РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 3

ВАРИАНТ 6

дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил: Нгуен Фыок Дат, НФИбд-01-20 Студенческий билет: №1032195855

МОСКВА 2023г.

Модель боевых действий

1.Цели работы

```
Изучить некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера – и решить
задачу на построение этих моделей.
```

2.Теоретическое описание задачи

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками;
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов;
3. Боевые действия между партизанскими отрядами.

В первом случае модель описывается следующим образом:

$$(I)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)\\ \dfrac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)\end{cases} \quad \text{где}$$

a(t), h(t) – степени влияния различных небоевых факторов (болезни, травмы, дезертирство) на армии X и Y соответственно;

b(t), c(t) – эффективность боевых действий (качество стратегии, уровень вооружения, профессионализм солдат) армии Y и X соответственно;

P(t), Q(T) – возможность подхода подкрепления армии X и Y соответственно.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что потери партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорциональны не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$(II)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Здесь все величины имеют тот же смысл, что и в системе (I). в третьем случае с учетом всех предыдущих предположений модель ведения боевых действий имеет вид:

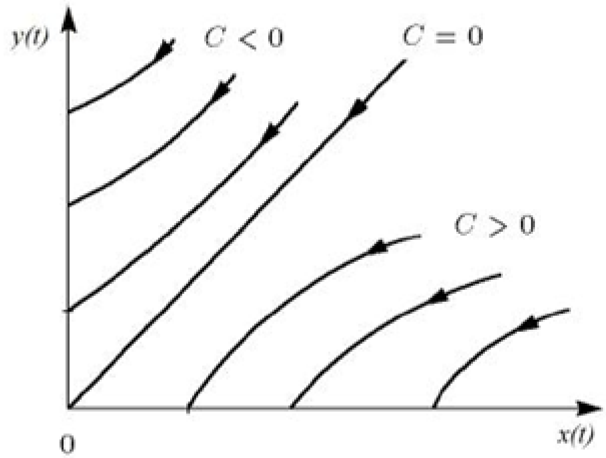
$$(III)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Для начального анализа так же можно применять сильно идеализированную, жесткую модель войны, при которой коэффициенты b(t) и c(t) считаются постоянными и не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, а также возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости, координаты этой точки – численности противостоящих армий. Тогда в первом случае модель примет вид (IV) и будет допускать точное решение (V):

$$(IV)\ \begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

$$(V)\ \frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx} \Rightarrow cxdx = bydy \Rightarrow cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки. Если начальная точка лежит выше прямой $\sqrt{b}y = \sqrt{c}x$, то гипербола выходит на ось y (побеждает армия Y); если же начальная точка ниже, то гипербола выходит на ось x (побеждает армия



X)

Рис.1 Фазовые траектории системы (IV)

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным – в девять раз и так далее (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Во втором случае модель примет вид (VI), приводимый к уравнению (VII), которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение (VIII):

$$(VI)\ \begin{cases} \dot{x} = -by(t) \\ \dot{y} = -cx(t)y(t) \end{cases}$$

$$(VII)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0$$

$$(VIII)\ \frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

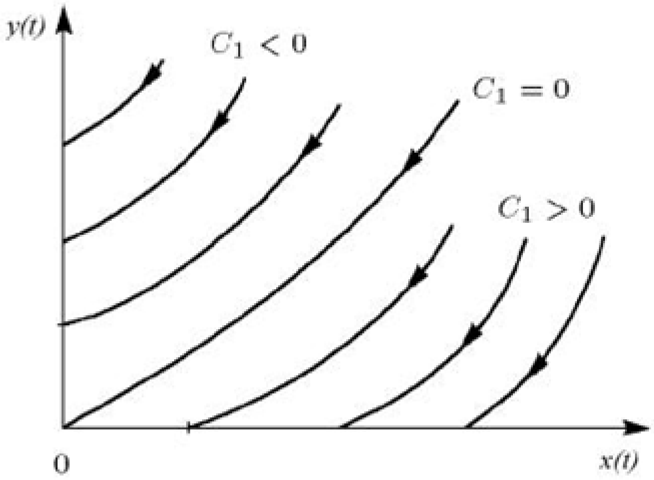


Рис.2. Фазовые траектории системы (VI)

Из рис.2 видно, что при C > 0 побеждает регулярная армия, а при C < 0 побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения.

