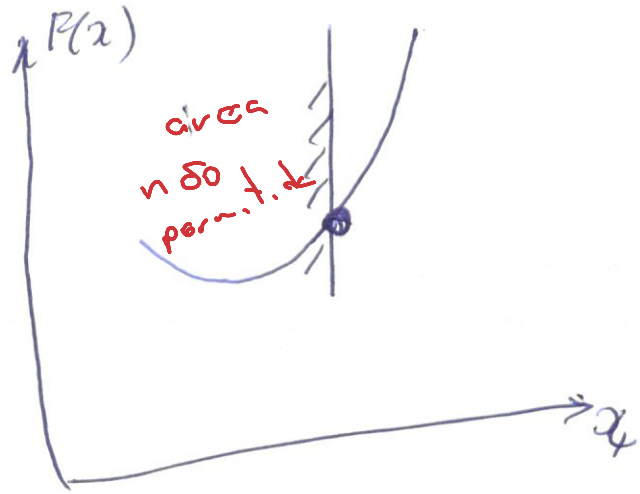
gradiente

1. $|\nabla F(x^{(p)})| \leq \varepsilon$ ← precisão

com qualquer tipo de restrição

2. Se otimização condicional, então

$$|F(x^{(p+1)}) - F(x^{(p)})| \leq \varepsilon$$



Métodos locais ⇒ não consegue prever o futuro

Usa métodos locais para chegar no global.

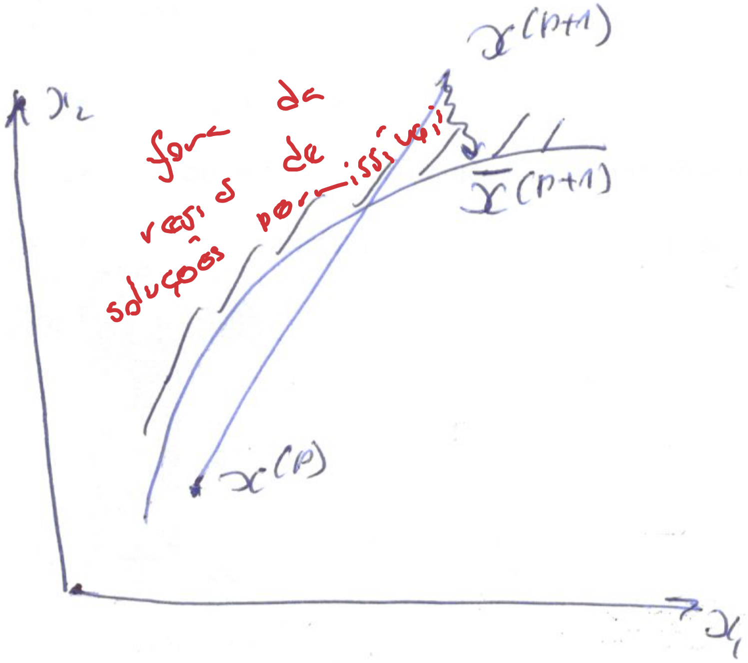
Metodos de Gradiente com Rs
restrições

1. Metodo de projeção de gradiente.

Se no processo da solução do problema com Rs, encontramos o ponto $x^{(p+1)}$, que não pertence à Ω $(x^{(p+1)} \notin \Omega)$, então é possivel achar o ponto $\bar{x}^{(p+1)} \in \Omega$:

$$\bar{x}^{(p+1)} = P_{\Omega}\left(x^{(p)} - a_p \frac{\nabla F(x^{(p)})}{|\nabla F(x^{(p)})|}\right), \quad p = 0,1,2,\ldots$$

onde P_{Ω} é a projeção na Ω.



Gradiente no saba sobre restrições e vice-versa.

