Super TP AED2

Algoritmos y Estructuras de Datos II, DC, UBA.

1. Complejidad

1.1. Funciones polinomiales vs. Funciones exponenciales

(a) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $n \leq b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por inducción en n.

Caso Base $n = 1, b \in \mathbb{R} \ / \ b \geq 2$

$1 \leq b^1 = b \Leftrightarrow 1 \leq 2 \leq b$ al ser b mayor o igual a 2

Hipótesis Inductiva $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$n \leq b^n \Rightarrow n+1 \leq b^{n+1}$

$n \leq b^n \Leftrightarrow n+1 \leq b^n + 1$

Ahora quiero ver que $b^n + 1 \leq b^n\, b$

$b^n + 1 \leq b^n\, b \underbrace{\Leftrightarrow}_{b \neq 0} 1 + \frac{1}{b^n} \leq b$

$b \geq 2 \Leftrightarrow b^n \geq 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n}}$ Ahora quiero ver que $1 + \frac{1}{2^n} \leq b$

$n \geq 1 \Leftrightarrow 2^n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2 \leq b$

Entonces $\boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n} \leq b}$

Así queda demostrado que $n \leq n+1 \leq b^n + 1 \leq b^{n+1}$

(b) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $x \leq b^{x+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \underbrace{\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}}_{por definición} \wedge \lfloor x \rfloor \geq 0$

$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ Ya que la parte entera de x se define como el mayor entero menor o igual a x. Esto implica que $\lfloor x \rfloor + 1$ es necesariamente entero (no negativo) y necesariamente mayor a x (si fuera menor o igual a x, estaríamos contradiciendo la definición de la parte entera)

Sea $n = \lfloor x \rfloor + 1$, por lo demostrado anteriormente sabemos que $n \leq b^n$

Entonces $x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \leq b^{\lfloor x \rfloor + 1} \leq b^{x+1}$

(c) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $\frac{x}{k} \leq b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por lo demostrado anteriormente, $\frac{x}{k} \leq b'^{\frac{x}{k}+1}$ para alguna base $b' \geq 2$, ya que $\frac{x}{k} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea esa base b^k.

Entonces vale que $\frac{x}{k} \leq (b^k)^{\frac{x}{k}+1} = b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

(d) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $(\frac{x}{pk})^n \leq b^{n(\frac{x}{p}+k)}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y para todo $n, p \in \mathbb{N}$.

(pregunta para el profe que me corrija: no se podría tomar raíz enésima a ambos lado?)

Caso Base $\quad n = 1$

$\frac{x}{pk} \leq b^{\frac{x}{p}+k} \quad$ Sea $y = \frac{x}{x}$

$x \geq 0$, $p \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$

$\frac{y}{k} \leq b^{y+k}$ por lo demostrado en el punto c)

Hipótesis Inductiva $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$(\frac{y}{k})^n \leq b^{n(y+k)} \Rightarrow (\frac{y}{k})^{n+1} \leq b^{(n+1)(y+k)}$

$(\frac{y}{k})^n \frac{y}{k} \leq b^{n(y+k)}\, b^{y+k}$ por el Caso Base y por suponer P(n)

En otras palabras C.B $\wedge$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) (multiplicando sus respectivas desigualdades)

(e) Demostrar que para toda base $b \in \mathbb{R}$ y para todo exponente $p \in \mathbb{N}$ vale que $x^p \in O(b^x)$, vistas como funciones de $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por lo demostrado en d), y tomando $p = n$ (lo cual es válido porque valía para todo p y n naturales), vale que

$(\frac{x}{pk})^p \leq b^{x+pk} \Leftrightarrow \boxed{x^p \leq b^x (p\,k\,b^k)^p}$

Por otro lado, $x^p \in O(b^x) \Leftrightarrow \exists q, x_0 \in R_{\geq 0} / x \geq x_0 \Rightarrow x^p \leq q\,b^x$

Sea $q = (p\,k\,b^k)^p$, con $k \in \mathbb{N}/b^k \geq 2 \Leftrightarrow k \geq log_b(2)$ entonces q hace que la desigualdad valga para todo $x \geq 0$, en particular vale para $x_0 = 0$

1.2. Cálculo de complejidad mejor y peor caso

$T_{mejor}(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1)$
$= \Theta(1) + n\,\Theta(1)$
$= \Theta(n)$

$T_{peor}(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \Theta(1)$
$= \Theta(n) + \Theta(1) \sum_{i=0}^{n} (n - i)$
$= \Theta(n) + \Theta(1)(\sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i)$
$= \Theta(n) + \Theta(1)(n^2 - \frac{n(n+1)}{2})$
$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$ (*)
$= \Theta(n) + \Theta(n^2)$
$= \Theta(n^2)$

(*)$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in O(n^2)$ trivialmente, ya que la primer función es siempre menor
$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in \Omega(n^2) \Leftrightarrow \exists k, n_0 \geq 0/n \geq n_0 \Rightarrow \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq k\,n^2$
$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq k\,n^2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geq k$ Tomemos $k = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow 2 \leq n$ Entonces alcanza con tomar $n_0 = 2$

2. Invariante de representación y función de abstracción

(a) Escribir en castellano el invariante de representación.

1. e.inactivasVacías y e.inactivasNoVacías no tienen pestañas en común
2. el contenido de las pestañas en e.inactivasNoVacías no puede ser la secuencia vacía
3. e.seleccionada no está en e.inactivasVacías ni en e.inactivasNoVacías
4. los números de las pestañas deben ser los números del 0 al total de pestañas

(b) Escribir formalmente el invariante de representación.

Rep : $\widehat{estr} \longrightarrow$ bool

Rep(e) $\equiv$ true $\Longleftrightarrow$ ($\forall t$: tupla $\langle nro$: nat,$contenido$: string$\rangle$, n: nat)
$((t \in e.inactivasNoVacias \wedge n \in e.inactivasVacias) \Rightarrow$
$(\neg vacia?(t.contenido) \wedge$
$t.nro \neq e.seleccionada \wedge$
$n \neq t.nro \wedge$
$n \neq e.seleccionada))\wedge$
$(\forall i$: nat$)(0 \leq i \leq \#e.inactivasVacias + \#e.inactivasNoVacias +$
$1 \Rightarrow$
$(i = e.seleccionada \vee i \in e.inactivasVacias \vee$
$(\exists t$: tupla $\langle nro$: nat,$contenido$: string$\rangle)$
$(t \in e.inactivasNoVacias \wedge t.nro = i))$

(c) Escribir formalmente la función de abstracción.

Abs : $\widehat{estr}\ e \longrightarrow$ editor {Rep(e)}

Abs(e) $=_{\text{obs}}$ ed: editor | $\#pestañas(ed) = \#e.inactivasVacias + \#e.inactivasNoVacias +$
$1 \wedge$
$seleccionada?(ed, e.seleccionada)\wedge$
$(\forall t$: tupla $\langle nro$: nat,$contenido$: string$\rangle$, n: nat$)$
$((n \in e.inactivasVacias \Rightarrow vacia?(texto(ed, n))) \wedge$
$(t \in e.inactivasNoVacias \Rightarrow texto(ed, t.nro) = t.contenido))\wedge$

$texto(ed, e.seleccionada) = e.anteriores \& e.posteriores\wedge$

$posicionCursor(ed) = long(e.anteriores)$