Soluções dos exercícios de Análise do livro de Elon Lages Lima:Curso de análise vol.1.

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

29 de dezembro de 2017

Sumário

Capítulo 1

Soluções-Curso de análise vol.1

Esse texto ainda não se encontra na sua versão final, sendo, por enquanto, constituído apenas de anotações informais. Sugestões para melhoria do texto, correções da parte matemática ou gramatical eu agradeceria que fossem enviadas para meu Email **rodrigo.uff.math@gmail.com.**

Se houver alguma solução errada, se quiser contribuir com uma solução diferente ou ajudar com uma solução que não consta no texto, também peço que ajude enviando a solução ou sugestão para o email acima, colocarei no texto o nome da pessoa que tenha ajudado com alguma solução. Espero que esse texto possa ajudar alguns alunos que estudam análise pelo livro do Elon.

1.1 Notações

Denotamos (x_n) uma sequência $(x_1, x_2, \cdots)$. Uma n upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ podemos denotar como $(x_k)_1^n$.

O conjunto de valores de aderência de uma sequência (x_n) iremos denotar como $A[x_n]$.

Usaremos a abreviação PBO para princípio da boa ordenação.

Denotamos $f(x+1) - f(x) = \Delta f(x)$.

Usando a notação $Qx_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

A^c para o complementar do conjunto A.

1.2 Capítulo 1

Questão 1

✍ **Propriedade 1.** Dados A e B, seja X com as propriedades

- $A \subset X$, $B \subset X$.
- Se $A \subset Y$ e $B \subset Y$ então $X \subset Y$.

Nessas condições $X = A \cup B$, a união $A \cup B$ é o menor conjunto com subconjuntos A e B.

Demonstração.
A primeira condição implica que $A \cup B \subset X$. A segunda condição com $Y = A \cup B$ implica $X \subset A \cup B$. Das duas segue que $A \cup B = X$.

Questões 2,3 **e** 4

✍ **Propriedade 2.** $A \cap B$ é o menor subconjunto de A e B.

Seja X com

- $X \subset A$ e $X \subset B$
- Se $Y \subset A$ e $Y \subset B$ então $Y \subset X$.

Nessas condições $X = A \cap B$.

Demonstração. Da primeira condição temos que $X \subset A \cap B$. Da segunda tomando $Y = A \cap B$, que satisfaz $Y \subset A$ e $Y \subset B$, então

$$A \cap B \subset X$$

logo pelas duas inclusões $A \cap B = X$.

✍ **Propriedade 3.** Sejam $A, B \subset E$. então

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c.$$

Demonstração. Temos que $E = B \cup B^c$ onde $B \cap B^c = \emptyset$.

$\Rightarrow$).

Suponha por absurdo que $A \cap B = \emptyset$ e não vale $A \subset B^c$, então existe $a \in A$ tal que $a \notin B^c$ e por isso $a \in B$, mas daí $A \cap B \neq \emptyset$ absurdo.

$\Leftarrow$).

Suponha $a \in A \cap B$ então $a \in A \subset B^c$ e $a \in B$ o que é absurdo pois B e B^c são disjuntos.

Corolário 1. Vale que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$.

Pois

$$A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow$$

pelo resultado anterior

$$B^c \subset \underbrace{(A^c)^c}_{A} \Leftrightarrow A^c \subset B.$$

Corolário 2. Sejam $A, B \subset E$. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

Sabemos que $A \cap W = \emptyset \Leftrightarrow A \subset W^c$ por resultado que já mostramos, tomando $W = B^c$ temos o resultado que desejamos.

Questão 5

☞ **Exemplo 1.** Dê exemplo de conjuntos A, B, C tais que

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C).$$

Sejam $A = B \neq \emptyset$ e C tal que $C \cap A = \emptyset$. Então

$$(A \cup B) \cap C = A \cap C = \emptyset \neq A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A.$$

Questão 6

✍ **Propriedade 4.** Se $A, X \subset E$ tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$ então $X = A^c$.

Demonstração. Pelo que já mostramos $A \cap X = \emptyset$ então $X \subset A^c$. De $A \cup X = E$ temos $A^c \subset X$, como temos $A^c \subset X$ e $X \subset A^c$ então tem-se a igualdade $X = A^c$.

Questão 7

✍ **Propriedade 5.** Se $A \subset B$ então $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A \ \forall \ C$.

Se existe C tal que $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ então $A \subset B$.

Demonstração. Vamos mostrar a primeira afirmação. Seja $x \in B \cap (A \cup C)$, então $x \in B$ e $x \in A \cup C$. Se $x \in A$ então $x \in (B \cap C) \cup A$ e terminamos, se $x \notin A$ então $x \in B$ e $x \in C$ e terminamos novamente pois é elemento de $B \cap C$.

Agora a outra inclusão. Se $x \in (B \cap C) \cup A$ então $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$ terminamos. Se $x \notin A$ então $x \in B \cap C$ e daí pertence à $B \cap (A \cup C)$ como queríamos demonstrar.

Agora a segunda propriedade. Suponha por absurdo que $A \not\subset B$ então existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, tal x pertence à $(B \cap C) \cup A$ porém não pertence à $B \cap (A \cup C)$ portanto não temos a igualdade, absurdo!.

Questão 8

✍ **Propriedade 6.** Vale que $A = B \Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$.

Demonstração.

$\Leftarrow$). Se $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ então $A \cap B^c = \emptyset$ e $A^c \cap B = \emptyset$, logo por resultados que já provamos $A \subset B$ da primeira relação e $B \subset A$ da segunda, portanto $A = B$.

$\Rightarrow$). Se $A = B$ então $A \cap B^c = A^c \cap B = \emptyset$.

Questão 9

✍ **Propriedade 7.** Vale que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Demonstração. Vamos provar as duas inclusões.

Seja $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Tal união é disjunta, pois se houvesse um em ambos conjuntos, então pelo primeiro $x \in A, x \notin B$ pelo segundo $x \in B, x \notin A$ absurdo.

Se $x \in A \backslash B$ logo $x \in A, x \notin B$ portanto $x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B$ logo $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, o caso de $x \in (B \backslash A)$ também implica inclusão por simetria (trocar A por B não altera).

Se $x \in A \cup B \setminus A \cap B$ então $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \notin A \cap B$ logo $x \notin A$ e B simultaneamente, isso significa que $x \in A$ ou $x \in B$ exclusivamente logo $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Questão 10

✍ **Propriedade 8.** Se

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$$

então $B = C$, isto é, vale a lei do corte para $A \Delta B = A \Delta C$.

Demonstração. Suponha que $B \neq C$, suponha sem perda de generalidade que $x \in B, x \notin C$. Vamos analisar casos.

Se $x \notin A$ então $x \notin (A \cup C) \setminus (A \cap C)$ porém $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Se $x \in A$ então $x \notin A \cup B \setminus (A \cap B)$ e $x \in (A \cup C) \setminus (A \cap C)$, portanto não vale a igualdade dos conjuntos.

Logo devemos ter $B = C$.

Questão 11

✍ **Propriedade 9.** Valem as seguintes propriedades do produto cartesiano .

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

4. Se $A \subset A'$ e $B \subset B'$ então $A \times B \subset A' \times B'$.

Demonstração.

1. Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, temos que $y \in C$ se $x \in A$ então $(x, y) \in (A \times C)$, se $x \in B$ então $(x, y) \in (B \times C)$ então vale $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$. Agora a outra inclusão.

   Temos que $(A \times C) \subset (A \cup B) \times C$ pois um elemento do primeiro é da forma (x, y) com $x \in A$ e $y \in C$ que pertence ao segundo conjunto, o mesmo para $(B \times C)$.

2. Tomamos $(x, y) \in (A \cap B) \times C$, então $x \in A$ e $x \in B$, $y \in C$, logo $(x, y) \in A \times C$ e $(B \times C)$ provando a primeira inclusão, agora a segunda.

   $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ então $x \in A$ e B, $y \in C$ logo $(x, y) \in (A \cap B) \times C$.

3. Sendo $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$ então $x \in A, x \notin B$ e $y \in C$ logo $(x, y) \in (A \times C)$ e não pertence à $B \times C$ pois para isso seria necessário $x \in B$ o que não acontece. Agora a outra inclusão, se $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$ então $x \in A$ e $y \notin C$ porém x não pode pertencer à B pois estão sendo retirados elementos de $B \times C$ então vale a outra inclusão.

4. Seja $(x, y) \in A \times B$ então pelas inclusões $A \subset A'$ e $B \subset B'$ temos $x \in A'$ e $y \in B'$ portanto $(x, y) \in A' \times B'$.

Questão 12

✍ **Propriedade 10.** Seja $f : A \to B$, então valem

1. $$f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$$

   X, Y subconjuntos de A.

2. Se f for injetiva então $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Demonstração.

1. Seja $z \in f(X) \setminus f(Y)$ então $z = f(x)$ e não existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$ então $z \in f(X \setminus Y)$ pois é imagem de um elemento $x \in X \setminus Y$.

2. Já sabemos que vale a inclusão $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$. Vamos provar agora a outra inclusão $f(X \setminus Y) \subset f(X) \setminus f(Y)$. Seja $z \in f(X \setminus Y)$ então existe $x \in X \setminus Y$ portanto $x \in X$ e $x \notin Y$ tal que $f(x) = z$. Se $z \in f(Y)$ então existiria $y \in Y$ tal que $f(y) = z$ mas como f é injetora $x = y$ o que contraria $x \in X \setminus Y$, logo vale a outra inclusão e o resultado fica provado .

Questão 13

✍ **Propriedade 11.** $f : A \to B$ é injetora $\Leftrightarrow f(A \setminus X) = f(A) \setminus f(X)\ \forall\, X \subset A$.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Já fizemos na propriedade anterior.

$\Leftarrow$). Suponha por absurdo que f não é injetiva então existem $a \neq x$ tais que $f(x) = f(a)$, seja $X = \{x\}$, vale que $f(a) \in f(A \setminus X)$ pois $a \in A, a \notin X = \{x\}$ porém $f(a) \notin f(A) \setminus f(X)$ então não vale a igualdade, o que é absurdo.

Questão 14

✍ **Propriedade 12.** Dada $f : A \to B$ então

1. $\forall\, X \subset A$ temos $X \subset f^{-1}(f(X))$.

2. f é injetora $\Leftrightarrow f^{-1}(f(X)) = X\ \forall\, X \subset A$.

Demonstração.

1. $f^{-1}(f(X))$ é o conjunto dos elementos $x \in A$ tal que $f(x) \in f(X)$ então vale claramente que $X \subset f^{-1}(f(X))$, pois dado $a \in X$ tem-se que $f(a) \in f(X)$.

2. $\Rightarrow$). Suponha f injetora, já sabemos que $X \subset f^{-1}(f(X))$ pelo item anterior, vamos provar agora que $f^{-1}(f(X)) \subset X$ suponha por absurdo que exista $y \notin X$ tal que $f(y) \in f(X)$, $f(y) = f(x)$ para $y \notin X$ e $x \in X$, então f não é injetora o que contraria a hipótese então deve valer a inclusão que queríamos mostrar e portanto a igualdade dos conjuntos.

$\Leftarrow$). Suponha que $f^{-1}f(X) = X$, $\forall\ X \subset A$, vamos mostrar que f é injetora. Suponha que f não é injetora então existem $x \neq y$ tais que $f(x) = f(y)$, sendo $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ daí $f^{-1}f(X) \not\subset X$ pois $Y \subset f^{-1}f(X)$, $Y \not\subset X$. O que é absurdo então f é injetora.

Questão 15

✍ **Propriedade 13.** Seja $f : A \to B$, então vale que

1. Para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.

2. f é sobrejetiva $\Leftrightarrow$, $f(f^{-1}(Z)) = Z\ \forall\ Z,\ Z \subset B$.

Demonstração.

1. $f^{-1}(Z)$ é subconjunto de A que leva elemento em Z por f, então é claro que a imagem de tal conjunto por f está contida em Z.

2. $\Rightarrow$) Suponha que f seja sobrejetiva. Já sabemos que para qualquer função f vale que $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$, em especial vale para f sobrejetiva, temos que provar que se f é sobrejetiva, vale a outra inclusão $Z \subset f(f^{-1}(Z))$.

   Seja $z' \in Z$ arbitrário então, existe $x \in A$ tal que $f(x) = z'$, pois f é sobrejetora , daí $x \in f^{-1}(Z)$, pois tal é o conjunto de A que leva elementos em Z, mas isso significa também que $Z \subset f(f^{-1}(Z))$, pois um $z' \in Z$ arbitrário é imagem de elemento de $f^{-1}(Z)$, como queríamos demonstrar.

   $\Leftarrow$). Suponha que vale $f(f^{-1}(Z)) = Z$, $\forall\ Z \subset B$, vamos mostrar que $f : A \to B$ é sobrejetiva . Seja $y \in B$ qualquer, tomamos $Z = \{y\}$, temos que $f(f^{-1}(Z)) = Z$, em especial $Z \subset f(f^{-1}(Z))$, portanto $f(f^{-1}(Z))$ não é vazio e daí $f^{-1}(Z)$ também não é vazio, sendo esse último o conjunto dos elementos $x \in A$ tais que $f(x) = z$, logo f é sobrejetiva, pois $z \in Z$ foi um elemento arbitrário tomado no contradomínio é imagem de pelo menos um elemento de A.

1.3 Capítulo 2-Conjuntos finitos, Enumeráveis e não-enumeráveis

Questão 1

Axioma 1. Existe uma função $s : N \to N$ injetiva, chamada de função sucessor, o número natural $s(n)$ é chamado sucessor de n.

Corolário 3. Como s é uma função, então o sucessor de um número natural é único, isto é, um número natural possui apenas um sucessor.

Axioma 2. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro natural, esse número simbolizamos por 1.

Axioma 3 (Axioma da indução). Dado um conjunto $A \subset N$, se $1 \in A$ e $\forall\, n \in A$ tem-se $s(n) \in A$ então $A = N$.

Propriedade 14. Supondo os axiomas 1 e 2 então o axioma 3 é equivalente a proposição: Para todo subconjunto não vazio $A \subset N$ tem-se $A \setminus S(A) \neq \emptyset$.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Supondo o axioma (3) válido. Suponha por absurdo que exista $A \neq \emptyset$, $A \subset N$ tal que $A \setminus S(A) = \emptyset$ então $A \subset S(A)$, isto é, $\forall\ x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x = s(y)$. Sabemos que $1 \notin A$, pois se não $1 \in A \setminus S(A)$. Se $n \notin A$, vamos mostrar que $s(n) \notin A$. Se fosse $s(n) \in A$, chegaríamos em uma contradição com $A \subset S(A)$, pois deveria haver $y \in A$ tal que $s(y) = s(n)$ e por injetividade seguiria $y = n \in A$, o que contraria a hipótese, logo $S(n) \notin A$, A é vazio pois não contém nenhum número natural, mas consideramos que A não é vazio como hipótese, absurdo!.

$\Leftarrow$).

Pelo axioma 2 temos que 1 é o único elemento de $N \setminus S(N)$, pelo axioma 1 temos que $S(N) \subset N$ daí temos $N = \{1\} \cup S(N)$ o que implica $1 \in A, \forall\ n \in N\ s(n) \in A \Leftrightarrow A = N$.

Questão 2

✍ **Propriedade 15.** Dados m e n naturais então existe x natural tal que

$$x.n > m.$$

Demonstração. Vale $n \geq 1$ daí multiplicando por $m+1$ segue $(m+1)n \geq m+1 > m$ logo $(m+1)n > n$.

Questão 3

✍ **Propriedade 16.** Seja $n_0 \in N$. Se $A \subset N$ tal que $n_0 \in A$ e $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ então todo $x \in N$ com $x \geq a$ pertence à A.

Demonstração. Se $a = 1$ nada temos a fazer pois $A = N$. Se $a > 1$ então $a = b+1$ é sucessor de b. Vamos mostrar que $b+n \in A\ \forall\ n \in N$. Sabemos que $b+1 \in A$. Supondo que $b+n \in A$ então $b+(n+1) \in A$ daí por indução segue que $b+n \in A\ \forall\ n \in N$. Lembrando que $x > b$ significa que existe p natural tal que $b+p = x$, como $b+p \in A\ \forall\, p \in N$ então $x \in A$. Outro fato que usamos é que se $x > b$ então $x \geq b+1 = a$ pois não existe natural entre b e $b+1$, $b \in N$.

Questão 5

Definição 1 (Antecessor). $m \in N$ é antecessor de $n \in N$ quando $m < n$ mas não existe $c \in N$ tal que $m < c < n$.

✍ **Propriedade 17.** 1 não possui antecessor e qualquer outro número natural possui antecessor.

Demonstração. Não vale $m < 1$ para algum natural m, logo 1 não possui antecessor. Agora para todo outro $n \in N$ vale $n > 1$ logo existe $p \in N$ tal que $p+1 = n$, vamos mostrar que $p = m$ é o antecessor de n. Vale $p < p+1$, logo a primeira condição é satisfeita, a segunda condição também é satisfeita pois não existe $c \in N$ tal que $p < c < p+1$. Vamos mostrar agora que existe um único antecessor. Suponha existência de dois antecessores m e m' distintos então existe um deles que é o maior, digamos m', daí $m < m'$ e $m' < n$ por transitividade segue $m < m' < n$ o que contraria a definição de antecessor, então existe um único.

Questão 6

Questão 6 a)

✍ **Propriedade 18.** Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração. Por indução sobre n. Para $n = 1$ a igualdade vale pois

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(2)}{2}.$$

Supondo a validade para n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

vamos provar para $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por definição de somatório temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(1+\frac{n}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

onde usamos a hipótese da indução $\square$.

Questão 6 b)

✍ **Propriedade 19.** Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Demonstração. Por indução sobre n. Para $n = 1$ temos

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2.1 - 1 = 1 = 1^2.$$

supondo a validade para n,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2.$$

Usando a definição de somatório e hipótese da indução tem-se

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \square.$$

Questão 6 c)

☞ **Exemplo 2.** Mostrar por indução que

$$(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1.$$

Para $n = 1$ temos

$$(a-1)\sum_{k=0}^{1} a^k = (a-1)(a+1) = a^2 - 1.$$

Supondo que $(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1$ vamos provar que $(a-1)\sum_{k=0}^{n+1} a^k = a^{n+2} - 1$. Por definição de somatório e pela hipótese da indução temos

$$(a-1)\sum_{k=0}^{n+1} a^k = (a-1)a^{n+1} + (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+2} - a^{n+1} + a^{n+1} - 1 = a^{n+2} - 1 \quad \square.$$

Questão 6 d)

☞ **Exemplo 3.** Mostre que se $n \geq 4$ então $n! > 2^n$.

Para $n = 4$ vale $4! = 24 > 2^4 = 16$. Suponha validade para n , $n! > 2^n$, vamos provar para $n+1$, $(n+1)! > 2^{n+1}$. Multiplicando $n! > 2^n$ por $n+1$ de ambos lados segue que

$$(n+1)! > \underbrace{(n+1)}_{>2} 2^n > 2.2^n = 2^{n+1} \quad \square.$$

Questão 7

✍ **Propriedade 20** (Unicidade da fatoração em primos). Seja $n \in N, n > 1$. Se $n = \prod_{k=1}^{m} p_k = \prod_{k=1}^{s} q_k$ onde cada p_k e q_k são primos, não necessariamente distintos então $m = s$ e $p_k = q_k \forall\ k$, após, se necessário, uma renomeação dos termos.

Demonstração. Vamos provar usando o segundo princípio da indução, para $n = 2$ a propriedade vale. Suponha a validade para todo $t < n$ vamos provar que nessas condições vale para n.

$$n = p_m \prod_{k=1}^{m-1} p_k = q_s \prod_{k=1}^{s-1} q_k$$

p_m divide o produto $\prod_{k=1}^{s} q_k$ então deve dividir um dos fatores, por exemplo q_s (se não, renomeamos os termos), como $p_m | q_s$ então $p_m = q_s$

$$p_m \prod_{k=1}^{m-1} p_k = p_m \prod_{k=1}^{s-1} q_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} p_k = \prod_{k=1}^{s-1} q_k = n_0 < n$$

como n_0 é menor que n, usamos a hipótese da indução, que implica $m-1 = s-1$, $q_k = p_k$ de $k = 1$ até $m-1$, daí segue que $m = n$ e $q_k = p_k$ de $k = 1$ até m.

questão 8

✍ **Propriedade 21.** Sejam A e B conjuntos com n elementos, então o número de bijeções de $f : A \to B$ é $n!$

Demonstração.

Por indução sobre n, para $n = 1$, tem-se uma função $A = \{a_1\}$ e $B = \{b_1\}$, $f : A \to B$ tal que $f(a_1) = b_1$. Supondo a validade para conjuntos com n elementos, vamos provar que vale para conjuntos com $n+1$ elementos. Tomando $A = \{a_k,\ k \in I_{n+1}\}$ e $B = \{b_k,\ \in In+1\}$, dado $s \in I_{n+1}$, fixamos as bijeções f com $f(a_1) = b_s$ daí a quantidade dessas funções é dada pela quantidade de bijeções de $A \setminus \{a_1\}$ em $B \setminus \{b_s\}$, que é $n!$ para cada s variando de 1 até $n+1$, o total então é $(n+1)n! = (n+1)!$.

☾ **Corolário 4.** O mesmo vale se $A = B$.

Questão 9

Questão a)

✍ **Propriedade 22.** Se A e B são finitos e disjuntos com $|A| = n$ e $|B| = m$ então $A \cup B$ é finito com $|A \cup B| = m + n$.

ꕤ **Demonstração.** Existem bijeções $f : I_n \to A$, $g : I_m \to B$. Definimos $h : I_{m+n} \to A \cup B$ como $h(x) = f(x)$ se $1 \leq x \leq n$ e $h(x) = g(x - n)$ se $1 + n \leq x \leq m + n$ $(1 \leq x - n \leq m)$, como h é bijeção segue o resultado.

✍ **Propriedade 23.** Se A e B são conjuntos finitos não necessariamente disjuntos vale a relação

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

ꕤ **Demonstração.** Escrevemos A como a união disjunta $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, daí $|A| - |A \cap B| = |A \setminus B|$ agora escrevemos $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, união disjunta logo

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$$

usando a primeira expressão segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

✍ **Propriedade 24.** Se A e B são conjuntos finitos não necessariamente disjuntos vale a relação

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

ꕤ **Demonstração.** Escrevemos A como a união disjunta $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, daí $|A| - |A \cap B| = |A \setminus B|$ agora escrevemos $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, união disjunta logo

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$$

usando a primeira expressão segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Questão b)

Corolário 5. Podemos deduzir a identidade para três conjuntos

$$|A \cup B \cup C|,$$

tomamos $B' = B \cup C$ e aplicamos o resultado para dois conjuntos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B \cup C| - |A \cap [B \cup C]| =$$

$$= |A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|[A\cap B]\cup[A\cap C]| = |A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

logo

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Questão c)

Propriedade 25 (Princípio da inclusão- exclusão). Sejam n conjuntos finitos $(A_k)_1^n$, seja I o multiconjunto das combinações das interseções desses n conjuntos, então

$$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{K \in I} |K|(-1)^{n_k}$$

onde onde n_k é o número de interseções em K.

Questão 10

Propriedade 26. Seja A finito. Existe uma bijeção $g : I_n \to A$ para algum n, pois A é finito, a função $f : A \to A$ é injetiva ou sobrejetiva $\Leftrightarrow$ $g^{-1} \circ f \circ g : I_n \to I_n$ é injetiva ou sobrejetiva, respectivamente.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Se f é injetiva ou sobrejetiva então $g^{-1} \circ f \circ g : I_n \to I_n$ é injetiva ou sobrejetiva, por ser composição de funções com essas propriedades.

