Masterarbeit eingereicht an der

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Unternehmensführung und Organisation
Prof. Dr. Thomas Spengler

Titel der Arbeit

Die Anwendung eines genetischen Algorithmus auf das Timetabling Problem einer Grundschule

Betreuer: Prof. Dr. Thomas Spengler
13.08.2012

Julia Lange

Liebermannstraße 16	BWL/Business Economics (M.Sc.)
39108 Magdeburg	4. Fachsemester
julialange5388@aol.com	Matrikelnr.: 181527
Telefon: 0163-3063345	

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis **III**

Abbildungsverzeichnis **IV**

Tabellenverzeichnis **V**

Symbolverzeichnis **VI**

1 Einführung **1**

1.1 Problemstellung 1

1.2 Aufbau der Arbeit 2

2 Struktur des Timetabling Problems einer Grundschule **3**

2.1 Eingangsdaten 3

2.2 Curriculum 6

2.3 Ziele 9

2.4 Beschränkungen 11

3 Modellierung und Lösung des Timetabling Problems mittels linearer Optimierung **14**

3.1 Linearer Modellierungsansatz für das Timetabling Problem der Grundschule 14

3.2 Generierung zulässiger Lösungen und Komplexität des linearen Optimierungsproblems 18

3.2.1 Bedingung für die Generierung zulässiger Pläne 18

3.2.2 Komplexität des Timetabling Problems 20

3.3 LP-Relaxation zur Lösung des Timetabling Problems 21

3.4 Gliederung des linearen Optimierungsmodells in zwei Planungsebenen 22

4 Lösung des Timetabling Problems mittels genetischem Algorithmus **23**

4.1 Vorbemerkungen zur Auswahl des Lösungsverfahrens 23

4.2 Aufbau und Vorgehen eines genetischen Algorithmus 24

4.3 Repräsentation und Codierung eines Stundenplanes 25

4.4 Generierung der Anfangspopulation 30

4.5 Bewertung eines Planes 33

4.5.1 Unterscheidung von Fitness, Zielfunktion und Fitnessfunktion 33

4.5.2 Zielfunktion 34
4.5.3 Fitnessfunktion zur Berechnung der Fitness 39
4.6 Genetische Operatoren 42
4.6.1 Selektion 42
4.6.2 Crossover 45
4.6.3 Mutation 48
4.7 Zusammensetzung der Folgegeneration 50
4.8 Abbruchkriterien 51
4.9 Erweiterungen des genetischen Basis-Algorithmus 52

5 Anwendung des genetischen Algorithmus 56

6 Fazit 59

Anhang X

Literatur XXIX

Abkürzungsverzeichnis

Anw.	Anwendung
Anz.	Anzahl
BB	Building Block
EA	Evolutionärer Algorithmus
ESA	Ergänzende schulische Angebote
GA	Genetischer Algorithmus
Ind.	Individuum
lin.	linear
PMX	Partially Mapped Crossover
Wkt.	Wahrscheinlichkeit

Abbildungsverzeichnis

Abb.1: Pseudo-Code eines Basis-GA 26
Abb.2: Varianten des Crossover 47
Abb.3: Grafische Übersicht der Ergebnisse der Anwendung des genetischen Algorithmus 57

Tabellenverzeichnis

Tab.1: Schülerverteilung der Grundschule 4
Tab.2: Zu unterrichtende Fächer der Grundschule 4
Tab.3: Lehrerkollegium der Grundschule 5
Tab.4: Raumausstattung der Grundschule 6
Tab.5: Schulstundeneinteilung der Grundschule 6
Tab.6: Curriculum der Grundschule 8
Tab.7: Populationgrößen verschiedener praktischer Anwendungen 32
Tab.8: Übersicht der Komponenten und Parameter der Anwendung des genetischen Algorithmus 57

Symbolverzeichnis

Kapitel 3

Indizes und Indexmengen

$\bar{F} :=$	$\{f \mid f = 1, ..., F\}$; f ist ein Fach
$\hat{F} :=$	Teilmenge von $\bar{F}$
$\bar{F}_k :=$	$\{f \mid$ Fach f muss in Klasse k unterrichtet werden$\}$
$\bar{F}_l :=$	$\{f \mid$ Fach f kann von Lehrer l unterrichtet$\}$
$\bar{F}_r :=$	$\{f \mid$ Fach f kann in Raum r unterrichtet werden$\}$
$\bar{F}_{lt} :=$	$\{f \mid$ Fach f kann von Lehrer l in Schulstunde t unterrichtet werden$\}$
$\bar{F}_{lt+1} :=$	$\{f \mid$ Fach f kann von Lehrer l in Schulstunde $t+1$ unterrichtet werden$\}$
$F^*_l :=$	$\{f \mid$ Fach f von Lehrer l unterrichtet$\}$
$F^*_{kl} :=$	$\{f \mid$ Fach f wird in Klasse k von Lehrer l unterrichtet$\}$
$\bar{K} :=$	$\{k \mid k = 1, ..., K\}$; k ist eine Klasse
$\bar{K}_f :=$	$\{k \mid$ Klasse k muss im Fach f unterrichtet werden$\}$
$\bar{K}_t :=$	$\{k \mid$ Klasse k kann in Schulstunde t unterrichtet werden$\}$
$\bar{K}_{lt} :=$	$\{k \mid$ Klasse k kann von Lehrer l in Schulstunde t unterrichtet werden$\}$
$K^*_{lf} :=$	$\{k \mid$ Klasse k wird im Fach f von Lehrer l unterrichtet$\}$
$\bar{L} :=$	$\{l \mid l = 1, ..., L\}$; l ist ein Lehrer
$\bar{L}_f :=$	$\{l \mid$ Lehrer l kann Fach f unterrichten$\}$
$\bar{L}_t :=$	$\{l \mid$ Lehrer l kann in Schulstunde t unterrichten$\}$
$\bar{L}_{ft} :=$	$\{l \mid$ Lehrer l kann Fach f in Schulstunde t unterrichten$\}$
$\bar{L}_{kt} :=$	$\{l \mid$ Lehrer l kann Klasse k in Schulstunde t unterrichten$\}$
$\bar{L}_{kt+1} :=$	$\{l \mid$ Lehrer l kann Klasse k in Schulstunde $t+1$ unterrichten$\}$
$L^*_f :=$	$\{l \mid$ Lehrer l unterrichtet Fach $f\}$
$L^*_{kf} :=$	$\{l \mid$ Lehrer l unterrichtet Klasse k im Fach $f\}$
$\bar{R} :=$	$\{r \mid r = 1, ..., R\}$; r ist ein Raum
$\bar{R}_f :=$	$\{r \mid$ Raum r kann für Fach f genutzt werden$\}$
$\bar{R}_t :=$	$\{r \mid$ Raum r kann in Schulstunde t genutzt werden$\}$
$\bar{R}_{ft} :=$	$\{r \mid$ Raum r kann für Fach f in Schulstunde t genutzt werden$\}$
$\bar{R}_{ft+1} :=$	$\{r \mid$ Raum r kann für Fach f in Schulstunde $t+1$ genutzt werden$\}$
$\bar{T} :=$	$\{t \mid t = 1, ..., T\}$; t ist eine Schulstunde; $T = 30$ in der Planungsperiode
$\bar{T}_f :=$	$\{t \mid$ in Periode t kann Fach f unterrichtet werden$\}$
$\bar{T}_k :=$	$\{t \mid$ in Periode t kann Klasse k unterrichtet werden$\}$
$\bar{T}_l :=$	$\{t \mid$ in Periode t kann Lehrer l unterrichten$\}$
$\bar{T}_{kl} :=$	$\{t \mid$ in Periode t kann Lehrer l Klasse k unterrichten$\}$

Daten

$b_{kf} :=$ ist der Bedarf Schulstunden, die Klasse k im Fach f im Planungsperiode unterrichtet werden muss

$b_{kl} :=$ ist der Bedarf an Schulstunden, die Klasse k von Lehrer l im Planungsperiode unterrichtet werden muss

$\bar{e}_l :=$ ist die Anzahl Schulstunden, die Lehrer l in der Planungsperiode für ergänzende schulische Angebote oder andere Sondertätigkeiten zur Verfügung steht

$\bar{s}_l :=$ ist die Anzahl Schulstunden, die Lehrer l im Planungsperiode zu leisten hat

Entscheidungsvariable

$$x_f^t := \begin{cases} 1 & \text{wenn Fach } f \text{ in Schulstunde } t \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{klf} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ im Fach } f \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{klrf}^t := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ in Raum } r \text{ im Fach } f \text{ in Schulstunde } t \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{klrf}^{t+1} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ in Raum } r \text{ im Fach } f \text{ in Schulstunde } t+1 \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{kl}^t := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ in Schulstunde } t \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel 4

Indizes und Indexmengen

$\bar{H} :=$	$\{h = 1, \ldots, H\}$; h ist eine harte Beschränkung Hh
$I :=$	$\{i = 1, \ldots, n\}$; i ist ein Individuum
$J :=$	$\{j = 1, \ldots, m\}$; j ist eine Population
$POP_j :=$	$\{i\vert$ Individuum i gehört zur Population $j\}$
$\bar{W} :=$	$\{w = 1, \ldots, W\}$; w ist eine weiche Beschränkung Ww

Daten

$d^t_{klrf} :=$	ist die „Erwünschtheit“ einer Zuordnung von Klasse k und Lehrer l mit Fach f zu Raum r in Schulstunde t
$fit_i :=$	ist die Fitness des Individuums i
$\bar{fit} :=$	durchschnittliche Fitness der Population
$fit^{max} :=$	maximaler Fitnesswert in der Population
$fit^{min} :=$	minimaler Fitnesswert in der Population
$g :=$	ist maximale Anzahl zu erzeugender Generationen
$n :=$	ist die Anzahl Individuen in einer Population (Populationsgröße)
$p_c :=$	ist die Wahrscheinlichkeit für die Anwendung eines Crossover
$p_m :=$	ist die Wahrscheinlichkeit für die Anwendung einer Mutation

$$v_{lt} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Lehrer } l \text{ in Schulstunde } t \text{ verfügbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$z_i :=$	ist der Zielfunktionswert einer Lösung (eines Individuums) i
$z_i^H :=$	ist der Teilzielfunktionswert einer Lösung (eines Individuums) i bezogen auf harte Beschränkungen
$z_i^W :=$	ist der Teilzielfunktionswert einer Lösung (eines Individuums) i bezogen auf weiche Beschränkungen
$\alpha :=$	ist das Gewicht der Abweichung von harten Beschränkungen
$\beta^w :=$	ist das Gewicht der Abweichung von der weichen Beschränkung Ww

$$\gamma := \begin{cases} 1 & \text{wenn alle harten Beschränkungen erfüllt sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entscheidungsvariable

$a^h_{ft} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Fach f und Schulstunde t
$a^h_{kf} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Klasse k und Fach f
$a^h_{klf} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Klasse k, Lehrer l und Fach f
$a^h_{kt} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Klasse k und Schulstunde t
$a^h_{l} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Lehrer l
$a^h_{lt} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Lehrer l und Schulstunde t
$a^h_{rt} :=$	ist die Abweichung von der Beschränkung Hh bezüglich Raum r und Schulstunde t
$c^w :=$	ist die Abweichung von der weichen Beschränkung Ww
$c^w_l :=$	ist die Abweichung von der weichen Beschränkung Ww bezüglich Lehrer l
$c^w_{kf} :=$	ist die Abweichung von der weichen Beschränkung Ww bezüglich Klasse k und Fach f

1 Einführung

1.1 Problemstellung

Die Schule als öffentlicher Betrieb[1] hat die Aufgabe das kollektive Bedürfnis nach Bildung zu befriedigen. Das Land als Schulträger stellt die personellen und räumlichen Ressourcen dabei unentgeltlich zur Verfügung und schafft die rechtlichen Rahmenbedingungen für ein landesweit einheitliches Bildungssystem. Lehrer und Schulgebäude mit verschiedenen Räumen sind dabei als knappe Ressourcen zu betrachten, da sie nicht in unbegrenzter Anzahl zur Verfügung stehen. Ziel des Schulträgers ist somit der verschwendungsfreie Einsatz dieser Ressourcen zur Bedürfnisbefriedigung.
In dieser Arbeit wird die Zuordnung der Ressourcen in einem kurzfristigen Planungszeitraum von einem Schuljahr betrachtet. Die räumliche Ressource der Schulgebäude ist dabei als gegeben anzunehmen und kann nur in einer langfristigen Planung variiert werden. Im ersten Planungsschritt evaluiert das Land als Schulträger für jede Schule den Personalbedarf anhand der Schülerzahl und ordnet Lehrer mit einer entsprechenden Anzahl zu leistender Wochenstunden zu. Damit sind für den Schulleiter im zweiten Planungsschritt räumliche Ressourcen, die Personalausstattung und der Personalbedarf gegeben. Es gilt Lehrer, Klassen, Räume und Fächer eignungs- und bedarfsgerecht den gegebenen Schulstunden einer Woche zuzuordnen.
Eine solche Planungssituation stellt ein Timetabling Problem dar, bei dem Elemente unter Berücksichtigung verschiedener Beschränkungen Zeitperioden zugeordnet werden müssen. Im Bereich Bildung können nach der Art der zuzuordnenden Ereignisse Exam, Course und School Timetabling unterschieden werden. Beschränkt werden diese Timetabling Probleme stets durch gegebene, sich mitunter überschneidende Teilnehmermengen der Ereignisse. Das Exam Timetabling betrachtet die Zuordnung von Prüfungen zu Räumen mit gegebener Kapazität und Zeitintervallen, so dass jeder Teilnehmer alle gewählten Prüfungen wahrnehmen kann. Die Zuordnung von Kursen, die durch ihre Dauer, einen Dozenten und eine Raumanforderung charakterisiert sind, bilden Course Timetabling Probleme ab, wobei auch hier für alle Teilnehmer und Dozenten ein räumlich und zeitlich umsetzbarer Plan erzielt werden soll.
In dieser Arbeit wird ein School Timetabling Problem betrachtet, bei dem die Schülergruppen (Klassen) zwar überschneidungsfrei sind, diese jedoch eine bestimmte Anzahl Unterrichtsstunden in verschiedenen Fächern mit personellen und räumlichen Anforderungen erhalten müssen.

[1] Vgl. Bea und Schweitzer (2009), S.410/411.

Das School Timetabling Problem kann zudem als Problem der Personaleinsatzplanung interpretiert werden. Die Lehrer als Mitarbeiter werden dabei Allokationsobjekten in Form von Arbeitszeit (Schulstunde), Arbeitsort (Raum) und einzelnen Tätigkeiten (bspw. Deutsch in Klasse 2a) zugeordnet[2]. Als oberstes Ziel ist die Umsetzbarkeit des Planes zu sehen, die unter anderem durch die Einfachzuordnung von Klassen, Lehrern und Räumen und die Einhaltung der gegebenen Anzahl der Unterrichtsstunden eines Faches in einer Klasse definiert wird. Neben den Bedingungen der Zulässigkeit des Planes sind verschiedene wünschenswerte Aspekte in Form subjektiver Präferenzen der Lehrer zu berücksichtigen. Dazu gehören eine möglichst geringe Anzahl der Freistunden sowie die gleiche Verteilung von Freistunden im Planungszeitraum.
Das im School Timetabling betrachtete Zuordnungsproblem ist in die Klasse der NP-schweren Probleme einzuordnen. Aus diesem Grund ist die Nutzung heuristischer Verfahren zur Generierung guter Lösungen notwendig. Häufige Anwendung finden dabei direkte Heuristiken, die das Planungsverhalten des Schulleiters imitieren, Graph-Coloring Modelle, Suchverfahren sowie Logic und Constraint-Based Programming. In dieser Arbeit sollen ein genetischer Algorithmus auf das Timetabling Problem einer Grundschule angewendet und problemspezifische Varianten seiner Komponenten beschrieben werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Im folgenden Kapitel 2 wird das betrachtete Timetabling Problem einer Grundschule strukturiert und näher erläutert. Zunächst werden die knappen Ressourcen Lehrer, Räume und Zeitperioden sowie die zu unterrichtenden Fächer und Klassen mit gegebener Schülerzahl als Eingangsdaten vorgestellt und quantifiziert (2.1). Abschnitt 2.2 erläutert das Curriculum der Grundschule, welches als Eingangsdatum eine Sonderstellung einnimmt. Die Ziele für das Timetabling Problems der Grundschule werden in Abschnitt 2.3 beschrieben und daraus die Beschränkungen der Planung abgeleitet (2.4).
Die beschriebene Planungssituation der Grundschule wird in Kapitel 3 als lineares, ganzzahliges Optimierungsmodell formuliert. Die präzise, mathematische Erfassung aller Problemaspekte findet in Abschnitt 3.1 statt. Es folgen einige Bemerkungen zu der Generierung zulässiger Lösungen (3.2.1), der Komplexität des Optimierungsproblems (3.2.2) und der möglichen Anwendung einer LP-Relaxation (3.3). Basierend auf den Erkenntnissen zur Komplexität ergibt sich die Notwendigkeit eines heuristischen Lösungsansatzes, der die Strukturierung des Problems in Teilplanungen voraussetzt. Diese werden in

[2]Vgl. Spengler (2004), Sp. 1470.

Abschnitt 3.4 vorgestellt.
Als heuristisches Lösungverfahren wird im vierten Kapitel ein genetischer Algorithmus anhand verschiedener Anwendungen in der Literatur beschrieben und diskutiert. Zunächst werden die Wahl dieser Heuristik begründet (4.1) und das grundlegende Vorgehen eines genetischen Algorithmus erläutert (4.2). Anschließend werden seine Komponenten Chromosomendarstellung (4.3), Generierung der Anfangspopulation (4.4), Fitnessbestimmung (4.5), genetische Operatoren in Form von Selektion (4.6.1), Crossover (4.6.2) und Mutation (4.6.3), Zusammensetzung der Folgegeneration (4.7) und Abbruchkriterium (4.8) beschrieben. Die Erklärungen werden ergänzt durch eine Diskussion der in der Literatur angewendeten Varianten der einzelnen Komponenten, um die für das Timetabling Problem der Grundschule erfolgversprechendsten zu bestimmen. Da nur eine begrenzte Anzahl der Komponenten in dieser Arbeit diskutiert werden kann, finden einige Erweiterungen des Basisalgorithmus in Abschnitt 4.9 Erwähnung.
Kapitel 5 gibt eine Übersicht der händischen Anwendung eines genetischen Algorithmus auf das Planungsproblem der Grundschule mit verschiedenen Komponenten und Steuerparametern. Der Vergleich der erzielten Ergebnisse dient als Grundlage einer kritischen Betrachtung des gewählten Lösungsverfahrens sowie einer Einschätzung zur Wirkung und Eignung einzelner Komponenten.
Im abschließenden sechsten Kapitel werden die wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und weiterführende Konzepte genannt.

2 Struktur des Timetabling Problems einer Grundschule

2.1 Eingangsdaten

Im Planungsfeld einer Grundschule sind drei Arten von knappen Ressourcen und Klassen mit fixer Schülerzahl, zu unterrichtende Fächer sowie das Curriculum als gegebene Daten zu berücksichtigen. Die Ressourcen lassen sich dabei in Lehrkräfte, Räume und Zeitperioden differenzieren. Die Eingangsdaten definieren somit die Allokationsobjekte Klasse, Fach, Raum und Schulstunde, welche den Lehrern zugeordnet werden sollen.
In einer Grundschule in Sachsen-Anhalt werden Schüler der Jahrgangsstufen 1 bis 4 unterrichtet. Die Jahrgangsstufen 1 und 2 werden durch den Begriff der Schuleingangsphase beschrieben und im jahrgangsübergreifenden Unterricht in bestimmten Fächern gemeinsam unterrichtet. Die Festlegung der Klassen

und ihrer Schülerzahl erfolgt zu Beginn jeden Schuljahres für die Klassenstufe 1 und ändert sich in den Folgejahren nur gering durch Wohnortwechsel und Versetzungen einzelner Schüler. Die Klassengröße wird generell so gewählt, dass jede Klasse in jedem Raum der Schule unterrichtet werden kann. Für die betrachtete Planungsperiode der Grundschule sind die Klassen und ihre Schülerzahl in Tabelle 1 dargestellt.

Klasse	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
Schüler	20	19	20	18	20	20	18	19

Tabelle 1: Schülerverteilung der Grundschule

Die zu unterrichtenden Fächer in der betrachteten Grundschule sind in der Tabelle 2 mit den Indizes 1 bis 10 beschrieben. Die Unterrichtsbezeichnungen 11 bis 17 sind künstlich hinzugefügte Fächer, um bestimmte Planungsbedingungen in der folgenden Modellierung richtig erfassen zu können.

Index	**Fach**	**Abkürzung**
1	Deutsch	De
2	Heimat-Sachunterricht	Hsa
3	Mathe	Ma
4	Musik	Mu
5	Gestalten	Gest
6	Sport	Sp
7	Ethik	Eth
8	Religion	Rel
9	Englisch	Eng
10	Schulspezifischer Unterricht	Ssu
11	Förderunterricht Deutsch	DeFö
12	Förderunterricht Mathematik	MaFö
13	Jahrgangsübergreifender Unterricht	Jü
14	Kunst	Ku
15	Werken	Wk
16	Ethik/Religion 1/2	ER1/2
17	Ethik/Religion 3/4	ER3/4

Tabelle 2: Zu unterrichtende Fächer der Grundschule

Das Fach Schulspezifischer Unterricht dient je nach Schulkonzept und Förderbedarf der Schüler der komplexen Anwendung des erworbenen Wissens und Könnens. In der betrachteten Grundschule wird es unter anderem für das Fach Englisch in den Jahrgangsstufen 1 und 2 genutzt.
Ein Lehrer wird charakterisiert durch seine vertraglich festgelegte Anzahl Wochenstunden und die fachliche Lehrbefähigung. Aus der Gesamtschülerzahl der Schule ergibt sich der Gesamtbedarf an Lehrerwochenstunden. Das zur Verfügung stehende Lehrerkollegium der Grundschule ist in Tabelle 3 dargestellt.

Die Verfügbarkeit wird für die Lehrer angegeben, die für eine bestimmte Stundenzahl an die Grundschule abgeordnet sind.

	Lehrer	**Fachkombination**						**Std.**	**Verfüg-barkeit**
1	BOM	De	Ma	HSa	Gest	Eng		27	
2	BOS	De	Ma	HSa	Gest	Eng		20	
3	ERI	De	Ma	HSa	Sp			27	
4	FAL	De	Ma	HSa	Sp			27	
5	HBN	De	Ma	HSa	Mu			27	
6	LAN	De	Ma	HSa	Mu			16	
7	SCM	De	Ma	HSa	Gest	Eng		27	
8	SCU	De	Ma	HSa	Sp	Gest	Eth	27	
9	STE	De	Ma	HSa	Sp			27	
10	MÖN	Rel						3	Mo, Fr
11	FIE	DeFö	MaFö	Sp				19	Mo, Mi-Fr

Tabelle 3: Lehrerkollegium der Grundschule

Die Räume einer Grundschule lassen sich nach ihrer Funktion in Klassen- und Fachräume unterscheiden. Jeder Klasse steht ein Klassenraum zur Verfügung, deren Kapazität für jede Schülerzahl ausreichend ist. Klassenräume weisen neben der Bestuhlung für 24 Schüler keine spezielle Ausstattung auf und werden für alle Fächer, welche keine Sonderausstattung benötigen, genutzt. Fachräume hingegen definieren sich durch ihre Ausstattung für bestimmte Fächer, wie bspw. ein Musikraum oder eine Sporthalle. Eine Übersicht der räumlichen Ressourcen der in dieser Arbeit betrachteten Grundschule findet sich in Tabelle 4. Die Sonderausstattung der Fachräume und eine eingeschränkte Verfügbarkeit können der Tabelle entnommen werden.

Die zeitliche Einteilung der Schulstunden innerhalb eines Tages beschließen die Mitglieder der Gesamtkonferenz jeder Schule individuell. Als Planungsperiode wird eine Woche betrachtet. Für eine Grundschule in Sachsen-Anhalt ist generell von 5 Schultagen (Montag bis Freitag) mit je 6 Schulstunden mit einer Länge von 45 Minuten auszugehen. Daraus ergeben sich 30 Schulstunden ($t = 1, \ldots, 30$) in einer Planungsperiode, wobei die Zugehörigkeit der Schulstunden zu einem speziellen Wochentag nur indirekt über den Index der Schulstunde t betrachtet werden kann. Tabelle 5[3] zeigt die Bezeichnung der Schulstunden t.

Das Curriculum wird aufgrund seiner besonderen Bedeutung im Kontext der Eingangsdaten im folgenden Abschnitt 2.2 näher erläutert.

[3] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 1.

