Rozdział 1

Najważniejsze funkcje ciągłe

Analiza matematyczna to głównie badanie *funkcji*.

Definicja funkcji

Przez funkcję $f : X \to Y$ rozumiemy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ **dokładnie jednego** elementu $y \in Y$.

Dlaczego zawsze jednego? Bo w innym przypadku byłby spory bałagan. Graficznie wygląda to tak, że na wykresie funkcji, każda pionowa linia przecina wykres funkcji maksymalnie jeden raz.

W tym miejscu warto wprowadzić jeszcze dwa ważne pojęcia. Po pierwsze, można zapytać, ile razy linia pozioma może przecinać wykres funkcji. Oczywiście może przecinać dowolną liczbę razy, ale jeśli przecina ją maksymalnie raz, to to taka sytuacja ma swoją specjalną nazwę - jest to funkcja różnowartościowa. Bardziej formalnie można to ubrać w definicję.

Funkcja różnowartościowa

Powiemy, że funkcja f jest różnowartościowa, gdy dla każdej wartości y istnieje tylko jednak wartość x, dla której $f(x) = y$.

Drugim niezwykle ważnym pojęciem jest ciągłość funkcji.

Funkcja ciągła

Funkcję uznamy (w tym momencie) za ciągłą, jeśli da się narysować jej wykres bez odrywania "ołówka od kartki".

Jest to oczywiście nieścisła, niematematyczna definicja, ale zupełnie wystarczająca na nasze najbliższe potrzeby. Z formalna definicją funkcji ciągłej spotkamy się na późniejszym etapie (Rozdział 3.2).

Funkcje ciągłe stanowią centralnę część w analizie rzeczywistej, wobec czego nasz wykład zaczniemy od powtórzenia najważniejszych funkcji ciągłych.

1.1 Wielomiany

Wielomiany to jedne z najprostszych funkcji ciągłych. Mają postać

$$W(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \tag{1.1.1}$$

Wartość n, czyli najwyższą potęgę zmiennej x nazywamy stopniem wielomianu i piszemy $deg(W(x)) = n$. Liczby $a_i \in \mathbb{R}$ to współczynniki wielomianu. W szczególności współczynnik a_0 to tzw. wyraz wolny. Zwróćmy uwagę, że wielomianami są zarówno funkcje stałe $W(x) = a_0$, funkcje liniowe $W(x) = ax + b$ itd. W dalszym ciągu pokażemy, że znaczną większość funkcji da się przybliżyć wielomianami. Wielomiany są więc dla nas funkcjami podstawowymi.

1.1.1 Rozkład wielomianu na pierwiastki

Jedną z cech wielomianów jest to, że liczba ich pierwiastków (miejsc zerowych) jest ściśle zależna od stopnia wielomianu. Zobaczmy, że pomnożenie wielomianu przez $(x - a)$ powoduje zwiększenie stopnia wielomianu o 1:

$$(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0)(x - a) = a_n x^{n+1} + ... + (a_2 - a)x^2 + (a_1 - a)x + a_0 a \tag{1.1.2}$$

Wobec tego, aby otrzymać stopień wielomianu n należy pomnożyć przez siebie n czynników postaci $(x - a)$. Wielomian (stopnia n) postaci:

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \tag{1.1.3}$$

przyjmuje wartość 0 gdy którykolwiek z nawiasów przyjmuje wartość 0. Ponieważ powyższy wielomian to iloczyn dokładnie n nawiasów, ma no więc dokładnie n miejsc zerowych (niektóre mogą się powtarzać!). Wniosek jest taki, że

Liczba pierwiastków wielomianu

Wielomian stopnia n ma maksymalnie n pierwiastków rzeczywistych.

W rzeczywistości dobrze wiemy, że wielomiany mogą mieć tych pierwiastków mniej. Np. funkcja $W(x) = 7$ nie ma żadnego miejsca zerowego (jest to funkcja stale równa 7). Podobnie funkcja kwadratowa może nie mieć żadnego miejsca zerowego. Okazuje się jednak, że pewne rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych usuwa tę niedogodność:

Zasadnicze twierdzenie algebry

Wielomian stopnia n **ma dokładnie** n pierwiastków **zespolonych**.

Podstawowa teoria liczb zespolonych przedstawiona została w Dodatku A.

Pozostaje problem, jak rozłożyć wielomian na iloczyn czynników liniowych. Oczywiście wielomian stopnia 1 już jest w postaci liniowej. Wiemy też, jak podejść do wielomianu stopnia 2 (zob. Dodatek B.1. Istnieją podobne sposoby dla równań stopnia 3 i 4 (patrz rozdział B.3). Metody te są jednak niepraktyczne w codziennych zastosowaniach. Znacznie prościej można próbować zgadnąć pierwiastki wielomianu. Zwróćmy uwagę na fakt, że po wymnożeniu wszystkich nawiasów w równaniu 1.1.3 okazuje się, że wyraz wolny jest iloczynem wszystkich pierwiastków:

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_n \tag{1.1.4}$$

To oznacza, że dla danego wielomianu można próbować zgadnąć pierwiastki podstawiając kolejne dzielniki wyrazu wolnego. Jest to wniosek z tzw. wzorów Viete'a, wiążących współczynniki wielomianu z jego pierwiastkami.