$\Leftarrow$). Seja $g^{-1} \circ f \circ g : I_n \to I_n$ sobrejetiva vamos mostrar que f também é sobrejetiva. Dado $y \in A$ vamos mostrar que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $g : I_n \to A$ é sobrejetiva então existe $x_1 \in I_n$ tal que $g(x_1) = y$ e pelo fato de $g^{-1} \circ f \circ g$ ser sobrejetiva então existe $x_2 \in I_n$ tal que $g^{-1}(f(g(x_2))) = x_1 = g^{-1}(y)$ como g^{-1} é injetiva segue que $f(g(x_2)) = y$ logo f é sobrejetiva.

Se $g^{-1} \circ f \circ g$ é injetiva então f é injetiva. Sejam x, y quaisquer em A, existem $x_1, x_2 \in I_n$ tais que $g(x_1) = x$, $g(x_2) = y$. Vamos mostrar que se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

Se $f(x) = f(y)$ então $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ e $g^{-1}(f(g(x_1))) = g^{-1}(f(g(x_2)))$ com $g^{-1} \circ f \circ g$ segue que $x_1 = x_2$ que implica $g(x_1) = g(x_2)$, isto é, $x = y$.

✍ **Propriedade 27.** Seja A um conjunto finito. $f : A \to A$ é injetiva $\Leftrightarrow$ é sobrejetiva.

Demonstração.

$\Rightarrow$).

Consideramos o caso $f : I_n \to I_n$, se f for injetiva então $f : I_n \to f(I_n)$ é uma bijeção com $f(I_n) \subset I_n$. f_n não pode ser parte própria de I_n pois se não $f^{-1}(I_n) \to I_n$ seria bijeção de um conjunto com sua parte própria, logo $f(I_n) = I_n$ e $f : I_n \to I_n$ é bijeção.

$\Leftarrow$). Se f for sobrejetiva então para cada $y \in I_n$ (imagem) podemos escolher $x \in I_n$ (domínio) tal que $f(x) = y$ e daí definir $g : I_n \to I_n$ tal que $g(y) = x$, g é injetiva, pois f é função, logo pelo resultado já mostrado g é bijetora, implicando que f também é.

Questão 11

✍ **Propriedade 28** (Princípio das gavetas de Dirichlet- Ou princípio da casas dos pombos.). Se temos m conjuntos $(A_k)_1^m$ e n elementos $n > m$, com $\sum_{k=1}^{n} |A_k| = n$ então existe A_t em $(A_k)_1^m$ tal que $|A_t| > 1$.

Esse resultado diz que se temos n elementos e m conjuntos tais que $n > m$ então deve haver um conjunto com pelo menos 2 elementos.

Demonstração. Supondo que $|A_k| \leq 1 \; \forall \; k$ então aplicando a soma $\sum_{k=1}^{n}$ em ambos lados dessa desigualdade temos

$$n = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \leq m \Rightarrow n \leq m$$

o que contraria a hipótese de $n > m$,portanto deve valer $|A_t| > 1$ para algum $t \in I_n$.

Questão 12

✍ **Propriedade 29.** Seja A um conjunto com n elementos, então o número de funções injetivas $f : I_p \to A$ é $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$.

Demonstração. Se $p > n$ o resultado vale pois não existe função injetiva de $f : I_p \to A$, pois se não $f : I_p \to f(A)$ seria bijeção e $f(A) \subset A$ daí A iria possuir um subconjunto com p elementos que é maior que o número de elementos de A, o que é absurdo. Iremos provar o resultado para outros valores de $p \leq n$. Para $p = 1$ temos n funções, que são

$$f_1(1) = a_1,\ f_2(1) = a_2,\ \cdots,\ f_n(1) = a_n.$$

Suponha que para I_p temos $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$ funções que são injetivas, vamos mostrar que para I_{p+1} temos $\prod_{k=0}^{p}(n-k)$ funções. Seja o conjunto das funções $f : I_{p+1} \to A$ injetivas, podemos pensar o conjunto das f restritas à I_p tendo $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$ funções, por hipótese da indução , agora podemos definir essas funções no ponto $p+1$, onde temos $n-p$ escolhas, para cada uma dessas escolhas temos $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$ funções, portanto temos um total de $(n-p)\prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \prod_{k=0}^{p}(n-k)$ funções.

Questão 13

✍ **Propriedade 30.** Se X possui n elementos então tal conjunto possui $\binom{n}{p}$ subconjuntos com p elementos.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n e p livre. Para $n = 0$ ele só possui um subconjunto com 0 elementos $\binom{0}{0} = 1$ e para outros valores de $p > 0 \in N$ vale $\binom{0}{p} = 0$.

Suponha que para um conjunto qualquer A com n elementos, temos $\binom{n}{p}$ subconjuntos, agora podemos obter um conjunto com $n+1$ elementos, adicionando um novo elemento $\{a_{n+1}\}$, continuamos a contar os $\binom{n}{p}$ subconjuntos que contamos com elementos de A e podemos formar mais subconjuntos com p elementos adicionando o ponto $\{a_{n+1}\}$ aos conjuntos com $p-1$ elementos, que por hipótese da indução temos $\binom{n}{p-1}$, então temos no total $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ pela identidade de Stifel, como queríamos demonstrar.

Questão 14

Propriedade 31. Seja $|A| = n$ então $|P(A)| = 2^n$.

Demonstração. Por indução sobre n, se $n = 1$, então $A = \{a_1\}$ possui dois subconjuntos que são $\emptyset$ e $\{\alpha_1\}$. Suponha que qualquer conjunto qualquer B com n elementos tenha $|P(B)| = 2^n$, vamos provar que um conjunto C com $n+1$ elementos implica $|P(C)| = 2^{n+1}$. Tomamos um elemento $a \in C$, $C \setminus \{a\}$ possui 2^n subconjuntos (por hipótese da indução), s_k de $k = 1$ até $k = 2^n$, que também são subconjuntos de C, porém podemos formar mais 2^n subconjuntos de C com a união do elemento $\{a\}$, logo no total temos $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos de C e mais nenhum subconjunto, pois não temos nenhum outro elemento para unir aos subconjuntos dados.

Questão 15

Exemplo 4. Existe $g : N \to N$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito para cada $n \in N$.

Seja $f : N \to N$ definida como $f(n) = k$ se n é da forma $n = p_k^{\alpha_k}$ onde p_k é o k-ésimo número primo e $f(n) = n$ caso contrário, f é sobrejetiva e existem infinitos $n \in N$ tais que $f(n) = k$ para cada k natural.

Questão 16

✍ **Propriedade 32.** $P_n = \{A \subset N \mid |A| = n\}$ é enumerável.

Demonstração. Definimos a função $f : P_n \to N^n$ da seguinte maneira: Dado $A = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$, $f(A) = (x_1, \cdots, x_n)$. Tal função é injetiva pois dados $A = \{x_k,\ k \in I_n\}$ e $B = \{y_k,\ k \in I_n\}$ não pode valer $x_k = y_k$ para todo k, pois se não os conjuntos seriam iguais.

Se trocamos N por outro conjunto X enumerável o resultado também vale, basta definir uma função $f : P_n \to X^n$ e $g : X \to N$ injetiva, enumeramos um subconjunto finito qualquer com n elementos $A \subset X$ como $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ onde $g(x_1) < g(x_2) < \cdots < g(x_n)$ e definimos $f(A) = (x_1, \cdots, x_n)$.

☾ **Corolário 6.** o conjunto P_f dos subconjuntos finitos de N é enumerável pois

$$P_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

é união enumerável de conjuntos enumeráveis. O mesmo vale trocando N por um conjunto enumerável qualquer A.

Questão 17

✍ **Propriedade 33.** X é finito $\Leftrightarrow$ existe $f : X \to X$ que só admite subconjuntos estáveis $\emptyset$ e X.

Demonstração. Iremos considerar sempre conjuntos não vazios.

$\Rightarrow$). Suponha X finito, então $X = \{a_1, \cdots, a_n\}$, definimos $f : X \to X$ como $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, em geral $f(a_k) = a_{k+1}$ se $k < n$ e $f(a_n) = a_1$. f não possui subconjunto estável diferente de X, pois, suponha um conjunto $Y \neq X$ estável, a_1 não pode pertencer ao conjunto, pois se não $f(a_1) = a_2 \in Y$, $f(a_2) = a_3 \in Y$ até $f(a_{n-1}) = a_n \in Y$ então teríamos $Y = X$ o que é absurdo, da mesma maneira se $a_t \in Y$ então $f(a_t) = a_{t+1} \in Y$, $f(a_{t+1}) = a_{t+2} \in Y$, em menos de n aplicações da função teremos $f(a_{n-1}) = a_n \in Y$ e daí $f(a_n) = a_1 \in Y$ o que implica $Y = X$, logo não podemos ter outro subconjunto estável além de X com a função f definida acima.

$\Leftarrow$).

Suponha X infinito, vamos mostrar que qualquer função $f : X \to X$ possui subconjunto estável $Y \neq X$.

Tomamos $a_1 \in X$, consideramos $f(a_1) := a_2$ se $a_1 = a_2$ paramos e temos o conjunto $Y = \{a_1\} \neq X$ pois X é infinito, se não continuamos a aplica a função $f(a_2) := a_3$, se $a_3 = a_2$ ou a_1 então paramos e tomamos $Y = \{a_1, a_2\}$, continuamos o processo recursivamente $f(a_k) : a_{k+1}$ se a_{k+1} é igual a algum dos elementos de $\{a_1, \cdots, a_k\}$, então paramos o processo e tomamos $Y = \{a_1, \cdots, a_k\}$, se para todo $k \in N$ os elementos $a_{k+1} = f(a_k)$ não pertencem ao conjunto $\{a_1, \cdots, a_k\}$, então temos um conjunto

$$= \{a_2 = f(a_1), f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, \cdots, f(a_n) = a_{n+1}, \cdots\}$$

tomamos tal conjunto como Y e temos

$$f(Y) = \{f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, \cdots, \} \subset Y$$

podemos observar que $Y \neq X$ pois $a_1 \notin Y$. Assim concluímos nossa demonstração.

Questão 18

✍ **Propriedade 34.** Seja $f : A \to A$ injetiva, tal que $f(A) \neq A$, tomando $x \in A \setminus f(A)$ então os elementos $f^k(x)$ de $O(x) = \{f^k(x),\ k \in N\}$ são todos distintos. Estamos denotando $f^k(x)$ pela k-ésima composição de f com ela mesma.

Demonstração. Para todo t vale que f^t é injetiva, pois a composição de funções injetivas é injetiva.

Se existisse $k \neq t$ tal que $f^k(x) = f^t(x),\ t > k$, então existe $p > 0 \in N$ tal que $t = k + p$

$$f^{k+p}(x) = f^k(f^p(x)) = f^k(x)$$

por injetividade de f^k segue que $f^p(x) = x$, logo $x \in f(A)$ o que contraria a hipótese de $x \in A \setminus f(A)$. Portanto os elementos são distintos.

Questão 19

✍ **Propriedade 35.** Se A é infinito então existe função injetiva $f : N \to A$.

Demonstração. Podemos definir f indutivamente. Tomamos inicialmente $x_1 \in A$ e definimos $f(1) = x_1$ e para $n \in N$ escolhemos $x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\}$ definido $f(n+1) = x_{n+1}$. $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\}$ nunca é vazio pois A é infinito. f é injetora pois tomando $m > n$ tem-se $f(n) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$ e $f(m) \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$.

Corolário 7. Existe função injetiva de um conjunto finito B num conjunto infinito A, usamos o mesmo processo do exemplo anterior, mas o processo para depois de definir a função $|B|$ pontos.

Propriedade 36. Sendo A infinito e B finito existe função sobrejetiva $g : A \to B$.

Demonstração. Existe função injetiva $f : B \to A$, logo $f : B \to f(B) \subset A$ é bijeção, possuindo inversa $g^{-1} : f(B) \to B$. Considere a função $f : A \to B$ definida como $f(x) = g^{-1}(x)$ se $x \in f(B)$ e $f(x) = x_1 \in B$ se $x \notin f(B)$, f é função sobrejetiva.

Questão 20

Questão 20-a)

Propriedade 37. O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração. Seja $\prod_{k=1}^{s} A_k$ o produto cartesiano dos conjuntos A_k enumeráveis, então para cada k existe uma função $f_k : N \to A_k$ que é sobrejetiva, então definimos a função $f : N^s \to \prod_{k=1}^{s} A_k$ dada por

$$f(x_k)_1^s = (f_k(x_k))_1^s$$

,isto é,

$$f(x_1, \cdots, x_s) = (f_1(x_1), \cdots, f_s(x_s))$$

como tal função é sobrejetiva e N^s é enumerável segue que $\prod_{k=1}^{s} A_k$ é enumerável.

☾ **Corolário 8.** Se X é finito e Y é enumerável, então $F(X,Y)$ é enumerável. Basta considerar o caso de $X = I_n$, então $F(X,Y) = \prod_{k=1}^{n} Y = Y^n$, que é enumerável.

Questão 20-b)

✍ **Propriedade 38.** Para cada $f : N \to N$ seja $A_f = \{n \in N \mid f(n) \neq 1\}$. O conjunto M das funções, $f : N \to N$ tais que A_f é finito é um conjunto enumerável.

Demonstração. Seja B_n o conjunto das $f : N \to N$, tais que $|A_f| = n$, vamos mostrar inicialmente que B_n é enumerável. Cada $f : N \to N$ é uma sequência $(f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots)$, os elementos de B_n são as sequências que diferem da unidade em exatamente n valores. Para cada elemento f de B_n temos n termos diferentes de 1, que serão simbolizados por

$$f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_n) \text{ onde } k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

definimos $g : B_n \to N^n$ como

$$g(f) = (p_{k_1}^{f(k_1)}, p_{k_2}^{f(k_2)}, \cdots, p_{k_n}^{f(k_n)})$$

onde cada p_t é o t-ésimo primo. A função definida dessa forma é injetora, pois se vale $g(f) = g(h)$ então

$$(p_{k_1}^{f(k_1)}, p_{k_2}^{f(k_2)}, \cdots, p_{k_n}^{f(k_n)}) = (q_{k_1'}^{f(k_1')}, q_{k_2'}^{f(k_2')}, \cdots, q_{k_n'}^{f(k_n')})$$

por unicidade de fatoração em primos segue que $q_t = p_t$ e $k_t = k_t'$ $\forall$ t.

Agora escrevemos $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, portanto o conjunto das funções $f : N \to N$ tais que A_f é finito é enumerável.

Questão 21

☞ **Exemplo 5.** Exprimir $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ onde os conjuntos são infinitos e dois a dois disjuntos.

Tome $N_{k+1} = \{p_k^{\alpha_k}, \alpha_k \in N \text{ onde } p_k \text{ o k-ésimo primo}\}$ e $N_1 = N \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} N_k$, cada um deles é infinito, são disjuntos e sua união dá N.

Questão 22

☞ **Exemplo 6.** $f : N \times N \to N$ definida como $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$ é uma bijeção. Dado um número natural n qualquer, podemos escrever esse número como produto dos seus fatores primos

$$n = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} . \prod_{k=2}^{n} p_k^{\alpha_k}$$

como os primos maiores que 2 são ímpares e o produto de ímpares é um número ímpar então $n = 2^m(2n-1)$. Agora vamos mostrar que a função é injetora seja $f(m, n) = f(p, q)$

$$2^m(2n-1) = 2^p(2q-1)$$

se $m \neq p$ os números serão diferentes pela unicidade de fatoração ($2s-1$ não possui fatores 2 pois sempre é ímpar), então devemos ter $m = p$, daí segue que $n = q$ e termina a demonstração.

Questão 23

✍ **Propriedade 39.** Todo conjunto $A \subset N$ é enumerável.

Demonstração. Se A é finito então A é enumerável. Se A é infinito podemos enumerar seus elementos da seguinte maneira $x_1 = \min A$, $x_{n+1} = \min A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\}$, daí

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$$

pois se existisse $x \in A$ tal que $x \neq x_k$ daí teríamos $x > x_k$ para todo k que é absurdo, pois nenhum conjunto infinito de números naturais é limitado superiormente. A função x definida é injetora e sobrejetora. Vamos mostrar agora que ela é a única bijeção crescente entre A e N. Suponha outra bijeção crescente $f : N \to A$. Deve valer $f(1) = x_1$, pois se fosse $f(1) > x_1$ então f não seria crescente. Supondo que vale $f(k) = x_k \ \forall \ \ k \leq n \ \ \in N$ vamos mostrar que $f(n+1) = x_{n+1}$, não pode valer $f(n+1) < x_{n+1}$ com $f(n+1) \in A$ pois a função é injetora e os possíveis termos já foram usados em $f(k)$ com $k < n+1$, não pode valer $f(n+1) > x_{n+1}$ pois se não a função não seria crescente, ela teria que assumir para algum valor $x > n+1$ o valor de x_{n+1}, a única possibilidade restante é $f(n+1) = x_{n+1}$ o que implica por indução que $x_n = f(n) \ \forall \ n \in N$.

Questão 24

✍ **Propriedade 40.** Todo conjunto infinito se decompõe como união de uma infinidade enumerável de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

Demonstração. Todo conjunto X infinito possui um subconjunto infinito enumerável $E = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$, tomamos $b_{2k} = x_k$ e formamos o conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Definimos $B_k = \{x_{p_k}^{\alpha_k}, \ \alpha_k \in N\}$, onde p_k é o k-ésimo primo e $B_0 = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, cada um desses conjuntos $B_0, B_1, \cdots$ é infinito e todos são disjuntos, vale $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, definimos $B_{-1} = (E \cup X) \setminus A$ que é infinito e não possui elemento e disjunto com todo outro B_k, com isso temos

$$X = \bigcup_{k=-1}^{\infty} B_k$$

que é uma união enumerável de conjuntos infinitos disjuntos.

Questão 25

Definição 2 (Função característica). Sejam um conjunto A e V um subconjunto qualquer de A, definimos

$$C_v(t) = 0 \text{ se } x \notin V$$

$$C_v(t) = 1 \text{ se } x \in V$$

✍ **Propriedade 41.** Sejam $X, Y \subset A$. Valem as propriedades.

- $C_{x\cap y} = C_x C_y$
- $C_{x\cup y} = C_x + C_y - C_{x\cap y}$ e $C_{x\cap y} = 0 \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$.
- Se $X \subset Y \Leftrightarrow C_x \leq C_y$.
- $C_{A\setminus X} = 1 - C_x$.

♒ **Demonstração.**

- $C_{x\cap y} = C_x C_y$. Temos dois casos a analisar, se $t \in X \cap Y$ então

  $$C_{x\cap y}(t) = 1 = \underbrace{C_x(t)}_{1}\underbrace{C_y(t)}_{1},$$

  se $t \notin X \cap Y$ podemos supor $t \notin Y$então

  $$C_{x\cap y}(t) = 0 = C_x(t)\underbrace{C_y(t)}_{0}.$$

- $C_{x\cup y} = C_x + C_y - C_{x\cap y}$ e $C_{x\cap y} = 0 \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$.

  Analisamos três casos.

  1. Se $t \in X \cap Y$ então $C_{x\cup y}(t) = 1$, $C_x(t) + C_y(t) - C_{x\cap y}(t) = 1 + 1 - 1 = 1$, logo vale a igualdade.
  2. Se $t \notin X \cap Y$ e $t \in X$ (sem perda de generalidade), então $C_{x\cup y}(t) = 1$, $C_x(t) + C_y(t) - C_{x\cap y}(t) = 1 + 0 - 0 = 1$, logo vale a igualdade.
  3. Agora o último caso, se $t \notin X, Y$, $C_{x\cup y}(t) = 0$ e $C_x(t) + C_y(t) - C_{x\cap y}(t) = 0 + 0 - 0 = 0$, valendo novamente a igualdade.

$C_{x\cup y} = C_x + C_y \Leftrightarrow C_{x\cap y} = 0 \Leftrightarrow C_{x\cap y}(t) = 0 \ \forall \ t \in A$, isso significa que X e Y são disjuntos.

- Se $X \subset Y \Leftrightarrow C_x \leq C_y$. $\Rightarrow$). Analisamos três casos

  1. $t \notin Y$ e $t \notin Y$ daí $t \notin x$ e vale $C_x(t) = 0C_y(t)$.
  2. Se $t \in Y$ e $t \notin x$ então $C_x(t) = 0 \leq C_y(t) = 1$.
  3. Se $t \in Y$ tem-se $t \in Y$ daí $C_x(t) = 1 \leq 1 = C_y(t)$.

  Em qualquer caso vale a desigualdade.

  $\Leftarrow$). Suponha que X não esteja contido em Y , então existe t tal que $t \in X$, $t \notin Y$ portanto vale $c_x(t) = 1$ e $c_y(t) = 0$ e não se verifica a desigualdade.

- $C_{A\setminus X} = 1 - C_x$.

  Analisamos dois casos

  1. Se $t \notin X$ então $C_{A\setminus X}(t) = 1 = 1 - \underbrace{C_x(t)}_{0}$.
  2. Se $t \in X$ $C_{A\setminus X}(t) = 0 = 1 - \underbrace{C_x(t)}_{1}$.

Questão 26

✍ **Propriedade 42.** O conjunto das sequências crescentes de números naturais não é enumerável.

Demonstração. Seja A o conjunto das sequências crescentes de números naturais. Suponha que seja enumerável, então existe uma bijeção $x : N \to A$

$$x_1 = (y_{(1,1)}, y_{(2,1)}, y_{(3,1)}, y_{(4,1)}, \cdots)$$

$$x_2 = (y_{(1,2)}, y_{(2,2)}, y_{(3,2)}, y_{(4,2)}, \cdots)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (y_{(1,n)}, y_{(2,n)}, y_{(3,n)}, y_{(4,n)}, \cdots)$$

vamos mostrar que existe uma sequência crescente que sempre escapa a essa enumeração, tomamos a sequência s como

$$s = (y_{(1,1)} + 1\ ,\ y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1\ ,\ y_{(3,3)} + y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1, y_{(4,4)} + y_{(3,3)} + y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1\ ,\ \cdots)$$

denotando $y_{(0,0)} = 1$ o t-ésimo termo da sequência acima é $s_t = \sum_{k=0}^{t} y_{(k,k)}$, tal sequência é crescente e ela difere de cada x_t na t-ésima coordenada, portanto ela não pertence a enumeração, o que é absurdo, portanto o conjunto das sequências crescentes é não enumerável.

Questão 27

✍ **Propriedade 43.** Sejam (N, s) e (N', s') dois pares formados por um conjunto e uma função em que ambos cumprem os axiomas de Peano. Então existe uma única bijeção $f : N \to N'$ tal que $f(1) = 1'$, $f(n+1) = f(n) + 1'$ e vale ainda que

- $f(m) + f(n) = f(m+n)$
- $f(m.n) = f(m)f(n)$
- $m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$.

Demonstração. Primeiro vamos provar que f deve ser obrigatoriamente da forma $f(n) = n'$ $\forall$ $n \in N$, por indução sobre n, a propriedade vale para $n = 1$, suponha a validade para n, vamos provar para $n+1$

$$f(n+1) = f(n) + 1' = n' + 1' = s'(n) = (n+1)'.$$

Então para todo $n \in N$ fica provado que $f(n) = n'$, f é única por construção, sendo também sobrejetora.

- Vale que $f(m)+f(n) = f(m+n)$, vamos provar por indução sobre n. Para $n = 1$ ela vale por definição da função, supondo a validade para n, vamos provar para $n+1$

  $$f((m+n)+1) = f(m+n) + f(1) = f(m) + (f(n) + f(1)) = f(m) + f(n+1)$$

  logo fica provada a propriedade. f é injetiva, pois se houvessem dois valores distintos $m > n$ tais que $f(m) = f(n)$ então existe $p \in N$ tal que $n + p = m$, aplicando a função temos $f(n) + f(p) = f(m) = f(n)$, isto é $n' + p' = n'$ então $n' > n'$ o que é absurdo, portanto a função é injetiva.