	Beschreibung	**Kapazität**	**Ausstattung**	**Verfügbarkeit**
1	*Klassenraum 1a*	24		
2	*Klassenraum 1b*	24		
3	*Klassenraum 2a*	24		
4	*Klassenraum 2b*	24		
5	*Klassenraum 3a*	24		
6	*Klassenraum 3b*	24		
7	*Klassenraum 4a*	24		
8	*Klassenraum 4b*	24		
9	*Fachraum Gestalten*	24	Werkzeuge, Bastelmaterial	
10	*Sporthalle*	60	Parkettboden, Sportgeräte	Mo 7-10, Di 7-10, Mi 7-15, Fr 7-10
11	*Fachraum Bewegung*	24	Teppichboden, Kissen	

Tabelle 4: Raumausstattung der Grundschule

t	**Mo**	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
7.30 - 8.15 Uhr	1	7	13	19	25
8.30 - 9.15 Uhr	2	8	14	20	26
9.35 - 10.20 Uhr	3	9	15	21	27
10.25 - 11.10 Uhr	4	10	16	22	28
11.35 - 12.20 Uhr	5	11	17	23	29
12.25 - 13.10 Uhr	6	12	18	24	30

Tabelle 5: Schulstundeneinteilung der Grundschule

2.2 Curriculum

Das Curriculum definiert die Anzahl Schulstunden, die jede Jahrgangsstufe in jedem Unterrichtsfach erhält, und welcher Lehrer diesen Unterricht gibt. Dies entspricht der Konkretisierung der einzelnen Tätigkeiten, die ein Lehrer in einer Planungsperiode zu leisten hat. Diese Lehrer-Klasse-Fach-Zuordnungen $(l|k|f)$ werden im Folgenden als Unterrichtseinheiten bezeichnet. Die Stundenzahlen der Fächer für jede Jahrgangsstufe wird dabei vom jeweiligen Bundesland durch einen Erlass zur Unterrichtsorganisation an den Grundschulen gesetzlich geregelt. Dieser beinhaltet eine Stundentafel, welche sowohl definierte Stundenzahlen als auch Stundenzahlintervalle für die einzelnen Fächer enthält.[4] Die derzeit geltende Stundentafel des Landes Sachsen-Anhalt für die betrachtete Grundschule findet sich im Anhang A. Die Festlegung, welche Stundenzahl aus dem Intervall für bestimmte Fächer umgesetzt wird, obliegt

[4]Vgl. Land Sachsen-Anhalt (2010), S. 168.

dem Schulleiter. Dieser trifft die Entscheidung so, dass über den Grundschulzeitraum alle Fächer ausgewogen für den Schüler vertreten sind.[5]
Aus organisatorischen Gründen wird für ein Fach in einer Klasse ein Lehrer eingesetzt. Die Anzahl der Lehrer-Klasse-Zuordnungen entspricht somit der festgelegten Stundenzahl des Faches. Die gegebenen Lehrer-Klasse-Fach-Zuordnungen mit fixer Stundenzahl können vor der Raum- und Schulstundenzuordnung festgelegt oder simultan in einem Zuordnungsprozess bestimmt werden.
Die Erstellung des Curriculums kann mit Hilfe eines linearen Optimierungsmodells oder praxisorientiert durch logische Zuordnungen händisch vollzogen werden. Ziel ist die Zuordnung von Lehrern und Fächern zu Klassen, so dass die gesetzlich vorgegebene Anzahl der Schulstunden jedes Faches gewährleistet und die Anzahl der Wochenstunden jedes Lehrers eingehalten werden. In der Planung einer Grundschule ergibt sich das Curriculum größtenteils durch die Besetzung der Klassenlehrer, die in der Regel die Hauptfächer Deutsch, Mathematik und Heimat-Sachunterricht in ihren Klassen geben, und als Fachlehrer, ihrer Ausbildung entsprechende Nebenfächer übernehmen.[6] Viele Lösungsansätze folgen einer praxisnahen Herangehensweise und nehmen das Curriculum als gegeben an.[7] Dieses Vorgehen dient zudem der Vereinfachung des Planungsprozesses, da die Zuordnungsvariable lediglich die Raum- und Periodenzuordnung der Lehrer-Klasse-Fach-Tupel abbilden müssen. In dieser Arbeit wird sowohl die simultane Planung des Curriculums, der Raum- und Periodenzuordnung in einem Optimierungsmodell als auch die Planung mit gegebenem Curriculum präsentiert.
Tabelle 6 zeigt das Curriculum der Grundschule für den betrachteten Planungszeitraum. Jede Zeile bestimmt ein Fach und die Spalten stellen die zu unterrichtenden Klassen dar. Die Zellen beschreiben entsprechend die Stundenzahl und den zugeordneten Lehrer, repräsentiert durch sein Kürzel.
Einige der angegebenen Unterrichtseinheiten werden in der Form des jahrgangsübergreifenden Unterrichts abgehalten. Diese Unterrichtsform wird detaillierter im Abschnitt 2.4 erläutert. Zur Modellierung dieser Unterrichtseinheiten wird das künstliche Fach JÜ verwendet, welches dann anstelle eines im Curriculum ausgeschriebenen Faches für die entsprechende Klasse und den betreffenden Lehrer eingesetzt wird. Ebenso wird mit den Unterrichtseinheiten verfahren, in denen Schüler mit sonderpädagogischem Bedarf einzeln gefördert

[5]Vgl. Gesprächsprotokoll des Gespräches mit Gabi Lange vom 14.5.12 in Anhang B.
[6]Vgl. Gesprächsprotokoll des Gespräches mit Gabi Lange vom 14.5.12 in Anhang B.
[7]Vgl. Lawrie (1969), S.307, Colorni u. a. (1991), S.55, Carrasco und Pato (2001), S.5, Beligiannis u. a. (2009), S.25.

Std.zahl/ Lehrer	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
De	7BOS	7FAL	7HBN	7BOM	7STE	7SCM	7EHR	7SUB
Ma	5BOS	5FAL	5HBN	5BOM	6STE	6LAN	6EHR	6SUB
HSa	3BOS	3FAL	3HBN	3BOM	3STE	3SCM	3EHR	3STE
Mu	1HBN	1LAN	1HBN	1LAN	1LAN	1LAN	1HBN	1HBN
Gest/Ku	1BOM	1BOM	1BOM	1BOM	1BOM	1BOM	1BOM	1BOM
Gest/Wk	1BOS	1SCM	1BOS	1SCM	1SCM	1SCM	1SCM	1SCM
Sp	2EHR	2FAL	3EHR	3FAL	2STE	2EHR	3FAL	3STE
Eng	-	-	-	-	2SCM	2SCM	2BOM	2BOM
Eth	1SUB	1SUB	1SUB	1SUB	2SUB	2SUB	2SUB	2SUB
Rel	1MÖN	1MÖN	1MÖN	1MÖN	2MÖN	2MÖN	2MÖN	2MÖN
SSU	1BOS	1SCM	1SCM	1SCM	1HBN	1SCM	1EHR	1STE

Tabelle 6: Curriculum der Grundschule

werden sollen. Diese erhalten entsprechend die künstlichen Fachbezeichnungen DeFö und MaFö.

Das hier präsentierte Curriculum bildet lediglich Unterrichtsstunden ab, die zur Deckung des Grundbedarfes der Schüler an Schulstunden dienen. Darüber hinaus werden der Schule vom Schulverwaltungsamt des Landes Sachsen-Anhalt Lehrerwochenstunden für ergänzende schulische Angebote (ESA) sowie ein pauschalierter Zusatzbedarf zugeteilt. Diese Schulstunden ergänzen das schulische Unterrichtsangebot, um vorhandenes Wissen zu vertiefen und Schüler mit Lernbeeinträchtigungen zu fördern. Alternativ zur Zuweisung dieser zusätzlichen Lehrerwochenstunden für die Grundschule könnte auch die Abordnung eines Lehrers an eine andere Schule angewiesen werden, um dort die Deckung des Grundbedarfes zu gewährleisten. Die Ermittlung des pauschalierten Zusatzbedarfs erfolgt nach einem Rechenschema, welches die Anzahl an Schülern mit pädagogischem Förderbedarf sowie die Gesamtschülerzahl der Schule berücksichtigt.

Des Weiteren erhalten bestimmte Lehrer Anrechnungsstunden, welche sie für unterrichtsergänzende oder Sondertätigkeiten nutzen können. Begleitend zum oben beschriebenen Curriculum erhielten unter anderem die Lehrer BOS und FAL Anrechnungsstunden für den organisatorischen Mehraufwand eines Klassenlehrers in Jahrgangsstufe 1 und die Lehrer BOM und SUB Anrechnungsstunden zur Betreuung einer Referendarin. Das Schulleiteramt wird mit 11 Anrechnungsstunden für die Schulleiterin LAN berücksichtigt.

Die vertraglich festgelegte Lehrerwochenstundenzahl wird somit für das Geben von Unterrichtsstunden, zusätzliche Förderung oder Angebote und Sondertätigkeiten im Rahmen von Anrechnungsstunden genutzt. Für die betrachtete Grundschule ergaben sich nach der Zuordnung aller Tätigkeiten sieben Reservestunden. Damit werden nicht zugeordnete Lehrerwochenstunden bezeichnet, welche bei Ausfall oder Krankheit eines Lehrers zur Sicherung des Grundbedarfes durch eine Unterrichtsvertretung zu nutzen sind. Werden diese Reservestunden innerhalb der Planungsperiode nicht vollständig benötigt, können sie für zusätzliche Angebote genutzt werden.

2.3 Ziele

Das Timetabling Problem muss als Teil einer Personaleinsatzplanung mit hierarchischen Entscheidungsebenen verstanden werden. Entscheidungsträger ist zum einen das Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, welches durch die Instanz des Landesschulamtes die Zuordnung von Lehrern zu ihren Einsatzorten (Schulen) und einer entsprechenden Einsatzzeit in der Planungsperiode (Lehrerwochenstunden) vornimmt. Diese Zuordnung ist für den Schulleiter als zweiter Entscheidungsträger ein gegebenes Datum. Er entscheidet dann über die Zuordnung der Lehrer zu einzelnen Tätigkeiten, die in bestimmten Einsatzzeiten (Schulstunden) an bestimmten Einsatzorten (Räumen) zu verrichten sind.
Ziele lassen sich im Bereich der Personaleinsatzplanung hinsichtlich ihres Inhaltes, des angestrebten Zielausmaßes sowie ihres Messniveaus unterscheiden. Bezüglich des Inhaltes lassen sich Substanz- und Formalziele klassifizieren, wobei Substanzziele die Erfüllung der Konnexions-, Allokations- und Kompensationsfunktion der Planung betreffen und Formalziele über den Inhaltsaspekt hinausgehende Kriterien darstellen.[8] Formalziele können wiederum nach ökonomischen Aspekten, wie Wirtschaftlichkeit und Kostendeckung, und humanen Aspekten, wie der Befriedigung sozialer Bedürfnisse, unterschieden werden.[9]
In Betrachtung des angestrebten Zielerreichungsgrades können Ziele in Extremierungs-, Satisfizierungs-, Fixierungs- und Approximationsziele differenziert werden. Extremierungsziele bestimmen dabei die Optimierung der Zielkriterien, Satisfizierungsziele die Erreichung eines zufriedenstellenden Maßes der Kriterien und Fixierungs- sowie Approximationsziele verlangen die Erreichung eines exakten bzw. näherungsweisen Ausmaß der Zielkriterien.[10]
Bei der Auswahl des Messniveaus eines Zieles geht es darum, die erarbeiteten Daten und Kriterien möglichst präzise abzubilden. Es ist darauf zu achten, dass eine Rangfolge der Zielbeiträge dargestellt wird und arithmetische

[8]Vgl. Spengler (2004), Sp. 1471.
[9]Vgl. Kossbiel (2002), S.485.
[10]Vgl. Spengler (2004), Sp. 1472.

Operationen zulässig sind. Aus diesem Grund sollten Zielkriterien auf Kardinalskalenniveau messbar sein oder durch die Nutzung von Eignungs- oder Neigungsgraden messbar gemacht werden.[11]
Das Land Sachsen-Anhalt als Bildungsträger verfolgt das Substanzziel der Abstimmung der Personalbedarfe an den Schulen, welche durch Veränderungen der Schülerzahlen jährlich schwanken, und der Personalausstattung. Als ökonomisches Formalziel bei der Auswahl einer Mitarbeiterzuordnung ist der Einsatz möglichst weniger Lehrer und damit die Kostenminimierung zu sehen, da der Personalbedarf durch die Schülerzahl gegeben ist und gedeckt werden muss. Bei der Zuordnung der Lehrer zu einem Einsatzort (einer Schule) werden zudem soziale Umstände der Mitarbeiter, wie Wohnort, Alter, Familienstand und Kinder, berücksichtigt, um die Zufriedenheit der Mitarbeiter zu steigern. Die Mitarbeiterzufriedenheit wird dabei über die Länge des Arbeitsweges definiert und gemessen. Es lassen sich somit das Satisfizierungsziel der Personalbedarfsdeckung sowie die Extremierungsziele der Kostenminimierung und Minimierung des Arbeitsweges als Ziele des Landesschulamtes bei seiner Entscheidung zusammenfassen.
Für den Schulleiter sind in der Planungssituation sowohl der Personalbedarf als auch die Personalausstattung gegeben. Substanzziele sind die Verbindung von Bedarf und Ausstattung aufgrund der zu unterrichtenden Fächer und die entsprechende Allokation der Lehrer zu Tätigkeiten, Räumen und Schulstunden. Bei der Zuordnung sind zudem die Verfügbarkeiten von Klassen, Lehrern und Räumen einzuhalten und die Umsetzbarkeit des Planes zu gewährleisten. Daraus ergeben sich Fixierungsziele, wie beispielsweise die Einfachzuordnung von Lehrern, Klassen, Räumen und Schulstunden, welche im folgenden Abschnitt in Form von harten Beschränkungen für das Timetabling Problem umgesetzt und erläutert werden. Die Einhaltung der Fixierungsziele wird im Folgenden die Zulässigkeit eines Planes definieren.
Bei der Auswahl eines zulässigen Planes zur Realisierung werden vom Schulleiter humane Formalziele berücksichtigt. Aus der Befragung der Schulleiterin sowie der Lehrer der Grundschule ergeben sich übereinstimmend mit der Literatur wünschenswerte Kriterien zur Maximierung der Lehrerzufriedenheit.[12]
Die Anzahl der Freistunden eines Lehrers sollte möglichst gering und deren Verteilung in der Planungsperiode und innerhalb des Lehrerkollegiums möglichst gleich sein. Zudem sollten die Fächer für die Schüler möglichst gleich innerhalb der Planungsperiode verteilt sein. Das Kriterium der Gleichvertei-

[11] Vgl. Spengler (2004), Sp. 1472.
[12] Vgl. Gesprächsprotokolle in Abschnitt B sowie Caldeira und Rosa (1997), S. 1, Colorni u. a. (1998), S. 280 und Beligiannis u. a. (2009), S. 27.

lung der Fächer bezieht sich zwar auf den Stundenplan der Schüler, wird jedoch von Lehrern gewünscht, da die Schüler in einem abwechslungsreichen Ablauf konzentrierter und motivierter arbeiten. Diese Formalziele werden im Folgenden als weiche Beschränkungen für das Timetabling Problem definiert und im Algorithmus als Extremierungsziele in der Zielfunktion berücksichtigt, was in Abschnitt 4.5.2 näher beschrieben wird.
In dieser Arbeit wird lediglich die Planungssituation des Schulleiters als Timetabling Problem betrachtet. Aus diesem Grund werden nur die für ihn beschriebenen Substanz- und Formalziele in den Ausführungen und der folgenden Modellierung des Problems berücksichtigt. Die Qualität eines Plans wird dann durch das Erreichen der Fixierungs- sowie die möglichst gute Erfüllung der Extremierungsziele beschrieben.[13] Da der verwendete genetische Algorithmus eine unbeschränkte Optimierung vorraussetzt, wird die Maximierung der Qualität als Zielfunktion in Abschnitt 4.5.2 bestimmt.

2.4 Beschränkungen

Die Beschränkungen des Timetabling Problems bilden die im vorherigen Abschnitt erläuterten Ziele ab und stellen eine Präzisierung dieser dar. Die Beschränkungen werden im Folgenden in die Kategorien hart und weich gegliedert. Dabei sind harte Beschränkungen verpflichtend für die Zulässigkeit des Planes, wobei weiche Beschränkungen wünschenswerte Attribute abbilden, deren Nichterfüllung die Zulässigkeit nicht gefährdet.[14] Die Kriterien bezüglich des Substanzziels werden somit in der Klasse der harten Beschränkungen abgebildet, da sie als Fixierungsziele die Zulässigkeit abbilden. Ein zulässiger Plan wird im Folgenden durch die Erfüllung der harten Beschränkungen H1 bis H11 definiert. Demgegenüber sind die Formalziele durch Kriterien gekennzeichnet, deren Extremierung wünschenswert ist und die in weichen Beschränkungen umgesetzt werden.
Für das Zuordnungsproblem ergeben sich die folgenden harten Beschränkungen, welche das Substanzziel der Realisierbarkeit des Stundenplanes präzisieren (H1 - H11) und Personalbedarf und -ausstattung verbinden (H12).

H1 Kein Lehrer darf mehr als einer Klasse, einem Fach und einem Raum in einer Zeitperiode zugeordnet werden.

H2 Keine Klasse darf mehr als einem Lehrer, einem Fach und einem Raum in einer Zeitperiode zugeordnet werden.

[13] Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S.25.
[14] Vgl. Burke und Petrovic (2002), S. 266-267 und Beligiannis u. a. (2009), S. 27.

H3 Kein Raum darf mehr als einer Klasse, einem Lehrer und einem Fach in einer Zeitperiode zugeordnet werden.

H4 Keinem Lehrer darf eine Klasse, ein Fach oder ein Raum in einer Schulstunde außerhalb seiner Verfügbarkeit zugeordnet werden.

H5 Keiner Klasse darf ein Lehrer, ein Fach oder ein Raum in einer Schulstunde außerhalb ihrer Verfügbarkeit zugeordnet werden.

H6 Keinem Raum darf eine Klasse, ein Lehrer oder ein Fach in einer Schulstunde außerhalb seiner Verfügbarkeit zugeordnet werden.

H7 Die gesetzlich vorgegebene Anzahl Schulstunden eines Faches für eine Klasse muss gewährleistet werden.

H8 Die vertraglich festgelegte Anzahl Wochenstunden jedes Lehrers muss ausgeschöpft werden.

H9 Ein Fach darf in einer Klasse nur von einem Lehrer unterrichtet werden.

H10 Unterrichtsfreie Schulstunden, in denen einer Klasse kein Lehrer, Fach und Raum zugeordnet wird, müssen am Ende eines Tages liegen.

H11 Bestimmte Fächer müssen in bestimmten Klassen in derselben Schulstunde unterrichtet werden.

H12 Ein Lehrer darf nur ein Fach unterrichten, für das er eine Lehrbefähigung besitzt.

Die Restriktionen der Art H4 werden vor allem genutzt, um Sondertätigkeiten der Lehrer zu gewährleisten. Dazu gehört unter anderem die schulische Vorbildung der zukünftigen Einschüler. Für die Erfüllung dieser Aufgabe werden zwei Lehrer in zwei aufeinanderfolgenden, gegebenen Schulstunden in der Planungsperiode als nicht verfügbar betrachtet. Die Jahrgangsstufe 3 erhält für zwei Schulstunden im Fach Sport Unterricht im Fach Schwimmen. Hierzu müssen die zu Beginn des Schuljahres bekannten Schwimmzeiten in den Wochenplan der Schule eingearbeitet werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Beschränkungen H5 für die entsprechenden Schulstunden.
Die Klassifizierung der Restriktionen H10 ist abhängig von der Schulform und den zugehörigen gesetzlichen Vorgaben. Aufgrund ihres Alters zwischen 6 und 10 Jahren dürfen die Schüler einer Grundschule keine unbeaufsichtigten Freistunden innerhalb eines Tages haben, weshalb unterrichtsfreie Perioden immer

am Tagesende liegen müssen. In weiterführenden Schulen wird diese Beschränkung meist als weich klassifiziert, da diese keinen gesetzlichen Vorgaben unterliegt.
Für den reibungslosen Ablauf des Unterrichts sind Restriktionen der Art H11 für bestimmte Fächer notwendig. Im jahrgangsübergreifenden Unterricht werden zwei Halbgruppen aus Klassen der Jahrgangsstufen 1 und 2 gemeinsam unterrichtet, um den unterschiedlichen Wissensstand zur Förderung von Kommunikation und Hilfsbereitschaft zu nutzen. Außerdem soll Schülern mit guter Auffassungsgabe ermöglicht werden, komplexere Lerninhalte im Rahmen der individuellen Möglichkeiten aufzunehmen. In der Planung ist darum zu gewährleisten, dass der jahrgangsübergreifende Unterricht für alle Klassen der Jahrgangsstufen 1 und 2 in derselben Schulstunde stattfinden muss, damit die Gruppen entsprechend zusammengestellt werden können.
Eine ähnliche Planungsstruktur weisen der Unterricht im Fach Religion und die Betreuung von Schüler mit sonderpädagogischem Bedarf auf. Die zu betreuenden Schüler werden aus der Klasse herausgelöst und separat in einem Fach gefördert. Den verbleibenden Schülern der Klasse muss entsprechend dasselbe Fach zugeordnet sein. Es ist zudem sinnvoll, eine Unterrichtsstunde mit Separation der Förderschüler für alle Klassen einer Klassenstufe in derselben Schulstunde zu planen, um die Schüler aus allen Klassen gemeinsam zu fördern und die knappe Ressource der Lehrerwochenstunden des Förderschullehrers so effizient wie möglich zu nutzen. Die Ausweitung der Restriktion für die sonderpädagogische Förderung auf die gesamte Klassenstufe ist jedoch nur als wünschenswerte und somit weiche Beschränkung zu betrachten. Im Fall des Religionsunterrichtes lernen Schüler der Jahrgangsstufen 1/2 und 3/4 gemeinsam, sodass dieses Fach für die betreffenden Klassen derselben Schulstunde zugeordnet werden muss. Zudem müssen für diese beiden Unterrichtsformen die Verfügbarkeiten des Religions- und des Förderschullehrers berücksichtigt werden, da diese nur mit einem Teil ihrer vertraglich vereinbarten Wochenstunden an die Schule abgeordnet sind.
Die harten Beschränkungen bilden in Gleichungen und Ungleichungen den Restriktionenraum des Zuordnungsproblems und werden auf Grundlage der binären Entscheidungsvariable quantifiziert.
Die weichen Beschränkungen für das Zuordnungsproblem ergeben sich aus den Formalzielen des Schulleiters wie folgt:

W1 Die Unterrichtseinheiten eines Lehrers sollten zeitlich zusammenhängend (die Anzahl der Freistunden möglichst gering) sein.

W2 Freistunden sollten innerhalb der Planungsperiode für jeden Lehrer gleich verteilt sein.

W3 Freistunden sollten innerhalb des Lehrerkollegiums gleich verteilt sein.

W4 Die Schulstunden eines Fachs in einer Klasse sollten in der Planungsperiode gleich verteilt sein.

Die Formalziele wurden als Extremierungsziele bezüglich der wünschenswerten Attribute definiert. Es wird davon ausgegangen, dass es ein Lehrer immer als besser bewertet, einen Plan mit weniger Freistunden zu realisieren (W1). Diese werden als zählbares Kriterium in der Planung berücksichtigt. Außerdem wird ein Stundenplan bevorzugt, welcher jeweils eine Freistunde an 2 verschiedenen Tagen anstelle von 2 Freistunden an einem Tag ausweist. Diese Präferenz wird mit dem messbaren Kriterium der Gleichverteilung der Freistunden in der Planungsperiode quantifiziert (W2). In gleicher Weise bevorzugt es ein Lehrer, 3 Unterrichtsstunden eines Faches in einer Klasse an 3 verschiedenen Tagen anstelle von 2 Tagen oder nur einem Tag zu unterrichten. W4 wird somit ebenfalls mit der Gleichverteilung der Fachunterrichtsstunden für eine Klasse gemessen. Innerhalb des Lehrerkollegiums wird von einigen Lehrern die Neigung zum Vergleich der Anzahl der Freistunden geäußert, mit der Präferenz die gleiche Anzahl Freistunden für alle Lehrer zu wählen, um keine Bevor- oder Benachteiligung zu erzeugen. Die Verteilung der Freistunden innerhalb des Lehrerkollegiums soll darum ebenfalls einer Gleichverteilung angenähert werden.

3 Modellierung und Lösung des Timetabling Problems mittels linearer Optimierung

3.1 Linearer Modellierungsansatz für das Timetabling Problem der Grundschule

Im Folgenden wird das Timetabling Problem der betrachteten Grundschule in Form eines ganzzahligen, linearen Optimierungsproblems dargestellt. Dazu sind die Zuordnungs- und Entscheidungsvariablen wie folgt definiert:

$$x_{klf} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ im Fach } f \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{klrf}^t := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ in Raum } r \text{ im Fach } f \text{ in Schul-} \\ & \text{stunde } t \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_f^t := \begin{cases} 1 & \text{wenn Fach } f \text{ in Schulstunde } t \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\bar{e}_l :=$ Anzahl Schulstunden, die Lehrer l für ergänzende schulische Angebote, Schülerförderung oder Sondertätigkeiten zur Verfügung steht

Damit ergibt sich das Zuordnungsmodell für das Timetabling Problem.

$$find \quad x_{klrf}^t \qquad k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, r \in \bar{R}, f \in \bar{F}, t \in \bar{T}$$
$$find \quad x_{klf} \qquad k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, f \in \bar{F}$$
$$find \quad x_f^t \qquad f \in \bar{F}, t \in \bar{T}$$

u.d.N.

$$\sum_{k \in \bar{K}_t} \sum_{f \in \bar{F}_l} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_l} \bar{R}_{ft}} x_{klrf}^t \leq 1 \qquad \forall\, t \in \bar{T}, l \in \bar{L}_t \tag{1}$$

$$\sum_{l \in \bar{L}_t} \sum_{r \in \bar{R}_t} \sum_{f \in \bar{F}} x_{klrf}^t \leq 1 \qquad \forall\, t \in \bar{T}, k \in \bar{K}_t \tag{2}$$

$$\sum_{k \in \bar{K}_t} \sum_{f \in \bar{F}_r} \sum_{l \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_r} \bar{L}_{ft}} x_{klrf}^t \leq 1 \qquad \forall\, t \in \bar{T}, r \in \bar{R}_t \tag{3}$$

$$\sum_{t \in \bar{T}_k} \sum_{l \in \bigcup\limits_{t \in \bar{T}_k} \bar{L}_{ft}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{t \in \bar{T}_k} \bar{R}_{ft}} x_{klrf}^t = b_{kf} \qquad \forall\, k \in \bar{K}, f \in \bar{F} \tag{4}$$

$$\sum_{t \in \bar{T}_l} \sum_{k \in \bar{K}_{lt}} \sum_{f \in \bar{F}_{lt}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_{lt}} \bar{R}_{ft}} x_{klrf}^t = \bar{s}_l - \bar{e}_l \qquad \forall\, l \in \bar{L} \tag{5}$$

$$\sum_{t \in \bar{T}_k} \sum_{r \in \bigcup\limits_{t \in \bar{T}_k} \bar{R}_{ft}} x_{klrf}^t = x_{klf} \cdot b_{kf} \qquad \forall\, k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, f \in \bar{F} \tag{6}$$

$$\sum_{l\in\bar{L}_{kt+1}} \sum_{f\in \bigcup\limits_{l\in\bar{L}_{kt+1}} \bar{F}_{lt+1}} \sum_{r\in \bigcup\limits_{f\in\bar{F}_{lt+1}} \bar{R}_{ft+1}} x^{t+1}_{klrf} \leq \sum_{l\in\bar{L}_{kt}} \sum_{f\in \bigcup\limits_{l\in\bar{L}_{kt}} \bar{F}_{lt}} \sum_{r\in \bigcup\limits_{f\in\bar{F}_{lt}} \bar{R}_{ft}} x^{t}_{klrf} \qquad \forall\ t \in \bar{T} \setminus \{6, 12, 18, 24, 30\}, k \in \bar{K}_t \tag{7}$$

$$\sum_{k\in\bar{K}_f} \sum_{l\in\bar{L}_f} \sum_{r\in\bar{R}_f} x^t_{klrf} = |\bar{K}_f| \cdot x^t_f \qquad \forall\ t \in \bar{T}, f = 11, 12, 13, 16, 17 \tag{8}$$

$$x^t_{klrf} \in \{0,1\} \qquad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, r \in \bar{R}, f \in \bar{F}, t \in \bar{T} \tag{9}$$

$$x_{klf} \in \{0,1\} \qquad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, f \in \bar{F} \tag{10}$$

$$x^t_f \in \{0,1\} \qquad \forall\ f \in \bar{F}, t \in \bar{T} \tag{11}$$

$$e_l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \qquad \forall\ l \in \bar{L} \tag{12}$$

