Tarefa 02 – Otimização de Sistemas

Pedro Miranda Rodrigues

No. 36

$$Q_n = 1010, D_1 = 8{,}06, \mathrm{D}_2 = 7{,}53, Q_p = 900, Q^i = 900;$$
$$Q_n = 1250, D_1 = 8{,}13, \mathrm{D}_2 = 7{,}74, Q_p = 1100, Q^i = 1100;$$
$$Q_n = 1610, D_1 = 10{,}30, \mathrm{D}_2 = 8{,}91, Q_p = 1500, Q^i = 1200;$$
$$Q_n = 2000, D_1 = 14{,}10, \mathrm{D}_2 = 11{,}80, Q_p = 1900, Q^i = 1200;$$
$$Q_\Sigma = 4400$$

- **DADOS DO PROBLEMA**
  - Função Objetivo (Minimizar Perdas DeltaP)
    - A fórmula de perdas para cada máquina é: Delta Pi = ai * xi + bi * xi^2 Onde: ai = D1 / Qn bi = D2 / Qn^2
    - Calculando os coeficientes para cada máquina:
      - M1 (x1): Qn = 1010, D1 = 8.06, D2 = 7.53
        - a1 = 8.06 / 1010 = 0.007980
        - b1 = 7.53 / (1010^2) = 0.00000738
        - Delta P1 = 0.007980 x1 + 0.00000738 x1^2
      - M2 (x2): Qn = 1250, D1 = 8.13, D2 = 7.74
        - a2 = 8.13 / 1250 = 0.006504
        - b2 = 7.74 / (1250^2) = 0.00000495
        - Delta P2 = 0.006504 x2 + 0.00000495 x2^2
      - M3 (x3): Qn = 1610, D1 = 10.3, D2 = 8.91
        - a3 = 10.3 / 1610 = 0.006398
        - b3 = 8.91 / (1610^2) = 0.00000344
        - Delta P3 = 0.006398 x3 + 0.00000344 x3^2
      - M4 (x4): Qn = 2000, D1 = 14.1, D2 = 11.8
        - a4 = 14.1 / 2000 = 0.007050
        - b4 = 11.8 / (2000^2) = 0.00000295
        - Delta P4 = 0.007050 x4 + 0.00000295 x4^2

- Função Objetivo Total: F(x) = Delta P1 + Delta P2 + Delta P3 + Delta P4 → min
- Restrições
  - Restrição de Igualdade: g(x) = x1 + x2 + x3 + x4 = 4400
  - Restrições Diretas
    - x1 = 900
    - x2 = 1100
    - 1200 <= x3 <= 1500
    - 1200 <= x4 <= 1900
- **MULTIPLICADORES DE LAGRANGE**
  - Etapa 1: Otimização Irrestrita (Ignorando Limites)
    - Construir a Função de Lagrange $\varphi(x, \lambda)$
      - $\varphi = F(x) + \lambda \cdot g(x)$
      - $\varphi = (0.007980\, x_1 + 0.00000738\, x_1^2) + (0.006504\, x_2 + 0.00000495\, x_2^2) + (0.006398\, x_3 + 0.00000344\, x_3^2) + (0.007050\, x_4 + 0.00000295\, x_4^2) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4400)$
    - Derivar e igualar a zero
      - $\partial\varphi/\partial x_1 = 0.007980 + 2(0.00000738)x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow 0.007980 + 0.00001476x_1 + \lambda = 0$
      - $\partial\varphi/\partial x_2 = 0.006504 + 2(0.00000495)x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow 0.006504 + 0.00000990x_2 + \lambda = 0$
      - $\partial\varphi/\partial x_3 = 0.006398 + 2(0.00000344)x_3 + \lambda = 0 \Rightarrow 0.006398 + 0.00000688x_3 + \lambda = 0$
      - $\partial\varphi/\partial x_4 = 0.007050 + 2(0.00000295)x_4 + \lambda = 0 \Rightarrow 0.007050 + 0.00000590x_4 + \lambda = 0$
      - $\partial\varphi/\partial\lambda = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4400 = 0$
      - A condição de otimalidade é que o custo incremental (derivada) seja igual para todas as máquinas: $-(a_i + 2b_i x_i) = \lambda$
    - Resolver o sistema
      - Expressamos cada x_i em termos de λ:
        - $x_1 = (-\lambda - 0.007980) / 0.00001476$
        - $x_2 = (-\lambda - 0.006504) / 0.00000990$