Zgadywanie pierwiastków wielomianu

Weźmy wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Wyrazem wolnym tego wielomianu jest $a_0 = 6$. Jego całkowite dzielniki to $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$. Sprawdźmy po kolei:

$$\begin{aligned} W(-1) &= -1 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8 \neq 0 \\ W(1) &= 1 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Znaleźliśmy więc jeden pierwiastek $x = 1$. Podobnie możemy pokazać, że:

$$\begin{aligned} W(-2) &= -8 - 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0 \\ W(3) &= 27 - 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0 \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Znaleźliśmy więc wszystkie 3 pierwiastki, a wielomian ma postać:

$$W(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) \tag{1.1.7}$$

Jednak w bardziej skomplikowanym przypadku możemy nie chcieć zgadywać wszystkich pierwiastków. Jeśli znamy jeden pierwiastek $x = x_1$, możemy podzielić wielomian przez czynnik $(x - x_0)$. Jest wiele skróconych metod dzielenia wielomianów, lecz podstawowa własność to taka, że wynik wielomianu musi być wielomianem o stopniu o 1 mniejszym, czyli w naszym przypadku wielomianem stopnia $3 - 1 = 2$. Musi być więc:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) \tag{1.1.8}$$

gdzie wybraliśmy najbardziej ogólną postać wielomianu stopnia 2. Po wymnożeniu mamy:

$$W(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \tag{1.1.9}$$

Wynik musi być zgodny z wyjściowym wielomianem, a to jest możliwe tylko wtedy, kiedy współczynniki przy tych samych potęgach są sobie równe. Dostajemy więc układ równań:

$$\begin{cases} a = 1 \quad \text{współczynniki przy } x^3 \\ b - a = -2 \quad \text{współczynniki przy } x^2 \\ c - b = -5 \quad \text{współczynniki przy } x \\ -c = 6 \quad \text{wyraz wolny} \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Rozwiązaniem tego układu jest oczywiście $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$. Zwróćmy uwagę, że otrzymane wartości muszą być zgodne **z każdym** z 4 równań. Wobec tego wiemy, że

$$W(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) \tag{1.1.11}$$

Równanie kwadratowe już łatwo rozwiązać (choćby korzystając z metody wyróżnika):

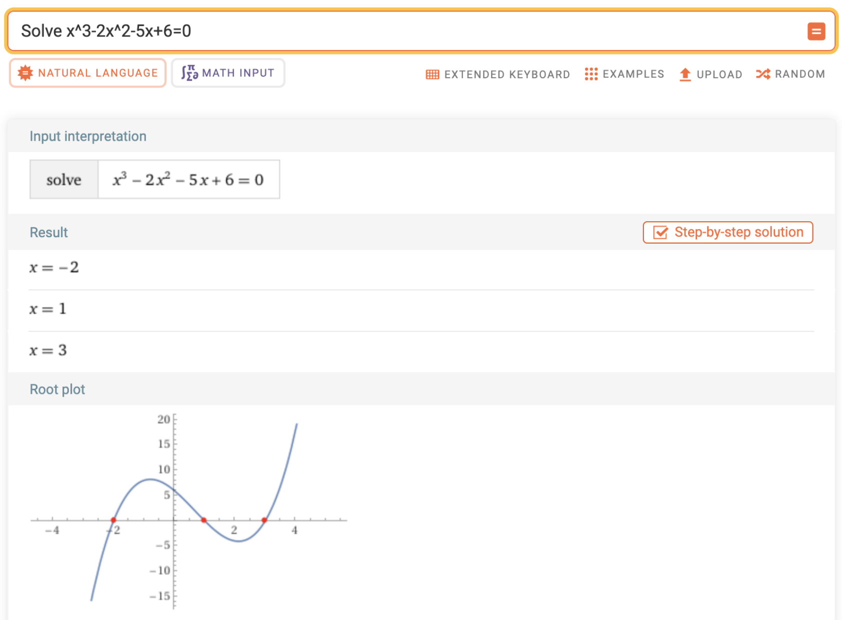
$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \tag{1.1.12}$$

A więc otrzymujemy znowu:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3) \tag{1.1.13}$$

Rozwiązywanie równań w realnych sytuacjach

Oczywiście nie ma pewności, że rozwiązaniem wielomianu są liczby całkowite. Równie dobrze mogłyby to być ułamki, liczby wymierne, czy zespolone. Metoda przedstawiona w poprzedniej sekcji ma więc charakter właściwie tylko teoretyczny i nie nadaje się do realnych zastosowań. Ułatwia jednak zrozumienie pewnych mechanizmów. W przypadku rzeczywistych równań należy wykorzystać metody komputerowe. Jest wiele programów umożliwiających numeryczne rozwiązywanie równań (nie tylko wielomianowych). Jednym z dostępnych pakietów jest np. *wolframalpha.com*. Na podanej stronie internetowej można w dość łatwy sposób (za darmo) dokonywać pewnych obliczeń matematycznych. W szczególności, do rozwiązywania równań służy komenda *Solve*. W szczególności polecenie `Solve x^3-2x^2-5x+6=0` rozwiązuje podane równanie (Rys. 1.1.1).