3.Решение задачи. Реализация программы

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями x(t) и y(t). В начальный момент времени страна Х имеет армию численностью 50 000 человек, а в распоряжении страны У армия численностью в 69 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем P(t) и Q(t) непрерывные функции. Постройте графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

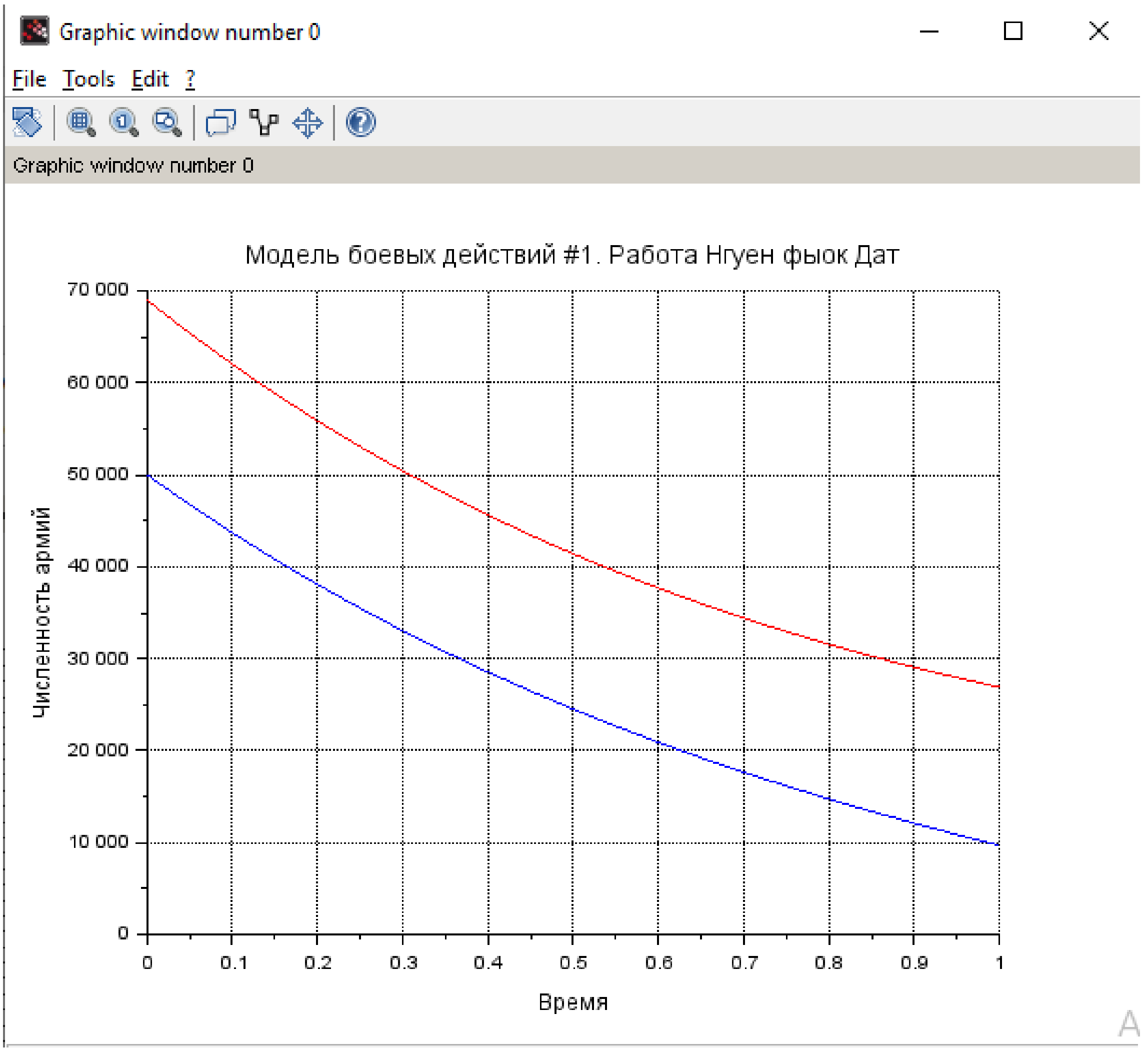
$$\frac{dx}{dt} = -0{,}34x(t) - 0{,}72y(t) + \sin(t+10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}89x(t) - 0{,}43y(t) + \cos(t+20)$$

Код в среде Scilab:

```
Scilab 6.1.1 Console

--> x0=50000;

--> y0=69000;

--> t0=0;

--> a=0.34;

--> b=0.72;

--> c=0.89;

--> h=0.43;

--> tmax=1;

--> dt=0.05;

--> t=[t0:dt:tmax];

--> function p=P(t)
  > p=sin(t+10);
  > endfunction

--> function q=Q(t)
  > q=cos(t+20);
  > endfunction

--> function dy=syst(t,y)
  > dy(1)=-a*y(1)-b*y(2)+P(t);
  > dy(2)=-c*y(1)-h*y(2)+Q(t);
  > endfunction

--> v0=[x0;y0];

--> y=ode(v0,t0,t,syst);

--> scf(0);

--> plot2d(t,y(1,:),style=2);

--> xtitle('Модель боевых действий #1. Работа Нгуен Фыок Дат','Численность армий');

--> plot2d(t,y(2,:),style=5);

--> xgrid();

--> xtitle('Модель боевых действий #1. Работа Нгуен Фыок Дат','Время','Численность армий');

--> 
```

