CURVAS E SUPERFÍCIES 2017

M. Soledad Aronna, EMAp/FGV

2° Lista de Exercícios

(1) A *cissóide de Diocles* é uma curva planar com coordenadas polares

$$r = 2\sin\theta\tan\theta, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Desenhar esta curva e achar uma parametrização da forma $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

(2) Lembrar a *astroide* da Lista 1 com o raio maior a igual a 1. Provar que o seu traço é o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\},$$

(3) Demonstrar que $s(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2+1}$ é uma mudança de parâmetro que tranforma o intervalo $(0,\infty)$ no intervalo $(0,1)$.

(4) a. Mostrar que a função $\lambda : (0,+\infty) \to (0,1)$ definida por $\lambda(t) := \dfrac{t^2}{t^2+1}$ é uma mudança de parâmetro.

b. Mostrar que a função $\lambda : (-1,1) \to (-\infty,+\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.

c. Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

(5) Obter o comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (3\cosh 2t, 3\sinh 2t, 6t), \quad t \in [0,\pi].$$

(6) Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento de arco.

(7) Parametrizar o gráfico da função $y = f(x)$, com $x \in [a,b]$, e provar que seu comprimento de arco está dado pela fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

(8) Provar que a curva

$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2}\right)$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = \left(\frac{2\cos t}{1+\sin t}, 1+\sin t\right), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

(9) Provar que a curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t\sin(\pi/t)), & t \in (0,1], \\ (0,0), & t = 0, \end{cases}$$

tem comprimento infinito.

Dica: Provar que existe uma sequência de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset (0,1]$ *tal que* $\displaystyle\sum_k \int_{a_k}^{b_k} |\alpha'(t)|\mathrm{d}t = \infty$.