- $f(m.n) = f(m)f(n)$. Por indução sobre n, para $n = 1$ ela vale. Suponha validade para n, vamos provar para $n + 1$

$$f(m.(n+1)) = f(mn+m) = f(m)f(n) + f(m) = f(m)[f(n)+1] = f(m)f(n+1)$$

como queríamos provar.

- $m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$. $\Rightarrow$). Se vale $m < n$ então existe $p \in N$ tal que $m+p = n$ e daí aplicando f tem-se $m'+p' = n'$ o que implica $n' > m'$, isto é, $f(n) > f(m)$. $\Leftarrow$) Da mesma forma se $f(m) < f(n)$ então $m' < n'$ e daí existe p' tal que $m'+p' = n' \Rightarrow f(m+p) = f(n)$ que por injetividade segue $m+p = n$, portanto $n > m$.

1.4 Capítulo 3 -Números reais

1.4.1 Questão 1

Questão 1-1°

Primeiro provamos um lema, depois a questão pedida.

✍ **Propriedade 44.**
$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}.$$

Demonstração.

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = d^{-1}a + d^{-1}c = d^{-1}(a+c) = \frac{a+c}{d}$$

por distributividade do produto em relação a soma.

✍ **Propriedade 45.**
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Demonstração.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Questão 1-2°

✍ **Propriedade 46.**

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

✍ **Demonstração.**

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = a.b^{-1}.c.d^{-1} = ac.b^{-1}.d^{-1} = ac.(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

1.4.2 Questão 2

Questão 2-1°

✍ **Propriedade 47.** Para todo m inteiro vale

$$a^m.a = a^{m+1}.$$

✍ **Demonstração.** Para m natural vale pela definição de potência, agora para $m = -n, n > 0 \in N$ um inteiro vamos provar $a^{-n}.a = a^{-n+1}$. Para $n = 1$ temos

$$a^{-1}a = a^{-1+1} = a^0 = 1.$$

Vamos provar agora para $n > 1, n - 1 > 0$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{n-1}a)^{-1} = a^{-n+1}a^{-1}$$

multiplicando por a de ambos lados $a^{-n}.a = a^{-n+1}$ como queríamos demonstrar.

✍ **Propriedade 48.**

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

✍ **Demonstração.** Primeiro seja m um inteiro qualquer e n natural, vamos provar a identidade por indução sobre n, para $n = 0$ vale

$$a^m.a^0 = a^m = a^{m+0}$$

para $n = 1$ vale

$$a^m a^1 = a^m a = a^{m+1}.$$

Supondo válido para n

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

vamos provar para $n+1$

$$a^m.a^{n+1} = a^{m+n+1}$$

temos

$$a^m.a^{n+1} = a^m a^n a = a^{m+n}.a = a^{m+n+1} \quad \square.$$

Agora para $-n$ com n natural , se m é natural temos que a propriedade já foi demonstrada

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}$$

se m é inteiro negativo temos

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}$$

pois o inverso de $a^m a^{-n}$ é $a^{-m}a^n = a^{-m+n}$ propriedade que já está provada por $-m$ e n serem naturais e $a^{m-n}a^{n-m} = 1$ por unicidade do inverso de $= a^{-m}a^n = a^{-m+n}$ é $a^m a^{-n}$ logo fica provado para n e m inteiros. Para potência negativa $-n$ podemos fazer como se segue

$$a^m a^{-n} = (a^{-m})^{-1}(a^n)^{-1} = (a^{-m}a^n)^{-1} = (a^{-m+n})^{-1} = a^{m-n}.$$

Questão 2-2°

✍ **Propriedade 49.**

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

para m e n inteiros.

Demonstração. Primeiro por indução para m inteiro e n natural

$$(a^m)^0 = 1 = a^{m.0}$$

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m.1}.$$

Supondo válido para n

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

vamos provar para $n+1$

$$(a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)}$$

temos pela definição de potência e pela hipótese da indução que

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

onde usamos a propriedade do produto de potência de mesma base. Para n inteiro negativo

$$(a^m)^{-n} = ((a^m)^n)^{-1} = (a^{mn})^{(-1)} = a^{-mn}.$$

1.4.3 Questão 3

☞ **Exemplo 7.** Se $\frac{x_k}{y_k} = \frac{x_s}{y_s}$ para todos $k, s \in I_n$, num corpo K, prove que dados, $a_k \in K, k \in I_n$ tais que $\sum_{k=1}^{n} a_k y_k \neq 0$ tem-se

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Chamando $\frac{x_1}{y_1} = p$ temos $\frac{x_k}{y_k} = p$ logo $x_k = p y_k$ e a soma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = p \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$$

logo

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k} = p = \frac{x_1}{y_1} \quad \square.$$

1.4.4 Questão 4

Definição 3 (Homomorfismo de corpos). Sejam A, B corpos. Uma função $f : A \to B$ chama-se um homomorfismo quando se tem

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y) = f(x).f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

para quaisquer $x, y \in A$. Denotaremos nesse caso as unidades 1_A e 1_B pelos mesmos símbolos e escrevemos $f(1) = 1$.

✍ **Propriedade 50.** Se f é homomorfismo então $f(0) = 0$.

Demonstração. Temos

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0)$$

somando $-f(0)$ a ambos lados segue

$$f(0) = 0.$$

✍ **Propriedade 51.** Vale $f(-a) = -f(a)$.

Demonstração. Pois

$$f(a - a) = f(0) = 0 = f(a) + f(-a)$$

daí $f(-a) = -f(a)$.

Corolário 9.

$$f(a - b) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b).$$

✍ **Propriedade 52.** Se a é invertível então $f(a)$ é invertível e vale $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Demonstração.

$$f(a.a^{-1}) = f(1) = 1 = f(a).f(a^{-1})$$

então pela unicidade de inverso em corpos segue que $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

✍ **Propriedade 53.** f é injetora.

✵ **Demonstração.** Sejam x, y tais que $f(x) = f(y)$, logo $f(x) - f(y) = 0$, $f(x-y) = 0$, se $x \neq y$ então $x - y$ seria invertível logo $f(x-y)$ não seria nulo, então segue que $x = y$.

✍ **Propriedade 54.** Se $f : A \to B$ com $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x.y) = f(x)f(y)$ para x, y arbitrários, então $f(x) = 0 \; \forall \; x$ ou $f(1) = 1$.

✵ **Demonstração.** $f(1) = f(1.1) = f(1)f(1)$, logo $f(1) = f(1)^2$ por isso $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. Se $f(1) = 0$ então $f(x.1) = f(x)f(1) = 0$, $f(x) = 0 \; \forall \; x$.

1.4.5 Questão 5

✍ **Propriedade 55.** Se $f : Q \to Q$ é um homomorfismo então $f(x) = x \; \forall \; x \in Q$.

✵ **Demonstração.** Vale que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, tomando $x = kh$ e $y = h$ fixo, tem-se

$$f((k+1)h) - f(kh) = f(h)$$

aplicamos a soma $\sum_{k=0}^{n-1}$ de ambos lados, a soma é telescópica e resulta em

$$f(nh) = nf(h)$$

tomando $h = 1$ segue que $f(n) = n$, tomando $h = \frac{p}{n}$ segue

$$f(n\frac{p}{n}) = f(p) = p = nf(\frac{p}{n}) \Rightarrow f(\frac{p}{n}) = \frac{p}{n}.$$

1.4.6 Questão 6

1.4.7 Questão 7

1.4.8 Questão 8

✍ **Propriedade 56.** Seja K um conjunto onde valem todos os axiomas de corpo, exceto a existência de inverso multiplicativo. Seja $a \neq 0$. $f : K \to K$ com $f(x) = ax$ é bijeção $\Leftrightarrow$ $\exists\ a^{-1} \in K$.

Demonstração. $\Rightarrow$). A função é sobrejetora logo existe x tal que $f(x) = 1 = ax$ portanto a é invertível com $a^{-1} = x \in K$.

$\Leftarrow$). Dado qualquer $y \in K$ tomamos $x = ya^{-1}$ daí $f(x) = aa^{-1}y = y$ e a função é sobrejetiva. f também é injetiva, pois se $f(x_1) = f(x_2)$, $ax_1 = ax_2$ implica por lei do corte que $x_1 = x_2$.. Em geral f é injetiva $\Leftrightarrow$ vale a lei do corte por essa observação.

✍ **Propriedade 57.** Seja K finito. Vale a lei do corte em A $\Leftrightarrow$ existe inverso para cada elemento não nulo de K,

Demonstração. $\Rightarrow$). Se vale a lei do corte, pela propriedade anterior tem-se que para qualquer $a \neq 0$ em K, $f : K \to K$ com $f(x) = ax$ é injetiva, como f é injetiva de K em K que é um conjunto finito, então f é bijetiva, o que implica a ser invertível.

$\Leftarrow$). A volta é trivial pois existência de inverso implica lei do corte.

1.4.9 Questão 9

☞ **Exemplo 8.** O conjunto dos polinômios de coeficiente racionais $Q[t]$ não é um corpo, pois por exemplo o elemento x não possui inverso multiplicativo, se houvesse haveria $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ tal que $x \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 1 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+1}$ o que não é possível pois o coeficiente do termo independente x^0 é zero em $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+1}$ e deveria ser 1.

O conjunto dos inteiros Z não é um corpo, pois não possui inverso multiplicativo para todo elementos, por exemplo não temos o inverso de 2.

1.4.10 Questão 10

✍ **Propriedade 58.** Dados $x, y \in R$, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$).Suponha que $x \neq 0$, então $x^2 > 0$ e $y^2 \geq 0$ de onde segue que $x^2 + y^2 > 0$, absurdo então deve valer $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ logo temos também $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, portanto $x = y = 0$.

$\Leftarrow$). Basta substituir $x = y = 0$ resultando em 0.

1.4.11 Questão 11

Exemplo 9. A função $f : K^+ \to K^+$ com $f(x) = x^n$, $n \in N$ é crescente. Sejam $x > y > 0$ então $x^n > y^n$ pois $x^n = \prod_{k=1}^{n} x > \prod_{k=1}^{n} y = y^n$, por propriedade de multiplicação de positivos. Se $f : Q^+ \to Q^+$, Q^+ o conjunto dos racionais positivos, então f não é sobrejetiva para $n = 2$, pois não existe $x \in Q$ tal que $x^2 = 2 \in Q^+$.

$f(K^+)$ não é um conjunto limitado superiormente de K, isto é, dado qualquer $x \in K$ existe $y \in K^+$ tal que $y^n > x$. O limitante superior do conjunto, se existisse, não poderia ser um número negativou ou zero, pois para todo y positivo tem-se y^n positivo, que é maior que 0 ou qualquer número negativo. Suponha que x positivo seja, tomando $y = x + 1$ temos $y^n = (x + 1)^n \geq 1 + nx > x$, logo $f(K^+)$ não é limitado superiormente.

1.4.12 Questão 12

Propriedade 59. Sejam X um conjunto qualquer e K um corpo, então o conjunto $F(X, K)$ munido de adição e multiplicação de funções é um anel comutativo com unidade, não existindo inverso para todo elemento. Lembrando que em um anel comutativo com unidade temos as propriedades, associativa, comutativa, elemento neutro e existência de inverso aditivo, para adição. valendo também a comutatividade, associatividade, existência de unidade 1 para o produto e distributividade que relaciona as duas operações.

Demonstração.

- Vale a associatividade da adição

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x)$$

- Existe elemento neutro da adição $0 \in K$ e a função constante $0(x) = 0\ \forall\ x \in K$, daí
$$(g + 0)(x) = g(x) + 0(x) = g(x).$$
- Comutatividade da adição
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$
- Existe a função simétrica, dado $g(x)$, temos f com $f(x) = -g(x)$ e daí
$$(g + f)(x) = g(x) - g(x) = 0.$$
- Vale a associatividade da multiplicação
$$(f(x).g(x)).h(x) = f(x).(g(x).h(x))$$
- Existe elemento neutro da multiplicação $1 \in K$ e a função constante $I(x) = 1\ \forall\ x \in K$, daí
$$(g.I)(x) = g(x).1 = g(x).$$
- Comutatividade da multiplicação
$$(f.g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g.f)(x)$$

Por último vale a distributividade $(f(g + h))(x) = f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x) = (f.g + f.h)(x)$.

Não temos inverso multiplicativo para toda função, pois dada uma função, tal que $f(1) = 0$ e $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ em K, não existe função g tal que $g(1)f(1) = 1$, pois $f(1) = 0$, assim o produto de f por nenhuma outra função gera a identidade.

1.4.13 Questão 13

✍ **Propriedade 60.** Sejam $x, y > 0$. $x < y \Leftrightarrow x^{-1} > y^{-1}$.

Demonstração. $\Rightarrow$). Como $y > x$ e x^{-1} e y^{-1} são positivos, multiplicamos a desigualdade por $x^{-1}y^{-1}$ em ambos lados $x^{-1}y^{-1}y > x^{-1}y^{-1}x$ implicando $x^{-1} > y^{-1}$, então se $y > x$ temos $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

$\Leftarrow$). Se $x^{-1} > y^{-1}$. x, y são positivos, multiplicamos a desigualdade por xy em ambos lados, de onde segue que $y > x$.

1.4.14 Questão 14

✍ **Propriedade 61.** Sejam $a > 0$ em K e $f : Z \to K$ com $f(n) = a^n$. Nessas condições f é crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$ e constante se $a = 1$.

Demonstração. Para qualquer $n \in Z$ vale $f(n+1)-f(n) = a^{n+1}-a^n = a^n(a-1)$, a^n é sempre positivo, então o sinal da diferença depende do sinal de $a-1$. Se $a=1$ vale $f(n+1) = f(n)\ \forall\ \ n \in Z$ logo f é constante, se $a-1 < 0$, $a < 1$ então $f(n+1)-f(n) < 0$, $f(n+1) < f(n)$, f é decrescente e finalmente se $a-1 > 0, a > 1$ então $f(n+1) > f(n)$ e a função é crescente.

Perceba que as propriedades citadas valem para todo $n \in Z$, por exemplo no caso de $a > 1$ temos

$$\cdots < f(-4) < f(-3) < f(-2) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < f(n+1) < \cdots$$

analogamente para os outros casos.

1.4.15 Questão 15

☞ **Exemplo 10.** Para todo $x \neq 0$ real, prove que $(1+x)^{2n} > 1+2nx$.

Se $x > -1$ tomamos a desigualdade de bernoulli com $2n$ no expoente. Se $x < -1$ vale $1+x < 0$ porém elevando a uma potência par resulta num número positivo, por outro lado $2nx < -2n$ logo $1+2nx < 1-2n < 0$ então $(1+x)^{2n}$ é positivo e $1+2nx$ é negativo, logo nesse caso vale $(1+x)^{2n} > 1+2nx \quad \square$.

1.4.16 Questão 16

☞ **Exemplo 11.** Se $n \in N$ e $x < 1$ então $(1-x)^n \geq 1-nx$, pois de $x < 1$ segue que $-x > -1$ e daí aplicamos a desigualdade de Bernoulli $(1+y)^n \geq 1+ny$ com $y = -x$.

1.4.17 Questão 17

☾ **Corolário 10.** Se a e $a+x$ são positivos, então vale

$$(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$

Pois $\dfrac{a+x}{a} = (1+\dfrac{x}{a}) > 0$ então podemos aplicar a desigualdade de Bernoulli $(1+y)^n \geq 1+ny$ com $y = \dfrac{x}{a}$, resultando em

$$(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$

Se $a \neq 0$, arbitrário em $\mathbb{R}$, podendo agora ser negativo, substituímos $y = \dfrac{x}{a}$ em $(1+x)^{2n} > 1+2nx$. chegando na desigualdade

$$(a+x)^{2n} > a^{2n} + a^{2n-1}2nx.$$

Se vale $\dfrac{x}{a} < 1$ então da desigualdade $(1-y)^n \geq 1-ny$, novamente tomamos $y = \dfrac{x}{a}$ de onde segue

$$(a-x)^n \geq a^n - a^{n-1}nx.$$

1.4.18 Questão 18

✍ **Propriedade 62.** Sejam sequências (a_k) , (b_k) em um corpo ordenado K onde cada b_k é positivo, sendo $\dfrac{a_1}{b_1}$ o mínimo e $\dfrac{a_n}{b_n}$ o máximo dos termos da sequência de termo $\dfrac{a_k}{b_k}$ então vale

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Demonstração. Para todo k vale $\dfrac{a_1}{b_1} \leq \dfrac{a_k}{b_k} \leq \dfrac{a_n}{b_n} \Rightarrow b_k\dfrac{a_1}{b_1} \leq a_k \leq b_k\dfrac{a_n}{b_n}$ pois $b_k > 0$, aplicamos a soma $\sum\limits_{k=1}^{n}$ em ambos lados, de onde segue

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\frac{a_1}{b_1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{a_n}{b_n}$$

dividindo por $\sum_{k=1}^{n} b_k$ que é positivo, temos finalmente

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \le \frac{a_n}{b_n}.$$

1.4.19 Questão 19

✍ **Propriedade 63** (Multiplicatividade).

$$|a||b| = |a.b|$$

para a e b reais quaisquer.

Demonstração. Vale que $|x.y|^2 = (x.y)^2 = x^2y^2$ e $(|x||y|)^2 = |x|^2|y|^2 = x^2.y^2$ os quadrados desses números são iguais e eles são não negativos, então segue que $|x.y| = |x||y|$.

Demonstração.[2] $|a.b| = \sqrt{(a.b)^2} = \sqrt{a^2.b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a||b|$.

✍ **Propriedade 64.** Se $x \neq 0$ então $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$.

Demonstração. Vale $|x||\frac{1}{x}| = |\frac{x}{x}| = 1$ daí $|\frac{1}{x}|$ é inverso de $|x|$, sendo $\frac{1}{|x|}$.

☾ **Corolário 11** (Preserva divisão).

$$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$$

1.4.20 Questão 20

✍ **Propriedade 65.**

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| = |\prod_{k=1}^{n} a_k|$$

Demonstração. Por indução, para $n = 1$ vale, supondo para n números

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| = |\prod_{k=1}^{n} a_k|$$

vamos provar para $n + 1$

$$\prod_{k=1}^{n+1} |a_k| = |\prod_{k=1}^{n+1} a_k|$$

temos

$$\prod_{k=1}^{n+1} |a_k| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|.|a_{n+1}| = |\prod_{k=1}^{n} a_k||a_{n+1}| = |\prod_{k=1}^{n} a_k a_{n+1}| = |\prod_{k=1}^{n+1} a_k| \quad \square.$$

Propriedade 66 (Desigualdade triangular generalizada). Sejam $g(k)$ definida para k inteiro $,a, b \in Z$, então vale

$$|\sum_{k=a}^{b} g(k)| \leq \sum_{k=a}^{b} |g(k)|.$$

Demonstração. Para cada k vale

$$-|g(k)| \leq g(k) \leq |g(k)|$$

aplicando o somatório em ambos lados segue

$$-\sum_{k=a}^{b} |g(k)| \leq \sum_{k=a}^{b} g(k) \leq \sum_{k=a}^{b} |g(k)|$$

que implica

$$|\sum_{k=a}^{b} g(k)| \leq |\sum_{k=a}^{b} |g(k)|| = \sum_{k=a}^{b} |g(k)|$$

pois os termos $|g(k)|$ somados são não negativos ,logo a soma desses termos é não-negativa e o módulo da soma é igual a soma.

Propriedade 67. A identidade que provamos acima vale para números reais, vamos provar agora por indução que se vale $|z + w| \leq |z| + |w|$ para quaisquer z, w então vale

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

de maneira que possa ser usada para números complexos , normas e outras estruturas que satisfazem a desigualdade triangular.

Demonstração.[2] Por indução sobre n, para $n = 1$ tem-se

$$|\sum_{k=1}^{1} z_k| = |z_1| \leq \sum_{k=1}^{1} |z_k| = |z_1|$$

logo vale. Supondo a validade para n

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

vamos provar para $n+1$

$$|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Da hipótese da indução somamos $|z_{n+1}|$ em ambos lados, logo

$$|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_k| \leq |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Vejamos outras[1] demonstrações da desigualdade triangular

1.4.21 Questão 22

Vamos resolver um caso mais geral do problema.

Definição 4 (Mediana). Dada uma sequência finita $(y_k)_1^n$ seus termos podem ser rearranjados para forma uma sequência não-decrescente $(x_k)_1^n$. A mediana $\widetilde{X}$ é definida da seguinte maneira

- Se n é ímpar $\widetilde{X} = x_{\frac{n+1}{2}}$.
- Se n é par $\widetilde{X} = \dfrac{x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}}}{2}$.

[1] Essas demonstrações aprendi com Pedro Kenzo, obrigado por compartilhar as soluções.

☞ **Exemplo 12.** Seja $(x_k)_1^n$ uma sequência crescente $f : R \to R$ com $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k|$. Se $x < x_1$ então

$$f(x) = -nx + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

logo f é decrescente para $x < x_1$. Tomando $x > x_n$

$$f(x) = nx - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

logo f é crescente para $x > x_n$.

Seja agora $x \in [x_t, x_{t+1})$, t variando de 1 até $n-1$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{t}(x - x_k) - \sum_{k=t+1}^{n}(x - x_k) = (2t - n)x + \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=t+1}^{n} x_k$$

portanto a função é decrescente se $t < \frac{n}{2}$ e crescente se $t > \frac{n}{2}$, de $t = 1$ até $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em cada intervalo $[x_t, x_{t+1})$ a função é decrescente, sendo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ segmentos decrescentes, de $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ até $n-1$, temos $n - 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ segmentos crescentes.

- Se n é ímpar f é decrescente em $[x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1})$ e crescente em $[x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2})$ logo o ponto $x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = x_{\frac{n+1}{2}}$ é o único ponto de mínimo.

- Se n é par a função é constante em $[x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1})$, todos os pontos desse intervalo são pontos de mínimo. Em especial o ponto $\frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ é ponto de mínimo.

Concluímos que um ponto de mínimo acontece sempre na mediana da sequência.

☞ **Exemplo 13.** Achar o mínimo da função $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - k|$ para n ímpar e para n par.

Trocando n por $2n$ temos que o mínimo acontece no ponto $x_{\frac{2n}{2}} = x_n = n$, substituímos então tal valor na função

$$\sum_{k=1}^{2n}|n-k| = \sum_{k=1}^{n}|n-k| + \sum_{k=n+1}^{2n}|n-k| = \sum_{k=1}^{n}(n-k) + \sum_{k=n+1}^{2n}(-n+k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(n-k) + \sum_{k=1}^{n}(k) = \sum_{k=1}^{n} n = n.n = n^2.$$

portanto o mínimo de $\sum\limits_{k=1}^{2n}|x-k|$ é n^2.

- $\min\{|x-1|+|x-2|\} = 1$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|\} = 4$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|\} = 9$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|+|x-7|+|x-8|\} = 16.$

Agora para n ímpar, trocamos n por $2n+1$ o mínimo acontece no ponto $x_{\frac{(2n+1)+1}{2}} = x_{n+1} = n+1$, aplicando na função temos

$$\sum_{k=1}^{2n+1}|n+1-k| = \sum_{k=1}^{n+1}|n+1-k| + \sum_{k=n+2}^{2n+1}|n+1-k| = \sum_{k=1}^{n+1}(n+1-k) + \sum_{k=n+2}^{2n+1} -(n+1)+k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|\} = 2$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|\} = 6$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|+|x-7|\} = 12$
- $\min\{|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|+|x-7|+|x-8|+|x-9|\} = 20.$

1.4.22 Questão 23

✍ **Propriedade 68.** $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon.$

Demonstração. Partindo da desigualdade $|a-b| < \varepsilon$, somamos $|b|$ a ambos lados

$$|a-b|+|b|<\varepsilon+|b|$$

e usamos agora a desigualdade triangular

$$|a|\leq|a-b|+|b|<\varepsilon+|b|$$

daí segue

$$|a|\leq\varepsilon+|b|.$$

Da mesma forma vale se $|a-b|<\varepsilon$ então $|b|\leq\varepsilon+|a|\Rightarrow|b|-\varepsilon\leq|a|$ e com $|a|\leq\varepsilon+|b|$. temos

$$|b|-\varepsilon\leq|a|\leq\varepsilon+|b|.$$

Vimos que $|a-b|<\varepsilon$ implica $|a|<|b|+\varepsilon$, mas como $a\leq|a|$ segue $a<|b|+\varepsilon$.