        - $x_3 = (-\lambda - 0.006398) / 0.00000688$
        - $x_4 = (-\lambda - 0.007050) / 0.00000590$
    - Substituindo na restrição de soma ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4400$):
        - $(-\lambda/0.00001476 - 540.6) + (-\lambda/0.00000990 - 657.0) + (-\lambda/0.00000688 - 929.9) + (-\lambda/0.00000590 - 1194.9) = 4400$
    - Agrupando λ
        - $(-67751 - 101010 - 145349 - 169492)\lambda - 3322.4 = 4400$
        - $-483602\lambda = 7722.4$
        - $\lambda \approx -0.01597$
    - Calculando os valores de x_i^o
        - $x_1^o = (-(-0.01597) - 0.007980) / 0.00001476 \approx 541$
        - $x_2^o = (-(-0.01597) - 0.006504) / 0.00000990 \approx 956$
        - $x_3^o = (-(-0.01597) - 0.006398) / 0.00000688 \approx 1391$
        - $x_4^o = (-(-0.01597) - 0.007050) / 0.00000590 \approx 1512$
    - Soma: $541 + 956 + 1391 + 1512 = 4400$
- Etapa 2: Verificação das Restrições Diretas
    - $x_1^o = 541$. Restrição: $x_1 = 900$. (FALHOU)
    - $x_2^o = 956$. Restrição: $x_2 = 1100$. (FALHOU)
    - $x_3^o = 1391$. Restrição: $1200 \le x_3 \le 1500$. (OK)
    - $x_4^o = 1512$. Restrição: $1200 \le x_4 \le 1900$. (OK)
- Etapa 3: Relaxamento
    - Fixar $x_1 = 900$
    - Fixar $x_2 = 1100$
- Etapa 4: Re-otimização do Subproblema
    - Nova restrição de soma:
        - $900 + 1100 + x_3 + x_4 = 4400 \Rightarrow x_3 + x_4 = 2400$
    - Nova Função Objetivo
        - $F(x_3, x_4) = (0.006398x_3 + 0.00000344x_3^2) + (0.007050x_4 + 0.00000295x_4^2) \to \min$
    - Repetimos o processo de Lagrange
        - $\partial\varphi/\partial x_3 = 0.006398 + 0.00000688x_3 + \lambda = 0$

        - $\partial\varphi/\partial x_4 = 0.007050 + 0.00000590x_4 + \lambda = 0$
        - $x_3 + x_4 = 2400$
    - Isolando x_3 e x_4 em termos de λ e somando
        - $x_3 = (-\lambda - 0.006398) / 0.00000688$
        - $x_4 = (-\lambda - 0.007050) / 0.00000590$
        - $(-\lambda/0.00000688 - 929.9) + (-\lambda/0.00000590 - 1194.9) = 2400$
        - $(-145349 - 169492)\lambda - 2124.8 = 2400$
        - $-314841\lambda = 4524.8$
        - $\lambda \approx -0.01437$
    - Calculando a solução do subproblema x_3^o, x_4^o
        - $x_3^o = (-(-0.01437) - 0.006398) / 0.00000688 \approx 1159$
        - $x_4^o = (-(-0.01437) - 0.007050) / 0.00000590 \approx 1241$
        - Soma: $1159 + 1241 = 2400$
  - Etapa 5: Verificação Final e Relaxamento
    - $x_3^o = 1159$. Restrição: $1200 \leq x_3 \leq 1500$. (FALHOU, $1159 < 1200$)
    - $x_4^o = 1241$. Restrição: $1200 \leq x_4 \leq 1900$. (OK)
    - Fixar $x_3 = 1200$
    - Calcular x_4 usando a restrição do subproblema
        - $x_4 = 2400 - x_3 \Rightarrow x_4 = 2400 - 1200 = 1200$
- **Solução Final (Método de Lagrange)**
  - $x_1 = 900$
  - $x_2 = 1100$
  - $x_3 = 1200$
  - $x_4 = 1200$
- **Verificação Final da Solução**
  - Soma: $900 + 1100 + 1200 + 1200 = 4400$ (OK)
  - $x_1 = 900$ (OK)
  - $x_2 = 1100$ (OK)
  - $1200 \leq 1200 \leq 1500$ (OK)
  - $1200 \leq 1200 \leq 1900$ (OK)

