Kartkówka 1 - 14.10.2025

Zadanie za 1 pkt Policz wyznacznik macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zadanie za 2 pkt Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

Zadanie za 3 pkt Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2, \end{cases}$$

Zadanie za 4 pkt Rozwiąż następujący układ równań nieliniowych:

$$\begin{cases} x^2 - xy - x = 0, \\ y^3 + y^2 + xy - 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

Zadanie za 5 pkt Wyznaczyć liczbę k tak, aby jeden z pierwiastków równania $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$ był dwa razy większy od drugiego.

Zadanie za 6 pkt Wykazać, że jeśli $a^3 + pa + q = 0$, $b^3 + pb + q = 0$ i $c^3 + pc + q = 0$ dla $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, to $a + b + c = 0$

Kartkówka 1 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt Dla

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

wyznacznik to:

$$\det(A) = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11.$$

Więc $\boxed{\det(A) = 11}$.

Zadanie za 2 pkt Mamy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$ Więc:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Więc

$$\boxed{x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{or} \quad x = 1 - \sqrt{2}.}$$

Zadanie za 3 pkt Odejmując pierwsze równanie od drugiego:

$$(2x - y + z) - (x + y + z) = 3 - 6 \Rightarrow x - 2y = -3. \tag{1}$$

Odejmując pierwsze równanie od trzeciego:

$$(x + 2y - z) - (x + y + z) = 2 - 6 \Rightarrow y - 2z = -4. \tag{2}$$

Z (1): $x = 2y - 3$. Wstawiamy do oryginalnego równania:

$$(2y - 3) + y + z = 6 \Rightarrow 3y + z = 9 \Rightarrow z = 9 - 3y.$$

Wstawiamy do (2):

$$y - 2(9 - 3y) = -4 \Rightarrow y - 18 + 6y = -4 \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2.$$

Więc $x = 2y - 3 = 4 - 3 = 1$ i $z = 9 - 3y = 9 - 6 = 3$.

Więc rozwiązaniem jest:

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 3).}$$

Zadanie za 4 pkt **Krok 1: Rozłożenie pierwszego równania.**

Rozkładamy $x^2 - xy - x$:

$$x^2 - xy - x = x(x - y - 1) = 0.$$

Więc albo

$$\text{(i) } x = 0, \qquad \text{albo} \qquad \text{(ii) } x = y + 1.$$

Przypadek (i): $x = 0$.

Podstawiamy $x = 0$ do drugiego równania:

$$y^3 + y^2 + 0 - 0 - 2y = y^3 + y^2 - 2y = y\big(y^2 + y - 2\big) = 0.$$

Rozkładamy równanie w nawiasie $y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1)$. Więc

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = -2.$$

Mamy więc trzy rozwiązania:

$$\boxed{(x, y) = (0, 0),\ (0, 1),\ (0, -2)}.$$

Przypadek (ii): $x = y + 1$.
Podstawiamy $x = y + 1$ do drugiego równania:

$$y^3 + y^2 + (y+1)y - 3(y+1) - 2y = 0.$$

Upraszczamy:

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 + y^2 + y - 3y - 3 - 2y &= y^3 + 2y^2 + (y - 3y - 2y) - 3 \\ &= y^3 + 2y^2 - 4y - 3. \end{aligned}$$

Jest to równanie trzeciego stopnia. Możemy założyć, że jakieś jego rozwiązanie jest dzielnikiem wyrazu wolnego. Dzielnikami wyrazu wolnego jest $1, -1, 3, -3$. Można zobaczyć, że:

$$(-3)^3 + 2(-3)^2 - 4(-3) - 3 = -27 + 18 + 12 - 3 = 0$$

A więc -3 jest jednym z pierwiastków. Dzieląc wielomian przez $(y+3)$ otrzymujemy:

$$y^3 + 2y^2 - 4y - 3 = (y+3)(y^2 - y - 1)$$

Równanie w drugim nawiasie to zwykłe równanie kwadratowe, które możemy rozwiązać za pomocą wyróżnika $\Delta = 1 + 4 = 5$. A więc kolejne rozwiązania to $y = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Ponieważ $x = y + 1$ daje to kolejne trzy rozwiązania:

$$\boxed{(x, y) = (-2, -3),\ \Big((3 - \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2\Big),\ \Big(((3 + \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2\Big)}.$$

