

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Anwendungsbeispiele

222 Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft
und Technik mit ausführlich kommentierten Lösungen

6. Auflage

STUDIUM



Springer Vieweg

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele

Das sechsbändige Lehr- und Lernsystem Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler umfasst neben dem Buch mit Anwendungsbeispielen die folgenden Bände:

Papula, Lothar

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium

Mit 609 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik sowie 352 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium

Mit 345 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik sowie 324 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung

Mit 550 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik sowie 285 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematische Formelsammlung

für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Mit über 400 Abbildungen, zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –

Klausur- und Übungsaufgaben

632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele

222 Aufgabenstellungen aus Natur-
wissenschaft und Technik mit ausführlich
kommentierten Lösungen

6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 369 Bildern und einem Anhang
mit Physikalischen Grundlagen

STUDIUM



Springer Vieweg

Dr. Lothar Papula
Wiesbaden, Deutschland

ISBN 978-3-8348-1583-5
DOI 10.1007/978-3-8348-2129-4

ISBN 978-3-8348-2129-4 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 1990, 1992, 1994, 2000, 2004, 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Beltz Bad Langensalza GmbH

Bilder: Graphik & Text Studio Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Lektorat: Thomas Zipsner

Einbandentwurf: KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Die Darstellung *anwendungs-* und *praxisorientierter* mathematischer Methoden in Vorlesungen und Übungen gehört zum festen Bestandteil des Grundstudiums der naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen im Hochschulbereich. Entwicklung und Erwerb der Fähigkeit, die vermittelten mathematischen Kenntnisse auf Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft und Technik *erfolgreich* anwenden zu können, sind ein wesentliches Ziel der Grundausbildung und Voraussetzung für ein erfolgreiches Studium.

Das vorliegende Werk „**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele**“ enthält 222 ausschließlich anwendungsorientierte Aufgaben, die ausführlich formuliert und vollständig gelöst werden (Lösungen mit allen Zwischenschritten). Die ausgewählten Aufgabenstellungen entstammen den speziellen Grundvorlesungen der naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen wie Elektrotechnik, Maschinenbau, Bauingenieurwesen, Physik und Chemie. In diesen Beispielen wird gezeigt, wie man die erworbenen mathematischen Kenntnisse erfolgreich auf Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft und Technik anwendet.

Dieses **Anwendungsbuch** folgt dabei im Aufbau und der Stoffauswahl weitgehend dem bewährten dreibändigen Lehrwerk „**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**“ des Autors. Die beim *selbständigen* Lösen der als Übungsaufgaben formulierten Anwendungsbeispiele benötigten *physikalischen Grundlagen* sind im farbig gedruckten Anhang einzeln aufgeführt. Das **Anwendungsbuch** ist daher *unabhängig* von weiterer physikalischer Literatur verwendbar. Der allen Anwendungsbeispielen *gemeinsame* Aufbau wird in der nachfolgenden *Anleitung* ausführlich beschrieben.

Die insgesamt 13 Kapitel sind wie folgt nach Stoffgebieten geordnet:

- Vektorrechnung
- Funktionen und Kurven
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Taylor- und Fourier-Reihen
- Komplexe Zahlen und Funktionen
- Lineare Algebra
- Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Fehler- und Ausgleichsrechnung
- Fourier-Transformationen
- Laplace-Transformationen
- Vektoranalysis

Zur 6. Auflage

Das Anwendungsbuch wurde vollständig überarbeitet und um die Kapitel **Fourier-Transformationen** und **Vektoranalysis** erweitert.

Eine Bitte des Autors

Für Hinweise und Anregungen bin ich stets dankbar. Sie sind eine unverzichtbare Voraussetzung und Hilfe für die permanente Verbesserung dieses Werkes.

Ein Wort des Dankes . . .

