Metodos, baseados na Imposição das Restrições nos Criterios

Existem dois grupos.

1) O nivel certo das Rs é estabelecido para tentar obter soluções harmoniosas. Isto complementa metodos de escalarização.

Consideramos um problema:

$$F_1(x) = 3x_1 + 13x_2 \to \min$$

$$F_2(x) = 8x_1 + 6x_2 \to \min$$

$$F_3(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$0 \le x_1 \le 20$$

$$0 \le x_2 \le 10$$

$$x_1 + x_2 = 20$$

Normalização

$$F_1(x) = 3x_1 + 13x_2$$

$$x_1^0 = (20,0) \quad F_1(x) = 60$$

$$x_1^{00} = (10;10) \quad F_2(x) = 160$$

$$A_1(x) = \frac{160 - F_1(x)}{160 - 60} = 1{,}6 - 0{,}01 F_1(x) =$$

$$= 1{,}6 - 0{,}03 - 0{,}13x_2$$

$F_2(x) = 8x_1 + 6x_2$

$$x_2^{0} = (10,10) \quad F_2(x_2^{0}) = 140$$

$$x_2^{00} = (20,0) \quad F_2(x_2^{0}) = 160$$

$$f_2(x) = \frac{160 - F_2(x)}{160 - 140} = 8 - 0{,}05\, F_2(x) =$$

$$= 8 - 0{,}4x_1 - 0{,}3x_2$$

$F_3(x) = 4x_1 + 5x_2$

$$x_3^{0} = (20,0) \qquad F_3(x_3^{0}) = 80$$

$$x_3^{00} = (10,10) \qquad F_3(x_3^{00}) = 90$$

$$f_3(x) = \frac{90 - F_3(x)}{90 - 80} = \cancel{9}9 - 0{,}1\, F_3(x) =$$

$$= 9 - 0{,}4\cancel{3}x_1 - 0{,}5x_2$$

Podemos construir uma convolução:

$$\Phi(x) = 18{,}6 - 0{,}83x_1 - 0{,}93x_2$$

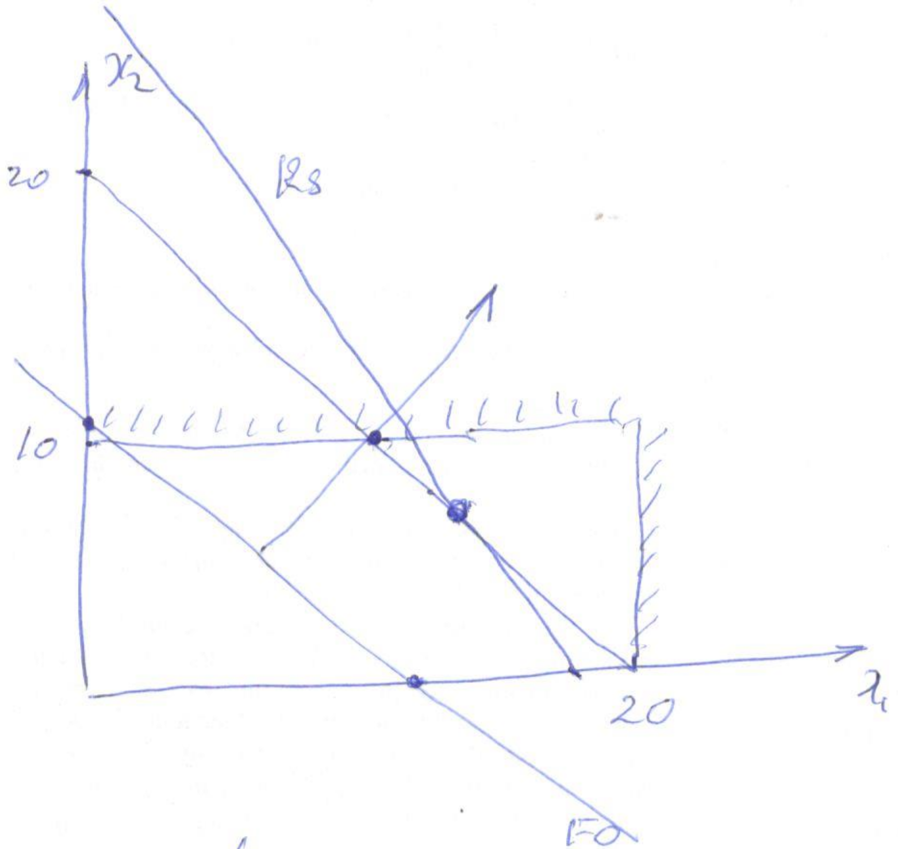
Dois pontos:

