PROBLEMA GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA GERAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O problema geral da programação linear necessita determinar os valores de x_i que minimizam a função objetivo linear

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

observando o sistema de restrições lineares:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

e das restrições para os valores não negativos das variáveis

$x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$.

A inclusão no sistema de equações apenas das igualdades não limita a formulação do problema, porque as restrições dadas como desigualdades, podem ser reduzidas às igualdades pela introdução de variáveis adicionais. Além disso, o problema da maximização da função objetivo, pode ser reduzido ao um problema de minimização da função objetivo pela alteração do seu sinal. Por isso, pode-se falar em problema geral da programação linear.

Exemplo:

É necessário preparar uma dieta, que garante:

- o nível de proteína que não é menor que b_1;
- o nível de gordura que não é menor que b_2;
- o nível de carboidrato que não é menor que b_3.

Uma unidade de produto P_1 tem a_{11} de unidades de proteína;
Uma unidade de produto P_1 tem a_{12} de unidades de gordura;
Uma unidade de produto P_1 tem a_{13} de unidades de carboidrato.

Uma unidade de produto P_2 tem a_{21} de unidades de proteína;
Uma unidade de produto P_2 tem a_{22} de unidades de gordura;
Uma unidade de produto P_2 tem a_{23} de unidades de carboidrato.

Uma unidade de produto P_3 tem a_{31} de unidades de proteína;
Uma unidade de produto P_3 tem a_{32} de unidades de gordura;
Uma unidade de produto P_3 tem a_{33} de unidades de carboidrato.

Uma unidade de produto P_4 tem a_{41} de unidades de proteína;
Uma unidade de produto P_4 tem a_{42} de unidades de gordura;
Uma unidade de produto P_4 tem a_{43} de unidades de carboidrato.

Uma unidade de produto P_1 custa tem c_1;

Uma unidade de produto P_2 custa tem c_2;
Uma unidade de produto P_3 custa tem c_3;
Uma unidade de produto P_4 custa tem c_4.

É necessário minimizar o custo de dieta. Então temos uma FO:

$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$

e as seguintes restrições:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$;
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$;
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$;
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

x_1, x_2, x_3 e x_4 são volumes de produtos 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Exemplo:

Uma empresa tem 3 tipos de matéria prima e pode produzir um tipo de produto, usando duas tecnologias. A primeira tecnologia permite produzir 20 unidades de produto por hora. A segunda tecnologia permite gerar 30 unidades de produto por hora. Os volumes das matérias primas necessários por hora para cada tecnologia são apresentados na tabela.

	Matéria prima 1	Matéria prima 2	Matéria prima 3
Tecnologia I	10	20	15
Tecnologia II	20	10	15
Volume de estoque	100	100	90

x_1 e x_2 são tempos de utilização da primeira e da segunda tecnologias.

Função objetivo, que deve ser maximizada, é

$F(x) = 20\,x_1 + 30\,x_2$.

As restrições são as seguintes:

$10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 100$;
$20\,x_1 + 10\,x_2 \leq 100$;
$15\,x_1 + 15\,x_2 \leq 90$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

Uma questão fundamental é correlação entre n e m. n é o número das variáveis e m é o número das restrições funcionais. Não pode ser $n < m$: o sistema das equações não é definido. No caso extremo, $n = m$, o sistema de equações é considerado como na álgebra habitual. Se o determinante do sistema diferente de zero, então o sistema tem uma solução única. Se essa solução inclui pelo menos uma variável entre x_i, $i = 1,..., n$ que não satisfaça as restrições para os valores das variáveis não negativos, então a solução obtida não é permissível e o problema não tem solução. Se todos os valores $x_1, x_2, ... , x_n$ são não negativas, então a solução obtida é permissível e, o que é natural, ótima. Esse caso é trivial e não apresenta interesse. Por isso, mais adiante consideraremos somente o caso de quando o número das variáveis x_i é maior do que o número das equações, isto é, $n > m$.

Introduzimos a seguir a terminologia mais comum usada em programação linear.

Terminologia

Quando o número n de variáveis no sistema das equações é maior que o número m das equações, então uma das possíveis soluções pode ser obtida para quando n - m das variáveis arbitrárias for consideradas iguais a zero. O sistema assim obtido das m equações com m variáveis pode ser resolvido na base dos diferentes métodos algébricos. É necessário apenas observar a condição de não igualdade a zero do determinante desse sistema. Se esta condição não for observada, é possível considerar-se outras das variáveis n - m como iguais a zero. A solução que se pode obter chama-se a **solução básica**. A expressão **base** é usada para qualquer conjunto de m variáveis tais que o determinante construído com os coeficientes dessas variáveis não seja igual a zero. Essas m variáveis chamam-se **básicas** (relativamente à base dada). As k=n - m variáveis restantes chamam-se **não básicas** ou **livre**s.

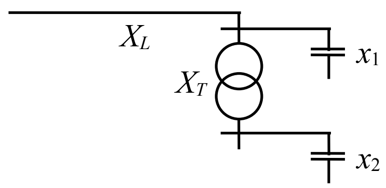
Qualquer solução básica será uma **solução básica permissível** se ela satisfizer as restrições para os valores das variáveis não negativos. Uma solução básica permissível chama-se **ótima** se gera o mínimo da função objetivo. Ao mesmo tempo, é necessário esclarecer o que segue.

