Kartkówka 2 - 21.10.2025

Zadanie za 1 pkt Rozwiąż równanie:

$$e^{x-2} = 1,$$

Zadanie za 2 pkt Podaj dziedzinę, stopień, miejsca zerowe, oraz granice na brzegach dziedziny następującego wielomianu

$$W(x) = (x-2)^2(x-3)(x^2-2x+4),$$

Zadanie za 3 pkt Narysuj (przybliżony) wykres funkcji

$$f(x) = \ln(x+1)$$

Zadanie za 4 pkt Rozwiąż równanie:

$$x^2e^x - xe^{(1+x)/2} = 0$$

Zadanie za 5 pkt Udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)$$

Gdzie u_i oraz v_i są ustalonymi ciągami liczb rzeczywistych.

Zadanie za 6 pkt Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{6}$$

Dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $f(1) > 0$

Kartkówka 2 - rozwiązania

Zadanie za 1 punkt Rozwiążmy równanie

$$e^{x-2} = 1.$$

Zauważmy, że funkcja wykładnicza e^y przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik jest równy zero, czyli

$$e^y = 1 \iff y = 0.$$

Przyrównujemy wykładnik zera:

$$x - 2 = 0.$$

Skąd $x = 2$.

Zadanie za 2 punkty Rozważmy wielomian

$$W(x) = (x-2)^2(x-3)(x^2-2x+4).$$

Dziedzina. Każdy wielomian jest określony dla wszystkich liczb rzeczywistych, zatem

$$D(W) = \mathbb{R}.$$

Stopień wielomianu. Stopień jest sumą stopni czynników:

$$2 + 1 + 2 = 5.$$

Zatem $W(x)$ jest wielomianem stopnia 5.

Miejsca zerowe. Rozwiązujemy równanie $W(x) = 0$, czyli badamy, kiedy któryś z czynników jest zerem:

- $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (pierwiastek podwójny),
- $(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$,
- $x^2 - 2x + 4 = 0$.

Dla trzeciego czynnika liczymy wyróżnik:

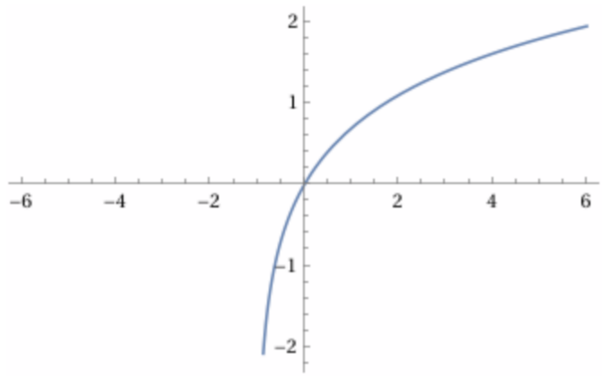
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0,$$

więc ten czynnik nie ma miejsc zerowych rzeczywistych.

Granice na brzegach dziedziny. Wielomian stopnia nieparzystego z dodatnim współczynnikiem przy najwyższej potędze spełnia:

$$\lim_{x\to-\infty} W(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} W(x) = +\infty.$$

Zadanie za 3 punkty



Rysunek 1: Wykres funkcji $\ln x + 1$ to wykres logarytmu przesunięty w lewo o 1.

Zadanie za 4 punkty Rozwiążmy równanie

$$x^2 e^x - x e^{(1+x)/2} = 0.$$

Wyłączamy wspólny czynnik:

$$x e^{x/2}\left(x e^{x/2} - e^{1/2}\right) = 0.$$

Rozwiązujemy równanie iloczynowe:

$$x e^{x/2} = 0 \quad \text{lub} \quad x e^{x/2} - e^{1/2} = 0.$$

Pierwszy przypadek:

$$x e^{x/2} = 0.$$

Ponieważ $e^{x/2} > 0$ dla każdego x, otrzymujemy

$$x = 0.$$

Drugi przypadek:

$$x e^{x/2} = e^{1/2}.$$

Dzielimy stronami przez $e^{1/2}$:

$$x e^{(x-1)/2} = 1.$$

Łatwo sprawdzić, że $x = 1$ spełnia to równanie:

$$1 e^{(1-1)/2} = e^0 = 1.$$

Odpowiedź: $x = 0$ oraz $x = 1$.

