O método de Bolden

Se utilizarmos este método é possível considerar os valores $\bar{u}_p$ e $\underline{u}_p$ para $\min\limits_{x\in\Omega} F_p(x)$ e $\max\limits_{x\in\Omega} F_p(x)$. Estes valores podem ser, por exemplo, 1 e 0. Neste caso é possível construir a função

$$\phi(x) = \sum_{p=1}^{q} [\alpha_p F_p(x) + \beta_p]$$

que reflete a preferência das soluções diferentes.

Os coeficientes α_p e β_p podem ser achados em consequência da solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha_p F_p(x^{0}) + \beta_p = \bar{u}_p \\ \alpha_p F_p(x^{00}) + \beta_p = \underline{u}_p \end{cases}$$

O método de Bolden é associado com a maximização de $\phi(x)$.

Consideremos do problema da distribuição do deficit da potência:

$$F_p(x) = \sum_{i=1}^{6} c_{pi} x_i \longrightarrow \min_{x\in\Omega}, \quad p = 1, \dots, 4$$

onde

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \le x_i \le A_i, \ \sum_{i=1}^{6} x_i = A \}$$

A informação inicial é:

i	1	2	3	4	5	6
c_{1i}	1,65	3,24	1,47	2,22	1,12	2,13
c_{2i}	0,53	0,33	0,23	0,19	0,22	0,27
c_{3i}	18,64	19,87	21,96	14,99	17,22	22,40
c_{4i}	5400	6800	6200	5600	4900	7000
A_i	16000	5000	4000	5000	23000	14000

Nosso problema é

$$F_1(x) = 1,65 x_1 + 3,24 x_2 + 1,47 x_3 + 2,22 x_4 + 1,12 x_5 + 2,13 x_6 \to \min$$

$$F_2(x) = 0,53 x_1 + 0,33 x_2 + 0,23 x_3 + 0,19 x_4 + 0,22 x_5 + 0,27 x_6 \to \min$$

$$F_3(x) = 18,64 x_1 + 19,87 x_2 + 21,96 x_3 + 14,99 x_4 + 17,22 x_5 + 22,40 x_6 \to \min$$

$$F_4(x) = 5400 x_1 + 6800 x_2 + 6200 x_3 + 5600 x_4 + 4900 x_5 + 7000 x_6 \to \min$$

$$0 \le x_1 \le 16000$$
$$0 \le x_2 \le 5000$$
$$0 \le x_3 \le 4000$$
$$0 \le x_4 \le 5000$$
$$0 \le x_5 \le 23000$$
$$0 \le x_6 \le 14000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 40000$$

É necessário resolver o problema para $F_1(x)$:

$$F_1(x) = 1{,}65\,x_1 + 3{,}24\,x_2 + 1{,}47\,x_3 + 2{,}72\,x_4 + 1{,}12\,x_5 + 2{,}13\,x_6 \to \min$$

$$0 \le x_1 \le 16000$$
$$0 \le x_2 \le 8000$$
$$0 \le x_3 \le 6000$$
$$0 \le x_4 \le 8000$$
$$0 \le x_5 \le 23000$$
$$0 \le x_6 \le 14000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 40000$$

$x_1 = 13000;\ x_2 = 0;\ x_3 = 4000;\ x_4 = 0;\ x_5 = 23000;\ x_6 = 0;$

$F_1(x) \to \max$

$x_1 = 1600 \quad x_2 = 8000 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 8000 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 14000.$

$$\min F_1(x) = 53090$$
$$\max F_1(x) = 83520$$

A solução os mesmos problemas para $F_2(x)$:

$$\min F_2(x) = 9090$$
$$\max F_2(x) = 15050$$

A solução os mesmos problemas para $F_3(x)$:

$$\min F_3(x) = 706190$$
$$\max F_3(x) = 816\cancel{7}50$$

A solução os mesmos problemas para $F_4(x)$:

$$\min F_4(x) = 204700000 = 2{,}047 \cdot 10^8$$
$$\max F_4(x) = 249600000 = 2{,}496 \cdot 10^8$$

Temos:

$$\begin{cases} 53090\,\alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ 83520\,\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3{,}286 \cdot 10^{-5} \\ \beta_1 = 2{,}745 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9090\,\alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ 15050\,\alpha_2 + \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -1{,}678 \cdot 10^{-4} \\ \beta_2 = 2{,}525 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 706190\,\alpha_3 + \beta_3 = 1 \\ 818750\,\alpha_3 + \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -9{,}045 \cdot 10^{-6} \\ \beta_3 = 7{,}387 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}047 \cdot 10^8\,\alpha_4 + \beta_4 = 1 \\ 2{,}496 \cdot 10^8\,\alpha_4 + \beta_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 2{,}227 \cdot 10^{-8} \\ \beta_4 = 5{,}559. \end{cases}$$

Maior é melhor

Agora, é possível construir:

$$\Phi(x) = -3{,}226 \cdot 10^{-5}(F_1(x)) + 2{,}745 - 1{,}678 \cdot 10^{-4}(F_2(x)) + 2{,}525$$
$$- 9{,}045 \cdot 10^{-6}(F_3(x)) + 2{,}387 - 2{,}227 \cdot 10^{-8}(F_4(x)) + 5{,}579 =$$
$$= -4{,}320 \cdot 10^{-4} x_1 - 4{,}930 \cdot 10^{-4} x_2 - 4{,}236 \cdot 10^{-4} x_3 -$$
$$- 3{,}651 \cdot 10^{-4} x_4 - 3{,}431 \cdot 10^{-4} x_5 - 4{,}738 \cdot 10^{-4} x_6 + 13{,}226$$

É necessário achar o máximo para esta função. Com a consideração as mesmas Rs:

$x_1^0 = 3000$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 4000$; $x_4^0 = 5000$; $x_5^0 = 28000$; $x^6 = 0$;

Agora é possível os níveis das FOs:

0,906	1ª	Função Objetivo
0,652	2ª	"
0,880	3ª	"
0,911.	4ª	"

não é harmoniosa

A solução da mesma problema para A = 20000 e A = 60000:

1,000	0,986
0,472	0,446
0,864	0,727
1,000	0,932

É possível falar de estas soluções não são harmoniosas. A solução é boa para F_1 e F_3 e não boa para F_2. Isto é a falta principal para todos os métodos da scalarização.

É possível utilizar a convolução do tipo multiplicado:

$$\phi(x) = \prod_{p=1}^{r} f_p(x)$$

ou com a consideração a importância:

$$\phi(x) = \prod_{p=1}^{q} \lambda_p f_p(x)$$

$$\phi(x) = \prod_{p=1}^{q} [f_p(x)]^{\lambda_p}$$

Todos os métodos da scalarização não são universais. É necessário ser prudente porque a eficiência fraca para uma ou mais critérios pode ser compensada á outras critérios. As soluções pode ser harmoniosas.

Podem comprar, ~~pod~~ o fato bastante mas acaais não