O problema geral da programação linear não sempre tem a solução. Em particular, pode-se encontrar situações em que as restrições são contraditórias. Em outras palavras, as situações apontam uma falta de soluções permissíveis. Além disso, é possível que existam soluções permissíveis do problema geral da programação linear, porém entre elas não existe uma solução ótima (a função objetivo não é limitada).

É evidente que o problema geral da programação linear é um caso particular da programação convexa (a função convexa é dada no conjunto convexo). Entretanto, para uma apresentação geral da programação linear, consideraremos sua interpretação geométrica como exemplo concreto.

INTERPRETAÇÂO GEOMETRICA DO PROBLEMA GERAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Admitamos que seja necessário escolher os valores de potências dos bancos de capacitores para compensação de reativos que devem ser instalados nas barras de alta tensão e de baixa tensão de um transformador.



Os preços específicos dos capacitores são: c_1 = 6 unidades monetárias/kVAr e c_2 = 12 unidades monetárias/kVAr. Então, podemos considerar o preço total dos capacitores como a função objetivo:

$F(x) = 6x_1 + 12x_2$

onde x_1 e x_2 são as potências dos bancos de capacitores que devem ser instalados nas barras de alta tensão e de baixa tensão, respectivamente.

A minimização da função objetiva deve ser acompanhada da satisfação das seguintes restrições para:

1) o regime de tensão

$0,6x_1 + x_2 \leq 600$;

2) o balanço de potência reativa

$x_1 + x_2 \geq 300$;

3) o descarregamento do transformador

$x_2 \geq 100$;

4) os valores não negativos das variáveis

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Para transformar as desigualdades 1)-3) em equações, introduzimos as variáveis adicionais x_3, x_4 e x_5 para poder escrever:

$0,6x_1 + x_2 + x_3 = 600$;
$x_1 + x_2 - x_4 = 300$;
$x_2 - x_5 = 100$.

É possível apresentar as equações da seguinte forma:

$600 - 0,6x_1 - x_2 \geq 0$;
$-300 + x_1 + x_2 \geq 0$;
$-100 + x_2 \geq 0$.

Vamos processar.

$x_3 = 600 - 0,6x_1 - x_2 \geq 0$;

Construímos:

$600 - 0,6x_1 - x_2 \geq 0$;

$600 - 0,6x_1 - x_2 = 0$;

$0,6x_1 + x_2 = 600$;

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 600$ e $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1000$. Para baixo, é permissível.

Construímos:

$-300 + x_1 + x_2 \geq 0$;

$-300 + x_1 + x_2 = 0$;

$x_1 + x_2 = 300$;

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 300$ e $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 300$. Para cima, é permissível.

As desigualdades $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$ em função das variáveis x_1 e x_2 e também $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, definem os correspondentes semi-espaços positivos no plano (x_1,x_2). Por exemplo, na figura, a desigualdade $x_1 \geq 0$ define o semi-espaço superior. A região correspondente a $x_1 < 0$ é proibida o que está sendo representado por um sombreado naquela figura. A região proibida $x_2 < 0$ também é marcada por um sombreamento. A desigualdade $x_3 \geq 0$ define o semi-espaço na região logo acima da linha $600 - 0.6x_1 - x_2 = 0$ (indicada como a linha 1 na figura) e, tal lado inclui particularmente a origem das ordenadas. Isto é simples de se verificar se substituirmos $x_1 = x_2 = 0$ na correspondente desigualdade. Aqui, também a região proibida é sombreada no lado acima da linha $-300 + x_1 + x_2 = 0$ (linha 2 na figura). A região proibida correspondente é mostrada com um sombreamento. Finalmente, a desigualdade $x_5 \geq 0$ define o semi-espaço que está acima da linha $-100 + x_2 = 0$ (a linha 3 na figura). A região proibida $x_5 < 0$ também é mostrada por um sombreamento.

Então, a região (conjunto) das soluções permissíveis é envolvida pelo polígono ABCD. É importante salientar que o polígono das soluções permissíveis é fechado e convexo (é a intersecção dos conjuntos convexos definidos pelas condições $x_i \geq 0$).

O polígono ABCD permite dar a interpretação geométrica da solução básica. Toda a linha corresponde à transformação de uma das variáveis em zero. Por isso, nos pontos de interseção das duas linhas, temos a transformação de duas variáveis em zero, isto é, em nosso caso, temos $n - m = 5 - 3 = 2$ variáveis. Mas $n - m$ é o número das variáveis não básicas (livres). A transformação dessas variáveis em zero corresponde à solução básica. Então, os pontos de interseção das linhas $x_i = 0$, $i = 1,2, ..., 5$ definem as soluções básicas do problema geral da programação linear.

Agora, construiremos uma linha que corresponde a função objetivo, isto é:

$F(x) = 6x_1 + 12x_2 = L$.