Zadanie za 5 punktów Chcemy udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right).$$

Rozważmy funkcję zmiennej rzeczywistej t:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (u_i t - v_i)^2.$$

Zauważmy, że $f(t) \geq 0$ dla każdego t, ponieważ jest sumą kwadratów. Rozwijamy funkcję:

$$f(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i^2.$$

Jest to funkcja kwadratowa w zmiennej t, która nie przyjmuje wartości ujemnych. Zatem jej wyróżnik spełnia

$$\Delta \leq 0.$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) \leq 0.$$

Dzielimy nierówność przez 4 i przenosimy iloczyn nawiasów na drugą stronę równania:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right).$$

Co dowodzi nierówności Cauchy'ego-Schwartza.

Zadanie za 6 pkt Gdyby $f(x_0) = 0$ dla pewnego x_0, to z równania $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0)f(x - x_0)$ wynikałoby, że funkcja jest równa tożsamościowo zero dla każdego x, co jest niemożliwe, gdyż z założenia $f(1) > 0$. Dodatkowo zauważmy, że $f(x) = \left(f(\frac{x}{2})\right)^2 \geq 0$. Wobec tego funkcja $f > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W związku z tym możemy zdefiniować nową funkcję $g(x) = \ln(f(x))$. Funkcja g jest ciągła i spełnia $g(x + y) = \ln(f(x + y)) = \ln(f(x)f(y) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = g(x) + g(y)$.

Zajmijmy się teraz funkcją g. Warunek $g(x + y) = g(x) + g(y)$ znaczy, że $g(2x) = 2g(x)$. Podobnie, wykorzystujac zasadę indukcji matematycznej można pokazać, że $g(nx) = ng(x)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Teraz niech $y = nx$ w ostatniej równości. Dostaniemy wtedy $g(y) = ng(\frac{y}{n})$, a więc $g(\frac{y}{n}) = \frac{1}{n}g(y)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Łącząc równości otrzymujemy, że $g(qx) = qg(x)$ dla dowolnego $q\mathbb{Q}_+$. Dodatkowo $g(0) = 2g(0)$, więc $g(0) = 0$. Stąd, skro $0 = g(0) = g(x)+g(-x)$, to $g(-x) = -g(x)$, a stąd dla $q > 0, q \in \mathbb{Q}$ mamy $g(-qx) = -qg(x)$. A więc w ogólności $g(qx) = qg(x)$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$.

Teraz czas na wykorzystanie ciągłości funkcji. Weźmy dowolne $r \in \mathbb{R}$. Możemy wskazać ciąg $q_n \in \mathbb{Q}$ taki, że $q_n \to r$ (może to być ciąg kolejnych przybliżeń rozwinięciami dziesiętnymi). Z ciągłości funkcji mamy:

$$\begin{aligned} g(rx) = g(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \\ = \lim_{n\to\infty} g(q_n x) = \\ = \lim_{n\to\infty} q_n g(x) = rg(x) \end{aligned} \tag{7}$$

Gdzie warunek ciągłości jest nam potrzebny do wyciągnięcia granicy poza funkcję w drugiej linijce powyższego przekształcenia. W związku z tym, funkcja g spełnia $g(rx) = rg(x)$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$. W związku z tym, $g(x) = g(x \cdot 1) = xg(1)$, czyli funkcja $g(x) = cx$, gdzie $c = g(1)$.

Wracając do poprzedniej funkcji, z poprzedniego rozważania wynika, że $\ln(f(x)) = g(x) = x \cdot g(1) = x\ln(f(1))$, a więc ostatecznie:

$$f(x) = e^{x\ln(f(1))} = b^x \tag{8}$$

gdzie $b = \ln(f(1))$.