Rozwiazywanie układów równań

Mamy układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Możemy go rozwiązać na kilka sposobów:

1) Podstawienie

Z pierwszego równania $x = 8 - 2y$, więc $2x = 16 - 4y$.
Wstawiając do drugiego równania mamy:

$\underbrace{16 - 4y}_{2x} - y = 1$, a więc $16 - 5y = 1$, czyli $5y = 15$ i $y = 3$.

Ponieważ $x = 8 - 2y \Rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 = 2$

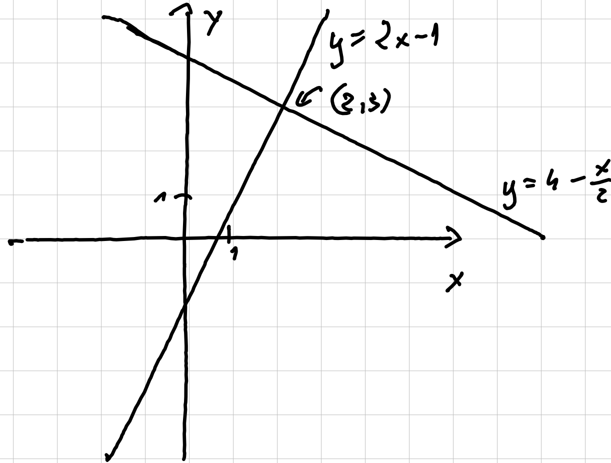
Więc otrzymujemy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2) Metoda graficzna - niedokładna, ale może służyć zbudowaniu intuicji w bardziej skomplikowanych przypadkach.

Skoro $x + 2y = 8 \Rightarrow y = 4 - \frac{x}{2}$

$2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

← to są równania dwóch prostych które można narysować w układzie współrzędnych



Metoda ta, choć niedokładna pokazuje od razu, że taki układ równań nie będzie miał rozwiązań, jeśli proste będą równoległe i nie będą się pokrywać.

3) Odejmowanie / dodawanie stronami – zazwyczaj najszybsze

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ + \quad 4x - 2y = 2 \\ \hline 5x = 10 \end{array}$$

← dodając stronami pierwsze równanie do drugiego pomnożonego przez 2 usuwamy (redukujemy) wyraz "y".

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2}} \Rightarrow 2 + 2y = 8$ więc $2y = 6$ więc $\underline{\underline{y = 3}}$

4) Eliminacja Gaussa

To jest dokładnie dodawanie / odejmowanie stronami, tylko nie piszemy cały czas "x", "y":

$$\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[\text{dodajemy drugi wiersz dwukrotnie}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{dzielimy przez 5}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{odejmujemy pierwszy wiersz dwukrotnie}]{}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{mnożymy przez } (-1)]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

5) Metoda wyznaczników Cramersa

wyznacznik macierzy 2x2 to dla

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Dla układu równań

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

tworzymy wyznacznik główny $W = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 4 = -5$

Jeśli $W = 0$, to układ jest albo sprzeczny, albo ma nieskończenie wiele rozwiązań, bo oznacza to, że proste są równoległe.

Skoro $W \neq 0$ to liczymy dwa inne wyznaczniki poprzez zastąpienie kolumny ze współczynnikami kolumną z wyrazami wolnymi:

$W_x = \det \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -8 - 2 = -10$ (zastąpiliśmy pierwszą kolumnę)

$W_y = \det \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 16 = -15$ (zastąpiliśmy drugą kolumnę)

teraz $x = \dfrac{W_x}{W} = \dfrac{-10}{-5} = 2$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-15}{-5} = 3$$

Wyznacznik macierzy 3×3:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd =$$

$$= a[ei - fh] - b[di - fg] + c[dh - eg] =$$

$$= a\cdot\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

i ogólnie wyznacznik macierzy $n\times n$ można policzyć poprzez "minory" macierzy

Zastosowanie wyznaczników:

→ pola i objętości figur
→ w teorii HF
→ szukanie wartości własnych → energie w mechanice kwantowej

Przykład:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 60$$

Rozwiazywanie równań kwadratowych

Dla równania

$$ax^2+bx+c=0$$

możemy zawsze znaleźć wyznacznik

$$\Delta = b^2-4ac$$

Wtedy, gdy $\Delta \geq 0$ mamy $x_i = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Skąd to wynika? Możemy znaleźć postać kanoniczną równania:

$$ax^2+bx+c=0 \iff x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

czyli:

$$\underbrace{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)$$

jeśli ten człon, oznaczony jako Δ jest kwadratem, to mamy różnicę kwadratów

Ogólnie, w równaniu drugiego stopnia zawsze możemy próbować dopełnić do pełnego kwadratu.

