

14.04.2025

Łatki wymierne postaci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Rozwiązujemy następująco:

1. Jeśli $\deg(P) \geq \deg(Q)$ dzielimy wielomian P przez Q , np

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)^2 + (x+1) + 2}{(x+1)} dx = \int (x+1) dx + \int dx + \int \frac{2}{x+1}$$

Postępując w ten sposób otrzymamy całkę

$$\int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx \quad \text{gdzie} \quad \deg(P_2) < \deg Q$$

2. Gdy $\deg(P_2) < \deg(Q)$ rozkładamy ułamek na czynniki proste:

a) Każdy wielomian $Q(x)$ możemy przedstawić jako iloczyn

czynników liniowych i nierozkładalnych czynników kwadratowych:

np.

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$Q(x) = x^3 - x + x - 1 = (x^2 + 1)(x-1)$$

$$Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

b) Rozkładamy postać ułamków prostych

- jeśli mamy w mianowniku czynnik $(x-a)^n$, w naszej

sumie wystąpią składniki:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \text{ gdzie } A_n \in \mathbb{R} \text{ to stałe}$$

- jeśli w mianowniku nierozkładalny dwumian $(x^2+px+q)^k$, to w sumie ułamków prostych będzie

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } B_n, C_n \in \mathbb{R} \text{ stałe.}$$

np

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^3-x+x-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^4-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

c) Wymniemy przez mianownik otrzymując układ równań

$$\text{np. } \frac{3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \bigg/ \quad (x-2)(x-3) \quad \rightarrow$$

$$3x+2 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - 3A - 2B$$

Wielomiany są równe, jeśli współczynniki przy każdej potęgce są równe

$$\Rightarrow (\text{przy } x^1) \quad 3 = A+B$$

$$(\text{przy } x^0) \quad 2 = -3A - 2B$$

d) Równając system równań otrzymujemy wartości stałych

$$3 = A+B \Rightarrow 6 = 2A+2B$$

$$+ \quad 2 = -3A - 2B$$

$$8 = -A \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A = -8 \\ B = 11 \end{matrix}}$$

e) Łączymy powstałą sumę ułamków

$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6} dx = - \int \frac{8}{x-2} dx + \int \frac{11}{x-3} dx =$$

$$= -8 \ln|x-2| + 11 \ln|x-3| + C$$

Cyżli proces całkowania funkcji wymiernych upraszcza się do sumy całek, z których każda należy do jednego z 4 typów:

$$a) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$b) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C \quad \text{gdzie } n \neq 1$$

$$c) \int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$d) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

gdzie $n \neq 1$

} gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$
użyj nie da się już bardziej
roztoczyć mianownika

Całkę typu c) przeprowadzamy w całość typu $\int \frac{dx}{1+x^2}$:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

skoro $\Delta = p^2 - 4q < 0$, to $q - \frac{p^2}{4} > 0$ (sprawdzi!!)

a więc istnieje $A > 0$ takie, że $A^2 = q - \frac{p^2}{4}$

Wtedy

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + A^2} = \int \frac{dy}{y^2 + A^2} = \frac{1}{A^2} \int \frac{dy}{\left(\frac{y}{A}\right)^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{A} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg}(z) \stackrel{+C}{=} \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{y}{A} \stackrel{+C}{=} \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{A} + C$$

np

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} t &= \frac{x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx \\ dx &= 2dt \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctg(t) + C =$$

$$\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Całkę postaci $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$ rozwiążemy sprowadzając mianownik do postaci kanonicznej $(t^2 + A^2)^n$ jak poprzednio. Natomiast w tym

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + A^2)^n} \text{ rozwiążemy ze wzoru redukcyjnego:}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nA^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + A^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{A^2} I_n$$

który otrzymujemy z całkowania przez części (będzie później)

Przykłady

$$\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx = \int \frac{2dx}{3x+1} + \int \frac{3dx}{x-2}$$

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4} = \int \frac{dx}{(3x-2)^2} = \frac{(3x-2)^{-1}}{(-1) \cdot 3} + C$$

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx = \int \frac{9x-5}{(3x-1)^2} dx = \int \frac{-2}{(3x-1)^2} dx + \int \frac{3dx}{(3x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 9/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{2}}{3}(x-3) \right] + C$$

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(2x+6)dx}{2x^2+6x+5} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln(2x^2+6x+5) - \frac{1}{2} \arctan(2x+3) + C$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx = \int \frac{3dx}{(x-1)^3} + \int \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{2dx}{x+1}$$

$$\int \frac{3x^4+x^2+x-1}{x^4-1} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{x+2}$$

$$\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} dx = \int \frac{2x-2}{x^2+1} dx + \int \frac{4dx}{x^2+2}$$