Es gilt die binären Entscheidungsvariable x^t_{klrf} und x_{klf} festzulegen, sodass der Plan überschneidungsfrei ist und den gesetzlichen sowie vertraglichen Vorgaben genügt. Die Nebenbedingungen (1), (2) und (3) stellen sicher, dass jede Klasse, jeder Lehrer und jeder Raum nur genau einer Zuordnung in einer Schulstunde angehört oder nicht zugeordnet wird (H1, H2,H3). Dies schließt eine Zuordnung von bspw. zwei Klassen zu einem Lehrer in einer Schulstunde aus. Die Verfügbarkeitsbeschränkungen H4, H5 und H6 werden indirekt durch die Verwendung von Indexmengen abgebildet, sodass beispielsweise nur jene Lehrer betrachtet werden, die in der Periode t verfügbar sind. In gleicher Weise werden die Bedingungen H12 eingebunden.
Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, ist die Anzahl der Stunden, die eine Klasse in einem Fach in der Planungsperiode unterrichtet werden muss, gesetzlich durch einen Lehrplan bestimmt (H7). Im Modell wird diese Anzahl durch die Daten b_{kf} für jede Klasse und jedes Fach definiert. Die Nebenbedingungen (4) gewährleisten somit die exakte Einhaltung des Lehrplanes.
Die Daten $\bar{s}_l$ in den Nebenbedingungen (5) bestimmen die Schulstundenanzahl jedes Lehrers in der Planungsperiode. Im Modell werden lediglich die Zuordnungen der zu unterrichtenden Fächer vorgenommen und die zusätzlichen Lehrerwochenstunden für bspw. ergänzende schulische Angebote außer Acht gelassen. Diese werden durch die Entscheidungsvariable $\bar{e}_l$ für jeden Lehrer

erfasst und können abgelesen werden, sodass die Restriktionen H8 für jeden Lehrer mit Gleichheit erfüllt sind.
Die Nebenbedingungen (6) betreffen die Beschränkung H9 und fordern, dass für eine Zuordnung von Klasse k zu Lehrer l im Fach f dieser Lehrer die gesamte Stundenanzahl b_{kf} zu leisten hat. In diesem Fall erhält die Zuordnungsvariable x_{klf} auf der rechten Seite der Gleichung den Wert 1 und die Stundenzahl muss in der Planungsperiode für diesen Lehrer zugeordnet werden. Andernfalls ist die Zuordnungsvariable x_{klf} durch den Wert 0 definiert, und es darf auf der linken Seite der Gleichung keine Zuordnung von Klasse k zu Lehrer l im Fach f in einem Raum r und einer Schulstunde t stattfinden.
Die Nebenbedingungen (7) stellen die Einhaltung der harten Beschränkung H10 sicher, welche die Platzierung unterrichtsfreier Schulstunden am Tagesende fordert. Für eine unterrichtsfreie Schulstunde einer Klasse k gilt

$$\sum_{l\in \bar{L}_{kt}} \sum_{f\in \bigcup\limits_{l\in \bar{L}_{kt}} \bar{F}_{lt}} \sum_{r\in \bigcup\limits_{f\in \bar{F}_{lt}} \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} = 0.$$

Gemäß der Ungleichung ist es nicht möglich, dieser Klasse in der darauf folgenden Schulstunde $t+1$ einen Lehrer mit Fach und Raum zuzuordnen, da dies eine unterrichtsfreie Zeit innerhalb des Tages bedeuten und die Restriktion verletzen würde. Somit werden Schulstunden ohne Zuordnung einer Klasse an das Tagesende platziert. Die Nebenbedingung gilt nicht für die jeweils letzten Schulstunden eines Tages ($t = 6, 12, 18, 24, 30$), da deren Folgestunden den Beginn des nächsten Tages darstellen.
Zur Umsetzung des jahrgangsübergreifenden Unterrichts ($f = 13$), der sonderpädagogischen Förderung ($f = 11$ und $f = 12$) sowie den Fächern Ethik/Religion 1/2 ($f = 16$) und Ethik/Religion 3/4 ($f = 17$) werden die Nebenbedingungen (8) eingefügt (H11). Die rechte Seite dieser Gleichung nimmt aufgrund der binären Entscheidungsvariable x^t_f den Wert 0 an, wenn der entsprechende Unterricht nicht stattfindet. Wird dieser jedoch einer Schulstunde zugeordnet, so entspricht der Wert der rechten Seite exakt der Anzahl an Klassen, die im Fach f unterrichtet werden müssen. Durch die Summation der Zuordnungsvariable über alle entsprechenden Klassen, Lehrer und Räume auf der linken Seite der Gleichung findet eine Festlegung dieses Unterrichtes für alle beteiligten Klassen in derselben Schulstunde statt. Eine eingeschränkte Verfügbarkeit der Lehrer für die sonderpädagogische Betreuung und das Fach Religion werden durch die Menge T_f formuliert, welche nur Schulstunden enthält, in denen das entsprechende Fach f unterrichtet werden kann.
Die Nebenbedingungen (9), (10) und (11) definieren entsprechend die Bina-

rität der Zuordnungsvariable x^t_{klrf}, x_{klf} und x^t_f. Die Entscheidungsvariable e_l wird in Nebenbedingung (12) als positive ganze Zahl oder 0 festgelegt.
Im Zuordnungsmodell wird die Festlegung der Entscheidungsvariable x^t_{klrf} und x_{klf} als Zielfunktion definiert. Durch eine Anpassung der Zielfunktion wie folgt, kann das Timetabling Problem als lineares, ganzzahliges Optimierungsmodell formuliert werden:

$$\sum_{t\in\bar{T}}\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{l\in\bar{L}}\sum_{r\in\bar{R}}\sum_{f\in\bar{F}} x^t_{ijrk} + \sum_{k\in\bar{K}}\sum_{l\in\bar{L}}\sum_{f\in\bar{F}} x_{klf} \longrightarrow \text{min!} \tag{13}$$

Die Minimierung der Summe der Zuordnungsvariable ist ökonomisch vertretbar, da jede erfolgte Zuordnung die knappen Ressourcen beansprucht und damit Kosten verursacht. Die minimale Summe der Zuordnungsvariable ist jedoch aufgrund des gegebenen Personalbedarfs vorbestimmt und entspricht der Summe der Schulstunden jedes Faches in jeder Klasse, da diese Lehrern, Räumen und Zeiten zugeordnet werden müssen. Die Zielfunktion des Optimierungsmodells lässt sich für die Grundschule wie folgt quantifizieren:

$$z = \sum_{t=1}^{30}\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{11}\sum_{r=1}^{11}\sum_{f=1}^{17} x^t_{ijrk} + \sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{10}\sum_{f=1}^{17} x_{klf} \longrightarrow \text{min!} \tag{14}$$

Da die künstlich hinzugefügten Fächer $f = 11, \ldots, 17$ Spezifikationen der ursprünglichen Fachauswahl sind, erhalten diese keine zusätzlichen Schulstunden, sondern übernehmen einen Teil oder alle Schulstunden eines Faches. Dementsprechend müssen diese in der Summation der zuzuordnenden Schulstunden nicht berücksichtigt werden. Der minimale Zielfunktionswert und damit die Anzahl der positiven Zuordnungen für das Problem der betrachteten Grundschule ergibt sich zu

$$z = 121 + 80 = 201.$$

3.2 Generierung zulässiger Lösungen und Komplexität des linearen Optimierungsproblems

3.2.1 Bedingung für die Generierung zulässiger Pläne

Die Möglichkeit der Generierung einer oder mehrerer zulässiger Lösungen ist abhängig von der Struktur der Eingangsdaten des Problems. Auf Grundlage des Ansatzes der reinen Personaleinsatzplanung kann überprüft werden, ob eine Generierung zulässiger Pläne möglich ist. Die Adaption dieses Ansatzes ist möglich, da auch für das Timetabling Problem der Personalbedarf in zu erhaltenden Schulstunden für alle Klassen und die Personalausstattung in zu gegebenen Schulstunden für alle Lehrer gegeben sind. Gefordert wird, dass die über Arbeitskräftearten summierte Personalausstattung mindestens dem über Tätigkeiten summierten Personalbedarf entsprechen muss.[15] Daraus ergibt sich als notwendige Bedingung für die Existenz eines zulässigen Planes, dass die gesamte zur Verfügung stehende Lehrerstundenzahl die aufsummierte Schulstundenzahl aller Fächer und Klassen nicht unterschreiten darf. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird es unmöglich, den gesetzlich geforderten Lehrplan zu erfüllen.

$$\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{f\in\bar{F}} b_{kf} \leq \sum_{l\in\bar{L}} \bar{s}_l \qquad (15)$$

Für das Timetabling Problem der betrachteten Grundschule ist diese Bedingung erfüllt mit

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{f=1}^{10} b_{kf} \leq \sum_{l=1}^{9} \bar{s}_l$$
$$121 \leq 208.$$

Für die Berechnung dieser Bedingung ist zu bemerken, dass die zu leistenden Schulstunden der Förderschul- sowie der Religionslehrerin ($l = 10, l = 11$) nicht zu der zur Verfügung stehenden Lehrerstundenzahl addiert werden dürfen, da diese mit einzelnen Schülern zeitlich parallel zum laufenden Unterricht arbeiten.
Eine Präzisierung dieser Bedingung bezüglich der Tätigkeiten und der Arbeitskräftearten erfolgt mit dem impliziten Ansatz der Personalplanung. Hier wird ungeachtet eines exakten Personaleinsatzplanes die Bedarfsäquivalenz der Personalausstattung überprüft. Dies entspricht der Berücksichtigung der Lehrbefähigung der Lehrer für einzelne Fächer und der im Lehrplan geforderten Anzahl Schulstunden eines Faches für eine Klasse. Zur Generierung eines zulässigen Planes müssen die folgenden Bedingungen für jedes Fach und jede Fachkombination erfüllt sein.[16]

$$\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{f\in\hat{F}} b_{kf} \leq \sum_{l\in \bigcup\limits_{f\in\hat{F}} \bar{L}_f} \bar{s}_l \qquad \forall\ \hat{F} \in \wp(\bar{F}) \setminus \emptyset \qquad (16)$$

Die Bedingungen des impliziten Ansatzes der Personalplanung sind für das Timetabling Problem der betrachteten Grundschule erfüllt.[17] Somit ist die

[15]Vgl. Kossbiel (2002), S. 509.
[16]Vgl. Spengler (2006), S. 5.
[17]Siehe Anhang C.

Bedarfsäquivalenz der Lehrerausstattung gegeben und die Generierung eines zulässigen Plans möglich.

3.2.2 Komplexität des Timetabling Problems

Das Timetabling Problem einer Grundschule, welches in der Literatur häufig als Class-Teacher-Timetabling Problem bezeichnet wird, ist in die Klasse NP-complete einzuordnen.[18] Even u. a. (1976) zeigten diese Klassifizierung durch eine Reduktion des 3-SAT Problems auf eine Modifikation des folgenden Timetabling Problems[19].

$$find \;\; x_{kl}^t \qquad \forall\, k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, t \in \bar{T}$$

u.d.N

$$\sum_{t \in \bar{T}_{kl}} x_{kl}^t = b_{kl} \qquad \forall\, k \in \bar{K}, l \in \bar{L} \tag{17}$$

$$\sum_{k \in \bar{K}} x_{kl}^t \leq 1 \qquad \forall\, l \in \bar{L}, t \in \bar{T} \tag{18}$$

$$\sum_{l \in \bar{L}} x_{kl}^t \leq 1 \qquad \forall\, k \in \bar{K}, t \in \bar{T} \tag{19}$$

$$x_{kl}^t \in \{0, 1\} \quad \forall\, k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, t \in \bar{T} \tag{20}$$

Das Modell umfasst die Zuordnung von Klassen zu Lehrern und zu Schulstunden, sodass jede Klasse und jeder Lehrer in einer Schulstunde höchstens einmal zugeordnet (Nebenbedingungen (18) und (19)) und die geforderte Anzahl Schulstunden eines Lehrers in einer Klasse (b_{kl}) exakt eingehalten werden (Nebenbedingung (17)). Die Verfügbarkeit von Lehrern und Klassen in den einzelnen Schulstunden wird ebenfalls berücksichtigt.
Die im Beweis verwendete Modifikation ist beschränkt auf 3 mögliche Schulstunden und eine Anzahl Schulstunden einer Klasse-Lehrer-Zuordnung von 0 oder 1. Zudem werden Klassen als jederzeit verfügbar und Lehrer als in genau 2 oder 3 Schulstunden verfügbar angenommen. Das modifizierte Modell kann eindeutig als NP-complete klassifiziert werden und damit auch die Ausgangsformulierung.[20] Für den Fall der Verfügbarkeit jeden Lehrers in exakt 2 Schulstunden im Ausgangsmodell zeigen Even u. a. (1976) die Existenz eines polynomialen Algorithmuses mit der Komplexität $O(n)$.[21] Diese Annahme

[18] Vgl. Even u. a. (1976), S. 692-695.
[19] Vgl. Even u. a. (1976), S. 691.
[20] Vgl. Even u. a. (1976), S. 692.
[21] Vgl. Even u. a. (1976), S. 696-697.

kann jedoch auf das Timetabling Problem einer Grundschule aufgrund der gegebenen Eingangsdaten nicht angewendet werden.
Um das Problem der in dieser Arbeit betrachteten Grundschule abzubilden, muss die hier präsentierte Ausgangsformulierung um Entscheidungen bezüglich der Fächer und Räume sowie zusätzlicher Zuordnungsrestriktionen ergänzt werden. Das betrachtete Planungsproblem ist damit der Klasse NP-complete zuzuordnen und die Generierung zulässiger Pläne nur durch eine Anwendung heuristischer Verfahren möglich.

3.3 LP-Relaxation zur Lösung des Timetabling Problems

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben ist das betrachtete Timetabling Problem mit seinen binären Entscheidungsvariable als NP-complete zu klassifizieren. Um dennoch die Struktur der Modellierung zu verifizieren und eine obere Grenze für den Zielfunktionswert festzulegen, kann das Optimierungsmodell mittels LP-Relaxation gelöst werden. Hierzu sind die Binaritäts- und Ganzzahligkeitsbedingungen der Entscheidungsvariable in den Nebenbedingungen (9), (10), (11) und (12) durch die folgenden Gleichungen zu ersetzen.

$$0 \leq x^t_{klrf} \leq 1 \qquad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, r \in \bar{R}, f \in \bar{F}, t \in \bar{T} \tag{21}$$

$$0 \leq x_{klf} \leq 1 \qquad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, f \in \bar{F} \tag{22}$$

$$0 \leq x^t_f \leq 1 \qquad \forall\ f \in \bar{F}, t \in \bar{T} \tag{23}$$

$$e_l \geq 0 \qquad \forall\ l \in \bar{L} \tag{24}$$

Ergibt sich aus dem relaxierten Problem eine optimale Lösung, welche auch zulässig für das Ausgangsproblem ist, so ist dies die optimale Lösung des Timetabling Problems.[22] Ausgehend von der nicht-ganzzahligen Lösung können Verfahren der ganzzahligen Optimierung, wie beispielsweise ein Branch-and-Bound-Verfahren oder eine Schnittebenen-Methode, angewendet werden, um eine ganzzahlige Lösung nahe dem Optimum zu bestimmen. Zudem liefert die obere Grenze des Zielfunktionswertes eine Abschätzung der Dimension, in der ein mögliches Abbruchkriterium des verwendeten Algorithmus (Abschnitt 4.8) gewählt werden sollte.

[22] Vgl. Bertsimas und Weismantel (2005), S. 9.

3.4 Gliederung des linearen Optimierungsmodells in zwei Planungsebenen

Zur Vereinfachung der Lösung des Timetabling Problems mit heuristischen Verfahren wird das Optimierungsproblem häufig in zwei Teilplanungen zerlegt. Die Gliederung ist dabei an das praktische Vorgehen eines Schulleiters bei der Planung angelehnt. Dieser bestimmt zunächst das Curriculum mit der Zuordnung der Lehrer zu den vorgegebenen Anzahlen an Schulstunden der Klassen nach Fächern. In dieser ersten Teilplanung sind die vertraglich festgelegten Schulstunden der Lehrer sowie die gesetzlich vorgeschriebene Anzahl Schulstunden eines Faches in einer Klasse als Beschränkungen zu beachten. Die festgelegten Lehrer-Klasse-Fach-Tupel gehen als Eingangsdaten in die zweite Teilplanung ein, welche die Zuordnung der Räume und Schulstunden entsprechend bestimmt. Hierbei muss die Einfachzuordnung jeden Lehrers, Raumes und jeder Klasse gewährleistet sowie die Verfügbarkeit und Eignung eines Raumes für ein Fach beachtet werden.[23]
Bei der Anwendung heuristischer Lösungsverfahren, insbesondere einem genetischen Algorithmus, wird zur Minderung des Planungsaufwandes lediglich die zweite Teilplanung betrachtet. Die Lehrer-Klasse-Fach-Tupel aus der ersten Planungsebene werden als gegeben angenommen, da sie, wie beschrieben, durch die Lehrerbesetzung und die Erfahrungen des Schulleiters mit begrenztem Aufwand zu bestimmen sind. Die im Vorhinein entsprechend festzulegenden Entscheidungsvariable sind definiert als

$$x_{klf} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Klasse } k \text{ von Lehrer } l \text{ im Fach } f \text{ unterrichtet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Zuordnungsvariable sind für alle Klassen k, Lehrer l und Fächer f zu bestimmen, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$\sum_{L \in \bar{L}_f} x_{klf} = 1 \qquad \forall\ k \in \bar{K}, f \in \bar{F} \tag{25}$$

$$\sum_{k \in \bar{K}} \sum_{f \in \bar{F}_l} x_{klf} \cdot b_{kf} = \bar{s}_l - \bar{e}_l \quad \forall\ L \in \bar{L} \tag{26}$$

$$x_{klf} \in \{0,1\} \quad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, f \in \bar{F} \tag{27}$$

Die Restriktionen (25) stellen dabei sicher, dass jeder Klasse k in jedem Fach f genau ein Lehrer l zugeordnet wird. Die exakte Einhaltung der vertraglich

[23] Vgl. Gesprächsprotokoll des Gespräches mit Gabi Lange vom 14.5.2012 in Anhang B.

vereinbarten Anzahl Schulstunden eines Lehrers in einer Planungsperiode wird von den Nebenbedingungen (26) gewährleistet.
Als resultierende Eingangsdaten für die Zuordnung der Räume und Zeiten in der zweiten Teilplanung lassen sich die Lehrer-Klasse-Fach-Tupel durch die Indexmengen K^*_{lf}, L^*_{kf} und F^*_{kl} ausdrücken. Die Zuordnungen von je zwei der Komponenten werden entsprechend durch bspw. F^*_l dargestellt. Das Zuordnungsproblem der zweiten Teilplanung ist in Anhang D ausgeführt und beschränkt durch alle Aspekte, die auch in der Simultanplanung in Abschnitt 3.1 berücksichtigt werden. Die zuvor definierten Lehrer-Klasse-Fach-Zuordnungen verringern jedoch die Anzahl der festzulegenden Entscheidungsvariable erheblich.
Durch die Gliederung des Timetabling Problems in zwei Planungsebenen sind Schulleiter in der Lage, für eine Problemstellung, welche als nicht in polynomialer Zeit lösbar gilt, durch logische Kombination eine umsetzbare, gute Lösung zu bestimmen. Es ist jedoch zu erwähnen, dass die Festlegung eines Curriculum in der ersten Teilplanung ohne Berücksichtigung der Raum- und Schulstundenzuordnung die optimale Lösung des Timetabling Problems abschneiden kann.
Im Folgenden soll ein genetischer Algorithmus auf das Timetabling Problem der Grundschule angewendet werden. Aufgrund der komplexen Zusammenhänge innerhalb der Planung und der Nutzung von Erfahrungen des Schulleiters beim Erstellen des Curriculum soll nur die zweite Teilplanung durch den Algorithmus gelöst werden. Das umgesetzte Curriculum der Grundschule, welches in Abschnitt 2.2 dargestellt wurde, geht als Eingangsdatum in das Problem ein. Auf diese Weise wird die Grundlage vergleichender Aussagen zum realisierten Plan und den Ergebnissen des Algorithmus geschaffen.

4 Lösung des Timetabling Problems mittels genetischem Algorithmus

4.1 Vorbemerkungen zur Auswahl des Lösungsverfahrens

Die Verfahrenswahl bezüglich der Anwendung einer Heuristik auf das Timetabling Problem ist vielfältig.[24] Wie aus den Ausführungen der vorhergehenden Kapitel abzuleiten ist, umfasst das Timetabling Problem einer Grund-

[24]Übersichten zu verschiedenen Heuristiken finden sich unter anderem in Schaerf (1999) sowie Burke und Petrovic (2002).

schule mit überschaubarer Größe schon eine Vielzahl von komplexen Zusammenhängen und Planungsbedingungen. DeJong und Spears (1989) stellen fest, dass viele Verfahren generalisiert auf eine Vielzahl von Problemen anwendbar sind und dabei häufig die Möglichkeit der Lösung detaillierter, komplexer Problemstellungen verloren geht. Genetische Algorithmen erweisen sich durch ihre Anpassungsfähigkeit in Form der Lösungsrepräsentation und den Steuerparametern als erfolgversprechend auch praktische Planungssituationen realitätsnah erfassen und lösen zu können.[25] Aufgrund ihrer Struktur sind genetische Algorithmen im Gegensatz zu klassischen, optimierenden Verfahren in der Lage, sehr weite, diverse Bereiche des Lösungsraumes zu betrachten und damit besonders für komplexe, mehrdimensionale Problemstellungen wie das Timetabling Problem gute Lösungen zu generieren.[26] Der Algorithmus verwendet im Gegensatz zu anderen Suchverfahren eine Menge von Startlösungen anstelle einer einzelnen und basiert seine Entscheidungen auf Wahrscheinlichkeiten anstelle von deterministischen Regeln,[27] um schlechtere Lösungen mit guten Elementen nicht vorschnell zu verwerfen.
Genetische Algorithmen weisen in der Anwendung auf komplexe Planungssituationen ähnlicher Problemstellungen einen Laufzeitvorteil mit steigender Problemgröße auf[28], wobei sich die Ergebnisse im Vergleich zu anderen Verfahren kaum unterschieden[29]. Auch in der Anwendung auf das Timetabling Problem einer italienischen High School generierte der genetische Algorithmus mit integriertem, lokalen Suchverfahren bessere Pläne als das ebenfalls angewendete Simulated Annealing.[30]

4.2 Aufbau und Vorgehen eines genetischen Algorithmus

Genetische Algorithmen (GA) gehören zu den naturanalogen Verfahren und stellen eine Form der evolutionären Algorithmen (EA) dar[31]. Es handelt sich um Suchalgorithmen, welche die Mechanismen der natürlichen Selektion basierend auf genetischen Informationen imitieren.[32] Eine Lösung mit der Festlegung aller Entscheidungsvariable wird dabei als Individuum betrachtet[33],

[25] Vgl. DeJong und Spears (1989), S. 124.
[26] Vgl. Grefenstette (1986), S. 123.
[27] Vgl. Goldberg (1989), S. 7.
[28] Vgl. Ruban (2008), S. 234.
[29] Vgl. Ruban (2008), S. 233.
[30] Vgl. Colorni u. a. (1990), S. 17.
[31] Vgl. Nissen (1994), S. 13.
[32] Vgl. Goldberg (1989), S. 1.
[33] Vgl. Ruban (2008), S. 46.

welches sich mit anderen Individuen der Population fortpflanzen kann. Ein Individuum kann durch seinen Geno- oder seinen Phänotyp dargestellt werden, wobei der Genotyp die codierte und der Phänotyp die decodierte Lösung beschreibt.[34] Eine Population beschreibt die Menge aller Lösungen[35], in der Individuen überleben, geboren werden oder sterben können im Übergang von einer Generation zur nächsten[36]. In jeder Generation wird entsprechend eine neue Menge Individuen zusammengestellt, entstehend durch Erhaltung, Neukombination und Veränderung von genetischem Material der vorherigen Generation. Die genetischen Informationen eines Individuums implizieren als Ausprägung der Entscheidungsvariable einen Zielfunktionswert. Dieser wird durch den Wert der Fitness des Individuums dargestellt. Der Algorithmus nutzt gute genetische Informationen bezüglich des Zielfunktionswertes vermehrt für die Erzeugung von Nachkommen in der Erwartung fittere Individuen zu generieren[37]. Die Erzeugung von Nachkommen wird meist durch die Anwendung der Operatoren Selektion (Reproduktion), Crossover und Mutation vollzogen. Eine Übersicht zur Terminologie genetischer Algorithmen bietet Anhang E.
Abbildung 1 stellt die Vorgehensweise eines genetischen Algorithmus in Pseudo-Code[38] dar. Eine grafische Darstellung wird in Anhang **??** gezeigt. Die Funktion der einzelnen Komponenten des GA und einige ihrer Variationen werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert und diskutiert.
Die Leistungsfähigkeit eines GA wird von Holland 1975 mit der Schema Theorie begründet. Es wird beschrieben, dass der Algorithmus bei seiner Suche eine Vielzahl von genetischen Mustern (Schemata) testet, erfolgversprechende identifiziert und diese vermehrt zur Erzeugung neuer Individuen einsetzt.[39] Kleine Schemata mit überdurchschnittlicher Fitnesswertausprägung werden Building Blocks (BB) genannt. Ihr Auftreten in immer besseren Lösungen steigt in den Generationen exponentiell und fördert das Auffinden von Lösungen unweit des Optimums.[40] Ausführlichere Erläuterungen zum Schema Theorem finden sich in Abschnitt I.

4.3 Repräsentation und Codierung eines Stundenplanes

Die Repräsentation und Codierung einer Lösung bilden den Ausgangspunkt für das Vorgehen eines genetischen Algorithmus. Basierend auf den dazu ge-

[34] Vgl. Goldberg (1989), S. 21.
[35] Vgl. Ruban (2008), S. 46.
[36] Vgl. Goldberg und Deb (1991), S. 70.
[37] Vgl. Goldberg (1989), S. 1.
[38] Vgl. Ahn (2006), S. 8 und Nissen (1994), S. 27.
[39] Vgl. Holland (1992), S. 66.
[40] Vgl. Goldberg (1989), S. 20.

Basis-GA

SCHRITT 1: **Festlegung der Parameter**
Setze Populationsgröße n, Wkt. eines Crossover p_c,
Wkt. einer Mutation p_m;
SCHRITT 2: **Initialisierung**
Setze $j := 0$;
Generiere Anfangspopulation POP_0 mit n Individuen
auf zufällige Weise oder nach gegebener Heuristik;
WIEDERHOLE
SCHRITT 3: **Fitnesszuweisung**
Bestimme die Fitness fit_i aller Individuen;
SCHRITT 4: **Selektion**
Wähle Eltern aus POP_j nach Selektionsschema aus;
SCHRITT 5: **Crossover**
Wende mit Wkt. p_c ein Crossover auf die Eltern an;
SCHRITT 6: **Mutation**
Wende mit Wkt. p_m eine Mutation auf die Nachkommen an;
SCHRITT 7: **Generierung der Folgegeneration**
Füge Nachkommen zu POP_j hinzu;
Wähle n Individuen aus POP_j nach gegebenen Kriterien aus;
Setze $j := j + 1$
SCHRITT 8: **Prüfung des Abbruchkriteriums**
BIS Abbruchkriterium ist erfüllt.
SCHRITT 9: **Ausgabe der Lösung**
Gib bestes Individuum mit $fit_i = fit^{max}$ als Lösung aus.