... an alle Fachkollegen und Studierenden, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Werkes beigetragen haben,

... an Frau Gabriele McLemore für die hervorragende Zusammenarbeit während der Drucklegung dieses Werkes,

... an den Cheflektor Thomas Zipsner für das sorgfältige Korrekturlesen,

... an Frau Diane Schulz (Beltz Bad Langensalza) für den ausgezeichneten mathematischen Satz,

... an Herrn Dr. Wolfgang Zettlmeier für die hervorragende Qualität der Abbildungen.

Wiesbaden, im Frühjahr 2012

Lothar Papula

Anleitung

Der *Aufbau* der als Übungsaufgaben formulierten Anwendungsbeispiele erfolgt nach einem *einheitlichen* Schema, wie in dem nachfolgenden Musterbeispiel dargestellt. Im Lösungsteil gegebene Hinweise auf Formeln beziehen sich auf die **Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler** des Autors.

Musterbeispiel

70

III Differentialrechnung

Beispiel 1: Induktionsspannung in einer Leiterschleife

Elementare Differentiation

Eine u-förmig gebogene *Leiterschleife* wird von einem *homogenen* Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} *senkrecht* durchflutet (Bild III-1). Auf der Leiterschleife gleitet in der eingezeichneten Weise ein *Leiter*, dessen Geschwindigkeit v aus der Ruhe heraus mit der Zeit t *linear* ansteigt.

Bestimmen Sie die nach dem *Induktionsgesetz* [A12] in der Leiterschleife *induzierte Spannung* U .

l : Breite der Leiterschleife; s_0 : Anfangslage des Leiters zu Beginn der Bewegung, d. h. zur Zeit $t = 0$

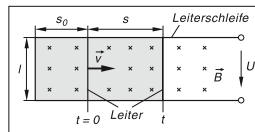


Bild III-1

Lehrbuch: Bd. 1, IV.1.3

Physikalische Grundlagen: A11, A12

Lösung:

Der Leiter bewegt sich aus der Ruhe heraus mit *linear* ansteigender Geschwindigkeit, unterliegt demnach einer *konstanten* Beschleunigung a . Somit ist $v = at$ und der vom Leiter in der Zeit t zurückgelegte Weg beträgt $s = \frac{1}{2} at^2$. Die vom Magnetfeld zu diesem Zeitpunkt *durchflutete* Fläche A (in Bild III-1 *grau* unterlegt) ist ein Rechteck mit den Seitenlängen l und $s_0 + s = s_0 + \frac{1}{2} at^2$ und dem *Flächeninhalt*

$$A = l(s_0 + s) = l \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right)$$

Der *magnetische Fluss* [A11] durch diese Fläche ist dann

$$\Phi = BA = Bl \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) \quad (\text{mit } B = |\vec{B}|)$$

Nach dem *Induktionsgesetz* [A12] beträgt die in der Leiterschleife *induzierte Spannung*

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[Bl \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) \right] = Bl \cdot \frac{d}{dt} \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) = Bl(0 + at) = B l a t = (\text{const.}) \cdot t \quad (\text{mit } B l a = \text{const.})$$

Die Induktionsspannung steigt somit mit der Zeit *linear* an (Bild III-2).

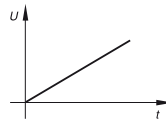


Bild III-2

Naturwissenschaftlich-technisches Thema

Benötigte mathematische Kenntnisse

Formulierung der Aufgabe, in der Regel von einem Bild mit weiteren Informationen begleitet. In einigen Fällen erfolgt zusätzlich ein spezieller *Lösungshinweis*.

Verweise auf die Lehrbücher des Autors und die benötigten *physikalischen Grundlagen* im Anhang.

Ausführliche Lösung der Aufgabe mit sämtlichen Zwischenschritten unter Angabe der verwendeten Formeln aus der Formelsammlung und der benötigten physikalischen Grundlagen aus dem Anhang dieses Buches.

