PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Consideramos um problema de minimização da função objetivo

$$F(x)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum f_i(x_i)$$ objetiva aditiva

observando restricões

$$\sum x_i = A$$

e

$$x_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,n$$

$$\min_{x\in\Omega} F(x) = \min_{x_1\in\Omega_1} \; \min_{x_2\in\Omega_2(x_1)} \; \ldots \; \min_{x_n\in\Omega_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} F(x)$$

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Principio de Otimalidade de Bellman

Independentemente do estado de sistema ou processo ate passo presente, é necessário escolher uma solução para passo próximo, que junto com soluções para todos os passos posteriores, pode garantir um ganho máximo nos passos restantes, incluindo o passo presente.

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Admitimos que a variável *n* tem o valor x_n. Então, o recurso restante

valor ótimo

$$A\text{-}x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

deve ser distribuído para ter um valor mínimo para $\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$.

Admitimos que

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) = h_{n-1}(A\text{-}x_n).$$

Então, é possível escrever

$$h_{n-1}(A\text{-}x_n) + f_n(x_n).$$

$\leftarrow$ x_n é a única variável

É natural que escolha é ótima se minimizamos a recursividade

$$h_n(A) = \min \{h_{n-1}(A\text{-}x_n) + f_n(x_n)\}.$$

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Direta)

O esquema permite construir uma sequência das funções

$$h_k(X), \quad k=1,\ldots,n.$$

A função $h_{k-1}(X)$ deve servir para a construção da $h_k(X)$:

$$h_k(X) = \min \{h_{k-1}(X-x_k) + f_k(x_k)\}.$$

<u>A essência dessa recursividade é seguinte:</u> o valor mínimo da função objetivo é $h_k(X)$, para a alocação de volume de recurso X que deve ser distribuído entre k variáveis.

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Direta)

O esquema permite construir uma sequência das funções:

$$h_1(X) = f_1(X);$$

$$h_2(X) = \min \{h_1(X-x_2) + f_2(x_2)\};$$

$$\cdots$$

$$h_k(X) = \min \{h_{k-1}(X-x_k) + f_k(x_k)\};$$

$$\cdots$$

$$h_n(X) = h_n(A) = \min \{h_{n-1}(X-x_n) + f_n(x_n)\}.$$

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Direta)

Discretização de X e todas as variáveis x_k, $k=1,...,n$: 0, Δ, 2Δ, ..., A.

Para o <u>primeiro passo</u> calculamos o conjunto dos valores

$$h_1(X) = f_1(X)$$

para todos os 0, Δ, 2Δ, ..., A que são permissíveis.

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Direta)

Para o <u>segundo passo</u> calculamos o conjunto dos valores:

$$h_2(X) = h_1(X - 0) + f_2(0);$$

$$h_2(X) = h_1(X - \Delta) + f_2(\Delta);$$

$$h_2(X) = h_1(X - 2\Delta) + f_2(2\Delta);$$

$$\ldots$$

$$h_2(X) = h_1(\Delta) + f_2(X - 2\Delta);$$

$$h_2(X) = h_1(0) + f_2(X).$$

Entre esses valores escolhemos $h_2(X)$ mínimo é memorizamos esse valor junto com correspondente x_2.

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Direta)

Para os passos k=3,...,n-1, os cálculos são realizados da mesma maneira.

Para o passo ultimo, não é necessário considerar todos os valores 0, Δ, 2Δ, ..., A. É suficiente considerar somente A.

$$h_n(A) = \min \{h_{n-1}(X-x_n) + f_n(x_n)\}.$$

De tal forma, sabemos o valor ótimo da função objetivo e correspondente valor x^o_n.

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Esquema de Cálculos (Marcha Inversa)

Sabendo x^o_n, é possível definir o valor ótimo de

$$h_{n-1}(A - x^o_n),$$

que permite achar x^o_{n-1}.

Sabendo x^o_{n-1}, é possível definir o valor ótimo de

$$h_{n-1}(A - x^o_n - x^o_{n-1}),$$

que permite achar x^o_{n-2}.

Esse procedimento é repetido até encontramos o valor ótimo de x^o_1.

Explicação na 32

• variável maior primeiro reduz volume cálculo

Comparar com Lagrange

EXEMPLO

valores só os valores mínimos dos cálculos

X carga total	*x*1	*h*1(*X*)	*x*2	*h*2(*X*)	x3	*h*3(*X*)
0,0	0,0	0	0,0	0		
0,1	0,1	0,00086	0,0	0,00086		
0,2	0,2	0,00194	0,0	0,00194		
0,3	0,3	0,00324	0,0	0,00324		
0,4	0,4	0,00476	0,1	0,00476	foi a melhor opção	
0,5	0,5	0,00651	0,1	0,00628	quando carga total	
0,6	0,6	0,00847	0,1	0,00803	era 0,4	
0,7	↳ máx do X_1		0,1	0,00998		
0,8			0,2	0,01196		
0,9			0,3	0,01437		
1,0			0,4	0,01724		
1,1			0,5	0,02055		
1,2			↳ max do X_2			
1,3						
1,4						
1,5						
1,6						
1,7						
1,8					0,9	0,02958

X_1

$X_1 + X_2$

$X_1 + X_2 + X_3$

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Consideramos um problema de minimização da função

$$F(x)=F(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = \sum f_i(x_i, y_i)$$

observando restricoes

$$\sum x_i=A,$$

$$\sum y_i=B$$

e

$$x_i \geq 0, \quad i=1,...,n; \; y_i \geq 0, \quad i=1,...,n.$$

Esse problema gera a seguinte recursividade:

$$h_k(X, Y) = \min_{0 \leq x_k \leq A} \; \min_{0 \leq y_k \leq B} \{h_{k-1}(X-x_k, Y-y_k) + f_k(x_k, y_k)\}.$$

"***<u>Maldição de Dimensionalidade</u>***"