Zadanie 5 Łatwo jest napisać wzór na pierwiastki równania. $\Delta = (3k-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 5k + 3) = 9k^2 - 6k + 1 - 8(k^2 - 5k + 3) = k^2 + 34k - 23$, a więc $x_i = \frac{-(3k-1) \pm \sqrt{k^2+34k-23}}{2(k^2-5k+3)}$. Ma być też $x_1 = 2x_2$, czyli

$$\frac{-(3k-1) + \sqrt{k^2 + 34k - 23}}{2(k^2 - 5k + 3)} = 2 \cdot \frac{-(3k-1) - \sqrt{k^2 + 34k - 23}}{2(k^2 - 5k + 3)} \tag{1}$$

Ponieważ mianownik w obu przypadkach jest taki sam, oznacza to, że mamy do rozwiązania równanie:

$$-(3k-1) + \sqrt{k^2 + 34k - 23} = 2(-(3k-1) - \sqrt{k^2 + 34k - 23}) \tag{2}$$

Grupując wyrazy z pierwiastkiem po jednej stronie, a bez pierwiastka po drugiej stronie równania otrzymujemy:

$$3\sqrt{k^2+34k-23} = -(3k-1) \tag{3}$$

Rozwiązujemy to równanie przez podniesienie do obustronnie do kwadratu:

$$\begin{aligned}(3\sqrt{k^2+34k-23})^2 &= (-(3k-1))^2\\ 9(k^2+34k-23) &= 9k^2-6k+1\\ 306k-23 &= -6k+1\\ 312k &= 24\\ k &= \frac{24}{312} = \frac{1}{13}\end{aligned} \tag{4}$$

Zauważmy, że w wyrażeniu $x1 = \frac{-(3k-1)+\sqrt{k^2+34k-23}}{2(k^2-5k+3)}$ przyjęliśmy arbitralnie znak $+$ przed $\sqrt{\Delta}$, natomiast w x_2 występuje znak $-$. Moglibyśmy również zamienić miejscami pierwiastki. Otrzymalibyśmy wtedy do rozwiązania równanie $3\sqrt{k^2+34k-23} = +(3k-1)$, różniące się od równania 2 jedynie znakiem $+$ napisanym jawnie. Równanie to ma oczywiście to samo rozwiązanie co równanie 2 (jeśli to nie jest oczywiste, proszę to sprawdzić!).

Zadanie 6 Skoro $a^3+pa+q=0$ i $b^3+pb+q=0$, to odejmując stronami dostajemy $a^3-b^3+p(a-b)=0$. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia mamy $(a-b)(a^2+ab+b^2)+p(a-b)=0$, czyli skoro $(a-b)\neq 0$ mamy $a^2+ab+b^2+p=0$, oraz $b^2+bc+c^2+p=0$ i $a^2+ac+c^2+p=0$. Odejmując teraz drugie + trzecie równanie od 2x pierwszego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}0 = 2a^2+2ab+2b^2-a^2-ac-c^2-b^2-bc-c^2 &=\\ a^2+2ab+b^2-bc-ac-2c^2 &=\\ a^2-c^2+ab-ac+b^2-c^2+ab-bc &=\\ (a-c)(a+c)+b(a-c)+(b-c)(b+c)+a(b-c) &=\\ (a-c)(a+b+c)+(b-c)(a+b+c) &=\\ (a+b+c)(a-c+b-c)&\end{aligned} \tag{5}$$

I ponieważ $(a-c)\neq 0$ i $(b-c)\neq 0$ otrzymujemy tezę.