Kartkówka 5 - 18.11.2025

Zadanie za 1 pkt Narysuj (i tylko narysuj) wykres funkcji $f(x) = e^{2x}$

Zadanie za 2 pkt Policz pierwszą i drugą pochodną funkcji $f(x) = e^x \cos(x)$

Zadanie za 3 pkt Podać, dla jakich wartości x funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ jest malejąca.

Zadanie za 4 pkt Wielomiany Hermite'a dane są wzorem:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{23}$$

Gdzie oznaczenie $\frac{d^n}{dx^n}$ oznacza n-tą pochodną, czyli pochodną wykonywaną n razy. W szczególności, wyrażenie $\frac{d^2}{dx^2}$ oznacza wzięcie drugiej pochodnej, czyli policzenie pochodnej z pochodnej.

Policz pierwszy i drugi wielomian Hermite'a (czyli wielomiany dla $n = 1$ i $n = 2$).

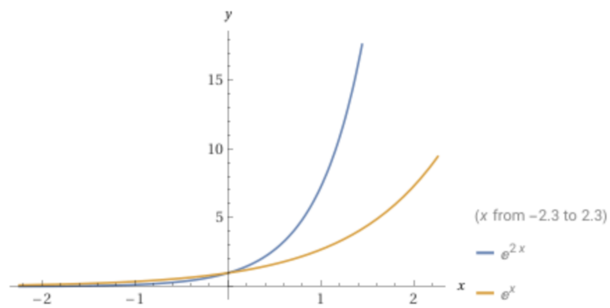
Zadanie za 5 pkt Zbadać liczbę pierwiastków (rozwiązań) równania $\ln(x) = ax$ w zależności od parametru a.

Zadanie za 6 pkt Znajdź pochodną funkcji określonej przez

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases} \tag{24}$$

Kartkówka 5 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt Wszystkie funkcje wykładnicze są do siebie podobne - mają te same granice w nieskończonościach i tę samą wartość w punkcie $x = 0$. Jedyna różnica to nachylenie funkcji. Im podstawa większa, tym wartości funkcji szybciej rosną. W związku z tym, wykres funkcji $f(x) = e^{2x}$ pokazano na Rys. 3.



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x) = e^{2x}$ (niebieska), oraz dla porównania e^x (pomarańczowa)

Zadanie za 2 pkt Mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \cos(x))' = (e^x)' \cos(x) + e^x (\cos(x))' = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = \\ &= e^x (\cos x - \sin x) \\ f''(x) &= (f'(x))' = (e^x (\cos x - \sin x))' = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' = \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x \left((\cos x)' - (\sin x)'\right) = \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin(x) \end{aligned} \tag{25}$$

Zadanie za 3 pkt Jeśli funkcja jest malejąca, to jej pochodna jest ujemna. Musimy więc policzyć pochodną funkcji i sprawdzić, kiedy jet ona ujemna. Mamy:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \tag{26}$$

Zauważmy, że zarówno x^2, jak i e^x są dodatnie dla każdej wartości $x \in \mathbb{R}$. Wobec tego znak pochodnej jest zależny od znaku czynnika $(x - 1)$. Oczywiście mamy $(x - 1) < 0$ dla $x < 1$. Więc dla $x < 1$ badana funkcja jest ujemna.

Zadanie za 4 pkt Kolejne wielomiany Hermite'a dane są jako kolejne pochodne. Wobec tego:

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2}(e^{-x^2})' = -e^{x^2}\left(e^{-x^2}(-x^2)'\right) = -e^{x^2}e^{-x^2}(-2x) = 2x \tag{27}$$

Podobnie, do policzenia drugiego wielomianu Hermite'a musimy policzyć drugą pochodną:

$$\begin{aligned} H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2} (e^{-x^2})'' = \\ = e^{x^2} \left(e^{-x^2} (-2x) \right)' = e^{x^2} \left((e^{-x^2})' (-2x) + e^{-x^2} (-2x)' \right) = \\ = e^{x^2} \left(e^{-x^2} 4x^2 - 2e^{-x^2} \right) = 4x^2 - 2 \end{aligned} \tag{28}$$

Zadanie za 5 pkt Trudno jest odpowiedzieć na to pytanie wprost. Ale możemy odpowiedzieć na pytanie równoważne - ile jest pierwiastków równania $\frac{\ln x}{x} = a$ w zależności od parametru a? Geometrycznie, pytanie to oznacza, ile razy prosta $y = a$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Spróbujmy więc zrozumieć, jak wygląda wykres funkcji f.