Rysunek 1.1.1: Przykład rozwiązywania równania wielomianowego za pomocą serwisu WolframAlpha.

1.1.2 Granice w nieskończoności

Co się dzieje z wykresem wielomianu (wartościami funkcji), gdy argument (x) rośnie? Łatwo zauważyć, że np. dla $x = 100$ $x^3 > x^2 > x$. Oczywiście wyższe potęgi rosną jeszcze szybciej. Wobec tego zachowanie funkcji dla dużych wartości argumentu x będzie zdominowane przez zachowanie najwyższej potęgi wielomianu. Dla bardzo dużych wartości x wartość funkcji również będzie bardzo duża (gdy współczynnik a_n przy najwyższej potędze będzie dodatni), albo też bardzo ujemna (dla $a_n < 0$). Bardziej ściśle napiszemy:

$$\lim_{x\to\infty} W(x) = \begin{cases} \infty \Leftrightarrow a_n > 0 \\ -\infty \Leftrightarrow a_n < 0 \end{cases} \tag{1.1.14}$$

Ten napis należy rozumieć tak, że gdy argument (x) rośnie, to wartość funkcji mogą być dowolnie duże (dla $a_n > 0$), większe od jakiejkolwiek liczby rzeczywistej. Oznaczenie lim pochodzi od łacińskiego *limes*, oznaczającego granicę.

W tym momencie granicę należy rozumieć intuicyjnie przez “co się dzieje z wykresem funkcji” dla dużych wartości argumentu x? Poprawną deficję granicy wprowadzimy w dalszej części (Rozdział 3.1).

1.1.3 Wykresy funkcji wielomianowych

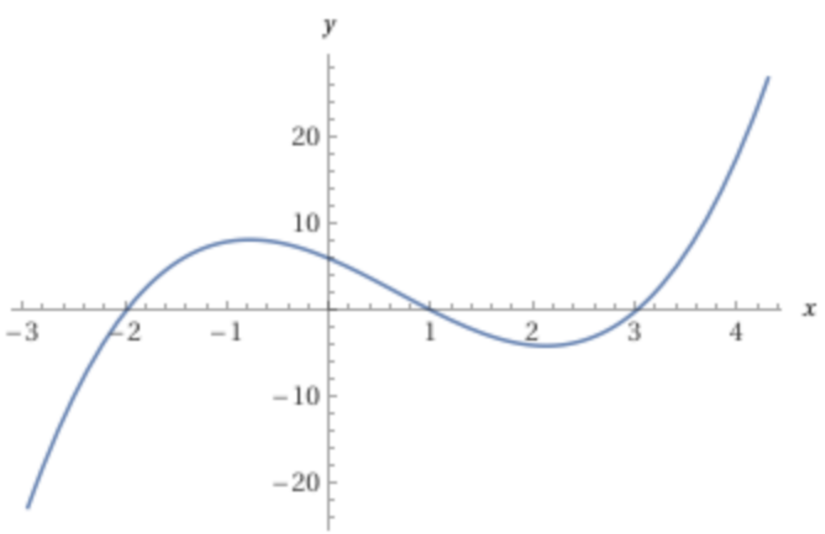
Wyposażeni w umiejętność znajdowania miejsc zerowych wielomianów, oraz określania granicy w nieskończoności możemy w łatwy sposób narysować wykres wielomianu.

Pierwszy przykład wykresu wielomianu

Zabierzmy się za wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Jak wiemy, jego miejsca zerowe to $x = -2$, $x = 1$ i $x = 3$. W dodatku, ponieważ współczynnik przy największej potędze jest dodatni, mamy

$$\lim_{x\to\infty} W(x) = \infty \tag{1.1.15}$$

Musimy więc połączyć linią ciągłą, “gładką” trzy miejsca zerowe i to tak, żeby dla dużych wartości x wykres dążył do nieskończoności. Wykres wielomianu $W(x)$ przedstawiono na rys. 1.1.2.



Rysunek 1.1.2: Wykres funkcji $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ w zakresie $x \in (3, 4)$ otrzymany za pomocą WolframAlpha.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że pomiędzy dwoma (oddzielonymi) miejscami zerowymi wartości wielomianu muszą mieć maksimum (jeśli jest to funkcja dodatnia), lub minimum (jeśli jest to funkcja ujemna). Jeśli pomiędzy każdą parą kolejnych pierwiastków jest ekstremum (maksimum, lub minimum), a pierwiastków jest maksymalnie n, to spodziewamy się, że ekstremów będzie maksymalnie $n-1$. Tę intuicję udowodnimy sobie w następnym rozdziale.

