РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 4

дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил: Нгуен Фыок Дат

Группа: НФИБД-01-20 Номер студ. билет: 1032195855

МОСКВА 2023 г.

I. Вариант 6:

Вариант № 6

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x}+8x=0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x}+3\dot{x}+6x=\sin(0.5t)$

На интервале $t\in[0;\ 45]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0=-1, y_0=0$

II.Задание:

```
1.    Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания
2.    Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием,
построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3.    Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему
действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с
действием внешней силы.
```

III. Решение

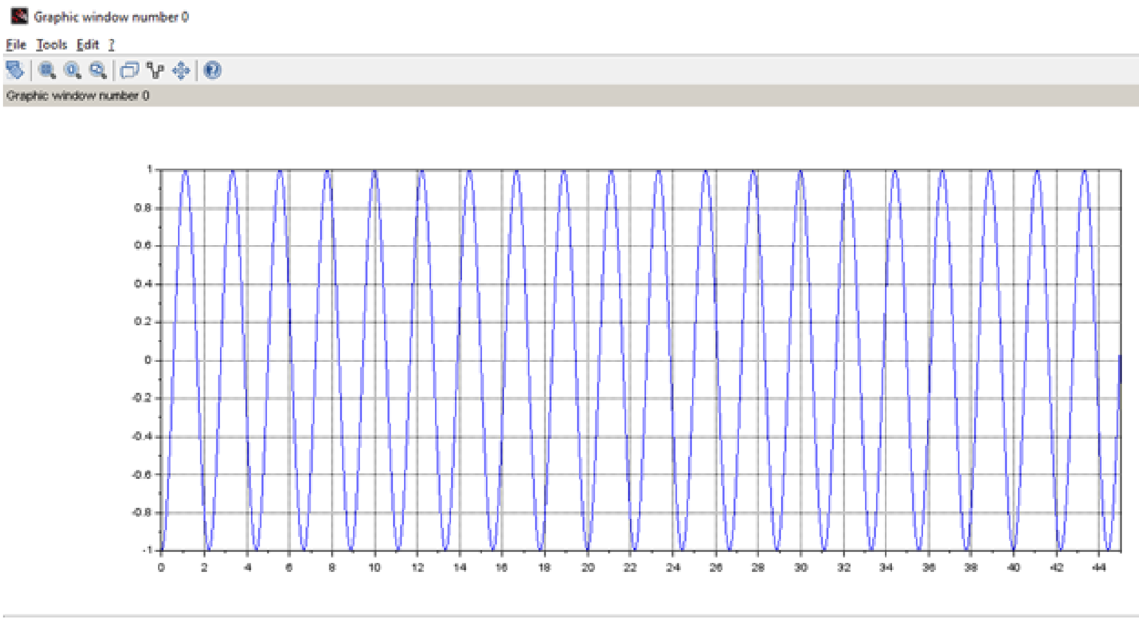
1. В системе отсутствуют потери энергии (колебания без затухания)