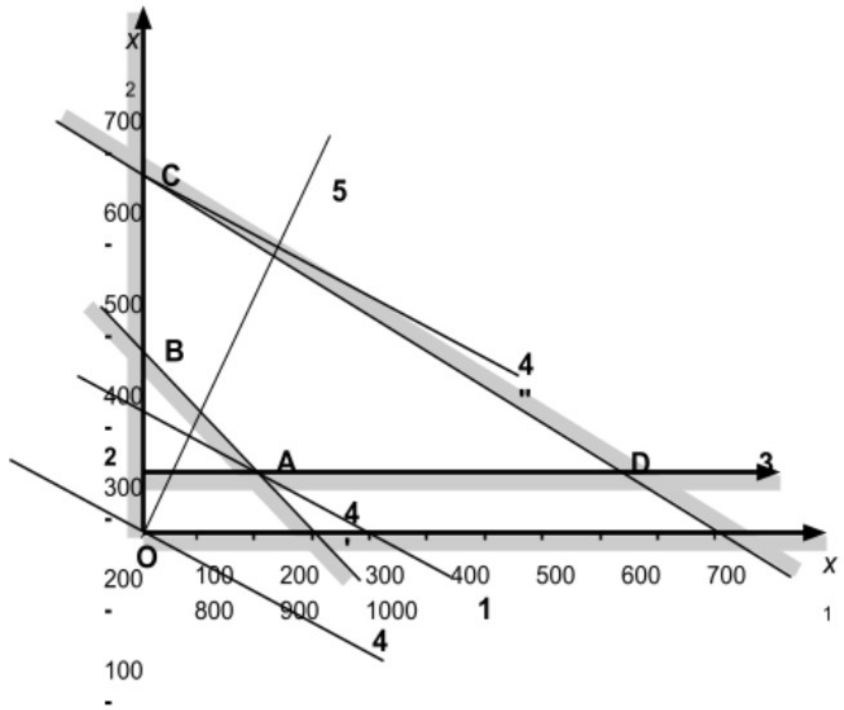
Qual é a diferença entre linhas

$F(x) = 6x_1 + 12x_2 = 1.000$

e

$F(x) = 6x_1 + 12x_2 = 5.000$.

Como resultado obtemos a equação da reta no plano (x_1, x_2). O coeficiente angular desta reta é: -6/12 = -1/2, e o segmento cortado por esta reta no eixo Ox_2 é $L/12$. É evidente que variando-se a constante de L para L_1 o coeficiente angular não se modifica, variando apenas o segmento que corta o eixo Ox_2.



Então, as linhas correspondentes à função objetivo são representadas por diferentes retas (retas de nível) no plano (x_1, x_2). Todas estas retas, porém, são paralelas uma em relação às outras. Constrói-se, então, no plano (x_1, x_2) a chamada linha fundamental, que corresponde à $L = 0$ (a linha 4 na figura). Levantaremos uma perpendicular (linha 5 na figura) para obter a direção de maior aumento ou decréscimo da função objetivo. Movendo a linha 4 paralelamente à si mesma, pode-se obter diferentes soluções. É evidente que no ponto A - o primeiro ponto da região das soluções permissíveis em movimento da linha fundamental (linha 4' correspondente ao ponto A, onde teremos o mínimo da função objetivo). O ponto C é o último ponto na região das soluções permissíveis (linha 4" correspondente ao ponto C, onde teremos o máximo da função objetivo). O nível da função objetiva no ponto A é

$F(200,100) = 6\times200 + 12\times100 = 2.400$ unidades monetárias

e no ponto C é

$F(0,600) = 6\times0 + 12\times600 = 7.200$ unidades monetárias.

A análise da interpretação geométrica do problema geral da programação linear permite fazer-se as seguintes considerações gerais:

1) a solução do problema da programação linear, se essa solução existe, não está contida na região das soluções permissíveis, mas pode estar localizada apenas na fronteira dessa região. Além do mais, se a solução ótima é única, então ela sempre existe num vértice do polígono das soluções permissíveis que corresponde à solução básica permissível. Pode-se também dizer que, em programação linear, o mínimo é único e, por isso, global pois pode-se repetir que se tem a função objetiva convexa dada na região fechada e convexa;

2) a solução do problema da programação linear pode ser não única. Realmente, se a reta fundamental é paralela ao tal lado do polígono das soluções permissíveis onde alcança-se o mínimo da função objetivo, então ela está situada não num ponto, mas em todo esse lado. Neste caso, o problema tem um número infinito de soluções ótimas. Por exemplo, se no nosso problema a função objetivo é

$F(\mathrm{x}) = 6x_1 + 6x_2$,

então, a reta fundamental é paralela ao lado do polígono definido pela condição 2).

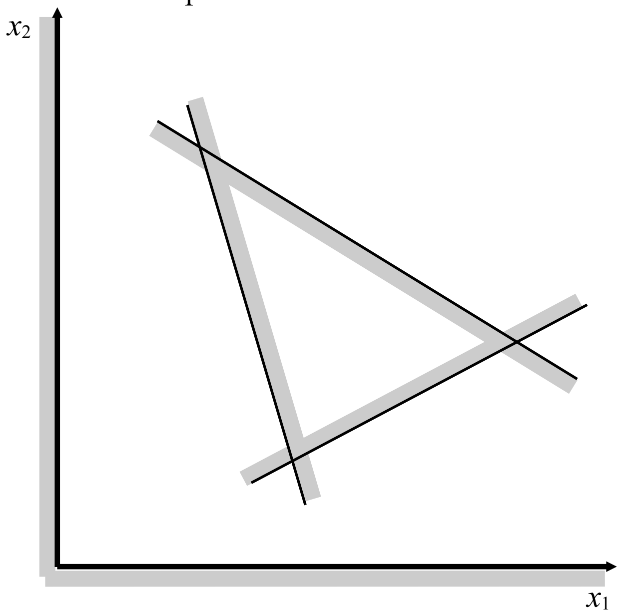
Entretanto, se as soluções ótimas situam-se em todo o lado, então elas situam-se em todos os vértices pelos quais passar este lado. Assim sendo, tal como anteriormente, a solução pode ser obtida no ponto da solução básica permissível;

