Matematyka dla chemików

Pawel Dabrowski-Tumanski

30 października 2025

Wstęp

To nie jest podręcznik analizy matematycznej. Celem tej książki jest pokazanie, jak należy *używać* narzędzi, których uczy się w trakcie kursu analizy. Dlatego wiele pojęć wprowadzanych jest bez formalnych definicji, a twierdzenia, dowody i cały aparat teoretyczny jest ograniczony do minimum. Mam nadzieję, że tego typu podejście pomoże studentom wykształcić pewnego rodzaju intuicję, a dzięki temu prościej będzie zrozumieć matematyczny formalizm. Jednakże, dla pełności wykładu, odpowiednie twierdzenia zawarte są w dalszych fragmentach książki, w momencie, w którym mam nadzieję, czytelnik jest już na to gotowy.

Kolejnym czynnikiem motywującym taki, a nie inny układ treści jest docelowy odbiorca tej książki. Nie jest nim student matematyki, dla którego istnieją (cytowane na końcu tego opracowania) podręczniki analizy matematycznej, budujące piękny gmach matematyki od samych podstaw. W tym wypadku, docelowym odbiorcą tej książki jest student chemii, lub fizyki. Dlatego, prócz niestatndardowego układu treści, wiele przykładów jest motywowanych zagadnieniami z innych nauk. Te zostały zawarte w specjalnych ramkach:

Motywacja chemiczna, lub fizyczna

Wiadomości zawarte w takich ramkach mają odpowiedzieć na mityczne pytanie *po co mi w ogóle to potrzebne?*

Zdaję sobie też sprawę, że wielu studentów potrzebuje pewnej "pigułki" z wiedzą. Jakiegoś skompresowanego zestawu najważniejszych informacji. Te zostały zawarte w innych ramkach:

Podsumowanie tematu

Jeśli masz zapamiętać tylko kilka rzeczy, zapamiętaj te w żółtych ramkach.

W trakcie prowadzenia zajęć z analizy matematycznej dla studentów chemii i fizyki zauważyłem też powtarzające się błędy. O ile mi wiadomo, w żadnym podręczniku nie pisze się specjalnie rzeczy błędnych. W tej książce znajdują się typowe błędy stundetów, ku przestrodze:

Nie rób tego nigdy

Studenci mają tendencję do popełniania pewnych błędów. Zapamiętaj, nigdy nie rób rzeczy z czerwonych ramek!

Wreszcie, sercem tej książki są przykłady. Czasem mogą one być rozwiązane zbyt rozwlekle - niektóre przekształcenia mogą być za proste. Jednakże moje doświadczenie podpowiada mi, że nie ma takiego przekształcenia matematycznego, w którym nie da się zrobić błędu.

Przykłady

Przykłady rozwiązywanych problemów zawarte są w niebieskich ramkach.

Wreszcie, podstawowe definicje (te formalne, jak i nieformalne), dowody i cała "teoria" zawarta jest w ramkach szarych. W niektórych wypadkach brakuje pełnych dowodów. Powinny one być przedstawione na wykładach z analizy matematycznej, jak również są zawarte w typowych podręcznikach analizy matematycznej.

Wiadomości z wykładu

Wiadomości czysto teoretyczne (twierdzenia, definicje) znajdują się w szarych ramkach.

Wreszcie, istnieje jeszcze jeden typ ramek - zielony. W ramkach zielonych przedstawione są bardziej zaawansowane zagadnienia. Mam nadzieję, że w tych ramkach uda mi się przekazać, jak piękna i złożona jest matematyka.

Dla ciekawych

Student uczy się właściwie tylko wtedy, kiedy chce. A chce głównie wtedy, kiedy jest zaciekawiony. W zielonych ramkach są informacje dla zaciekawienia, o potencjalnych zastosowaniach, lub rozwinięciu omawianych pojęć.

Nauczenie się analizy matematycznej wymaga zrobienia odpowiednio wielu przykładów. To trochę jak nauka języka. Nie da się nauczyć języka, nie ćwicząc go często i regularnie. Tak samo droga do zrozumienia analizy wiedzie przez wykonanie wielu ćwiczeń. Prócz cytowanej literatury, opracowanie to zawiera zestawy zadań do wykonania własnego. Poza tym, zawiera wszystkie kartkówki, wraz z ich szczegółowymi rozwiązaniami.

Notatki te na pewno są pełne błędów. Będę wdzięczny za ich wskazanie. Mam nadzieję, że te notatki umożliwią Wam kochani studenci zrozumienie podstaw analizy matematycznej. I zainteresują Was matematyką.

Spis treści

Rozdział 1

Wyrazenia algebraiczne i układy równań

1.1 Rozwiązywanie układów równań liniowych

Układy równań liniowych pojawiają się w chemii np. przy równoważeniu reakcji chemicznych, obliczaniu stechiometrii lub przy modelowaniu układów kinetycznych. Rozważamy układy postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1.1.1 Przykład: układ trzech równań z trzema niewiadomymi

Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Metoda podstawienia

1. Wybieramy jedno równanie i wyrażamy z niego jedną niewiadomą np. z pierwszego równania:

$$x = 6 - y - z$$

2. Podstawiamy do pozostałych równań:

$$2(6 - y - z) - y + z = 3 \implies 12 - 2y - 2z - y + z = 3 \implies -3y - z = -9 \implies 3y + z = 9$$

$$-(6-y-z)+2y-z = 2 \implies -6+y+z+2y-z = 2 \implies 3y-6 = 2 \implies 3y = 8 \implies y = \frac{8}{3}$$

3. Znając y, obliczamy z z $3y + z = 9$:

$$3 \cdot \frac{8}{3} + z = 9 \implies 8 + z = 9 \implies z = 1$$

4. Następnie $x = 6 - y - z = 6 - 8/3 - 1 = 9/3 - 8/3 - 1 = 1/3$

Metoda odejmowania stronami

1. Odejmujemy równania parami w celu eliminacji jednej niewiadomej.

$$(2x - y + z) - (x + y + z) = 3 - 6 \implies x - 2y = -3$$

$$(-x + 2y - z) - (x + y + z) = 2 - 6 \implies -2x + y - 2z = -4$$

2. Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi (np. y i z) metodą podstawienia lub odejmowania. 3. Po obliczeniu y i z znajdujemy x z pierwszego równania.