Abbildung 1: Pseudo-Code eines Basis-GA

troffenen Festlegungen müssen weitere Komponenten wie die Operatoren des Algorithmus angepasst werden. Die Begriffe Repräsentation und Codierung werden häufig synonym verwendet, sollen in dieser Arbeit jedoch wie folgt differenziert werden: Als Repräsentation des Stundenplanes versteht man die Darstellungsform eines Individuums für den genetischen Algorithmus. Als Codierung wird die Übersetzung einer Information in ein meist einstelliges Zeichen bezeichnet.[41]
Die Menge der zur Codierung verwendeten Zeichen wird Alphabet genannt. Das kleinste anwendbare Alphabet besteht aus den Elementen 0 und 1 und ist als Binärcode oder in einer Modifikation als Gray-Code bekannt[42]. Dieser

[41] Vgl. Nissen (1994), S. 31.
[42] Weitere Erklärungen und Beispiele zu den Codierungsvarianten in Binär- und Gray-Code finden sich in Nissen (1994), S. 31/32.

ist die häufigste Form der Codierung einer Lösung bei der Anwendung von genetischen Algorithmen. Alternativ kann ein numerisches Alphabet aus ganzen oder natürlichen Zahlen sowie ein gemischtes Alphabet aus Zahlen und Buchstaben eingesetzt werden. Um den Rechenaufwand des Algorithmus nicht unnötig zu vergrößern, sollte stets das minimal mögliche Alphabet verwendet werden.[43]
Bei der Darstellung eines Stundenplanes zur Verarbeitung mittels genetischem Algorithmus kann eine direkte oder indirekt Codierung angewendet werden. Beim direkten Codieren wird ein numerisches oder gemischtes Alphabet verwendet, bei dem die Zahlen oder Buchstaben eine direkte Entsprechung der Platzierung einer Unterrichtseinheit oder Sondertätigkeit bspw. in eine Schulstunde darstellen. Bei der Anwendung einer indirekten Codierung wird ebenfalls ein numerisches oder gemischtes Alphabet verwendet, wobei die Ausprägung der Allele lediglich eine Verarbeitungsart oder -reihenfolge der entsprechenden Unterrichtseinheiten in einer weiteren Heuristik abbilden.[44] Da eine Mehrheit der Betrachtungen von Stundenplanungsproblemen mit genetischen Algorithmen mit einer direkten Codierung arbeiten, werden im Folgenden nur Varianten dieser Codierungsform betrachtet.
Ein direkt codiertes Individuum kann besonders in seiner Repräsentation detailliert an die Planungssituation angepasst werden.[45] Für die Stundenplanung etablierte sich neben der Folgedarstellung[46] die Repräsentation durch eine Matrix[47], welche der Gestalt eines Stundenplanes angenähert ist. Die Matrixrepräsentation ist dabei dadurch charakterisiert, welche Problemkomponenten die Zeilen und Spalten darstellen und wie die numerischen Einträge in den Zellen interpretiert werden.
Beligiannis u. a. (2009) wählen eine Repräsentation, bei der die Zeilen Klassen und die Spalten Schulstunden beschreiben. Entsprechend wird in jede Zelle der Lehrer eingetragen, welcher der Klasse in der Schulstunde zugeordnet ist. Bei dieser Darstellung wird die Platzierung der Fächer außer Acht gelassen und lediglich die Anzahl notwendiger Schulstunden von Lehrer l in Klasse k betrachtet.[48] Eine solche Vereinfachung darf für das Timetabling Problem der Grundschule nicht getroffen werden, da die Planung des jahrgangsübergreifenden Unterrichtes (H9) genauso wie die Berücksichtigung der weichen Beschränkung W4 eine Betrachtung der Fächer bei der Zuordnung erfordert.

[43]Vgl. Goldberg (1989), S. 80.
[44]Vgl. Ross u. a. (2003), S. 760/761 sowie Corne u. a. (1994), S. 4/5.
[45]Vgl. Ross u. a. (2003), S. 760.
[46]Vgl. Caldeira und Rosa (1997) sowie Stefano und Tettamanzi (2001)
[47]Vgl. Beligiannis u. a. (2009) sowie Colorni u. a. (1990)
[48]Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S. 29/30.

Alternativ stellen Colorni u. a. (1998) die Lösung als Matrix mit Lehrern kategorisiert nach Fach als Zeilen und Schulstunden als Spalten dar. In dieser Repräsentation wird angenommen, dass jeder Lehrer nur ein bestimmtes Fach unterrichtet oder zwei Fächer gemeinsam.[49] Diese Annahme ist für die betrachtete Grundschule ebenfalls nicht zutreffend, sodass auch eine solche Darstellung nicht angewendet werden kann. In beiden Ansätzen wird die Belegung der Räume bei der Zuordnung nicht berücksichtigt[50]. Die Raumbelegung insbesondere der Fachräume mit begrenzter zeitlicher Verfügbarkeit beeinflusst die Planung der Grundschule erheblich und muss bei der Zuordnung unbedingt betrachtet werden.
Carrasco und Pato (2001) arbeiten ebenfalls mit einer Matrixrepräsentation des Stundenplanes, wobei die Räume zeilenweise und die Schulstunden spaltenweise angeordnet sind. Es wird eine Unterrichtseinheit als Kombination einer Klasse, eines Lehrers und eines Faches mit einer entsprechenden Dauer definiert.[51] Diese Festlegung gleicht der Bestimmung des Curriculums für die betrachtete Grundschule, wobei die Dauer einer Unterrichtseinheit stets eine Schulstunde ist und somit nicht gesondert betrachtet werden muss. Die Anzahl der zuzuordnenden Lehrer-Klasse-Fach-Tupel wird von Carrasco und Pato (2001) nicht diskutiert, diese stellt lediglich eine kleine Erweiterung des Modells dar. Die Autoren codieren die Unterrichtseinheiten zweistellig mit einem gemischten Alphabet, wobei je ein Buchstabe für das Fach und eine Zahl für die Klasse-Lehrer-Zuordnung steht.[52] Im Falle dieser Repräsentation wäre eine numerische Codierung ebenso denkbar, denn der verwendete Buchstabe bietet stets einen Anhaltspunkt für die zugeordnete Unterrichtseinheit in Form des Faches. Die Abbildung in Anhang F stellt eine beispielhafte Zuordnung von den Lehrer-Klasse-Fach-Tupeln $(l|k|f)$, die Klassen 1a und 2a betreffend, aus dem realisierten Plan der Grundschule dar. Ein Tupel ist dabei zweistellig numerisch codiert.
Alternativ zur Matrixrepräsentation kann ein Stundenplan als Zeichenfolge codiert werden. Diese Form der Repräsentation wird von Caldeira und Rosa (1997) und Stefano und Tettamanzi (2001) auf praktische Problemstellungen abgewendet. Caldeira und Rosa (1997) betrachten die Zuordnung von Schulstunden zu Klasse-Lehrer-Fach-Tupeln, wobei deren Anzahl durch das Curriculum gegeben ist.[53] Ein Individuum besteht aus einem Chromosom, das für alle Klassen die erforderlichen Unterrichtseinheiten und zudem für al-

[49] Vgl. Colorni u. a. (1998), S. 277/278.
[50] Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S.29/30 sowie Colorni u. a. (1998), S. 276.
[51] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 8/9.
[52] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 9.
[53] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 1.

le Lehrer die daraus folgenden Unterrichtseinheiten darstellt. Die Länge des Chromosoms entspricht somit der doppelten Anzahl von zu platzierenden Unterrichtseinheiten.[54] Durch diese erweiterte Darstellung bleibt die Erfüllung des Curriculum auch bei Anwendung der Operatoren stets gewährleistet.[55] Ein Reparaturoperator ist jedoch notwendig, um die Einhaltung der weiteren harten Beschränkungen in den Nachkommen zu sichern[56]. Die Zuordnung von Räumen zu den Unterrichtseinheiten wird von den Autoren nicht betrachtet.
Stefano und Tettamanzi (2001) verwenden ebenfalls eine Repräsentation des Planes als Zeichenfolge, bei der die Gene zu platzierende Unterrichtseinheiten darstellen. Es wird jedoch jede notwendige Lehrer-Klasse-Fach-Zuordnung nur in ihrer erforderlichen Anzahl dargestellt, sodass die Länge des Chromosoms der Gesamtanzahl der Unterrichtseinheiten entspricht. Die Autoren verwenden ein numerisches Alphabet der positiven ganzen Zahlen, die jeweils die Anfangsperiode[57] der entsprechenden Unterrichtseinheit ausdrücken.[58] Die Zuordnung der Räume wird nicht direkt vom Algorithmus vorgenommen, da für jedes Fach ein Raumtyp als Voraussetzung definiert wird.[59] Die Raumbelegung wird dann als harte Beschränkung in die Formulierung eingebunden und in die Fitnessfunktion integriert.[60] Eine gesonderte Darstellung der Räume in der Lösungsrepräsentation ist somit nicht notwendig.
Eine Modifikation der Folgerepräsentation verwenden Abramson und Abela (1992). Ein Individuum besteht hier aus mehreren Chromosomen, wobei jedes Chromosom für eine Schulstunde steht. Die Gene eines Chromosoms sind in ihrer Anzahl variabel, da sie die der Schulstunde zugeordneten Lehrer-Klasse-Fach-Tupel darstellen.[61] Jedes Individuum hat die gleiche Anzahl Chromosomen, wobei bei einem Crossover nur Chromosome mit gleichem Index berührt werden.[62] Diese Form der Repräsentation betrachtet nicht vordergründig die Zuordnung einer bestimmten Unterrichtseinheit zu einer bestimmten Schulstunde, sondern betont die Erhaltung guter Kombinationen von Unterrichteinheiten in einer Zeitperiode.[63]
Die direkte Repräsentation der Lösung sowohl in Matrix- als auch in Folgeform ermöglicht eine einfache Form der Kalkulation der Fitnessfunktion, die

[54]Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 2.
[55]Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 2.
[56]Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 6.
[57]Stefano und Tettamanzi (2001) betrachten Unterrichtseinheiten mit unterschiedlicher im Vorhinein festgelegter Dauer.
[58]Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 456.
[59]Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 453.
[60]Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 454, 457.
[61]Vgl. Abramson und Abela (1992), S. 3/4.
[62]Vgl. Abramson und Abela (1992), S. 5.
[63]Vgl. Abramson und Abela (1992), S. 3.

sich meist aus gewichteten Strafkosten für die Nichteinhaltung von Beschränkungen zusammensetzt. Zudem verursacht die Decodierung im Gegensatz zu einer indirekten Repräsentation einen wesentlich geringeren Rechenaufwand.[64] Eine problemspezifische direkte Repräsentation kann jedoch zu einer großen Anzahl Genen innerhalb eines Chromosoms führen, was die Erfassung möglichst vieler Building Blocks in der Anfangspopulation mit begrenzter Individuenzahl eingrenzt. Auch unter Anwendung eines auf Zufall basierenden Mutationsoperators kann die Entstehung von mit unter sehr guten Building Blocks in der Suche sehr spät oder gar nicht erfolgen.[65] Wiederum unterstützt eine direkte Repräsentation die Entstehung von neuen, erfolgversprechenden Building Blocks durch Crossover.[66] Der Crossoveroperator kann bei Individuen mit komplexer Repräsentation oft zur Erzeugung unzulässiger Nachkommen führen. Dieses Problem muss bei der Strukturierung ergänzender Operatoren sowie der Festlegung der Ziel- und Fitnessfunktion berücksichtigt werden.[67] Meist werden bei der Anwendung einer direkten Lösungsrepräsentation ein Reparatur- oder Verbesserungsoperator verwendet, um für die erzeugten Nachkommen Zulässigkeit und steigende Fitnesswerte zu erhalten.[68]

4.4 Generierung der Anfangspopulation

Bei der Erzeugung der Anfangspopulation sind die Art der Individuenerzeugung und die Populationsgröße n als Fragestellungen zu betrachten. Für eine erfolgreiche Anwendung des Algorithmus ist es wünschenswert eine möglichst diversifizierte Anfangspopulation festzulegen, um den gesamten Suchbereich damit zu repräsentieren[69] und möglichst viele Building Blocks innerhalb der Population zu erfassen[70]. Somit wirkt eine Zusammenstellung von diversen Individuen großer Anzahl einer frühen Konvergenz des Algorithmus in lokalen Optima entgegen.[71] Es ist jedoch zu beachten, dass eine zu große Population die Konvergenzgeschwindigkeit so stark herabsetzen kann, dass die Erzeugung guter Lösungen kaum oder gar nicht stattfindet.[72] Zudem ist der Rechenaufwand zu berücksichtigen, welcher mit steigender Populationsgröße stark

[64] Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 457.
[65] Vgl. Ross u. a. (2003), S. 760.
[66] Vgl. Corne u. a. (1994), S. 5.
[67] Vgl. Ross u. a. (2003), S. 761.
[68] Vgl. Ross u. a. (2003), S. 761 sowie Stefano und Tettamanzi (2001), S. 459 und Colorni u. a. (1990), S. 6.
[69] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 7 sowie Beligiannis u. a. (2009), S. 29.
[70] Vgl. Ahn (2006), S. 13.
[71] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124, Nissen (1994), S. 37/38 sowie Beligiannis u. a. (2009), S. 29.
[72] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124.

zunimmt.[73]
Die Populationsgröße n wird häufig auf einen Wert zwischen 10 und 200 festgelegt, wobei dies stark abhängig vom Ausmaß des zugrunde liegenden Problems, der verwendeten technischen Ausstattung und der Algorithmuskonstruktion ist. Grefenstette (1986) untersuchte in einem Experiment die Festlegung der Parameter und ihr Zusammenwirken innerhalb eines genetischen Algorithmus. Als Ausgangswert, welcher gute Resultate in verschiedenen Anwendungen erzielt hatte, wurde $n = 50$ gesetzt.[74] Bezogen auf verschiedene Performancemaße[75] und unter Anwendung auf unbeschränkte Probleme[76] wurde $30 \leq n \leq 110$ als Intervall der Populationsgröße für eine erfolgversprechende Anwendung des Algorithmus ermittelt[77].
Harik u. a. (1999) entwickeln eine Berechnungsvorschrift für eine gute Populationsgröße unter Einbeziehung der Initialisierung möglichst vieler guter Building Blocks und der Entscheidung für die Reproduktion des besten BBs gegenüber dem nächstbesten mit der Betrachtung des „Ruins des Spielers“ übertragen auf die BBs. Die Autoren setzen dabei die Populationsgröße als abhängig von stochastische Größen wie die Varianz der Fitness der BBs (Noise) und die erwartete Differenz der Fitnesswerte des besten und nächstbesten Building Blocks (Signal). Die Länge und Menge an BBs innerhalb eines Chromosoms (Partitionen) und eine vom Anwender gewählte Fehlerwahrscheinlichkeit des genetischen Algorithmus beeinflussen die Wahl der Populationsgröße.[78] Da diese stochastischen Daten im praktischen Anwendungsfall nur selten zu ermitteln sind, entwickelte Ahn (2006) eine Modifikation der Berechnungsvorschrift zur Ermittlung von n, welche lediglich von Kardinalität des Alphabets, der durchschnittlichen Länge und Anzahl an BBs sowie der gewährten Fehlerwahrscheinlichkeit des Algorithmus abhängt.[79] Da diese Ermittlung der Populationsgröße auf Grundlage der Optimierung von Funktionen ohne Beschränkungen zu meist mit einer binären Codierung entwickelt und getestet wurde, kann sie für das Timetabling Problem mit seinen zahlreichen Beschränkungen sowie einer Kardinalität entsprechend der Anzahl der Zeitperioden oder Unterrichtseinheiten nicht angewendet werden.
Es ist sinnvoll, in Anbetracht des Rechenaufwandes bei diesen komplexen Problemstellungen mit einer kleinen Populationsgröße zu beginnen und sie

[73]Vgl. Nissen (1994), S. 37.
[74]Vgl. Grefenstette (1986), S. 125.
[75]Vgl. Grefenstette (1986), S. 125.
[76]Vgl. Grefenstette (1986), S. 128.
[77]Vgl. Grefenstette (1986), S. 127.
[78]Vgl. Harik u. a. (1999), S. 239.
[79]Vgl. Ahn (2006), S. 17/18.

schrittweise auszuweiten, solange der Kalkulationsaufwand akzeptabel ist, um bessere Lösungen aus größeren Populationen zu generieren. Alternativ kann auch bei konstanter Populationsgröße die Anzahl erzeugter Generationen gesteigert werden, um den Suchprozess auszuweiten oder die Wahrscheinlichkeit der Operatoren geändert werden, um neue Bereiche des Lösungsraumes einzubeziehen. Eine Übersicht der Populationsgrößen einiger praktischer Anwendungen von verschiedenen genetischen Algorithmen auf das Timetabling Problem einer Schule findet sich in Tabelle 7.

Veröffentlichung	**Größe der Population** n
Caldeira und Rosa (1997)	60
Colorni u. a. (1998)	15
Carrasco und Pato (2001)	200
Stefano und Tettamanzi (2001)	100
Beligiannis u. a. (2009)	30

Tabelle 7: Populationgrößen verschiedener praktischer Anwendungen

Die Form der Erzeugung der Anfangspopulation kann grundlegend nach der Verwendung des Zufallsprinzips, der Einarbeitung bekannter Informationen oder der vorgelagerten Anwendung heuristischer Verfahren auf das Problem differenziert werden.[80] Bei der Anwendung eines genetischen Algorithmus auf das Timetabling Problem wird meist eine Konstruktionsprozedur verwendet, die Elemente des Zufallsprinzips mit der Verarbeitung von bekannten Informationen verbindet. Caldeira und Rosa (1997) verwenden eine Initialisierungsprozedur, in der sie das Zufallsprinzip und die Schwierigkeit der Zuordnung der Unterrichtseinheiten in die Generierung von ausschließlich zulässigen Plänen einarbeiten. Die Schwierigkeit der Zuordnung einer Unterrichtseinheit wird durch die Anzahl der Beschränkungen ermittelt, denen sie unterliegt. Basierend darauf wird eine mit absteigendem Schwierigkeitsgrad geordnete Liste der Unterrichtseinheiten erstellt und der Unterricht in dieser Reihenfolge in eine zufällig gewählte, zulässige Schulstunde platziert. Das Arbeiten mit ausschließlich zulässigen Plänen hat den Vorteil, dass kein Rechenaufwand auf die Erzeugung unzulässiger Pläne entfällt, jedoch können dadurch wertvolle Teilzuordnungen verloren gehen.
In der Anwendung von Beligiannis u. a. (2009) wird eine Lehrer-Klasse-Schulstunde-Zuordnung zufällig gewählt, diese aber nur zugeordnet, wenn die maximale Anzahl Wochenstunden des Lehrers noch nicht erfüllt ist. Somit wird die Einhaltung von dieser harten Beschränkung schon in der Initialisierungsphase

[80] Vgl. Nissen (1994), S. 38.

gewährleistet.[81]
In der Anwendung von Stefano und Tettamanzi (2001) wird ein Greedy-Algorithmus in der Initialisierungsprozedur verwendet, der den gegebenen Lehrer-Klasse-Fach-Tupel zufällig Schulstunden zuordnet. Solange Schulstunden verfügbar sind, welche alle Beschränkungen erfüllen, wählt der Algorithmus diese aus. Anschließend werden allen verbleibenden Unterrichtseinheiten Schulstunden zufällig zugeordnet.[82] In diesem Fall wird die Einhaltung des Curriculum gewährleistet, da jede abzuhaltende Unterrichtseinheit in den Individuen erfasst ist.
Carrasco und Pato (2001) verwenden bei der Konstruktion der Anfangspopulation ebenfalls eine nach Schwierigkeit der Zuordnung geordnete Liste der Unterrichtseinheiten, sodass Lehrer-Klasse-Fach-Tupel, deren Platzierung vielen Beschränkungen unterliegt, zu Beginn mit einer möglichst geringen Zahl an Restriktionsverletzungen zugeordnet werden. Bei der Anwendung dieser Prozedur wird die Einhaltung des Curriculums stets gesichert, da nur Unterrichtseinheiten platziert werden, die auch abzuhalten sind.[83]
Auch mit der Berücksichtigung von bekannten Informationen über Beschränkungen generieren die Verfahren nach Beligiannis u. a. (2009), Carrasco und Pato (2001) und Stefano und Tettamanzi (2001) viele unzulässige Pläne als Individuen der Anfangspopulation. Diese werden jedoch in der Population belassen, da sie oft gute Teillösungen enthalten, die durch die Anwendung der genetischen Operatoren zu zulässigen Plänen kombiniert werden können. Die Verwendung von ausschließlich zulässigen Individuen kann aber sehr schnell zu einer Konvergenz gegen lokale Optima führen, da große Teile des Suchraumes unberücksichtigt bleiben.[84] Für sehr komplexe Lösungsräume kann die Beschränkung der Betrachtung auf zulässige Gebiete jedoch einen Vorteil bezüglich des Rechenaufwandes und der Qualität der besten Lösung bedeuten.[85]

4.5 Bewertung eines Planes

4.5.1 Unterscheidung von Fitness, Zielfunktion und Fitnessfunktion

Die Fitness eines Individuums stellt die Güte der repräsentierten Lösung im Bezug auf das Problem dar. Die Fitnessfunktion ist somit neben der Repräsentation der Lösung eine zweite Verbindung zwischen dem genetischen Algo-

[81] Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S. 29.
[82] Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 457.
[83] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 11.
[84] Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S. 30.
[85] Vgl. Nissen (1994), S. 38/39.

rithmus und der Problemstellung.[86]
Es ist zunächst zwischen der Ziel- und der Fitnessfunktion zu unterscheiden. Dabei ist die Zielfunktion eine auf die Problemstellung bezogene, stetige Zuordnung, die durch einen Zielfunktionswert z_i angibt, wie gut der Phänotyp des Individuums das Problem löst. Die Fitnessfunktion gibt dann an, wie der Zielfunktionswert für den Algorithmus dargestellt wird. Die Fitness fit_i eines Individuums dient meist als Grundlage für die Auswahl des Individuums zur Fortpflanzung. Aus diesem Grund wird die Fitness nicht wie der Zielfunktionswert individuell, sondern im Kontext der Population betrachtet. Die Fitnesswerte anderer Individuen können ein Individuum beispielsweise extrem fit oder schwach erscheinen lassen. Dies bedeutet, dass der Aufbau der Zielfunktion und die entstehende Verteilung der Zielfunktionswerte den Selektionsdruck beeinflussen können. Die berechneten Zielfunktionswertewerden aus diesem Grund meist durch eine Fitnessfunktion $\phi(z_i)$ skaliert, um eine steuerbare Umwelt[87] für die Individuen zu erzeugen und Evolution gewünschter Stärke zu simulieren. Zudem ist es möglich, dass der Zielfunktionswert eines Individuums negativ oder die Zielfunktion minimiert wird.[88] Für die Fitness aller Individuen gilt jedoch $fit_i > 0$[89] und die Struktur des genetischen Algorithmus bestimmt allgemein eine Maximierung dieser[90]. So wäre auch in diesem Fall eine Skalierung notwendig.[91]

4.5.2 Zielfunktion

Für das Aufstellen der Zielfunktion im Rahmen der Anwendung eines genetischen Algorithmus sind als Problemklassen die reine Funktionsoptimierung und die Optimierung unter Nebenbedingungen zu unterscheiden. Bei der reinen Funktionsoptimierung wird die Funktion als Zielfunktion betrachtet, welche der Fitnessfunktion entspricht. Dies gilt als der klassische Anwendungsbereich von genetischen Algorithmen, begründet mit der Dissertation von Kenneth A. De Jong „An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems“ (1975).
Die Einbeziehung von Nebenbedingungen kann in einem genetischen Algorithmus lediglich im Rahmen der Kalkulation des Zielfunktionswertes oder unter

[86] Vgl. Davis (1996), S. 4.
[87] Vgl. Davis (1996), S. 4.
[88] Vgl. Goldberg (1989), S. 75.
[89] Eine Inklusion des Wertes 0 in den Wertebereich der Fitnessfunktion kann problemspezifisch angepasst werden, wobei die Auswirkungen dessen auf den Selektionsmechanismus berücksichtigt werden müssen. Diese werden im folgenden Abschnitt näher erläutert.
[90] Vgl. Colorni u. a. (1998), S. 283.
[91] Vgl. Nissen (1994), S. 24.

Verwendung zusätzlicher Operatoren erfolgen. Dies weitet die Bewertung der Individuen häufig zu einem sehr komplexen Schritt innerhalb des Algorithmus aus. Eine weniger rechenaufwändige Form der Zielfunktion verwendete Tripathy (1984) in der Anwendung eines ganzzahligen Optimierungsmodells auf das Kursplanungsproblem einer Schule. Die Summe der „Erwünschtheit“ aller Fächer über alle Zeitperioden soll maximiert werden.[92] Für das Timetabling Problem der Grundschule würde sich die Zielfunktion wie folgt ergeben:

$$\sum_{t \in \bar{T}} \sum_{k \in \bar{K}} \sum_{l \in \bar{L}} \sum_{r \in \bar{R}} \sum_{f \in \bar{F}} d^t_{klrf} \cdot x^t_{klrf} \quad \longrightarrow \max!, \tag{28}$$

wobei d^t_{klrf} die „Erwünschtheit“ einer Zuordnung von Klasse k und Lehrer l mit Fach f zu Raum r und Schulstunde t angibt. Tripathy (1984) betrachtet lediglich die Zuordnung von zwei Elementen zueinander. Bei der zu treffenden Zuordnung von Klassen, Lehrern, Fächern, Räumen und Schulstunden ist die Festlegung jedes Parameters d^t_{klrf} aufgrund des immensen Aufwandes jedoch nicht möglich.

Eine alternative, weit verbreitete Form der Einbeziehung von Beschränkungen ist Verwendung von Strafkosten (penalty method[93]). Hierbei wird für jede Beschränkung ein numerischer Idealwert festgelegt, der sich häufig schon aus der mathematischen Modellierung ergibt. Abweichungen von diesem Idealwert sind bei der Generierung von neuen Lösungen erlaubt, werden jedoch mit einem Kostenfaktor bestraft und bilden in Summe über alle Restriktionen eine zu minimierende Zielfunktion. Die Problemstellung wird somit als unbeschränkt angenommen[94], sodass eine Lösung sowohl harte als auch weiche Beschränkungen verletzen kann. Da die Nichteinhaltung von harten Beschränkungen die Unzulässigkeit des generierten Planes bedeutet, sollte der Strafkostenfaktor α von harten Beschränkungen signifikant größer als ein Strafkostenfaktor β^w von weichen Beschränkungen sein.[95] Es besteht auch die Möglichkeit, jeder harten Beschränkung einen individuellen Strafkostenfaktor zuzuweisen, um Präferenzen des Schulleiters bei der Planung einzubeziehen. In der Regel bestehen diese nur innerhalb der weichen Beschränkungen, da eine Unzulässigkeit des Planes generell nicht akzeptiert werden kann.[96]

Für die harten Beschränkungen H1, H2 und H3 ergeben sich in ihrer Umsetzung als Nebenbedingungen (Gleichungen (1), (2) und (3)) die Idealwerte 0

[92] Vgl. Tripathy (1984), S. 1477.
[93] Vgl. Goldberg (1989), S. 85.
[94] Vgl. Goldberg (1989), S. 85.
[95] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 10.
[96] Vgl. Gesprächsprotokoll des Gespräches mit Gabi Lange vom 14.5.2012 in Anhang B.

und 1. Die für den Algorithmus erlaubten Abweichungen können durch das Hinzufügen der Entscheidungsvariable a^1_{lt}, a^2_{kt} und a^3_{rt} entsprechend bestimmt werden. Die Beschränkungen der Art H2 werden dann beispielweise wie folgt modelliert:

$$\sum_{l \in \bar{L}_t} \sum_{r \in \bar{R}_t} \sum_{f \in \bar{F}} x^t_{klrf} \leq 1 + a^2_{kt} \qquad \forall \;\; t \in \bar{T}, k \in \bar{K}_t \tag{29}$$

Um die Abweichungen von den harten Beschränkungen H4, H5 und H6 zu ermöglichen und zu dokumentieren, müssen diese nicht, wie im Modell gezeigt, durch Indexmengen definiert, sondern in gleicher Weise wie die Festlegung der Einfachzuordnungen modelliert werden. Zunächst werden als Eingangsdaten für alle Klassen, Lehrer und Räume Verfügbarkeitsparameter angegeben, z.B.

$$v_{lt} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Lehrer } l \text{ in Schulstunde } t \text{ verfügbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In die Gleichungen zur Einhaltung der Verfügbarkeiten werden zusätzliche Entscheidungsvariable a^4_{lt}, a^5_{kt} und a^6_{rt} eingefügt, um Abweichungen zu quantifizieren. Die Formulierung der Beschränkungen H4 würden beispielsweise wie folgt lauten:

$$\sum_{k \in \bar{K}} \sum_{r \in \bar{R}} \sum_{f \in \bar{F}} x^t_{klrf} \leq v_{lt} + a^4_{lt} \qquad \forall \; l \in \bar{L}, t \in \bar{T} \tag{30}$$

In gleicher Weise werden Abweichungen von den Beschränkungen H7 und H8 in den Nebenbedingungen (4) und (5) durch die Addition der Variable a^7_{kf} und a^8_l auf der rechten Seite zugelassen und dokumentiert. Die Entscheidungsvariable a^7_{kf} kann aufgrund der Struktur des Problems auch negative Werte bei Unterschreitung der exakt definierten Stundenzahl b_{kf} annehmen. Demgegenüber wird a^8_l stets größer oder gleich 0 sein, da lediglich eine Überschreitung der Wochenstundenzahl eines Lehrers als Abweichung zu sehen ist und eine Unterschreitung durch den Einsatz des Lehrers für Sondertätigkeiten vermieden wird. In den Nebenbedingung (6) wird eine Nichteinhaltung der Beschränkung H9 durch die Addition der zusätzlichen Variable a^9_{klf} auf der rechten Seite der Gleichung ermöglicht. a^9_{klf} wird in der Anwendung meist negative Werte oder 0 annehmen, da eine Abweichung in der Regel darin bestehen wird, dass einem Lehrer nicht die gesamte Wochenstundenzahl eines Faches in einer Klasse zugeordnet wird. Eine Zuordnung, von mehr Wochenstunden als benötigt, wäre zwar denkbar, wird dann jedoch durch H7 und H9 mit Strafkosten belegt.

