

14.04.2025

Całki wymierne postaci:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Rozwiązyjemy następująco:

1. Jeśli  $\deg(P) \geq \deg(Q)$  dzielimy wielomian  $P$  przez  $Q$ , np

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)^2 + (x+1) + 2}{(x+1)} dx = \int (x+1) dx + \int dx + \int \frac{2}{x+1}$$

Postępując w ten sposób otrzymamy całkę

$$\int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx \quad \text{gdzie } \deg(P_2) < \deg Q$$

2. Gdy  $\deg(P_2) < \deg Q$  rozkładamy ułamek na czynniki proste:

a) Kiedy wielomian  $Q(x)$  możemy przedstawić jako iloczyn czynników liniowych i nieoznaczalnych czynników kwadratowych:  
np.

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x-1)$$

$$Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

b) Zaktadamy postać ułamków prostych

- jeśli mamy w mianowniku wykładnik  $(x-a)^n$ , wtedy  
sumie następujących skrótników:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \text{ gdzie } A_n \in \mathbb{R} \text{ to stałe}$$

- jeśli w mianowniku nierozkładalny dwumian  $(x^2+px+q)^k$ , to  
w sumie ułamków prostych będzie

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } B_n, C_n \in \mathbb{R} \text{ stałe.}$$

np

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^3-x+1} = \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^4-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

c) Wymnażamy przez mianownik otrzymując układ równań

np.

$$\frac{3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad / (x-2)(x-3) \quad \rightarrow$$

$$3x+2 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - 3A - 2B$$

Wielomiany są równe, jeśli współczynniki przy każdej potędze  $x$  są równe

$$\Rightarrow (\text{przy } x^1) \quad 3 = A+B$$

$$(\text{przy } x^0) \quad 2 = -3A - 2B$$

d) Rozwiążemy układ równań otrzymując wartości stałych

$$3 = A+B \Rightarrow 6 = 2A + 2B$$

$$+ \quad 2 = -3A - 2B$$

$$8 = -A \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = -8 \\ B = 11 \end{array}}$$

e) Rozkłajemy powstającą sumę ułamków

$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6} dx = - \int \frac{8}{x-2} dx + \int \frac{11}{x-3} dx =$$

$$= -8 \ln|x-2| + 11 \ln|x-3| + C$$

Legły proces całkowania funkcji wymiernych upraszcza się do sumy ułamków, z których każda należy do jednego z 5 typów:

a)  $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

b)  $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$  gdzie  $n \neq 1$

c)  $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$       d)  $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$  gdzie  $n \neq 1$

gdzie  $\Delta = p^2 - 4q < 0$   
 legły nie da się już bardziej  
 rozłożyć mianownika

Legły typu c) przeprowadzamy w legły typu  $\int \frac{dx}{1+x^2}$ :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

skoro  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ , to  $q - \frac{p^2}{4} > 0$  (sprawdz!!)

a więc istnieje  $A > 0$  taki, że  $A^2 = q - \frac{p^2}{4}$

Wówc

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + A^2} = \int \frac{dy}{y^2 + A^2} = \frac{1}{A^2} \int \frac{dy}{\left(\frac{y}{A}\right)^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{A} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{A} \arctg(z) \stackrel{+C}{=} \frac{1}{A} \arctg \frac{y}{A} \stackrel{+C}{=} \frac{1}{A} \arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{A} + C$$

pp

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx \\ dx = 2dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t) + C =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

---

Całka postaci  $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$  rozwiązyjemy sprowadzając mianownik do postaci kanonicznej  $(t^2 + A^2)^n$  jak po przednio. Natomiast wtedy

$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + A^2)^n}$  rozwiązyjemy ze wzoru redukującego:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nA^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + A^2)^n} + \frac{2n-2}{2n} \frac{1}{A^2} I_n$$

który otrzymujemy z całkowaniem przez części (bedzie później)

Przykłady

$$\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx = \int \frac{2dx}{3x+1} + \int \frac{3dx}{x-2}$$

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+3} = \int \frac{dx}{(3x-2)^2} = \frac{(3x-2)^{-1}}{(-1)\cdot 3} + C$$

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx = \int \frac{9x-5}{(3x-1)^2} dx = \int \frac{-2}{(3x-1)^2} dx + \int \frac{3dx}{(3x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2 + \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{2}}{3}(x-3) \right] + C$$

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(4x+6)dx}{2x^2+6x+5} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \\ = \frac{1}{4} \ln(2x^2+6x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x+3) + C$$

$$\int \frac{3x^3-3x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x-1)} dx = \int \frac{3dx}{(x-1)^3} + \int \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{2dx}{x+1}$$

$$\int \frac{3x^4+x^2+x-1}{x^4-1} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{x+2}$$

$$\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} dx = \int \frac{2x-2}{x^2+1} dx + \int \frac{4dx}{x^2+2}$$