Eliminacja Gaussa

1. Tworzymy macierz rozszerzoną układu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

2. Przekształcamy macierz do postaci schodkowej, wykonując operacje elementarne na wierszach: - $R_2 \to R_2 - 2R_1$ - $R_3 \to R_3 + R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

3. Następnie eliminujemy kolejne zmienne i rozwiązujemy od ostatniego wiersza w górę (back-substitution):

$$z = 1, \quad y = 8/3, \quad x = 1/3$$

Metoda wyznaczników Cramera

1. Wyznacznik macierzy współczynników:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 2 - (-1) - 2 = -9?(\text{dokładnie policzyć})$$

2. Wyznaczniki z zamienionymi kolumnami (dla x, y, z):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Rozwiązanie:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \implies x = 1/3, y = 8/3, z = 1$$

Najważniejsze wnioski

- Układy równań liniowych można rozwiązywać różnymi metodami: podstawienia, odejmowania, eliminacji Gaussa lub wyznaczników Cramera.
- Wybór metody zależy od liczby równań i wygody obliczeń.
- Metoda eliminacji Gaussa jest najwygodniejsza dla większych układów.
- Metoda Cramera wymaga liczenia wyznaczników i jest praktyczna tylko dla niewielkiej liczby równań.

1.2 Wzory skróconego mnożenia

W codziennych obliczeniach bardzo często pojawia się potrzeba rozwinięcia wyrażeń typu $(x+y)^2$ lub $(x+y)^3$. Zamiast mnożyć je bezpośrednio, korzystamy z tzw. *wzorów skróconego mnożenia*.

Wzory skróconego mnożenia rzędu drugiego i trzeciego

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2, \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\ (x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \end{aligned}$$

Zastosowanie wzorów

Rozwińmy wyrażenie $(2x-3)^2$:

$$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

—

Uogólnienie: wzór dwumianowy Newtona

Wzory powyższe są szczególnymi przypadkami ogólniejszego prawa dotyczącego rozwijania potęg sumy. Gdy chcemy rozwinąć $(x+y)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną, korzystamy ze współczynników dwumianowych.

Silnia

Dla liczby naturalnej n definiujemy silnię:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n,$$

a przyjmujemy, że $0! = 1$.

Współczynniki dwumianowe (Newtona)

Dla liczb naturalnych n i k definiujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnych liczb x, y i liczby naturalnej n zachodzi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Rozwinięcie $(x+y)^4$ jako przykład

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4.$$

Ponieważ:

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1,$$

otrzymujemy:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Podwójna silnia

W niektórych zagadnieniach (szczególnie w analizie i kombinatoryce) użyteczna jest tzw. *podwójna silnia*. Definiujemy:

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 2, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 1, & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Na przykład:

$$6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48, \qquad 7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105.$$

1.2.1 Trójkąt Pascala i współczynniki dwumianowe

W poprzedniej sekcji użyliśmy wzoru dwumianowego Newtona, który opiera się na współczynnikach dwumianowych $\binom{n}{k}$. Istnieje prosta i bardzo wygodna metoda ich obliczania bez użycia silni — za pomocą tzw. *trójkąta Pascala*.

Trójkąt Pascala

Trójkąt Pascala to nieskończony układ liczb, w którym każda liczba (oprócz tych na brzegach) jest sumą dwóch znajdujących się nad nią:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Wiersz o numerze n (zaczynając numerację od zera) zawiera współczynniki dwumianowe $\binom{n}{k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$.

Korzystanie z trójkąta Pascala

Chcemy znaleźć rozwinięcie $(x+y)^5$.
Z trójkąta Pascala odczytujemy wiersz 5:

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

Zatem:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Typowa pomyłka

Studenci czasem mylą kolejność potęg i zapisują np.

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^2y^2 + y^4.$$

Brakuje wówczas składników $4x^3y$ i $4xy^3$. W każdym składniku sumy potęgi x i y muszą sumować się do n.

—

Zastosowanie w chemii: konfiguracje elektronowe i spin

W chemii kwantowej pojawiają się zagadnienia dotyczące liczby możliwych obsadzeń elektronów na dostępnych orbitalach.
Jeżeli na przykład w danym podpoziomie energetycznym mamy:

$$n \text{ dostępnych stanów} \qquad \text{oraz} \qquad k \text{ elektronów,}$$

to liczba możliwych konfiguracji (pomijając oddziaływania) jest równa:

$$\binom{n}{k}.$$

Przykłady:

- Orbital typu p ma 3 podstany (magnetyczne). Jeżeli w nim znajdują się 2 elektrony, to liczba możliwych obsadzeń jest:
$$\binom{3}{2} = 3.$$
- Orbital typu d ma 5 podstanów, więc liczba sposobów umieszczenia tam 3 elektronów:
$$\binom{5}{3} = 10.$$

Co więcej, liczby te pojawiają się także w teorii wielokrotności spinowych:

$$\text{multiplicity} = 2S + 1,$$

gdzie S jest sumarycznym spinem elektronów — a konfiguracje spinowe można policzyć również za pomocą współczynników dwumianowych.

1.3 Rozwiązywanie równań wielomianowych jednej zmiennej

Rozważamy równanie kwadratowe:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Metoda dopełniania do kwadratu

1. Dzielimy przez a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Przekształcamy do postaci pełnego kwadratu:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

3. Stąd wzór kwadratowy:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wzory Viete'a

Jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Przykład Viete'a

Równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sumę pierwiastków: $x_1 + x_2 = 5$, iloczyn: $x_1 x_2 = 6$. Możemy zgadnąć pierwiastki: 2 i 3.

Uogólnienie dla wielomianów wyższych stopni

Dla wielomianu stopnia n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

pierwiastki $x_1, \ldots, x_n$ spełniają ogólne wzory Viete'a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Równanie stopnia 3 z jednym łatwo zgadniętym pierwiastkiem

Rozważmy równanie:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Zgadywanie pierwiastków: spróbujmy $x = 1$:

$$1 - 6 + 11 - 6 = 0 \implies x_1 = 1$$

Dzielimy wielomian przez $(x - 1)$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

Rozwiązujemy kwadratową część:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

Dla ciekawych

Zgadywanie pierwiastków to pierwsza metoda w rozwiązywaniu wielomianów stopnia 3 i 4. Metoda Cardana pozwala wyprowadzić wzory analityczne dla równania stopnia 3, a metoda Ferrari dla stopnia 4. Dla stopnia wyższego niż 4 nie istnieją ogólne wzory wyrażone przez pierwiastki (twierdzenie Abela-Ruffiniego).

Najważniejsze wnioski

- Równanie kwadratowe można rozwiązać poprzez dopełnienie do kwadratu lub korzystając ze wzorów kwadratowych.
- Wzory Viete'a pozwalają określić sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.
- Wzory Viete'a można uogólnić na wielomiany wyższych stopni, co pozwala łatwo sprawdzić zależności między pierwiastkami.
- Zgadywanie pierwiastka i dzielenie wielomianu pozwala rozwiązywać równania stopnia 3 i 4 praktycznie.