Des Weiteren müssen auch für die spezifischen Beschränkungen der Grund-

schule H10 und H11, welche in Abschnitt 3.1 eingeführt wurden, Nichteinhaltungen zugelassen und quantifiziert werden. Dazu werden die Entscheidungsvariable a_{kt}^{10} und a_{ft}^{11} auf der rechten Seite der Nebenbedingungen (7) und (8) addiert. Den Wert 1 nimmt a_{kt}^{10} an, wenn auf eine nicht zugeordnete Schulstunde t eine Zuordnung in $t+1$ entgegen der Beschränkung erfolgen soll. Die Variable a_{ft}^{11} wird einen negativen Wert annehmen, wenn für ein Fach mit geforderter zeitlicher Parallelplanung für bestimmte Klassen, nicht alle Klassen in dieser Schulstunde zugeordnet werden können. a_{ft}^{11} bestimmt dann die Anzahl der Klassen, die der Beschränkung nicht entsprechen.
Die in die Zielfunktion eingehende gewichtete Summe der Abweichungen der harten Beschränkungen für ein Individuum ergibt sich zu

$$z_i^H = \alpha\Big(\sum_{l\in\bar{L}}\sum_{t\in\bar{T}}(|a_{lt}^1|+|a_{lt}^4|)+\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{t\in\bar{T}}(|a_{kt}^2|+|a_{kt}^5|+|a_{kt}^{10}|)+\sum_{r\in\bar{R}}\sum_{t\in\bar{T}}(|a_{rt}^3|+|a_{rt}^6|)$$

$$+\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{f\in\bar{F}}|a_{kf}^7|+\sum_{l\in\bar{L}}|a_l^8|+\sum_{k\in\bar{K}}\sum_{l\in\bar{L}}\sum_{f\in\bar{F}}|a_{klf}^9|+\sum_{f\in\bar{F}}\sum_{t\in\bar{T}}|a_{ft}^{11}|\Big). \tag{31}$$

In dieser Formulierung werden die absoluten Werte der Abweichungen betrachtet, damit Über- und Unterschreitungen der Idealwerte sich nicht aufheben. Ebenso denkbar wäre die Kalkulation mit quadrierten Abweichungen, wobei hier das zunehmende Gewicht größerer Abweichungen zu beachten ist. Es wird außerdem angenommen, dass eine Abweichung von zwei Einheiten als „doppelt so schlimm " wie eine Abweichung von einer Einheit angesehen wird. Sollte das Entstehen einer Abweichung Priorität über ihren Wert haben, müssen binäre Entscheidungsvariable eingeführt werden, damit die gewichtete Summe der verletzten Restriktionen bestimmt wird.
Im Folgenden soll die Integration der weichen Beschränkungen in die Zielfunktion erläutert werden. Für die weichen Beschränkungen W1 ist der Idealwert der Anzahl der Freistunden eines Lehrers mit 0 festzulegen. Entsprechend wird bei der Bewertung eines Planes für jeden Lehrer die Anzahl freier Schulstunden innerhalb eines Tages ermittelt und als Abweichung c_l^1 dokumentiert. Die Abweichung wird mit dem Faktor β^1 gewichtet. Für die Kalkulation der Abweichung von den Beschränkungen W2 wird der Idealwert als Wert der Gleichverteilung der Freistunden über die Wochentage für jeden Lehrer ermittelt. Dieser ideale Verteilungswert $\frac{c_l^1}{5}$ gibt an, wie viele Freistunden auf jeden Tag der Woche entfallen sollten. Die Abweichung c_l^2 wird entsprechend als Summe der absoluten Werte der Differenzen zwischen der Anzahl Freistunden eines Tages und dem idealen Verteilungswert berechnet.
Die Kalkulation der Abweichungen c^3 und c_{kf}^4 für die weichen Beschränkungen

W3 und W4 vollziehen sich in gleicher Weise. Daraus ergibt sich der Zielfunktionsbeitrag zur Berücksichtigung der weichen Beschränkungen als Summe der gewichteten Abweichungen wie folgt:

$$z_i^W = \beta^1 \cdot \sum_{l \in \bar{L}} c_l^1 + \beta^2 \cdot \sum_{l \in \bar{L}} c_l^2 + \beta^3 \cdot c^3 + \beta^4 \cdot \sum_{k \in \bar{K}} \sum_{f \in \bar{F}} c_{kf}^4 \tag{32}$$

Auf die Verwendung der absoluten Werte kann hier verzichtet werden, da alle Abweichungen bezüglich der weichen Beschränkungen aufgrund der Struktur ihrer Kalkulation stets positiv sind. Die Zielfunktion für das Timetabling Problem der Grundschule bezogen auf ein Individuum lautet

$$z_i = z_i^H + z_i^W \qquad \longrightarrow \text{min!} \tag{33}$$

Als alternative Methode der Gewichtung der Beschränkungen ist die Kalkulation mit exponentieller Wirkung der Gewichte zu nennen. Caldeira und Rosa (1997) verwenden eine gemischte Zielfunktion mit linearen und exponentiellen Komponenten. Beligiannis u. a. (2009) verwenden eine exponentielle Formulierung zur Abbildung aller Beschränkungen. Hierzu wird eine Basis gewählt, die mit der Anzahl von Nichteinhaltungen betroffener Elemente potenziert und mit dem Gewicht der Beschränkungen multipliziert wird.[97] Für die Verletzung der Beschränkungen H2 würde der Term in der Zielfunktion wie folgt zusammengesetzt werden:[98]

$$\cdots + \alpha \cdot (Basis)^{\text{Anzahl mehrfach zugeordneter Klassen}} + \cdots$$

Caldeira und Rosa (1997) geben bei dieser Formulierung zu beachten, dass aufgrund der exponentiellen Struktur eine häufig verletzte Beschränkung alle weiteren in ihrer Wertigkeit überragen kann. Beligiannis u. a. (2009) empfehlen einen Wert für den Parameter *Basis* zwischen 1 und 2. Ein Basiswert in diesem Intervall begrenzt den Effekt eines schnellen, exponentiellen Anstieges der Strafkosten einer einzelnen Beschränkung auf ein gewisses Maß.
Für die Anwendung einer Zielfunktion mit gewichteten Komponenten ist anzumerken, dass die Festlegung der Gewichte sehr präzise sein muss, da diese den Erfolg des Algorithmus stark beeinflussen kann. Zudem ist es für eine mit der Planungssituation konfrontierte Person schwer möglich, eine konsistente Einschätzung aller Gewichte abzugeben.[99] Meist sind mehrere Lösungsversu-

[97] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 2 sowie Beligiannis u. a. (2009), S. 31.
[98] Vgl. Beligiannis u. a. (2009), S. 31.
[99] Vgl. Ross u. a. (2003), S. 762.

che mit einer Anpassung der Gewichte in Anbetracht der generierten Pläne sinnvoll.

4.5.3 Fitnessfunktion zur Berechnung der Fitness

Für die im nächsten Schritt erfolgende Selektion ist es nicht vorrangig relevant welchen Wert z_i der Zielfunktion ein Individuum erreicht hat, sondern wie fit es im Gegensatz zu anderen Individuen der Population ist. Aufgrund der verschiedenen Maße der Abweichungen und der Kalkulation mit Gewichten sind die Zielfunktionswerte kaum konkret interpretierbar. Um die Werte der Zielfunktionsausprägungen richtig beurteilen zu können, wird für alle Individuen eine einheitliche[100], steuerbare Umwelt geschaffen. Dies geschieht durch die Anwendung einer Fitnessfunktion $\phi(z_i)$, die durch die Anpassung ihrer Struktur verschiedene Umweltbedingungen erzeugen und damit den Selektionsdruck regulieren kann.
Einige ausgewählte Fitnessfunktionen sollen im Folgenden am Beispiel von 5 Individuen kurz erläutert werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle **??** dargestellt.

Äquivalenz

$$\phi(z_i) = fit_i = z_i$$

In diesem Fall wird keine Anpassung der Umwelt zur Bewertung der Individuen vorgenommen.

lineare Skalierung[101]

$$\phi(z_i) = fit_i = a \cdot z_i + b$$

Die Parameter a und b der linearen Skalierung können frei gewählt werden. Es ist anzustreben, dass die durchschnittliche Fitness der Individuen dem durchschnittlichen Zielfunktionswert nahe kommt, um den Selektionsdruck nicht zu stark zu beeinflussen.[102] Diese Methode kann durch geschickte Wahl der Parameter Unterschiede zwischen den Individuen fast gänzlich ebnen und die Chance zur Selektion nahezu gleich verteilen.[103] Mit der Wahl eines negativen Wertes für a und eines genügend großen Wertes für b kann eine zu minimierende Zielfunktion in eine zu maximierende Fitness skaliert werden. Die Parameter müssen jedoch problemspezifisch bestimmt werden, um die Generierung negativer Fitnesswerte zu vermeiden.

[100] Vgl. Man u. a. (1999), S. 25.
[101] Vgl. Goldberg (1989), S. 76/77 sowie Man u. a. (1999), S. 25/26.
[102] Vgl. Goldberg (1989), S. 77 sowie Man u. a. (1999), S. 25.
[103] Vgl. Davis (1996), S. 31/32.

Potenzskalierung[104]

$$\phi(z_i) = fit_i = z_i^d$$

Diese Fitnessfunktion sollte nur angewendet werden, wenn alle Zielfunktionswerte stets positiv sind, da anderenfalls schlechte Individuen mit einem negativen Zielfunktionswert einen guten positiven Fitnesswert erhalten können. Durch die Anwendung dieser Potenzfunktion können nah beieinander liegende Individuen differenziert werden, wobei dieser Effekt mit steigendem Wert von d zunimmt. Bei der Wahl eines negativen Wertes für d kann die Umformung einer zu minimierenden Zielfunktion in einen zu maximierenden Fitnesswert realisiert werden. Für $d = -1$ wird das Verhältnis der Zielfunktionswerte in den Fitnesswerten beibehalten.

Scaling Window (Windowing)[105]

$$\phi(z_i) = fit_i = z_i - e$$

Diese Skalierungsmethode wird meist für die Funktionsoptimierung verwendet, wobei e den minimalen Zielfunktionswert oder den des kleinsten Eingangswertes annimmt.[106] Bei der freier Bestimmung von e können negative Fitnesswerte berechnet werden, für die $fit_i = e$ gesetzt wird.[107] Diese Form der Fitnessfunktion kann mit der Wahl des Parameters e verschiedene Aufgaben erfüllen. Sind negative sowie positive Zielfunktionswerte in der Kalkulation entstanden, kann e gleich dem Wert des kleinsten negativen Zielfunktionswertes gesetzt werden, um die Generierung von ausschließlich positiven Fitnesswerten zu gewährleisten.[108] Weist die Verteilung der Zielfunktionswerte Ausreißer in Form von „Super-Individuen“ auf, so kann die Chance zur Selektion für Individuen mit kleinem Zielfunktionswert dadurch gewahrt werden, dass $z^{min} < e < z^{max}$ gewählt wird, da alle Individuen mit kleinem Zielfunktionswert den Fitnesswert e erhalten.[109]

Sigma Truncation[110]

$$\phi(z_i) = fit_i = z_i - \bar{z} + c \cdot \sigma$$

Individuen, welche negative Werte für fit_i generieren, erhalten $fit_i = 0$ und

[104] Vgl. Man u. a. (1999), S. 26.
[105] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124 sowie Davis (1996), S. 32/33.
[106] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124.
[107] Vgl. Davis (1996), S. 33.
[108] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124 sowie Goldberg (1989), S. 76.
[109] Vgl. Davis (1996), S. 33.
[110] Vgl. Man u. a. (1999), S. 26.

werden nicht zur Erzeugung von Nachkommen ausgewählt. Mit dieser Fitnessfunktion können Individuen, deren Zielfunktionswert c Standardabweichungen unter dem durchschnittlichen Zielfunktionswert liegt, von der Selektion ausgeschlossen werden. Es handelt sich um eine dynamische Fitnessfunktion, da der mittlere Zielfunktionswert sowie die Standardabweichung in jeder Generation angepasst werden.

Ranking[111]

$$\phi(z_i) = fit_i = (\text{Rang des Individuums nach } z_i)$$

Die Individuen werden nach besser werdenden Zielfunktionswerten geordnet und erhalten den jeweiligen Rang als Fitness zugewiesen, wobei 1 der Rang des schwächsten und n der Rang des fittesten Individuums ist. Von der Betrachtung ausgeschlossen wird die Verteilung der Zielfunktionswerte. Es wird lediglich eine Ordnung vorgenommen, bei der die Chance der Selektion für jedes bessere Individuum um den gleichen Betrag zunimmt. Der überragende oder vernichtende Effekt von Ausreißern der Zielfunktionswerte wird extrem gemindert.

lineare Fitness[112]

$$\phi(z_i) = fit_i = f - (\text{Rang des Individuums nach } z_i) \cdot g$$

Die Individuen werden zur Rangbestimmung nach schlechter werdenden Zielfunktionswerten geordnet. Der Parameter f sollte einen Wert größer $n \cdot g$ erhalten, um die Generierung negativer Fitnesswerte zu vermeiden. Der Parameter g bestimmt die Anzahl der Fitnesswerteinheiten, die stets zwischen zwei, in der Rangfolge benachbarten Individuen liegen. Mit der Wahl von g kann die Streuung der Fitnesswerte und der wahrzunehmende Unterschied der Individuen in der Population beeinflusst werden. Die Dominanz von „Super-Individuen“ in der Population kann so reguliert werden.

Für das Timetabling Problem fordert die zu minimierende Zielfunktion eine Fitnessfunktion mit entsprechender Skalierung in zu maximierende Fitnesswerte. Diese Transformation der Zielfunktionswerte bieten die lineare Skalierung mit entsprechend gewählten Parametern a und b, das Ranking, die lineare Fitness sowie die Potenzskalierung mit negativem Wert von d. Eine Übersicht zur Anwendung unterschiedlicher Fitnessfunktionen bietet Anhang

[111] Vgl. Man u. a. (1999), S. 26.
[112] Vgl. Davis (1996), S. 33.

H. Der in dieser Arbeit angewendete genetische Algorithmus arbeitet mit der folgenden Fitnessfunktion nach Stefano und Tettamanzi (2001).

$$fit_i = \frac{1}{1 + z_i^H} + \frac{\gamma}{1 + z_i^W} \tag{34}$$

γ erhält den Wert 0, wenn harte Beschränkungen verletzt sind, und nimmt den Wert 1 an, sobald ein zulässiger Plan generiert wird. Es findet somit eine Potenzskalierung mit negativem Parameter statt. Durch die Addition des Wertes 1 im Nenner beider Brüche, wird für jeden Term ein maximaler Wert von 1 definiert, welcher eintritt, sobald keine Beschränkung verletzt ist. Der beste Fitnesswert ist damit als $fit_i = 2$ bestimmt. Zudem wird die Einhaltung der weichen Beschränkungen erst betrachtet, wenn ein zulässiger Plan erzeugt wurde, damit Unzulässigkeiten nicht durch eine sehr gute Einhaltung der weichen Beschränkungen ausgeglichen werden können.[113]

4.6 Genetische Operatoren

4.6.1 Selektion

Selektion beschreibt die Auswahl von Individuen als Eltern, das heißt den Entscheidungsprozess welche Individuen zur Anwendung eines Crossover und zur Erzeugung von Nachkommen herangezogen werden. Bei der Auswahl und Anwendung eines Selektionsmechanismus liegt besonderes Augenmerk auf der Balance zwischen der Ausnutzung guter genetischer Informationen der bestehenden Population (exploitation) und der Entdeckung neuer, erfolgversprechender Chromosomen (exploration).[114] Die Fitnesswerte der Individuen bilden die Basis der Selektion. Charakterisiert wird ein Selektionsverfahren durch die gewählte Fitnessfunktion und Auswahlverfahren.[115]
Als Auswahlverfahren lassen sich im Allgemeinen die folgenden unterscheiden:

- Stochastic sampling with/without replacement
- Stochastic universal sampling
- Deterministic sampling
- Remainder stochastic sampling with/without replacement

Zunächst werden für alle Individuen die Wahrscheinlichkeit zur Erzeugung von Nachkommen p_i^s und die erwartete Anzahl der Nachkommen e_i wie folgt

[113]Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 457.
[114]Vgl. Nissen (1994), S. 46.
[115]Vgl. Nissen (1994), S. 46.

bestimmt:

$$p_i^s = \frac{fit_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} fit_i} \tag{35}$$

$$e_i = p_i^s \cdot n \tag{36}$$

Für das Stochastic sampling with replacement wird eine Strecke mit der Länge 1 in n Abschnitte geteilt, deren Größen proportional zu den Selektionswahrscheinlichkeiten p_i^s sind. Es wird dann eine Zufallszahl im Intervall $(0, 1]$ bestimmt und das Individuum zur Erzeugung von Nachkommen gewählt, das der „getroffene" Abschnitt abbildet. Eine Abschnittsgrenze ist dem links liegenden Abschnitt zugehörig. Dieses Auswahlverfahren weist besonders bei kleinen Populationen häufig eine hohe Varianz auf, und die Anzahl der erzeugten Nachkommen eines Individuums weicht signifikant von der erwarteten ab.[116] Es ist aber ein weit verbreitetes Auswahlverfahren.[117] Bei der Anwendung des Stochastic sampling without replacements wird die Einteilung der Abschnitte in gleicher Weise vorgenommen. Ist ein Individuum zur Erzeugung von Nachkommen gewählt, wird die Größe seines Abschnittes um einen bestimmten Betrag gemindert. Auf diese Weise wird eine obere Grenze für die Anzahl erzeugter Nachkommen der Individuen geschaffen[118], sodass auch die genetischen Informationen schwächerer Individuen in die nächste Generation übernommen werden.

Basis für das Stochastic universal sampling ist ebenfalls die in n proportionale Abschnitte eingeteilte Gerade. In diesem Fall werden jedoch n Zahlen zufällig erzeugt, welche exakt gleich verteilt sein müssen.[119] In gleicher Weise werden alle Individuen zur Erzeugung von Nachkommen ausgewählt, deren Abschnitte getroffen wurden. Befinden sich mehrere Zahlen im Abschnitt eines Individuums, wird dieses entsprechend oft gewählt. Gegenüber dem Stochastic sampling with replacement ist die Varianz dieses Verfahrens deutlich geringer.[120]

Bei der Anwendung des Deterministic samplings wird für jedes Individuum der ganzzahlige Teil seiner erwarteten Anzahl Nachkommen $\lfloor e_i^s \rfloor$ ermittelt und das Individuum in dieser Anzahl zur Nachkommenerzeugung gewählt. Sind noch nicht genügend Eltern ausgewählt, werden alle Individuen nach absteigendem, nicht ganzzahligen Anteil geordnet und die ersten Individuen der

[116]Vgl. Goldberg (1989), S. 115.
[117]Vgl. Nissen (1994), S. 44.
[118]Vgl. Goldberg (1989), S. 115.
[119]Vgl. Nissen (1994), S. 44.
[120]Vgl. Nissen (1994), S. 45.

Liste zur Population ergänzt.[121] Auch bei diesem Verfahren kann die erwartete Anzahl Nachkommen nicht signifikant über- oder unterschritten werden.
Das Remainder stochastic sampling wählt wie Deterministic sampling die Anzahl der Individuen zur Nachkommenerzeugung nach ganzzahligem Anteil der erwarteten Nachkommenanzahl aus. Anschließend wird im Verfahren with replacement zur Festlegung der fehlenden Individuen das Stochstic sampling with replacement mit den nicht ganzzahligen Anteilen der Individuen entsprechend angewendet. Im Remainder stochastic sampling without replacement wird für jedes Individuum ein Münzwurf einer Erfolgswahrscheinlichkeit gleich dem gebrochenen Anteil simuliert und entschieden, ob es gewählt wird, um die Elternauswahl zu komplettieren.[122]
Basierend auf der Fitnessfunktion und dem Auswahlverfahren werden in Anlehnung an Goldberg und Deb (1991) drei Arten der Selektion unterschieden.

- Proportionale Selektion
- Rangbasierte Selektion (Ranking Selection)
- Wettkampf-Selektion (Tournament Selection)

Im Verfahren der proportionalen Selektion kann mit Zielfunktionswerten (Äquivalenz als Fitnessfuntkion) oder skalierten Fitnesswerten aus der linearen und Potenzskalierung, Sigma Truncation sowie Windowing gearbeitet werden.[123] Auf Basis dieser Werte wird eines der beschriebenen Auswahlverfahren angewendet. Häufig genutzt wird die sogenannte Roulette Wheel Selection, bei der Eltern durch das Stochastic sampling with replacement anhand ihrer Zielfunktionswerte gewählt werden.[124] Die proportionale Selektion stellt eine künstliche Form der natürlichen Auslese nach Darwins Gesetz des Stärkeren dar.[125]
Die rangbasierte Selektion arbeitet mit den Fitnessfunktionen Ranking oder lineare Fitness und wendet entsprechend ein Auswahlverfahren auf Basis der bestimmten Rangwerte an. Dieses Verfahren wird besonders auf Probleme angewendet, bei denen eine proportionale Selektion frühe Konvergenz aufweist.[126]
Bei der Wettkampf-Selektion wird eine Gruppe von Individuen (häufig ein Paar) zufällig[127] oder durch Stochastic sampling with/without replacement[128]

[121] Vgl. Goldberg (1989), S. 121.
[122] Vgl. Goldberg (1989), S. 121.
[123] Vgl. Nissen (1994), S. 46-48.
[124] Vgl. Goldberg (1989), S. 11.
[125] Vgl. Goldberg (1989), S, 10.
[126] Vgl. Nissen (1994), S. 48.
[127] Vgl. Goldberg und Deb (1991), S. 78.
[128] Vgl. Goldberg (1989), S. 121.

bestimmt. Die Fitnesswerte dieser Individuen werden verglichen und das beste wird als Elternteil ausgewählt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die geforderte Anzahl Individuen zur Nachkommenerzeugung bestimmt wurde.[129]

Die zur Erzeugung von Nachkommen gewählten Individuen werden im sogenannten Mating Pool zusammengefasst. Es besteht in allen Selektionsverfahren die Möglichkeit, zunächst alle Elternindividuen auszuwählen und anschließend zufällig oder durch ein Auswahlverfahren zu entscheiden, auf welche Paare ein Crossover angewendet wird. Alternativ können jeweils zwei nacheinander ausgewählte Individuen ein Elternpaar bilden.

Bei der Anwendung eines genetischen Algorithmus auf ein Timetabling Problem wird vermehrt die Roulette Wheel Selection genutzt, wie beispielsweise von Caldeira und Rosa (1997), Carrasco und Pato (2001) sowie Beligiannis u. a. (2009). Stefano und Tettamanzi (2001) verwenden eine Wettkampf-Selektion, wobei stets 2 Individuen in Konkurrenz stehen. Mit steigender Anzahl Individuen in den Wettkämpfen wird die vermehrte Erzeugung von Nachkommen aus den besten Individuen der Population hervorgerufen.[130] Auf diese Weise kann die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus beeinflusst werden.

4.6.2 Crossover

Nachdem Individuen paarweise zur Erzeugung von Nachkommen ausgwählt sind, wird mit einer Wahrscheinlichkeit p_c ein Crossover angewendet. Unter einem Crossover wird die Neukombination von Allelen durch den Austausch von Segmenten zwischen den Chromosomen verstanden.[131] Es dient der Zusammensetzung von guten genetischen Informationen (Building Blocks)[132], um neue, fittere Individuen hervorzubringen[133]. Für den Wert der Wahrscheinlichkeit für die Anwendung eines Crossover sollte $0,25 \leq p_c < 1$ gesetzt[134] werden, da dieser Operator die Charakteristik eines genetischen Algorithmus ausmacht[135]. Für kleinere Populationsgrößen ist eine größere Wahrscheinlichkeit des Crossovers zu wählen, um der frühen Konvergenz des Algorithmus entgegenzuwirken.[136] Für $n = 30$ ermittelte Grefenstette (1986) den besten

[129] Vgl. Goldberg (1989), S. 121.
[130] Vgl. Goldberg und Deb (1991), S. 86.
[131] Vgl. Holland (1992), S. 97.
[132] Vgl. Davis (1996), S. 18/19.
[133] Vgl. Goldberg (1989), S. 13/14.
[134] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124, 127.
[135] Vgl. Davis (1996), S. 17.
[136] Vgl. Grefenstette (1986), S. 127.

genetischen Algorithmus mit $p_c = 0,88$, wobei diese für $n = 50$ auf $p_c = 0,5$ und für $n = 80$ auf $p_c = 0,3$ sank. In vielen Veröffentlichungen wird ein Wert von $p_c \geq 0,6$ empfohlen.[137] Die Wahl der Crossover-Wahrscheinlichkeit ist jedoch stark von der Festlegung aller übrigen Parameter des Algorithmus abhängig.[138]
Durch Crossover erzeugte Nachkommen können sich stark von ihren Eltern unterscheiden, jedoch werden Gene mit identischem Allel von beiden Eltern im Nachkommen nicht verändert.[139] Meist werden aus zwei Elternindividuen zwei Nachkommen generiert, aber auch die Erzeugung nur eines Nachkommens aus einem Elternpaar ist möglich. Im Laufe der Jahrzehnte der Anwendung genetischer Algorithmen hat sich eine Vielzahl von Varianten des Crossovers entwickelt. Beispielhaft werden in dieser Arbeit die folgenden drei Formen vorgestellt.

