Trabalho Extra

Pedro Delfino

February 14, 2018

Primeira Questão [AS, exercício 3]

Sejam a, b, c, r constantes reais com $r \neq 0$, e considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, a\sin t + b\cos t + c)$$

a) Prove que a curva é plana.

b) Determine se é uma curva circular, isto é, se ela coincide com o arco de uma circuferência.

Proof.

Seja: $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, a\sin t + b\cos t + c)$

Primeira derivada: $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t, a\cos t - b\sin t)$

Segunda derivada: $\gamma''(t) = (-r\cos t, -r\sin t, -a\sin t - b\cos t)$

Terceira derivada: $\gamma'''(t) = (r\sin t, -r\cos t, -a\cos t + b\sin t)$

A torção pode ser expressa por: $\tau = \dfrac{(r' \times r'') \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^2}$

A fórmula acima não exige que a curva esteja parametrizada pelo cumprimento de arco

Desenvolvendo os cálculos do numerador

O produto vetorial das duas primeiras derivadas é: $\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (-rb, -ra, r^2)$

O produto escalar é o produto vetorial vezes a terceira derivada:

$(-rb, -ra, r^2) \cdot \gamma'''(t)$

$(-rb, -ra, r^2) \cdot (r\sin t, -r\cos t, -a\cos t + b\sin t) = 0$

O numerador é zero. Logo, a torção é zero.

$\tau = 0$

Se a torção é zero, a curva é plana.

□

Proof.

A curvatura pode ser expressa por: $\kappa = \dfrac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$

A fórmula acima não exige que a curva esteja parametrizada pelo cumprimento de arco

A curvatura constante indica que a curva é circular

O produto vetorial das duas primeiras derivadas é: $\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (-rb, -ra, r^2)$

O módulo do produto vetorial: $||\gamma' \times \gamma''\| = \sqrt{r^2b^2 + r^2a^2 + r^4}$

Como pode ser visto, o numerador só envolve constantes

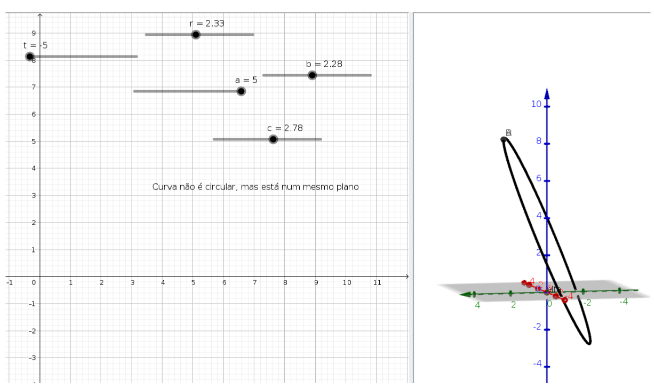
O denominador, por sua vez, é: $||\gamma'||^3$

$||\gamma'\|^3 = (\sqrt{r^2 + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - ab2\cos t \sin t})^3$

O denominador não é constante, estando em função de t. Portanto, $\gamma(t)$ não é uma curva circular

$\square$

Preview:



Simulação no geogebra disponível em https://github.com/pdelfino/differential-geometry/tree/master/extra-hw

Segunda Questão [Lista 5, exercício 4]

Provar que a interseção de uma quantidade finita de abertos é um conjunto aberto.

Proof.

Seja Λ uma família muito grande de conjuntos abertos u

$\Lambda = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_\lambda\}$

Seja x um ponto na interseção de todos esse conjuntos abertos

$x \in u_1, u_2, u_3, ..., u_\lambda$

Como todos os conjuntos u_λ são abertos, existem valores:

$r_1, r_2, r_3, ..., r_\lambda > 0$

De modo que

$B(x, r_1) \subseteq u_1, B(x, r_2) \subseteq u_2, ..., B(x, r_\lambda) \subseteq u_\lambda$

Seja ε um número pequeno, maior que zero e definido pela função mínimo

$\varepsilon = min\{r_1, r_2, r_3, ..., r_\lambda\}$

Assim, existe uma bola aberta contida na interseção:

$B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\lambda} u_i$

Portanto, a interseção de uma quantidade finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

□

Essa questão não exige simulação no geogebra.

Terceira Questão [Lista 1, exercício 12]

Seja $\alpha(t)$ uma curva regular que não passa pela origem. Se $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo da origem, mostre que o vetor posição $\alpha(t_0)$ é ortogonal a $\alpha'(t_0)$

Proof.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma curva regular que não passa pela origem

$\alpha(t_0)$: o ponto do traço de α mais próximo da origem

Se $\alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$

Então $\alpha(t_0)\cdot \alpha'(t_0) = 0$

A função $t \to ||\alpha(t)||^2$ tem um mínimo em t_0

Logo, t_0 é um ponto crítico, isto é

$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \qquad ||\alpha(t)||^2 = 0$

Então, $2\alpha'(t_0)\alpha(t_0) = 0$

$\alpha'(t_0)\alpha(t_0) = 0$

$\square$

Essa questão não exige simulação no geogebra.