1.4.23 Questão 24

✍ **Propriedade 69.** Dado um corpo ordenado K , são equivalentes

1. K é arquimediano.
2. Z é ilimitado superiormente e inferiormente.
3. Q é ilimitado superiormente e inferiormente.

Demonstração.

- $1\Rightarrow2$. $N\subset Z$ então Z é ilimitado superiormente. Suponha por absurdo que Z seja limitado inferiormente, então existe $a\in K$ tal que $a<x\ \forall\ x\in Z$, logo $-a>-x$, porém existe n natural tal que $n>-a\Rightarrow\underbrace{-n}_{\in Z}<a$ o que contraria a hipótese.

- $2\Rightarrow3$. $Z\subset Q$ portanto Q é ilimitado superiormente e inferiormente.

- $3\Rightarrow1$. Para todo $y\in K$ existe $\frac{a}{b}\in Q$ com $a,b>0$ naturais tal que $\frac{a}{b}>y$, daí $a>yb$, podemos tomar $y=\frac{x}{b}$, logo $a>x$, $a\in N$, portanto N é ilimitado superiormente e o corpo é arquimediano.

1.4.24 Questão 25

✍ **Propriedade 70.** Seja K um corpo ordenado. K é arquimediado $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ em K existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Como K é arquimediano, então $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > n > \frac{1}{\varepsilon}$ por desigualdade de Bernoulli temos $2^n > n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

$\Leftarrow$). Se $\forall\ \varepsilon > 0$ em K existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, tomamos $\varepsilon = \frac{1}{x}$, $x > 0$ arbitrário então $x < 2^n$, com $2^n = m \in N$ então K é arquimediano, N não é limitado superiormente.

1.4.25 Questão 26

✍ **Propriedade 71.** Seja $a > 1$, K corpo arquimediano, $f : Z \to K$ com $f(n) = a^n$, então

- $f(Z)$ não é limitado superiormente.
- $\inf(F(Z)) = 0$.

Demonstração.

- Vale que $a > 1$ então $a = p+1$ onde $p > 0$, por desigualdade de Bernoulli temos $(p+1)^n \geq 1+pn$. $\forall\ \ x > 0 \in K$ existe n tal que $n > \frac{x}{p} \Rightarrow pn > x \Rightarrow (p+1)^n \geq 1+pn > x$, logo $f(Z)$ não é limitado superiormente.

- 0 é cota inferior de $f(Z)$ pois vale $0 < a^n\ \forall\ n \in Z$. Suponha que exista x tal que $0 < x < a^m\ \forall\ \ m \in Z$, sabemos que existe $n \in N$ tal que $a^n > \frac{1}{x}$ daí $x > \frac{1}{a^n} = a^{-n}$, absurdo, então 0 deve ser o ínfimo.

1.4.26 Questão 27

✍ **Propriedade 72.** Se s é irracional e $u \neq 0$ é racional então $u.s$ é irracional.

Demonstração. Suponha que s é irracional e $u.s$ seja racional, então $u.s = \frac{p}{q}$ com $p \neq 0$ e $q \neq 0$ inteiros e como $u \neq 0$ é racional ele é da forma $u = \frac{j}{v}$, $j \neq 0$ e $v \neq 0$, inteiros, logo

$$\frac{j}{v}s = \frac{p}{q}$$

multiplicando por $\frac{v}{j}$ ambos lados segue

$$s = \frac{p.v}{j.q}$$

que é um número racional, logo chegamos a um absurdo.

✍ **Propriedade 73.** Se s é irracional e t racional, então $s + t$ é irracional.

Demonstração. Suponha $s + t$ racional, então $s + t = \frac{p}{q}$ daí $s = \frac{p}{q} - t$ que seria racional por ser diferença de dois racionais, um absurdo então segue que $s + t$ é irracional.

☞ **Exemplo 14.** Existem irracionais a e b tais que $a+b$ e $a.b$ sejam racionais. Exemplos $a = 1+\sqrt{5}$, $b = 1-\sqrt{5}$ daí $a+b = 2$ e $a.b = 1-5 = -4$.

1.4.27 Questão 28

✍ **Propriedade 74.** Sejam a, b, c, d racionais então

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Demonstração.

$\Leftarrow$). Se $a = c$ e $b = d$ a temos $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$). Suponha $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ então $a - c = \sqrt{2}(d - b)$, se $d = b$ então $a = c$ e terminamos, se não vale que

$$\frac{a-c}{d-b} = \sqrt{2}$$

o que é absurdo pois $\sqrt{2}$ é irracional.

1.4.28 Questão 29

☞ **Exemplo 15.** O conjunto da forma $\{x + y\sqrt{p}\}$ onde x e y são racionais é subcorpo dos números reais.

- O elemento neutro da adição 0 pertence ao conjunto. Pois $0 = 0 + 0\sqrt{p}$
- O elemento neutro da multiplicação 1 pertence ao conjunto. Pois $1 = 1+0\sqrt{p}$
- A adição é fechada. Pois $x + y\sqrt{p} + z + w\sqrt{p} = x + z + (y + w)\sqrt{p}$.
- O produto é fechado. Pois $(x+y\sqrt{p})(z+w\sqrt{p}) = xz+xw\sqrt{p}+yz\sqrt{p}+y.wp$.
- Dado $x \in A$ implica $-x \in A$. Pois dado $x+y\sqrt{p}$ temos o simétrico $-x-y\sqrt{p}$.
- Dado $x \neq 0 \in A$ tem-se $x^{-1} \in A$. Pois dado $x + y\sqrt{p}$ temos inverso
$$\frac{x - y\sqrt{p}}{x^2 - y^2p}$$
como inverso multiplicativo.

☞ **Exemplo 16.** O conjunto dos elementos da forma $a + b\alpha$ onde $\alpha = \sqrt[3]{2}$ não é um corpo pois o produto não é fechado, vamos mostrar que α^2 não pertence ao conjunto.

Suponha que $\alpha^2 = a + b\alpha$ então $\alpha^3 = a\alpha + b\alpha^2 = 2$ substituindo a primeira na segunda temos que

$$a\alpha + b(a + b\alpha) = a\alpha + ab + b^2\alpha = \alpha(b^2 + a) + ab = 2 \Rightarrow \alpha(b^2 + a) = 2 - ab$$

se $b^2 + a \neq 0$ então $\alpha = \dfrac{2 - ab}{b^2 + a}$ o que é absurdo pois α é irracional, então devemos ter $a = -b^2$, multiplicamos a expressão $a\alpha + b\alpha^2 = 2$ por α, de onde segue $a\alpha^2 + 2b = 2\alpha$, substituindo $\alpha^2 = a + b\alpha$ nessa última temos

$$a(a + b\alpha) + 2b = a^2 + ab\alpha + 2b = 2\alpha \Rightarrow \alpha(2 - ab) = 2b + a^2$$

se $2 \neq ab$ chegamos num absurdo de $\alpha = \frac{2b + a^2}{2 - ab}$, temos que ter então $2 = ab$ e $a = -b^2$ de onde segue $2 = -b^3$, porém não existe racional que satisfaz essa identidade, daí não podemos escrever α^2 da forma $a + b\alpha$ com a e b racionais, portanto o produto de elementos não é fechado e assim não temos um corpo.

1.4.29 Questão 30

✍ **Propriedade 75.** Sejam $a, b \in Q^+$. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais.

Demonstração.

$\Rightarrow$).

Se $a = b$ então $2\sqrt{a} \in Q$ o que implica $\sqrt{a} = \sqrt{b} \in Q$. Agora o caso de $a \neq b$.

Suponha que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional então seu inverso também racional , que é $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$, daí $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in Q$, a soma $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{a} \in Q$ logo $\sqrt{a} \in Q$, a diferença de números racionais também é um número racional $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a} = \sqrt{b}$, portanto $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais.

$\Leftarrow$). A volta vale pois a soma de racionais é um racional.

1.4.30 Questão 31

✍ **Propriedade 76.** Sejam $A \subset R$ não vazio limitado e $c \in R$, então

1. $c \leq \sup(A) \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A$ tal que $c - \varepsilon < x$.
2. $c \geq \inf(A) \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A$ tal que $c + \varepsilon > x$.

Demonstração.

1. $\Rightarrow$). Para todo $\varepsilon > 0$ vale que $c - \varepsilon < \sup(A)$. Dado $\varepsilon > 0$ fixo, se não existisse $x \in A$ tal que $c - \varepsilon < x$ então $c - \varepsilon$ seria cota superior menor que o supremo, o que é absurdo, contraria o fato do supremo ser a menor das cotas superiores.

   $\Leftarrow$). Suponha por absurdo que fosse $c > \sup(A)$, poderíamos tomar $c - \sup(A) = \varepsilon$ daí $c - c + \sup(A) = \sup(A) < x$ o que é absurdo.

2. $\Rightarrow$). Para todo $\varepsilon > 0$ vale que $c + \varepsilon < \inf(A)$. Dado $\varepsilon > 0$ fixo, se não existisse $x \in A$ tal que $c + \varepsilon > x$ então $c + \varepsilon$ seria cota superior menor que o ínfimo, o que é absurdo, contraria o fato do ínfimo ser a menor das cotas inferiores.

   $\Leftarrow$). Suponha por absurdo que fosse $c < \inf(A)$, poderíamos tomar $\inf(A) - c = \varepsilon$ daí $x < c + \inf(A) - c = \inf(A)$ o que é absurdo.

1.4.31 Questão 32

☞ **Exemplo 17.** Seja $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\inf A = 0$. Sabemos que 0 é uma cota inferior, agora vamos mostrar que 0 é a menor delas. Dado $0 < x$, x não pode ser cota inferior, pois existe n natural tal que $\frac{1}{n} < x$, logo 0 é o ínfimo.

1.4.32 Questão 33

✍ **Propriedade 77.** Se A é limitado inferiormente e $B \subset A$ então $\inf(A) \leq \inf(B)$.

Demonstração. $\inf A$ é cota inferior de A, logo também é cota inferior de B, sendo cota inferior de B vale $\inf A \leq \inf B$, pois $\inf B$ é a maior cota inferior de B.

✍ **Propriedade 78.** Se A é limitado superiormente e $B \subset A$ então $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Demonstração. Toda cota superior de A é cota superior de B, logo o $\sup(A)$ é cota superior de B, como $\sup(B)$ é a menor das cotas superiores de B segue que $\sup(A) \geq \sup(B)$.

☾ **Corolário 12.** Se A e B são conjuntos limitados com $B \subset A$ então vale $\sup(A) \geq \sup(B) \geq \inf(B) \geq \inf(A)$ pois temos $\sup(A) \geq \sup(B)$ e $\inf(A) \leq \inf(B)$, tendo ainda que $\sup(B) \geq \inf(B)$.

1.4.33 Questão 34

✍ **Propriedade 79.** Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$.

Demonstração. Todo $y \in B$ é cota superior de A, logo $\sup A \leq y$ para cada y pois $\sup A$ é a menor das cotas superiores, essa relação implica que $\sup A$ é cota inferior de B logo $\sup A \leq \inf B$, pois $\inf B$ é a maior cota inferior.

✍ **Propriedade 80.** $\sup A = \inf B \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ dado , existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. $\Leftarrow$, usamos a contrapositiva. Não podemos ter $\inf B < \sup A$ pela propriedade anterior, então temos forçosamente que $\inf B > \sup A$, tomamos então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e temos $y - x \geq \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $y \in B$ pois $y \geq \inf B$ e $\sup A \geq x$ de onde segue $-x \geq -\sup A$, somando esta desigualdade com a de y tem-se $y - x \geq \inf B - \sup A = \varepsilon$.

$\Rightarrow$, Se $\sup A = \inf B$. Então sendo para qualquer $\varepsilon > 0$, $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota superior de A, pois é menor que o $\sup A$ (que é a menor cota superior), da mesma maneira $\inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota inferior de B, então existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

de onde segue $\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < x$, $-x < \frac{\varepsilon}{2} - \inf B$ e $y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ somando ambas tem-se $y - x < \varepsilon$. □

1.4.34 Questão 35 e 36

✍ **Propriedade 81.** Se $c > 0$ então $\sup(c.A) = c.\sup A$.

Demonstração. Seja $a = \sup A$. Para todo $x \in A$ tem-se $x \leq a$, de onde segue $cx \leq ca$, assim ca é cota superior de cA. Seja d tal que $d < ca$ então $\frac{d}{c} < a$ logo $\frac{d}{c}$ não é cota superior de A, implicando a existência de pelo menos um x tal que $\frac{d}{c} < x$, $d < cx$ de onde segue que d não é cota superior de cA, assim ca é a menor cota superior de cA logo o supremo.

✍ **Propriedade 82.** Se $c > 0$, $\inf cA = c \inf A$.

Demonstração.

Seja $a = \inf A$, então vale $a \leq x$ para todo x, multiplicando por c segue $ca \leq cx$ de onde concluímos que ca é cota inferior de cA. Seja d tal que $ca < d$, então $a < \frac{d}{c}$, implicando que $\frac{d}{c}$ não é cota inferior de A assim existe $x \in A$ tal que $x < \frac{d}{c} \Rightarrow cx < d$, logo d não é cota inferior de cA, implicando que $c.a$ é a maior cota inferior, logo o ínfimo do conjunto.

✍ **Propriedade 83.** Se $c < 0$ então $\inf(cA) = c \sup A$.

Demonstração. Seja $a = \sup A$. Tem-se $x \leq a$ para todo $x \in A$, multiplicando por c segue $cx \geq ca$ para todo $x \in A$. Então ca é uma cota inferior de cA. Se $d > ca$ tem-se $\frac{d}{c} < a$ como a é supremo, isso significa que existe $x \in A$ tal que $\frac{d}{c} < x$ logo $d > cx$, assim esse d não é cota inferior, implicando que ca é a menor cota inferior, então ínfimo do conjunto.

A questão 35 segue da próxima propriedade com $c = -1$.

✍ **Propriedade 84.** Se $c < 0$ então $\sup(cA) = c \inf A$.

Demonstração. Seja $b = \inf A$ então vale $b \leq x$ para todo $x \in A$, multiplicando por c segue $cb \geq cx$ assim cb é cota superior de cA. Agora tome d tal que $cb > d$ segue $b < \frac{d}{c}$, como b é ínfimo existe $x \in A$ tal que $x < \frac{d}{c}$, $cx > d$ assim esse d não pode ser cota superior de cA, então cb é a menor cota superior, logo o ínfimo.

1.4.35 Questão 37

Item I

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos limitados .

✍ **Propriedade 85.** O conjunto $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ também é limitado.

Demonstração. Se A é limitado , existe t tal que $|x| < t$ para todo $x \in A$ e se B é limitado existe u tal que $|y| < u$ $\forall$ $y \in B$. Somando as desigualdades e usando desigualdade triangular segue $|x| + |y| < u + t$ e $|x + y| \leq |x| + |y| < u + t$ logo o conjunto $A + B$ é limitado.

Item II

Propriedade 86 (Propriedade aditiva). Vale $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Demonstração. Como A, B são limitidados superiomente, temos $\sup A := a$ e $\sup B := b$, como vale $a \geq x$ e $b \geq y$ para todos $x, y \in A, B$ respectivamente segue que $a + b \geq x + y$ logo o conjunto $A + B$ é limitado superiormente. Para todo e qualquer $\varepsilon > 0$ existem x, y tais que

$$a < x + \frac{\varepsilon}{2}, \quad b < y + \frac{\varepsilon}{2}$$

somando ambas desigualdades-segue-se que

$$a + b < x + y + \varepsilon$$

que mostra que $a + b$ é a menor cota superior, logo o supremo, fica valendo então

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Item III

Propriedade 87. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Demonstração. Sejam $a = infA$ e $b = infB$ então $\forall x, y \in A, B$ tem-se $a \leq x$, $b \leq y$ de onde segue por adição $a + b \leq x + y$, assim $a + b$ é cota inferior de $A + B$. $\exists x, y \in A, B$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ vale $x < a + \frac{\varepsilon}{2}$ e $y < b + \frac{\varepsilon}{2}$ pois a e b são as maiores cotas inferiores, somando os termos das desigualdades segue $x + y < a + b + \varepsilon$, que implica que $a + b$ é a maior cota inferior logo o ínfimo.

1.4.36 Questão 38

Definição 5 (Função limitada). Seja $A \subset R$, $f : A \to R$ é dita limitada quando o conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, se $f(A)$ é limitado superiormente então dizemos que f é limitada superiormente e caso $f(A)$ seja limitado inferiormente dizemos que A é limitado inferiormente.

Seja uma função limitada $f : V \to R$.

Definição 6.

$$\sup f := \sup f(V) = \sup\{f(x) \mid x \in V\}$$

Definição 7.

$$\inf f := \inf f(V) = \inf\{f(x) \mid x \in V\}$$

Propriedade 88. A função soma de duas funções limitadas é limitada.

Demonstração. Vale $|f(x)| \le M_1$ e $|g(x)| \le M_2$ $\forall\, x \in A$ então

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M_1 + M_2 = M$$

portando a função soma $f + g$ de duas funções limitadas é também uma função limitada.

Sejam $f, g : V \to R$ funções limitadas e $c \in R$.

Propriedade 89.

$$\sup(f + g) \le \sup f + \sup g.$$

Demonstração.

Sejam

$$A = \{f(x) \mid x \in V\}, \quad B = \{g(y) \mid y \in V\}, \quad C = \{g(x) + f(x) \mid x \in V\}$$

temos que $C \subset A + B$, pois basta tomar $x = y$ nos conjuntos, logo

$$\sup(A + B) \ge \sup(f + g)$$

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup f + \sup g \ge \sup(f + g)$$

✍ **Propriedade 90.**

$$\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

Demonstração. De $C \subset A + B$ segue tomando o ínfimo

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B) = \inf(f) + \inf(g) \leq \inf(C) = \inf(f+g).$$

☞ **Exemplo 18.** Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$

- Vale $\sup f = 1$, $\sup g = 0$, $f + g = 0$ logo $\sup(f+g) = 0$ vale então

$$\sup f + \sup g = 1 > \sup(f+g) = 0.$$

- Temos ainda $\inf f = 0, \inf g = -1$, $f + g = 0$, $\inf(f+g) = 0$ logo

$$\inf f + \inf g = -1 < \inf(f+g) = 0.$$

As desigualdades estritas também valem se consideramos as funções definidas em $[-1,1]$, nesse caso $\sup f + \sup g = 2$ e $\inf f + \inf g = -2$ e $\sup(f+g) = 0 = \inf(f+g)$.

1.4.37 Questão 39

Definição 8. Sejam A e B conjuntos não vazios, definimos $A.B = \{x.y \mid x \in A, y \in B\}$.

✍ **Propriedade 91.** Sejam A e B conjuntos limitados de números positivos, então vale $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.

Demonstração. Sejam $a = \sup(A)$ e $b = \sup(B)$ então valem $x \leq a$ e $y \leq b$, $\forall\, x \in A, y \in B$ daí $x.y \leq a.b$, logo $a.b$ é cota superior de $A.B$. Tomando $t < a.b$ segue que $\frac{t}{a} < b$ logo existe $y \in B$ tal que $\frac{t}{a} < y$ daí $\frac{t}{y} < a$ logo existe $x \in A$ tal que $\frac{t}{y} < x$ logo $t < x.y$ então t não pode ser uma cota superior, implicando que $a.b$ é o supremo do conjunto.

✍ **Propriedade 92.** Sejam A e B conjuntos limitados de números positivos, então vale $\inf(A.B) = \inf(A).\inf(B)$.

ꕤ **Demonstração.** Sejam $a = \inf(A)$ e $b = \inf(B)$ então valem $x \geq a$ e $y \geq b$, $\forall\, x \in A, y \in B$ daí $x.y \geq a.b$, logo $a.b$ é cota inferior de $A.B$. Tomando $t > a.b$ segue que $\frac{t}{a} > b$ logo existe $y \in B$ tal que $\frac{t}{a} > y$ daí $\frac{t}{y} > a$ logo existe $x \in A$ tal que $\frac{t}{y} > x$ logo $t < x.y$ então t não pode ser uma cota inferior, implicando que $a.b$ é o ínfimo do conjunto.

1.4.38 Questão 40

✍ **Propriedade 93.** Sejam $f, g : A \to R$ funções limitadas então $f.g : A \to R$ é limitada.

ꕤ **Demonstração.** Vale que $|f(x)| < M_1$ e $|g(x)| < M_2$ então $|f(x)g(x)| < M_1M_2 = M\ \forall\ x \in A$, portanto $f.g : A \to R$ é limitada.

✍ **Propriedade 94.** Sejam $f, g : A \to R^+$ limitadas superiormente, então

$$\sup(f.g) \leq \sup(f)\sup(g).$$

ꕤ **Demonstração.** Sejam $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$, $B = \{g(y). \mid y \in A\}$ e $A = \{f(x) \mid x \in A\}$. Vale que $C \subset A.B$ para ver isso basta tomar $x = y$ nas definições acima, daí

$$\sup(A.B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(A)\sup(B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(f)\sup(g) \geq \sup(f.g).$$

✍ **Propriedade 95.** Sejam $f, g : A \to R^+$ limitadas inferiormente, então

$$\inf(f.g) \geq \inf(f)\inf(g).$$

Demonstração. Sejam $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$, $B = \{g(y). \mid y \in A\}$ e $A = \{f(x) \mid x \in A\}$. Vale que $C \subset A.B$, daí

$$\inf(A.B) \le \inf(C)$$

$$\inf(A)\inf(B) \le \inf(C)$$

$$\inf(f)\inf(g) \le \inf(f.g).$$

Exemplo 19. Sejam $f, g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, vale $\sup f = 2$, $\sup g = 1$ $\sup f.\sup g = 2$ e $\sup(f.g) = 1$, pois $f.g = 1$ logo

$$\sup f \sup g > \sup(f.g).$$

Da mesma maneira $\inf f = 1$, $\inf g = \frac{1}{2}$ vale $\inf f.\inf g = \frac{1}{2}$ e $\inf(f.g) = 1$ portanto

$$\inf f.\inf g < \inf(f.g).$$

Propriedade 96. Seja $f : A \to \mathbb{R}^+$ limitada superiormente então $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

Demonstração. Seja $a = \sup f$ tem-se $f(x) \le a$ $\forall\, x$ daí $f(x)^2 \le a^2$ então a^2 é cota superior de f^2, e é a menor cota superior pois se $0 < c < a^2$ então $\sqrt{c} < a$ logo existe x tal que $\sqrt{c} < f(x) < a$ e daí $c < f(x)^2 < a^2$ logo a^2 é a menor cota superior $\sup(f^2) = \sup(f)^2$.

Propriedade 97. Seja $f : A \to \mathbb{R}^+$ então $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

Demonstração. Seja $a = \inf f$ tem-se $f(x) \ge a$ $\forall\, x$ daí $f(x)^2 \ge a^2$ então a^2 é cota inferior de f^2, e é a maior cota inferior pois se $a^2 < c$ então $a < \sqrt{c}$ logo existe x tal que $a < f(x) < \sqrt{c}$ e daí $a^2 < f(x)^2 < c$ logo a^2 é a maior cota inferior $\inf(f^2) = \inf(f)^2$.

1.4.39 Questão 42

★ **Teorema** 1 (Teorema das raízes racionais). Se o polinômio

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

de coeficientes inteiros, tem uma raiz racional $x = \frac{r}{s}$ tal que $mdc(r, s) = 1$ então $s|a_n$ e $r|a_0$.