1.4 Rozwiązywanie równań wielomianowych wielu zmiennych

Rozdział 2

Podstawowe funkcje ciągłe

2.1 Funkcje wielomianowe

Definicja i stopień wielomianu

Wielomian stopnia n to funkcja:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

- n nazywamy **stopniem wielomianu** - a_n to współczynnik przy najwyższej potędze x (współczynnik wiodący)

Liczba pierwiastków i ich własności

- Wielomian stopnia n ma **co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych** - Pierwiastki mogą być **proste** lub **wielokrotne** - Jeżeli pierwiastek x_0 jest k-krotny, wielomian można zapisać jako $(x - x_0)^k Q(x)$, gdzie $Q(x_0) \neq 0$

Dziedzina i granice w nieskończoności

- Dziedzina każdego wielomianu to $\mathbb{R}$ - Zachowanie dla $x \to \pm\infty$ zależy od stopnia i współczynnika wiodącego:

$$\begin{cases} \text{Stopień parzysty, } a_n > 0: & P(x) \to +\infty \text{ gdy } x \to \pm\infty \\ \text{Stopień parzysty, } a_n < 0: & P(x) \to -\infty \text{ gdy } x \to \pm\infty \\ \text{Stopień nieparzysty, } a_n > 0: & P(x) \to +\infty \text{ gdy } x \to +\infty, P(x) \to -\infty \text{ gdy } x \to -\infty \\ \text{Stopień nieparzysty, } a_n < 0: & P(x) \to -\infty \text{ gdy } x \to +\infty, P(x) \to +\infty \text{ gdy } x \to -\infty \end{cases}$$

Przykłady wielomianów i ich wykresy

1. Wielomian stopnia 2 (parabola):

$$P(x) = x^2 - 4 \quad \text{pierwiastki: } x = \pm 2$$

2. Wielomian stopnia 3 (nieparzysty):

$$P(x) = x^3 - 3x \quad \text{pierwiastki: } x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$$

3. Wielomian z pierwiastkiem wielokrotnym:

$$P(x) = (x-1)^2(x+2) \quad \text{pierwiastki: } x = 1 \text{ (podwójny)}, x = -2$$

4. Wielomian stopnia 4 (parzysty):

$$P(x) = x^4 - 4x^2 + 3 \quad \text{pierwiastki: } x = \pm 1, \pm\sqrt{3}$$

Zastosowanie w chemii

- Wielomiany pojawiają się w chemii przy obliczeniach stężeń w równaniach reakcji z równaniami stężeniowymi wyższych rzędów - Wykresy wielomianów pozwalają wizualizować punkty zerowe odpowiadające równowadze reakcji - Pierwiastki wielokrotne mogą odpowiadać punktom przegięcia w kinetyce reakcji

Najważniejsze wnioski

- Stopień wielomianu określa maksymalną liczbę pierwiastków rzeczywistych.
- Dziedzina wielomianu to zawsze $\mathbb{R}$.
- Zachowanie funkcji w nieskończoności zależy od stopnia i współczynnika wiodącego.
- Pierwiastki wielokrotne tworzą charakterystyczne przegięcia wykresu.
- W chemii wielomiany modelują równania reakcji i ich punkty równowagi.

2.2 Funkcje pierwiastkowe

Pierwiastek kwadratowy

Pierwiastek kwadratowy jest funkcją odwrotną do funkcji kwadratowej $y = x^2$ (dla $x \geqslant 0$):

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x, \quad x \geqslant 0$$

Dziedzina: $[0, \infty)$
Zbiór wartości: $[0, \infty)$
Miejsce zerowe: $x = 0$
Granice:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$$

Pierwiastek trzeciego stopnia

Pierwiastek trzeciego stopnia jest funkcją odwrotną do funkcji $y = x^3$:

$$y = \sqrt[3]{x} \iff y^3 = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dziedzina: $\mathbb{R}$
Zbiór wartości: $\mathbb{R}$
Miejsce zerowe: $x = 0$
Granice:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$$

Przykładowe wartości funkcji pierwiastkowych

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

Najważniejsze wnioski

- Pierwiastek kwadratowy jest odwrotnością funkcji $y = x^2$ dla $x \geqslant 0$, dziedzina i zbiór wartości to $[0, \infty)$.
- Pierwiastek trzeciego stopnia jest odwrotnością funkcji $y = x^3$, dziedzina i zbiór wartości to $\mathbb{R}$.
- Obie funkcje mają miejsce zerowe w $x = 0$.
- Granice: pierwiastek kwadratowy rośnie do ∞, pierwiastek trzeciego stopnia rośnie do ∞ dla $x \to \infty$ i maleje do $-\infty$ dla $x \to -\infty$.

Zastosowanie pierwiastków w chemii

- Pierwiastek kwadratowy pojawia się przy obliczaniu średniej prędkości cząsteczek w kinetyce gazów:

$$v_{avg} \propto \sqrt{T}$$

- Pierwiastek trzeciego stopnia występuje przy obliczaniu promieni atomowych czy objętości cząsteczek, np. objętość sfery w chemii fizycznej:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

2.3 Funkcje wykładnicze

Definicja i własności funkcji wykładniczej

Rozważmy funkcję wykładniczą:

$$f(x) = 2^x$$

Najważniejsza własność definiująca funkcję wykładniczą:

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Z tej własności wynika kilka ważnych faktów:

- $2^0 = 1$, ponieważ $2^x \cdot 2^0 = 2^{x+0} = 2^x \implies 2^0 = 1$
- $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$
- $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ itd.

Dziedzina, zbiór wartości i miejsca zerowe

- Dziedzina funkcji wykładniczej: $\mathbb{R}$ - Zbiór wartości: $(0, \infty)$, funkcja przyjmuje tylko dodatnie wartości - Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych - Wartość w 0: $f(0) = 2^0 = 1$

Przykłady wartości funkcji 2^x

$$2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Wprowadzenie liczby e

Istnieje specjalna liczba $e \approx 2.71828$, która ma własności bardzo wygodne w rachunku różniczkowym i całkowym.
Intuicyjnie możemy ją opisać jako granicę lub sumę szeregu:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Funkcję wykładniczą z podstawą e oznaczamy jako:

$$f(x) = e^x$$

i ma ona podobne własności jak funkcja 2^x, ale jest szczególnie wygodna w analizie matematycznej.

Najważniejsze wnioski

- Funkcja wykładnicza spełnia $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- Dla $x = 0$ zawsze $a^0 = 1$, dla ujemnych wykładników $a^{-n} = 1/a^n$, dla ułamkowych wykładników $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.
- Dziedzina: $\mathbb{R}$, zbiór wartości: $(0, \infty)$, brak miejsc zerowych.
- Liczba e jest naturalną podstawą funkcji wykładniczej w analizie matematycznej, a e^x ma te same własności co 2^x.