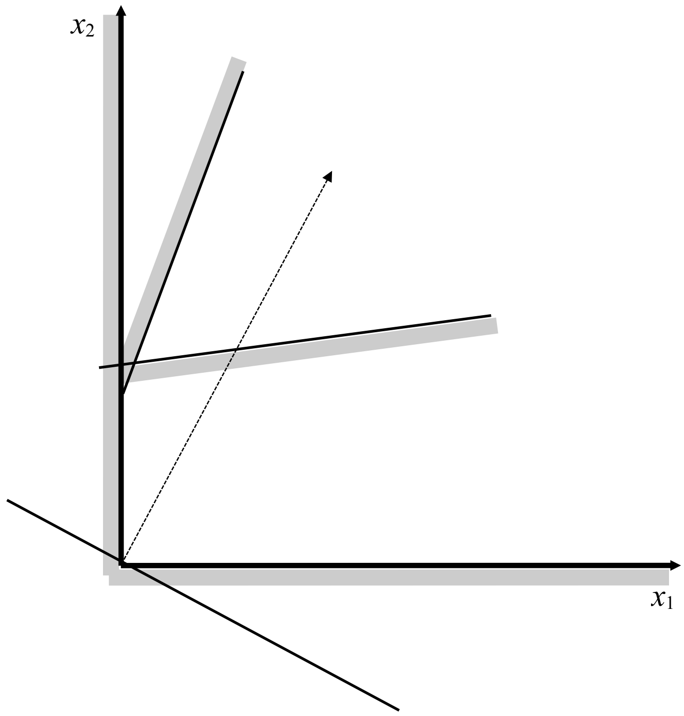
3) as considerações citadas nos itens 1 e 2, permitem-nos traçar o seguinte caminho principal para obter-se a solução ótima do problema geral da programação linear: é suficiente considerar todos os vértices da região das soluções permissíveis (soluções básicas permissíveis) e escolher um vértice onde a função linear objetiva recebe o valor mínimo.

Conforme já dissemos acima, o problema geral da programação linear pode não ter solução. Em particular, as soluções permissíveis podem não existir, se a região correspondente às soluções permissíveis for vazia (as restrições são contraditórias). Para o caso $n - m = 2$, esta situação é mostrada na figura.

Além disso, pode-se encontrar situações onde o problema não tem solução apesar da região das soluções permissíveis existir. Como se pode entender da figura, por exemplo, a transferência da reta fundamental (linha (1)), correspondente à função objetivo: $F(x) = -2x_1 - 5x_2$, pode levar ao decréscimo ilimitado dela, isto é, a função objetiva não limitada desce.

A interpretação geométrica permite tirar-se uma série de conclusões importantes para o caso n - m = 2. Entretanto, para o caso n - m > 2 , as restrições definem a região das soluções permissíveis - conjunto poliedral, que é convexo (apesar de poder ser vazio ou não limitado). Para o caso n - m > 2 a solução ótima também situa-se em um vértice do conjunto poliedral - a solução básica permissível. Por isso, como para o caso n - m = 2, pode-se primeiro definir todas as soluções básicas correspondentes ao conjunto poliedral (isso é efetuado porque o número de vértices esta terminado), e depois, entre os vértices encontrados, escolhe-se um vértice onde a função objetiva tenha um valor mínimo. Em princípio, este caminho não causa dificuldades. Entretanto nos problemas de interesse prático, o número de vértices é demasiado grande e o caminho não é construtivo mesmo com a ajuda de computadores mais rápidos.





A seguir, consideraremos o método conhecido como simplex para a busca da solução ótima dos problemas da programação linear. Aqui, também, faz-se um atalho na região das soluções permissíveis. Entretanto esse atalho não é cego, porém é dirigido, o que prova a possibilidade de exceção na consideração da quantidade significativa das soluções básicas que, com certeza, não são ótimas.

O número das combinações $C_m^n = n!/m!(n - m)!$
Por exemplo, $n = 40$ e $m = 20$. Então, $C = 40!/20!(40 - 20)! = 6.867.432$.

Levando isso em consideração foi desenvolvido um método que permite cortar automaticamente muitas alternativas de solução, não analisando. Se nós estamos num vértice permissível é podemos ir para dois vértices vizinhos, onde valores da função objetivo maior e menor do que no vértice onde estamos. O método sempre vai escolher o vértice onde o valor da função objetivo é menor. Esse método chama-se método simplex.

MÉTODO SIMPLEX DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Considerações Gerais

A idéia do método simplex é suficientemente simples. Admitimos, que no problema da programação linear temos n variáveis e m restrições, dadas como as equações. Sabemos, que a solução ótima (se ela existe) pode ser achada num vértice da região das soluções permissíveis, onde, pelo menos, $k = n - m$ das variáveis iguais ao zero. Escolhemos algumas k variáveis na qualidade não básicas e expressamos através delas as outras m variáveis básicas. Admitimos, pôr exemplo, que na qualidade das variáveis não básicas são escolhidas primeiras $k = n - m$ das variáveis $x_1, x_2, ... , x_k$ e as outras m variáveis são expressadas através delas:

$$x_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,k}x_k + b_{k+1};$$
$$x_{k+2} = a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,k}x_k + b_{k+2};$$
$$...$$
$$x_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,k}x_k + b_n.$$