Demonstração. Se $x = \frac{r}{s}$ é raiz de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, então temos

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k = 0$$

multiplicando por s^n em ambos os lados temos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k.s^{n-k} = 0$$

como $s|0$ então $s|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k.s^{n-k}$, na soma s não aparece como fator apenas quando $n - k = 0$, $n = k$, logo abrindo o limite superior do somatório temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k.s^{n-k} + a_n r^n.s^{n-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k.s^{n-k} + a_n r^n = 0$$

daí s deve dividir $a_n r^n$, como s é primo com r implica que também é primo com r^n, portanto s deve dividir a_n. Pelo mesmo argumento, temos que $r|0$ logo r deve dividir $\sum_{k=0}^{n} a_k r^k.s^{n-k}$, como o único fator onde r não aparece é quando $k = 0$, abrimos o limite inferior do somatório

$$a_0 r^0.s^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} a_k r^k.s^{n-k} = a_0.s^n + \sum_{k=1}^{n} a_k r^k.s^{n-k} = 0$$

logo r deve dividir $a_0.s^n$, mas como r é primo com s^n, ele deve dividir a_0.

Corolário 13. Se o polinômio de coeficientes inteiros $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ possui raízes racionais então elas devem pertencer ao conjunto

$$A = \{\frac{p}{q} \mid p|a_0 \; q|a_n\}.$$

☾ **Corolário 14.** Se $a_n = 1$ em um polinômio de coeficientes inteiros $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ então suas raízes racionais devem ser inteiras, pois

$$A = \{\frac{p}{q} \mid p|a_0 \; q|1\}$$

então $q = 1$ ou $q = -1$, e de qualquer forma implica que as soluções são da forma $x = p$ para algum $p \in Z$. Então , nessas condições, as raízes do polinômio $P(x)$ são inteiras ou irracionais.

✍ **Propriedade 98.** Seja $P(x) = x^n - a$, $a > 0 \in Z$, se a não é n-ésima potência de um número natural então a única raiz positiva de P , que é $\sqrt[n]{a}$, é irracional.

Demonstração. Como P possui coeficiente $a_n = 1$ então ele possui raiz irracional ou inteira, se a raiz positiva m fosse inteira (logo natural) teríamos $m^n - a = 0$ e daí $a = m^n$ é potência de um número natural, o que contraria a hipótese de a não ser n-ésima potência de um número natural, logo $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

1.4.40 Questão 43

✍ **Propriedade 99.** Sejam I um intervalo não degenerado e $k > 1$ natural. O conjunto $A = \{\frac{m}{k^n} \in I \mid m, n \in Z\}$ é denso em I.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que $k^n > \frac{1}{\varepsilon}$, daí os intervalos $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$ tem comprimento $\frac{m+1}{k^n} - \frac{m}{k^n} = \frac{1}{k^n} < \varepsilon$.

Existe um menor inteiro $m+1$ tal que $x + \varepsilon \leq \frac{m+1}{k^n}$ daí $\frac{m}{k^n} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ pois se fosse $x + \varepsilon < \frac{m}{k^n}$ iria contrariar a minimalidade de $m+1$ e se fosse $\frac{m}{k^n} < x - \varepsilon$

então $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$ teria comprimento maior do que de $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, que é ε, uma contradição com a suposição feita anteriormente.

1.4.41 Questão 44

✍ **Propriedade 100.** O conjunto dos polinômios com coeficientes racionais é enumerável.

Demonstração. Seja P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais de grau $\leq n$ a função $f : P_n \to Q^{n+1}$ tal que

$$P(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = (a_k)_1^n$$

é uma bijeção. Como Q^{n+1} é enumerável por ser produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis, segue que P_n é enumerável.

Sendo A o conjunto dos polinômios de coeficientes racionais, vale que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

portanto A é união enumerável de conjuntos enumeráveis , sendo assim A é enumerável.

Definição 9 (Número algébrico). Um número real (complexo) x é dito algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

✍ **Propriedade 101.** O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Demonstração.[1] Enumeramos $A = \{P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots\}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros, definimos B_k como conjunto das raízes reais de f_k, então vale que

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

como cada B_k é finito B fica sendo união enumerável de conjuntos finitos, então B é enumerável.

Demonstração.[2] Seja B o conjunto dos algébricos e A o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros. Para cada algébrico x escolhemos um polinômio P_x tal que $P_x(x) = 0$.

Definimos a função $f : B \to A$ tal que $F(x) = P_x$. Dado $P_x \in F(B)$, temos que o conjunto $g^{-1}(P_x)$ dos valores $x \in B$ tal que $f(x) = P_x$ é finito pois $\underbrace{P_x}_{=y}$ possui um número finito de raízes e daí tem-se

$$B = \bigcup_{y \in f(B)} g^{-1}(y)$$

logo B é união enumerável de conjuntos enumeráveis (no caso finitos), então B é enumerável.

Corolário 15. Existem números reais que não são algébricos, pois se todos fossem algébricos $\mathbb{R}$ seria enumerável.

Definição 10 (Números transcendentes). Os números reais que não são algébricos são ditos transcendentais

Propriedade 102. O conjunto dos números algébricos é denso em $\mathbb{R}$, pois todo racional é algébrico, o racional $\frac{b}{a}$ é raiz do polinômio com coeficientes inteiros

$$ax - b = P(x)$$

$ax - b = 0 \Leftrightarrow ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$. E $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

1.4.42 Questão 45

Propriedade 103. Seja A enumerável e $B = \mathbb{R} \setminus A$, então para cada intervalo (a, b), $(a, b) \cap B$ é não enumerável, em especial B é denso em $\mathbb{R}$.

Com esse resultado garantimos que o complementar de um conjunto enumerável é denso em R.

Demonstração. Sabemos que (a,b) é não enumerável, escrevemos

$$(a,b) = [(a,b)\cap A]\cup[(a,b)\cap(R\setminus A)] = [(a,b)\cap A]\cup[(a,b)\cap B],$$

sabemos que $(a,b)\cap A$ é enumerável se $(a,b)\cap B$ também o fosse, chegaríamos no absurdo de (a,b) ser enumerável, por ser união finita de conjuntos enumeráveis , portanto $(a,b)\cap B$ é não enumerável e B é denso em R.

Exemplo 20. Um conjunto pode não ser enumerável e também não ser denso em R, como (a,b).

1.4.43 Questão 46

Corolário 16. O conjunto T dos números transcedentais é não enumerável e denso em R. Pois A o conjunto dos números algébricos é enumerável, $T = R\setminus A$, como complementar dos números algébricos T é não enumerável e denso em R.

1.4.44 Questão 47

Propriedade 104. Seja $L|K$ uma extensão de corpo. Se $\alpha,\beta\in L$ são algébricos sobre K, então $\alpha\pm\beta, \alpha.\beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ com $\beta\neq 0$ são algébricos sobre K, Desse modo

$$\{\alpha\in L|\alpha \text{ é algébrico sobre } K\}$$

é um subcorpo de L que contém K.

Demonstração. Seja $\delta\in\{\alpha\pm\beta,\ \alpha.\beta\ \frac{\alpha}{\beta}\ \beta\neq 0\}$ então $\delta\in K(\alpha,\beta)$ e $K\subset K(\delta)\subset K(\alpha,\beta))$. Vamos mostrar que $[K(\alpha,\beta):K]<\infty$.

Sejam $f,\ g\in K[x]$ os polinômios mínimos de α e β sobre K, com graus m e n respectivamente temos que

$$[K(\alpha):K]=m,\quad [K(\beta):K]=n.$$

$f(x)\in k(x)\subset K(\beta)[x]$ é tal que $f(\alpha)=0$, logo α é algébrico sobre $K(\beta)$, sendo P o polinômio mínimo de α sobre $K(\beta)$ de grau s, ele divide $f(x)$ em $K(\beta)[x]$ logo $s\leq m$, portanto $[K(\beta)(\alpha) : K(\beta)] = s \leq m$ o grau é finito e a extensão total $[K(\alpha, \beta) : K] = sn$ é finita por multiplicatividade dos graus. Como a extensão $[K(\alpha, \beta) : K]$ é finita ela é algébrica.

Definição 11 (Fecho algébrico de Q). Consideremos a extensão de corpos $C|Q$. Chamamos de fecho algébrico de Q ao subcorpo $\overline{Q}$ de C definido por

$$\overline{Q} = \{\alpha \in C, \alpha \text{ é algébrico sobre } Q\}$$

$\overline{Q}$ é realmente corpo pela propriedade anterior. O conjunto dos números algébricos é um corpo.

1.4.45 Questão 48

Exemplo 21. Sendo $A_k = [k, \infty)$ temos uma sequência de intervalos que são conjuntos fechados porém a interseção

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

é vazia, pois suponha que exista $t \in A$, daí existe $k > t$ e $t \notin [k, \infty) = A_k$ logo não pode pertencer a interseção te todos esses conjuntos.

Da mesma maneira existe uma sequência decrescente de intervalos abertos limitados com interseção vazia, sendo $B_k = (0, \frac{1}{k})$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$$

B é vazio, pois se houvesse um elemento nele $x > 0$, conseguimos k tal que $\frac{1}{k} < x$ daí x não pertence ao intervalo $(0, \frac{1}{k}) = B_k$ portanto não pode pertencer a interseção.

1.4.46 Questão 49

✍ **Propriedade 105.** Sejam $B \subset A$ não vazios, A limitado superiormente, se $\forall\, x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y \geq x$ então $\sup(B) = \sup(A)$.

Demonstração. B é limitado superiormente pois está contido em um conjunto limitado e vale que $\sup(A) \geq \sup(B)$, pois $B \subset A$, suponha que fosse $c = \sup(A) > \sup(B)$, então tomando $\varepsilon = \sup(A) - \sup(B) > 0$, existe $x \in A$ tal que $x > c - \varepsilon = \sup(A) - \sup(A) + \sup(B) = \sup(B)$, por hipótese existe $y \geq x > \sup(B)$ com $y \in B$, o que é absurdo, pois não pode existir um elemento maior que o supremo.

✍ **Propriedade 106.** Sejam $B \subset A$ não vazios, A limitado inferiormente, se $\forall\, x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y \leq x$ então $\inf(B) = \inf(A)$.

Demonstração. B é limitado inferiormente pois está contido em um conjunto limitado e vale que $\inf(A) \leq \inf(B)$, pois $B \subset A$, suponha que fosse $c = \inf(A) < \inf(B)$, então tomando $\varepsilon = \inf(B) - \inf(A) > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < c + \varepsilon = \inf(A) - \sup(A) + \inf(B) = \inf(B)$, por hipótese existe $y \leq x < \inf(B)$ com $y \in B$, o que é absurdo, pois não pode existir um elemento menor que o ínfimo.

1.4.47 Questão 50

Definição 12 (Corte de Dedekind). Um corte de Dedekind é um par ordenado (A, B) onde $A, B \in Q$ não vazios, tais que A não possui máximo, $A \cup B = Q$ e $\forall\ x \in A,\ y \in B$ vale $x < y$.

Seja C o conjunto dos cortes de Dedekind.

✍ **Propriedade 107.** Em (A, B) vale $\sup(A) = \inf(B)$.

Demonstração. Já sabemos que vale $\sup(A) \leq \inf(B)$, pois $\forall\ x \in A,\ y \in B$ vale $x < y$ implica $\sup(A) < y$ e $\sup(A)$ ser cota inferior implica $\sup(A) \leq \inf(B)$, suponha por absurdo que fosse $\sup(A) < \inf(B)$, então o intervalo $(\sup(A), \inf(B))$ não possui valores $x \in A$, pois se não $x > \sup(A)$, nem $y \in B$ pois daí $y < \inf(B)$, mas como existem racionais em tal intervalo, pois Q é denso e $A \cup B = Q$, chegamos em um absurdo.

✍ **Propriedade 108.** Existe bijeção entre $\mathbb{R}$ e C o conjunto dos cortes.

Demonstração. Definimos $f : C \to \mathbb{R}$ como $f(A, B) = \sup(A) = \inf(B)$.

- f é injetora, suponha $f(A, B) = f(A', B')$ então $\sup(A) = \inf(B) = \sup(A') = \inf(B')$.

  Dado $x \in A$ vamos mostrar que $x \in A'$.

  $$x < \sup(A') = \inf(B') \leq y', \ \forall \ y' \in B', \text{ daí } x \in A'$$

  a inclusão $A' \subset A$ é análoga. Então vale $A = A'$.

- Dado $y \in B$, vamos mostrar que $y \in B'$.

  $$x' < \sup(A) < \inf(B') \leq y$$

  com isso $y \in B'$. De maneira similar, $B' \subset B$ portanto $B = B'$. Como vale $B = B'$ e $A = A'$ então a função é injetiva.

- A função é sobrejetiva. Para qualquer $y \in \mathbb{R}$, tomamos os conjuntos $(-\infty, y) \cap \mathbb{Q} = A$ e $B = [y, \infty) \cap \mathbb{Q}$, A não possui máximo, para todo $x \in A$ e $y \in B$ tem-se $y > x$ e $\mathbb{Q} = [(-\infty, y) \cap \mathbb{Q}] \cup [\,[y, \infty) \cap \mathbb{Q}]$, além disso vale $\sup(A) = y = \inf(B)$, portanto $f(A, B) = y$ e a função é sobrejetora, logo sendo também injetora f é bijeção.

1.4.48 Questão 53

✍ **Propriedade 109** (Média aritmética e geométrica.). Se $a, b > 0$ vale

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}.$$

Demonstração.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Questão 57

☞ **Exemplo 22.** A função $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ com $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é bijetora.

Ela está bem definida em $\mathbb{R}$, pois o único problema possível seria o termo dentro da raíz no denominador ser não positivo, o que não acontece pois $x^2+1 \geq 1$, ela é injetora pois $\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \Rightarrow x_1 = x_2$, sua imagem está contida no intervalo $(-1,1)$ pois $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$ logo $|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}| < 1$ sendo também sobrejetora, pois dado $y \in (-1,1)$ temos $|y| < 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y^2$, podemos tomar $x = \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}$ se $x \geq 0$ e $x = -\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}$ caso $x < 0$ e daí vale $f(x) = y$ (Podemos perceber pela definição que $x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ e $x \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$).

Questão 58

✍ **Propriedade 110.** Seja $G \neq \{0\}$ um grupo aditivo de $\mathbb{R}$, então vale uma das possibilidades

1. Existe t tal que $G = t\mathbb{Z}$, isto é, G é formado pelos múltiplos inteiros de t.
2. G é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração.

$G \neq \{0\}$ possui elemento positivo, pois dado $a \neq 0 \in G$, $-a \in G$, por ser grupo , e temos que a ou $-a$ é positivo. Sejam $G^+ = \{x \in G \mid x > 0\}$ e $t = \inf G^+$.

1. Se $t > 0$ vamos mostrar que vale $t \in G$. Suponha por absurdo que não. Existe $y \in G$ tal que
$$t < y < 2t,$$
pois $2t$ não é a maior cota inferior, por isso existe y entre t e $2t$, subtraindo t de ambos lados nessa desigualdade tem-se
$$0 < y - t < t.$$
Como y também não é maior cota inferior de G, existe $z \in G$ tal que
$$t < z < y < 2t$$

então $z < y \Rightarrow y - z > 0$, de $t < z$ temos $-z < -t$ de $y < 2t$ tem-se $y - z < 2t - z < 2t - t = t$ por isso

$$0 < y - z < t,$$

como $y, z \in G$ então $y - z \in G$ um elemento menor que o ínfimo do conjunto t o que é absurdo logo $t \in G$ e por ser grupo $tZ \subset G$.

Iremos mostrar agora a outra inclusão $G \subset tZ$. Suponha que existe $x \in G \setminus tZ$ então existe n natural tal que

$$n < \frac{x}{t} < n + 1 \Rightarrow nt < x < nt + t,$$

como $x, nt \in G$ segue $x - nt \in G$ e subtraindo nt de ambos lados da desigualdade anterior temos

$$0 < x - nt < t,$$

chegando mais uma vez em uma contradição pois teríamos um elemento menor que o ínfimo do conjunto. Portanto $G \subset tZ$ e $tZ \subset G$ logo $G = tZ$.

2. Se $t = 0$ então G é denso pois dado $x \in R$ arbitrário e $\varepsilon > 0$ temos $y \in G$ tal que $0 < y < \varepsilon$. Se $x = my$ para algum m nada precisamos demonstrar, se não, existe m tal que

$$m < \frac{x}{y} < m + 1 \Rightarrow my < x < my + y \Rightarrow$$

subtraindo my de ambos lados $0 < x - my < y < \varepsilon$, $my \in G$ logo G é denso em R.

1.5 Capítulo 4-Sequências e séries de números reais

Questão 1

✍ **Propriedade 111.** Se $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$.

Demonstração. Se $\lim x_n = a$ então

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

porém temos a desigualdade $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ logo $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ e $\lim |x_n| = |a|$.

☞ **Exemplo 23.** $\lim |x_n|$ pode existir porém $\lim x_n$ pode não existir, por exemplo tomamos $x_n = (-1)^n$, ela não converge porém $|(-1)^n| = 1$ é constante logo convergente.

1.5.1 Questão 2

☞ **Exemplo 24.** Se $\lim x_n = 0$ e $y_n = \min\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$ então $\lim y_n = 0$.

Por definição vale que $0 \leq y_n \leq |x_n|$, como $|x_n| \to 0$ então por sanduíche segue que $\lim y_n = 0$.

1.5.2 Questão 3

✍ **Propriedade 112.** Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$ então $\lim x_n = a$.

Demonstração. Sejam $y_n = x_{2n}$ e $z_n = x_{2n-1}$ como temos $\lim y_n = \lim z_n = a$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existem n_0 e n_1 tais que para $n > n_0$ vale $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_1$ vale $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, escolhendo $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$ temos para $n \geq n_2$ simultaneamente $z_n, y_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $x_{2n-1}, x_{2n} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, então para $n > 2n_2-1$ temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ logo vale $\lim x_n = a$.

1.5.3 Questão 4

✍ **Propriedade 113.** Se $N = \bigcup_{k=1}^{p} N_k$ e $\lim_{n \in N_k} x_n = a$ então $\lim x_n = a$.

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$ fixo e arbitrário existe $n_k \in N_k$ tal que $\forall\ n > n_k$, $n \in N_k$ vale $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pelo fato de $\lim_{n \in N_k} x_n = a$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, \cdots, n_p\}$, daí vale para $n > n_0$, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n \in N_k$ com todo k, com isso uniformizamos o valor do índice para o qual os termos da sequência estão no mesmo intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como todo $n \in N$ pertence a algum N_k então para $n \in N$ suficientemente grande vale x_n em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Vamos tentar deixar mais clara a última proposição.

Seja $n_0' = \min\{n > n_0 \, | x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \; \forall \, n \in N_k, \; \forall \, k\}$, tal conjunto é não vazio logo possui mínimo. Para todo $n \in N$, $n > n_0'$ vale $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, pois dado $n > n_0' > n_0$ x_n pertence à algum N_k e nas condições colocadas na construção do conjunto para N_k vale $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

1.5.4 Questão 5

☞ **Exemplo 25.** Pode valer $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ com $\lim_{n \in N_k} x_n = a$ e $\lim x_n \neq a$.

Como por exemplo, definimos $N_2 = \{2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots\}$ em geral $N_{k+1} = \{p_k^1, p_k^2, \cdots, p_k^n, \cdots\}$ onde p_k é o k-ésimo primo, definindo N_1 como o complemento de $\bigcup_{k=2}^{\infty} N_k$ em N. Definimos em N_2, $x_2 = 2$, $x_n = 0$ para os outros valores, da mesma forma em N_{k+1} definimos $x_{p_k} = p_k$ e $x_n = 0$ para os outros valores. Em N_1 definimos $x_n = 0$ para todo n. A sequência x_n não converge possui uma subsequência que tende a infinito. $x_2 = 2$, $x_3 = 3, x_5 = 5, \cdots, x_{p_k} = p_k, \cdots$ a subsequência dos primos.

1.5.5 Questão 6

Corolário da adição e multiplicação de limites.

☾ **Corolário 17.** Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n - y_n = 0$ então $\lim y_n = a$ pois $\lim y_n - x_n = 0$ e pelo limite da soma $\lim y_n - x_n + x_n = \lim y_n - x_n + \lim x_n = 0 + a = a = \lim y_n$.

1.5.6 Questão 7

☾ **Corolário 18.** Seja $a \neq 0$. Se $\lim \frac{y_n}{a} = 1$ então $\lim y_n = a$, pois usando linearidade do limite $\lim \frac{y_n}{a} = \frac{1}{a} \lim y_n = 1$ portanto $\lim y_n = a$.

1.5.7 Questão 8

☾ **Corolário 19.** Se $\lim x_n = a$ e $\lim \frac{x_n}{y_n} = b \neq 0$ então $\lim y_n = \frac{a}{b}$, pois $\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{b}$ e daí por limite do produto

$$\lim x_n \frac{y_n}{x_n} = \lim y_n = \frac{a}{b}.$$

1.5.8 Questão 9

☾ **Corolário 20.** Se $\lim x_n = a \neq 0$ e $\lim x_n y_n = b$ então $\lim y_n = \frac{b}{a}$.

Vale que $\lim \frac{1}{x_n} = a$, daí $\lim x_n y_n \lim \frac{1}{x_n} = \lim x_n y_n \frac{1}{x_n} = \lim y_n = \frac{b}{a}$.

1.5.9 Questão 10

✍ **Propriedade 114.** Se existem $\varepsilon > 0$ e $p \in N$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$ para $n > n_0 \in N$ então $\lim (x_n)^{\frac{1}{n}}$.

Demonstração. Vale $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$, tomando a raiz n-ésima tem-se

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq (n^p)^{\frac{1}{n}}$$

tomando-se o limite segue pelo teorema do sanduíche que $\lim (x_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

1.5.10 Questão 11

☞ **Exemplo 26.** Usando que a média aritmética é maior ou igual a média geométrica, na sequência de $n+1$ números com n números iguais à $(1+\frac{t}{n})$ e um deles sendo a unidade 1, com isso temos

$$\left(\frac{1 + \sum_{k=1}^{n}(1+\frac{t}{n})}{n+1}\right) \geq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{t}{n})\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\left(\frac{n+1+t}{n+1}\right) = 1 + \frac{t}{n+1} \geq \left((1+\frac{t}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow (1+\frac{t}{n+1})^{n+1} \geq (1+\frac{t}{n})^n$$

com $t \geq -1$ real. Em especial a sequência de termo $x_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ é crescente e para $n = 2$ temos

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

daí $x_n \geq \frac{1}{4}$ para $n > 1$.

1.5.11 Questão 11a.

☞ **Exemplo 27.** Vale que

$$\lim(1 - \frac{1}{n})^n(1 + \frac{1}{n})^n = \lim 1^n = 1$$

daí $\lim(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$.

1.5.12 Questão 12

✍ **Propriedade 115.** Sejam $a \geq 0, b \geq 0$ então

$$|a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}| \leq |a - b|^{\frac{1}{n}}$$

Demonstração. Supondo $a \geq b$, definindo $c = a^{\frac{1}{n}}$ e $d = b^{\frac{1}{n}}$, então $c - d \geq 0$ por expansão binomial tem-se

$$c^n = ((c-d)+d)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (c-d)^k d^{n-k} \geq d^n + (c-d)^n \geq 0$$

daí $c^n - d^n \geq (c-d)^n \geq 0$ implicando

$$|a - b| \geq |a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}|^n$$

e daí

$$|a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}| \leq |a - b|^{\frac{1}{n}}.$$

✍ **Propriedade 116.** Se $x_n \geq 0$ e $\lim x_n = a$ então $\lim (x_n)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$

♒ **Demonstração.** Como $\lim x_n = a$ então $\forall\ \varepsilon > 0$ conseguimos $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$ tem-se $|x_n - a| < \varepsilon^p$ e daí $|x_n - a|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, da desigualdade anterior temos que

$$|x_n^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}}| \leq |x_n - a|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

e daí $\lim (x_n)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$.

