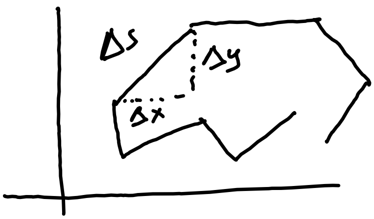
Wykorzystanie całki w geometrii

A) Długość krzywej



$\varphi(t)$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$ z tw. Pitagorasa.

$$s = \sum \Delta s$$

W przypadku ciągłym:

$$\varphi(t) = (x(t), y(t))$$

$$\Delta x \longrightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta y \longrightarrow \frac{dy}{dt}$$

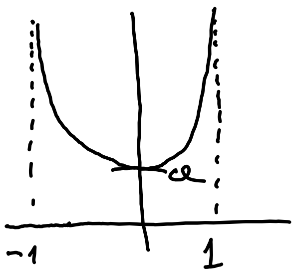
$$\Delta s \longrightarrow ds$$

więc $$s = \int ds = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

gdy mamy zależność $y(x)$

Przykład

1) Krzywa Łańcuchowa $y = a\cosh\frac{x}{a}$



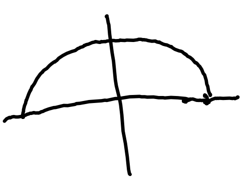
$$\frac{dy}{dx} = a\sinh\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a} = \sinh\frac{x}{a}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\sinh^2\frac{x}{a} = \cosh^2\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \quad s = \int_{-1}^{1}\cosh\frac{x}{a}\,dx = a\sinh\frac{x}{a}\Big|_{-1}^{1} = a\sinh\frac{1}{a} - a\sinh\frac{-1}{a} =$$

$$= \underline{\underline{2a\sinh 1/a}}$$

2) Okręg



$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x \in [-1,1]$$

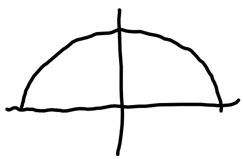
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$L = 2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\cdot\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = 2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \underline{2\pi}$$

3 Pole

Pole koła



$$y = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

$$P = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Liczymy $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

jeśli $x = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

wtedy $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos(t)$

i mamy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(t)\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt$$

$$\begin{array}{l} \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ + \ \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \\ \hline 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int \cos 2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

C. Objętość bryły obrotowej składa się z walców o polu podstawy πy^2 i grubości dx

$$V = \int \pi y^2 \, dx$$

Kulę otrzymujemy obracając półkole pod funkcją $y = \sqrt{1-x^2}$.

Więc

$$V_k = \int_{-1}^{1} \pi (1-x^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\pi - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}}$$

dla n wymiarów $V = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} r^n & n = 2k \\ \frac{2^k \pi^{k-1}}{n!!} r^n & n = 2k-1 \end{cases}$

D. Pole powierzchni bryły obrotowej składa się z walców o promieniu y i wysokości $dl = \sqrt{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

Każdy taki walec ma pole powierzchni $dS = 2\pi y \cdot dl \Rightarrow$

$$\Rightarrow dS = 2\pi\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

więc $S = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

Dla kuli:

$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

więc $S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = \underline{\underline{4\pi}}$

E Wzór Wallisa

Możemy pokazać (i pokażemy) że

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\,dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2} & \text{dla } m \text{ parzystego} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{dla } m \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

Ponieważ zachodzi w przedziale $[0, \pi/2]$:

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x)$$

mamy
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}(x)\,dx$$

a więc mamy:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

lub $$\underbrace{\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}}_{a_n} < \pi/2 < \underbrace{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}}_{\substack{\| \\ b_n}}$$

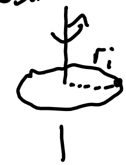
$$b_n - a_n = \frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\,\pi/2 \to 0$$

więc a_n i b_n dążą do tej samej granicy

a więc $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}$$

F Moment bezwładności

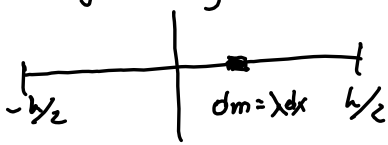
$$\underline{I} = \sum m_i r_i^2$$



$$\Downarrow$$

$$\underline{I} = \int r^2 dm$$

a) cienki, jednorodny pręt:

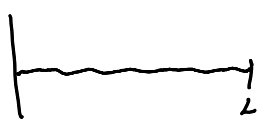


$$\Rightarrow \underline{I} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3} \frac{L^3}{8} \cdot 2$$

ponieważ $\lambda = \frac{m}{L} \Rightarrow$

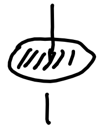
$$\underline{I} = \frac{mL^2}{12}$$

b) Pręt, oś obrotu przez koniec



$$\underline{I} = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{m}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}$$

c) cienki dysk o masie m i promieniu r



dzielimy dysk na krążki o promieniu x i grubości dx.