Dziedzina tej funkcji to oczywiście zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $D_f = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Granice na krańcach przedziału ciągłości to:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{-\infty}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Pochodna tej funkcji to:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \tag{30}$$

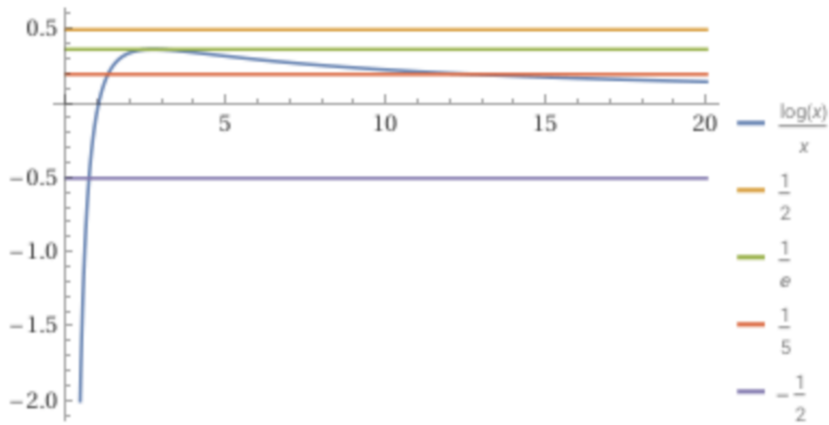
Pochodna ma miejsce zerowe w punkcie x_0 spełnianiającym $1 = \ln x_0$, a więc $x_0 = e$. Jest to maksimum funkcji, bo w tym miejscu pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny. Wartość funkcji w maksimum to $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$. Więc wiemy już wszystko:

- Jeśli $a > e^{-1}$ nie będzie żadnego rozwiązania, bo nie istnieje żaden argument x taki, żeby $f(x) > e^{-1}$.
- Istnieje dokładnie jeden $x = x_0$ taki, że $f(x) = e^{-1}$, więc dla $a = e^{-1}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.
- Ponieważ od $f(0) = 0$ funkcja jest rosnąca aż do $x = x_0$, a potem jest cały czas malejąca i $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, to dla wszystkich $a \in (0, e^{-1})$ istnieją dwa rozwiązania, większe i mniejsze od $x = x_0$.
- W końcu dla $a \leq 0$ istnieje tylko jedno rozwiązanie, dla $x \leq 0$.

Bardziej matematycznie można to zapisać w ten sposób. Niech $N(a)$ to liczba rozwiązań powyższego równania. Mamy więc:

$$N(a) = \begin{cases} 0 & a > e^{-1} \\ 1 & a = e^{-1} \vee a \leq 0 \\ 2 & a \in (0, e^{-1}) \end{cases} \tag{31}$$

Wykres funkcji f wraz z kilkoma wartościami prostej $y = a$ przedstawia Rys. 4.



Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x) = \ln x/x$ (niebieski) oraz proste $y = a$ dla $a = 1/2 > e^{-1}$ (pomarańczowa), $a = e^{-1}$ (zielona), $a = 1/5 < e^{-1}$ (czerwona) oraz $a = -1/2$ (fioletowa).

Zadanie za 6 pkt Dla $x \neq 0$ możemy tę pochodną znaleźć wzorem:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ -e^{-x} & x > 0 \end{cases} \tag{32}$$

Jedyny problem jest dla $x = 0$, bo w tym miejscu sklejają się gałęzie funkcji. Po pierwsze zauważmy, że funkcja jest ciągła w tym punkcie, bo $f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$. Pochodna w tym punkcie formalnie dana jest jako granica ilorazu różnicowego (o ile granica ta istnieje):

$$\lim_{h->0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{f(h) - 1}{h} \tag{33}$$

Sposób liczenia tej granicy zależy jednak, czy zbliżamy się do 0 z lewej, czy z prawej strony, bo wtedy wykorzystujemy jedną, lub drugą gałąź funkcji. W szczególności obie granice (lewo- i prawostronne) muszą być sobie równe, żeby istniała granica (ogólna), a tym samym pochodna. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-e^{-h}}{1} = \frac{-e^{0}}{1} = -1 \end{aligned} \tag{34}$$

Czyli obustronna granice istnieją i są sobie równe, a więc pochodna $f'(0) = -1$. Jest to też wartość każdej z gałęzi pochodnej, więc można dołączyć tę wartość do dowolnej gałęzi. Ostatecznie:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ -e^{-x} & x > 0 \end{cases} \tag{35}$$

W praktyce możemy do tego samego wniosku dojść badając ciągłość pochodnej. Ponieważ granicę, wzór na pochodną również wynika z granicy ilorazu różnicowego, to jednostronna granica ilorazu różnicowego, którą przed chwilą liczyliśmy, to *de facto* granica pochodnej wynikająca z ciągłości pochodnej. A więc w praktyce wystarczy, aby:

$$\lim_{x \to 0} -e^{-x} = \lim_{x \to 0} -1 \tag{36}$$

czyli żeby pochodna była ciągła, co oczywiście jest prawdą. Uwaga, to rozumowanie jest słuszne, jeśli granice gałęzi pochodnych istnieją i jeśli pochodna jest ciągła, czyli funkcja jest klasy C^1!