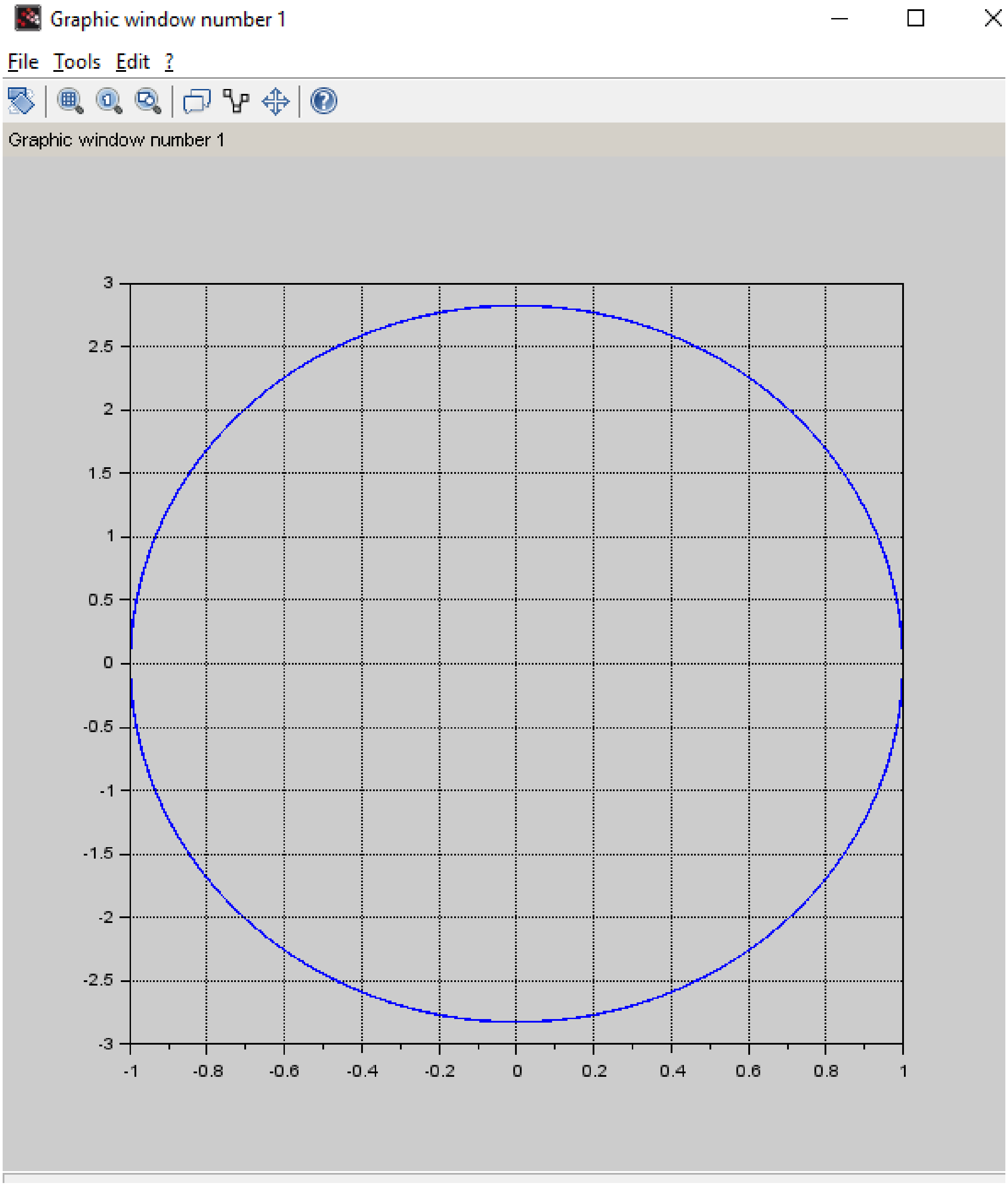
Код в Scilab:

```
--> t0=0;

--> x0=[-1;0];

--> t=[0:0.05:45];

--> function dx=y(t,x)
  > dx(1)=x(2);
  > dx(2)=-8*x(1);
  > endfunction

--> x=ode(x0,t0,t,y);

--> n=size(x,"c");

--> for i=1:n
  > y1(i)=x(1,i);
  > y2(i)=x(2,i);
  > end

--> plot(t,y1);
WARNING: Transposing row vector X to get compatible dimensions

--> xgrid();

--> figure
```

```
Handle of type "Figure" with properties:
========================================
children: "Axes"
figure_position = [200,200]
figure_size = [626,587]
axes_size = [610,460]
auto_resize = "on"
viewport = [0,0]
figure_name = "Graphic window number %d"
figure_id = 1
info_message = ""
color_map = matrix 33x3
pixel_drawing_mode = "copy"
anti_aliasing = "off"
immediate_drawing = "on"
background =  33
visible = "on"
rotation_style = "unary"
event_handler = ""
event_handler_enable = "off"
user_data = []
resizefcn = ""
closerequestfcn = ""
resize = "on"
toolbar = "figure"
toolbar_visible = "on"
menubar = "figure"
menubar_visible = "on"
infobar_visible = "on"
dockable = "on"
layout = "none"
layout_options = "OptNoLayout"
default_axes = "on"
icon = ""
tag = ""

--> plot(y1,y2)

--> plot(y1,y2);

--> xgrid();
```