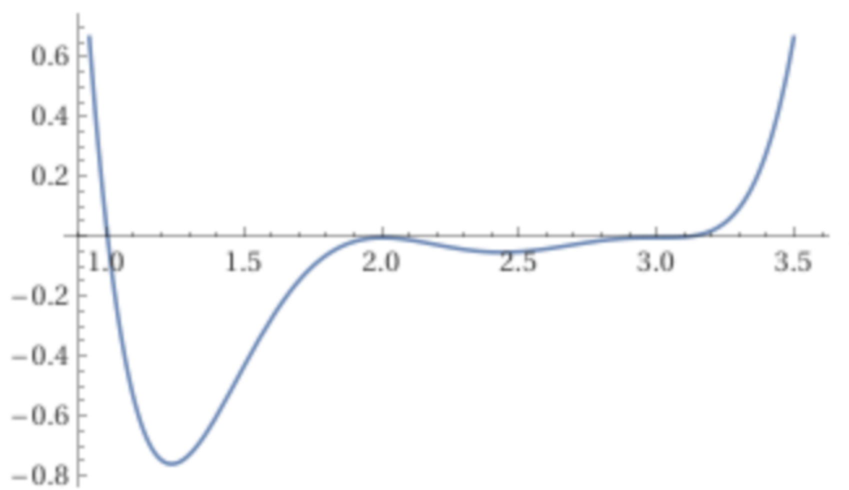
W powyższym przykładzie dopuściliśmy się grubego uproszczenia - milcząco założyliśmy, że wielomian $W(x)$ zmienia znak w swoich miejscach zerowych. W tym wypadku to jest prawda, ale nie dzieje się tak zawsze. Jak wiadomo, wykres funkcji $(x-1)^2$ jest zawsze nieujemny, nie zmienia znaku w $x=1$. I ogólnie, funkcja zmienia znak w swoim miejscu zerowym wtedy, kiedy jest to pierwiastek nieparzystego stopnia, czyli w rozwinięciu występuje w nieparzystej potędze. Gdy jednak występuje w potędze parzystej, funkcja nie zmienia znaku.

Zmiana znaku w miejscu zerowym

Weźmy inny wielomian:

$$W(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 = x^6 - 14x^5 + 80x^4 - 238x^3 + 387x^2 - 324x + 108 \quad (1.1.16)$$

Zgodnie z tym, co napisaliśmy wcześniej, funkcja zmienia znak w $x=1$ i $x=3$. Natomiast w $x=2$ znaku nie zmienia, tylko "dotyka" oś OX. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, dla dużych wartości x wykres funkcji rośnie nieograniczenie. Wykres funkcji przedstawiono na rys. 1.1.3.



Rysunek 1.1.3: Wykres funkcji $W(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Funkcja zmienia znak w $x=1$ (pierwiastek pojedynczy), oraz w $x=3$ (pierwiastek potrójny). Za to w $x=2$ funkcja nie zmienia znaku, gdyż jest to pierwiastek stopnia 2, czyli parzystego.

W razie wątpliwości, czy funkcja zmienia, czy nie zmienia znaku, najprostszą metodą jest policzyć jakąś jej wartość w danym przedziale. Np. w poprzednim przykładzie $W(0) = 108 > 0$, natomiast $W(\frac{3}{2}) = -0.421875 < 0$, a więc funkcja zmienia znak w swoim miejscu zerowym $x=1$.

Podsumowanie

- Funkcja wielomianowa stopnia n ma maksymalnie n pierwiastków rzeczywistych;
- Ma też maksymalnie $n-1$ ekstremów (minimów bądz maksimów lokalnych);
- Miejsca zerowe wielomianu są dzielnikami wyrazu wolnego;
- Granica w nieskończoności to $\pm\infty$, gdzie znak zależy od znaku współczynnika przy najwyższej potędze ($+\infty$, gdy $a_n > 0$);
- To, czy funkcja zmienia znak w swoim miejscu zerowym zależy od krotności pierwiastka (zmienia, gdy pierwiastek występuje w nieparzystej potędze).

1.1.4 Wzory skróconego mnożenia

W tym miejscu warto przypomnieć jeszcze wzory skróconego mnożenia:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$

1.1.5 Zadania

Narysuj w przybliżony sposób wykresy następujących funkcji (znajdź miejsca zerowe i granice w nieskończonościach):

- $f(x) = 2$
- $f(x) = 3x - 2$
- $f(x) = -x^2 + 3x - 2$
- $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$
- $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$
- $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$
- $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$
- $f(x) = -2x^4 + 8x - 6$