Zastosowanie funkcji wykładniczych w chemii

- Funkcja wykładnicza opisuje rozpad radioaktywny:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

gdzie λ to stała rozpadu. - W kinetyce chemicznej zerowego i pierwszego rzędu stężenie reagentu często opisuje funkcja wykładnicza.

2.4 Funkcje logarytmiczne

Definicja logarytmu

Logarytm o podstawie 2 jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej 2^x:

$$y = \log_2(x) \iff 2^y = x, \quad x > 0$$

Oznacza to, że logarytm „odwraca" wykładniczą potęgę:

$$2^{\log_2(x)} = x, \quad \log_2(2^x) = x$$

Podstawowe własności logarytmu

Z własności funkcji wykładniczej:

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$$

wynika:

$$\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$$

Dalsze podstawowe własności:

- $\log_2(1) = 0$, ponieważ $2^0 = 1$
- $\log_2(x^m) = m \log_2(x)$
- $\log_2(x^{-1}) = -\log_2(x)$

Porównanie wykresów 2^x i $\log_2(x)$

Warto zwrócić uwagę, że funkcja wykładnicza i logarytmiczna są wzajemnie odwrotne – wykres logarytmu jest „odbiciem" wykresu wykładniczego względem prostej $y = x$.

Logarytm naturalny i zmiana podstawy

Specjalną podstawą logarytmu jest e:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Funkcja $\ln(x)$ ma podobne własności jak $\log_2(x)$:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^m) = m\ln(x)$$

Wzór na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad a > 0, a \neq 1$$

Wniosek: wszystkie logarytmy wyglądają podobnie jak logarytm naturalny, różnią się tylko skalą osi pionowej.

Dziedzina, miejsca zerowe i granice logarytmu

- Dziedzina funkcji logarytmicznej: $(0, \infty)$ - Miejsca zerowe: $\log_a(1) = 0$ - Granice przy brzegu dziedziny:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \log_a(x) = +\infty$$

Najważniejsze wnioski

- Logarytm jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej.
- Podstawowe własności: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, $\log(x^m) = m\log(x)$, $\log(1) = 0$, $\log(x^{-1}) = -\log(x)$.
- Logarytm naturalny $\ln(x)$ jest szczególnym przypadkiem logarytmu o podstawie e i służy do przeliczania logarytmów o innych podstawach.
- Dziedzina: $(0, \infty)$, brak miejsc zerowych poza $x = 1$, granice: $-\infty$ przy $x \to 0^+$, $+\infty$ przy $x \to \infty$.

Zastosowanie logarytmów w chemii

- Skala pH w chemii jest logarytmiczna:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[H^+]$$

- Logarytmy pojawiają się przy obliczaniu energii aktywacji w równaniu Arrheniusa:

$$k = Ae^{-E_a/(RT)} \implies \ln k = \ln A - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$$

2.5 Funkcje trygonometryczne

2.5.1 Miara łukowa kąta

Stopnie i radiany

Kąt można mierzyć w dwóch podstawowych jednostkach: stopniach i radianach. - Pełny kąt: $360^\circ = 2\pi$ rad - Zależność:

$$\text{radiany} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \text{stopnie}, \quad \text{stopnie} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \text{radiany}$$

Przykłady:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 180^\circ = \pi, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

2.5.2 Funkcje sinus i cosinus

Definicje i własności

Funkcje trygonometryczne można określić przez własności fundamentalne:

- **Jedynka trygonometryczna:**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- **Okresowość:**

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

- **Wzory sumy kątów:**

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Tabela wartości funkcji w przedziale $[0, \pi/2]$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0

Dziedzina, zbiór wartości, miejsca zerowe

- Dziedzina: $\mathbb{R}$ - Zbiór wartości: $[-1, 1]$ - Miejsca zerowe:

$$\sin x = 0 \implies x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Brak granicy funkcji na $\pm\infty$

Funkcje sinus i cosinus nie mają granicy w $\pm\infty$.
Dowód: rozważmy ciągi

$$x_n = 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n + \pi$$

wtedy

$$\sin x_n = 0, \quad \sin y_n = 0$$

lub inne wybory, np.

$$x_n = 2\pi n \implies \cos x_n = 1, \quad y_n = 2\pi n + \pi \implies \cos y_n = -1$$

Ponieważ dla różnych ciągów funkcje przyjmują różne wartości w nieskończoności, granica nie istnieje.

2.5.3 Wzory na $\sin(2x)$ i $\cos(2x)$ z wykorzystaniem wzoru Eulera

Wyprowadzenie wzorów na podwójny kąt

Przypomnijmy wzór Eulera:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Podnosząc obie strony do kwadratu:

$$(e^{ix})^2 = e^{i2x} = (\cos x + i \sin x)^2$$

Rozwijając prawą stronę:

$$\cos(2x) + i \sin(2x) = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x$$

Porównując część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Uogólnienie do $\sin(nx)$ **i** $\cos(nx)$

Podnosząc wzór Eulera do dowolnej potęgi $n \in \mathbb{N}$:

$$(e^{ix})^n = e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$$

Rozwijając prawą stronę za pomocą wzoru dwumianowego, możemy wyznaczyć $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$ w postaci:

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}((\cos x + i \sin x)^n), \quad \sin(nx) = \mathrm{Im}((\cos x + i \sin x)^n)$$

Jest to podstawowy sposób na uzyskanie wzorów dla wielokrotnych kątów.

2.5.4 Podstawowe własności funkcji sinus i cosinus

Wzory przesunięcia i parzystość/nieparzystość

Funkcje sinus i cosinus mają kilka fundamentalnych własności:

- **Przesunięcie o** $\pi/2$**:**
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
- **Funkcja nieparzysta:**
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
- **Funkcja parzysta:**
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
- **Okresowość:**
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Interpretacja geometryczna

- Sinus jest funkcją nieparzystą – odbicie wykresu względem osi y zmienia znak wartości. - Cosinus jest funkcją parzystą – odbicie wykresu względem osi y nie zmienia wartości. - Przesunięcie sinus o $\pi/2$ w lewo daje wykres cosinusa.