✍ **Propriedade 117.** Seja m racional e (x_n) de termos positivos. Se $\lim x_n = a$ então $\lim x_n = a^m$.

♒ **Demonstração.**

Escrevemos $m = \dfrac{p}{q}$, daí

$$\lim x_n^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}}$$

usando propriedade do produto segue

$$\lim x_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

1.5.13 Questão 14

✍ **Propriedade 118.** Seja $a, b \geq 0$ e então $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

♒ **Demonstração.** Seja $c = \max\{a, b\}$ então vale Vale $a^n \leq c^n$, $b^n \leq c^n$ e daí $a^n + b^n \leq 2c^n$ da mesma maneira $c^n \leq a^n + b^n$, pois c é a ou b, logo

$$c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n$$

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2}\, c$$

tomando limites, temos pelo teorema do sanduíche

$$\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = c.$$

✍ **Propriedade 119.** Sejam $(a_k \geq 0)_1^m$ e $c = \max\{a_k, k \in I_m\}$ então

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{m} a_k^n} = c.$$

Demonstração. Vale $a_k^n \leq c^n$, tomando a soma, tem-se $\sum_{k=1}^{m} a_k^n \leq m.c^n$, tem-se também $c^n \leq \sum_{k=1}^{m} a_k^n$ então vale

$$c^n \leq \sum_{k=1}^{m} a_k^n \leq m.c^n$$

tomando a raiz

$$c \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{m} a_k^n} \leq \sqrt[n]{m}.c$$

e novamente por teorema do sanduíche tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{m} a_k^n} = c.$$

1.5.14 Questão 15

Definição 13 (Termo destacado). Dizemos que x_n é um termo destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Isto é quando x_n é maior ou igual a todos seus sucessores.

✍ **Propriedade 120.** Toda sequência possui subsequência monótona .

Demonstração.

Seja $A \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices s da sequência (x_n), tais que x_s é destacado, existem dois casos a serem analisados

- Se A é infinito, então podemos tomar uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ de termos destacados formada pelos elementos com índices em A que é não-crescente com $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ e com $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \cdots$.

- Se A é finito, tomamos um n_1 maior que todos elementos de A daí x_{n_1} não é destacado, existindo $x_{n_2} \geq x_{n_1}$ com $n_2 > n_1$, por sua vez x_{n_2} não é destacado logo existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geq x_{n_2}$, assim construímos uma subsequência não-decrescente .

1.5.15 Questão 18

Generalizamos o exercício em dois resultados.

✍ **Propriedade 121.** Sejam (a_n) e (b_n) sequências limitada tais que $a_n + b_n = 1 \, \forall \, n \in N$, (z_n) e (t_n) com o mesmo limite a, então $\lim a_n.z_n + b_n.t_n = a$.

Demonstração. Escrevemos

$$a_n.z_n + b_n.t_n = a_n.z_n - a.a_n + a.\underbrace{a_n}_{=1-b_n} + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a(1 - b_n) + b_n.t_n =$$

$$= a_n(z_n - a) + a - a.b_n + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a)$$

daí

$$\lim a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) = a = \lim a_n.z_n + b_n.t_n$$

pois a_n e b_n são limitadas e $z_n - a, t_n - a$ tendem a zero.

✍ **Propriedade 122.** Se $\lim\limits_{n\to\infty} z_k(n) = a \; \forall \; k$ e cada $(x_k(n))$ é limitada com $\sum\limits_{k=1}^{p} x_k(n) = v_n \to b$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} x_k(n) z_k(n) = a.b$.

Demonstração. Vale $x_1(n) = v_n - \sum\limits_{k=2}^{p} x_k(n)$.

$$\sum_{k=1}^{p} x_k(n) z_k(n) = x_1(n) z_1(n) + \sum_{k=2}^{p} x_k(n) z_k(n) =$$

$$= z_1(n) v_n - \sum_{k=2}^{p} x_k(n) z_1(n) + \sum_{k=2}^{p} x_k(n) z_k(n) =$$

$$= \underbrace{z_1(n) v_n}_{\to a.b} + \sum_{k=2}^{p} x_k(n) \underbrace{(z_k(n) - z_1(n))}_{\to 0} \to a.b.$$

1.5.16 Questão 19

Definição 14 (Sequência de variação limitada). Uma sequência (x_n) tem variação limitada quando a sequência (v_n) com

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| \text{ é limitada.}$$

Propriedade 123. Se (x_n) tem variação limitada então (v_n) converge.

Demonstração. (v_n) é limitada e não-decrescente, pois $\Delta v_n = |\Delta x_{n+1}| \geq 0$, logo é convergente.

Propriedade 124. Se (x_n) tem variação limitada então existe $\lim x_n$.

Demonstração. A série $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|$ converge portanto $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k$ converge absolutamente e vale

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k + x_1$$

logo x_n é convergente.

Exemplo 28. Se $|\Delta x_{n+1}| \leq c|\Delta x_n| \ \forall \ n \in N$ com $0 \leq c < 1$ então (x_n) possui variação limitada. Definimos $g(k) = |\Delta x_k|$ logo a desigualdade pode ser escrita como $g(k+1) \leq cg(k)$, $Qg(k) \leq c$ aplicamos $\prod_{k=1}^{n-1}$ de ambos lados, daí

$$g(n) = |\Delta x_n| \leq c^{n-1} g(1)$$

somando em ambos lados temos

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} g(1)$$

como o segundo termo converge por ser série geométrica segue que (x_n) é de variação limitada, logo converge.

✍ **Propriedade 125.** (x_n) tem variação limitada $\Leftrightarrow x_n = y_n - z_n$ onde (y_n) e (z_n) são sequências não-decrescentes limitadas.

Demonstração.

$\Leftarrow$).

Seja $x_n = y_n - z_n$ onde (y_n) e (z_n) são sequências não-decrescentes limitadas, então x_n tem variação limitada.

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\Delta y_k - \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\Delta y_k| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leq |\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k| + |\sum_{k=1}^{n} \Delta z_k|$$

$$= |y_{n+1} - y_1| + |z_{n+1} - z_1| < M$$

pois (y_n) e (z_n) são limitadas, logo (v_n) é limitada, isto é, (x_n) tem variação limitada.

$\Rightarrow$). Dada (x_n) com variação limitada. (x_n) tem variação limitada $\Leftrightarrow (x_n + c)$ tem variação limitada, pois Δ aplicado as duas sequências tem o mesmo valor. Escrevemos

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k$$

Para cada n definimos P_n o conjunto dos k da soma $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k$ tais que $\Delta x_k \geq 0$ e N_n o conjunto dos k da mesma soma tais que $\Delta x_k < 0$, com isso temos uma partição do conjunto dos índices e vale

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k = \underbrace{\sum_{k \in P_n} \Delta x_k}_{y_n} - \underbrace{\sum_{k \in N_n} (-\Delta x_k)}_{z_n}$$

(y_n) é não decrescente, pois $y_{n+1} = y_n$ caso não seja adicionado índice a P_{n+1} em relação a P_n e $y_{n+1} \geq y_n$ caso seja adicionado um índice a P_{n+1}, pois adicionamos um termo da forma $\Delta x_k \geq 0$ o mesmo para (z_n).

(y_n) é limitada pois

$$\sum_{k \in P_n} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta x_k| = \sum_{k \in P_n} |\Delta x_k| + \sum_{k \in N_n} |\Delta x_k| = \sum_{k \in P_n} \Delta x_k + \sum_{k \in N_n} (-\Delta x_k) < M$$

da mesma maneira (z_n) é limitada.

☞ **Exemplo 29.** Existem sequências convergentes que não possuem variação limitada, como por exemplo $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$, que é convergente porém $\Delta x_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |\Delta x_n| = \frac{1}{n}$ e $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ não é limitada.

1.5.17 Questão 20

☞ **Exemplo 30.** Seja (x_n) definida como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, então vale que

$$|\Delta x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|\Delta x_n|.$$

- Primeiro vale que $x_n \geq 1$ para todo n pois vale para $n = 1$, supondo validade para n, então vale para $n+1$, pois $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.
- Vale que $|x_{n+1}x_n| \geq 2$ para todo n, pois, substituindo $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ isso implica que $x_{n+1}x_n \geq x_n + 1 \geq 2$.
- De $|x_{n+1}x_n| \geq 2$ segue que $|\frac{1}{x_{n+1}x_n}| \leq \frac{1}{2}$, multiplicando por $|x_{n+1} - x_n|$ em ambos lados segue que

$$|\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n}| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$$

$$|\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}| = |\underbrace{(1 + \frac{1}{x_{n+1}})}_{x_{n+2}} - \underbrace{(1 + \frac{1}{x_n})}_{x_{n+1}}| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$$

portanto $|\Delta x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|\Delta x_n|$ portanto a sequência é convergente. Calculamos seu limite $\lim x_n = a$

$$a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

cujas raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ficamos com a raiz positiva pois a sequência é de termos positivos, logo

$$\lim x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1.5.18 Questão 21

☞ **Exemplo 31.** Estudar a convergência da sequência $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ com $x_1 = 1$.

A sequência é crescente , pois $x_2 = 2 > x_1$, supondo $x_{n+1} > x_n$ temos

$$\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n} \Rightarrow 1 + \sqrt{x_{n+1}} > 1 + \sqrt{x_n} \Rightarrow x_{n+2} > x_{n+1}.$$

A sequência é limitada superiormente, por 3, por exemplo, pois $x_1 < 3$, supondo $x_n < 3 < 4$ tem-se

$$\sqrt{x_n} < 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{x_n} < 3 \Rightarrow x_{n+1} < 3.$$

Agora calculamos o limite da sequência

$$a = 1 + \sqrt{a} \Rightarrow (a-1)^2 = a \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0$$

cujas raízes são $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, não podendo ser $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ que é menor que 1 logo o limite é $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.5.19 Questão 22

✍ **Propriedade 126.** (x_n) não possui subsequência convergente $\Leftrightarrow \lim |x_n| = \infty$.

Demonstração.

$\Rightarrow$).

Se (x_n) não possui subsequência convergente então $\lim |x_n| = \infty$.

Se não fosse $\lim |x_n| = \infty$, existiria $A > 0$ tal que $\forall\ n_0$, existe $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1}| < A$, aplicando o resultado com n_1 no lugar de n_0, existe $n_2 > n_1$ tal que $|x_{n_2}| < A$ e assim construímos uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ limitada , que possui uma subsequência convergente , o que é absurdo.

$\Leftarrow$).

Suponha por absurdo que $\lim |x_n| = \infty$ e (x_n) possui subsequência convergente, convergindo para a. Por definição de limite infinito, sabemos que existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $|x_n| > |a| + 10$, por (x_n) ter subsequência que converge para a, existe n_1 tal que $n > n_1$ e n índice da subsequência, implica $|x_n - a| < 10 \Rightarrow |x_n| < |a| + 10$, podemos tomar índice da subsequência tal que $n > n_1$ e $n > n_2$, logo valeria $|x_n| < |a| + 10$ e $|x_n| > |a| + 10$ o que é absurdo, portanto (x_n) não pode possuir subsequência convergente.

1.5.20 Questão 24

✍ **Propriedade 127.** Seja $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $\lim z_n = \infty$ e $\lim x_n = a$. Então dada $y_n := x_{z_n}$, vale que $\lim y_n = a$.

Demonstração.

1. De $\lim x_n = a$ segue que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. Como $\lim z_n = \infty$ então existe n_1 tal que se $n > n_1$ implica que $z_n > n_0$, daí pelo ponto 1, tem-se $|x_{z_n} - a| < \varepsilon$ para $n > n_1$ e daí $\lim x_{z_n} = a = \lim y_n$, como queríamos demonstrar.

☞ **Exemplo 32.** A sequência dada por $z_{2n+1} = n$ e $z_{2n} = 1$ é sobrejetiva, sendo uma sequência de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Considere $x_n = \frac{1}{n}$. Vale que $y_n = x_{\varphi_n}$ não converge pois possui subsequência dos ímpares convergindo para 0 e subsequência dos pares convergindo para 1.

1.5.21 Questão 25

✍ **Propriedade 128** (Teste da razão para sequências.). Se $x_n > 0\ \forall\ n \in N$ e

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1$ para n suficientemente grande então $\lim x_n = 0$.

Demonstração. Existe n_0 tal que para $k > n_0$ vale $0 < \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq c < 1$, aplicamos o produtório $\prod_{k=n_0+1}^{n}$ em ambos , de onde segue

$$0 < \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \prod_{k=n_0+1}^{n} c$$

$$0 < x_{n+1} < x_{(n_0+1)} c^{n-n_0}$$

como $\lim c^n = 0$, tem-se pelo teorema do sanduíche que $\lim x_n = 0$.

Corolário 21. Dada uma sequência de termos não nulos (x_n), então $(|x_n|)$ é uma sequência de termos positivos, se ela satisfaz a propriedade anterior então $\lim |x_n| = 0$ o que implica $\lim x_n = 0$.

Propriedade 129. Seja (x_n) sequência de termos positivos, se $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq c > 1$ para n suficientemente grande então $\lim x_n = \infty$.

Demonstração. Existe $n_0 \in N$ tal que $k > n_0$ implica $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq c$, onde $c > 1$. Aplicando o produtório na desigualdade tem-se

$$\prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} > c^{n-n_0}$$

$$x_{n+1} > \frac{x_{n_0+1}}{c^{n_0}} c^n$$

como $\lim c^n = \infty$ segue que $\lim x_n = \infty$.

Corolário 22. Na propriedade anterior podemos trocar x_n por $|x_n|$ onde x_n não se anula, pois $(|x_n|)$ é uma sequência de positivos.

☾ **Corolário 23.** Se $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ então para n suficientemente grande vale $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1$, logo também vale $\lim x_n = 0$.

☾ **Corolário 24.** Se $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = c > 1$ a propriedade também se verifica pois existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $\frac{x_{n+1}}{x_n} > a > 1$ para algum a.

✍ **Propriedade 130.**

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Demonstração. Definimos $x_n = \frac{n!}{n^n}$ e vale $x_n > 0$, aplicamos a regra da razão

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

o limite é $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} < 1$.

n^n cresce mais rápido que $n!$

✍ **Propriedade 131.** Para todo $a > 0$ real temos $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Demonstração. Pelo teste da razão, definimos $x_n = \frac{a^n}{n!}$ temos $x_n > 0$ segue $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}n!}{(n+1).n!a^n} = \frac{a}{n+1}$ e temos $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$, logo $\lim x_n = 0$.

A propriedade nos diz que $n!$ cresce mais rápido que a^n.

☾ **Corolário 25.** $\lim \frac{n!}{a^n} = \infty$, pois $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, isso significa que $\forall\, A > 0\ \exists\, n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \frac{n!}{a^n} > A$, em especial para $A = 1$, tem-se $n! > a^n$ para n suficientemente grande.

✍ **Propriedade 132.** Se $a > 1$ e p natural fixo vale

$$\lim \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

Demonstração. Definimos $x_n = \dfrac{n^p}{a^n}$, vale $x_n > 0$ daí podemos aplicar o teste da razão

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{a} \Rightarrow \lim x_{n+1} x_n = \underbrace{\frac{1}{a}}_{0<} < 1$$

daí o limite é zero.

Corolário 26. Se $a > 1$, $p \in N$ então $\lim \dfrac{a^n}{n^p} = \infty$ pois $\lim \dfrac{n^p}{a^n} = 0$.

Tal propriedade mostra que a exponencial a^n cresce muito mais rápido que n^p para n grande.

Questão 27

Questão 27

Feita no outro gabarito.

Questão 28

Feita no outro gabarito.

1.5.22 Questão 31

☞ **Exemplo 33.** Mostrar que

$$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Iremos calcular o limite das diferenças do inverso da sequência

$$\lim \frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{(n+1)^p} = \lim \frac{[\sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}n^k]+(p+1)n^p}{(n+1)^p} = \lim \underbrace{\frac{\sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}n^k}{(n+1)^p}}_{\to 0} + \lim \underbrace{\frac{(p+1)n^p}{(n+1)^p}}_{\to p+1} = p+1$$

daí

$$\lim \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Questão 32

A segunda solução é a pedida no livro.

★ **Teorema 2.** O número e é irracional.

Demonstração.[1] Vamos provar que e^{-1} é irracional, logo e também é .

Temos pela representação em série que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

então

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow$$

$$e^{-1} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} + \cdots > 0$$

pois todos termos somados e subtraídos são menores que $\frac{1}{(2n)!}$ e como temos termos sendo subtraídos tem-se

$$0 \le e^{-1} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \le \frac{1}{(2n)!} \Rightarrow$$

$$0 < (2n-1)!(e^{-1} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!}) \le \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}$$

para n suficientemente grande se e^{-1} é racional, temos que $(2n-1)!(e^{-1}-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k!})$ é inteiro, entre 0 e $\frac{1}{2}$, absurdo, então e^{-1} é irracional e daí também seu inverso e.

Demonstração.[2] Pela série de taylor, temos que
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
assim tomando $x = 1$ temos

$$e^1 = e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

vamos considerar que e seja um número racional da forma
$\frac{p}{q}$ com $mdc(p, q) = 1$ com q e p naturais, vamos abrir o série em q

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

logo

$$\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{q!}\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{q+s}$$

temos que essa série é menor que

$$\frac{1}{q!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{q!q}$$

a última igualdade por ser uma série geométrica

logo temos

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

implicando

$$0 < q!\frac{p}{q} - q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = (q-1)!p - q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} < \frac{1}{q}$$

onde o número do meio das desigualdades é inteiro , e por não existir inteiro entre 0 e $1/q$ para $q \geq 1$, chegamos num absurdo.

Questão 33

Questão digitada errada

Propriedade 133. Se $\lim x_n = \infty$, com $x_n > 0$ então $\lim(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}) = \infty$

Demonstração. Se $\lim x_n = \infty$ então $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ daí $\lim \underbrace{(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}^{\frac{1}{n}})}_{=y_n} = 0$ que implica

$$\lim \frac{1}{y_n} = \infty = \lim(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}).$$

Exemplo 34. Provar que $\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \infty$. Tomamos $x_n = \frac{(2n)!}{n!}$ daí temos $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!}\frac{n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} = 2(2n+1) \to \infty$ logo $\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \infty$.

Exemplo 35. Mostrar que $\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \frac{4}{e}$.

Tomamos $x_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$, daí $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{4}{e}$.

Questão 34

Usamos o critério: Se $\lim \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = L$ então $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = L$

Exemplo 36. Mostrar que $\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \frac{4}{e}$.

Tomamos $x_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$, daí $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{4}{e}$.

Exemplo 37. Mostrar que $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Tomamos $x_n = \frac{n^n}{n!}$, daí $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$, daí segue que $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Disso segue também que

$$\lim \frac{n}{a\sqrt[n]{n!}} = \frac{e}{a},$$

isto é,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!a^n}} = \frac{e}{a},$$

daí tomando o inverso, temos

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!a^n}{n^n}} = \frac{a}{e},$$

em especial se $e = a$, segue que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!e^n}{n^n}} = \frac{e}{e} = 1.$$

Questão 35

✍ **Propriedade 134.** Sejam $\sum_{n=u}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=s}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos. Se $\sum_{n=s}^{\infty} b_n = \infty$ e existe $n_0 \in N$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$ então $\sum_{n=u}^{\infty} a_n = \infty$.

Demonstração. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $Qa_k \geq Qb_k$ tomando o produtório com k variando de $k = n_0 + 1$ até $n - 1$ na desigualdade em ambos lados segue

$$\prod_{k=n_0+1}^{n-1} Qa_k = \frac{a_n}{a_{n_0+1}} \geq \prod_{k=n_0+1}^{n-1} Qb_k = \frac{b_n}{b_{n_0+1}}, \quad a_n \geq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} b_n$$

pois temos termos positivos, tomando a série temos

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = \infty$$

logo a série tende ao infinito por comparação.

Questão 36

✍ **Propriedade 135.** 1. Sejam duas séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ de termos positivos, se existe $\lim \frac{a_k}{b_k} = a \neq 0$ então $\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum b_k$ converge .

2. Se $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$ então a convergência de $\sum b_k$ implica convergência de $\sum a_k$.

Demonstração.

1. Existe $n_0 \in N$ tal que para $k > n_0$ tem-se

$$0 < t_1 < a - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < a + \varepsilon < t_2$$

como $b_k > 0$ tem-se

$$t_1 b_k < a_k < t_2 b_k$$

aplicamos a soma $\sum_{k=n_0+1}^{n}$, daí

$$t_1 \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k < \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k < t_2 \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$

usando essa desigualdade temos por comparação que se $\sum b_k$ converge então $\sum a_k$ converge e se $\sum a_k$ converge então $\sum b_k$ converge.

2. De maneira similar ao item anterior.

Existe $n_0 \in N$ tal que para $k > n_0$ tem-se

$$0 \leq \frac{a_k}{b_k} < \varepsilon < t_2$$

como $b_k > 0$ tem-se

$$0 \leq a_k < t_2 b_k$$

aplicamos a soma $\sum_{k=n_0+1}^{n}$, daí

$$0 \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k < t_2 \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$

usando essa desigualdade temos por comparação que se $\sum b_k$ converge então $\sum a_k$ converge.

☞ **Exemplo 38.** Pode valer que $\sum a_k$ converge, valendo $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$ e $\sum b_k$ não converge, tome por exemplo $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k}$, $\sum b_k$ não converge, $\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{k}{k^2} = \lim \frac{1}{k} = 0$ e $\sum a_k$ converge, logo a recíproca do item 2 da propriedade anterior não vale.

Questão 37

✍ **Propriedade 136.** Se $P(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 2$ sem raízes nos naturais, então

$$\sum \frac{1}{P(x)} \text{ converge.}$$

Demonstração. Já sabemos que $\sum_x \frac{1}{x^n}$ converge se $n \geq 2$, por exemplo por critério de condensação de Cauchy, ou por comparação com a série convergente $\sum_x \frac{1}{x^2}$ para x suficientemente grande. Tomando um polinômio de grau n, temos que $a_n \neq 0$ e

$$|a_n x^n + \ldots + a_0 x^0| = x^n |a_n + \ldots + \frac{a_0}{x^n}| \geq x^n |\,|a_n| - |\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}|\,|,$$

onde usamos que $|x+y| \geq |\,|x| - |y|\,|$. Com x suficientemente grande temos que

$$|\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}| \leq \frac{|a_n|}{2} \Rightarrow -\frac{|a_n|}{2} \leq -|\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}|$$

daí $\frac{|a_n|}{2} \leq |a_n| - |\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}|$, por isso

$$x^n \frac{|a_n|}{2} \leq x^n |a_n + \ldots + \frac{a_0}{x^n}|, \quad \text{para } x \text{ suficientemente grande,}$$

daí,

$$\sum_x \frac{1}{|P(x)|} \leq \sum \frac{2}{|a_n| x^n},$$

que converge, logo temos a convergência absoluta para $\sum_x \frac{1}{P(x)}$ e por isso a série converge.

Questão 40

☞ **Exemplo 39.** A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^k}$$

converge com qualquer $a \in R$. Vale que $1 \leq a^2 + 1 \; \forall \; a \in R$ logo $0 < \frac{1}{1+a^2} \leq 1$, portanto a série converge por ser série geométrica. Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b}$, substituindo $b = \frac{1}{a^2+1}$, chegamos no resultado

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+a^2)^k} = \frac{a^2+1}{a^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^k} = a^2 + 1.$$

Questão 41

☞ **Exemplo 40.** Calcule

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}.$$

Escrevemos

$$\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{k+p-k}{pk(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p}(\overbrace{\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)}}^{f(k)} - \overbrace{\frac{1}{(k+1)\dots(k+p-1)}}^{f(k+1)}) = \frac{-\Delta f(k)}{p}$$

logo calculamos a soma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-\Delta f(k)}{p} = \frac{-1}{p}(f(n) - f(1))$$

com $\lim f(n) = 0$ e $f(1) = \frac{1}{p!}$ segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p!p}.$$

Questão 42

✍ **Propriedade 137.** Sejam as séries $\sum a_k$ e $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$. $\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ converge.

