Kartkówka 7 - 02.12.2025

Zadanie za 1 pkt Policz pochodną funkcji

$$f(x) = e^x e^{2x} \tag{42}$$

Zadanie za 2 pkt Policz granicę:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 - x} \tag{43}$$

Zadanie za 3 pkt Znajdź minima funkcji

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \tag{44}$$

Zadanie za 4 pkt Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$

Zadanie za 5 pkt Udowodnić wzór $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ poprzez mnożenie szeregów potęgowych.

Zadanie za 6 pkt Wykaż, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ i $|x| < 1$ prawdziwa jest równość:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n \tag{45}$$

A następnie pokaż, że dla $|x|$ zachodzi:

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n \tag{46}$$

3.5 Kartkówka 7 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt

$$f(x) = e^x e^{2x} = e^{3x}$$

Pochodna funkcji:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}.$$

Zadanie za 2 pkt Rozważamy granicę funkcji

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 - x}.$$

Ponieważ zarówno funkcja $\cos x$, jak i funkcja $1 - x$ są ciągłe w punkcie $x = 0$, możemy obliczyć granicę, podstawiając wartość $x = 0$ bezpośrednio do wyrażenia.

Wstawiamy zatem $x = 0$:

$$\frac{\cos 0}{1 - 0}.$$

Korzystamy z faktu, że $\cos 0 = 1$:

$$\frac{1}{1}.$$

Ostatecznie otrzymujemy wartość granicy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 - x} = 1.$$

Zadanie za 3 pkt Najpierw obliczamy pochodną pierwszą funkcji:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\big(x^2\big)\, e^{-x^2} + x^2 \frac{d}{dx}\big(e^{-x^2}\big).$$

Korzystając z reguł różniczkowania otrzymujemy

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2\big(- 2xe^{-x^2}\big) = e^{-x^2}\big(2x - 2x^3\big).$$

Możemy to zapisać w postaci:

$$f'(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2).$$

Wyznaczamy punkty krytyczne rozwiązując $f'(x) = 0$. Ponieważ $e^{-x^2} > 0$ dla wszystkich x, równanie sprowadza się do

$$2x(1 - x^2) = 0.$$

Stąd punkty krytyczne to

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = -1.$$

Aby określić charakter tych punktów, spójrzmy, jak zmienia się znak pochodnej. Można myśleć na dwa sposoby:

1. Funkcja $(1-x^2)$ to odwrócona parabola - jest dodatnia dla $x \in (-1,1)$. Dodatkowy czynnik x wprowadza dodatkowe miejsce zerowe, w którym funkcja musi zmienić znak. Wobec czego musi być $f'(x) > 0$ dla $x < -1$ oraz $x \in (0,1)$, natomiast $f'(x) < 0$ dla $x \in (-1,0)$ oraz $x > 1$.

2. Możemy policzyć wartości funkcji $g(x) = x(1-x^2)$ (która ma ten sam znak co $f'(x)$ bo czynnik $2e^{-x^2} > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$) w punktach wewnątrz przedziałów, np. $x = -2$, $x = -1/2$, $x = -1/2$, $x = 2$. A więc $g(-2) = -2(1-(-2)^2) = -2(-3) = 6 > 0$. Więc znak pochodnej dla $x < -1$ (bo ten przedział zawiera punkt $x = -2$) jest dodatni. Podobnie liczymy $g(-1/2) = -\frac{1}{2}(1-(-\frac{1}{2})^2) = -\frac{1}{2}\frac{3}{4} = -\frac{1}{8} < 0$, natomiast $g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} > 0$, oraz $g(2) = -6 < 0$, skąd otrzymujemy ten sam wniosek.

Tak czy siak, oznacza to, że w punktach $x = -1$ oraz $x = +1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, jest tam więc maksimum. Natomiast dla $x = 0$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, jest więc tam minimum. Dla tego punktu mamy $f(0) = 0$.

Ostatecznie mamy minimum funkcji w punkcie $f(x) = 0$.

Zadanie za 4 pkt Najpierw przypomnijmy, że

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Możemy znajdować kolejne pochodne tej funkcji, w szczególności:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5} \end{aligned}$$

Jeśli będziemy chcieli skorzystać z tw. Taylora:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^4(0)}{4!}x^4 + \frac{f^5(0)}{5!}x^5 + ... \tag{47}$$

To obliczając wartości kolejnych pochodnych zobaczymy, że pochodne parzystego stopnia mają w liczniku wielomian, którego $x = 0$ jest miejscem zerowym. Wobec tego mamy $f^{2n}(0) = 0$. Dla nieparzystych stopni $n = 2k+1$ możemy wnioskować, że wyraz wolny w liczniku to $(2k)!$ (dla $f'''(x)$ jest to $2 = 2!$, dla $f^5(x)$ jest to $24 = 4!$). Wobec tego $f^{2n+1}(0) = (2n)!$. Stąd otrzymujemy:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{48}$$

Uwaga! Licząc promień zbieżności zobaczymy, że wzór ten jest słuszny dla $|x| < 1$. Da się jednak pokazać, że dla $x = 1$ wzór ten też jest słuszny. A dla $x = 1$ dostajemy piękną równość Leibnitza:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

W powyższym wzorze było sporo zgadywania. Ale możemy ten wzór wyprowadzić znacznie szybciej i bez zgadywania, jeśli potrafimy już całkować. Możemy rozwinąć $(\mathrm{arctg(x)})' = \frac{1}{1+x^2}$ w szereg geometryczny (dla $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Teraz całkujemy szereg wyraz po wyrazie, aby otrzymać $\mathrm{arctg}(x)$:

$$\mathrm{arctg}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt.$$

Całkując każdy wyraz otrzymujemy:

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Zadanie za 5 pkt Przypomnijmy rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg potęgowy:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Dla e^{x+y} mamy

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Rozważmy iloczyn szeregów:

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right).$$

Mnożymy szeregi używając zasady Cauchy'ego dla iloczynu szeregów:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^{k-n}}{(k-n)!}\right).$$

Zauważamy, że

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^{k-n}}{(k-n)!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{x^n y^{k-n}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n}.$$

Zastosowanie wzoru Newtona daje:

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} = (x+y)^k.$$

Zatem mamy

$$e^x \cdot e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.$$

Wniosek: Udowodniliśmy wzór

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y}$$

poprzez mnożenie szeregów potęgowych.

Zadanie za 6 pkt Rozważmy funkcję

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Ponieważ $|x| < 1$, funkcja ta jest analityczna w otoczeniu $x = 0$, więc można ją rozwinąć w szereg potęgowy (szereg Taylora):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

1. Obliczamy kolejne pochodne:
Pierwsze pochodne:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \ldots$$

Ogólnie:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

2. Obliczamy wartości w punkcie $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1)^{\alpha-n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

3. Tworzymy szereg Taylora:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Dla $n = 0$ mamy $x^0 = 1$, stąd można zapisać:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Wniosek: Udowodniliśmy wzór dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ i $|x| < 1$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}.$$

W szczególności mamy też $|x| = (1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}}$. Po wykorzystaniu udowodnionej przed chwilą równości i podstawieniu $x \to (1-x^2)$ oraz $\alpha = \frac{1}{2}$ otrzymujemy rozwinięcie dla $|x|$.