1.2 Pierwiastki

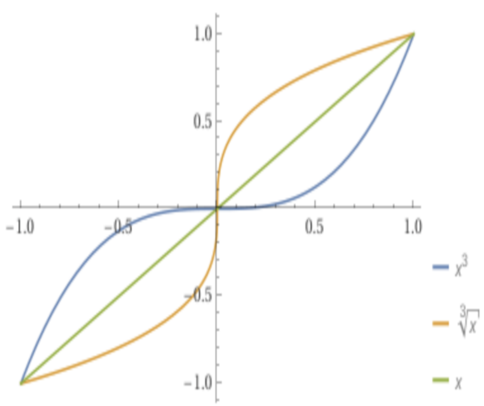
Pierwiastek jest funkcją odwrotną do podnoszenia do potęgi. Konkretnie piszemy:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \tag{1.2.1}$$

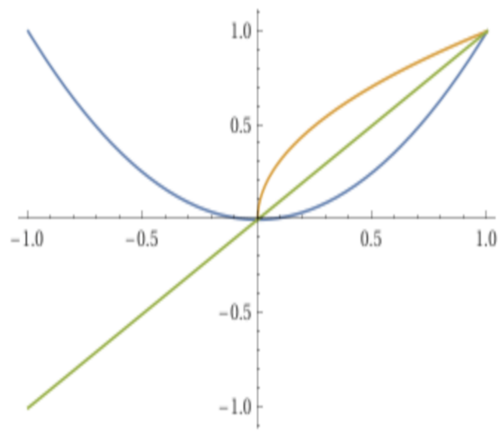
Funkcja odwrotna określona jest jedynie dla funkcji różnowartościowej, bo tylko dla takiej funkcji równanie $f(x) = y$ da się jednoznacznie rozwiązać ze względu na x. Tu pojawia się jednak problem. Wielomian $y = x^n$ jest funkcją różnowartościową, gdy n jest liczbą nieparzystą. Dla parzystych $n = 2k$ mamy $(-x)^{2k} = x^{2k} \geq 0$. A więc po pierwsze, dziedziną funkcji odwrotnej jest zbiór $[0, \infty)$, a pierwiastek (dla parzystego stopnia n) definiujemy jako jego wartość dodatnią.

1.2.1 Wykres funkcji pierwiastek

Wykresy funkcji odwrotnych łatwo otrzymać z funkcji, którą odwracamy, gdyż jest to odbicie wykresu funkcji względem osi $y = x$. Dla $f(x) = \sqrt[3]{x}$ odbicie jest możliwe (bo funkcja jest różnowartościowa na całej prostej rzeczywistej). Natomiast dla $f(x) = \sqrt{x}$ dla funkcji $y = x^2$ wybieramy gałąź $x \geq 0$ (bo jest to dziedzina funkcji f) i tylko ją odbijamy. Wykresy pierwiastków prezentuje Rys. 1.2.1.



(a) Wykres funkcji x^3 (niebieski), funkcji odwrotnej $\sqrt[3]{x}$ (pomarańczowy). Dla porównania, oś odbicia $y = x$ (zielony).



(b) Wykres funkcji x^2 (niebieski), funkcji odwrotnej $\sqrt{x}$ (pomarańczowy). Dla porównania, oś odbicia $y = x$ (zielony). Funkcja odwrotna $\sqrt{x}$ określona jest tylko dla $x \geq 0$.

Rysunek 1.2.1: Przykłady wykresów funkcji typu pierwiastek.

1.2.2 Granice funkcji pierwiastek

Dla jakich wartości x funkcja x^n rośnie nieograniczenie (czyli $x^n \to \infty$)? Oczywiście dla $x \to \infty$. Wobec tego mamy:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty \tag{1.2.2}$$

Dla każdej wartości n, co jest zgodne z wykresami na Rys. 1.2.1.

1.3 Funkcja wykładnicza

Zamieńmy teraz symbole miejscami. Rozpatrywaliśmy np. funkcję $f(x) = x^2$, spójrzmy teraz na funkcję $f(x) = 2^x$. Dla naturalnych wartości $x = n \in \mathbb{N}$ wiadomo, jak ta funkcja wygląda. Konkretnie mamy

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot 2}_{n \text{razy}} \tag{1.3.1}$$

Jak taka funkcja ma wyglądać dla dowolnych wartości x, nie tylko dla naturalnego wykładnika?

1.3.1 Własności funkcji wykładniczej

Wprost z definicji dla naturalnego wykładnika dostajemy równość:

$$2^{n+m} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot 2}_{n+m \text{razy}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot 2}_{n \text{razy}} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot 2}_{m \text{razy}} = 2^n \cdot 2^m \tag{1.3.2}$$

Zauważmy, że ta równość jest spełniona dla dowolnej podstawy $a > 0$, nie tylko dla $a = 2$. Stąd wynika najważniejsza równość dla funkcji wykładniczej:

Najważniejsza równość dla funkcji wykładniczej

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \tag{1.3.3}$$

Która chcemy, żeby była spełniona dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności mamy

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot ... \cdot a^n}_{m \text{razy}} = a^{nm} \tag{1.3.4}$$

Ponieważ $a^1 = a$, to znaczy, że $a = a^{n\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^n$, a więc