$$18{,}6 - 0{,}83x_1 - 0{,}93x_2 = 8{,}6$$

$$0{,}83x_1 + 0{,}93x_2 = 10$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 10{,}75$$

$$x_1 = 12{,}04 \qquad x_2 = 0$$



Ponto: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$

$$\phi(x) = 18{,}6 - 0{,}83 \cdot 20 - 0{,}93 \cdot 0 =$$
$$= 18{,}6 - 16{,}6 = \boxed{2}$$

Ponto: $x_1 = 10$, $x_2 = 10$

$$\phi(x) = 18{,}6 - 0{,}83 \cdot 10 - 0{,}93 \cdot 10 =$$
$$= 18{,}6 - 17{,}6 = \boxed{1}$$

$$f_1(x) = 1{,}6 - 0{,}03 \cdot 20 - 0{,}13 \cdot 0 = 1$$
$$f_2(x) = 8 - 0{,}4 \cdot 20 - 0{,}3 \cdot 0 = 0$$
$$f_3(x) = 9 - 0{,}4 \cdot 20 - 0{,}6 \cdot 0 = 1$$

A escolha de R é questão bem fina. Se R é forte, podemos obter a região das soluções permissíveis vazio. Se fracos é possível fazer muitos passos.

Introduzimos, por exemplo,

$$f_2(x) = 8 - 0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 \geq 0{,}5$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \leq 7{,}5$$

Construímos

$$0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 7{,}5$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 25$$
$$x_1 = 18{,}75 \quad x_2 = 0$$

O ponto novo é

$$x_1 + x_2 = 20$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 7{,}5$$
$$x_1 = 15 \quad x_2 = 5$$

$$\Phi(x) = 18{,}6 - 0{,}83 \cdot 15 - 0{,}93 \cdot 5 = 1{,}5$$

$$f_1(x) = 16 - 0{,}83 \cdot 15 - 0{,}93 \cdot 5 = 0{,}5$$
$$f_2(x) = 8 - 0{,}4 \cdot 15 - 0{,}3 \cdot 5 = 0{,}5$$
$$f_3(x) = 9 - 0{,}4 \cdot 15 - 0{,}5 \cdot 5 = 0{,}5$$

2) Metodo de Concessões Sucessivas

É aplicavel, se criterios podem ser ordenados de acordo com suas importancias

No primeiro passo de acordo com metodo (que é metodo lexicografico), procuramos uma solução $\bar{x}_1$ que gera o minimo para o criterio $F_1(x)$, que é mais importante ($F_1(x)$, $x \in \Omega$).

Depois definimos uma concessão ΔF_1 para minimizar o segundo criterio $F_2(\bar{x}_2)$, $x \in \Omega$ com consideração da R: $F_1(\bar{x}_1) + \Delta F_1 \geq F_1(x)$. Com esta R é possivel achar uma solução $\bar{x}_2$ que minimiza $F_2(x)$.

Depois, introduzimos a concessão ΔF_2 e R $F_2(\bar{x}_2) + \Delta F_2 \geq F_2(x)$ para minimização de $F_3(x)$, etc.

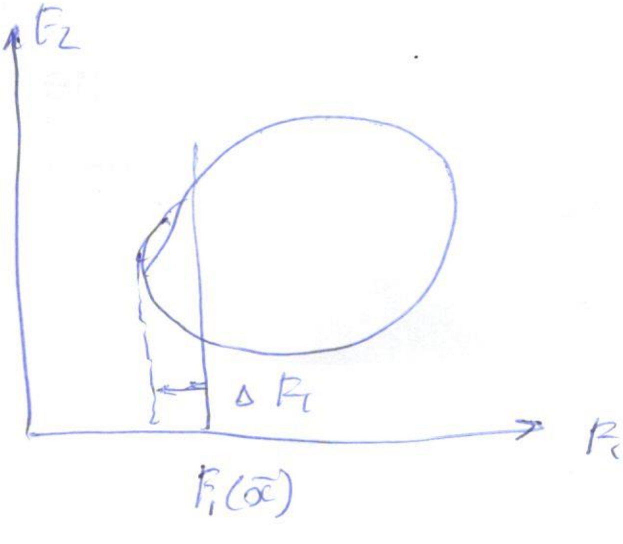
O problema de escolha $\Delta F_1, \Delta F_2, \dots$ é complicado

Tentando fazer concessões pequenas, mas isso pode gerar

$$\bigcap_{p=1}^{q-1} \Delta\Omega^p = \emptyset$$

onde $\Delta\Omega^p$ é, $p=1,\dots,q-1$ são subconjuntos correspondentes a F_p, $p=1,\dots,q-1$.

