Kartkówka 10 - 20.01.2025

Zadanie za 1 pkt Policz całkę nieoznaczoną

$$\int (3x^2 + 4)dx \tag{84}$$

Zadanie za 2 pkt Policz całkę oznaczoną

$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4} \tag{85}$$

Zadanie za 3 pkt Policz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} \tag{86}$$

Zadanie za 4 pkt Policz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{(2x+1)dx}{(x+2)^2(x^2+2)} \tag{87}$$

Zadanie za 5 pkt Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią x, prostymi $x = 0$, $x = 1$, oraz wykresem funkcji $f(x) = x^2 e^x$

Zadanie za 6 pkt Niech f będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i dla dowolnych α, β takich, że $a < \alpha < \beta < b$ zachodzi:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \tag{88}$$

Pokazać, że f jest tożsamościowo równa 0.

4.4 Kartkówka 10 - rozwiązania

Zadanie za 1 punkt Obliczamy całkę nieoznaczoną:

$$\int (3x^2 + 4)\, dx.$$

Korzystamy z liniowości całki oraz podstawowych wzorów:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Stąd:

$$\int (3x^2 + 4)\, dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x + C.$$

Ostatecznie:

$$\int (3x^2 + 4)\, dx = x^3 + 4x + C.$$

Zadanie za 2 punkty Liczymy całkę oznaczoną:

$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4}.$$

Zauważamy, że:

$$\int \frac{dx}{x-4} = \ln|x-4| + C.$$

A więc całka oznaczona:

$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4} = \ln|8-4| - \ln|6-4| = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2.$$

Zadanie za 3 punkty Rozważamy całkę:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}.$$

Uzupełniamy kwadrat w mianowniku:

$$x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4.$$

Podstawiamy:

$$u = x + 2, \quad du = dx.$$

Otrzymujemy całkę:

$$\int \frac{du}{u^2 + 4}.$$

Korzystamy ze wzoru (który był jednym z zadań na poprzednich kartkówkach):

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Dla $a = 2$ i podstawiając $u = x + 2$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Zadanie za 4 punkty Obliczamy całkę:

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x+2)^2(x^2+2)}.$$

Stosujemy rozkład na ułamki proste:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Po wymnożeniu przez mianownik po lewej stronie dostajemy równość wielomianów:

$$2x+1 = A(x+2)(x^2+2) + B(x^2+2) + (Cx+D)(x+2)^2 \tag{89}$$

Po uporządkowaniu i przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = A + C \quad (\text{przy } x^3) \\ 0 = 2A + B + 4C + D \quad (\text{przy } x^2) \\ 2 = 2A + 4C + 4D \quad (\text{przy } x^1) \\ 1 = 2A + 2B + 4D \quad (\text{przy } x^0) \end{cases} \tag{90}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)^2}$$

Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x+2}\right) + C$$

Zadanie za 5 punktów Pole obszaru ograniczonego osią x, prostymi $x = 0$, $x = 1$ oraz wykresem funkcji $f(x) = x^2e^x$ dane jest całką:

$$P = \int_0^1 x^2e^x\,dx.$$

Stosujemy całkowanie przez części (to dopiero będzie w kolejnym semestrze, ale zgadywać wolno):

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx.$$

Ponownie całkujemy przez części:

$$\int 2xe^x dx = 2(xe^x - e^x).$$

Zatem:

$$\int x^2e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Podstawiamy granice:

$$P = \left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_0^1 = e(1 - 2 + 2) - 2 = e - 2.$$

Zadanie za 6 punktów Załóżmy nie wprost, że istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że

$$f(x_0) \neq 0.$$

Z ciągłości funkcji f wynika istnienie przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$, na którym funkcja zachowuje znak i spełnia:

$$|f(x)| > \varepsilon > 0.$$

Wtedy:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \neq 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem treści zadania.

Sprzeczność dowodzi, że:

$$f(x) = 0 \quad \text{dla każdego } x \in [a,b].$$