Demonstração. $\Rightarrow$. $\sum a_k$ converge e vale

$$0 \leq a_k \Rightarrow 1 \leq 1 + a_k \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} \leq 1 \Rightarrow \frac{a_k}{1+a_k} \leq a_k$$

pelo critério de comparação segue que $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ converge.

$\Leftarrow$. $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ converge então

$$\lim \frac{a_k}{1+a_k} = 0 \Rightarrow \lim 1 - \frac{1}{a_k+1} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_k+1} = 1$$

daí por propriedade de limite $\lim a_k + 1 = 1 \Rightarrow \lim a_k = 0$ então existe n_0 tal que para $k > n_0$ tem-se $a_k \leq 1$

$$a_k + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_k+1} \Rightarrow \frac{a_k}{2} \leq \frac{a_k}{a_k+1}$$

logo por comparação $\sum a_k$ converge .

✍ **Propriedade 138.** Seja (x_k) uma sequência de números não negativos com a série $\sum x_k$ convergente então $\sum x_k^2$ é convergente.

Demonstração.[1] Como $\sum a_k$ é convergente, vale $\lim a_k = 0$ e daí para $k > n_0$ vale $x_k < 1$ que implica $x_k^2 \leq x_k$ logo por comparação $\sum x_k^2$ converge.

Demonstração.[2] Como temos $x_k \geq 0$ segue também $x_k^2 \geq 0$, sendo então $s(n) = \sum_{k=b}^{n} x_k^2$ temos $\Delta s(n) = x_{n+1}^2 \geq 0$, logo $s(n)$ é não decrescente, se mostrarmos que a série é limitada superiormente teremos uma sequência que é limitada e monótona logo convergente. Temos que $s(n)$ é limitada superiormente da seguinte maneira

$$\sum_{k=b}^{n} x_k^2 \leq (\sum_{k=b}^{n} x_k)(\sum_{k=b}^{n} x_k)$$

logo a série é convergente.

Questão 43

✍ **Propriedade 139.** Se $\sum a_k$, $a_k > 0$ converge então a série $\sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ também converge .

Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)$$

com $y_k = \frac{1}{k}$ e $x_k = \sqrt{a_k}$ tem-se

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k})^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$$

e tem-se também

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq (\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k})^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$$

de onde por comparação segue o resultado .

Corolário 27. Se $\sum x_k^2$, converge então a série $\sum \frac{x_k}{k}$ também converge, basta usar o resultado anterior com $a_k = x_k^2$.

Questão 44

✍ **Propriedade 140.** Seja (a_n) uma sequência não-crescente de números reais positivos. Se $\sum a_k$ converge então $\lim n a_n = 0$.

Demonstração. Usaremos o critério de Cauchy . Existe $n_0 \in N$ tal que para $n+1 > n_0$ vale

$$\frac{2n a_{2n}}{2} = n a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon$$

logo $\lim 2n a_{2n} = 0$. Agora mostramos que a subsequência dos ímpares também tende a zero. Vale $a_{2n+1} \leq a_{2n}$ daí $0 < (2n+1)a_{2n+1} \leq 2n a_{2n} + a_{2n}$ por teorema do sanduíche segue o resultado. Como as subsequências pares e ímpares de $(n a_n)$ tendem a zero, então a sequência tende a zero.

Corolário 28. A série harmônica $\sum \frac{1}{k}$ diverge, pois $(\frac{1}{n})$ é decrescente e vale $\lim \frac{n}{n} = 1 \neq 0$.

Questão 46

Propriedade 141 (Critério de condensação de Cauchy). Seja (x_n) uma sequência não-crescente de termos positivos então $\sum x_k$ converge $\Leftrightarrow \sum 2^k.x_{2^k}$ converge.

Demonstração. Usaremos a identidade

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k).$$

$\Rightarrow$).

Vamos provar que se $\sum x_k$ converge então $\sum 2^k.x_{2^k}$ converge, usando a contrapositiva, que é equivalente logicamente, vamos mostrar que se $\sum 2^k.x_{2^k}$ diverge então $\sum x_k$ diverge.

Como x_k é não-crescente então vale

$$2^s x_{2^{s+1}} = \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k$$

aplicando $2\sum_{s=0}^{n-1}$ segue

$$\sum_{s=0}^{n-1} 2^{s+1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=1}^{2^n-1} x_k$$

logo se $\sum 2^s x_{2^s}$ diverge então $\sum x_k$ diverge.

$\Leftarrow$).

Vamos provar que se $\sum 2^k.x_{2^k}$ converge então então $\sum x_k$ converge, de maneira direta. Usando que

$$\sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^s} = 2^s x_{2^s}$$

aplicando $\sum_{s=0}^{n-1}$ segue que

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} x_k \le \sum_{s=0}^{n-1} 2^s x_{2^s}$$

daí se $\sum 2^s x_{2^s}$ converge então $\sum x_k$ converge $\square$.

Questão 48

Propriedade 142. Sejam $a, b > 0 \in R$, $x_1 = \sqrt{ab}, y_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n.y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$. Então (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

Demonstração. Sabemos que $y_n \ge x_n$ pela desigualdade das médias, então

$$x_n.y_n \ge x_n^2 \Rightarrow \sqrt{x_n.y_n} \ge x_n \Rightarrow x_{n+1} \ge x_n,$$

então (x_n) é crescente . Da mesma maneira y_n é decrescente pois de $x_n \le y_n$ tem-se $x_n + y_n \le 2y_n$ daí $y_{n+1} = \dfrac{(x_n + y_n)}{2} \le y_n$. Como vale $x_1 \le x_n \le y_n \le y_1$ para todo n, concluímos que x_n e y_n são convergentes, por serem monótonas e limitadas .

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

tomando o limite

$$y = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x = y.$$

Definição 15 (Média aritmético-geométrica). Dados dois números reais positivos a e b o valor comum para o qual convergem as sequências (x_n) e (y_n) definidas na propriedade anterior se chama média aritmético-geométrica de a e b.

1.6 Capítulo 5-Topologia da reta

Questão 1

✍ **Propriedade 143** (Caracterização de abertos por meio de sequências). Seja $A \subset \mathbb{R}$. A é aberto $\Leftrightarrow \forall\ (x_n)$ com $\lim x_n = a \in A$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$$

então A é aberto. Em outras palavras A é aberto $\Leftrightarrow \forall\ (x_n)$ com $\lim x_n = a \in A$ se verifica $x_n \in A$ para n suficientemente grande.

Demonstração. $\Rightarrow$).

Suponha A aberto, com $a \in A$ logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$ e por $\lim x_n = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ logo $x_n \in A$.

$\Leftarrow$). Vamos usar a contrapositiva que no caso diz: Se A não é aberto então existe (x_n) com $\lim x_n = a \in A$ e $x_n \notin A$. Lembrando que a contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\backsim q \Rightarrow \backsim p$, (onde $\backsim$ é o símbolo para negação da proposição) sendo proposições equivalentes, as vezes é muito mais simples provar a contrapositiva do que a proposição diretamente.

Se A não é aberto, existe $a \in A$ tal que a não é ponto interior de A, assim $\forall\ \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$, então podemos tomar uma sequência (x_n) em $\mathbb{R} \setminus A$ que converge para $a \in A$.

Questão 2

✍ **Propriedade 144** (Caracterização de sequências por meio de abertos). $\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall$ aberto A com $a \in A$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$.

Demonstração.

$\Rightarrow$).

Seja A um aberto com $a \in A$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$ e por $\lim x_n = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0$ tem-se $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, logo $x_n \in A$.

$\Leftarrow$).

Supondo que $\forall$ aberto A com $a \in A$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$, então em especial para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar o aberto $A = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e tem-se $\lim x_n = a$ pela definição de limite.

Questão 3

✍ **Propriedade 145.** Se A é aberto e $x \in \mathbb{R}$ então $x + A = \{x + a\ , a \in A\}$ é aberto .

Demonstração.[1-Critério de sequências] Seja (x_n) tal que $\lim x_n = x + a \in x + A$, vamos mostrar que $x_n \in x + A$ para todo n suficientemente grande, daí $x + A$ é aberto.

$x_n = x + y_n$ com $y_n \to a$, daí como A é aberto, segue que $y_n \in A$ para n suficientemente grande, o que implica $x_n = x + y_n \in A$ para os mesmos valores de n, logo $x + A$ é aberto.

Demonstração.[2]

- Primeiro observamos que $w \in x + A \Leftrightarrow w - x \in A$.

  $\Rightarrow$). Se $w \in x + A$ então $w = x + a$ para algum $a \in A$, logo $w - x = a \in A$.

  $\Leftarrow$). Se $w - x \in A$ existe $a \in A$ tal que $w - x = a$ logo $w = x + a$, daí segue $w \in x + A$.

- Tomamos $y \in x + A$, vamos mostrar que y é ponto interior . Sabemos que existe $a \in A$ tal que $y = x + a$ e a é ponto interior de A, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que

  $$a - \varepsilon < t < a + \varepsilon \Rightarrow t \in A.$$

  Seja w arbitrário tal que $y - \varepsilon < w < y + \varepsilon$, isto é, $w \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, substituindo $y = x + a$ temos $x + a - \varepsilon < w < x + a + \varepsilon$, subtraindo x de ambos lados

  $$a - \varepsilon < w - x < a + \varepsilon,$$

  daí $w - x \in A$ de onde segue $w \in x + A$, logo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset x + A$.

✍ **Propriedade 146.** Se $x \neq 0$ e A é aberto então $x.A = \{x.a,\ a \in A\}$ é aberto .

Demonstração. Utilizaremos o critério de sequências. Seja (x_n) com $\lim x_n = x.a \in xA$, vamos mostrar que para n suficientemente grande $x_n \in xA$, de onde tem-se xA aberto. x_n é da forma xy_n onde $y_n \to a \in A$, como A é aberto segue que para n suficientemente grande vale $y_n \in A$, daí para os mesmos valores de n vale $x_n = xy_n \in xA$ como queríamos demonstrar.

questão 4

✍ **Propriedade 147.** Definimos $A+B=\{a+b,\ a\in A\ ,b\in B\}$. Se B é aberto então $A+B$ é aberto .

ꟿ **Demonstração.**

Escrevemos

$$A+B=\bigcup_{a\in A}(a+B)$$

como cada $a+B$ é aberto então $A+B$ é aberto por ser união de abertos.

✍ **Propriedade 148.** Definimos $A.B=\{a.b,\ a\in A,\ b\in B\}$. Se A é aberto e B qualquer tal que $0\notin A,B$ então $A.B$ é aberto .

ꟿ **Demonstração.** Escrevemos

$$A.B=\bigcup_{a\in A}a.B$$

cada $a.B$ é aberto, logo $A.B$ é aberto.

Questão 5

$intA\cup intB\subset int(A\cup B)$.

✍ **Propriedade 149.** Vale

$$intA\cup intB\subset int(A\cup B).$$

ꟿ **Demonstração.** Seja $x\in intA$ então existe $\varepsilon>0$ tal que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in A$ logo $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset A\cup B$ e $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset int(A\cup B)$ o mesmo para B, logo vale $intA\cup intB\subset int(A\cup B)$.

$int(A\cap B)=int(A)\cap int(B)$.

✍ **Propriedade 150.**

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Se $x \in \text{int}(A \cap B)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap B)$ daí $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B$, o que implica que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \text{int}A$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \text{int}B$, provando a primeira parte.

Vamos mostrar agora que $\text{int}A \cap \text{int}B \subset \text{int}(A \cap B)$. Dado $x \in \text{int}A \cap \text{int}B$, sabemos que tal conjunto é aberto por ser intersecção de abertos, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \text{int}A \cap \text{int}B$ daí $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \text{int}A$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \text{int}B$, logo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in A, B$ provando o resultado.

Questão 6

✍ **Propriedade 151.** Seja A um aberto e F um fechado, então $A \setminus F$ é aberto.

Demonstração. Se $A \setminus F$ é vazio, então é aberto. Se não, existe $x \in A \setminus F$ logo $x \in A$, como A é aberto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset A$ e como $x \notin F$ que é fechado, então ele não pertence ao fecho, daí existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \cap F = \emptyset$, tomando $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ segue que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ e nenhum ponto desse intervalo pertence a F, daí $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A \setminus F$, logo o conjunto é aberto.

Podemos escrever $F \setminus A$ como

$$F \setminus A = (R \setminus A) \cap F$$

tal conjunto é então fechado, da mesma maneira

$$A \setminus F = (R \setminus F) \cap A$$

logo $A \setminus F$ é aberto.

☞ **Exemplo 41.** Se A é aberto então $A \setminus \{a\}$ é aberto, pois $\{a\}$ é fechado.

Questões 7 e 8

✍ **Propriedade 152.** Seja A um aberto . $f : A \to f(A)$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A')$ é aberto onde A' é um aberto qualquer de $f(A)$.

ℵ **Demonstração.**

$\Rightarrow$). Supondo $f : A \to f(A)$ contínua. Como A é aberto $f(A)$ possui um conjunto aberto pelo TVI, pois a imagem de um intervalo de A é um intervalo de $f(A)$.

Tomamos $A' \subset f(A)$ aberto. Dado $a \in f^{-1}(A')$ arbitrário tem-se $f(a) \in A'$, como A' é aberto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset A'$, por f ser contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, por A ser aberto o δ pode ser escolhido de maneira tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap A = (a - \delta, a + \delta)$, logo

$$f((a - \delta, a + \delta)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset A'$$

disso concluímos que $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(A')$, logo o conjunto é aberto.

$\Leftarrow$). Supondo que $\forall\, A'$ aberto $f^{-1}(A')$ é aberto vamos mostrar que $f : A \to f(A)$ é contínua.

Dado $a \in A'$ arbitrário tomamos $f(a)$ e $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) = A'$. Vale que $a \in f^{-1}(A')$

$f^{-1}(A')$ é aberto por hipótese, logo existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ daí f é contínua em a.

✍ **Propriedade 153.** Seja A um aberto. Se $f : R \to R$ é contínua, então $f^{-1}(A)$ é aberto.

ℵ **Demonstração.** Seja $a_1 \in f^{-1}(A)$ então existe $a \in A$ tal que $f(a_1) = f(a)$. Vamos mostrar que a_1 é ponto interior de $f^{-1}(A)$.

Como A é aberto, dado $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) = I_a \subset A$, a imagem desse intervalo é um intervalo(pois a função é contínua) que contém um intervalo aberto centrado em $f(a)$, por isso podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $(f(a) - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset f(I_a) \subset f(A)$.

Ainda por continuidade existe $\delta_1 > 0$ tal que para $x \in (a_1-\delta_1, a_1+\delta_1)$ tem-se $f(x) \in (f(a_1)-\varepsilon, f(a_1)+\varepsilon) = (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) \subset f(A)$ disso segue que $(a_1-\delta_1, a_1+\delta_1) \subset f^{-1}(A)$ pois a imagem desse conjunto está contida em $f(A)$, logo a_1 é ponto interior de $f^{-1}(A)$.

☞ **Exemplo 42.** Dadas as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax + b, a \neq 0$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$ então para qualquer aberto $A \subset \mathbb{R}$ tem-se $f^{-1}(A), g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ abertos, pelo resultado anterior, já que as funções são contínuas.

Definição 16 (Homeomorfismo)**.** Uma função $f : A \to B$ é dita ser um homeomorfismo quando é uma bijeção contínua com inversa continua.

✍ **Propriedade 154.** Seja $f : A \to B$ um homeomorfismo, então A é aberto $\Leftrightarrow$ B é aberto.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Suponha A aberto, considere a função $g : B \to A$, inversa de f, vale que $g^{-1}(A) = B$ por g ser bijeção, então por continuidade B é aberto.

$\Leftarrow$). Suponha B aberto. $f^{-1}(B) = A$ por ser bijeção e por resultado anterior A é então aberto.

Com isso concluímos que um homeomorfismo leva abertos em abertos.

☞ **Exemplo 43.** Dadas f e h do exemplo anterior elas são bijeções com inversas contínuas portanto levam abertos em abertos, dado A aberto vale que $f(A)$ e $h(A)$ são abertos. Existe A aberto tal que $g(A)$ não é aberto, como por exemplo $A = (-1, 1)$ que possui imagem $[0, 1)$.

Questão 9

✍ **Propriedade 155.** Toda coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.

Demonstração. Seja A o conjunto dos intervalos não degenerados dois a dois disjuntos. Para cada intervalo $I \in A$ escolhemos um número racional q e com isso definimos a função $f : A \to \mathbb{Q}$, definida como $f(I) = q$, tal função é injetiva pois os elementos $I \neq J$ de A são disjuntos , logo não há possibilidade de escolha de um mesmo racional q em pontos diferentes do domínio, logo a função nesses pontos assume valores distintos . Além disso Podemos tomar um racional em cada um desses conjuntos pois os intervalos são não degenerados e Q é denso. Como $f : A \to Q$ é injetiva e Q é enumerável então A é enumerável.

Questão 10

✍ **Propriedade 156.** O conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_n) é fechado.

Demonstração. Temos que mostrar que $A = \overline{A}$. Já sabemos que vale $A \subset \overline{A}$, falta mostrar que $\overline{A} \subset A$. Se $a \in \overline{A}$ então $a \in A$, vamos demonstrar a contrapositiva que é se $a \notin A$ então $a \notin \overline{A}$.

Se $a \notin A$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ não possui elementos de (x_n) daí não pode valer $a \in \overline{A}$.

Questão 11

✍ **Propriedade 157.** Seja F é fechado e $A \subset F$ então $\overline{A} \subset F$.

Demonstração. Seja $a \in \overline{A}$

$$\begin{cases} a \in A \Rightarrow a \in F \\ a \notin A, \text{ daí existe } (x_n) \text{ em } A(\text{ logo } (x_n) \text{ em } F) \text{ tal que } \lim x_n = a, \text{ logo } a \in F \text{ pois } F \text{ é fechado .} \end{cases}$$

Questão 12

✍ **Propriedade 158.** Dada uma sequência (x_n) o fecho de $X = \{x_n,\ n \in N\}$ é $\overline{X} = X \cup A$ onde A é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

Demonstração. Inicialmente podemos perceber que $X \cup A \subset \overline{X}$ pois $X \subset \overline{X}$ e $A \subset \overline{X}$, esse último pois é formado pelo limite de subsequências de X, que definem de modo natural sequências.

Agora iremos mostrar que $\overline{X} \subset X \cup A$. Se $x \in X$ então $x \in A \cup X$. Se $x \in \overline{X} \setminus X$ então vamos mostrar que $x \in A$, isto é, existe uma subsequência de termos de (x_n) que converge para x. $x \in \overline{X} \setminus X$ implica que todo intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ possui elementos de X distintos de x, isto é, possui termos x_n da sequência.

Definimos indutivamente $n_1 = \min\{n \in N \mid |x_n - a| < 1\}$ supondo definidos de n_1 até n_k definimos $n_{k+1} = \min\{n \in N \setminus \{n_1, \cdots, n_k\} \mid |x_n - a| < \frac{1}{k+1}\}$, daí (x_{n_k}) é subsequência de (x_n) e converge para a, logo $a \in A$.

Corolário 29. Se (x_n) converge, então o único valor de aderência de (x_n) é $\lim x_n = a$, portanto

$$\overline{X} = X \cup \{a\}.$$

Questão 13

Propriedade 159. Os elementos do conjunto de Cantor são os números no intervalo $[0,1]$ cuja representação na base 3 só contém algarismos 0 e 2, não possuindo algarismo 1 (Com exceção para números que tem representação finita e possuem 1 no último algarismo, porém tal número pode ser substituído por uma sequência infinita de algarismos 2)

Exemplo 44. $\frac{1}{4}$ pertence ao conjunto de cantor pois temos sua representação como

$$0,\overline{02} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9^k} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$

lembrando que um traço em cima da parte decimal significa que tal parte se repete na representação.

Questão 20

Propriedade 160. Vale que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

De $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$ segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ daí $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Agora mostramos que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Seja $x \in \overline{A \cup B}$, então existe uma sequência $(x_n) \in A \cup B$ tal que $\lim x_n = x$, tal sequência possui um número infinito de elementos em A ou B, logo podemos tomar uma sequência (y_n) em A ou B tal que $\lim y_n = x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ o que prova o que desejamos.

✍ **Propriedade 161.** Vale que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demonstração. Tem-se que $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, logo $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ e $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ de onde segue $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

☞ **Exemplo 45.** Podemos ter conjuntos X e Y tais que

$$\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}?$$

Sim, basta tomar $X = (a, b)$ e $Y = (b, c)$, temos que $\overline{X} = [a, b]$, $\overline{Y} = [b, c]$, $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{b\}$ e $X \cap Y = \emptyset$ de onde $\overline{X \cap Y} = \emptyset$, logo são diferentes.

Questão 22

☞ **Exemplo 46.** Sendo $A_k = [k, \infty)$ (fechados não limitados) temos uma sequência de intervalos que são conjuntos fechados porém a interseção

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

é vazia, pois suponha que exista $t \in A$, daí existe $k > t$ e $t \notin [k, \infty) = A_k$ logo não pode pertencer a interseção de todos esses conjuntos.

Da mesma maneira existe uma sequência decrescente de intervalos abertos limitados com interseção vazia, sendo $B_k = (0, \frac{1}{k})$ (limitados, não fechados)

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$$

B é vazio, pois se houvesse um elemento nele $x > 0$, conseguimos k tal que

$\frac{1}{k} < x$ daí x não pertence ao intervalo $(0, \frac{1}{k}) = B_k$ portanto não pode pertencer a interseção.

Questão 23

✍ **Propriedade 162.** Um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo $\Leftrightarrow$ $a' < x < b'$ com $a', b' \in I$ implica $x \in I$.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Se I é um intervalo então ele satisfaz a propriedade descrita.

$\Leftarrow$). Se a definição tomada de intervalo for: dados a', b' elementos de I se para todo x tal que $a' < x < b'$ então $x \in I$, logo o conjunto I deve ser um dos nove tipos de intervalos.

Caso I seja limitado, $\inf I = a$ e $\sup I = b$, se $a < x < b$, existem a', b' tais que $a' < x < b'$ logo $x \in I$, isto é, os elementos entre o supremo e o ínfimo do conjunto pertencem ao intervalo. Vejamos os casos

- $\inf I = a, \sup I = b$ são elementos de I, logo o intervalo é da forma $[a, b]$.
- $a \notin I$, $b \in I$, o intervalo é do tipo $(a, b]$.
- $a \in I$ e $b \notin I$, o intervalo é do tipo $[a, b)$.
- $a \notin I$ e $b \notin I$ tem-se o intervalo (a, b). Com isso terminamos os tipos finitos de intervalos.

Se I é limitado inferiormente porém não superiormente.

- $a \in I$, gera o intervalo $[a, \infty)$.
- $a \notin I$, tem-se o intervalo (a, ∞).

Se I é limitado superiormente porém não inferiormente.

- $b \in I$, gera o intervalo $(-\infty, b]$.
- $b \notin I$, tem-se o intervalo $(-\infty, b)$.

O último caso, I não é limitado

$$I = (-\infty, \infty)$$

Questão 25

✍ **Propriedade 163.** A é denso em $R \Leftrightarrow \text{int}(R \setminus A)$ é vazio.

Demonstração.

$\Rightarrow$). Vale que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial A = R$ e $R = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{int}(R \setminus A)$ como a união é disjunta, segue que $\text{int}(R \setminus A) = \emptyset$.

$\Rightarrow$).

Se $\text{int}(R \setminus A)$ é vazio então

$$R = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{int}(R \setminus A) = \text{int}A \cup \partial A = \overline{A}$$

como $\overline{A} = R$ então A é denso em R.