- 1-Punkt-Crossover
- Uniform Crossover
- Permutation-based Crossover

Eine Illustration dieser Varianten des Crossovers anhand zweier ganzzahlig codierter Individuen in Zeichenfolgerepräsentation findet sich in Abbildung 2. Bei der Anwendung des 1-Punkt-Crossover wird eine Position zufällig erzeugt und beide Individuen werden an dieser Stelle geteilt. Die Nachkommen entstehen durch Kombination der beiden Gensegmente der Elternindividuen.[140] Es ist möglich, 2 oder mehr Crossover-Positionen zu generieren und in gleicher Weise ein Multi-Punkt-Crossover anzuwenden.[141]
Für das Uniform Crossover wird eine Bit-Maske zufällig generiert, wobei für jede Entscheidung ein Münzwurf simuliert wird. Wird für ein Gen in der Maske eine 0 gewählt, so werden die Allele in die Nachkommen übernommen. Fällt für ein Gen die Entscheidung auf den Wert 1, werden die Allele der Individuen in den Nachkommen getauscht.[142] Wie schon im einfachen Beispiel mit 7 Genen zu erkennen ist, generieren diese Formen des Crossovers bei ganzzahlig codierten Individuen meist unzulässige Lösungen, da bestimmte Allele gedoppelt und andere eliminiert werden. Es ist zwar möglich mit diesen unzulässigen Lösungen weiter im Algorithmus zu verfahren, die Arbeit mit einer Vielzahl solcher Lösungen ist aber nicht sinnvoll, da ausschließlich zulässige Lösungen

[137] Vgl. Nissen (1994), S. 25.
[138] Vgl. Grefenstette (1986), S. 127.
[139] Vgl. Davis (1996), S. 17.
[140] Vgl. Holland (1992), S. 98, Goldberg (1989), S. 12 sowie Davis (1996), S. 16/17.
[141] Vgl. Davis (1996), S. 47/48 sowie Nissen (1994), S. 57/58.
[142] Vgl. Davis (1996), S. 49 sowie Nissen (1994), S. 59.

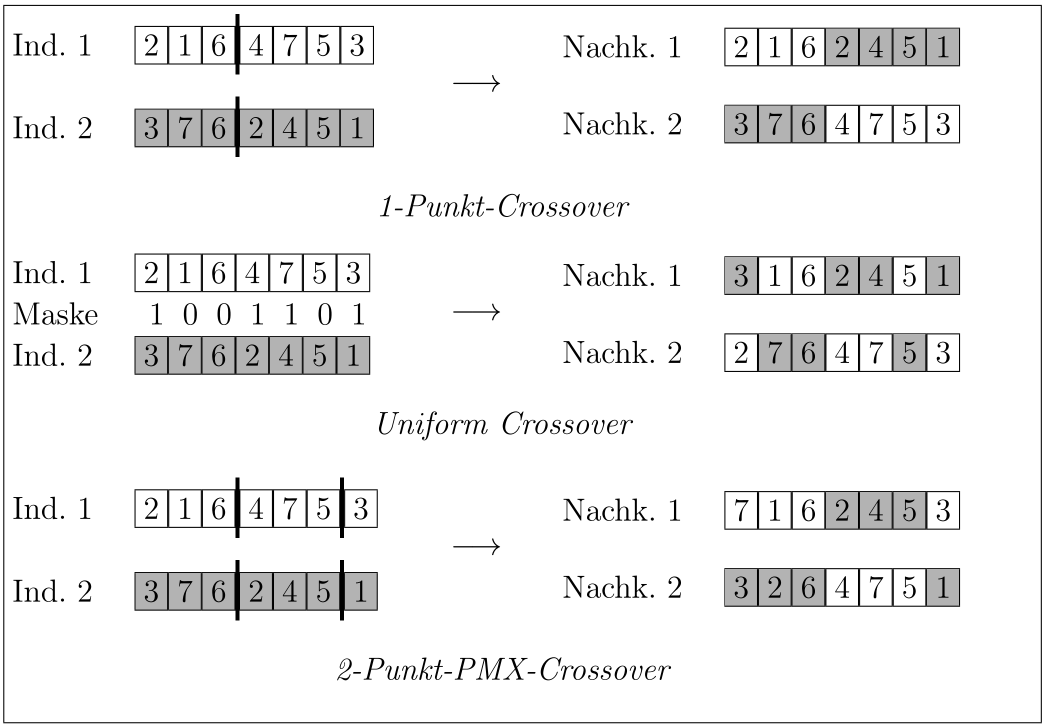


Abbildung 2: Varianten des Crossover

für das Timetabling Problem umgesetzt werden können.
Im Hinblick auf die Problemrepräsentation kann diese mit einem Permutationsproblem in der Produktionsplanung verglichen werden, da alle Unterrichtseinheiten wie auch Jobs platziert werden und bestimmten Bedingungen unterliegen müssen. Für das Job Scheduling wurden zahlreiche Crossover-Varianten entwickelt[143], von denen hier das Partially Mapped Crossover (PMX) vorgestellt werden soll. Permutationsorientierte Crossover werden meist in der 2-Punkt-Form angewendet und mit der Notation (i, j)-Crossover bezeichnet werden. Die gewählten Crossover-Positionen liegen vor dem i-ten und nach dem j-ten Gen.[144] Beispielhaft wird in Abbildung 2 ein (4,6)-PMX-Crossover gezeigt. Hierbei werden zwei Crossover-Positionen zufällig gewählt und zunächst ein allgemeines 2-Punkt-Crossover durchgeführt. Für unzulässige Nachkommen werden dann gedoppelte Allele mit Hilfe eines Abbildungsverfahrens zwischen den Eltern durch eliminierte Allele ersetzt. Beispielsweise müsste das zweite Gen des zweiten Nachkommens das Allel 7 enthalten, da dieses Segment aus Individuum 2 gewonnen wird. Diese Allel ist jedoch auch Bestandteil des übernommenen Segments zwischen den Crossover-Positionen. Somit wird Individuum 2 auf Individuum 2 wie folgt abgebildet: Allel 7 auf Gen 5 in

[143] Eine Übersicht zu Formen des Crossover für Shop Scheduling Probleme bietet Werner (2011).
[144] Vgl. Werner (2011), S. 12.

Individuum 1 $\longrightarrow$ Allel 4 auf Gen 5 in Individuum 2. Dem zur Folge müsste das zweite Gen des zweiten Nachkommens das Allel 4 erhalten, das aber auch im Zwischensegment enthalten ist. Entsprechend wird eine zweite Abbildung durchgeführt: Allel 4 auf Gen 4 in Individuum 1 $\longrightarrow$ Allel 2 auf Gen 4 in Individuum 2. Das gedoppelte Allel 7 im zweiten Nachkommen wird durch das Allel 2 ersetzt und alle weiteren Allele werden auf ihrer Position erhalten.[145] Diese Form des Crossover ist besonders vor dem Hintergrund der zu erhaltenden Building Blocks sehr effektiv.
Die Anwendungen von Stefano und Tettamanzi (2001),Caldeira und Rosa (1997) und Beligiannis u. a. (2009) arbeiten mit einem Uniform Crossover. Demgegenüber verwenden Colorni u. a. (1998) und Carrasco und Pato (2001) eine modifizierte Form des PMX-Crossover. Eine zufällig bestimmte Anzahl Gene wird nach ihrem Beitrag zur Fitness des Individuums ausgewählt und in die Nachkommen übernommen. Alle fehlenden Allele werden aus dem anderen Individuum möglichst auf ihrer ursprünglichen Position hinzugefügt. Ist das ursprüngliche Gen schon belegt, wird das Allel auf einem noch freien, zulässigen Gen platziert.[146] Auf diese Weise werden ausschließlich zulässige Nachkommen erzeugt und Gene mit gutem Beitrag zur Fitnessfunktion (Building Blocks) bevorzugt erhalten und neu kombiniert.

4.6.3 Mutation

Die Mutation beschreibt allgemein die zufällige Veränderung des Allelwertes eines Gens. Dieser Operator wird mit einer in der Regel sehr kleinen Wahrscheinlichkeit p_m auf die Gene eines Nachkommens angewendet.[147] Die Mutation von Individuen zerstört Schemata und kann damit die Konvergenz gegen lokalen Optima verlangsamen oder gar verhindern.[148] Es können noch nicht entdeckte Strukturen generiert und durch Crossover verloren gegangene, genetische Informationen wieder erzeugt werden.[149] Da dieser Operator vordergründig für die Erhaltung der Diversität der Population und weniger für das Auffinden guter Lösungen eingesetzt wird, kommt ihm eine nachgelagerte Rolle in einem genetischen Algorithmus zu.[150]
Aus diesem Grund wird die Wahrscheinlichkeit der Mutation meist sehr klein gewählt, da ein hoher Wert für p_m den Algorithmus zur Zufallssuche führt.[151]

[145] Vgl. Nissen (1994), S. 66/67.
[146] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 13.
[147] Vgl. Holland (1992), S. 109.
[148] Vgl. Holland (1992), S. 111.
[149] Vgl. Goldberg (1989), S. 14.
[150] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124 sowie Goldberg (1989), S. 14.
[151] Vgl. Grefenstette (1986), S. 124.

Goldberg (1989) empfiehlt eine Wahrscheinlichkeit der Ordnung von einer Mutation je 1000 Genen. Grefenstette (1986) setzt diesen Wert $p_m = 0,001$ als Startwert für sein Experiment zur Bestimmung eines erfolgversprechenden genetischen Algorithmus und erhält in den Ergebnissen bezogen auf verschiedene Performancemaße in den besten gefunden Algorithmen jeweils eine Mutationswahrscheinlichkeit von $p_m = 0,01$. Eine niedrigere Crossoverwahrscheinlichkeit sollte mit einer erhöhten Mutationsrate einher gehen, um eine gleichbleibende Performance zu gewährleisten und frühe Konvergenz zu verhindern.[152] In den Anwendungen eines genetischen Algorithmus auf das Timetabling Problem finden sich meist Wahrscheinlichkeiten für Mutationen von $0,01 \leq p_m \leq 0,05$.

Der klassiche Mutationsoperator wird auf binär codierte Individuen angewendet und invertiert das Allel eines entsprechend gewählten Gens. Bei der Anwendung auf eine ganzzahlige Codierung gibt es kein allgemeines Verfahren der Mutation. Davis (1996) schlägt vor, ein zufällig gewähltes Allel durch eine generierte Zufallszahl zu ersetzen oder den Wert eines zufällig gewählten Genes um einen zufällig gewählten Betrag zu verändern.[153] Dieses Vorgehen ist für das Timetabling Problem nicht sinnvoll, da die Allelwerte bestimmte Unterrichtseinheiten oder Zeitperioden abbilden und somit nicht stetig sind.

Carrasco und Pato (2001) verwenden bei ihrer Matrixrepräsentation des Problems einen Mutationsoperator, der eine kleine Anzahl zufällig gewählte Unterrichtseinheiten in noch nicht zugeordneten Raum-Schulstunde-Kombinationen neu platziert. Er realisiert dabei eine Neuzuordnung, die mit dem geringsten Strafkostenanstieg verbunden ist. Mit einer alternativen Form der Mutation in einer Matrixrepräsentation arbeiten Colorni u. a. (1998) und Beligiannis u. a. (2009). Zwei zufällig gewählte Gene oder Gengruppen werden innerhalb einer Zeile der Repräsentation getauscht. Dies ist eine Neuplatzierung von Unterrichtseinheiten in Schulstunden, wobei Beligiannis u. a. (2009) die Unterrichtseinheiten einer bestimmten Klasse und Colorni u. a. (1998) diese für einen bestimmten Lehrer austauscht. Diese Form der Mutation entspricht einem paarweisen Austausch zweier Gene, wie er auch in Zeichenfolgerepräsentationen von Job Scheduling Problemen angewendet wird.[154]

Übernimmt man die Zeichenfolgerepräsentation für das Timetabling Problem oder betrachtet nur eine Zeichenfolge der Matrix ist ebenfalls die Anwendung einer Shift Mutation denkbar. Ein solcher Operator wird von Caldeira und Rosa (1997) verwendet. Es wird ein Gen zufällig gewählt und an eine neue,

[152] Vgl. Grefenstette (1986), S. 127.
[153] Vgl. Davis (1996), S. 66.
[154] Vgl. Werner (2011), S. 17.

ebenfalls zufällig gewählte Position innerhalb der Zeichenfolge gesetzt. Alle Gene, zwischen alter und neuer Position, werden entsprechend um eine Einheit verschoben. Die Austausch genauso wie die Shift Mutation entsprechen einer zufälligen Suche in der Nachbarschaft der Lösung.[155] Aufgrund der komplexen Zusammenhänge und Beschränkungen des Timetabling Problems ist es sinnvoll, eine Mutation nicht vollkommen zufällig, sondern gerichtet nach dem Zielfunktions- oder Fitnesswert der veränderten Individuen anzuwenden.[156]

4.7 Zusammensetzung der Folgegeneration

Bei der Zusammensetzung der Folgegeneration ist zunächst zu unterscheiden, ob alle Individuen der Population durch Nachkommen ersetzt werden (Generational Replacement) oder nur ein Teil der Individuen ersetzt wird (Steady State Reproduction). Für einen genetischen Algorithmus mit Steady State Konzept wird ein zusätzlicher Steuerparameter als Anzahl der zu ersetzenden Individuen eingeführt und nur ein geringer Anteil der Population (meist ein oder zwei Individuen) ersetzt.[157] Ein Nachkommen wird in der Regel nur dann in die Population aufgenommen, wenn er sich von allen anderen Individuen unterscheidet.[158] Er ersetzt das schwächste Individuum in der Population.[159] Mit der Anwendung dieses Konzeptes lässt sich die Diversität der Population erhalten[160] und sichergestellen, dass die besten Individuen einer Population stets in der nächsten Generation vertreten sind.
Ein Mechanismus, der gezielt das oder die besten Individuen in die nächste Generation übernimmt, wird Elitismus (elitism) genannt. Bei diesem Vorgehen wird meist ein Generational Replacement angewendet, sodass das beste Individuum der Population in die Folgegeneration übernommen und entsprechend $(n-1)$ Nachkommen erzeugt werden. Eine weitere Form des Elitismus ist das Hinzufügen der Nachkommen zur alten Population und die Auswahl der n fittesten Individuen aus Eltern und Nachkommen als neue Generation.[161] Diese Zusammensetzung der Folgegeneration fördert jedoch eine schnelle Konvergenz und kann gute genetische Informationen schnell verwerfen.
Stefano und Tettamanzi (2001) und Beligiannis u. a. (2009) verwenden in ihren Anwendungen ein Generational Replacement mit Elitismus zur Erhaltung des besten Individuums in der nächsten Generation. Carrasco und Pato (2001)

[155] Vgl. Werner (2011), S. 16/17.
[156] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 14 sowie Stefano und Tettamanzi (2001), S. 459.
[157] Vgl. Davis (1996), S. 35 sowie Nissen (1994), S. 39.
[158] Vgl. Nissen (1994), S. 39.
[159] Vgl. Davis (1996), S. 36 sowie Nissen (1994), S. 39.
[160] Vgl. Nissen (1994), S. 39.
[161] Vgl. Nissen (1994), S. 40.

erhalten Duplikate der besten, bisher gefundenen Individuen in einer zweiten (kleineren) Population, welche in den Selektionsprozess einbezogen wird. In der Hauptpopulation werden alle Individuen durch ihre Nachkommen ersetzt.[162] Es bleiben die besten Individuum über Generationen erhalten, da sie in der zweiten Population erst ersetzt werden, wenn ein neues Individuum sie dominiert.[163] Caldeira und Rosa (1997) verwenden zwei gesteigerte Formen des Elitismus. Sie bilden eine Gruppe aus den besten Nachkommen und Individuen der vorherigen Generation. Aus dieser Gruppe werden die n fittesten Individuen ausgewählt und bilden die neue Generation. Alternativ wird die neue Generation durch eine Roulette Wheel Selection aus den besten Nachkommen und den besten Individuen der vorherigen Generation gebildet.[164] Die Experimente von Grefenstette (1986) zeigen, dass eine größere Anzahl ersetzter Individuen und eine elitäre Strategie die Erfolgsaussichten eines genetischen Algorithmus erhöhen.

4.8 Abbruchkriterien

Die Wahl des Abbruchkriteriums ist abhängig von der Problemstellung sowie den verwendeten, technischen Ressourcen. Der genetischen Algorithmus kann beendet werden, wenn[165]

- eine festgelegte Anzahl Generationen erzeugt ist.
- eine festgelegte Anzahl Individuen evaluiert ist.
- ein vorgegebener Zielfunktions-/Fitnesswert erreicht ist.
- ein festgelegtes Zeitbudget zur Berechnung erschöpft ist.
- in einem festgelegten Zeitraum keine signifikante Verbesserung des Zielfunktions-/Fitnesswertes eingetreten ist.

Die Wirkung einzelner Abbruchkriterien wird in der Literatur wenig diskutiert. Es wird empfohlen, den Algorithmus in mehreren Versuchen mit unterschiedlichen oder angepasstem Abbruchkriterium anzuwenden. Als Abbruchkriterium wählen Carrasco und Pato (2001) eine maximale Generationszahl von 1000 und Beligiannis u. a. (2009) 10000. Caldeira und Rosa (1997) brechen ihren genetischen Algorithmus nach der Evaluierung von 75000 Individuen ab. Die Stagnation des Fitnesswertes wählen Stefano und Tettamanzi (2001) als Abbruchkriterium, wobei diese nach der Erzeugung von 10200 Generationen

[162] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 14.
[163] Vgl. Carrasco und Pato (2001), S. 12.
[164] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 6.
[165] Vgl. Nissen (1994), S. 26.

eintritt und der beste Plan in Generation 2001 gefunden wurde. Die Quantität des Abbruchkriteriums ist stark anhängig von der Komplexität der Struktur des Algorithmus sowie der Fitnessfunktion, deren Evaluation einen Großteil der Rechenzeit in Anspruch nimmt.

4.9 Erweiterungen des genetischen Basis-Algorithmus

In den vorhergehenden Abschnitten wurde der Aufbau eines genetischen Basis-Algorithmus erläutert. Bezogen auf die unterschiedlichsten Problemklassen hat sich eine Vielzahl von Ergänzungen und Erweiterungen entwickelt, von denen einige hier Erwähnung finden sollen. Im Folgenden werden Anmerkungen zu den Themen:

- Mehrzieloptimierung
- Nischen- und Spezieskonzepte
- Reparaturoperator
- Lokale Suche und Hill Climbing
- unscharfe Eingangsdaten, Beschränkungen und Ziele
- parallele genetischen Algorithmen

gemacht.
Schon in der Anfangsphase der Anwendung genetischer Algorithmen wurde das Problem der Mehrzieloptimierung thematisiert. In vielen praktischen Problemstellungen ist die Zielerreichung von der Erfüllung mehrerer Attribute abhängig, welche neutral, komplementär oder in Konflikt zueinander stehen können[166]. Goldberg (1989) schlägt den Einsatz eines Kriteriums der Pareto-Optimalität zur Bewertung der Individuen in solchen Problemstellungen vor. Hierfür ist für jedes Ziel ein gesonderter Zielfunktionswert zu bestimmen.[167] Die Population wird dann in dominierte und nicht dominierte unterschieden. Wobei ein Individuum ein anderes dominiert, wenn es in jeder Zielfunktionsausprägung einen besseren Wert ausweist.[168] Die Fitnessfunktion wird dann durch eine Rangzuordnung wie folgt bestimmt: Alle Individuen, die bezogen auf die gesamte Population nicht dominiert sind, erhalten den besten Rangwert. Diese Individuen werden dann aus der Betrachtung gestrichen und neue, nicht dominierte Individuen bestimmt. Diese erhalten den nächstkleineren Rangwert. Dieses Verfahren wird fortgeführt, bis alle Individuen bewertet

[166]Vgl. Laux (2007), S. 67.
[167]Vgl. Goldberg (1989), S. 197.
[168]Vgl. Goldberg (1989), S. 198

sind und entsprechend in den Selektionsprozess eintreten können.[169] Das Kriterium der Pareto-Optimalität wird unter anderem von Carrasco und Pato (2001) zur Bestimmung der Fitnesswerte verwendet, um lehrer- und klassenorientierte Ziele in gleicher Weise einzubeziehen.
Bei der Verwendung von proportionaler Selektion oder auch dem eben beschriebenen Dominanzkonzept ist darauf zu achten, dass die Heterogenität der Population auch nach vielen Generationen gewährleistet bleibt, um die Suche nicht auf einen Teilbereich des Suchraums einzuschränken. Hierzu können sogenannte Nischen- oder Spezieskonzepte genutzt werden.[170] Eines der ersten Konzepte dieser Art ist das Crowding, entwickelt von De Jong 1975. Ein Individuum wird durch einen Nachkommen ersetzt, in dem eine Gruppe (crowd) bestimmter Größe zufällig gebildet wird und der Nachkommen das Individuum ersetzt, welches ihm an ähnlichsten ist. Der Nachkommen ersetzt somit ein Individuum seiner Spezies und es bleiben möglichst viele Vertreter unterschiedlicher Spezies in der Population erhalten.[171] Ein alternativer Ansatz ist das Fitness sharing, entwickelt von Goldberg und Richardson 1987, bei dem davon ausgegangen wird, dass mehrere ähnliche Individuen sich eine Nische in ihrer Umwelt teilen[172]. Übertragen auf den Algorithmus teilen sich ähnliche Individuen die Fitness, welche aufgrund der Platzierung der Nische in der Umwelt zustande kommt. Es wird die Fitness sharing Funktion eingeführt, welche den Fitnesswert ähnlicher Individuen basierend auf dem Maß ihrer Ähnlichkeit schmälert. Auf diese Weise wird ein unkontrolliertes Wachstum einer bestimmten Spezies und damit die Verdrängung anderer begrenzt.[173] Das fitness sharing wird von Carrasco und Pato (2001) in Kombination mit dem Konzept der Pareto-Optimalität auf ein Timetabling Problem angewendet.
Die Durchführungen von Crossover und Mutation generieren für ein Timetabling Problem sehr häufig unzulässige Lösungen. Aus diesem Grund wird bei der Bearbeitung dieser Problemklasse meist ein zusätzlicher Operator zur Reparatur unzulässiger Lösungen eingesetzt. Dieser wird nach der Mutation angewendet, sodass eine nächste Generation stets nur zulässige Individuen enthält. Colorni u. a. (1998) verwenden in ihrer Matrixrepräsentation einen Operator, der zunächst versucht eine Unzulässigkeit zu beseitigen, in dem der Plan nur eines Lehrers (eine Zeile) geändert wird und darin zwei Klassen getauscht werden. Ist dies nicht möglich, werden Varianten mit Veränderungen,

[169] Vgl. Goldberg (1989), S. 201.
[170] Vgl. Goldberg (1989), S. 185/186.
[171] Vgl. Goldberg (1989), S. 190.
[172] Vgl. Goldberg (1989), S. 191.
[173] Vgl. Goldberg (1989), S. 192.

mehrere Lehrer betreffend, in Betracht gezogen, wobei die Anzahl zu verschiebender Elemente begrenzt wurde. Verbleibende Unzulässigkeiten wurden belassen und mit Strafkosten belegt.[174] Caldeira und Rosa (1997) arbeiten in ihrer Zeichenfolgerepräsentation mit einem Reparaturoperator, welcher bei einer unzulässig zugeordneten Schulstunde zunächst alle noch freien, gemeinsamen Schulstunden des betroffenen Lehrers und der betroffenen Klasse ermittelt. Die Unterrichtseinheit wird dann der freien Schulstunde zugeordnet, die am nächsten an der ursprünglich unzulässig zugeordneten liegt.[175] Um der Notwendigkeit eines Reparaturoperators vorzubeugen, können alternativ zusätzliche Funktionen in einem Operator ergänzt werden. Beligiannis u. a. (2009) wählen bei der Mutation zwei Schulstunden zufällig aus, zwischen welchen die Unterrichtseinheit getauscht werden soll. Bevor die Mutation vollzogen wird, werden jedoch die harten Beschränkungen für ein daraus resultierendes Individuum überprüft. Nur wenn das Individuum zulässig ist, wird die Mutation durchgeführt, andernfalls werden zwei neue Schulstunden bestimmt.

Um besonders bei komplexen Problemstellungen die Erfolgsaussichten eines Verfahrens zu erhöhen, werden zunehmend Hybrid-Techniken verwendet, bei denen verschiedene heuristische Ansätze kombiniert werden. Eine weit verbreitete Ergänzung genetischer Algorithmen ist die lokale Suche, insbesondere das Hill Climbing.[176] Diese können in Form eines Mutationsoperators in den genetischen Algorithmus integriert werden oder einen gesonderten Operator darstellen. Stefano und Tettamanzi (2001) verwenden eine intelligente Mutation, welche nur Veränderungen durchführt, die den Fitnesswert verbessern, und einen Operator zur Verbesserung der Fitness durch Restrukturierung,[177] was einer lokalen Suche in der Nachbarschaft der Lösung entspricht. Colorni u. a. (1998) arbeiten in ihrer Anwendung mit einem genetischen Algorithmus mit und ohne lokale Suche als zusätzliche Komponente. In ihren Ergebnissen zeigt sich, dass die Anwendung des hybriden Algorithmus eine deutlich bessere beste Lösung und auch durchschnittlich bessere Lösungen erzeugt. Die Autoren fanden außerdem heraus, dass bei der Anwendung der lokalen Suche die Strafkosten von Unzulässigkeiten gemindert werden können und sollten, da die Individuen als Startlösungen der lokalen Suche den Suchraum dann durch Heterogenität besser abbilden.[178] Goldberg (1989) merkt vor einem ähnlichen Hintergrund an, dass die Integration der lokalen Suche mit einer Nischen- oder Speziestechnik einher gehen sollte, um die Verdrängung guter genetischer In-

[174] Vgl. Colorni u. a. (1998), S. 285/295.
[175] Vgl. Caldeira und Rosa (1997), S. 6.
[176] Vgl. Ross u. a. (2003), S. 763/764.
[177] Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 459.
[178] Vgl. Colorni u. a. (1998), S. 291.

formationen durch „Super-Individuen" zu vermeiden.[179] In anderer Weise konstruieren Weare u. a. (1995) einen hybriden genetischen Algorithmus für ein Exam Timetabling Problem, bei dem ein heuristischer Operator zum Crossover verwendet wird, um die bestimmte Struktur der Beschränkungen speziell zu berücksichtigen und die Zulässigkeit der Pläne zu erhalten.
Insbesondere ist bei der Betrachtung von Problemen, bei denen viele Beschränkungen auf subjektiven Einschätzungen und Zufriedenheit beruhen, eine mathematische Formulierung der zu verfolgenden Ziele oft nur schwer umsetzbar. Meist kann ein mathematischer Term das Empfinden des Entscheidungsträgers bezüglich verschiedener Lösungsausprägungen nicht realistisch abbilden. Aus diesem Grund ist die Integration von Unschärfe eine wichtige und erfolgversprechende Erweiterung von genetischen Algorithmen. Im Bereich der Stundenplanung könnte sie eine präzisere Erfassung der Lehrer- und Schülerbedürfnisse ermöglichen. Eine genetischer Basisalgorithmus zur Betrachtung unscharfer Probleme findet sich in Buckley und Hayashi (1994). Eine Übersicht zu genetischen unscharfen Systemen geben Cordón u. a. (2004). Stefano und Tettamanzi (2001) erwähnen die Arbeit mit unscharfen Eingangsdaten bezüglich der Verfügbarkeit der Lehrer. Jedoch erläutern die Autoren nicht näher, wie sie diese Daten bei der Evaluation eines Individuums handhaben.[180]
Da die Evaluation eines Individuums bei einer multiattributiven Zielfunktion eine erhebliche Rechenzeit in Anspruch nehmen kann, werden vermehrt parallele, genetischen Algorithmen angewendet. Dabei werden Komponenten des Algorithmus von mehreren Prozessoren bearbeitet. Dies bietet die Möglichkeit eine größere Populationen zu wählen, da mehrere Individuen gleichzeitig evaluiert werden können oder mehrere eigenständige Populationen zu erzeugen und diese durch Migration zu verbinden.[181] Abramson und Abela (1992) wenden einen genetischen Algorithmus mit mehreren Prozessoren an und implementierten parallele Fortpflanzung von Individuen. Es zeigt sich, dass sich die Rechenzeit mit einer Verdoppelung der Anzahl Prozessoren nahezu halbiert. Bei einer Verdoppelung der Populationsgröße ist mit der zweifachen Anzahl der Prozessoren ein Ergebnis in ähnlicher Rechenzeit zu erreichen.[182]

[179]Vgl. Goldberg (1989), S. 202.
[180]Vgl. Stefano und Tettamanzi (2001), S. 453/457.
[181]Vgl. Man u. a. (1999), S. 46-48.
[182]Vgl. Abramson und Abela (1992), S. 10.