Результаты:


Graphic window number 0
File Tools Edit ?
Graphic window number 0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44



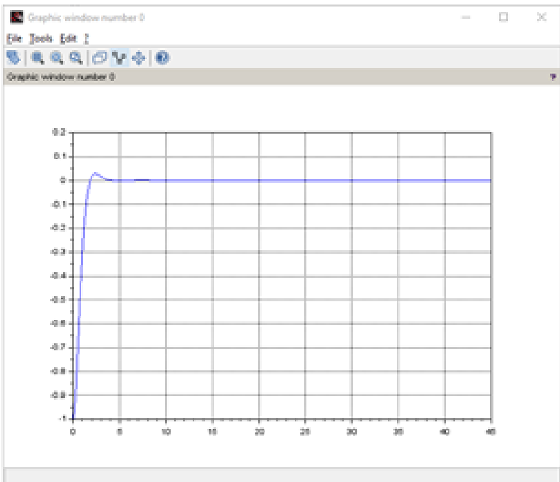
2. В системе присутствуют потери энергии (колебания с затуханием)

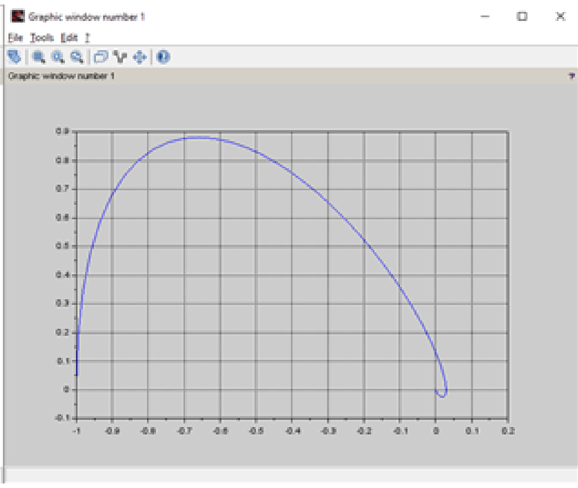
Код в Scilab:

```
--> t0=0;

--> x0=[-1;0];

--> t= [0:0.05:66];

--> function dx=y(t,x)
  >     dx(1)=x(2);
  >     dx(2)=-4*x(1)-3*x(2);
  > endfunction

--> x = ode(x0,t0,t,y);

--> n=size(x,"c");

--> for i =1:n
  >     y1(i)=x(1,i);
  >     y2(i)=x(2,i);
  > end

--> plot(t,y1);
WARNING: Transposing row vector X to get compatible dimensions

--> xgrid();

--> figure
```

```
Handle of type "Figure" with properties:
========================================
children: "Axes"
figure_position = [200,200]
figure_size = [626,587]
axes_size = [610,460]
auto_resize = "on"
viewport = [0,0]
figure_name = "Graphic window number %d"
figure_id = 1
info_message = ""
color_map = matrix 33x3
pixel_drawing_mode = "copy"
anti_aliasing = "off"
immediate_drawing = "on"
background =  33
visible = "on"
rotation_style = "unary"
event_handler = ""
event_handler_enable = "off"
user_data = []
resizefcn = ""
closerequestfcn = ""
resize = "on"
toolbar = "figure"
toolbar_visible = "on"
menubar = "figure"
menubar_visible = "on"
infobar_visible = "on"
dockable = "on"
layout = "none"
layout_options = "OptNoLayout"
default_axes = "on"
icon = ""
tag = ""

-->

-->

--> plot(y1,y2);

--> xgrid();
```