Além disso, segundo, terceiro, etc. passos podem gerar soluções que não pertencem à região de Pareto: fazemos esta região mais estreita



Metodos de Programação de Metas

Admitimos que temos metas $\bar{F}_p(x)$ para as FOs $F_p(x)$, $p=1,\dots,q$. Nesse caso, podemos formular o problema

$$F_p(x) - \bar{F}_p(x) \to \min_{x\in\Omega}, \quad p=1,\dots,q,$$

se todas as FOs devem ser minimizadas. Falamos sobre não melhor metodo, mas bastante claro.

Podemos falar sobre o problema

$$z \to \max_{x\in\Omega}$$

com Rs

$$F_p(x) - \bar{F}_p(x) - z \geq 0, \; p=1,\dots,q.$$

Temos

$$F_1(x) = 3x_1 + 13x_2 \to \max$$

$$F_2(x) = 8x_1 + 6x_2 \to \min$$

$$F_3(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \min$$

observando as Rs:

$$0 \leq x_1 \leq 20;$$

$$0 \leq x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + x_2 = 20.$$

Admitimos que metas são:

$$\bar{F}_1(x) = 60;$$

$$\bar{F}_2(x) = 140;$$

$$\bar{F}_3(x) = 80.$$

Então,

$$\begin{aligned}
3x_1 + 13x_2 - 60 - z &\geq 0; \\
8x_1 + 6x_2 - 140 - z &\geq 0; \\
4x_1 + 5x_2 - 80 - z &\geq 0; \\
x_1 &\leq 20; \\
x_2 &\leq 10 \\
x_1 + x_2 &= 20
\end{aligned}$$

e todas as variaveis $x_1, x_2, z \geq 0.$

Temos $x_1 + x_2 = 20$ e $x_1 = 20 - x_2$

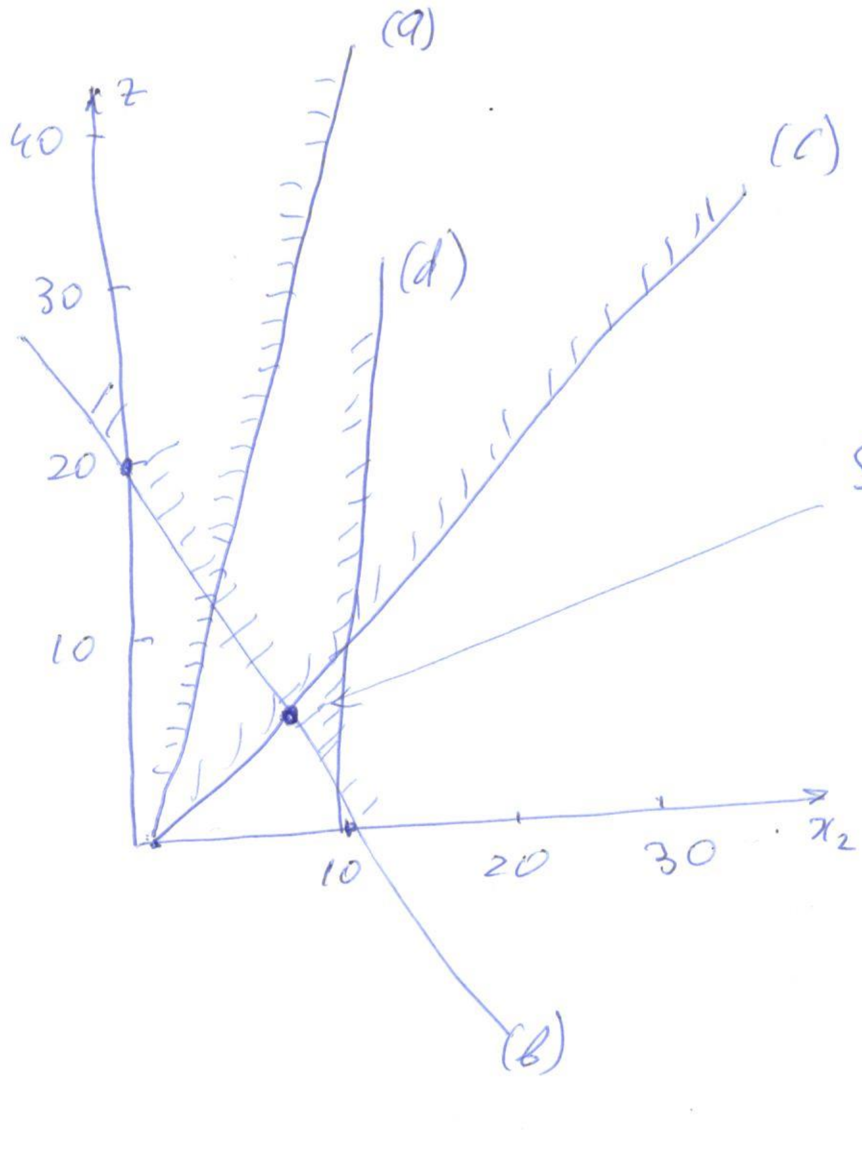
$$
\begin{array}{c|c}
3(20-x_2) + 13x_2 - 60 - z \geq 0 & 10x_2 - z \geq 0 \\
8(20-x_2) + 6x_2 - 140 - z \geq 0 & -2x_2 - z \geq -20 \\
4(20-x_2) + 5x_2 - 80 - z \geq 0 & x_2 - z \geq 0 \\
20 - x_2 \leq 20 & x_2 \geq 0 \\
x_2 \leq 10 & x_2 \leq 10
\end{array}
$$

