# Super TP AED2

Algoritmos y Estructuras de Datos II, DC, UBA.

## 1. Complejidad

### 1.1. funciones polinomiales vs. funciones exponenciales

**(a) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $n \leq b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por inducción en n.**

**Caso Base** $n = 1, b \in \mathbb{R} \ / \ b \geq 2$
$1 \leq b^1 = b \Leftrightarrow 1 \leq 2 \leq b$ al ser b mayor o igual a 2

**Hipótesis Inductiva** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
$n \leq b^n \Rightarrow n+1 \leq b^{n+1}$
$n \leq b^n \Leftrightarrow n+1 \leq b^n + 1$
Ahora quiero ver que $b^n + 1 \leq b^n * b$
$b^n + 1 \leq b^n * b \underbrace{\Leftrightarrow}_{b \neq 0} 1 + \frac{1}{b^n} \leq b$

$b \geq 2 \Leftrightarrow b^n \geq 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n}}$ Ahora quiero ver que $1 + \frac{1}{2^n} \leq b$
$n \geq 1 \Leftrightarrow 2^n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2 \leq b$
Entonces $\boxed{1 + \dfrac{1}{b^n} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n} \leq b}$
Así queda demostrado que $n \leq n+1 \leq b^n + 1 \leq b^{n+1}$

**(b) Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 2$. Demostrar que $x \leq b^{x+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.**

$x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \underbrace{\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}}_{por definición} \wedge \lfloor x \rfloor \geq 0$

$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ Ya que la parte entera de x se define como el mayor entero menor o igual a x. Esto implica que $\lfloor x \rfloor + 1$ es necesariamente entero (no negativo) y necesariamente mayor a x (si fuera menor o igual a x, estaríamos contradiciendo la definición de la parte entera)

Sea $n = \lfloor x \rfloor + 1$, por lo demostrado anteriormente sabemos que $n \leq b^n$
Entonces $x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \leq b^{\lfloor x \rfloor + 1} \leq b^{x+1}$

**(c) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $\frac{x}{k} \leq b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.**

Por lo demostrado anteriormente, $\frac{x}{k} \leq b'^{\frac{x}{k}+1}$ para alguna base $b' \geq 2$, ya que $\frac{x}{k} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea esa base $b^k$.
Entonces vale que $\frac{x}{k} \leq (b^k)^{\frac{x}{k}+1} = b^{x+k}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

**(c) Sea $b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ tal que $b > 1$ y $b^k \geq 2$. Demostrar que $(\frac{x}{pk})^n \leq b^{n(\frac{x}{p}+k)}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y para todo $n, p \in \mathbb{N}$.**

# 2. Invariante de representación y función de abstracción