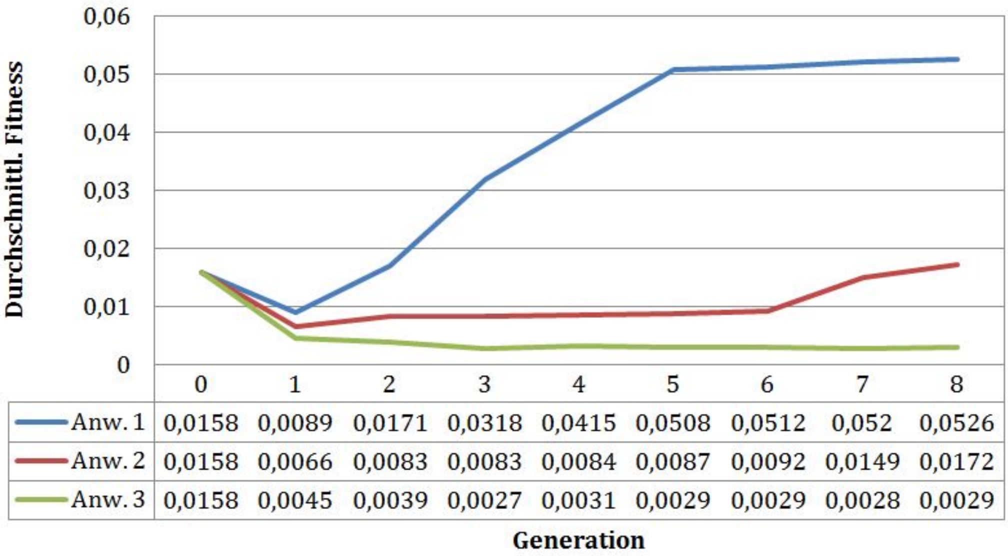
5 Anwendung des genetischen Algorithmus

Zur Unterstützung der händischen Anwendung des genetischen Algorithmus und der Dokumentation der Ergebnisse wurde ein Kalkulationstool in Microsoft Excel 2007 konstruiert. Zur Vereinfachung der Implementierung der komplexen Zusammenhänge wurde keine Matrixrepräsentation, sondern die Zeichenfolgerepräsentation nach Stefano und Tettamanzi (2001) gewählt. Ein Auszug aus dem Excel Tabellenblatt zur Kalkulation der Fitness findet sich in Anhang J. Die 206 Gene des Individuums sind in Spalte C blau unterlegt dargestellt. Spalte B definiert die Lehrer-Klasse-Fach-Tupel, die durch das entsprechende Gen einer Schulstunde zugeordnet werden. Zur Umsetzung der Beschränkungen bezüglich der Räume ist für jedes $(l|k|f)$ der notwendige Raum in Spalte A festgelegt.
Um den genetischen Algorithmus in der händischen Anwendung umsetzbar zu halten, wurde die kleinste in der Literatur verwendete Populationsgröße von $n = 15$ gewählt. Die Anfangspopulation wurde aus 14 Plänen, erzeugt mit einer direkten Heuristik[183], und dem realiserten Plan der Grundschule zusammengesetzt. Zur Ermittlung der Fitness der Individuen werden die in den Abschnitten 4.5.2 und 4.5.3 vorgestellten Ziel- und Fitnessfunktion verwendet. Es ist zunächst anzumerken, dass der realisierte Plan einen Fitnesswert von 0,05263 erhält. Die beste von der direkten Heuristik erzeugte Lösung hat eine Fitness von 0,02041, was einen Anhaltspunkt zur Bewertung des Softwaretools bietet. Der realisierte Plan nimmt somit in der Anfangspopulation die Rolle eines „Super-Individuums“ ein. Dieser Plan wurde in der Anwendung farbig markiert, um seine Ausbreitung innerhalb der Population beobachten zu können.
Es wurden drei Anwendungen des GA mit verschiedenen Ausprägungen der Steuerparameter vollzogen. Die gewählten Komponenten und Parameter sind in Tabelle 8 dargestellt.
Das Abbruchkriterium wurde auf eine maximale Generationszahl von 8 festgelegt, was einen umsetzbaren Rechenaufwand darstellte, aber nur vage Aussagen zu den einzelnen Komponenten des Algorithmus zulässt. Dennoch lassen sich einige Folgerungen schon aus diesen kleinen Experimenten deutlich ableiten. Abbildung 3 fasst die Entwicklung der durchschnittlichen Fitnesswerte der Population $\bar{fit}$ in den drei Anwendungen zusammen.

[183]Zur Generierung von Stundenplänen mittels direkter Heuristik wurde das Softwaretool FET 5.18.0 verwendet, welches zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit auf den folgenden Internetseiten in englischer und deutscher Version zum Download zur Verfügung steht: www.timetabling.de, www.lalescu.ro/liviu/fet/.

	Crossover	p_c	Mutation	p_m	Elitismus
Anw. 1	1-Punkt	0,9	Austausch	0,1	bestes Ind.
Anw. 2	1-Punkt	0,9	Austausch	0,4	-
Anw. 3	Uniform	0,9	Austausch	0,1	-

Tabelle 8: Übersicht der Komponenten und Parameter der Anwendung des genetischen Algorithmus



	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anw. 1	0,0158	0,0089	0,0171	0,0318	0,0415	0,0508	0,0512	0,052	0,0526
Anw. 2	0,0158	0,0066	0,0083	0,0083	0,0084	0,0087	0,0092	0,0149	0,0172
Anw. 3	0,0158	0,0045	0,0039	0,0027	0,0031	0,0029	0,0029	0,0028	0,0029

Abbildung 3: Grafische Übersicht der Ergebnisse der Anwendung des genetischen Algorithmus

Anwendung 1 arbeitet mit dem 1-Punkt-Crossover mit zufällig gewähltem Crossoverpunkt und einem Elitismusschema, bei dem das beste Individuum stets in die Folgegeneration übernommen wird. Die Überlegenheit des realisierten Planes in der Anfangspopulation führt dazu, dass $\bar{fit}$ sehr schnell gegen den Fitnesswert dieses Planes konvergiert und die 8. Generation ausschließlich aus Duplikaten dieses Individuums besteht. Die Generierung von Duplikaten wird durch die Anwendung des 1-Punkt-Crossovers begünstigt, da diese große Teile zusammenhängender Strukturen erhält. Auch die Anwendung des Elitismusschemas unterstützt diese schnelle Konvergenz, ist jedoch sinnvoll, um den realisierten Plan erst dann zu verwerfen, wenn eine bessere Lösung gefunden ist. Aus diesem Grund sollte generell eine wesentlich höhere Populationsgröße gewählt werden, um mit einer größeren Anzahl verschiedener genetischer Informationen zu arbeiten. Da dies in der händischen Anwendung kaum umsetzbar ist, wurde in Anwendung 2 kein Elitismus und eine wesentlich höhere Mutationsrate von 0,4 angewendet, um die Heterogenität der Population zu stärken.

Die durchschnittliche Fitness der Population in Anwendung 2 zeigt einen Ver-

lauf, welcher die Stärke eines genetischen Algorithmus andeutet. Das Absinken des Wertes von $\bar{fit}$ in Generation 1 ist auf die Zerstörung der heuristisch erstellten Planstruktur zurückzuführen. In den folgenden sieben Generationen werden diese neu kombiniert, sodass die durchschnittliche Fitness der Individuen stetig ansteigt. Es ist zu erwarten, dass bei der Generierung einer größeren Anzahl von Generationen ein zulässiger, guter Plan gefunden wird. Dennoch kann auch die häufige Anwendung von Mutationen die Konvergenz zu einer Lösung nahe dem realisierten Plan nicht verhindern. Seine Strukturen finden auch in der zweiten Anwendung im Gegensatz zu anderen Plänen vermehrt Verbreitung innerhalb der Population. Dem kann mit einer Erhöhung der Populationsgröße und der Verstärkung der zerstörenden Wirkung der Mutation entgegengewirkt werden. Eine Austausch-Mutation berührt lediglich 2 von 206 Genen. Die daraus resultierende Veränderung ist sehr klein im Gegensatz zu den bestehenden Strukturen. Ein alternative Operation wäre beispielsweise die Invertierung zufällig gewählter Teile des Individuums, um neue Regionen des Suchraums abzubilden.
Alternativ zum strukturerhaltenden 1-Punkt-Crossover arbeitet Anwendung 3 mit einem Uniform-Crossover. Aufgrund der komplexen Zusammenhänge zwischen den zuzuordnenden Komponenten sinkt die durchschnittliche Fitness der Population bei dieser Anwendung stark. In den erzeugten acht Generationen ist keinerlei Konvergenz erkennbar. Jedoch ist zu beobachten, dass sich für jedes Gen zwei bis drei Allelwerte in der Population manifestieren. Es findet somit vorwiegend eine Kombination bewährter Gene statt, welche bei einer großen Zahl erzeugter Generationen zufällig zu einem zulässigen Plan führen kann. Um die Etablierung bestimmter Allelwerte zu verlangsamem, sollte auch bei der Anwendung eines Uniform-Crossover eine größere Population gewählt werden.
Die Heterogenität der Anfangspopulation ist wichtig für die Erfolgschancen des Algorithmus, da sich aufgrund der zahlreichen verknüpften Beschränkungen des Timetabling Problems schnell „Super-Individuen“ bilden. Zudem sollte mit einer großen Population gearbeitet werden und diese neben heuristisch generierten auch zufällig erzeugte Individuen erhalten. Bei genügender Populationsgröße ist die Anwendung eines Elitismusschemas durchaus sinnvoll, um gute Strukturen vor der schnellen Zerstörung zu schützen. In allen drei Anwendungen wurden ausschließlich unzulässige Pläne generiert, welche häufig einen Wert von $z^H > 200$ auswiesen. Um dem Algorithmus das Auffinden der regionen lokaler Optima im Suchraum zu erleichtern, sollte ein zusätzlicher Reparaturoperator oder die lokalen Suche angewendet werden. Dieser kann

die von Crossover und Mutation erzeugte Heterogenität nutzen, um verschiedene zulässige, gute Lösungen zu generieren.
Die Anwendungen des Algorithmus zeigen, dass die Wahl der Komponenten und Steuerparameter das Suchverhalten des Algorithmus stark beeinflussen. Schon kleine Änderungen können einen völlig neuen Suchverlauf bewirken. Dies wird in der Literatur häufig als Schwäche genetischer Algorithmen angeführt. Jedoch führt es dazu, dass mit einer an das Problem angepassten Parameterfestlegung robuste Lösungen bezüglich der Eingangsdaten für komplexe Probleme generiert werden können.[184] Die Anpassung des GA an die Planungssituation kann sehr aufwändig sein, verspricht aber die Konstruktion eines effektiven Lösungsverfahrens.

6 Fazit

Das Timetabling Problem einer Grundschule in Sachsen-Anhalt kann in seiner komplexen Struktur als lineares, ganzzahliges Optimierungsmodell dargestellt werden. Für die betrachtete Grundschule ist es möglich aufgrund der Einhaltung der Forderungen des impliziten Ansatzes der Personalplanung einen zulässigen Plan zu erstellen. Es existiert jedoch kein polynomialer Algorithmus für das Timetabling Problem, der eine optimale Lösung generiert. Genetische Algorithmen bilden aufgrund ihrer Anpassungsfähigkeit ein erfolgversprechendes heuristisches Verfahren zur Bestimmung guter Lösungen.
Der Stundenplan kann sowohl in seiner ursprünglichen Form als Matrix als auch in einer Zeichenfolge dargestellt werden. Die freie Definition der Ziel- und Fitnessfunktion ermöglicht es jedes Kriterium der Beurteilung eines Planes mit seiner Priorität zu erfassen und auch bedingte Bewertungen umzusetzen. Eigens für das Timetabling Problem konstruierte Varianten des Crossovers folgen der Charakteristik des Problems Wochenpläne für verschiedene Klassen und Lehrer generieren zu müssen. Durch die Integration einer Form von Elitismus und eines zusätzlichen Reparaturoperators kann mit häufig auftretenden Unzulässigkeiten aufgrund der komplexen Problemstruktur umgegangen werden.
Die Ergebnisse der Anwendung des Algorithmus zeigen, dass die Auswahl der Komponenten und die Festlegung der Steuerparameter den Suchprozess beeinflussen. Aus diesem Grund ist es notwendig den Algorithmus so exakt wie möglich an die Planungssituation anzupassen. Bezüglich der Qualität des Stundenplanes kann ein genetischer Algorithmus um Beschränkungen mit un-

[184] Vgl. DeJong und Spears (1989), S. 131.

scharfer Formulierung ergänzt werden. Die Präferenzen der Lehrer bezüglich ihres Stundenplanes könnten in dieser Form präziser abgebildet werden. Auch die „Erwünschtheit“ bestimmter Fächer in frühen oder späten Schulstunden eines Tages ließe sich durch eine abgestufte Zufriedenheit mit Hilfe der Fuzzy Logik darstellen. In dieser Weise können Kriterien in den Algorithmus integriert werden, denen ein Schulleiter bei der Planung intuitiv folgt.
Um der Erzeugung und Evaluierung zahlreicher, unzulässiger Lösungen entgegenzuwirken, kann versucht werden Crossover und Mutation an permutationsorientierte Varianten anzulehnen. Im Job Scheduling werden definierte Elemente aufeinanderfolgenden Zeitperioden zugeordnet wie auch die Unterrichtseinheiten einer Klasse im Timetabling Problem. Dieser Reihenfolge-Aspekt sollte bei der Fortpflanzung der Individuen berücksichtigt und um die Verknüfungen zwischen den Klassen erweitert werden.
Auch wenn die Implemetierung und Festlegung der Steuerparameter im Gegensatz zu anderen Lösungsverfahren aufwändiger sein können, stellt der genetische Algorithmus durch seine Möglichkeiten zur Anpassung und Erweiterung ein effektives, heuristisches Lösungsverfahren für das Timetabling Problem dar.

Anhang

Anhangsverzeichnis

A	Für die Grundschule geltende Stundentafel	XI
B	Gesprächsprotokolle	XII
C	Anwendung des impliziten Ansatzes auf das Timetabling Problem der Grundschule	XIII
D	Zuordnungsproblem der zweiten Planungsebene	XX
E	Terminologie genetischer Algorithmen	XXI
F	Grafische Darstellung zur Vorgehensweise eines genetischen Algorithmus	XXII
G	Matrixrepräsentation eines Auszuges aus dem Stundenplan der Grundschule	XXIII
H	Diskussion verschiedener Fitnessfunktionen am Beispiel	XXIV
I	Das Schema Theorem	XXVI
J	Kalkulation der Fitness in Microsoft Excel 2007	XXVIII

A Für die Grundschule geltende Stundentafel

Stundentafel[185]

Stundenzahl im Jahrgang	**Schuleingangs-phase**	**3**	**4**
Deutsch	7	7	7
Sachunterricht	3 bis 4	3 bis 4	3 bis 4
Mathematik	5	6	6
Musik	1 bis 2	1 bis 2	1 bis 2
Gestalten	2 bis 3	2 bis 3	2 bis 3
Sport	2 bis 3	2 bis 3	2 bis 3
Ethik-/Religionsunterricht	1 bis 2	2	2
Englisch	-	2	2
Schulspezifische Unterrichtsangebote	1 bis 2	1 bis 2	1 bis 2
Pflichtstundenzahl	**22 bis 24**	**25 bis 27**	**25 bis 27**

Bemerkung:

Die Schuleingangsphase umfasst die Jahrgangsstufen 1 und 2. Schüler verbleiben abhängig von ihrem Lernstand ein bis drei Schulbesuchsjahre in der Schuleingangsphase.

[185] Land Sachsen-Anhalt (2010)

B Gesprächsprotokolle

Übersicht

- Gesprächsprotokoll des Gespräches mit der Schulleiterin Gabi Lange
- Fragenkatalog der Lehrerinterviews
- Gesprächsprotokoll BOM
- Gesprächsprotokoll BOS
- Gesprächsprotokoll EHR
- Gesprächsprotokoll FIE
- Gesprächsprotokoll HBN
- Gesprächsprotokoll SCM
- Gesprächsprotokoll STE
- Gesprächsprotokoll SUB

C Anwendung des impliziten Ansatzes auf das Timetabling Problem der Grundschule

Für die Anwendung des impliziten Ansatzes der Personalplanung auf das Timetabling Problem müssen zunächst der tätigkeitsbezogene Personalbedarf PB_q sowie die Personalausstattung nach Ausbildung der Lehrer PA_r ermittelt werden.
Die Bestimmung des Personalbedarfes erfolgt in abzuhaltenden Schulstunden für jede Tätigkeit summiert über alle Jahrgangsstufen, wobei stets von der oberen Intervallgrenze der Angaben der Stundentafel ausgegangen wird. Eine Tätigkeit kann dabei ein Fach oder eine Kombination von Fächern, welche die selben Lehrerarten verlangen, sein.
Die Personalausstattung wird nach Lehrerarten gegliedert, wobei eine Lehrerart durch die Lehrbefähigung für eine bestimmte Fachkombination gekennzeichnet ist. Ermittelt wird die Personalausstattung PA_r in zur Verfügung stehenden Schulstunden der entsprechenden Lehrerart r, als Summe der wöchentlichen Schulstunden der einzelnen Lehrer dieser Art. Es ist zu beachten, dass die meisten Lehrer nicht die vertraglich vereinbarten 27 Stunden für den Unterricht zur Verfügung stehen. Es gibt verschiedene Arten von Anrechnungsstunden, die entsprechend für andere Tätigkeiten, wie die Vorbildung der künftigen Einschüler oder bspw. ein Personalratsamt, genutzt werden sollen.
Die zur Verfügung stehende Förderschullehrerin FIE wird in diesem Ansatz nicht berücksichtigt, da sie mit einzelnen Schülern parallel zum laufenden Unterricht arbeitet und somit nicht der Bedarfsdeckung eines Faches dient. Die Lehrbefähigung für das Fach Ssu besitzt jeder Lehrer, da die inhaltliche Ausrichtung nach dem unterrichtenden Lehrer und der zu unterrichtenden Klasse erfolgt. Eine Ausnahme bildet die Religionslehrerin MÖN, welche nur für die bedarfsdeckende Schulstundenzahl für das Fach Rel an die Schule abgeordnet und dort nur für dieses Fach einzusetzen ist.
Im Bereitstellungstableau der Grundschule wird zunächst aufgezeigt, welche Lehrerart für das Verrichten welcher Tätigkeit geeignet ist. Zudem wird angegeben, welche Fächer zu einer Tätigkeit und welche Lehrer zu einer Art gehören.

	l	1, 2	3, 4	5, 6	7	8	9	10	
f	$q\backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	PB_q
De, HSa, Ma, Ssu	1	x	x	x	x	x	x	-	74
Mu	2	-	-	x	-	-	-	-	8
Gest	3	x	-	-	x	x	-	-	12
Sp	4	-	x	-	-	x	x	-	12
Eth	5	-	-	-	-	x	-	-	8
Rel	6	-	-	-	-	-	-	x	3
Eng	7	x	-	-	x	-	-	-	4
	PA_r	44	51	42	26	26	27	3	

Es gilt nun zu prüfen, ob die Summe der Personalbedarfe aller Teilmengen $\hat{Q}$ von $\bar{Q}$ stets kleiner oder gleich der Summe der Personalausstattung mit der entsprechenden Art ist.[186]

$$\sum_{q \in \hat{Q}} PB_f \leq \sum_{r \in \bigcup\limits_{q \in \hat{Q}} \bar{R}_q} PA_r \qquad \forall\, \hat{Q} \in \wp(\bar{Q}) \setminus \emptyset \tag{37}$$

Die sich für das Timetabling Problem der Grundschule ergebenden Bedingungen sind im Folgenden dargestellt.

[186]Vgl. Spengler (2006), S. 5.

PB_1	PB_2	PB_3	PB_4	PB_5	PB_6	PB_7			PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	
74							= 74	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
	8						= 8	<			42					= 42
		12					= 12	<	44+			26+	26			= 96
			12				= 12	<		51+			26+	27		= 104
				8			= 8	<					26			= 26
					3		= 3	=							3	= 3
						4	= 4	<	44+			26+				= 70
74+	8						= 82	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12					= 86	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+			12				= 86	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+				8			= 82	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+					3		= 77	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+						4	= 78	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
	8+	12					= 20	<	44+		42+	26+	26			= 138
	8+		12				= 20	<		51+	42+		26+	27		= 146
	8+			8			= 16	<			42+		26			= 68
	8+				3		= 11	<			42+				3	= 45
	8+					4	= 12	<	44+		42+	26				= 112
		12+	12				= 24	<	44+	51+		26+	26+	27		= 174
		12+		8			= 20	<	44+			26+	26			= 96
		12+			3		= 15	<	44+			26+	26+		3	= 99
		12+				4	= 16	<	44+			26+	26			= 96
			12+	8			= 20	<		51+			26+	27		= 104
			12+		3		= 15	<		51+			26+	27	3	= 107
			12+			4	= 16	<	44+	51+		26+	26+	27		= 174
				8+	3		= 11	<					26+		3	= 29
				8+		4	= 12	<	44+			26+	26			= 96
					3+	4	= 7	<	44+			26+			3	= 73
74+	8+	12					= 94	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+		12				= 94	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216

PB_1	PB_2	PB_3	PB_4	PB_5	PB_6	PB_7		PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	
74+	8+			8			= 90 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+				3		= 85 <	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+					4	= 86 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+	12				= 98 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+		8			= 94 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+			3		= 89 <	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+				4	= 90 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+			12+	8			= 94 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+			12+		3		= 89 <	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+			12+			4	= 90 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+				8+	3		= 85 <	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+				8+		4	= 86 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+					3+	4	= 81 <	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12				= 32 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
	8+	12+		8			= 28 <	44+		42+	26+	26			= 138
	8+	12+			3		= 23 <	44+		42+	26+	26		3	= 141
	8+	12+				4	= 24 <	44+		42+	26+	26			= 138
	8+		12+	8			= 28 <		51+	42+		26+	27		= 146
	8+		12+		3		= 23 <		51+	42+		26+	27+	3	= 149
	8+		12+			4	= 24 <	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
	8+			8+	3		= 19 <			42+		26+	27		= 95
	8+			8+		4	= 20 <	44+		42+	26+	26			= 138
		12+	12+	8			= 32 <	44+	51+		26+	26+	27		= 174
		12+	12+		3		= 27 <	44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177
		12+	12+			4	= 28 <	44+	51+		26+	26+	27		= 174
		12+		8+	3		= 23 <	44+			26+	26+		3	= 99
		12+		8+		4	= 24 <	44+			26+	26+			= 96
		12+			3+	4	= 19 <	44+			26+	26+		3	= 99
			12+	8+	3		= 23 <		51+			26+	27+	3	= 127
			12+	8+		4	= 24 <	44+	51+		26+	26+	27		= 174

PB_1	PB_2	PB_3	PB_4	PB_5	PB_6	PB_7		PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	
			12+		3+	4	= 19	<44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177
				8+	3+	4	= 15	<44+			26+	26+		3	= 99
74+	8+	12+	12				= 106	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+		8			= 102	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+			3		= 97	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+				4	= 98	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+		12+	8			= 102	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+		12+		3		= 97	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+		12+			4	= 98	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+			8+	3		= 93	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+			8+		4	= 94	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+				3+	4	= 89	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+	12+	8			= 106	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+	12+		3		= 101	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+	12+			4	= 102	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+		8+	3		= 97	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+		8+		4	= 98	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+			3+	4	= 93	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+			12+	8+	3		= 93	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+			12+	8+		4	= 94	<44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+			12+		3+	4	= 93	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+				8+	3+	4	= 89	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12+	8			= 40	<44+	51+	42+	26+	26+	27+		= 216
	8+	12+	12+		3		= 35	<44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12+			4	= 36	<44+	51+	42+	26+	26+	27+		= 216
	8+	12+		8+	3		= 31	<44+		42+	26+	26+		3	= 141
	8+	12+		8+		4	= 32	<44+		42+	26+	26			= 138
	8+	12+			3+	4	= 27	<44+		42+	26+	26+		3	= 141
	8+		12+	8+	3		= 31	<	51+	42+		26+	27+	3	= 149
	8+		12+	8+		4	= 32	<44+	51+	42+	26+	26+	27+		= 216

PB_1	PB_2	PB_3	PB_4	PB_5	PB_6	PB_7			PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	
	8+		12+		3+	4	= 27	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+			8+	3+	4	= 23	<	44+		42+	26+	26+		3	= 141
		12+	12+	8+	3		= 35	<	44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177
		12+	12+	8+		4	= 36	<	44+	51+		26+	26+	27		= 174
		12+	12+		3+	4	= 31	<	44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177
		12+		8+	3+	4	= 27	<	44+			26+	26+		3	= 99
			12+	8+	3+	4	= 27	<	44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177
74+	8+	12+	12+	8			= 114	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+	12+		3		= 109	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+	12+			4	= 110	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+		8+	3		= 105	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+		8+		4	= 106	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+			3+	4	= 101	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+		12+	8+	3		= 105	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+		12+	8+		4	= 106	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+		12+		3+	4	= 101	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+			8+	3+	4	= 97	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+	12+	8+	3		= 109	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+	12+	8+		4	= 110	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+		12+	12+		3+	4	= 105	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+		8+	3+	4	= 101	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+			12+	8+	3+	4	= 101	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12+	8+	3		= 43	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12+	8+		4	= 44	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
	8+	12+	12+		3+	4	= 39	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+		8+	3+	4	= 35	<	44+		42+	26+	26+	27+	3	= 168
	8+		12+	8+	3+	4	= 35	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
		12+	12+	8+	3+	4	= 39	<	44+	51+		26+	26+	27+	3	= 177

PB_1	PB_2	PB_3	PB_4	PB_5	PB_6	PB_7			PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	
74+	8+	12+	12+	8+	3		=117	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+	12+	8+		4	=118	<	44+	51+	42+	26+	26+	27		= 216
74+	8+	12+	12+		3+	4	=113	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+		8+	3+	4	=109	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+		12+	8+	3+	4	=109	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+		12+	12+	8+	3+	4	=113	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
	8+	12+	12+	8+	3+	4	=47	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219
74+	8+	12+	12+	8+	3+	4	=121	<	44+	51+	42+	26+	26+	27+	3	= 219