Można też znaleźć pierwiastki korzystając ze wzorów Viete'a →

Jeśli $a(x-x_1)(x-x_2)=0$

to x_1 i x_2 są pierwiastkami tego równania. A jednocześnie mamy

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

czyli w równaniu:

$$ax^2+bx+c=0$$

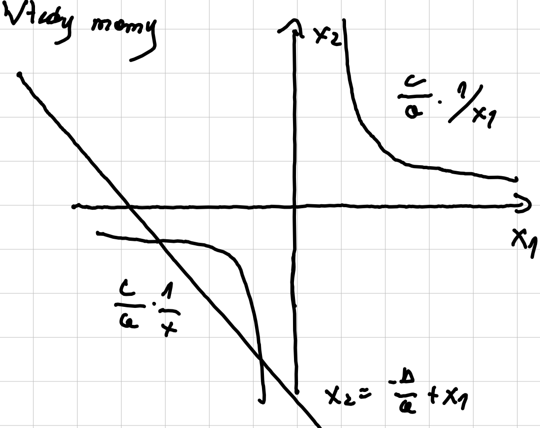
pierwiastki x_1, x_2 spełniają $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1+x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$

Możemy takie równanie rozwiązać też graficznie:

$$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{a} - x_1$$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{x_1}$ gdy $c \neq 0$ to $x_1, x_2 \neq 0$

Wtedy mamy



Magia wzorów Viete umożliwia zgadywanie rozwiązań równień w bardziej skomplikowanych przypadkach:

Np $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

możemy zgadać, że pierwiastkami są np. $1, 2, 3, -1, -2, -3$
Mogą są inne, ale te możemy łatwo sprawdzić

$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$
$f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$
$f(3) = 27 - 6 \cdot 9 + 11 \cdot 3 - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$

Znaleźliśmy trzy pierwiastki, więcej nie będzie:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$

Może się jednak okazać, że znaleźliśmy tylko jeden pierwiastek.
To i tak dużo! Powiedzmy, że mamy równanie

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Łatwo zobaczyć, że $f(1) = 0$

Więc mamy $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 + bx + c) =$

$= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c =$
$= x^3 + x^2(b-1) + x(c-b) - c$

Porównując wielomiany w tych samych potęgach mamy:

$x^3 = x^3$
$-2x^2 = x^2(b-1) \quad \Rightarrow \quad b - 1 = -2$
$0 = x(c-b) \qquad\qquad c - b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = c = -1}$
$1 = -c \qquad\qquad -c = 1$

I w związku z tym

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

a dla $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

więc

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x \ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Tak samo możemy próbować rozłożyć wielomiany stopnia 3, 4, 5....

Przykład

$$x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 28x - 32 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -8, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i$$

Dodatkowe tematy:
- Liczby zespolone
- Kwaterniony, oktoniony
- Twierdzenie Cardano
- Grupy rozwiązalne i pierwiastniki

Inny przykład:

$$HA + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + A^-$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]} = \frac{x^2}{C_{HA} - x} = \frac{C_{HA}\alpha^2}{1-\alpha}$$

gdzie $\alpha = \frac{x}{C_{HA}}$

Roztwór kw. octowego o $c = 0.2$ mol/L. Jaki jest stopień dysocjacji? $pK_A = 4.8$

$$\Rightarrow 0.2\alpha^2 + 10^{-4.8}\alpha - 10^{-4.8} = 0$$

$$\Delta = 10^{-9.6} + 4 \cdot 0.2 \cdot 10^{-4.8} = 2.5 \cdot 10^{-10} + 1.27 \cdot 10^{-5}$$
$$\approx 1.27 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} \simeq 3.56 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha = \frac{-1.6 \cdot 10^{-5} + 3.56 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.2} \approx \frac{3.56}{0.4} \cdot 10^{-3} = 8.9 \cdot 10^{-3} = 0.89\%$$