Quarta Questão [Lista 3, exercício 7]

Demonstrar que a curva $\alpha(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$ **está incluída num plano**

Proof.

Seja a equação geral do plano definida por:

$a(x) + b(y) + c(z) = d$

Inserido os parâmetros:

$a(t) + b(\dfrac{1+t}{t}) + c(\dfrac{1-t^2}{t}) = d$

$a(t^2) + b(1+t) + c(1-t^2) = d(t)$

Reorganizando:

$t^2(a-c) + t(b-d) + (b+c) = 0$

Para essa igualdade ser verdadeira é preciso que:

$a - c = 0$

$b - d = 0$

$b + c = 0$

Os coeficientes podem ficar em função de "a"

$a = c = -b = -d$

$a(x) + b(y) + c(z) = d$

$a(x) + (-a)(y) + (a)(z) = (-a)$

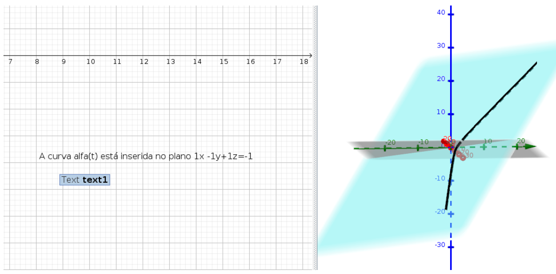
Dividindo tudo por "a"

$1x - 1y + 1z = -1$

$\square$

O vetor normal que define o plano em que esta curva está inserida é (1,-1,1)

Preview:



Simulação no geogebra disponível em https://github.com/pdelfino/differential-geometry/tree/master/extra-hw

Quinta Questão [Lista 4, exercício 13]

Provar que a evoluta da elipse $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ **com** $a, b > 0$ **é a astróide:** $\rho(t) = (\frac{(a^2-b^2)\cos^3 t}{a}, \frac{(b^2-a^2)\sin^3 t}{b})$

Observação: Considerar que mesmo quando β **não é parametrizada pelo comprimento de arco,** $\alpha(\mathbf{t}){=}\beta(\mathbf{t}){+}\frac{n(t)}{\kappa}$ **é a evoluta de** β**.**

Proof.

Seja a curvatura de ρ:

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

Seja o vetor normal:

$$n(t) = \frac{(-bcost, -asent)}{(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{\frac{1}{2}}}$$

Assim, $\beta(t)$

$$\beta(t) = (acost, bsent) + \frac{a^2sen^2t + b^2cos^2t}{ab}(-bcost, -asent)$$

$$\beta(t) = (\frac{(a^2-b^2)cos^3t}{a}, \frac{(b^2-a^2)sin^3t}{b})$$

Há de ser ressaltado que o traço da evoluta é descrito pela astroide:

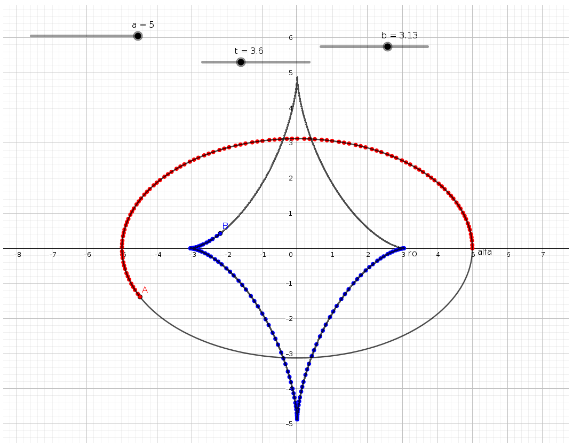
$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$\beta(t)$ não é regular nos pontos para os seguintes valores de t

$$t = 0 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

□

Preview:



Simulação no geogebra disponível em https://github.com/pdelfino/differential-geometry/tree/master/extra-hw

Sexta Questão [Lista 8, exercício 3]

Mostre que a quádrica $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$ é uma superfície, exibindo um atlas.

Proof.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}/x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z - 7 = 0\}$

Assim: $f^{-1}(0) = S$

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

$\nabla f = (2x + 6, 4y - 4, 3)$

Assim:

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}$

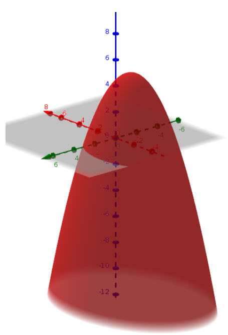
$\nabla f \neq (0, 0, 0)$

Logo, pelo teorema das superíficies de nível, S é uma superfície regular

Atlas $\sigma : (x, y) \to (x, y, -\frac{x^2}{3} - \frac{2y^2}{3} - 2x + \frac{4}{3}y + \frac{7}{3})$

□

Preview:



Simulação no geogebra disponível em https://github.com/pdelfino/differential-geometry/tree/master/extra-hw