2.5.5 Wpływ operacji na wykres funkcji

Przesunięcia i odbicia funkcji sinus

Rozważmy funkcję $y = \sin(x)$. Wykres tej funkcji ulega zmianie pod wpływem prostych operacji:

- **Przesunięcie w poziomie:**

$$y = \sin(x + a) \quad \text{– wykres przesunięty o } a \text{ w lewo}$$

- **Przesunięcie w pionie:**

$$y = \sin(x) + a \quad \text{– wykres przesunięty o } a \text{ w górę}$$

- **Ścieśnienie/rozciągnięcie w poziomie:**

$$y = \sin(ax) \quad \text{– wykres „ściśnięty” o współczynnik } a \text{ w poziomie}$$

- **Rozciągnięcie/ściśnięcie w pionie:**

$$y = a\sin(x) \quad \text{– wykres „rozszerzony” o współczynnik } a \text{ w pionie}$$

- **Odbicie względem osi y:**

$$y = \sin(-x) \quad \text{– wykres odbity względem osi y}$$

- **Odbicie względem osi x:**

$$y = -\sin(x) \quad \text{– wykres odbity względem osi x}$$

2.5.6 Tangens, cotangens, secans i cosecans

Definicje i własności

- **Tangens:** $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - Zbiór wartości: $\mathbb{R}$
  - Miejsca zerowe: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - Granice przy brzegach dziedziny:
  $$\lim_{x\to\pi/2^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\pi/2^+} \tan x = -\infty$$
  - Wzór na sumę kątów:
  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- **Cotangens:** $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - Zbiór wartości: $\mathbb{R}$
  - Miejsca zerowe: $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - Granice przy brzegach dziedziny:
  $$\lim_{x\to 0^+} \cot x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$$
- **Secans:** $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - Zbiór wartości: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
  - Miejsca zerowe: brak
  - Granice przy brzegach dziedziny:
  $$\lim_{x\to\pi/2^-} \sec x = +\infty, \quad \lim_{x\to\pi/2^+} \sec x = -\infty$$
- **Cosecans:** $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - Zbiór wartości: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
  - Miejsca zerowe: brak
  - Granice przy brzegach dziedziny:
  $$\lim_{x\to 0^+} \csc x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \csc x = -\infty$$

2.6 Funkcje hiperboliczne

2.6.1 Sinus i cosinus hiperboliczny

Definicje i podstawowe własności

- **Definicje:**
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
- **Dziedzina:** $x \in \mathbb{R}$
- **Zbiór wartości:**
$$\sinh x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x \in [1, \infty)$$
- **Miejsca zerowe:**
$$\sinh x = 0 \implies x = 0, \quad \cosh x \neq 0$$
- **Granice:**
$$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty$$
- **Jedynka hiperboliczna:**
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
- **Wzory sumy:**
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Związki z funkcjami trygonometrycznymi

Funkcje hiperboliczne można wyrazić przez funkcje trygonometryczne zespolone:

$$\sinh x = -i \sin(ix), \quad \cosh x = \cos(ix)$$

Zastosowanie w fizyce

Chociaż w chemii funkcje hiperboliczne nie są powszechnie stosowane, pojawiają się w:

- szczególnej teorii względności: funkcje cosh i sinh opisują przekształcenia Lorentza w tzw. *rapidity* (prędkość w jednostkach naturalnych),
- równaniach ruchu w polu sił centralnych i w opisie krzywych wiszących (łańcuchy i linie napięte), które czasem pojawiają się w chemii fizycznej przy modelach mostków molekularnych.

2.6.2 Pozostałe funkcje hiperboliczne

Definicje i własności

- **Tangens hiperboliczny:**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
  - Zbiór wartości: $(-1, 1)$
  - Miejsca zerowe: $x = 0$
  - Granice:

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

- **Cotangens hiperboliczny:**

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  - Zbiór wartości: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
  - Granice:

$$\lim_{x\to 0^+} \coth x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \coth x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \coth x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1$$

- **Secans hiperboliczny:**

$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
  - Zbiór wartości: $(0, 1]$
  - Miejsca zerowe: brak
  - Granice:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sech} x = 0$$

- **Cosecans hiperboliczny:**

$$\mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

  - Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  - Zbiór wartości: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
  - Granice:

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{csch} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \mathrm{csch} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{csch} x = 0$$

2.7 Funkcje cyklometryczne

Definicje

Funkcje cyklometryczne są odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arkus sinus:** $\arcsin x$ – odwrotność funkcji $\sin x$ na przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$.
- **Arkus cosinus:** $\arccos x$ – odwrotność funkcji $\cos x$ na przedziale $[0, \pi]$.
- **Arkus tangens:** $\arctan x$ – odwrotność funkcji $\tan x$ na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.
- **Arkus cotangens:** $\operatorname{arc\,ctg} x$ – odwrotność funkcji $\cot x$ na przedziale $(0, \pi)$.

Własności $\arcsin$ **i** $\arctan$

- **Arcsin:**
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \quad \arcsin(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \pi/2, \qquad \lim_{x\to -1^+} \arcsin x = -\pi/2$$
- **Arctan:**
$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), \quad \arctan(0) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} \arctan x = \pi/2, \qquad \lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\pi/2$$

2.8 Funckcje area

Definicje i podstawowe własności

Funkcje area są odwrotne do funkcji hiperbolicznych:

- **Arsinh:** $\mathrm{arsinh} x$ – odwrotność funkcji $\sinh x$.
- **Arcosh:** $\mathrm{arcosh} x$ – odwrotność funkcji $\cosh x$ na przedziale $[0, \infty)$.
- **Artanh:** $\mathrm{artanh} x$ – odwrotność funkcji $\tanh x$ na przedziale $(-1, 1)$.
- **Arcoth:** $\mathrm{arcoth} x$ – odwrotność funkcji $\coth x$ na przedziale $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Własności wybranych funkcji area

- **Arsinh:**
$$\operatorname{arsinh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \operatorname{arsinh}(0)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arsinh}x=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arsinh}x=-\infty$$
- **Arcosh:**
$$\operatorname{arcosh}:[1,\infty)\to[0,\infty),\quad \operatorname{arcosh}(1)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arcosh}x=\infty$$
- **Artanh:**
$$\operatorname{artanh}:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad \operatorname{artanh}(0)=0$$
$$\lim_{x\to1^-}\operatorname{artanh}x=\infty,\quad \lim_{x\to-1^+}\operatorname{artanh}x=-\infty$$
- **Arcoth:**
$$\operatorname{arcoth}:(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R},\quad \operatorname{arcoth}(2)\approx 0.5493$$
$$\lim_{x\to1^+}\operatorname{arcoth}x=\infty,\quad \lim_{x\to-1^-}\operatorname{arcoth}x=-\infty$$

Związki z logarytmami

Funkcje area można zapisać w postaci logarytmicznej:

$$\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$\operatorname{artanh}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad \operatorname{arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

2.9 Funkcja odwrotna: $f(x) = \frac{1}{x}$

Definicja i własności

- **Definicja:**
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
- **Dziedzina:** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- **Zbiór wartości:** $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- **Miejsca zerowe:** brak
- **Granice:**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
- **Asymptoty:** pionowa w $x = 0$, pozioma w $y = 0$.