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{1.3.5}$$

To oznacza, że wiemy, jaka jest wartość funkcji a^x dla każdego ułamka dodatniego. Podobnie $a = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0$, a więc:

$$a^0 = 1 \tag{1.3.6}$$

dla każdego $a > 0$. W związku z tym, $1 = a^0 = a^{x-x} = a^n \cdot a^{-x}$. A stąd mamy:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{1.3.7}$$

1.3.2 Granice funkcji wykładniczej

Łatwo jest zauważyć, że dla $a > 1$ mamy $a^{n+1} = a \cdot a^n > a^n$ dla dowolnego $n > 0$. Wobec tego musi zachodzić:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \text{dla } a > 1 \tag{1.3.8}$$

Podobnie, ponieważ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ to dla $a > 1$ mamy:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} a^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \tag{1.3.9}$$

Gdy natomiast $0 < a < 1$, to $1/a > 1$. Korzystając więc z poprzedniego stwierdzenia otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \text{dla } 0 < a < 1 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \quad \text{dla } 0 < a < 1 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Gdy $a = 1$ mamy oczywiście $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$.

Stała podstawa

Uwaga, granica równa jest 1 tylko, jeśli podstawa jest stale równa 1. Jeśli w podstawie jest zmienna x, to nie będzie tak łatwo. Właściwie jest to jeden z symboli nieoznaczonych, które mogą przyjmować dowolną wartość!

Otrzymane wyniki można zapisać w inny sposób:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases} \tag{1.3.11}$$

A także:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \end{cases} \tag{1.3.12}$$

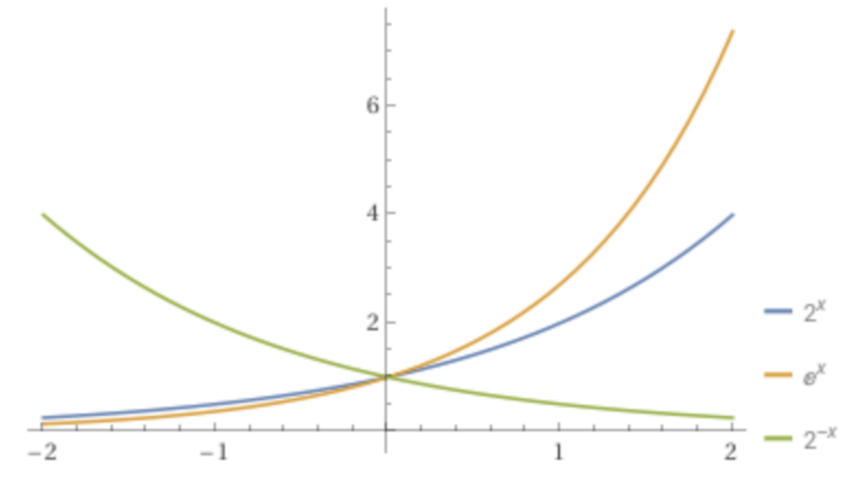
1.3.3 Wykres funkcji wykładniczej

Wykonana analiza pozwala narysować pełny wykres funkcji wykładniczej. Wykres taki przedstawiono dla kilku przypadków na Rys. 1.3.1. Wśród wykresów narysowano też funkcję wykładniczą e^x, gdzie $e \simeq 2,718281828459$ jest pewną liczbą niewymierną (podobnie do π).

Zwróćmy uwagę na kilka faktów:

Funkcja wykładnicza

1. Bez względu na podstawę, wszystkie funkcje wykładnicze przyjmują wartość 1 dla $x = 0$.
2. Funkcja $(1/2)^x$, jak również dowolna funkcja a^x przy $0 < a < 1$ maleje, podczas gdy funkcje o podstawie $a > 1$ są stale rosnące.
3. Różnica pomiędzy wykresami dla funkcji 2^x i e^x różniących się podstawą to jedynie kąt nachylenia - im większa podstawa, tym funkcja szybciej rośnie.
4. Zbiór wartości funkcji wykładniczej to liczb zbiór rzeczywistych, dodatnich.
5. Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa na całej prostej rzeczywistej.

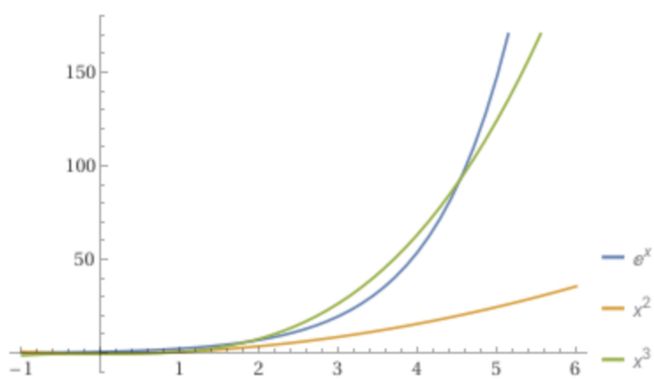


Rysunek 1.3.1: Wykres funkcji 2^x (niebieska), e^x (pomarańczowa) i $(1/2)^x$ (zielona).