Результаты:





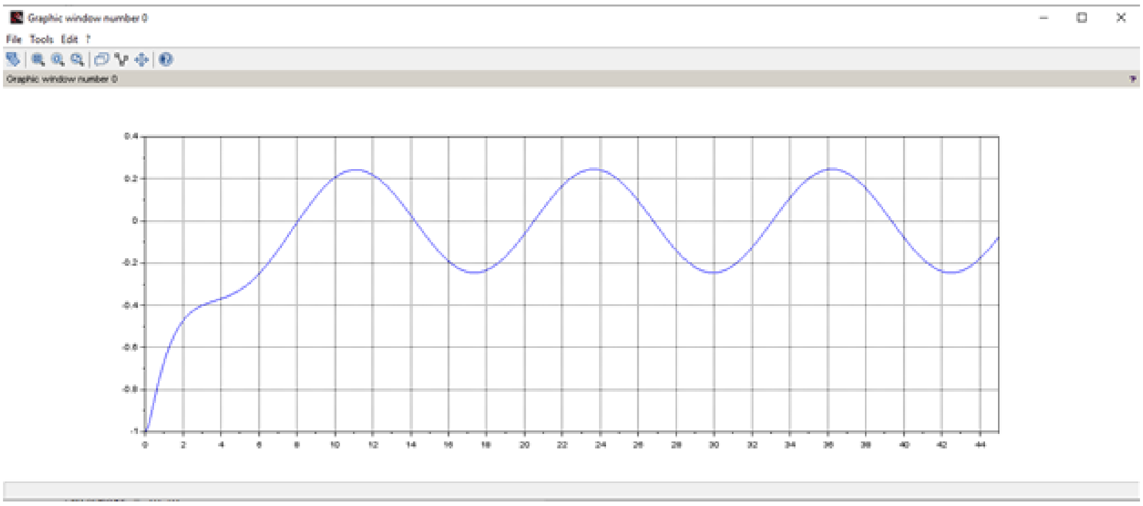
3. На систему действует внешняя сила.

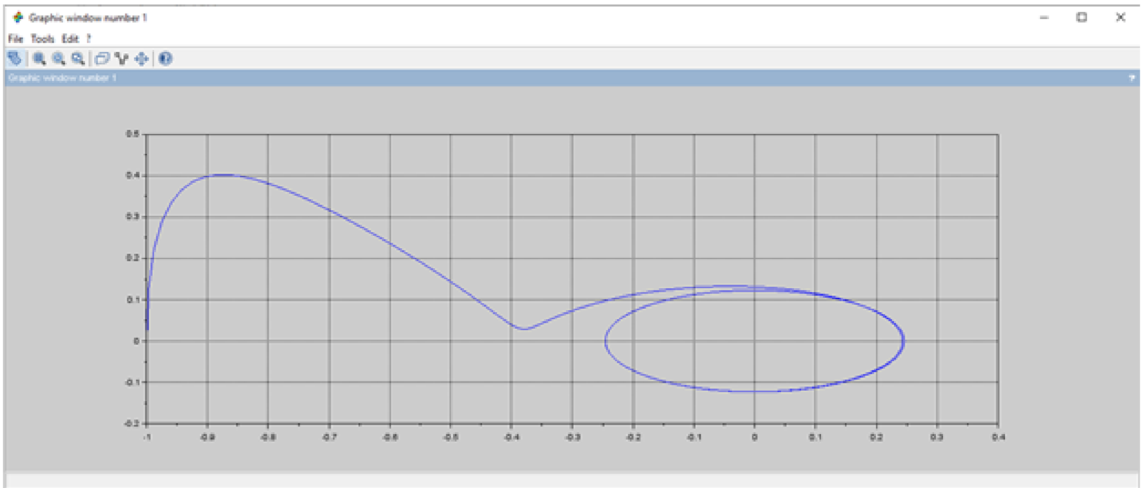
Код в Scilab:

```
--> t0=0;

--> x0=[-1;0];

--> t= [0:0.05:45];

--> function f=f(x)
  >     f=sin(0.5*t);
  > endfunction

--> function dx=y(t,x)
  >     dx(1)=x(2);
  >     dx(2)=-3*x(1)-6*x(2)-f(t);
  > endfunction

--> x = ode(x0,t0,t,y);

--> n=size(x,"c");

--> for i =1:n
  >     y1(i)=x(1,i);
  >     y2(i)=x(2,i);
  > end

--> plot(t,y1);
WARNING: Transposing row vector X to get compatible dimensions

--> xgrid();

--> figure
```

```
Handle of type "Figure" with properties:
========================================
children: "Axes"
figure_position = [200,200]
figure_size = [626,587]
axes_size = [610,460]
auto_resize = "on"
viewport = [0,0]
figure_name = "Graphic window number %d"
figure_id = 1
info_message = ""
color_map = matrix 33x3
pixel_drawing_mode = "copy"
anti_aliasing = "off"
immediate_drawing = "on"
background =  33
visible = "on"
rotation_style = "unary"
event_handler = ""
event_handler_enable = "off"
user_data = []
resizefcn = ""
closerequestfcn = ""
resize = "on"
toolbar = "figure"
toolbar_visible = "on"
menubar = "figure"
menubar_visible = "on"
infobar_visible = "on"
dockable = "on"
layout = "none"
layout_options = "OptNoLayout"
default_axes = "on"
icon = ""
tag = ""

--> plot(y1,y2);

--> xgrid();
```