2.10 Podsumowanie

Grupa funkcji	**Przykłady**	**Dziedzina**	**Zbiór wartości**	**Miejsca zerowe**	**Dodatkowe własności / Granice**
Wielomiany	x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ lub $[0,\infty)$ dla parzystych n	Zależnie od stopnia, max n pierwiastków	$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty$ (n nieparzyste), $+\infty$ (n parzyste)
Pierwiastki	$\sqrt[n]{x}$	$[0,\infty)$ (n parzyste), $\mathbb{R}$ (n nieparzyste)	$[0,\infty)$ (n parzyste), $\mathbb{R}$ (n nieparzyste)	0	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$; $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$
Wykładnicze	a^x, e^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$	brak	$a^0 = 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
Logarytmy	$\log_a x$, $\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$	brak	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$
Trygonometryczne	$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$	$\sin,\cos$: $\mathbb{R}$; $\tan,\cot$: $\mathbb{R} \setminus \{\text{asymptoty}\}$	$\sin,\cos$: $[-1,1]$; tan: $\mathbb{R}$	$\sin x = 0$ dla $n\pi$, $\cos x = 0$ dla $n\pi + \pi/2$	Okresowe: $\sin,\cos$: 2π, tan: π, asymptoty pionowe dla $\tan,\cot$
Hiperboliczne	$\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$	$\sinh,\cosh,\tanh$: $\mathbb{R}$; coth: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	sinh: $\mathbb{R}$; cosh: $[1,\infty)$; tanh: $(-1,1)$; coth: $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$\sinh x = 0$ dla 0, $\tanh x = 0$ dla 0	Asymptoty pionowe: coth; granice: $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$
Area	arsinh$x$, arcosh$x$, artanh$x$, arcoth$x$	arsinh, artanh : $\mathbb{R}$; arcosh : $[1,\infty)$; arcoth : $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$	arsinh : $\mathbb{R}$; arcosh : $[0,\infty)$; artanh, arcoth : $\mathbb{R}$	arsinh$0 = 0$, artanh$0 = 0$	Wzory logarytmiczne: arsinh$x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, arcosh$x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, artanh$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$
Arcus	$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$	arcsin, arccos : $[-1,1]$; arctan : $\mathbb{R}$; arc ctg : $\mathbb{R}$	arcsin : $[-\pi/2,\pi/2]$; arccos : $[0,\pi]$; arctan, arc ctg : $(-\pi/2,\pi/2)$ lub $(0,\pi)$	$\arcsin 0 = 0$, $\arctan 0 = 0$	Monotoniczne, ciągłe, funkcje odwrotne do podstawowych funkcji trygonometrycznych
Wymierna	$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	brak	Asymptoty

Rozdział 3

Pochodne funkcji jednej zmiennej

3.1 Geometryczna interpretacja pochodnej

Wyobraźmy sobie wykres funkcji $y = f(x)$. W wielu sytuacjach chcielibyśmy opisać, jak szybko ta funkcja zmienia wartość w zależności od argumentu x. Innymi słowy – jak bardzo $f(x)$ *rośnie lub maleje* w pobliżu danego punktu.

Najbardziej naturalnym sposobem opisania tego tempa zmiany jest spojrzenie na **kąt nachylenia** stycznej do wykresu w danym punkcie. Jeżeli w punkcie x wykres ma styczną o kącie α względem osi x, to:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

gdzie Δy i Δx oznaczają przyrosty odpowiednio wartości funkcji i argumentu.

Na wykresie przedstawiona jest sytuacja, w której wybieramy punkty $(x, f(x))$ oraz $(x+h, f(x+h))$, a następnie łączymy je odcinkiem — jest to **seczna**, która stanowi przybliżenie stycznej. Im mniejszy wybierzemy h, tym seczna lepiej przybliża styczną.

Iloraz różnicowy

Dla dowolnej funkcji $f(x)$ oraz małego przyrostu h rozważamy wyrażenie:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nazywa się ono **ilorazem różnicowym** i opisuje nachylenie *secznej* poprowadzonej przez dwa punkty wykresu funkcji.

—

Definicja pochodnej

Jeżeli istnieje granica:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji f w punkcie x**.
Wartość $f'(x)$ jest równa **tangensowi kąta nachylenia stycznej** do wykresu w punkcie $(x, f(x))$.

Przykład obliczenia ilorazu różnicowego

Niech $f(x) = x^2$. Wtedy

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Gdy $h \to 0$, to otrzymujemy:

$$f'(x) = 2x.$$

Uwaga na błąd

Nie wolno „podstawiać” $h = 0$ w ilorazie różnicowym *przed* policzeniem granicy. Wyrażenie $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nie jest zdefiniowane dla $h = 0$ — dopiero *granica* mówi nam, jaka wartość do sensownego ograniczenia prowadzi.

Najważniejsze wnioski

- Pochodna opisuje *tempo zmian funkcji*.
- Wartość pochodnej w punkcie to **nachylenie stycznej** do wykresu w tym punkcie.
- Pochodna jest zdefiniowana jako **granica ilorazu różnicowego**.
- Jeżeli pochodna istnieje, funkcja jest *gładka* lokalnie – nie ma ostrego załamania wykresu.

3.2 Wnioski z interpretacji geometrycznej pochodnej

Skoro pochodna $f'(x)$ oznacza nachylenie stycznej do wykresu $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$, to jej **znak** mówi nam, jak funkcja zachowuje się w pobliżu tego punktu.

Związek znaku pochodnej z monotonicznością funkcji

- Jeżeli $f'(x) > 0$, to styczna w punkcie x jest nachylona do góry, a więc funkcja jest **rosnąca** w pobliżu tego punktu.
- Jeżeli $f'(x) < 0$, to styczna jest nachylona w dół, a więc funkcja jest **malejąca**.
- Jeżeli $f'(x) = 0$, to styczna jest pozioma. Może to oznaczać:
  - funkcję **stałą** lokalnie,
  - **maksimum lokalne**,
  - **minimum lokalne**.

—

Wykrywanie ekstremum na podstawie pochodnej

Dla funkcji $f(x) = x^2$ mamy $f'(x) = 2x$. W punkcie $x = 0$:

$$f'(0) = 0.$$

Ponieważ dla $x < 0$ pochodna jest ujemna, a dla $x > 0$ dodatnia, funkcja najpierw maleje, a potem rośnie.
Wniosek: $x = 0$ jest **minimum lokalnym**.

—

Brak pochodnej – przykład funkcji $|x|$

Pochodna funkcji $|x|$

Rozważamy funkcję:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Dla $x > 0$ pochodna wynosi $f'(x) = 1$, a dla $x < 0$ pochodna wynosi $f'(x) = -1$.
W punkcie $x = 0$ mamy:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1.$$

Ponieważ granice jednostronne są różne, pochodna **nie istnieje** w $x = 0$.
Interpretacja: Wykres ma tu **ostry wierzchołek**, więc nie istnieje jednoznaczna styczna.