Essa solução é básica? Sim, é básica. Essa solução é permissível? Provamos isso, supondo que

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ... , x_k = 0$$

para achar:

$$x_{k+1} = b_{k+1}, x_{k+2} = b_{k+2}, ... , x_n = b_n.$$

Essa solução é permissível ou não é permissível? A solução é permissível, se todos os membros livres $b_{k+1}, b_{k+2}, ... , b_n$ são não negativos. Admitimos, que se essa condição é cumpre-se. Então, temos uma solução básica permissível. Essa solução é ótima? Para a verificação isso, expressamos a função objetivo $F(x)$ pelas variáveis não básicas $x_1, x_2, ... , x_k$ da seguinte forma:

$$F(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k.$$

É natural, se $x_1 = x_2 = x_k = 0$, temos $F(x) = c_0$. Analisamos, é possível melhorar a solução - diminuir $F(x)$, aumentando algumas variáveis $x_1, x_2, ... , x_k$ (diminuir delas não é possível, porque elas são não básicas e já iguais ao zero)? Se todos os coeficientes $c_1, c_2, ... , c_k$ são positivos, então temos a solução ótima: aumentando as variáveis $x_1, x_2, ... , x_k$, não podemos diminuir $F(x)$. Se entre os coeficientes $c_1, c_2, ... , c_k$ existem negativos, então, aumentando os valores de algumas variáveis $x_1, x_2, ... , x_k$, e, justamente - tais, quais coeficientes são negativos, é possível melhorar a solução - diminuir $F(x)$.

Admitimos, pôr exemplo, que o coeficiente c_1 é negativo. Então, é a razão aumentar x_1 e passar da solução básica permissível dada a outra solução, onde a variável x_1 não igual ao zero, mas, em lugar dela, outra algum variável igual ao zero. O aumento da x_1 é útil para a função objetivo, mas aumentar x_1 é necessário com o prudente, que não fazer outras variáveis $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots , x_n$, que são expressadas pelas variáveis não básicas, negativas.

Olhamos, é perigoso para as variáveis $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots , x_n$ o aumento de x_1, que pode fazer elas negativas? Sim, é perigoso, se o coeficiente de x_1 na equação correspondente é negativo. Se entre as equações não existe a equação com o coeficiente negativo de x_1, então é possível aumentar o valor de x_1 sem a limitação, e nesse caso a função objetivo não é limitada: a solução ótima do problema de programação linear não existe.

Admitimos, que isso não assim, e entre as equações existem tais, onde o coeficiente de x_1 é negativo. Para as variáveis, que existem nas partes esquerdas dessas equações, o aumento da x_1 é perigoso: esse aumento pode fazer delas negativos.

Consideramos entre essas uma variável x_p e analisamos, até qual grau assim é possível aumentar x_1, enquanto a variável x_p, não é negativa? Escrevemos a correspondente equação p:

$$x_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pk}x_k + b_p.$$

Aqui, o membro livre $b_p \geq 0$, mas o coeficiente a_{p1} é negativo. É fácil entender, que se deixamos $x_2 = \ldots = x_k = 0$, então é possível aumentar x_1 somente até do valor igual $-b_p/a_{p1}$, e o aumento de x_1 leva ao valor negativo de x_p. Isso é claro da equação

$$0 = a_{p1}x_1 + b_p.$$

Escolhemos uma variável entre $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots , x_n$, que pode, mais sedo, tratar ao zero com o aumento da x_1, ou na realidade, a variável, que tem no mínimo valor de $-b_p/a_{p1}$. Seja, tal “mais ameaçada” variável é x_r. Então, é a razão “reresolver” o sistema das equações relativamente das outras variáveis básicas, excluindo x_1 da composição das variáveis não básicas e transferindo no lugar dela a variável x_r. Realmente, queremos passar da solução, definida pelas igualdades $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, a solução, onde já $x_1 \neq 0$, mas $x_2 = \ldots = x_k = x_r = 0$. Nesse caso, as variáveis básicas são $x_{k+1}, \ldots , x_{r-1}, x_1\, x_{r+1}, \ldots , x_n$.

Se temos
$0 = a_{p1}x_1 + b_p$
e
$0 = a_{r1}x_1 + b_r$
com a_{p1} e a_{r1} negativos, então é necessário escolher mais perigosa variável x_p ou x_r?
Consideramos um pequeno exemplo. Temos
$x_p = 0 = -5x_1 + 10$ e $x_1 = 2$
e
$x_r = 0 = -8x_1 + 40$ e $x_1 = 5$.

Admitimos, que as equações são formadas para o conjunto novo das variáveis básicas e não básicas. Então, é possível expressar através as variáveis não básicas novas a função objetivo $F(x)$. Se todos os coeficientes das variáveis nessa formula são positivos, então obtemos a solução ótima: ela chegou-se se todas as variáveis não básicas tomam pôr o zero. Se entre os coeficientes das variáveis existem negativos, então o procedimento de melhoramento da solução continua-se: o sistema de novo reresolve-se relativamente outras as variáveis básicas, etc., ate não achamos a solução ótima do problema.

Marcamos, que na nossa discussão, não buscamos a solução básica permissível: obtemos dela automaticamente porque admitimos, que b_{k+1}, b_{k+2}, ... , b_n são não negativos e a primeiro solução foi permissível. Se isso não corresponde a realidade, é possível passar a solução básica permissível com a ajuda do mesmo procedimento de troca dos lugares das algumas variáveis básicas e não básicas ate os membros livres são não negativos. Como, é possível fazer isso, consideramos mais tarde.