Результат



2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

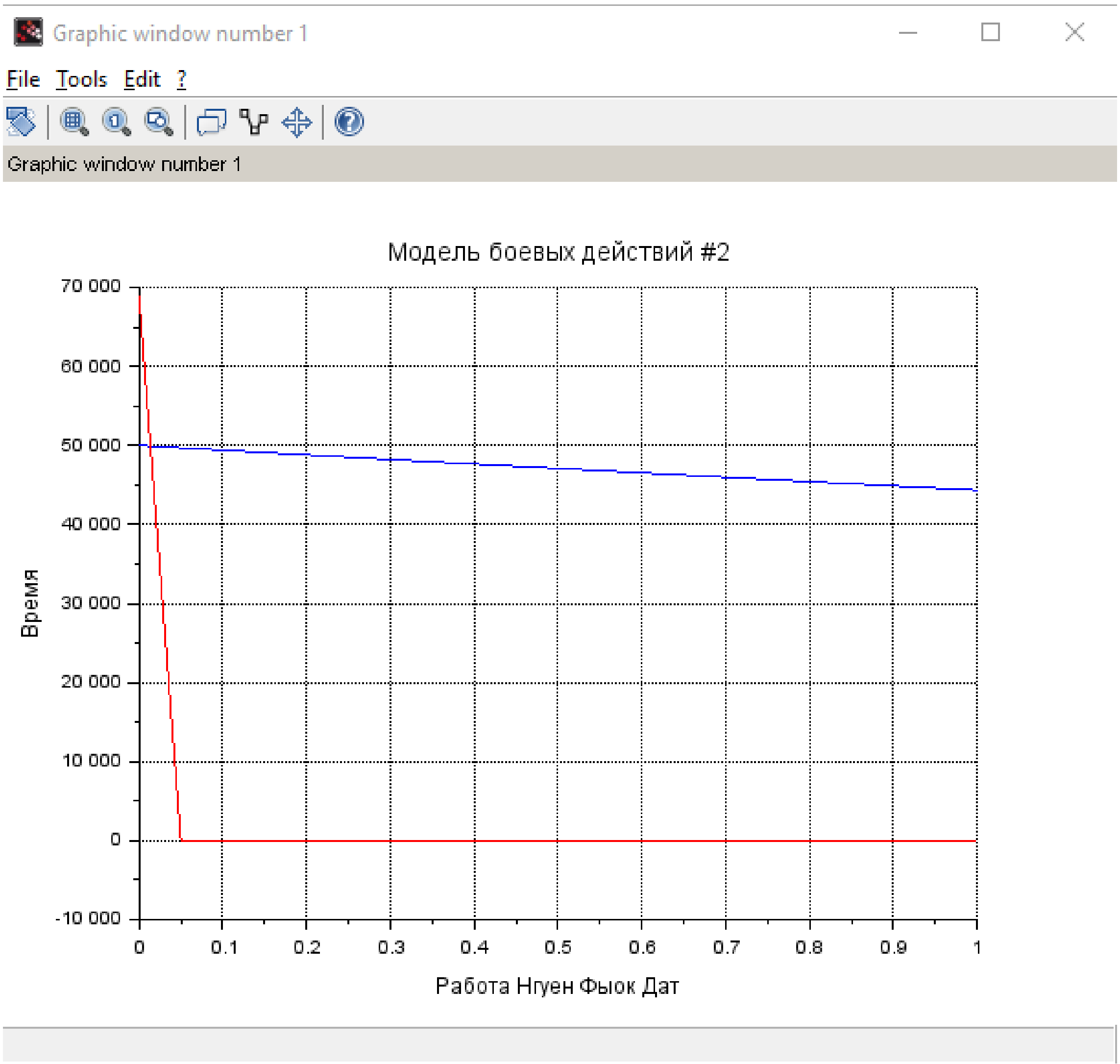
$$\frac{dx}{dt} = -0{,}12x(t) - 0{,}51y(t) + \sin(20t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}3x(t)y(t) - 0{,}61y(t) + \cos(13t)$$

Код в среде Scilab:

```
Scilab 6.1.1 Console

--> x0=50000;

--> y0=69000;

--> t0=0;

--> a=0.12;

--> b=0.51;

--> c=0.3;

--> h=0.61;

--> dt=0.05;

--> tmax=1;

--> function p=P(t)
  > p=sin(20*t);
  > endfunction

--> function q=Q(t)
  > q=cos(13*t);
  > endfunction

--> function dy=syst2(t,y)
  > dy(1)=-a*y(1)-b*y(2)+P(t);
  > dy(2)=-c*y(1)*y(2)-h*y(2)+Q(t);
  > endfunction

--> v0=[x0;y0];



--> t=[t0:dt:tmax];

--> y=ode(v0,t0,t,syst2);

--> scf(0);

--> scf(1);

--> plot2d(t,y(1,:),style=2);

--> xtitle('Модель боевых действий #2','Работа Нгуен Фыок Дат','Время','Численность армии');

--> plot2d(t,y(2,:),style=5);

--> xgrid();

-->
```

Результат


Graphic window number 1
File Tools Edit ?
Graphic window number 1
Модель боевых действий #2
70 000
60 000
50 000
40 000
30 000
20 000
10 000
0
-10 000
Время
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Работа Нгуен Фыок Дат