—

3.2.1 Interpretacja fizyczna pochodnej

Pochodna jako prędkość

Jeżeli $s(t)$ oznacza przebytą drogę w czasie t, to:

$$v(t) = s'(t)$$

jest **prędkością chwilową**.
Analogicznie, pochodna prędkości to:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

czyli **przyspieszenie chwilowe**.
Dzięki temu pochodna opisuje **tempo zmian wielkości fizycznej**.

—

Najważniejsze wnioski

- Pochodna opisuje nachylenie stycznej do wykresu.
- $f'(x) > 0$: funkcja rośnie; $f'(x) < 0$: funkcja maleje.
- $f'(x) = 0$ może oznaczać ekstremum lokalne.
- Jeżeli wykres ma ostry wierzchołek – pochodna może **nie istnieć**.
- W fizyce pochodna drogi po czasie to prędkość, a pochodna prędkości to przyspieszenie.

3.3 Pochodne prostych funkcji

3.3.1 Pochodna funkcji $y = x^2$ z definicji

Aby obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie x, korzystamy z definicji pochodnej:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Podstawiamy $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Rozwijamy kwadrat sumy:

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

Podstawiamy do licznika:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}.$$

Wyłączamy h w liczniku:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h).$$

Ponieważ granica istnieje i $h \to 0$, otrzymujemy:

$$f'(x) = 2x.$$

Wniosek

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

Nachylenie stycznej do wykresu funkcji $y = x^2$ w punkcie x jest równe $2x$.

3.3.2 Pochodna iloczynu i ilorazu

Reguła iloczynu (Leibniza)

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, to iloczyn jest różniczkowalny i

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dowód reguły iloczynu (z definicji)

Rozważamy iloraz różnicowy dla iloczynu:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Grupując:

$$= \frac{\left(f(x+h) - f(x)\right) g(x+h)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Dla $h \to 0$ mamy $g(x+h) \to g(x)$ oraz granice ilorazów różnicowych dla f i g, więc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

To kończy dowód.

Przykład iloczynu

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Mamy

$$(fg)'(x) = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Typowy błąd

Niepoprawne: $(fg)' = f'g'$. Prawidłowa postać to $f'g + fg'$ — pamiętaj o dodawaniu obu składników.

Reguła ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x i $g(x) \neq 0$, to iloraz jest różniczkowalny i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dowód reguły ilorazu (przez iloczyn z odwrotnością)

Możemy zapisać $\frac{f}{g} = f \cdot (1/g)$ i użyć reguły iloczynu, więc potrzebujemy pochodnej $1/g$. Dla $g(x) \neq 0$ rozważmy $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. Korzystając z definicji:

$$h'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(x)}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{g(x) - g(t)}{(t - x)g(t)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Teraz reguła iloczynu daje:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Przykład ilorazu

Niech $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Dla $x \neq 0$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Zastosowanie w chemii

Reguły iloczynu i ilorazu pojawiają się naturalnie przy różniczkowaniu wyrażeń opisujących szybkości reakcji, gdzie stężenia reagentów często mnożą się lub występują w mianownikach (np. stałe kinetyczne, ilorazy stężeń).

Najważniejsze wnioski

- $(fg)' = f'g + fg'$ — reguła Leibniza (iloczyn).
- $\big(f/g\big)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ — reguła ilorazu (dla $g \neq 0$).
- Reguły można udowodnić z definicji pochodnej; iloczyn wykorzystuje prosty rozdział wyrażenia, a iloraz — pochodną odwrotności.
- Unikaj błędu polegającego na mnożeniu pochodnych zamiast sumy składników.

Pochodna tangensa dwoma sposobami

Niech $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
1. Metoda ilorazu:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Metoda zamiany na $\tan^2$:
Zauważmy, że $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, ponieważ:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

3.3.3 Podstawowe pochodne

Funkcja $f(x)$	**Pochodna** $f'(x)$
c (stała)	0
x	1
x^n (dla $n \in \mathbb{R}$)	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arctg}(x)$ (oznaczenie równoważne)	$\frac{1}{1+x^2}$

3.4 Pochodna funkcji złożonej

3.4.1 Reguła łańcuchowa

Motywacja – pochodna $\sin 2x$

Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \sin(2x).$$

Możemy zapisać:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Korzystając z reguły iloczynu:

$$(\sin(2x))' = (2\sin x\cos x)' = 2[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'] = 2[\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)] = 2(\cos^2 x-\sin^2 x) = 2\cos 2x.$$

Wniosek: Obliczanie pochodnej funkcji złożonej poprzez rozwinięcie może być czasochłonne i skomplikowane. Z pomocą przychodzi **reguła łańcuchowa**.

Reguła łańcuchowa

Niech $f(x) = F(g(x))$, gdzie F i g są różniczkowalne. Wówczas:

$$f'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Interpretacja: Pochodna funkcji złożonej jest iloczynem pochodnej funkcji zewnętrznej obliczonej w punkcie funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej.

Zastosowanie reguły łańcuchowej – $\sin(2x)$

Niech $F(u) = \sin u$, $g(x) = 2x$. Wówczas $F'(u) = \cos u$, $g'(x) = 2$, więc

$$(\sin(2x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos 2x,$$

co zgadza się z wynikiem uzyskanym poprzednio poprzez rozwinięcie iloczynu.

Kolejny przykład – $\cos(3x^2)$

Niech $f(x) = \cos(3x^2)$. Zastosowanie reguły łańcuchowej:

$$F(u) = \cos u \implies F'(u) = -\sin u, \quad g(x) = 3x^2 \implies g'(x) = 6x.$$

Stąd:

$$f'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(3x^2) \cdot 6x = -6x\sin(3x^2).$$

Najważniejsze wnioski

- Reguła łańcuchowa pozwala efektywnie liczyć pochodne funkcji złożonych.
- Dla $f(x) = F(g(x))$ mamy $f'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- Przykłady: $\sin(2x)' = 2\cos 2x$, $\cos(3x^2)' = -6x\sin(3x^2)$.
- Motywacja: rozwinięcie funkcji złożonej na prostsze elementy może być czasochłonne.

