Kartkówka 4 - 4.11.2025

Zadanie za 1 pkt Podaj pochodną dla funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

Zadanie za 2 pkt Rozwiąż równanie:

$$\log_5(x^2 - 5x + 19) = 2$$

Zadanie za 3 pkt Policz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2}$$

Zadanie za 4 pkt Policz pochodną funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

Zadanie za 5 pkt Udowodnij równość

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

Zadanie za 6 pkt Pokaż, że funkcja $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ jest ciągła, ale nie ma pochodnej (nawet jednostronnej) dla $x = 0$.

Kartkówka 4 - rozwiązania

Zadanie za 1 pkt Oczywiście mamy $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Zadanie za 2 pkt Aby rozwiązać równanie logarytmiczne

$$\log_5(x^2 - 5x + 19) = 2,$$

korzystamy z definicji logarytmu. Równanie $(\log_a(b) = c)$ jest równoważne $(b = a^c)$. Zatem:

$$x^2 - 5x + 19 = 5^2.$$

Obliczamy wartość prawej strony:

$$x^2 - 5x + 19 = 25.$$

Następnie przenosimy wszystkie składniki na jedną stronę równania i porządkujemy:

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Wyliczamy wyróżnik:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49.$$

Wyznaczamy pierwiastki równania:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}.$$

Stąd:

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = -1.$$

Na koniec sprawdzamy, czy wyrażenie pod logarytmem jest dodatnie dla tych wartości. Dla obu otrzymanych wyników:

$$x^2 - 5x + 19 > 0,$$

więc oba rozwiązania są dopuszczalne.

$$\boxed{x = -1 \text{ lub } x = 6.}$$

Zadanie za 3 pkt Funkcja i dziedzina:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2}, \qquad D_f = x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0 = \mathbb{R} \setminus \pm\sqrt{2}.$$

Korzystając z pochodnej ilorazu

$$f'(x) = \frac{(3x+1)'(x^2-2) - (3x+1)(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{3(x^2-2) - (3x+1) \cdot 2x}{(x^2-2)^2}.$$

Rozwijamy i upraszczamy licznik:

$$3(x^2-2)-(3x+1)2x = 3x^2-6-(6x^2+2x) = -3x^2-2x-6 = -(3x^2+2x+6).$$

Ostatecznie:

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2-2x-6}{(x^2-2)^2} = -\frac{3x^2+2x+6}{(x^2-2)^2}}$$

dla $(x \neq \pm\sqrt{2})$.

Zadanie za 4 pkt Funkcja i dziedzina:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+x^2}\right), \qquad D_f = \mathbb{R}$$

(gdyż $(\sqrt{1+x^2})$ jest określone dla każdego $(x \in \mathbb{R})$, a (arctg) jest określone dla wszystkich argumentów).

Zastosujemy regułę łańcuchową.

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\frac{(x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+(1+x^2)} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2+x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2+x^2}.$$

Ostatecznie

$$\boxed{f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(x^2+2)}, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}}$$

Zadanie za 5 pkt Do tego zadania możemy podejść jak do równości funkcyjnej - chcemy pokazać, że funkcja $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ jest stała i jej wartość (dla każdego argumentu x) jest równa $\frac{\pi}{2}$. Funkcja stała ma pochodną tożsamościowo równą zero. Policzmy więc pochodną takiej funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (\operatorname{arctg}(x))' + \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+\frac{x^2}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Funkcja ta ma pochodną wszędzie równą 0, więc jest ona stała. Policzmy więc jej wartość w dowolnym punkcie. Dla $x = 1$ mamy:

$$f(1) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = 2\operatorname{arctg}(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

Czyli funkcja ta jest stała i jej wartość w jednym (a więc i w każdym) punkcie jest równa $\frac{\pi}{2}$. Co dowodzi równości.

Zadanie za 6 pkt Funkcja ta jest ciągłą i różniczkowalna dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, bo jest tam złożeniem funkcji ciągłych i różniczkowalnych. Funkcja ta jest ciągła również w $x = 0$, bo:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \tag{20}$$

Bo wartość $|\sin x| \leq 1$. Ponieważ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ to funkcja jest ciągła w $x = 0$. Natomiast pochodną w punkcie $x = 0$ możemy policzyć z definicji, jako granicę ilorazu różnicowego, jeśli tylko ta granica istnieje:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} \end{aligned} \tag{21}$$

Jednakże ta granica nie istnieje, bez względu na to, z której strony $h \to 0$. A więc pochodna w $x = 0$ nie istnieje.

Zauważmy jednak, że pochodną możemy policzyć dla wszystkich $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(x \sin \frac{1}{x} \right)' &= (x)' \sin \frac{1}{x} + x \left(\sin \frac{1}{x} \right)' = \\ &= \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)' = \\ &= \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{22}$$

Tu też widzimy, dlaczego jest problem z pochodną w $x = 0$. Dla $x \to 0$ drugi człon pochodnej dąży do $\pm\infty$ (w zależności od kierunku, z którego dążymy do zera).