Métodos de Gradiente com Rs

2. Método de Gradiente Condicional

idéia de correção

Problema de churrasco

Três lojas de carne. Preços

12 16 14 Rs/kg

$$F(x) = 12x_1 + 16x_2 + 14x_3$$

$$0 \le x_1 \le 10$$

$$0 \le x_2 \le 12$$

$$0 \le x_3 \le 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25$$

$$x_1^0 = 10$$

$$F(x) = 16x_2 + 14x_3$$

$$0 \le x_2 \le 12$$

$$0 \le x_3 \le 8$$

$$x_2 + x_3 = 15$$

$$x_3^0 = 8$$

$$x_2^0 = 7$$

pertence à região permissível

para qualquer ponto $\boxed{x^{(p)} \in \Omega}$ podemos construir gradiente

$$\nabla F(x^{(p)}) = \left[\frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_n} \right]$$

Temos FO linearizada

$$F(x) = \frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial F(x^{(p)})}{\partial x_n} x_n$$

Essa FO junto com Rs gera um problema de programação linear.
Resolvendo esse problema podemos obter uma solução $x_0^{(p)}$.
A solução nova $x^{(p+1)}$ do problema inicial é

ponto solução linearizável

onde quero ir — onde estou

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + a_p \left(x_0^{(p)} - x^{(p)} \right).$$

$$\boxed{0 \leq a_p \leq 1}$$

se $a_p = 0$, então

$$x^{(p+1)} = x^{(p)}$$

se $a_p = 1$, então

$$x^{(p+1)} = x_0^{(p)}.$$

Exemplo:

$$F(x) = 0{,}00749x_1 + 0{,}01104x_1^2 + 0{,}01294x_2 + 0{,}02244x_2^2 + 0{,}00973x_3 + 0{,}00797x_3^2 \longrightarrow \min$$

$$0 \le x_1 \le 0{,}6$$

$$0 \le x_2 \le 0{,}5$$

$$0 \le x_3 \le 1{,}2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}8$$

O ponto inicial é $x_1^{(0)} = 0{,}6,\ x_2^{(0)} = 0{,}5,\ x_3^{(0)} = 0{,}7$

$$\nabla F(x) = [(0{,}00749 + 0{,}02208x_1)\ (0{,}01294 + 0{,}04488x_2)\ (0{,}00973 + 0{,}01594x_3)]$$

$$\nabla F(x^{(0)}) = [0{,}020738\ \ 0{,}03538\ \ 0{,}02089]$$

Temos um problema de programação linear

$$F(x) = 0{,}020738x_1 + 0{,}03538x_2 + 0{,}02089x_3 \longrightarrow \min$$

problema de programação linear

$$0 \le x_1 \le 0{,}6 \qquad 0 \le x_2 \le 0{,}5 \qquad 0 \le x_3 \le 1{,}2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}8$$

$$x_{1,0}^{(0)} = 0{,}6$$
$$x_{2,0}^{(0)} = 0$$
$$x_{3,0}^{(0)} = 1{,}2$$

coordenadas de um vértice

soluçã linearizada → ponto agora

$x_1^{(1)} = 0{,}6 + a_1(0{,}6 - 0{,}6) \quad = 0{,}6$

$x_2^{(1)} = 0{,}5 + a_1(0 - 0{,}5) \quad = 0{,}5 - 0{,}5a_1$

$x_3^{(1)} = 0{,}7 + a_1(1{,}2 - 0{,}7) \quad = 0{,}7 + 0{,}5a_1$

No trabalho: já tem ponto inicial

Substituimos na FO:

$F(a_1) = 0{,}00749 \cdot 0{,}6 + 0{,}01104 \cdot 0{,}6^2 +$
$+ 0{,}01294(0{,}5 - 0{,}5a_1) + 0{,}02244(0{,}5 - 0{,}5a_1)^2 +$
$+ 0{,}00973(0{,}7 + 0{,}5a_1) + 0{,}00797(0{,}7 + 0{,}5a_1)^2 =$

$= 0{,}02412647 - 0{,}007246a_1 + 0{,}0076025a_1^2$

$$\frac{dF(a_1)}{da_1} = -0{,}007246 + 0{,}0152050\,a_1 = 0$$

$$a_1 = \frac{0{,}007246}{0{,}0152050} = 0{,}4766$$

$x_1^{(1)} = 0{,}6$

$x_2^{(1)} = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}4766 = 0{,}262$

$x_3^{(1)} = 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}4766 = 0{,}938$