D Zuordnungsproblem der zweiten Planungsebene

$$find \quad x^t_{klrf} \qquad k \in \bar{K}, f \in \bar{F}_k, l \in L^*_{kf}, r \in \bar{R}, t \in \bar{T}$$

u.d.N.

$$\sum_{f \in F^*_l} \sum_{k \in K^*_{lf}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in F^*_l} \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} \leq 1 \qquad \forall\ t \in \bar{T}, l \in \bar{L}_t \tag{38}$$

$$\sum_{f \in \bar{F}_k} \sum_{l \in L^*_{kf}} \sum_{r \in \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} \leq 1 \qquad \forall\ t \in \bar{T}, k \in \bar{K}_t \tag{39}$$

$$\sum_{f \in \bar{F}_r} \sum_{k \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_r} \bar{K}_{ft}} \sum_{l \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_r} L^*_f \cap \bar{L}_t} x^t_{klrf} \leq 1 \qquad \forall\ t \in \bar{T}, r \in \bar{R}_t \tag{40}$$

$$\sum_{t \in \bar{T}_k} \sum_{r \in \bigcup\limits_{t \in \bar{T}_k} \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} = b_{kf} \qquad \forall\ k \in \bar{K}, f \in \bar{F}_k, l \in L^*_{kf} \tag{41}$$

$$\sum_{t \in \bar{T}_l} \sum_{f \in F^*_l} \sum_{k \in K^*_{lf} \cap \bar{K}_{lt}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in F^*_l} \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} = \bar{s}_l - \bar{e}_l \qquad \forall\ l \in \bar{L} \tag{42}$$

$$\sum_{f \in \bar{F}_k} \sum_{l \in L^*_{kf}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_k} \bar{R}_{ft+1}} x^{t+1}_{klrf} \leq \sum_{f \in \bar{F}_k} \sum_{l \in L^*_{kf}} \sum_{r \in \bigcup\limits_{f \in \bar{F}_k} \bar{R}_{ft}} x^t_{klrf} \quad \forall\ t \in \bar{T} \setminus \{6, 12, 18, 24, 30\}, k \in \bar{K}_t \tag{43}$$

$$\sum_{k \in \bar{K}_f} \sum_{l \in L^*_{kf}} \sum_{r \in \bar{R}_f} x^t_{klrf} = |\bar{K}_f| \cdot x^t_f \qquad \forall\ t \in \bar{T}_f, f = 12, 12, 13, 16, 17 \tag{44}$$

$$x^t_{klrf} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ k \in \bar{K}, l \in \bar{L}, r \in \bar{R}, f \in \bar{F}, t \in \bar{T} \tag{45}$$

E Terminologie genetischer Algorithmen

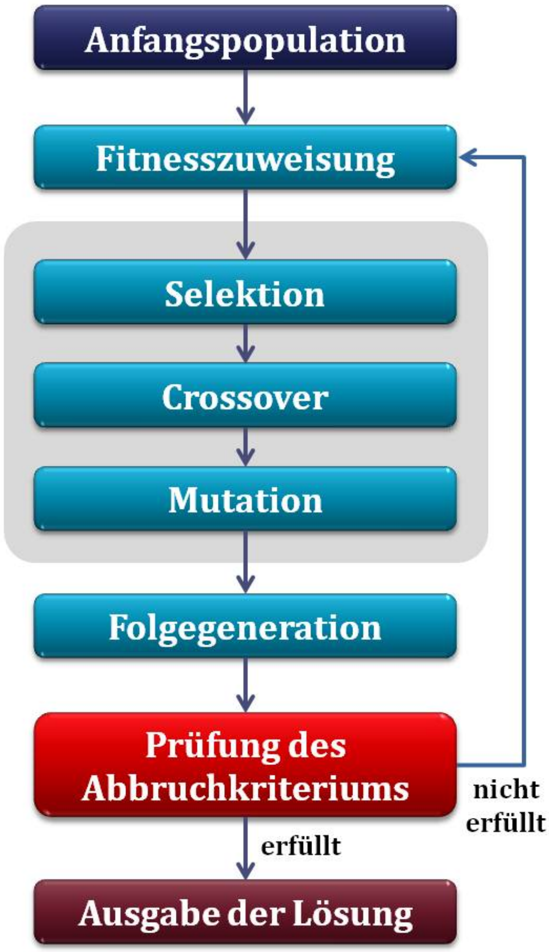
[187]

Ausdruck	**Bedeutung bei GA**
Individuum	Lösung mit Festlegung aller Entscheidungsvariable
Genotyp	codierte Lösung
Phänotyp	decodierte Lösung
Chromosom	(Teil-)Repräsentation eines Individuum durch einen Zeichenfolge (Ein Individuum kann aus einem oder mehreren Chromosomen bestehen.)
Gen	ein Zeichen des Chromosoms
Allel	Ausprägung eines Genes (Wert einer Entscheidungsvariable)
Population	Menge von Lösungen
Generation	Iteration
Eltern	zur Erzeugung von Nachkommen ausgewählte Individuen
Nachkommen	aus Eltern erzeugte Individuen
Fitness	Güte einer Lösung bezüglich der Ziele
(genetischer) Operator	Verfahrensweise zur Auswahl, Veränderung oder Kombination von Chromosomen
Selektion (Reproduktion)	Operator zur Auswahl der Eltern
Crossover	Operator zur Kombination von Chromosomen
Mutation	Operator zur Veränderung eines oder mehrerer Gene eines Chromosoms

[187]Vgl. Ruban (2008), S. 46 und Goldberg (1989), S. 22.

F Grafische Darstellung zur Vorgehensweise eines genetischen Algorithmus

[188]



[188] Vgl. Ruban (2008), S. 47.

G Matrixrepräsentation eines Auszuges aus dem Stundenplan der Grundschule

Die Matrixrepräsentation ist angelehnt an Carrasco und Pato (2001).

$(l\|k\|f)$	**Code**	**Anz.**	$(l\|k\|f)$	**Code**	**Anz.**
(BOS|1a|De)	01	7	(HBN|2a|De)	12	7
(BOS|1a|Ma)	02	5	(HBN|2a|Ma)	13	5
(BOS|1a|Hsa)	03	3	(HBN|2a|Hsa)	14	3
(HBN|1a|JÜ3)	04	1	(HBN|2a|JÜ4)	15	1
(BOM|1a|JÜ1)	05	1	(BOM|2a|JÜ2)	16	1
(BOS|1a|JÜ2)	06	1	(BOS|2a|JÜ1)	17	1
(EHR|1a|JÜ4)	07	1	(EHR|2a|JÜ3)	18	1
(EHR|1a|Sp)	08	1	(EHR|2a|Sp)	19	2
(SUB|1a|Eth)	09	1	(SUB|2a|Eth)	20	1
(MÖN|1a|JÜRel)	10	1	(MÖN|2a|JÜRel)	21	1
(BOS|1a|SSU)	11	1	(SCM|2a|SSU)	22	1

	Montag						Dienstag						...
Raum\ t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	...
1	01		02	03			01	02	03	01	05		...
3	12	13	12	14			12	13		22			...
9											17		...
10		08							19				...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

In dieser beispielhaften Zuordnung stellen der jahrgangsübergreifende Unterricht JÜ3 sowie JÜ4 das Fach Musik unterrichtet von Lehrer HBN sowie das Fach Sport unterrichtet von EHR dar. Diese Fächer werden somit in zwei Schulstunden der Woche zeitlich parallel geplant, sodass zwei gemischte Schülergruppen aus 1a und 2a in Musik und Sport unterrichtet werden. Die Fachbelegung der Schülergruppen wird dabei gewechselt, sodass jeder Schüler wie im Curriculum festgelegt eine Wochenstunde Musik und zwei bzw. drei Wochenstunden Sport erhält. Den Fächern JÜ3 und JÜ4 werden ein Klassenraum und die Sporthalle als notwendige Räume zugeordnet, sodass aufgrund zwei beteiligter Klassen stets beide Räume zugeordnet werden.

H Diskussion verschiedener Fitnessfunktionen am Beispiel

Individuum i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Zielfunktionswert z_i	1	13	15	24	67
	fit_1	fit_2	fit_3	fit_4	fit_5
lineare Skalierung $a = -0,5, b = 35$	34,5	28,5	27,5	23	1,5
Ranking	5	4	3	2	1
lin. Fitness $f = 100, g = 10$	90	80	70	60	50
Potenzskalierung $d = -1$	1	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{67}$
Äquivalenz	1	13	15	24	67
Sigma Truncation $c = 1$	0	11,72	13,72	22,72	65,72
Potenzskalierung $d = 2$	1	169	225	576	4489
Windowing $e = 5$	5	8	10	19	62

Der durchschnittliche Zielfunktions- und Fitnesswert unterscheiden sich in der linearen Skalierung um lediglich eine Einheit. Somit ist das Verhältnis der Zielfunktions- und Fitnesswerte der Individuen gewahrt und die Chance der Selektion eines Individuums wird von der Skalierung kaum berührt. Die Potenzskalierung mit $d = -1$ bietet die Möglichkeit, das Verhältnis der Zielfunktionswerte in den Fitnesswerten abzubilden und die Chance der Selektion exakt zu erhalten. Mit der Auswahl von f und g soll gezeigt werden, dass die beiden zuletzt genannten Funktionen lediglich auf der Ordnung der Individuen nach Zielfunktionswerten basieren. Die Differenzierung der Individuen mit der linearen Fitness kann frei angepasst werden.

Für die verbleibenden Verfahren Äquivalenz, Sigma Truncation, Potenzskalierung und Windowing ist zu beachten, dass diese eine zu maximierende Zielfunktion voraussetzen und das, für dieses Problem beste Individuum 1 als schwächstes betrachten. Die Wirkung der Fitnessfunktionen auf durchschnittliche Fitness und Streuung ist jedoch zu erkennen. Die Methode der Sigma Truncation schließt das schwächste Individuum 1 von der Selektion aus, da sein Zielfunktionswert mehr als eine Standardabweichung unter dem durchschnittlichen Zielfunktionswert liegt. Die Potenzskalierung erhöht die Standardabweichung der Fitnesswerte auf 1708,79, wobei die Standardabweichung der Zielfunktionswerte lediglich 22,72 beträgt. Der Effekt von Ausreißern wie Individuum 5 wird enorm verstärkt. Bei der Anwendung des Windowing ist zu erkennen, dass die Chance der Selektion des vom Verfahren als schwächstes betrachteten Individuums 1 leicht erhöht wird. Die genetischen Informationen schwacher Individuen können länger in der Population erhalten werden, um die frühe Konvergenz gegen lokalen Optima zu verhindern.

I Das Schema Theorem

Die Fähigkeit eines genetischen Algorithmus gute Lösungen zu generieren, sieht Holland 1975 darin, gute genetische Informationen von Individuen zu identifizieren und diese vermehrt neu zu kombinieren. Hierzu ist eine ständige Evaluation der verschiedensten Strukturen notwendig, um Gemeinsamkeiten von überdurchschnittlichen Individuen in Form von Mustern als gutes genetisches Material zu bestimmen.[189]

Eine Menge von Genen, bestimmt durch ihre Allele, wird von Holland als Schema H definiert. Ein Schema wird charakterisiert durch seine Ordnung $o(H)$, welche die Anzahl der Gene innerhalb des Schemas bezeichnet, und seine Länge $\delta(H)$, die den Abstand vom ersten zum letzten, festgelegten Gen angibt.[190] Beispielhaft sind in der folgenden Abbildung vier Schemata eines Individuums in binärer Zeichenfolge mit 5 Genen dargestellt. Das Symbol * bedeutet in diesem Fall keine Festlegung des Allels für das entsprechende Gen.

Schema	$o(H)$	$\delta(H)$
$H_1 = (1 * * * *)$	1	$1 - 1 = 0$
$H_2 = (* 0 * * 1)$	2	$5 - 2 = 3$
$H_3 = (* 1 0 1 *)$	3	$4 - 2 = 2$
$H_4 = (1 * * 0 0)$	3	$5 - 1 = 4$

In diesem Beispiel ist zu erkennen, dass das Schema H_4 höherer Ordnung das Schema H_1 niedrigerer Ordnung einschließt. Aufgrund dieser Struktur können bei der Evaluation eines Individuums bis zu $O(n^3)$ Schemata bearbeitet werden.[191] Diese gleichzeitige Betrachtung wird als impliziter Parallelismus bezeichnet (intrinsic parallelism)[192] und beschreibt eine der wichtigsten strukturellen Besonderheiten eines genetischen Algorithmus.

Der Algorithmus soll nun erfolgversprechende Schemata identifizieren. Als erfolgversprechend gilt ein Schema dann, wenn es den gleitenden Durchschnitt der Fitness der Population erhöht.[193] Ein solches Schema wird als Building Block bezeichnet[194] und seine Erhaltung und Vermehrung innerhalb der Population sind von Interesse, um die Erfolgsaussichten des Algorithmus zu begründen.

Das vielzitierte Schema Theorem von Holland beschreibt die Anzahl $m(H, t)$

[189] Vgl. Holland (1992), S. 66.
[190] Vgl. Goldberg (1989), S. 29.
[191] Vgl. Nissen (1994), S. 109.
[192] Vgl. Holland (1992), S. 71.
[193] Vgl. Holland (1992), S. 68
[194] Vgl. Goldberg (1989), S. 20.

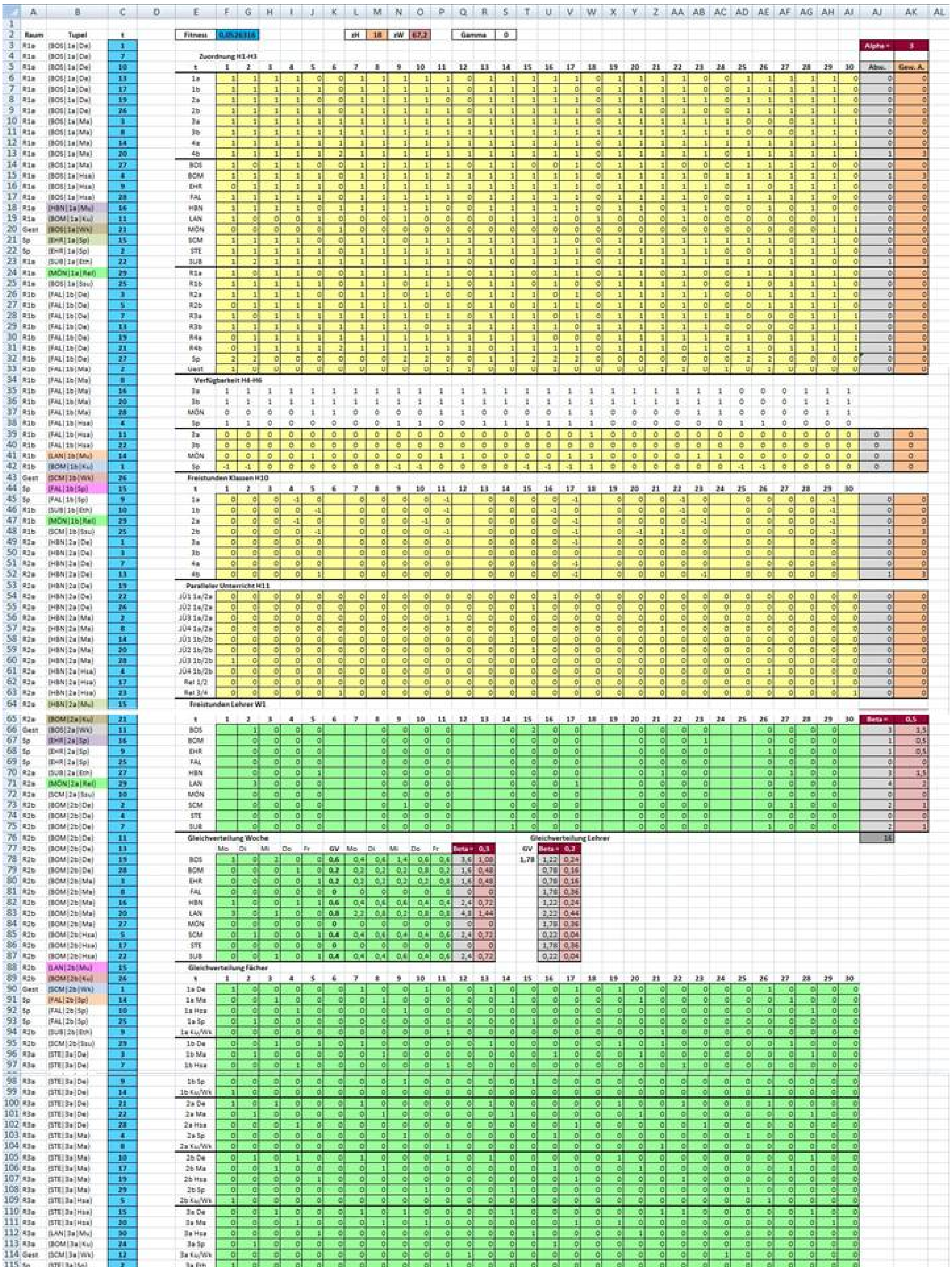
eines Schemas H in Generation t bei proportionaler Selektion und Generational Replacement. Sind eine Crossoverwahrscheinlichkeit p_c, eine Mutationswahrscheinlichkeit p_m, eine Länge l des Chromosoms sowie $f(H,t)$ als durchschnittliche Fitness eines Individuums mit H in t und $\bar{f(t)}$ als durchschnittliche Fitness der Population in t gegeben, ergibt sich das Schema Theorem wie folgt:[195]

$$m(H,t+1) \geq m(H,t) \cdot \frac{f(H,t)}{\bar{f(t)}} [1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} - o(H) \cdot p_m.$$

Die Anzahl der Individuen in einer Generation, die ein bestimmtes Schema H enthalten, wird beeinflusst durch den Prozess der Selektion, welcher Individuen anhand ihrer Fitnesswerte auswählt. Entsprechend wird der Quotient $\frac{f(H,t)}{\bar{f(t)}}$ einen Wert größer oder kleiner als 1 annehmen. Zudem werden Verluste des Schemata durch die Anwendung von Crossover und Mutation mit den bestimmten Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt, wobei die Zerstörung durch Crossover proportional zur Länge des Schemas und jene durch Mutation proportional zur Ordnung des Schemas ist. Daraus ergibt sich die fundamentale Schlussfolgerung, dass sich überdurchschnittliche Building Blocks von Generation zu Generation exponentiell vermehren werden, wohingegen unterdurchschnittliche Schemata in ihrer Anzahl abnehmen.
In praktischen Anwendungen ist die Wirkung des Schema Theorems insbesondere bei begrenzten Populationsgrößen nicht immer erkennbar, da die Selektion nur eine kleine Stichprobe darstellt, welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung basierend auf den Fitnesswerten mit starker Varianz abbildet. Begründet mit diesem Hauptargument ist die Schema Theorie als Basis der Leistungsfähigkeit von genetischen Algorithmen umstritten.[196]

[195]Vgl. Holland (1992), S. 111 sowie Goldberg (1989), S. 33.
[196]Vgl. Nissen (1994), S. 111.

J Kalkulation der Fitness in Microsoft Excel 2007



Literatur

[Abramson und Abela 1992] ABRAMSON, D. ; ABELA, J.: A Parallel Genetic Algorithm for Solving the School Timetabling Problem. In: *Proceedings of Australien Computer Science Conference, Hobart, 1992*, 1992, S. 1–11.

[Ahn 2006] AHN, Chang W.: Pratical Genetic Algorithms. In: *Advances in Evolutionary Algorithms; Theory, Design and Practice*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006 (SCI 18), S. 7–22.

[Bea und Schweitzer 2009] BEA, Frank X. ; SCHWEITZER, Marcell: *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Band 1: Grundlagen*. 10., überarb. u. erw. Aufl. Lucius und Lucius, 2009.

[Beligiannis u. a. 2009] BELIGIANNIS, G.N. ; MOSCHOPOULOS, C. ; LIKOTHANASSIS, S.D.: A genetic algorithm approach to school timetabling. In: *Journal of the Operational Research Society* 60 (2009), S. 23–42.

[Bertsimas und Weismantel 2005] BERTSIMAS, Dimitris ; WEISMANTEL, Robert: *Optimization over Integers*. Dynamic Ideas, 2005.

[Buckley und Hayashi 1994] BUCKLEY, James J. ; HAYASHI, Yoichi: Fuzzy genetic algorithm and applications. In: *Fuzzy Sets and Systems* 161 (1994), S. 129–136.

[Burke und Petrovic 2002] BURKE, Edmund K. ; PETROVIC, Sanja: Recent research directions in automated timetabling. In: *European Journal of Operational Research* 140 (2002), S. 266–280.

[Caldeira und Rosa 1997] CALDEIRA, J.P. ; ROSA, A.C.: School Timetabling using Genetic Search. In: *Proceedings of Practice and Theory of Automated Timetabling, Toronto, 1997*, 1997, S. 1–8.

[Carrasco und Pato 2001] CARRASCO, Marco P. ; PATO, Margarida V.: A Multiobjective Genetic Algorithm for the Class/Teacher Timetabling Problem. In: BURKE, Edmund (Hrsg.) ; ERBEN, Wilhelm (Hrsg.): *Practice and Theory of Automated Timetabling 2000*, Springer-Verlag, 2001 (LNCS 2079), S. 3–17.

[Colorni u. a. 1990] COLORNI, Alberto ; DORIGO, Marco ; MANIEZZO, Vittorio: A genetic algorithm to solve the timetabling problem / Politecnico di Milano. 1990 (90-060). – Forschungsbericht.

[Colorni u. a. 1991] Colorni, Alberto ; Dorigo, Marco ; Maniezzo, Vittorio: Genetic Algorithms and Highly Constrainted Problems: The Time-Table Case. In: *Parallel Problem Solving from Nature 1990*, Springer-Verlag, 1991 (LNCS 469), S. 55–59.

[Colorni u. a. 1998] Colorni, Alberto ; Dorigo, Marco ; Maniezzo, Vittorio: Metaheuristics for High School Timetabling. In: *Computational Optimization and Applications* 9 (1998), Nr. 3, S. 275–298.

[Cordón u. a. 2004] Cordón, O. ; Gomide, F. ; Herrera, F. ; Hoffmann, F. ; Magdalena, L.: Ten years of genetic fuzzy systems: current framework and news trends. In: *Fuzzy Stes and Systems* 141 (2004), S. 5–31.

[Corne u. a. 1994] Corne, Dave ; Ross, Peter ; Fang, Hsiao lan: Evolutionary Timetabling: Practice, Prospects and Work in Progress. In: *In Proceedings of the UK Planning and Scheduling SIG Workshop, Strathclyde*, 1994.

[Davis 1996] Davis, Lawrence: *Handbook of Genetic Algorithms*. London and Bonn and Boston and Johannesburg : International Thomson Computer Press, 1996 (Neuauflage).

[DeJong und Spears 1989] DeJong, Kenneth A. ; Spears, William M.: Using genetic algorithms to Solve NP-Complete Problems. In: *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, 1989, S. 124–132.

[Even u. a. 1976] Even, S. ; Itai, A. ; Shamir, A.: On the Complexity of Timetable and Moulticommodity Flow Problems. In: *SIAM Journal on Computing* 5 (1976), Nr. 4, S. 691–703.

[Goldberg 1989] Goldberg, David: *Genetic Algorithms in search, optimization, and machine learning*. Reading, Harlow, Menlo Park, Berkeley, Don Mills, Sydney, Bonn, Amsterdam, Tokyo, Mexiko City : Addison Wesley, 1989.

[Goldberg und Deb 1991] Goldberg, David E. ; Deb, Kalyanmoy: A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In: *Foundations of Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, 1991, S. 69–93.

[Grefenstette 1986] Grefenstette, John J.: Optimization of Control Parameters for Genetic Algorithms. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 16 (1986), Nr. 1, S. 122–128.

[Harik u. a. 1999] Harik, George ; Cantú-Paz, Erick ; Goldberg, David E. ; Miller, Brad L.: The Gambler's Ruin Problem, genetic Algorithms, and the Sizing of Populations. In: *Evolutionary Computation* 7 (1999), Nr. 3, S. 255–274.

[Holland 1992] Holland, John H.: *Adaption in Natural and Artificial Systems*. Cambridge : MIT Press, 1992 (Neuauflage).

[Kossbiel 2002] Kossbiel, Hugo: Personalwirtschaft. In: *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Bd. 3 Leistungsprozess*. 8., neubearb. und erw. Aufl. Stuttgart : Lucius und Lucius, 2002, S. 484–511.

[Land Sachsen-Anhalt 2010] Land Sachsen-Anhalt: *Unterrichtsorganisation an den Grundschulen*. Schulverwaltungsblatt Nr. 7/2010. Juni 2010.

[Laux 2007] Laux, Helmut: *Entscheidungstheorie*. 7., bearb. und erweiterte Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.

[Lawrie 1969] Lawrie, N.L.: An integer linear programming model of a school timetabling problem. In: *The Computer Journal* 12 (1969), Nr. 4, S. 307–316.

[Man u. a. 1999] Man, K. F. ; Tang, K. S. ; Kwong, S.: *Genetic Algorithms: Concepts and Designs*. London, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1999.

[Nissen 1994] Nissen, Volker: *Evolutionäre Algorithmen: Darstellung, Beispiele, betriebswirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten*. Wiesbaden : Deutscher Universitäts-Verlag, 1994.

[Ross u. a. 2003] Ross, Peter ; Hart, Emma ; Corne, Dave: genetic Algorithms and Timetabling. In: *Advances in Evolutionary Computing*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003 (Natural Computing Series, Part II), S. 755–771.

[Ruban 2008] Ruban, Arne: *Simultane Personalplanung bei integrierter Auftragsfolge*. München, Mehring : Rainer Kampp Verlag, 2008.

[Schaerf 1999] Schaerf, A.: A survey of Automated Timetabling. In: *Artificial Intelligence Review* 13 (1999), S. 87–127.

[Spengler 2004] Spengler, Thomas: Personaleinsatzplanung. In: *Handwörterbuch des Personalwesens*. 3., überarb. u. erg. Aufl. Stuttgart : Schäffer-Poeschel Verlag, 2004.

[Spengler 2006] SPENGLER, Thomas: Modellgestützte Personalplanung / Otto-von-Guericke Universiät Magdeburg. März 2006. – FEMM Working Paper Series, Working Paper No. 10.

[Stefano und Tettamanzi 2001] STEFANO, Calogera D. ; TETTAMANZI, Andrea G.: An Evolutionary Algorithm for Solving the School Time-Tabling Problem. In: *Applications of Evolutionary Computing*, Springer-Verlag, 2001 (LNCS 2037), S. 452–462.

[Tripathy 1984] TRIPATHY, Arabinda: School Timetabling - A Case in Large Binary Integer Linear Programming. In: *Management Science* 30 (1984), Nr. 12.

[Weare u. a. 1995] WEARE, Rupert ; BURKE, Edmund ; ELLIMAN, Dave: A Hybrid Genetic Algorithm for Highly Constrainted Timetabling Problems / University of Nottingham, School of Computer Science and Information Technology. 1995. – NOTTCS-TR-1995-8.

[Werner 2011] WERNER, Frank: Genetic Algorithms for Shop Scheduling Problems: A Survey / Otto-von-Guericke Universität Magdeburg. 2011. – FMA, Preprint Series 11-31.