ou (a) $10x_2 - z \geq 0$;

(b) $2x_2 + z \leq 20$;

(c) $x_2 - z \geq 0$;

(d) $x_2 \leq 10$.



Solução ótima

$$
\begin{array}{r}
2x_2 + z = 20 \\
x_2 - z = 0 \\
\hline
3x_2 = 20
\end{array}
$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 6{,}66 \\ x_1 = 13{,}34 \end{array}}$$

$f_1(x) = 1{,}6 - 0{,}03x_1 + 0{,}13x_2 = 0{,}33$

$f_2(x) = 8 - 0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 = 0{,}67$

$f_3(x) = 9 - 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 = 0{,}33$

$x_1 = 6{,}66$
$x_2 = 13{,}34$

Este metodo não pode ser chamado da programação de metas, mas é muito parecido: $\bar{F}_p(x)$, $p = 1, \dots, q$.

Em caso geral, temos um problema de minimização da distancia:

$$d\left(F(x), \bar{F}(x)\right) = \underbrace{\left[\sum_{p=1}^{q} \lambda_p \left| F_p(x) - \bar{F}_p(x) \right|^t \right]^{\frac{1}{t}}}_{\displaystyle \max_{x \in \Omega}}$$

onde $\bar{F}(x) = \{\bar{F}_1(x), \dots, \bar{F}_q(x)\}$ são metas

λ_p, $p = 1, \dots, q$ são coeficientes da importancia

coeficiente t pertence ao intervalo $[1, \infty]$.

Existe um metodo particular, que chama-se o método de ponto ideal (ponto de utopia se considerarmos

$$F(x) = \min_{x \in \Omega} F(x) = \left\{ \min_{x \in \Omega} F_1(x), \ldots, \min F_q(x) \right\}$$

Falando sobre programação de metas, pensamos que uma metrica introduzida no espaço no espaço dos criterios.

Há maneiras ~~differentes~~ diversas para introduzidas essas metricas. Entretanto diferentes metricas geram soluções diferentes. Alem disso para toda alternativa é possivel achar a metrica que indica que esta alternativa é melhor. (gera valores $F(x)$ mais perto $F(x)$.

A função
$$d(F(x), F(x)^*)$$
permite ordenar todas as alternativas.

Entretanto, esta ordenação não é convincente do ponto de vista da teoria da escolha racional. Esta teoria tem a axioma de independência das alternativas que não participam na comparação.
Os métodos descritos não atendem deste axioma.

Admitimos, que
$$d(F(x_\alpha), \min_{x\in\Omega} F(x)) < d(F(x_\beta), \min_{x\in\beta} F(x)),$$
que significa que $x_\alpha \succ x_\beta$.
Entretanto, é possível juntar a alternativa $x_\gamma \in \Omega$, que vai mudar $x_\beta \succ x_\alpha$.