Skoro wszystkie funkcje wykładnicze wyglądają podobnie, to można wybrać jedną, reprezentatywną funkcję wykładniczą. Taką "wzorcową" funkcją wykładniczą jest $f(x) = e^x$. Czemu tak sobie utrudniać życie i jako podstawę wzorcowej funkcji wykładniczej dawać liczbę niewymierną? Okazuje się, że zarówno ta funkcja, jak i podstawa e pojawia się bardzo często w matematyce, więc jest to dość naturalny wybór.

1.3.4 Porównanie z wykresem funkcji wielomianowej

Zauważmy jeszcze jedną rzecz. Jeśli porównamy ze sobą funkcję wykładniczą e^x i wielomian x^2 lub x^3 (Rys. 1.3.2), to od pewnego $x > 0$ wartości funkcji wykładniczej są większe . Co więcej, okazuje się, że funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż jakikolwiek wielomian x^n. Spostrzeżenie to sformalizujemy w kolejnych rozdziałach.



Rysunek 1.3.2: Wykres funkcji e^x (niebieska) w porównaniu z x^2 (pomarańczowa) i x^3 (zielona).

1.3.5 Zadania

Oblicz wartość następujących warażeń:

- $4^{\frac{1}{2}}$
- 3^{-2}
- $8^{\frac{7}{3}}$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Uprość następujące wyrażenia:

- $e^x e^{2x}$
- $\frac{e^x}{e^{2x}}$
- $(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})$
- $(e^{2x})^{2x}$

Rozwiąż następujące równania:

- $e^{4x+1} = 1$
- $e^{4x^2} = -1$
- $2^x = 16$
- $2^{-3x} = 8$

1.4 Logarytm

Jeśli mamy wartość funkcji $x^2 = 4$, to aby obliczyć argument x stosujemy funkcję odrotną do funkcji $f(x) = x^2$, czyli $\sqrt{x}$. Mamy więc $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. A co jeśli mamy wartość $2^x = 8$ i chcemy znaleźć argument x? Oczywiście wiemy, że $2^3 = 8$, więc rozwiązaniem równania jest $x = 3$. Ponieważ funkcja 2^x jest różnowartościowa i zbiór jej wartości to zbiór liczb dodatnich (patrz własności funkcji wykładniczej), to dla każdego $y \in (0, \infty)$ istnieje rozwiązanie równania $2^x = y$. Rozwiązanie to nazywamy logarytmem (przy podstawie 2). Faktycznie znajdujemy funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej, która istnieje dla dowolnego $x > 0$, gdyż taki jest zbiór wartości funkcji wykładniczej. Piszemy więc:

$$\log_2(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 2^y = x \tag{1.4.1}$$

Ponieważ wzorcową funkcją wykładniczą jest funkcja e^x, to logarytm przy podstawie e ma swoją specjalną nazwę - jest to logarytm naturalny (bez podstawy). Piszemy wtedy:

$$\ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x \tag{1.4.2}$$

Logartym odpowiada na pytanie “Do jakiej potęgi należy podnieść podstawę logarytmu, żeby otrzymać zadaną liczbę?”.

1.4.1 Własności funkcji logarytm

Skoro logarytm jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej, to własności funkcji wykładniczej implikują własności funkcji logarytmicznej. Konkretnie, jeśli mamy $a^x = s$ i $a^y = t$ dla pewnych $s, t, x, y \in \mathbb{R}$ $(s, t > 0)$ i podstawy $a > 0$ i skoro $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ mamy:

$$\log_a(s \cdot t) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = \log_a(s) + \log_a(t) \quad (1.4.3)$$

Otrzymana równość jest równością definiującą logarytm, bez względu na podstawę logarytmu a. Innymi słowy, logarytm iloczynu to suma logarytmów.

Najczęstszy błąd dotyczący funkcji logarytmicznej

Logarytm przekształca iloczyn na sumę, ale nie odwrotnie! W szczególności:

$$\log_a(x + y) \neq \log_a(x) + \log_a(y) \quad (1.4.4)$$

Dodatkowo $\log_a(x + y)$ nie jest też iloczynem logarytmów, ani nie przekształca się na nic. Jeśli widzisz w równaniu $\log_a(x + y)$ (dla dowolnych x, y), to to ma tak pozostać!

