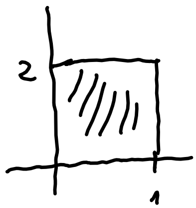
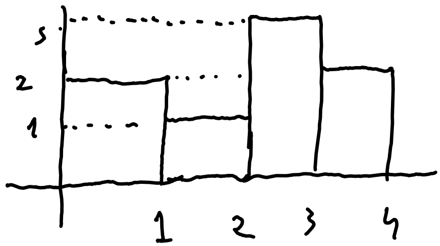
28.02.2025

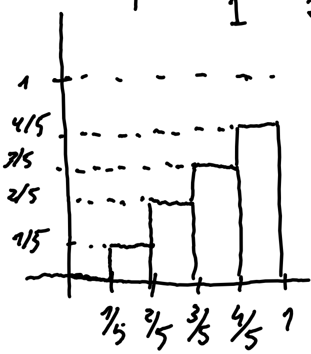
$$1+2+3+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$



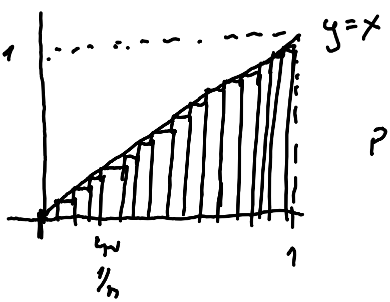
$P=2$



$P=2+1+3+2=8$



$$P=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{25}\cdot 10=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$



$$P=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\dots+\frac{n-1}{n}\right)=$$

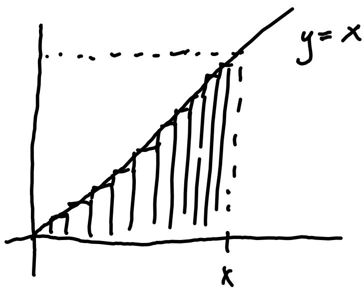
$$\frac{1}{n^2}\left(1+2+\dots+n-1\right)=\frac{(1+n-1)(n-1)}{2\,n^2}=\frac{n(n-1)}{2n^2}=$$

$$=\frac{n-1}{2n}\longrightarrow\frac{1}{2}$$

gdy $n\to\infty$ nasza figura "dąży" do trójkąta.

Wniosek 1

Pole dowolnej figury możemy przybliżyć przez sumę pól prostokątów o podstawie 1/n. Przy $n \to \infty$ otrzymamy dokładne pole



$$P = \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{nx-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(0 + 1 + 2 + \dots + (nx-1)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{nx-1} i =$$

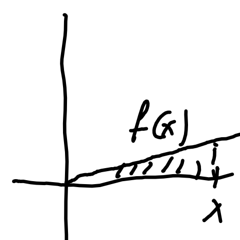
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 + nx - 1}{2} \cdot (nx-1) = \frac{nx(nx-1)}{2n^2} = \frac{x(nx-1)}{2n}$$

$$\longrightarrow \frac{x^2}{2}$$

W przypadku, gdy znamy wzór funkcji ograniczającej, pod którą pole liczymy, możemy napisać

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{nx-1} f(nx-1)$$

$f(x)$	Pole trójkąta ograniczonego o wierzchołkach w $(0,0)$ i $(x,0)$
$f(x) = x$	$P(x) = x^2/2$
$f(x) = 3x$	$P(x) = 3x^2/2$
$f(x) = \frac{x}{4}$	$P(x) = \frac{x^2}{8}$



$$\boxed{f(x) = \frac{dP}{dx}}$$

Wniosek 2

Niech $P(a,b,f)$ oznacza pole pod wykresem funkcji f na odcinku (a,b). Wtedy

$$P(a,b,f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{(b-a)n} f\left(a+\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n} = F(b)-F(a)$$

gdzie $F'(x) = f(x)$

Definicja

Granicę $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{1}{n}$ oznaczamy $\int_a^b f(x)\,dx$

infinitezymalny przyrost x

Jest to całka oznaczona z f w granicach (a,b).

Funkcję pierwotną $F(x)$ taką, że $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$ oznaczamy $\int f(x)\,dx$. Jest to całka nieoznaczona

Wniosek 3 = zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{gdzie} \quad F(x) = \int f(x)\,dx$$

Uwaga!

Dla każdej funkcji ciągłej f istnieje nieskończenie wiele funkcji pierwotnych.
Bo jeśli dla pewnej funkcji pierwotnej F mamy $F' = f$, to zachodzi też $(F + C)' = f$ gdy C jest stałą.

To nie przeszkadza przy całce oznaczonej, gdyż

$$F(b) - F(a) = \left[F(b) + C\right] - \left[F(a) + C\right]$$

Uwaga 2

mamy $\underline{F(x)} = \int f(x)\,dx = \int \frac{dF}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \underline{\int dF}$ ← suma nieskończenie małych elementów.

Całkowanie to proces odwrotny do różniczkowania

Podstawowe całki:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = ctg(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + C \quad x \in (-1, 1)$$

Jakie jest pole pod wykresem $\sin(x)$ w granicach $(0, \pi)$?
A $(0, 2\pi)$?

Wniosek 3

Całka, to skierowane pole pod wykresem! Dodatnie dla funkcji dodatniej, ujemne dla ujemnej.