Processos Estocásticos - Trabalho de Simulação

Yuri F. Saporito

1. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

   Classifique seus estados e ache as distribuições estacionárias dessa cadeia. Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1, 2, 3, 4$ e 5 e aproxime o limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

   para todos $i, j \in I$. Verifique que os resultados encontrados estão convergindo para os valores corretos.

2. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

   Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1$ e aproxime o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_k^2$$

   Verifique que o resultado encontrado está convergindo para o valor correto (que pode ser calculado resolvendo o sistema linear $(I - P)^T \pi^T = 0$ numericamente).

3. Simule vários caminhos do martingal $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ com $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ iid e $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1/2$ e mostre graficamente que $M_n \to 0$ q.c.

4. Simule J caminhos do processo de Poisson com $\lambda = 1$ até o tempo $T = 5$ de duas maneiras:

   - usando os tempos entre-chegadas $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
   - usando o Teorema 4.4.8 das notas de aula.

   Calcule a esperança

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right] \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \int_0^T N_t^{(j)} dt$$

   usando os caminhos simulados acima e compare com o valor exato. Note que

$$\int_0^T N_t dt = N_T * (T - T_{N_T}) \sum_{k=1}^{N_T - 1} k(T_{k+1} - T_k),$$

   onde T_k é o tempo da k-ésima chegada.

5. Use processos Gaussianos para estimar uma regressão não-paramétrica. Implemente sua própria função para calcular a função média e e o kernel de covariância. Simule os dados usando a seguinte equação:

$$y(x) = \sin(x) + \epsilon.$$

Use kernel RBF:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left\{-\frac{1}{2\ell^2}(x - x')^2\right\}$$

com $\ell = 1$, $\sigma_f = 1$ e $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, com $\sigma^2 = 0.16$ e $\sigma^2 = 0$. Você pode usar $x \in [-\pi, \pi]$ com 5 pontos para o treinamente e 50 pontos para o teste. Faça também o gráfico da função exata, os pontos observados, a função média estimada (no conjunto total de pontos de treino e teste) e o intervalo de confiança de 95%.

6. Simule caminhos do movimento Browniano entre 0 e 1 e calcule $M_1 = \max_{t\in[0,1]} B_t$. Plote o histograma de M_1 e compare com a densidade exata de M_1:

$$f_{M_1}(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-m^2/2}.$$

7. O modelo de Black–Scholes pode ser escrito como

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}.$$

Usando o item anterior, simule vários caminhos de S com $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$. Use eles para calcular a seguinte esperança para $K = [80, 85, 90, \ldots, 120]$:

$$C(K) = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-rT}(S_T^{(n)} - K)^+,$$

onde $x^+ = \max\{x, 0\}$. Esse método é conhecido como Monte Carlo. Mostre o gráfico de C.