Mając najważniejszą własność logarytmu łatwo jest pokazać kilka innych jego własności. W szczególności, możemy łatwo policzyć wartość dla $x = 1$:

$$\log_a(1) = \log_a(1 \cdot 1) = \log_a(1) + \log_a(1) \quad (1.4.5)$$

Po przeniesieniu $\log_a(1)$ na jedną stronę i zredukowaniu otrzymujemy $\log_a(1) = 0$ (bez względu na podstawę $a > 0$). Poza tym, skoro $\log_a(1) = 0$, możemy policzyć $\log_a x^{-1}$:

$$0 = \log_a(1) = \log_a(x \cdot x^{-1}) = \log_a(x) + \log_a(x^{-1}) \quad (1.4.6)$$

A więc musi być $\log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$. A w związku z tym:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (1.4.7)$$

Podobnie możemy pokazać, że:

$$\log_a(x^n) = \log_a(x \cdot x \cdot x ... x) = \log_a(x) + \log_a(x) + ... + \log_a(x) = n \log_a(x) \quad (1.4.8)$$

Czyli logartym “wyrzuca” potęgę przed funkcję. Wreszcie wypada pokazać, jak zmienia się wartość logarytmu po zmianie podstawy. Jeśli $\log_a(x) = y$, to $a^y = x$. Wtedy dla innej podstawy $b > 0$ mamy:

$$\log_b(x) = \log_b(a^y) = y \log_b(a) = \log_a(x) \log_b(a) \quad (1.4.9)$$

Stąd otrzymujemy:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x) \quad (1.4.10)$$

Otrzymany na końcu wzór na zamianę logarytmów pokazuje, że każda funkcja logarytm powstaje z innej jedynie przez przemnożenie przez stały czynnik $(\frac{1}{\log_b(a)})$. To jest coś jakby zamiana jednostek - raz mierzymy odległość w kilometrach, raz w milach. To znów oznacza, że możemy się skupić na jednym logartymie (naturalnym), a wszystkie inne funkcje logarytmiczne otrzymany z logarytmu naturalnego przez przemnożenie przez stały czynnik.

1.4.2 Dziedzina i granice funkcji logarytm

Funkcja logarytm, podobnie jak pierwiastek stopnia parzystego określona jest jedynie dla dodatnich argumentów. Wynika to stąd, że zbiorem wartości jej funkcji odwrotnej (wykładniczej) są liczby dodatnie. Skoro mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} e^x &= \infty \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

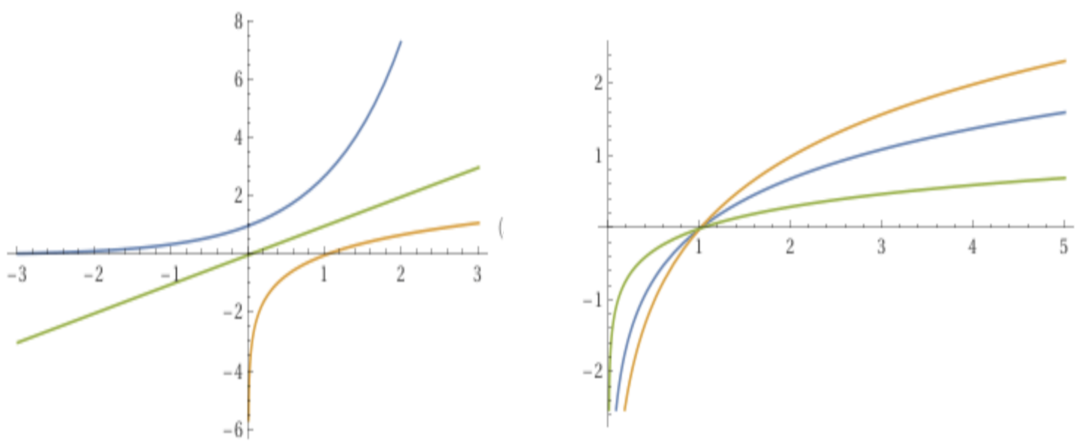
Musi zachodzić:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \ln(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to\infty} \ln(x) &= \infty \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Ponieważ każda funkcja logarytmiczna powstaje przez przemnożenie logarytmu naturalnego przez stały czynnik, to te same granice są prawdziwe dla dowolnego logarytmu.

1.4.3 Wykres funkcji logarytm

W tym momencie mamy już wszystkie informacje potrzebne do narysowania wykresu funkcji logarytmicznej. Zróbmy jednak inaczej. Ponieważ logarytm naturalny jest funkcją odwrotną do funkcji e^x, to wykres funkcji $f(x) = \ln(x)$ powstaje z wykresu $f(x) = e^x$ przez odbicie względem osi $y = x$. Wykres taki pokazuje Rys. 1.4.1 (lewy panel). Zwróćmy uwagę, że zgadzają się wszystkie własności funkcji logarytmicznej - dziedzina, granice na jej brzegach, oraz wartość w $x = 1$.



(a) Wykres funkcji e^x (niebieski), funkcji odwrotnej $\ln(x)$ (pomarańczowy). Dla porównania, oś odbicia $y = x$ (zielony).

(b) Wykres funkcji $\ln(x)$ (niebieski), $\log_2(x)$ (pomarańczowy) oraz $\log_{10}(x)$ (zielony).

Rysunek 1.4.1: Przykłady wykresów funkcji typu pierwiastek.

Ponieważ wszystkie funkcje logarytmiczne powstają z funkcji $f(x) = \ln(x)$ przez przemnożenie przez stałą, wszystkie wykresy wyglądają bardzo podobnie. Trzy przykłady pokazuje Rys. 1.4.1 (prawy panel).