

Kartkówka 9 - 13.01.2025

Zadanie za 1 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int e^{-3x} dx \quad (70)$$

Zadanie za 2 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (71)$$

Zadanie za 3 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2 x} dx \quad (72)$$

Zadanie za 4 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})}{4 + x^2} dx \quad (73)$$

Zadanie za 5 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \quad (74)$$

Zadanie za 6 pkt Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na przedziale $[0, 1]$. Policz całkę:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx \quad (75)$$

4.3 Kartkówka 9 - rozwiązania

Zadanie za 1 punkt Rozważamy całkę

$$\int e^{-3x} dx.$$

Wykonujemy podstawienie

$$u = -3x \quad \Rightarrow \quad du = -3 dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{3} du.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\int e^{-3x} dx = \int e^u \left(-\frac{1}{3} du \right) = -\frac{1}{3} \int e^u du.$$

Całkując:

$$-\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

Zadanie za 2 punkty Rozważamy całkę

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0.$$

Zadanie to możemy rozwiązywać na kilka sposobów. **Sposób 1** Najbardziej podobną całką, którą znamy, jest $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) + C$. Spróbujmy więc sprowadzić tę całkę do całki, którą znamy:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} \quad (76)$$

Przy podstawieniu $t = \frac{x}{a}$ mamy $dt = \frac{dx}{a}$, więc $dx = a \cdot dt$. Więc całka, którą mamy policzyć to:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a \cdot dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \arctg(t) + C \quad (77)$$

Teraz przypominamy sobie, że $t = \frac{x}{a}$, skąd dostajemy ostatecznie, że:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (78)$$

Sposób 2 Wykonujemy podstawienie

$$x = a \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt.$$

Po podstawieniu mianownik ma postać

$$a^2 + x^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t) = \frac{a^2}{\cos^2 t}.$$

Zatem całka przyjmuje postać

$$\int \frac{\frac{a}{\cos^2 t} dt}{\frac{a^2}{\cos^2 t}} = \frac{1}{a} \int dt.$$

Całkując, otrzymujemy

$$\frac{1}{a} t + C.$$

Wracając do zmiennej x , mamy $t = \left(\frac{x}{a}\right)$, więc

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Zadanie za 3 punkty Dana jest całka

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2 x} dx$$

Znów mamy kilka sposobów jej obliczenia.

Sposób 1 Po pierwsze, zauważmy, że $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Wobec czego podstawiając:

$$t = \operatorname{tg}(x) \tag{79}$$

otrzymujemy $dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$. A więc wyjściowa całka po tym przekształceniu zamienia się na:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2 x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + C_1 \tag{80}$$

Sposób 2 Najpierw zapisujemy funkcje trygonometryczne w postaci sinusów i cosinusów:

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

Otrzymujemy całkę

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$$

Wykonujemy podstawienie

$$t = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin x dx.$$

Po podstawieniu:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int t^{-3} dt.$$

Całkujemy:

$$- \int t^{-3} dt = - \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{2t^2} + C_2.$$

Wracając do zmiennej x :

$$\frac{1}{2 \cos^2 x} + C_2.$$

Tu pojawia się ciekawostka - wyniki się różnią. Ale jeśli tylko funkcje te różnią się o stały składnik, to jest wszystko w porządku (składnik ten jest częścią zmiennej całkowania). Sprawdźmy więc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2(x) \right) = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (81)$$

Czyli wyniki różnią się tylko o stałą. A więc jest wszystko w porządku.

Zadanie za 4 punkty Rozważamy całkę

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx.$$

Wykonujemy podstawienie

$$t = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Obliczamy różniczkę:

$$dt = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{2 dx}{4 + x^2}.$$

Zatem całka przechodzi w

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int t dt.$$

Całkujemy:

$$\frac{1}{2} \int t dt = \frac{t^2}{4} + C.$$

Wracając do zmiennej x , otrzymujemy

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Zadanie za 5 punktów Dana jest całka

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Najpierw rozkładamy mianownik na czynniki:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Stąd:

$$1 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Równość tych wielomianów możemy wykorzystać do policzenia stałych A i B na dwa sposoby: **Sposób 1 (kanoniczny)** Skoro wielomiany mają być równe, to równe muszą być współczynniki przy wszystkich potęgach x . Skoro mamy:

$$1 = x(A + B) + (-3A - 2B) \quad (82)$$

Wobec tego dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = A + B & (\text{przy } x^1) \\ 1 = -3A - 2B & (\text{przy } x^0) \end{cases} \quad (83)$$

Ten układ łatwo rozwiązać, skoro z pierwszego równania mamy, że $A = -B$. Musi być więc, że:

$$A = -1, \quad B = 1$$

Sposób 2 Ponieważ wielomiany mają być równe dla każdego x , czasem prościej jest po prostu podstawić konkretną wartość x . Podstawiając więc $x = 2$ i $x = 3$, dostajemy od razu

$$A = -1, \quad B = 1.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(-\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} \right) dx.$$

Całkując:

$$-\ln|x - 2| + \ln|x - 3| + C = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C.$$

Zadanie za 6 punktów Rozważamy całkę

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1 - x)} dx,$$

gdzie funkcja f jest ciągła na $[0, 1]$.

Wykonujemy podstawienie

$$x = 1 - t \quad \Rightarrow \quad dx = -dt.$$

Zmieniając granice całkowania:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$I = \int_1^0 \frac{f(1 - t)}{f(1 - t) + f(t)} (-dt) = \int_0^1 \frac{f(1 - x)}{f(x) + f(1 - x)} dx.$$

Dodajemy obie postacie całki:

$$2I = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \int_0^1 1 dx.$$

Stąd

$$2I = 1 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}.$$