

3 Zadania przygotowawcze z analizy funkcji

3.1 Granice

Policz granice następujących funkcji. W przypadku granic w punkcie policz obie granice jednostronne (zbliżając się do punktu z każdej ze stron).

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4 + x^2}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x}{10x^3 + 7}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^4 + 2}}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x \sin x}{x^2}$ |

3.2 Znajdowanie ekstremów

Znajdź ekstrema następujących funkcji. Określ, czy jest to minimum, czy maksimum, czy też żadne z nich.

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x^3 - 3x$. | 6. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. |
| 2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. | 7. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. |
| 3. $f(x) = x^3 + x^2$. | 8. $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$. |
| 4. $f(x) = -x^4 + 4x^2$. | 9. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$. |
| 5. $f(x) = x^5 - 5x$. | 10. $f(x) = \frac{1}{x} + x$. |

11. $f(x) = e^x - x.$

12. $f(x) = xe^{-x}.$

13. $f(x) = x^2 \ln x.$

14. $f(x) = \ln(x^2 + 1).$

15. $f(x) = e^{-x^2}.$

16. $f(x) = \sin x + \cos x.$

17. $f(x) = x \sin x.$

18. $f(x) = \cos(2x) - x.$

19. $f(x) = \sin x - x^2.$

20. $f(x) = \sin^2 x - \cos x.$

3.3 Analiza wykresu

Przeprowadź pełną analizę wykresu poniższych funkcji - określ dziedzinę, policz granice, pochodną, policz ekstrema i narysuj wykres.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$

3. $f(x) = e^x - 2x$

4. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

5. $f(x) = x^2 e^{-x}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - x$

7. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

8. $f(x) = \ln(1 + e^x)$

9. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

10. $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

11. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

12. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

13. $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

14. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

15. $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+x-6}$