Algoritmo de Tabela de Troca das Variáveis Básicas

O procedimento de "reresolução" do sistema das equações-restrições do problema geral de programação linear relativamente as variáveis básicas novas pode ser essencialmente simplificado, se formalizar dele e reduzir ao enchimento das tabelas especiais com base no sistema de regras certas. O algoritmo correspondente, demonstramos pela consideração de exemplo concreto.

Consideramos o sistema de cinco equações-restrições:

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + b_1;$
$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + b_2;$
$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + b_3;$
$y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + b_4;$
$y_5 = a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + b_5$

com quatro variáveis não básicas x_1, x_2, x_3 e x_4. Admitimos, que precisamos excluir das variáveis não básicas alguma variável, pôr exemplo, x_2 e transferir ela nas variáveis básicas, e em lugar dela introduzir na lista das variáveis não básicas alguma variável básica, pôr exemplo, y_3. Em outras palavras, queremos trocar os lugares das variáveis x_2 e y_3. Assinalamos essa troca simbolicamente: $y_3 \leftrightarrow x_2$

Consideramos, quais operações devem ser executadas para isso.

Geralmente, é possível para todo sistema novo das equações realizar a "reresolução" de novo: para a troca $y_3 \leftrightarrow x_2$ tomamos na terceira equação o membro $a_{32}x_2$, mantendo x_2 (chamam dele "membro permissível"; é natural, que supomos $a_{32} \neq 0$), transferimos dele na parte esquerda, e y_3 - na parte direito; resolvemos a equação relativamente da x_2 e acercamos a expressão para x_2 nos todos outras equações. Esse procedimento é bastante volumoso. Entretanto, aqui, cada vez é necessário realizar mesmas operações. Pôr isso, é suficientemente implementar eles uma vez em forma geral e formular as regras de transformação, que depois é possível utilizar automaticamente. Essas regras podem ser realizadas pelo o algoritmo de tabela.

É racional antecipadamente transformar o sistema das equações, apresentando as partes direitas delas como as diferenças entre os membros livres e a soma das outras:

$y_1 = b_1 - (-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4);$
$y_2 = b_2 - (-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4),$
$y_3 = b_3 - (-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4),$
$y_4 = b_4 - (-a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4),$
$y_5 = b_5 - (-a_{51}x_1 - a_{52}x_2 - a_{53}x_3 - a_{54}x_4).$

Assinalando

$-a_{11} = \alpha_{11}; -a_{12} = \alpha_{12}; ... -a_{54} = \alpha_{54},$

recebemos

$y_1 = b_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4);$

$y_2 = b_2$ - $(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4)$;
$y_3 = b_3$ - $(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4)$;
$y_4 = b_4$ - $(\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4)$;
$y_5 = b_5$ - $(\alpha_{51}x_1 + \alpha_{52}x_2 + \alpha_{53}x_3 + \alpha_{54}x_4)$.

Chama-se dessa forma da apresentação a forma padronizada.

Evidentemente, que é melhor não escrever as equações totalmente, mas encher a tabela padronizada, onde são indicados somente os membros livres e os coeficientes das variáveis.

A primeira coluna é reservada para os membros livres, as segunda, terceira, quarta e quinta colunas - para os coeficientes das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4, respectivamente.

	Membro Livre	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
y_3	b_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
y_4	b_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}
y_5	b_5	α_{51}	α_{52}	α_{53}	α_{54}

Agora imaginamos, que queremos implementar o troca $y_3 \leftrightarrow x_2$: transferir a variável x_2 para a lista das variáveis básicas, e a variável y_3 para a lista das variáveis não básicas.

Designamos na tabela padronizada o elemento permitindo α_{32}; designamos também a linha e coluna, onde está esse elemento. Essa linha e essa coluna chamam-se a linha permissível e a coluna permissível (Tabela 2).

	Membro Livre	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
y_3	b_3	α_{31}	$\boldsymbol{\alpha_{32}}$	α_{33}	α_{34}
y_4	b_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}
y_5	b_5	α_{51}	α_{52}	α_{53}	α_{54}

Implementando a operação $y_3 \leftrightarrow x_2$, queremos inserir na linha (linha permissível) a variável y_3, e na coluna (coluna permissível) - a variável x_2. Isso é marcado junto da linha e da coluna correspondentes.

Achamos os coeficientes que devem ser colocados na tabela depois o troca $x_2 \leftrightarrow y_3$.

Começamos as transformações da linha permissível. Resolvendo a terceira equação do sistema, obtemos:

$$x_2 = \frac{b_3}{\alpha_{32}} - \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}} x_1 + \frac{1}{\alpha_{32}} y_3 + \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{32}} x_3 + \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{32}} x_4 \right)$$

Tal forma, os elementos transformados da linha permissível são achados. Formamos a regra de transformação das outras linhas. Para isso, substituímos na primeira equação do sistema em lugar da x_2 a expressão dela. Depois a consideração os membros similares, temos:

$$y_1 = \left(b_1 - \frac{\alpha_{12} b_3}{\alpha_{32}} \right) - \left[\left(\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{31}}{\alpha_{32}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{32}} \right) y_3 + \left(\alpha_{13} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{33}}{\alpha_{32}} \right) x_3 + \left(\alpha_{14} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{34}}{\alpha_{32}} \right) x_4 \right].$$

Não é difícil conversar-se, que com inteiramente a análoga maneira são transformadas todas as linhas outras. Em resultado, recebemos a tabela transformada, onde a operação $y_3 \leftrightarrow x_2$ já é terminada.

