Kartkówka 6 - 25.11.2025

Zadanie za 1 pkt Narysuj (i tylko narysuj) wykres funkcji $f(x) = \ln x^2$

Zadanie za 2 pkt Policz pierwszą i drugą pochodną funkcji $f(x) = e^x \ln(x)$

Zadanie za 3 pkt Znajdź granicę:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \tag{37}$$

Zadanie za 4 pkt Znajdź ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 \tag{38}$$

Określ, które z nich to minima, które maksima.

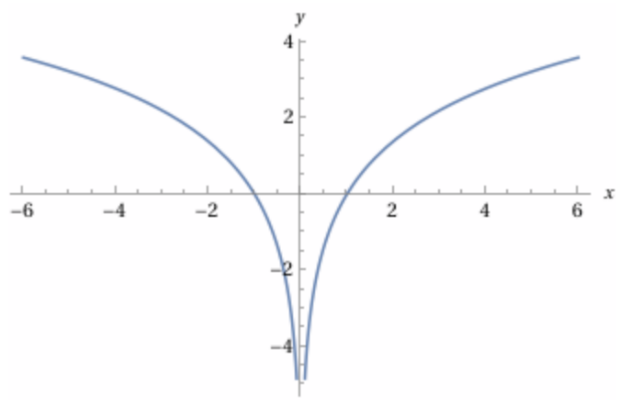
Zadanie za 5 pkt Udowodnij nierówność

$$e^x - 1 \geq x \tag{39}$$

Zadanie za 6 pkt Załóżmy, że $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ i $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$. Wykazać, że jeśli $\lim_{x \to 0} g(x)\left(f(x) - 1\right) = \gamma$ to $\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$

3.4 Kartkówka 6 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt Ponieważ $x^2 > 0$ dla $x > 0$ to dziedziną funkcji są wszystkie liczby $x \neq 0$. Co więcej, ponieważ $\ln x^2 = \ln(-x)^2$ to funkcja ta jest symetryczna względem osi $y = 0$. Wreszcie dla $x > 0$ mamy $\ln x^2 = 2\ln x$, więc dla $x > 0$ funkcja ta wygląda jak przeskalowany logarytm naturalny:



Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x) = \ln x^2$

Zadanie za 2 punkty Dana jest funkcja

$$f(x) = e^x \ln(x),$$

określona dla $x > 0$.

Pierwsza pochodna. Korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Zatem:

$$f'(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right).$$

Druga pochodna. Różniczkujemy ponownie, znów stosując wzór na pochodną iloczynu:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) \right)' = (e^x)' \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) + e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)'.$$

Pochodna wyrażenia w nawiasie:

$$\left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Ostatecznie:

$$f''(x) = e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) + e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \left(\ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Zadanie za 3 punkty Obliczamy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Zauważamy, że po podstawieniu $x = 0$ otrzymujemy postać nieoznaczoną:

$$\left[\frac{0}{0}\right].$$

Możemy więc skorzystać z tw. de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Otrzymana granica znów jest postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$, więc korzystamy z twierdzenia de l'Hospitala po raz drugi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Gdzie w ostatnim kroku wystarczy policzyć wartość funkcji ciągłej. **Odpowiedź:** $\frac{1}{2}$.

Zadanie za 4 punkty Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3,$$

określona dla $x \neq 0$. Aby znaleźć ekstrema liczymy pierwszą pochodną:

$$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1).$$

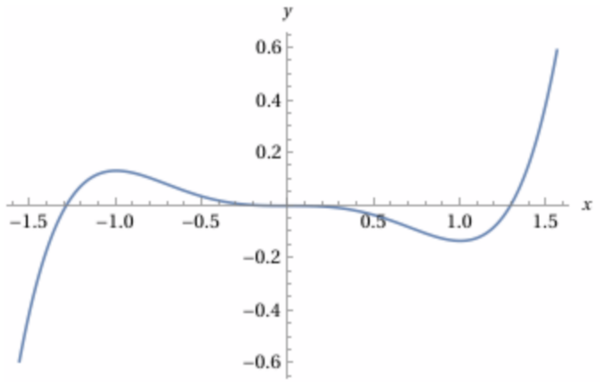
Pochodna ta posiada trzy miejsca zerowe $x = 0$ (podwójne), $x = 1$ oraz $x = -1$. Każde z nich jest potencjalnym ekstremum. Aby określić, jak jest w istocie, określimy znak pochodnej.

Po pierwsze zobaczmy, że $x^2 > 0$ dla $x \neq 0$. Więc w okolicy $x = 0$ funkcja nie zmienia znaku. Nie jest to więc ekstremum. Ponieważ $x^2 > 0$ dla $x \neq 0$, to znak pochodnej jest taki sam, jak znak wyrażenia $(x-1)(x+1)$. To wyrażenie to funkcja kwadratowa z pierwiastkami w $x = 1$ i $x = -1$, czyli jest ujemne w przedziale $x \in (-1, 1)$, a dodatnie poza nim. To też oznacza, że pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny w $x = -1$, więc w tym punkcie jest maksimum. Pochodna zmienia też znak z ujemnego na dodatni w $x = 1$, jest więc tam maksimum.

Ostatecznie

$x = -1$	$\leftrightarrow$	maksimum
$x = 0$	$\leftrightarrow$	brak ekstremum
$x = 1$	$\leftrightarrow$	minimum

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ przedstawia Rys. 6



Rysunek 6: Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ - widać ekstrema w punktach $x = \pm 1$. W punkcie $x = 0$ mamy punkt przegięcia.

Zadanie za 5 punktów Chcemy udowodnić nierówność

$$e^x - 1 \geq x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Rozważmy funkcję pomocniczą:

$$g(x) = e^x - 1 - x.$$

Obliczamy pochodną:

$$g'(x) = e^x - 1.$$

Zauważmy, że funkcja g ma punkt krytyczny (miejsce zerowe pochodnej):

$$g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

I ten punkt krytyczny jest w istocie ekstremum, co udowadniamy sprawdzając znak pochodnej:

$$g'(x) < 0 \text{ dla } x < 0, \quad g'(x) > 0 \text{ dla } x > 0.$$

Zatem $x = 0$ jest minimum funkcji g, bo pochodna zmienia znak z ujemnego, na dodatni.

Oznacza to, że namniejsza (minimalna) wartość funkcji g to:

$$g(0) = e^0 - 1 - 0 = 0.$$

Czyli $e^x - 1 - x = g(x) \geq g(0) = 0$, co jest równoważne z wyjściową nierównością.

Zadanie za 6 pkt Mamy zbadać wyrażenie $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} e^{g(x)\ln f(x)}$. W związku z tym wystarczy, że zbadamy granicę wyrażenia $\lim_{x\to 0} g(x)\ln f(x)$ Zauważmy też, że skoro $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, oraz wiemy, że $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ to mamy też:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + f(x) - 1)}{f(x) - 1} = 1 \tag{40}$$

Bo możemy podstawić $y = f(x) - 1$ i gdy $x \to 0$ to $y \to 0$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} g(x) \ln \left(f(x) \right) = \\ = \lim_{x \to 0} g(x) &\frac{\ln \left(1 + f(x) - 1 \right)}{f(x) - 1} \left(f(x) - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \to 0} g(x) \left(f(x) - 1 \right) = \gamma \end{aligned} \tag{41}$$

Co dowodzi równości.