więc ich powierzchnia to $2\pi x \cdot dx$, a element masy to

$\sigma\, 2\pi x dx$ gdzie σ to $\frac{m}{\pi r^2}$

więc $dI = x^2 \frac{m}{\pi r^2} \cdot 2\pi x dx = \frac{2m}{r^2} x^3 dx$

stąd $I = \int_0^r \frac{2m}{r^2} x^3 dx = \frac{2m}{r^2} \frac{x^4}{4}\Big|_0^r = \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}$

d) Jednorodna kula

dzielimy kulę na jednorodne dyski o grubości dx

każdy dysk ma element masy $dm = \rho \cdot \pi r^2 dx$

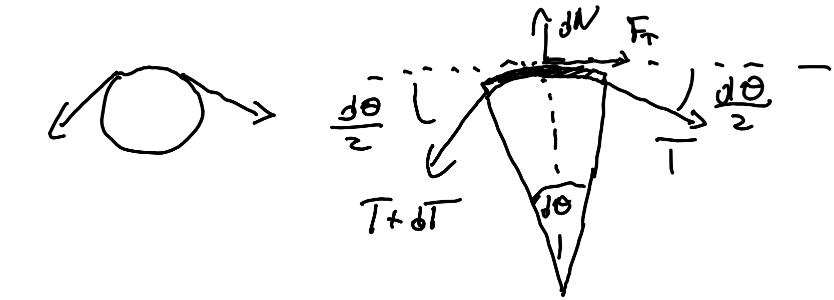
gdzie $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

stąd $dI = \frac{r^2}{2} dm = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \pi r^2 dx = \frac{3M}{8R^3} r^4 dx$

ale $r^2 = R^2 - x^2$

stąd $dI = \frac{3M}{8R^3} (R^2 - x^2) dx \Rightarrow I = \int_0^R dI = \frac{2}{5} M R^2$

6 Siła tarcia liny



$$F_{NET_x} = 0 = T\cdot\cos\frac{d\theta}{2} + (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} + F_T$$

$$\Rightarrow \quad F_T = \mu\, dN = dT\cos\frac{d\theta}{2}$$

kierunek prostopadły:

$$F_{NET_y} = 0 = dN - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dN = 2T\sin\frac{d\theta}{2} + dT\sin\frac{d\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(2T\sin\frac{d\theta}{2} + dT\sin\frac{d\theta}{2}\right) = dT\cos\frac{d\theta}{2}$$

$$\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad \cos\frac{d\theta}{2} \approx 1 \qquad \Rightarrow dT\sin\frac{d\theta}{2} \simeq 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu 2T\frac{d\theta}{2} = dT$$

$$\Rightarrow \quad \mu\, d\theta = \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \mu\theta = \ln T \quad \Rightarrow \quad T = e^{\mu\theta} + C$$

11 POLE ELEKTRYCZNE OD ROZKŁADU ŁADUNKÓW

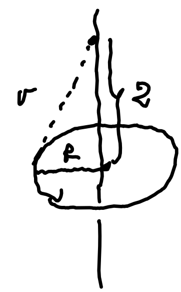
→ Pole elektryczne naładowanego pierścienia

Pole elektryczne od ładunku q: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

Dla pierścienia o promieniu R i ładunku q mamy gęstość liniową $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

Element ładunku to $dq = \lambda dL$

Więc element pola to



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dL}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dL}{z^2+R^2}$$

składowa pionowa

$$\cos\Theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

więc $$dE\cos\Theta = \frac{z\lambda dL}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

czyli

$$E = \int dE\cos\Theta = \int_0^{2\pi}\frac{z\lambda dL}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{z\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

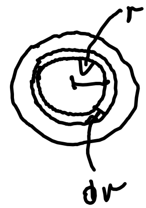
skoro $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ to

$$E = \frac{zq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

gdy $z \gg R$ to mamy ładunek punktowy $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$

→ Pole od naładowanej płyty

płytę dzielimy na pierścienie o grubości dr i promieniu r



Pole takiego pierścienia to $2\pi r \cdot dr$

Jeśli ładunek całej płyty to Q, a pole to πR^2, to gęstość ładunku to $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

pole od pierścienia to

$$dE = \frac{z\, dq}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{z\,\sigma\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

to $$E = \int_0^R dE = \int_0^R \frac{z\,\sigma\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

gdy mamy płaszczyznę to $R \to \infty$

więc pole od naładowanej płaszczyzny to

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

niezależnie od odległości z!

II Energia wewnętrzna gazów

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}$$

średnie v^2 to $$\overline{v^2_{śr}} = \int_0^\infty v^2 P(v)\, dv = \frac{3RT}{M}$$ →

więc średnia energia kinetyczna cząsteczki gazu to

$$\frac{M v_{śr}^2}{2} = \frac{\cancel{M}}{2} \cdot \frac{3RT}{\cancel{M}} = \frac{3}{2} RT$$

Ponieważ energia wewnętrzna to suma energii kinetycznych cząsteczek, to

$$E_w = \frac{3}{2} nRT$$ gdzie n to liczba moli