	Membro Livre	x_1	y_3	x_3	x_4
y_1	$b_1 - \frac{\alpha_{12} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{13} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{14} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_2	$b_2 - \frac{\alpha_{22} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{21} - \frac{\alpha_{22}\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{23} - \frac{\alpha_{22}\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{24} - \frac{\alpha_{22}\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
x_2	$\frac{b_2}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$\frac{1}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_4	$b_4 - \frac{\alpha_{42} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{41} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{42} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{44} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_5	$b_5 - \frac{\alpha_{52} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{51} - \frac{\alpha_{52}\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{52}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{53} - \frac{\alpha_{52}\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{54} - \frac{\alpha_{52}\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$

Considerando a tabela, podemos formular o algoritmo de transformação dos coeficientes da tabela padronizada:

1. Calculamos o valor inverso do elemento permissível $\lambda = \frac{1}{\alpha_{ji}}$ e o resultado escrevemos na parte baixa da mesma célula.
2. Multiplicamos todos os elementos da linha permissível (menos α_{ji}) por λ e os resultados escrevemos nas partes baixas das mesmas células.
3. Multiplicamos todos os elementos da coluna permissível (menos α_{ji}) por - λ e os resultados escrevemos nas partes baixas das mesmas células.
4. Distinguimos todos os elementos altos (velhos) (menos α_{ji}) da linha permissível e todos os elementos baixos (novos) (menos α_{ji}) da coluna permissível.

5. Para todo elemento, que não pertence a linha permissível e a coluna permissível, escrevemos na parte baixa da célula o produto dos elementos distinguidos que estão na mesma linha e na mesma coluna, que o elemento considerado.

6. Copiamos a tabela, substituindo:

a) x_j por x_i e ao contrario;

b) elementos da linha permissível e da coluna permissível por elementos que estão nas partes baixas das mesmas células;

c) todos os outros elementos por soma dos elementos, que estão nas partes altas e baixas das mesmas células.

Recordamos, que no problema da programação linear, exceto das equações-restrições, existe mais a função objetivo

$$F(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_i + \ldots + c_nx_n,$$

que é necessário minimizar. Se essa função é expressada através as variáveis não básicas velhas $x_1, x_2, \ldots, x_k$, então, evidentemente, depois da troca $y_j \leftrightarrow x_i$, é necessário expressar dela através as variáveis não básicas novas $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \ldots, x_k$. Não é difícil convencer-se, que para isso é possível utilizar o mesmo algoritmo para a transformação da qualquer linha da tabela padronizada. Realmente, reduzindo $F(x)$ a forma padronizada

$$F(x) = c_0 - (\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \ldots + \gamma_kx_k) \qquad ,$$

onde $\gamma_1 = -c_1$; $\gamma_2 = -c_2$;...; $\gamma_k = c_k$, recebemos mais uma linha, que tem a diferença das outras linhas, que não é possível escolher na dela o elemento permitindo.

Exemplo. É necessário implementar a troca $y_2 \leftrightarrow x_1$ para o sistema das equações-restrições

$$y_1 = 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 1,$$
$$y_2 = \frac{1}{2}x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 3,$$
$$y_3 = 0x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 1$$

e a função objetivo

$$F(x) = -1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1.$$

Fazemos a seguinte transformação:

$$y_1 = -1 - (-1x_1 + 1x_2 - 1x_3),$$
$$y_2 = -3 - (-\frac{1}{2}x_1 - 0x_2 + 1x_3)$$
$$y_3 = 1 - (-0x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

e

$$F(x) = 1 - (1x_1 - 2x_2 + 1x_3).$$

Incluímos essas informações na tabela e tentamos fazer uma troca $y_2 \leftrightarrow x_1$:

	Membro Livre	x_1	x_2	x_3
$F(x)$	1	1	-2	1
y_1	-1	-1	1	-1

y_2	-3	**-1/2**	0	1
y_3	1	0	-3	2

1/(-1/2)=-2

	Membro Livre	x_1	x_2	x_3
$F(x)$	1	1 2	-2	1
y_1	-1	-1 -2	1	-1
y_2	-3 6	- ½ -2	0 0	1 -2
y_3	1	0 0	-3	2

	Membro Livre	x_1	x_2	x_3
$F(x)$	1 -6	1 2	-2 0	1 2
y_1	-1 6	-1 -2	1 0	-1 -2
y_2	-3 6	- ½ -2	0 0	1 -2
y_3	1 0	0 0	-3 0	2 0

	Membro Livre	y_2	x_2	x_3
$F(x)$	-5	2	-2	3
y_1	5	-2	1	-3
x_1	6	-2	0	-2
y_3	1	0	-3	2

Com a ajuda do algoritmo de tabela de troca das variáveis é possível resolver o qualquer problema da programação linear ou convencer-se, que ele não tem a solução.

A obtenção da solução do todo problema da programação linear inclui duas etapas:

a) <u>a obtenção da solução permissível;</u>

b) <u>a obtenção da solução ótima, que minimiza a função objetiva linear.</u>

No processo da primeira etapa, pode ser encontrada a situação que a solução permissível não existe.

No processo da segunda etapa, pode ser encontrada a situação que a função objetivo não é limitada.

