Kartkówka 3 - 28.10.2025

Zadanie za 1 pkt Narysuj wykres funkcji $f(x) = \cos(x)$ w przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

Zadanie za 2 pkt Podaj wartość arctg(1)

Zadanie za 3 pkt Dla kwasu octowego $pK_a = 4,76$. Przybliżona zależność wiążąca stałą dysocjacji K_a, stężenie c oraz stopień dysocjacji α to:

$$K_a = \alpha^2 c \tag{9}$$

Podaj stopień dysocjacji α w postaci wykładniczej (tzn. znajdź wykładnik x w równości $\alpha = 10^x$) dla roztworu kwasu octowego o stężeniu $c = 0,1M$

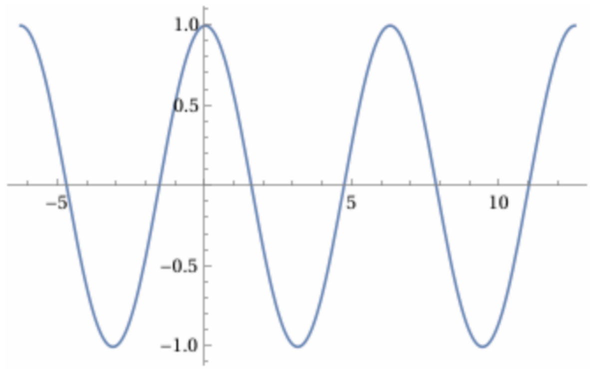
Zadanie za 4 pkt Podaj dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \ln\big(1 + \sin(x^2 - 3x)\big) \tag{10}$$

Zadanie za 5 pkt Udowodnij, że $\operatorname{ctg}(\frac{\alpha}{2}) \geq 1 + \operatorname{ctg}(\alpha)$ dla każdego α.

Zadanie za 6 pkt Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{11}$$



Rysunek 2: Wykres funkcji $\cos x$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

Kartkówka 3 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt

Zadanie za 2 pkt $\operatorname{arctg}(x) = 1$ oznacza, że szukamy takiego argumentu x dla którego $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$. Czyli takiego argumentu x dla którego $\sin(x) = \cos(x)$. Mamy:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Skąd widać, że $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(x)$ dla $x = \pi/4$. Więc odpowiedzią jest

$$\boxed{\operatorname{arctg}(x) = 1 \text{ dla } \; x = \frac{\pi}{4}.}$$

Zadanie za 3 punkty Dane są:

$$pK_a = 4{,}76, \qquad c = 0{,}1\,\mathrm{M} = 10^{-1}\mathrm{M},$$

oraz przybliżona zależność

$$K_a = \alpha^2 c.$$

Przypominamy zależność pomiędzy pK_a i K_a:

$$pK_a = -\log_{10} K_a.$$

Wyznaczamy K_a:

$$K_a = 10^{-pK_a} = 10^{-4{,}76}.$$

Korzystamy z zależności $K_a = \alpha^2 c$ i podstawiamy znane wartości:

$$10^{-4{,}76} = \alpha^2 \cdot 10^{-1}.$$

Więc:

$$\alpha^2 = 10^{-4{,}76+1} = 10^{-3{,}76}.$$

A stąd

$$\alpha = 10^{-3{,}76/2} = 10^{-1{,}88}.$$

Odpowiedź: Stopień dysocjacji wynosi

$$\alpha = 10^{-1{,}88}.$$

Czyli trochę więcej niż $10^{-2} = 1\%$

Zadanie za 4 punkty Dana jest funkcja

$$f(x) = \ln\left(1 + \sin(x^2 - 3x)\right).$$

Logarytm naturalny jest określony tylko dla argumentów dodatnich, więc wymagamy:

$$1 + \sin(x^2 - 3x) > 0.$$

Przypominamy, że dla każdej liczby rzeczywistej t:

$$-1 \leq \sin t \leq 1.$$

Najmniejsza możliwa wartość wyrażenia $1 + \sin(x^2 - 3x)$ występuje, gdy

$$\sin(x^2 - 3x) = -1.$$

Wtedy

$$1 + \sin(x^2 - 3x) = 0,$$

co *nie należy* do dziedziny logarytmu.

Warunek dziedziny ma więc postać:

$$\sin(x^2 - 3x) > -1.$$

Funkcja sinus przyjmuje wartość -1 tylko dla argumentów postaci:

$$x^2 - 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

To tworzy ciąg równań kwadratowych, które możemy dalej rozwiązywać.

Odpowiedź:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x^2 - 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zadanie za 5 pkt Mamy

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg}(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{ctg}(\alpha) &= \\
= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} &= \\
= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha) - \sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)} &= \\
= \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2})\left(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})\right)}{\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)} &= \\
= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})\left(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\alpha}{2})\right)}{\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)} &= \\
= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)} &= \\
= \frac{1}{\sin(\alpha)} &\geq 1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Co pokazuje, że $\operatorname{ctg}(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{ctg}(\alpha) \geq 1$, co jest równoważne z wyjściową nierównością.

Zadanie za 6 pkt Mamy do udowodnienia równość:

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + ... + \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos{(n+\frac{1}{2})x}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{13}$$

Przypomnijmy, że:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\beta - \cos\alpha \tag{14}$$

Stąd mamy:

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos{(\alpha-\beta)} - \cos{(\alpha+\beta)} \tag{15}$$

Mamy więc (po pomnożeniu rządanej równości przez mianownik):

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\left(\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + ... + \sin(nx)\right) &= \\
= 2\sin\frac{x}{2}\sin(x) + 2\sin\frac{x}{2}\sin(2x) + 2\sin\frac{x}{2}\sin(3x) + ... + 2\sin\frac{x}{2}\sin(nx) &= \\
= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + ... + \cos{(n-\frac{1}{2})x} - \cos{(n+\frac{1}{2})x} &= \\
= \cos\frac{x}{2} - \cos{(n+\frac{1}{2})x}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Gdzie w ostatnim kroku redukujemy sąsiednie (równe) wyrazy.