3.5 Pochodne wyższych rzędów

3.6 Znajdowanie ekstremów

3.7 Analiza wykresu funkcji

3.8 Inne zastosowania pochodnych

3.9 Rozwijanie funkcji w szereg Taylora

3.10 Zadania

Część I – funkcje proste

Obliczyć pochodne poniższych funkcji:

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = 3x + 7$
4. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
5. $f(x) = 4x^3$
6. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
7. $f(x) = 3x^2 + 5x$
8. $f(x) = x^3 - 6x + 9$
9. $f(x) = 7x^5 - 3x^3 + x$
10. $f(x) = 2/x$
11. $f(x) = 5/x^2$

12. $f(x) = x^3/2$
13. $f(x) = (x+1)(x-2)$
14. $f(x) = (2x+1)(x^2-1)$
15. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
16. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$
17. $f(x) = (x^2+3x)(x-1)$
18. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2}$
19. $f(x) = 4x^3(x-2)$
20. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

Część II – funkcje złożone (reguła łańcuchowa)

Obliczyć pochodne poniższych funkcji, upraszczając wyniki do możliwie prostych form:

1. $f(x) = \sin(x^2)$
2. $f(x) = \cos(3x)$
3. $f(x) = e^{2x}$
4. $f(x) = \ln(x^2+1)$
5. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
6. $f(x) = \tan(x^2)$
7. $f(x) = \arctan(3x)$
8. $f(x) = \sin(2x+1)$
9. $f(x) = \cos(x^3)$
10. $f(x) = e^{x^2-1}$
11. $f(x) = \ln(2x+1)$
12. $f(x) = \sqrt{3x^2+2}$
13. $f(x) = \tan(4x-1)$
14. $f(x) = \sin(x^2+2x)$
15. $f(x) = \cos(5x^3-2x)$
16. $f(x) = e^{x^2+x}$

17. $f(x) = \ln(x^4 + 1)$
18. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$
19. $f(x) = \tan(x^2 - 3x + 2)$
20. $f(x) = \sin(e^x)$

Część III – funkcje złożone wyższych rzędów

Obliczyć pochodne poniższych funkcji, stosując regułę łańcuchową i upraszczając wyniki:

1. $f(x) = \arctan(x^2)$
2. $f(x) = \arcsin(3x)$
3. $f(x) = \arctan(e^x)$
4. $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$
5. $f(x) = \arctan(\sin x)$
6. $f(x) = \arcsin(\cos x)$
7. $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$
8. $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$
9. $f(x) = \arctan(\sqrt{1 + x^2})$
10. $f(x) = \arcsin(e^{-x})$
11. $f(x) = \arctan(\ln(x^2 + 1))$
12. $f(x) = \arcsin(\sqrt{\sin x})$
13. $f(x) = \arctan(\cos(x^2))$
14. $f(x) = \arcsin(\tan x)$
15. $f(x) = \arctan(\sqrt{\tan(x^2)})$
16. $f(x) = \arcsin(\ln(1 + x^2))$
17. $f(x) = \arctan(e^{\sqrt{x}})$
18. $f(x) = \arcsin(\sqrt{\cos(2x)})$
19. $f(x) = \arctan(\sin(\sqrt{x}))$
20. $f(x) = \arcsin(\sqrt{\tan(x^2 + 1)})$

Rozdział 4

Całkowanie funkcji jednej zmiennej

4.1 Całka jako pole pod wykresem

Rozdział 5

Rachunek różniczkowy wielu zmiennych

Rozdział 6

Całki wielokrotne

Rozdział 7

Analiza wektorowa

Rozdział 8

Równania różniczkowe zwyczajne

Rozdział 9

Statystyka matematyczna

Rozdział 10

Analiza spektralna

Rozdział 11

Operacje macierzowe, symetrie i grupy

Dodatki

A Podstawy liczb zespolonych

B Rozwiązywanie równań sześciennych — metoda Cardana

Równania stopnia trzeciego, czyli **równania sześcienne**, mają ogólną postać:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0.$$

Sprowadzenie równania do postaci zredukowanej

Pierwszym krokiem jest pozbycie się wyrazu kwadratowego. W tym celu wykonujemy podstawienie:

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

Po podstawieniu równanie przyjmuje postać tzw. **równania zredukowanego**:

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdzie:

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.$$

Idea metody Cardana

Cardano zaproponował, aby rozwiązanie równania zredukowanego $y^3 + py + q = 0$ poszukiwać w postaci:

$$y = u + v.$$

Podstawiając to do równania otrzymujemy:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Po rozwinięciu i uporządkowaniu:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Aby wyrażenie się uprościło, wybieramy u i v tak, by:

$$3uv + p = 0.$$

Wtedy otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -\frac{p}{3}. \end{cases}$$

Równania dla u^3 i v^3

Niech $t = u^3$ i $s = v^3$. Zatem:

$$\begin{cases} t + s = -q, \\ ts = -\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Jest to równanie kwadratowe względem t:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Zatem:

$$t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}.$$

Rozwiązanie końcowe

Wybieramy:

$$u = \sqrt[3]{t_1}, \quad v = \sqrt[3]{t_2},$$

gdzie:

$$t_{1,2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Stąd:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A ostatecznie:

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

Przykład

Rozwiąż równanie:

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Mamy już postać zredukowaną, czyli $p = -3$, $q = 1$.
Zatem:

$$t_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^3} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważmy, że:

$$t_1 = e^{i\pi/3}, \quad t_2 = e^{-i\pi/3}.$$

Po obliczeniu pierwiastków sześciennych:

$$u = e^{i\pi/9}, \quad v = e^{-i\pi/9},$$

a więc:

$$y = u + v = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

Pozostałe dwa pierwiastki otrzymujemy przez dodanie wielokrotności $2\pi/3$ do kąta:

$$y_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Dla ciekawych

W ogólności rozwiązanie równania sześciennego może przyjąć postać zespoloną. Zaskakujące jest, że nawet w przypadkach, gdy pierwiastki rzeczywiste istnieją, formuła Cardana przechodzi przez liczby zespolone — to tzw. *casus irreducibilis*. Pełne rozwinięcie tej metody wymaga znajomości liczb zespolonych i ich trygonometrycznego zapisu.

Zastosowanie w chemii

Równania sześcienne pojawiają się np. przy wyznaczaniu objętości molowej gazu rzeczywistego z równania stanu van der Waalsa:

$$(p + \frac{a}{V_m^2})(V_m - b) = RT,$$

które po przekształceniu względem V_m prowadzi właśnie do równania sześciennego. W praktyce do obliczeń używa się przybliżeń numerycznych, ale metoda Cardana pozwala lepiej zrozumieć strukturę rozwiązania.

Najważniejsze wnioski

- Każde równanie sześcienne można sprowadzić do postaci zredukowanej $y^3 + py + q = 0$.
- Rozwiązanie Cardana ma postać:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

- W tzw. *casus irreducibilis* występują liczby zespolone nawet przy rzeczywistych pierwiastkach.
- Metoda Cardana ma znaczenie historyczne i praktyczne — np. w równaniu van der Waalsa.

Polecana literatura

Zbiory zadań

1. Gdowski, Pluciński - “Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie”;
2. Krysicki, Włodarski - “Analiza matematyczna w zadaniach”;
3. Demidowicz - “Problems in mathematical analysis”;
4. Kaczor, Nowak - “Zadania z analizy matematycznej”;

Podręczniki

1. Rudin - “Podstawy analizy matematycznej”;
2. Fichtenholtz - “Rachunek różniczkowy i całkowy”;
3. Schwartz - “Kurs analizy matematycznej”;