

## Kolokwium grupowe z pochodnych - 09.12.2025

**Zadanie 1** Udowodnij następującą równość:

$$2\arctg(x) + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad (49)$$

dla  $x \geq 1$ .

**Zadanie 2** Wykaż, że dla  $x > 0$  zachodzi:

$$0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 < \frac{5}{81}x^3 \quad (50)$$

**Zadanie 3** Zbadaj przebieg zmienności i narysuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad (51)$$

**Zadanie 4** Policz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x)} - 1}{2 \sin^2 x - 1} \quad (52)$$

**Zadanie 5** Udowodnij że nierówność:

$$2x\arctg(x) \geq \ln(1+x^2) \quad (53)$$

zachodzi dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$

**Zadanie 6** Pokaż, że równanie  $x^3 + x - 3 = 0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale  $(1, 2)$