- **MÉTODO 2: DESCIDA COORDENADA**
  - Variáveis Independentes: x1, x2, x3
  - Variável Dependente: x4 = 4400 - x1 - x2 – x3
  - A condição de otimalidade (minimizando $F = \Delta P_i + \Delta P_4$) é $\partial \Delta P_i / \partial x_i = \partial \Delta P_4 / \partial x_4$
  - Passo 0 — Ponto Inicial
    - $x_1^{(0)} = 900$; $x_2^{(0)} = 1100$; $x_3^{(0)} = 1200$ (limite inferior); $x_4^{(0)} = 4400 - 900 - 1100 - 1200 = 1200$
    - Cálculo de F(p)
      - $\Delta P_1(900) = 0.007980(900) + 0.00000738(900^2) = 13.1598$
      - $\Delta P_2(1100) = 0.006504(1100) + 0.00000495(1100^2) = 13.1439$
      - $\Delta P_3(1200) = 0.006398(1200) + 0.00000344(1200^2) = 12.6312$
      - $\Delta P_4(1200) = 0.007050(1200) + 0.00000295(1200^2) = 12.7080$
      - $F^{(0)} = 13.1598 + 13.1439 + 12.6312 + 12.7080 = 51.6429$
    - Início do Ciclo 1
      - Passo 1 — Otimizar x_1 (Fixos: $x_2 = 1100$, $x_3 = 1200$)
        - $x_4 = 4400 - x_1 - 1100 - 1200 = 2100 - x_1$
        - Condição: $\partial \Delta P_1/\partial x_1 = \partial \Delta P_4/\partial x_4$
        - $a_1 + 2b_1x_1 = a_4 + 2b_4x_4$
        - $0.007980 + 0.00001476x_1 = 0.007050 + 0.00000590(2100 - x_1)$
        - $0.00002066x_1 = 12.38907$
        - $x_1^{(1)} \approx 599.7$
        - Verificação: restrição $x_1 = 900$. A solução 599.7 está fora → ótimo restrito é $x_1^{(1)} = 900$.
        - O ponto não mudou.
      - Passo 2 — Otimizar x_2 (Fixos: $x_1 = 900$, $x_3 = 1200$)
        - $x_4 = 4400 - 900 - x_2 - 1200 = 2300 - x_2$
        - Condição: $\partial \Delta P_2/\partial x_2 = \partial \Delta P_4/\partial x_4$
        - $a_2 + 2b_2x_2 = a_4 + 2b_4x_4$
        - $0.006504 + 0.00000990x_2 = 0.007050 + 0.00000590(2300 - x_2)$
        - $0.0000158x_2 = 13.57055$

        - $x_2^{(2)} \approx 858.9$
        - Verificação: restrição $x_2 = 1100$. A solução 858.9 está fora → ótimo restrito é $x_2^{(2)} = 1100$.
        - O ponto não mudou.
    - Passo 3 — Otimizar x_3 (Fixos: $x_1 = 900$, $x_2 = 1100$)
        - $x_4 = 4400 - 900 - 1100 - x_3 = 2400 - x_3$
        - Condição: $\partial\Delta P_3/\partial x_3 = \partial\Delta P_4/\partial x_4$
        - $a_3 + 2b_3x_3 = a_4 + 2b_4x_4$
        - $0.006398 + 0.00000688x_3 = 0.007050 + 0.00000590(2400 - x_3)$
        - $0.00001278x_3 = 14.16065$
        - $x_3^{(3)} \approx 1108.0$
        - Verificação: restrição $1200 \leq x_3 \leq 1500$. A solução 1108.0 está fora (menor que 1200) → ótimo restrito é $x_3^{(3)} = 1200$.
        - O ponto não mudou.
- Fim do Ciclo 1
    - Ponto inicial do ciclo (Passo 0): $x^{(0)} = (900, 1100, 1200)$
    - Ponto final do ciclo (Passo 3): $x^{(3)} = (900, 1100, 1200)$
    - Como o ponto não mudou após um ciclo completo, o critério de parada foi atingido. A solução ótima restrita foi encontrada.

Passo	$x_1(p)$	$x_2(p)$	$x_3(p)$	$x_4(p)$	F(p)	Observação
0	900	1100.00	1200.00	1200.00	51.6429	Ponto Inicial
1	900	1100.00	1200.00	1200.00	51.6429	Otimiza x_1 (Sol. 599.7 < 900 → Fixa em 900)
2	900	1100.00	1200.00	1200.00	51.6429	Otimiza x_2 (Sol. 858.9 < 1100 → Fixa em 1100)
3	900	1100.00	1200.00	1200.00	51.6429	Otimiza x_3 (Sol. 1108.0 < 1200 → Fixa em 1200)

- **Solução Final (Descida Coordenada)**
    - x = (900, 1100, 1200, 1200)