CURVAS E SUPERFÍCIES

M. Soledad Aronna, EMAp/FGV

1° Lista de Exercícios. Ano 2017

(1) Encontrar uma curva (parametrizada) $\alpha(t)$ em $\mathbb{R}^2$, cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$, de maneira que $\alpha(t)$ percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$.

(2) Parametrizar um círculo com centro no ponto (a, b).

(3) Parametrizar a elipse dada pela curva de nível

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(4) Desenhar a curva $\alpha : \mathbb{R} \to (a\cos t, \sin t, bt)$, com $a > 0$, $b < 0$.

(5) Provar a *Desigualdade triangular:*

$$|u + v| \leq |u| + |v|, \qquad \text{para todo par } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(6) Provar que para todo par $u, v \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $u.v = |u|\,|v|\cos\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos segmentos Ou e Ov,

(7) Demonstrar a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:**

$$|u.v| \leq |u|\,|v|, \qquad \text{para todo par } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(8) Desenhar a curva $\alpha : [0, 2\pi] \to (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ com $a > 0$.

(9) Escrever a parametrização da cicloide gerada por um círculo de raio $\frac{a}{4}$ que rola dentro de um círculo de raio a (segunda aula). O círculo pequeno tem que rolar uma volta completa e voltar à posição inicial. Qual é a relação com a curva do exercício anterior?

(10) Seja P um ponto de uma circunferência $\mathcal{C}$ (no plano XOY) de raio $a > 0$ e centro $(0, a)$ e seja Q o ponto de interseção da recta $y = 2a$ com a reta que passa pela origem e por P. Seja ainda R o ponto de interseção da reta horizontal que passa por P com a reta vertical que passa por Q.

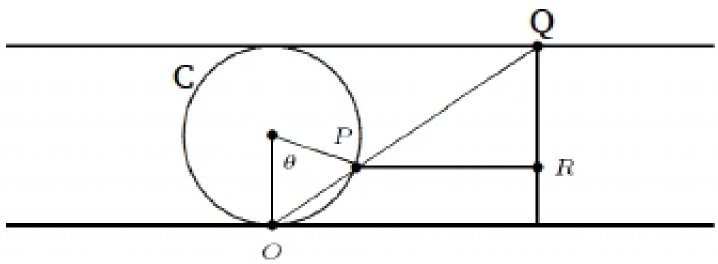

Figura 1. Construção curva de Agnesi

À medida que P se move ao longo da circunferência $\mathcal{C}$, o ponto R descreve uma curva chamada *curva de Agnesi*. Determine uma parametrização deste curva, e faça o seu desenho.

(11) Ou *limaçon* (ou *caracol de Pascal*) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = \big((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Faça o desenho desta curva. Observe que o ponto $(0, 0)$ pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

(12) Seja $\alpha(t)$ uma curva regular que não passa pela origem. Se $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo da origem, mostre que o vetor posição $\alpha(t_0)$ é ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

(13) Exercício 2, página 7 do livro [1].

(14) Exercício 6, página 8 do livro [1].

Referências

[1] Manfredo Perdigao Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, volume 2. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1976.