Kartkówka 8 - 16.12.2025

Zadanie za 1 pkt Policz poniższą całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x} \tag{54}$$

Zadanie za 2 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \sqrt{x}dx \tag{55}$$

Zadanie za 3 pkt Policz całkę nieoznaczoną:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx \tag{56}$$

Zadanie za 4 pkt Policz pole pod wykresem funkcji

$$f(x) = x^2 + x + 1 \tag{57}$$

W na przedziale $(-2, 1)$

Zadanie za 5 pkt Niech f będzie dowolną funkcją ciągłą i okresową o okresie $T > 0$, a a dowolną liczbą rzeczywistą. Pokaż, że:

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx \tag{58}$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie za 6 pkt Pokaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej na $[0, 1]$ prawdziwa jest równość:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx \tag{59}$$

A następnie policz całkę:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)dx}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} \tag{60}$$

Dla dowolnej wartości $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Kartkówka 8 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt Ponieważ dla $F(x) = \ln(x)$ mamy $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$, więc musi zachodzić

$$\int \frac{dx}{x} = F(x) + C = \ln(x) + C \tag{61}$$

Gdzie C jest stałą całkowania.

Zadanie za 2 pkt Mamy

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \tag{62}$$

Wiemy też, że

$$\int x^m dx = \frac{1}{x+1} x^{m+1} + C \tag{63}$$

A więc zachodzi:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3/2} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \tag{64}$$

Zadanie za 3 pkt Mamy:

$$\operatorname{tg}^2(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \tag{65}$$

A więc:

$$\int \operatorname{tg}^2(x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg}(x) - x + C \tag{66}$$

Zadanie za 4 pkt Najpierw sprawdzimy znak funkcji na danym przedziale. Dla funkcji kwadratowej

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni, funkcja f jest dodatnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem pole pod wykresem funkcji na przedziale $(-2, 1)$ jest równe wartości całki oznaczonej:

$$P = \int_{-2}^{1} (x^2 + x + 1) dx.$$

Obliczamy funkcję pierwotną (całkę nieoznaczoną):

$$\int (x^2 + x + 1), dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Podstawiając granice całkowania, otrzymujemy:

$$P = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{1}.$$

Dla $x = 1$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}.$$

Dla $x = -2$:

$$\frac{-8}{3} + 2 - 2 = -\frac{8}{3}.$$

Zatem

$$P = \frac{11}{6} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{11}{6} + \frac{16}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Pole pod wykresem funkcji $f(x) = x^2 + x + 1$ na przedziale $(-2, 1)$ wynosi

$$\boxed{\frac{9}{2}}.$$

Zadanie za 5 pkt Niech f będzie funkcją ciągłą i okresową o okresie $T > 0$, tzn.

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Niech ponadto $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x), dx.$$

Zadanie to jest zupełnie intuicyjne, jeśli pomyślimy o całce oznaczonej powyżej, jako o polu pod wykresem funkcji. Ponieważ funkcja ta jest okresowa, to pole pod wykresem w każdym okresie jest takie samo. A jeśli zaczniemy liczyć to pole od punktu $x = a$, a okres tej funkcji to T, to pole takiego fragmentu to:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \tag{67}$$

I takie "podstawowe" pole powtarza się dokładnie n razy. Skąd otrzymujemy żądaną równość.

Aby udowodnić tę intuicję, rozbijmy przedział całkowania na n kolejnych przedziałów długości T:

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx.$$

W każdej całce wykonajmy podstawienie $x = t + kT$. Wówczas $dx = dt$, a granice przechodzą odpowiednio:

$$a + kT \mapsto a, \qquad a + (k+1)T \mapsto a + T.$$

Korzystając z okresowości funkcji f, otrzymujemy:

$$\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(t+kT)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt.$$

Zatem każda z całek w sumie ma tę samą wartość, co prowadzi do

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^{a+T} f(t)dt = n\int_a^{a+T} f(t)dt.$$

Na koniec zauważmy, że z okresowości funkcji wynika

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\boxed{\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx}$$

Zadanie za 6 pkt Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Rozważmy całkę

$$I = \int_0^\pi xf(\sin x), dx.$$

Wykonajmy podstawienie $x \mapsto \pi - x$. Otrzymujemy

$$I = \int_0^\pi (\pi - x)f(\sin(\pi - x))dx.$$

Ponieważ $\sin(\pi - x) = \sin x$, mamy

$$I = \int_0^\pi (\pi - x)f(\sin x)dx.$$

Dodając obie postacie całki, dostajemy

$$2I = \int_0^\pi \pi f(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

Stąd

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx,$$

co kończy dowód pierwszej części.

Mamy stąd, że

$$\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)dx}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(x)dx}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)} \tag{68}$$

Rozważmy całkę

$$J_n = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx.$$

Wykonując ponownie podstawienie $x \mapsto \pi - x$, zauważamy, że

$$J_n = \int_0^\pi \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx.$$

Dodając obie równości, otrzymujemy

$$2J_n = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \int_0^\pi 1 dx = \pi.$$

Zatem

$$J_n = \frac{\pi}{2}.$$

A więc ostatecznie:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x) dx}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \tag{69}$$