A execução das duas etapas é baseada na utilização do algoritmo da transformação $x_j \leftrightarrow x_i$.

Algoritmo da Primeira Etapa

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo. Se essa variável não existe, então passamos para a segunda etapa da solução do problema de programação linear. Se essa variável existe, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.
2. Na linha que corresponde à variável com membro livre negativo, procuramos o elemento negativo. Se esse elemento não existe (todos os $\alpha_{ji} \geq 0$), então a solução permissível não existe. Se o elemento negativo existe, então a coluna, onde está esse elemento, é escolhida como permissível.
3. O elemento permissível e a linha permissível são definidos como resultado da busca de mínimo de relação do membro livre b_j ao elemento α_{ji} correspondente da coluna permitida. O termo livre b_j e o elemento α_{ji} considerado devem ter os mesmos sinais.
4. Executamos o algoritmo da transformação $x_j \leftrightarrow x_i$ e passamos para a operação 1 do presente algoritmo.

Algoritmo da Segunda Etapa

1. Na linha $F(x)$ procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre). Se esse elemento não existe, então a solução ótima é obtida. Se o elemento positivo existe, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.
2. Na coluna permissível, correspondente ao elemento positivo escolhido, procuramos o elemento positivo fora da linha $F(x)$. Se esse elemento não existe (todos os $\alpha_{ji} \leq 0$), então a solução ótima não existe. Se o elemento positivo existe, então passamos para a operação 3 do presente algoritmo.
3. O elemento permissível e a linha permissível são definidos como resultado da busca de mínimo de relação do membro livre b_j ao elemento α_{ji} correspondente da coluna permitida. O termo livre b_j e o elemento α_{ji} considerado devem ter os mesmos sinais.
4. Executamos o algoritmo da transformação $x_j \leftrightarrow x_i$ e passamos para a operação 1 do presente algoritmo.

Retornamos ao nosso exemplo;
$F(x) = 6x_1 + 12x_2 = 0 - (-6\,x_1 - 12x_2)$;
$x_3 = 600 - 0{,}6x_1 - x_2 = 600 - (0{,}6x_1 + x_2)$;
$x_4 = -300 + x_1 + x_2 = -300 - (-\,x_1 - x_2)$;
$x_5 = -100 + x_2 \geq 0 = -100 - (-\,x_2)$.

	Membro Livre	x_1	x_2
$F(x)$	0	-6	-12

x_3	600	0,6	1
x_4	-300	-1	-1
x_5	-100	0	-1

Comentários sobre:

2. Na linha que corresponde à variável com membro livre negativo, procuramos o elemento negativo. Se esse elemento não existe (todos os $\alpha_{ji} \geq 0$), então a solução permissível não existe. Se o elemento negativo existe, então a coluna, onde está esse elemento, é escolhida como permissível.

Isso é nossa situação:

x_4	-300	-1	-1

Admitimos que:

x_4	-300	1	1

Isso significa:
$x_4 = -300 - x_1 - x_2$.
Aumentando x_1 ou x_2 (diminuir não podemos, porque as variáveis são não básicas), não podemos fazer o membro livre positivo.

Comentários sobre:

1. Na linha $F(x)$ procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre). Se esse elemento não existe, então a solução ótima é obtida. Se o elemento positivo existe, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.

Isso é nossa situação (lembramos que a solução permissível ainda não temos):

$F(x)$	0	-6	-12

Isso significa:
$F(x) = 6x_1 + 12x_2$.
Aumentando x_1 ou x_2 (diminuir não podemos, porque as variáveis são não básicas), não podemos diminuir o valor da função objetivo. Entretanto, nosso problema é minimização.

Comentários sobre:

2. Na coluna permissível, correspondente ao elemento positivo escolhido, procuramos o elemento positivo fora da linha $F(x)$. Se esse elemento não existe (todos os $\alpha_{ji} \leq 0$), então a solução ótima não existe. Se o elemento positivo existe, então passamos para a operação 3 do presente algoritmo.

Admitimos que:

	Membro	x_1	x_2

	Livre		
$F(x)$	0	-6	12
x_3	600	0,6	-1
x_4	-300	-1	-1
x_5	-100	0	-1

Isso significa:
$x_3 = 600 - 0{,}6x_1 + x_2$;
$x_4 = 300 + x_1 + \quad x_2$;
$x_5 = 100 + \qquad x_2$.

Aumentando x_2 (é necessário fazer isso, porque na linha da função objetivo temos $+12x_2$) fazemos todos os membros livres mais positivos e, de tal forma, a função objetivo não é limitada.

Resolvemos o problema:

	Membro Livre	x_1	x_2
$F(x)$	0 1800	-6 -6	-12 6
x_3	600 -180	0,6 0,6	1 -0,6
x_4	-300 300	**-1** -1	-1 1
x_5	-100 0	0 0	-1 0

Min {600/0,6, -300/-1} = -300/-1

	Membro Livre	x_4	x_2
$F(x)$	1800 600	-6 0	-6 -6
x_3	420 -40	0,6 0	0,4 0,4
x_1	300 -100	-1 0	1 1
x_5	-100 100	0 0	**-1** -1

Min {420/0,4, 300/1, -100/-1} = -100/-1

	Membro Livre	x_4	x_5
$F(x)$	2400	-6	-6

x_3	380	0,6	0,4
x_1	200	-1	1
x_2	100	0	-1

$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 \rightarrow \max$

Restrições:

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24;$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9;$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$