1.7 Capítulo 8-Derivadas

Questão 1

✍ **Propriedade 164** (Teorema do sanduíche para derivadas). Sejam $f, g, h : X \to R$ tais que para todo $x \in X$ se tenha

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

. Se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$ então existe $g'(a) = f'(a)$.

Demonstração. Da identidade $f(a) = h(a)$ e da desigualdade $f(x) \le g(x) \le h(x)$, temos

$$f(a) \le g(a) \le h(a) = f(a), \quad \Rightarrow g(a) = f(a) = h(a)$$

tem-se também

$$f(a+h) \le g(a+h) \le h(a+h), \quad \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) \le g(a+h) - g(a) \le h(a+h) - h(a)$$

pois $f(a) = h(a) = g(a)$, como as derivadas $f'(a)$ e $h'(a)$ existem, então também existem as derivadas laterais

$$f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a) = g'(a) = h'_+(a) = h'_-(a)$$

dividindo a última desigualdade por $h > 0$ e tomando o limite a direita segue

$$f'(a) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq f'(a)$$

e dividindo por $h < 0$ e tomando o limite a esquerda

$$f'(a) \geq \lim_{h\to 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \geq f'(a)$$

assim

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) = g'(a) \quad \square.$$

Questão 2

Se f é derivável à direita no ponto a e $f(a)$ é máximo local então $f'_+(a) \leq 0$. Se fosse $f'_+(a) > 0$ existiria $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$ então $f(a)$ não seria máximo local. Da mesma maneira se f é derivável à esquerda no ponto a então $f'_-(a) \geq 0$, pois se fosse $f'_-(a) < 0$ existiria $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a$ implicaria $f(a) < f(x)$ daí $f(a)$ não seria máximo local.

☞ **Exemplo 47.** As derivadas laterais em um ponto de máximo podem existir sendo diferentes, como é o caso da função $f : R \to R$ com $f(x) = -|x|$, que possui máximo no ponto $x = 0$ e as derivadas laterais são

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-|h|}{h} = -1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-|h|}{h} = 1$$

pois no primeiro caso $|h| = h$, pois $h \to 0^+$ e no segundo $|h| = -h$, pois $h \to 0^-$.

Questão 3

✍ **Propriedade 165.** Seja $p : R \to R$ um polinômio de grau ímpar e t um número par. Existe $c \in R$ tal que

$$D^t p(c) = 0.$$

Demonstração. Basta mostrar que a t-ésima derivada de um polinômio de grau ímpar é um polinômio de grau ímpar(ou função nula) se t é par, pois todo polinômio de grau ímpar possui solução real. Sejam, $n > t$ e

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

basta saber a t-ésima derivada de x^n o termo de mais alto grau, como vale $D^t x^n = t!\binom{n}{t} x^{n-t}$, n ímpar e t é par implicam que $n-t$ é ímpar, daí $D^t p(x)$ é polinômio de grau ímpar e existe $c \in R$ tal que $D^t p(c) = 0$. No caso de $t > n$ tem-se $D^t p(x) = 0 \ \forall\,; x$.

Corolário 30. Em especial se $t = 2$, existe $c \in R$ tal que $p''(c) = 0$.

Questão 4

Propriedade 166. Se $f : A \to R$ é derivável em $a \in \mathrm{int}(A)$ então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Demonstração. Como f é derivável em $a \in \mathrm{int}A$ podemos escrever $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, podemos tomar $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + r(-h)$, subtraindo as duas expressões e dividindo por $2h$, tem-se

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + \underbrace{\frac{r(h) - r(-h)}{2h}}_{\to 0}$$

tomando o limite segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Exemplo 48. O limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ pode existir porém a função pode não ser derivável em a, considere por exemplo $f : R \to R$ dada por $f(x) = |x|$, no ponto $a = 0$ ela não é derivável porém

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0.$$

O limite pode existir porém a função mesmo não ser contínua no ponto, como a função definida como $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x > 0$. Ela não é contínua em 0, porém o limite citado existe, pois tomando o limite pela direita

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} = 0$$

e pela esquerda

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1}{2h} = 0.$$

Questão 5

✍ **Propriedade 167** (Caracterização de Carathéodory). f é derivável em $a \Leftrightarrow$ existe $g : A \to R$ contínua em a tal que $f(x) = f(a) + g(x)(x-a)\ \forall\, x \in A$.

Demonstração. $\Leftarrow)$. Suponha que existe $g : A \to R$ contínua em a tal que $f(x) = f(a) + g(x)(x-a)$, daí para $x \neq a$ tem-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x)$$

como existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ por g ser contínua em a, então existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$, logo f é derivável.

$\Rightarrow)$. Supondo que f seja derivável, então podemos escrever $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$, se $h \neq 0$, definimos $g(a+h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$, se $h = 0$ definimos $g(a) = f'(a)$, então vale que

$$f(a+h) = f(a) + g(a+h).h$$

se $h \neq 0$ e se $h = 0$ também, além disso g é contínua em a, pois de $g(a+h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$, tomando $\lim\limits_{h\to 0}$, tem-se

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = f'(a) = g(a).$$

Questão 8

Veremos um lema que ajudará na próximo resultado.

♣ **Lema 1.** Sejam (a_n) e (b_n) sequências limitada tais que $a_n + b_n = 1 \; \forall \; n \in N$, (z_n) e (t_n) com o mesmo limite a, então $\lim a_n.z_n + b_n.t_n = a$.

Demonstração. Escrevemos

$$a_n.z_n + b_n.t_n = a_n.z_n - a.a_n + a.\underbrace{a_n}_{=1-b_n} + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a(1 - b_n) + b_n.t_n =$$

$$= a_n(z_n - a) + a - a.b_n + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a)$$

daí

$$\lim a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) = a = \lim a_n.z_n + b_n.t_n$$

pois a_n e b_n são limitadas e $z_n - a, t_n - a$ tendem a zero.

✍ **Propriedade 168.** Seja $f : A \to R$ derivável em a. Se $x_n < a < y_n \; \forall \; n$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$.

Demonstração. Começamos com uma manipulação algébrica

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a) - f(x_n) + f(a)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} - \frac{f(x_n) - f(a)}{y_n - x_n} =$$

$$= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(\frac{-x_n + a}{y_n - x_n}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(\frac{y_n - x_n - y_n + a}{y_n - x_n}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right)}_{=t_n}\left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right) + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$= t_n \underbrace{\left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right)}_{\to f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)}_{\to f'(a)}$$

observamos que (t_n) é limitada pois $x_n < a \Rightarrow y_n - a < y_n - x_n \Rightarrow \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$, pois $y_n > x_n$ daí podemos dividir por $y_n - x_n$ sem alterar a desigualdade. Da mesma maneira vale $0 < y_n - a$ e daí $0 < \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$, logo (t_n) é limitada, o mesmo vale para $1 - t_n$, logo aplicamos o lema anterior que nos garante que

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim t_n \underbrace{\left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right)}_{\to f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)}_{\to f'(a)} = f'(a).$$

Questão 9

Questão 10

☞ **Exemplo 49.** Seja $f : R \to R$ dada por $f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tomamos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, daí vale $\lim x_n = \lim y_n = 0$

$$f(x_n) = \frac{1}{(n\pi)^2} sen(n\pi) = 0$$

$$f(y_n) = \frac{1}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} sen(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^n}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2}$$

pois $sen(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \underbrace{sen(n\pi)}_{=0} cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\frac{\pi}{2}) cos(n\pi) = (-1)^n$, daí

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n)}{y_n - x_n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n\pi} = \frac{n\pi - n\pi - \frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)}$$

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} .2n(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})} .2n = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} .2$$

que não converge, pois para n par temos $\frac{-1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} .2 \to \frac{-1}{\pi} .2$ e para n ímpar tem-se $\frac{1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} .2 \to \frac{1}{\pi} .2$ duas subsequências convergindo para valores distintos, logo a sequência não converge.

Tal função é derivável no 0, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x sen(\frac{1}{x}) = 0$$

em outros pontos distintos de 0 a função também é derivável por ser produto de funções deriváveis.

Portanto tal função é derivável no ponto $x = 0$ porém o limite $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ não converge quando $\lim x_n = \lim y_n = 0$. A função derivada de f satisfaz

$$f'(x) = \begin{cases} 2x sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

que não é contínua em $x = 0$, daí a função f é derivável em toda a reta porém possui derivada descontínua.

Questão 13

✍ **Propriedade 169.** Se $f : I \to R$ satisfaz $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}$ com $\alpha > 1, c > 0, x, y \in R$ arbitrários então f é constante.

Demonstração. De $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}$ tomamos $x = a \in R$ fixo porém arbitrário

$$0 \leq \left|\frac{f(y) - f(a)}{y - a}\right| \leq c|y - a|^{\alpha - 1}$$

com $\alpha - 1 > 0$, aplicamos o limite de ambos os lados e pelo teorema do sanduíche segue que $f'(a) = 0$, logo f é constante.

Questão 15

✍ **Propriedade 170.** Se f é derivável em I e f' é contínua em a então $\forall\ x_n \neq y_n$ com $\lim x_n = \lim y_n = a$ então

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Demonstração. Pelo TVM, para cada y_n, x_n existe z_n entre eles tal que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(z_n)$$

daí $\lim z_n = a$ por sanduiche e $\lim f'(z_n) = f'(a)$ por continuidade, logo

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim f'(z_n) = f'(a).$$

1.8 Capítulo 8-Sequências e séries de funções

Questão 1

☞ **Exemplo 50.** Sejam $f_n(x) = x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1}, h_n(x) = (1-x^2)^n$ determine o limite dessas funções em $[-1,1]$, examine a convergência uniforme.

Se $|x| < 1$, fixo, temos $\lim x^{2n} = \lim x^{2n+1} = 0$, $f_n(1) = 1 = g_n(1) = f_n(-1) = 1$ e $g_n(-1) = -1$, logo para essas sequências de funções a convergência não é uniforme, pois temos sequências de funções contínuas convergindo para funções descontínuas, se a convergência fosse uniforme a continudade de funções seria preservada pelo limite. Para h, temos $h_n(1) = 0$, $h_n(-1) = 0$, $h_n(0) = 1$, se $|x| < 1$ e $x \neq 0$ então $0 < x^2 < |x| < 1$ o que implica $0 < 1 - x^2 < 1$ logo $\lim h_n(x) = 0$. A convergência não é uniforme pelo mesmo motivo das outras sequências.

Questão 2

☞ **Exemplo 51.** A sequência de funções $f_n : [0,1] \to R$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge, porém não uniformemente. Apesar disso vale

$$\int_0^1 \lim f_n(x)dx = \lim \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Temos que $f_n \to 0$ pois em $x = 0$ ou 1 a sequência se anula em $x \in (0,1)$ temos $0 < 1-x < 1$ logo por sequência geométrica ela tende a zero. Agora a convergência não é uniforme pois para k suficientemente grande temos $x_k = \frac{1}{k} \in (0,1)$, tomando

$n_k = k$

$$|f_{n_k}(x_k)| \geq \frac{1}{3}$$

pois isso equivale à

$$n\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$$

como $e < 3$ temos $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$ para n grande suficientemente grande, conseguimos colocar $\frac{1}{3} < (1-\frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$, por isso não temos a convergência uniforme . Agora calculamos a integral $\int_0^1 f_n(x)dx$, fazendo a mudança $y = 1-x$, ficamos com a integral

$$\int_0^1 nx(1-x)^n dx = \int_0^1 n(1-y)y^n dy = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} \to 0$$

a outra integral também é nula, logo temos a igualdade de troca de limite com integral .

Questão 6

☞ **Exemplo 52.** Sabemos que se $f_n \to_p f$ e $g_n \to_p g$ então $f_n + g_n \to_p f + g$ e $g_n f_n \to fg$ (convergência pontual ou simples) e se $f(x) \neq 0 \forall\ x$ no domínio e $f_n(x) \neq 0$, tais propriedades valem, pois se fixamos x temos sequências de números reais das quais sabemos que valem tais propriedades.

✍ **Propriedade 171** (Adição de uniformemente convergentes). Se $f_n \to_u f$ e $g_n \to_u g$ em A então $(f_n + g_n) \to_u (f+g)$ em A.

Questão 7

✍ **Propriedade 172** (Produto de uniformemente convergentes). Se $f_n \to_u f$, $g_n \to_u g$, com f e g limitadas em A então $f_n.g_n \to_u f.g$

Demonstração. Sabemos que se f e g são limitadas então para valores de n suficientemente grandes cada f_n e g_n são limitadas, valendo $|f_n(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K_1$.

Podemos escrever

$$f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x) = f_n(x).g_n(x) + \underbrace{-f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x)}_{0} - f(x).g(x) =$$

$$= f_n(x).[g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)]$$

para n grande podemos tomar $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ e $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2K_1}$, tomando a desigualdade triangular aplicada na expressão acima

$$|f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| =$$

$$= |f_n(x).[g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)]| \leq |f_n(x)|.|g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \leq$$

$$K\frac{\varepsilon}{2K} + K_1\frac{\varepsilon}{2K_1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

✍ **Propriedade 173** (Quociente de uniformemente convergente). Se $g_n \to_u g$, com $|g(x)| \geq c$ em A então $\frac{1}{g_n} \to_u \frac{1}{g}$.

Demonstração.

Como $|g(x)| \geq c$ $\forall$ x então $\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{1}{c}$, logo para $n > n_0$ vale $\frac{1}{|g_n(x)|} \leq K \Rightarrow \frac{1}{|g(x)||g_n(x)|} \leq \frac{K}{c}$, por convergência uniforme, podemos tomar $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{c\varepsilon}{K}$ logo

$$|\frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g(x)}| = |\frac{g(x) - g_n(x)}{g_n(x)g(x)}| = \frac{|g_n(x) - g(x)|}{|g_n(x)g(x)|} \leq \frac{K}{c}\frac{c\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

logo temos $\frac{1}{g_n} \to_u \frac{1}{g}$.

☾ **Corolário 31.** Se $f_n \to_u f$, $g_n \to_u g$, com $|g(x)| \geq c$ e f limitada em A então $\frac{f_n}{g_n} \to_u \frac{f}{g}$, pois $\frac{1}{g_n} \to_u g$ e daí por produto de funções uniformemente convergentes que convergem para funções limitadas vale que $\frac{f_n}{g_n} \to_u \frac{f}{g}$.

☞ **Exemplo 53.** Se $x_n \to 0$ uma sequência não nula e $g(x)$ é ilimitada em A então $f_n(x) = [x_n + g(x)]^2$ não converge uniformemente em A.

Vale que

$$f_n(x) = x_n^2 + 2g(x)x_n + g(x)^2$$

temos que $h_n(x) = x_n^2$ e $t_n(x) = g(x)^2$ convergem uniformemente, então para mostrar que f_n não converge uniformemente basta mostrar que $s_n(x) = g(x)x_n$ não converge uniformemente.

Dado $\varepsilon = 1$ para qualquer n fixado, como g é ilimitada em A, podemos tomar x tal que $|g(x)| > \frac{1}{|x_n|}$ daí $|x_n||g(x)| > 1$, isto é,

$$|x_n g(x) - 0| > 1$$

então $s_n(x)$ não converge uniformemente.

Como um exemplo podemos tomar $g(x)$ polinômio e $x_n = \frac{1}{n}$. Essa exemplo mostrar como o produto de sequências uniformemente convergentes pode não ser uniformemente convergente.

Um exemplo simples é considerar $x \in A$ ilimitado e $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $h_n(x) = x$ e $t_n(x) = \frac{1}{n}$ convergem uniformemente, porém seu produto não .

questões 9 e 10

Definição 17. Seja E um espaço métrico, então

$$BC(E) = \{f : E \to R \mid f \text{ é contínua e limitada}\}.$$

B na notação pode lembrar da palavra em inglês "Bound"para função limitada e C para contínua, $BC(E)$ é o conjunto das funções $f : E \to R$ que são contínuas e limitadas. Poderíamos trocar R no contradomínio por outro conjunto W nesse caso poderíamos denotar $BC_W(E)$ desde que esteja definido o que continuidade e função limitada , por exemplo se W é um espaço métrico.

Definição 18 (Norma infinito). Para $f \in BC(E)$ definimos

$$||f||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Tal definição faz sentido pois f é limitada.

Propriedade 174. $f_n \to_u f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0.$

Demonstração.

$\Rightarrow$).

Se $f_n \to_u f$ então $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ tem-se $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x \in E$ isso implica que $\lim_{n\to\infty} ||f(x) - f_n(x)||_\infty = 0$ pois deve valer $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n > n_0$ logo $||f(x) - f_n(x)||_\infty < \varepsilon$ de onde segue o resultado.

$\Leftarrow$). Se $\lim_{n\to\infty} ||f(x) - f_n(x)||_\infty = 0$, então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$ $||f(x)-f_n(x)||_\infty < \varepsilon$ logo $\sup_{x\in E} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ e daí $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon\ \forall\, x \in E$ que significa $f_n \to_u f$.

Propriedade 175. $(BC(E), ||\ ||_\infty)$ é um espaço vetorial normado completo[a]

[a]Espaços vetoriais normados completos são chamado de espaço de Banach.

Demonstração. $BC(E)$ é um espaço vetorial, pois espaço de funções é um espaço vetorial e dada f, g em $BC(E)$ então $cf + g$ é limitada e contínua, com $c \in R$. Agora mostramos que a norma infinito define uma norma neste espaço .

- Vale que $||f||_\infty \geq 0$ pela definição de ser supremo do módulo . Agora, se $||f||_\infty = 0$ então a função deve ser nula, pois se fosse não nula em um ponto x, teríamos $|f(x)| > 0$ o supremo não seria nulo.

- Se $c \in R$, por propriedade do supremo temos

$$||cf||_\infty = \sup_{x\in E} |cf(x)| = |c| \sup_{x\in E} |f(x)| = |c|||f||_\infty.$$

- Mais uma vez por propriedade de supremo temos

$$||f+g||_\infty = \sup |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in E}\{|f(x)|+|g(x)|\} \leq \sup_{x\in E} |f(x)|+\sup_{x\in E} |g(x)| = ||f||_\infty+||g||_\infty.$$

Perceba que não usamos continuidade de f nessas três primeiras propriedades, então valem mesmo com f não contínua.

- Além disso $BC(E)$ é completo, pois tomando f_n uma sequência de funções em $BC(E)$ que seja convergente a uma função f com a norma infinito vamos mostrar que f é contínua e limitada logo pertence a $BC(E)$. Isto é verdade pois $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ significa que $f_n \to_u f$ como cada f_n é contínua então f é contínua, além disso é limitada pois

$$||f||_\infty = ||f - f_n + f_n||_\infty \leq ||f - f_n||_\infty + ||f_n||_\infty \leq M$$

portanto $BC(E)$ é completo.

Corolário 32. Vale que

$$|||f||_\infty - ||g||_\infty| \leq ||f - g||_\infty$$

pois temos $||f||_\infty \leq ||f - g||_\infty + ||g||_\infty$ e $||g||_\infty \leq ||f - g||_\infty + ||f||_\infty$ por desigualdade triangular.

✍ **Propriedade 176.** Se $f, g \in BC(E)$ então $fg \in BC(E)$. Em especial vale que

$$||f.g||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$$

Demonstração. Temos que

$$||fg||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x\in E} |f(x)| \sup_{x\in E} |g(x)| = ||f||_\infty ||g||_\infty .$$

Portanto temos a parte da limitação, fg também é contínua, pois o produto de funções contínuas é uma função contínua. Por isso $f.g \in BC(E)$. Perceba que não usamos continuidade para demonstrar a desigualdade.

Questão 15

Propriedade 177 (Convergência uniforme e continuidade uniforme). Seja (f_n) uma sequência de funções uniformemente contínuas de T em $\mathbb{R}$ convergindo uniformemente para uma função $f : T \to \mathbb{R}$, então f é uniformemente contínua em T.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, pela convergência uniforme de (f_n) para f, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in T$. Como f_m é uniformemente contínua , existe $r > 0$ tal que se $|x - y| < r$ implica $|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e pela convergência pontual de f_m para f temos $|f_m(y)) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, somando as desigualdades segue

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f_m(y) - f(y)|}_{\text{convergência de } f_m(y)} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(y)|}_{\text{continuidade uniforme de } f_m} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\text{Convergência uniforme}} < \varepsilon$$

logo a função é uniforemente contínua .

Questão 20

Propriedade 178. Sejam $g : Y \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n \to_u f$, $f(X) \subset Y$ e $f_n(X) \subset Y \,\forall\, n$, então $g \circ f_n \to_u g \circ f$.

Demonstração. Temos que mostrar que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon\ \forall\, x.$$

Como g é uniformemente contínua dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x' - y'| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$, como $f_n \to_u f$ então existe $n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0$ implica $|\underbrace{f_n(x)}_{x'} - \underbrace{f_(x)}_{y'}| < \delta\ \forall\, x$ logo por g ser uniformemente contínua temos

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon\ \forall\, x.$$

Vale também que $f_n \circ g \to_u f \circ g$ quando $g(Y) \subset X$, caso contrário não faz sentido a composição, pois por convergência uniforme

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid n > n_0 \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon\ \forall\, y \in X$$

em especial para $g(x) = y$.

Questão 26

✍ **Propriedade 179.** Se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \to_u f$ em A então $f_n \to_u 0$ em A.

Demonstração.

Aplicamos o critério de Cauchy, $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $n, n-1 > n_0$ implica

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x$$

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x$$

o que implica a convergência uniforme $f_n \to_u 0$.

Questão 28

✍ **Propriedade 180.** Se $\sum |g_n|$ converge uniformemente em A e existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in N, x \in A$ então $\sum g_n f_n$ converge absolutamente e uniformemente.

Demonstração. Vamos aplicar o critério de Cauchy

$$|\sum_{k=n}^{m} g_k(x) f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} |g_k(x)|\,|f_k(x)| \leq M \sum_{k=n}^{m} |g_k(x)|$$

por convergência uniforme de $\sum |g_n|$ podemos tomar $\sum_{k=n}^{m} |g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall\ x$ para ε arbitrário e n, m suficientemente grandes, pelo critério de Cauchy logo temos a convergência uniforme e absoluta como queríamos .

Questão 29

✍ **Propriedade 181** (Critério de Dirichlet). Sejam $(f_n), (g_n)$ definidas em E tais que $(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}_{s_n(x)})$ seja uniformemente limitada, $g_n \to_u 0$,

$$g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \cdots ,$$

isto é, $(g_n(x))$ é decrescente para x fixo. Nessas condições $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)$ converge uniformemente.

Demonstração. Vamos usar o critério de Cauchy para convergência uniforme, lembrando que $|s_n(x)| \leq M \; \forall \; x \in E, \; n \in N, \; g_n(x) \rightarrow_u 0$ logo para $m > n$ suficientemente grande, podemos tomar $|g_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$, $|g_{m+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ e $g_{n+1}(x) - g_{m+1}(x) \leq \frac{\varepsilon}{3M}$, todas valendo para $\forall \; x \in E$, agora aplicamos a técnica de soma por partes

$$|\sum_{k=n+1}^{m} g_k(x)f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} g_k(x)\Delta s_{k-1}(x)| =$$

$$= |s_{k-1}(x)g_k(x)\Big]_{n+1}^{m+1} + \sum_{k=n+1}^{m} s_k(x)\underbrace{\Delta - g_k(x)}_{>0}| \leq$$

$$|s_m(x)g_{m+1}(x) - s_n(x)g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{|s_k(x)|}_{\leq M}\Delta - g_k(x) \leq$$

$$M\underbrace{|g_{m+1}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3M}} + M\underbrace{|g_{n+1}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3M}} + M\underbrace{(g_{n+1}(x) - g_{m+1}(x))}_{<\frac{\varepsilon}{3M}} \leq \varepsilon \; \forall \; x$$

então pelo critério de Cauchy temos convergência uniforme.