

3 Zadania przygotowawcze z analizy funkcji

3.1 Granice

Policz granice następujących funkcji. W przypadku granic w punkcie policz obie granice jednostronne (zbliżając się do punktu z każdej ze stron).

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4 + x^2}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x}{10x^3 + 7}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^4 + 2}}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x \sin x}{x^2}$

3.2 Znajdowanie ekstremów

Znajdź ekstrema następujących funkcji. Określ, czy jest to minimum, czy maksimum, czy też żadne z nich.

1. $f(x) = x^3 - 3x.$

6. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$

7. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$

3. $f(x) = x^3 + x^2.$

8. $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}.$

4. $f(x) = -x^4 + 4x^2.$

9. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$

5. $f(x) = x^5 - 5x.$

10. $f(x) = \frac{1}{x} + x.$

$$11. f(x) = e^x - x.$$

$$12. f(x) = xe^{-x}.$$

$$13. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$14. f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

$$15. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$16. f(x) = \sin x + \cos x.$$

$$17. f(x) = x \sin x.$$

$$18. f(x) = \cos(2x) - x.$$

$$19. f(x) = \sin x - x^2.$$

$$20. f(x) = \sin^2 x - \cos x.$$

3.3 Analiza wykresu

Przeprowadź pełną analizę wykresu poniższych funkcji - określ dziedzinę, policz granice, pochodną, policz ekstrema i narysuj wykres.

$$1. f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$3. f(x) = e^x - 2x$$

$$4. f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$5. f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$6. f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - x$$

$$7. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$8. f(x) = \ln(1 + e^x)$$

$$9. f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$10. f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$12. f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$14. f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

$$15. f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 + x - 6}$$