Trabalho 02 - Otimização de Sistemas

Nome: Pedro Miranda **Questão:** No. 36

Dados do Problema

Máquina	Q_n	D_1	D_2	Q_p	Q'_p	**Restrições** (x_i)
1	1010	8,06	7,53	900	900	$0 \leq x_1 \leq 900$
2	1250	8,13	7,74	1100	1100	$0 \leq x_2 \leq 1100$
3	1610	10,30	8,91	1500	1200	$0 \leq x_3 \leq 1200$
4	2000	14,10	11,80	1900	1200	$0 \leq x_4 \leq 1200$
Total						$\sum Q = Q_\Sigma = 4400$

Função Objetivo

A função objetivo a ser minimizada é a perda total de carga $P(Q)$:

$$P(Q) = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{D_{1i} \cdot Q_i}{Q_{ni}} + \frac{D_{2i} \cdot Q_i^2}{Q_{ni}^2} \right)$$

Onde Q_i é a vazão de cada máquina, e Q_{ni}, D_{1i}, D_{2i} são os parâmetros de cada máquina.

Cálculo dos Coeficientes:

Máquina	Coeficiente $A_i = \frac{D_{1i}}{Q_{ni}}$	Coeficiente $B_i = \frac{D_{2i}}{Q_{ni}^2}$
1	$\frac{8,06}{1010} \approx 0,007980$	$\frac{7,53}{1010^2} \approx 0,000007374$
2	$\frac{8,13}{1250} \approx 0,006504$	$\frac{7,74}{1250^2} \approx 0,000004954$
3	$\frac{10,30}{1610} \approx 0,006398$	$\frac{8,91}{1610^2} \approx 0,000003437$
4	$\frac{14,10}{2000} \approx 0,007050$	$\frac{11,80}{2000^2} \approx 0,000002950$

A função objetivo é:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4}(A_i x_i + B_i x_i^2)$$

Sujeito à restrição de igualdade:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4400$$

E às restrições de desigualdade:

$$\begin{gathered} 0 \leq x_1 \leq 900 \\ 0 \leq x_2 \leq 1100 \\ 0 \leq x_3 \leq 1200 \\ 0 \leq x_4 \leq 1200 \end{gathered}$$

Solução por Multiplicadores de Lagrange

O método dos Multiplicadores de Lagrange exige que a derivada parcial da função objetivo em relação a cada variável seja igual à constante λ:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = A_i + 2B_i x_i = \lambda$$

Isolando x_i:

$$x_i = \frac{\lambda - A_i}{2B_i}$$

Expressões para x_i em função de λ:

Máquina	Expressão $x_i(\lambda)$
1	$x_1 = 67,804\lambda - 0,541$
2	$x_2 = 100,928\lambda - 0,656$
3	$x_3 = 145,463\lambda - 0,930$
4	$x_4 = 169,492\lambda - 1,195$

Cálculo Inicial de λ (Ignorando Restrições de Desigualdade):

A soma das vazões x_i deve ser igual a $Q_\Sigma = 4400$:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i(\lambda) = 4400$$

$$(67,804\lambda - 0,541) + (100,928\lambda - 0,656) + (145,463\lambda - 0,930) + (169,492\lambda$$

$$483,687\lambda - 3,322 = 4400$$

$$\lambda = \frac{4403,322}{483,687} \approx 9,10398$$

Cálculo das Vazões Iniciais:

Máquina	$x_i = \frac{\lambda - A_i}{2B_i}$	Valor	Restrição Máxima
1	$x_1 = 67,804(9,10398) - 0,541$	$616,849$	900 **(OK)**
2	$x_2 = 100,928(9,10398) - 0,656$	$918,194$	1100 **(OK)**
3	$x_3 = 145,463(9,10398) - 0,930$	$1323,430$	1200 **(VIOLADA)**
4	$x_4 = 169,492(9,10398) - 1,195$	$1540,895$	1200 **(VIOLADA)**

Ajuste das Vazões (Fixação das Restrições Violadas):

As vazões x_3 e x_4 violam as restrições máximas. Fixamos $x_3 = 1200$ e $x_4 = 1200$. A vazão restante a ser distribuída entre x_1 e x_2 é:

$$x_1 + x_2 = 4400 - 1200 - 1200 = 2000$$

Recálculo de λ (Apenas para x_1 e x_2):

$$(67,804\lambda - 0,541) + (100,928\lambda - 0,656) = 2000$$

$$168,732\lambda - 1,197 = 2000$$

$$\lambda = \frac{2001,197}{168,732} \approx 11,8605$$

Cálculo das Vazões Ajustadas:

Máquina	$x_i = \frac{\lambda - A_i}{2B_i}$	Valor	Restrição Máxima
1	$x_1 = 67,804(11,8605) - 0,541$	$803,569$	900 **(OK)**
2	$x_2 = 100,928(11,8605) - 0,656$	$1196,974$	1100 **(VIOLADA)**

Ajuste Final:

A vazão x_2 ainda viola a restrição máxima. Fixamos $x_2 = 1100$. A vazão restante é alocada para x_1:

$$x_1 = 4400 - 1100 - 1200 - 1200 = 900$$

Solução Ótima Encontrada:

$$\begin{gathered} x_1 = 900 \\ x_2 = 1100 \\ x_3 = 1200 \\ x_4 = 1200 \end{gathered}$$

Verificação: $900 + 1100 + 1200 + 1200 = 4400$. Todas as restrições de desigualdade são respeitadas.

Cálculo da Perda Total de Carga Mínima $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} (A_i x_i + B_i x_i^2)$$

Máquina	Vazão x_i	$A_i x_i$	$B_i x_i^2$	Perda P_i
1	900	$0,007980 \cdot 900 = 7,1820$	$0,000007374 \cdot 900^2 = 5,9729$	$13,1549$
2	1100	$0,006504 \cdot 1100 = 7,1544$	$0,000004954 \cdot 1100^2 = 5,9943$	$13,1487$
3	1200	$0,006398 \cdot 1200 = 7,6776$	$0,000003437 \cdot 1200^2 = 4,9493$	$12,6269$
4	1200	$0,007050 \cdot 1200 = 8,4600$	$0,000002950 \cdot 1200^2 = 4,2480$	$12,7080$
Total	**4400**			$51,6385$

A perda total de carga mínima é de $51,64$.

Resumo da Solução

Máquina	Vazão Ótima (x_i)	Restrição Máxima (Q'_p)
1	900	900
2	1100	1100
3	1200	1200
4	1200	1200
Total	**4400**	

Perda Total de Carga Mínima: $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 51,64$