Zadanie

$x^3 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow 2;\ -1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3}$

$x^3 - 18x - 19 = 0 \Rightarrow 1;\ \frac{1}{2}(-1+5\sqrt{3}i);\ \frac{1}{2}(-1-5\sqrt{3}i)$

$x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = 0 \Rightarrow -2;\ 4,\ -1-i,\ -1+i$

$x^3 - 3x^2 - 2x + 24 = 0 \Rightarrow 3,\ 4,\ -2$

$x + \frac{1}{x} = 3$

$x^4 + x^2 + 1 = 0$

Nech

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Znajdź λ takie, że $\det(A - \lambda \underline{I}) = 0$

$\lambda \in \{-1, 1, 2\}$

Rodziny krzywych i układy równań

$x^2+y^2=R^2$ — okrąg

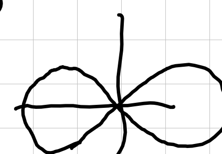
$x^2-y^2=\pm R^2$ - hiperbola

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=R^2$ - elipsa

$x=ay^2+by+c$ - parabola z poziomą osią symetrii

$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ - asteroida

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ - Lemniskata Bernoulliego



$$\begin{cases} 3x^2-2xy-5=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$$

$(x,y)\in\{(1,1);(-1,-1);(\sqrt{5},-\sqrt{5});(-\sqrt{5},\sqrt{5})\}$

$4(x^2-y^2)xy=0 \Rightarrow x=y,\ x=-y,\ xy=0$

$$\begin{cases} 4x^3-12x+4y=0 \\ 4y^3-12y+4x=0 \end{cases}$$

$(x,y)\in\{(0,0);(\sqrt{2},\sqrt{2});(-\sqrt{2},-\sqrt{2});(2,-2);(-2,2)\}$

$(x-y)^2=xy$

$4(x^3-y^3)-12(x-y)-4(x-y)=0$

$4(x-y)(x^2+xy+y^2)-16(x-y)=0$ $\quad x=y$ lub $\quad x^2+xy+y^2-4xy=0 \quad x^2-3xy+y^2=0$

$$\begin{cases} 4x^3 + 8xy^2 - 16x = 0 \\ 4y(y^2 + 2x^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \left\{ \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right), (0,0) \right\}$$

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \left\{ (0,0); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right); (0,1); \left(0, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{3}{4}, 0\right); (1,0) \right\}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow (3,-2); (-2,3) \qquad s = x+y \quad p = xy$$

$$s = x+y \qquad s^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{4}y^2$$

$$t = x-y \qquad t^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad s = x+y \quad p = xy \Rightarrow x^2 + y^2 = s^2 - 2p \qquad t^2 - st + p = 0$$

ze wzorów Viete'a

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

1 Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 5 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4x^3 + 8xy^2 - 16x = 0 \\ 4y^3 + 8x^2y - 16y = 0 \end{cases}$$

$$4x(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$$
$$4y(y^2 + 2x^2 - 4) = 0$$

$$3(x^2 + y^2) = 4 \qquad x^2 = \frac{4}{3} - y^2$$

$$\frac{4}{3} + y^2 - 4 = 0$$
$$y^2 = 8/3$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ (x + y - 2)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ (x^2 - y)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy(x + y) = 4 \end{cases}$$

1 Rozwiąż równanie:

$$\log_2\left(e^{2x}-e^{x}+2\right)=3$$

2. Rozwiąż równanie:

$$\log_2\left(x^2+7x\right)-\log_2(x+1)=2$$

$$e^{x}+e^{-x}=2$$

$$e^{x}-e^{-x}=1$$

$$\log_3\left(x^2-4\right)=1+\log_3(x)$$

$$\sqrt{e^{x}+e^{-x}}=3$$

$$\log_3\left(\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\log_3(x+1)$$

$$e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+1=0$$

$$\log_2\left(x+\sqrt{x^2-3x+2}\right)=2$$

$$e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}=5$$

$$\log_4(x-1)+\log_4(x+3)=3/2$$

$$\ln\sqrt{x^2+4}=1+\ln(x-1)$$