Результаты:





IV. Ответы на вопросы 1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x$$

т.е. вторая производная смещения прямо пропорциональна (с противоположным знаком) смещению. Такое уравнение называется уравнением гармонического колебания. Решением является функция:

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

ω_0 – частота колебания, A – амплитуда колебания, φ_0 – начальная фаза колебания. A и φ_0 определяются из начальных условий $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}\,(t_0) = y_0 \end{cases}$

*2. Дайте определение осциллятора *

Гармонический осциллятор – система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x (согласно закону Гука)

*3. Запишите модель математического маятника *

Математический маятник — осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки, находящейся на невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения.

Колебания математического маятника описываются обыкновенным дифференциальным уравнением: $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$
где ω - положительная константа, определяемая исключительно из параметров маятника. Неизвестная функция $x(t)$ — это угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия, выраженный в радианах; $\omega = \frac{g}{L} = g$ (L — длина подвеса, g — ускорение свободного падения).

Период малых собственных колебаний математического маятника длины L неподвижно подвешенного в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ и не зависит от амплитуды колебаний и массы маятника.

*4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка *

a. Представляем вторую производную $x''(t)$ как функцию от $x'(t), x, t$:
$$x'' = F(x', x, t)\ (1)$$
b. Обозначаем, $y(t) = x'(t)$, тогда $x''(t) = y''(t)$
c. Подставляем $y(t)$ в уравнение (1) и объединяем в систему с принятой заменой $y(t) = x'(t)$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = F(y, x, t) \end{cases}$. Получили систему двух дифференциальных уравнений первого порядка.

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:
$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n\ (1)$$
Для системы (1) пространство переменных $x_1, \dots, x_n \in R^n$ есть фазовое пространство. В частности, если $n = 2$, то фазовое пространство называют фазовой плоскостью. Положение в этом пространстве, которое занимает при фиксированном t точка $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ – фазовая точка. Кривые в R^n, которые описывают фазовые точки при изменении параметра t называются фазовыми траекториями. Под направлением на фазовой траектории подразумевают направление движения фазовой точки $x_1, \dots, x_n$ по траектории в сторону возрастания t. Картина, которую образуют фазовые траектории на плоскости $Ox_1, \dots, x_n$ с указанным на них направлением движения, носит название фазового портрета.