Super TP AED2

Algoritmos y Estructuras de Datos II, DC, UBA.

1. Complejidad

1.1. Funciones polinomiales vs. Funciones exponenciales

(a) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $n \leq b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por inducción en n.

Caso Base $n = 1, b \in \mathbb{R} \;\; / \;\; b \geq 2$

$1 \leq b^1 = b \Leftrightarrow 1 \leq 2 \leq b$ al ser b mayor o igual a 2

Hipótesis Inductiva $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$n \leq b^n \Rightarrow n + 1 \leq b^{n+1}$

$n \leq b^n \Leftrightarrow n + 1 \leq b^n + 1$

Ahora quiero ver que $b^n + 1 \leq b^n\, b$

$b^n + 1 \leq b^n\, b \underbrace{\Leftrightarrow}_{b \neq 0} 1 + \frac{1}{b^n} \leq b$

$b \geq 2 \Leftrightarrow b^n \geq 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n}}$ Ahora quiero ver que $1 + \frac{1}{2^n} \leq b$

$n \geq 1 \Leftrightarrow 2^n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2 \leq b$

Entonces $\boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n} \leq b}$

Así queda demostrado que $n \leq n + 1 \leq b^n + 1 \leq b^{n+1}$

(b) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $x \leq b^{x+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \underbrace{\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}}_{por definición} \wedge \lfloor x \rfloor \geq 0$

$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ Ya que la parte entera de x se define como el mayor entero menor o igual a x. Esto implica que $\lfloor x \rfloor + 1$ es necesariamente entero (no negativo) y necesariamente mayor a x (si fuera menor o igual a x, estaríamos contradiciendo la definición de la parte entera)

Sea $n = \lfloor x \rfloor + 1$, por lo demostrado anteriormente sabemos que $n \leq b^n$

Entonces $x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \leq b^{\lfloor x \rfloor + 1} \leq b^{x+1}$

(c) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $\frac{x}{k} \leq b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por lo demostrado anteriormente, $\frac{x}{k} \leq b'^{\frac{x}{k}+1}$ para alguna base $b' \geq 2$, ya que $\frac{x}{k} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea esa base b^k.

Entonces vale que $\frac{x}{k} \leq (b^k)^{\frac{x}{k}+1} = b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

(d) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $(\frac{x}{pk})^n \leq b^{n(\frac{x}{p}+k)}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y para todo $n, p \in \mathbb{N}$.

Caso Base $\quad n = 1$

$\frac{x}{pk} \leq b^{\frac{x}{p}+k}$ Sea $y = \frac{x}{x}$

$x \geq 0$, $p \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$

$\frac{y}{k} \leq b^{y+k}$ por lo demostrado en el punto c)

Hipótesis Inductiva $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$(\frac{y}{k})^n \leq b^{n(y+k)} \Rightarrow (\frac{y}{k})^{n+1} \leq b^{(n+1)(y+k)}$

$(\frac{y}{k})^n \frac{y}{k} \leq b^{n(y+k)}\, b^{y+k}$ por el Caso Base y por suponer P(n)

En otras palabras C.B $\wedge$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) (multiplicando sus respectivas desigualdades)

(e) Demostrar que para toda base $b \in \mathbb{R}$ y para todo exponente $p \in \mathbb{N}$ vale que $x^p \in O(b^x)$, vistas como funciones de $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por lo demostrado en d), y tomando $p = n$ (lo cual es válido porque valía para todo p y n naturales), vale que

$(\frac{x}{pk})^p \leq b^{x+pk} \Leftrightarrow \boxed{x^p \leq b^x (p\,k\,b^k)^p}$

Por otro lado, $x^p \in O(b^x) \Leftrightarrow \exists q, x_0 \in R_{\geq 0} / x \geq x_0 \Rightarrow x^p \leq q\, b^x$

Sea $q = (p\,k\,b^k)^p$, con $k \in \mathbb{N} / b^k \geq 2 \Leftrightarrow k \geq log_b(2)$ entonces q hace que la desigualdad valga para todo $x \geq 0$, en particular vale para $x_0 = 0$

1.2. Cálculo de complejidad mejor y peor caso

$T_{mejor}(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1)$
$= \Theta(1) + n\,\Theta(1)$
$= \Theta(n)$

$T_{peor}(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \Theta(1) + \Theta(1) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \Theta(1)$
$= \Theta(n) + \Theta(1) \sum_{i=0}^{n} (n - i)$
$= \Theta(n) + \Theta(1)(\sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i)$
$= \Theta(n) + \Theta(1)(n^2 - \frac{n(n+1)}{2})$
$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$ (*)
$= \Theta(n) + \Theta(n^2)$
$= \Theta(n^2)$

(*)$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in O(n^2)$ trivialmente, ya que la primer función es siempre menor
$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in \Omega(n^2) \Leftrightarrow \exists k, n_0 \geq 0 / n \geq n_0 \Rightarrow \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq k\,n^2$
$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq k\,n^2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geq k$ Tomemos $k = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow 2 \leq n$ Entonces alcanza con tomar $n_0 = 2$

2. Invariante de representación y función de abstracción