Inhaltsverzeichnis

I Vektorrechnung

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Kraftzerlegung am Keil	Zerlegung eines Vektors in Komponenten	1
2	Zusammengesetzte Bewegung einer Fähre	Vektoraddition	2
3	Kräftegleichgewicht an einem belasteten Rollensystem	Vektoraddition	3
4	Zweifach gelagerte Welle bei Belastung	Komponentenrechnung	4
5	Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem Ausleger	Vektoraddition	5
6	Schwerpunkt eines Massenpunktsystems	Vektoraddition	7
7	Überlagerung elektrischer Felder	Vektoraddition	8
8	Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern	Vektorprodukt	10
9	Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem belasteten Dreibein	Räumliche Vektoraddition, Gaußscher Algorithmus	11
10	Arbeit an einer Punktladung in einem elektrischen Feld	Skalarprodukt	14
11	Durchbiegung eines Balkens bei Belastung durch mehrere Kräfte	Skalarprodukt	15
12	Moment einer Kraft in einem Kugelgelenk	Vektorprodukt, Richtungswinkel	17
13	Umfangsgeschwindigkeit einer rotierenden Zylinderscheibe	Vektorprodukt, Ableitung eines Vektors	18
14	Drehmoment einer stromdurchflossenen Leiterschleife in einem Magnetfeld	Vektorprodukt	19
15	Kräftefreie Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld	Vektorprodukt, Richtungswinkel	20
16	Fachwerk im statischen Gleichgewicht	Vektoraddition, Vektorprodukt, lineares Gleichungssystem	21

17	Komplanare Kraftvektoren	Vektoraddition, Richtungswinkel, Spatprodukt	24
18	Spannungsstoß in einer Leiterschleife infolge elektromagnetischer Induktion	Vektor- und Spatprodukt	25
19	Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld	Ableitungen eines Vektors, Skalar- und Spatprodukt	27

II Funktionen und Kurven

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Reihenschaltung aus n gleichen Spannungsquellen	Diskrete Funktion	29
2	Zeitversetzter freier Fall zweier Kugeln	Lineare Funktion	30
3	Zugspannung in einem rotierenden Stab	Quadratische Funktion	32
4	Sortiervorrichtung	Parameterdarstellung, quadratische Funktion	33
5	Aufeinander abrollende Zahnräder (Epizykloide)	Parameterdarstellung einer Kurve	34
6	Fallbeschleunigung innerhalb und außerhalb eines Erdkanals	Lineare Funktion, gebrochenrationale Funktion	38
7	Verteilung der Stromdichte in einem stromdurchflossenen Hohlzylinder	Gebrochenrationale Funktion	40
8	Kapazität eines Kondensators mit geschichtetem Dielektrikum	Gebrochenrationale Funktion	41
9	Magnetfeld in der Umgebung einer stromdurchflossenen elektrischen Doppelleitung	Gebrochenrationale Funktion	42
10	Kennlinien einer Glühlampe	Interpolationsformel von Newton, kubische Funktion, Horner-Schema	45
11	Doppelschieber	Parameterdarstellung, Kegelschnittgleichung	47
12	Rollbewegung einer Zylinderwalze längs einer schiefen Ebene	Wurzelfunktion	49
13	Ballistisches Pendel	Zusammengesetzte Funktion	50

14	Momentane (zeitabhängige) Leistung eines Wechselstroms	Sinus- und Kosinusfunktionen	52
15	Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung	Sinus- und Kosinusfunktionen	54
16	Lissajous-Figuren	Parameterdarstellung, Sinus- und Kosinusfunktionen, Wurzelfunktionen	56
17	Schwebungen	Trigonometrische Funktionen	58
18	Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler	Trigonometrische Funktionen, Arkuskosinusfunktion	60
19	Ladestrom in einer RC-Parallelschaltung	Exponentialfunktion (Abklingfunktion)	62
20	RC-Glied mit Rampenspannung	Exponentialfunktion (Sättigungsfunktion)	64
21	Aperiodischer Grenzfall einer Schwingung	Kriechfunktion (Exponentialfunktion)	65
22	Barometrische Höhenformel	Logarithmusfunktion	66
23	Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Fallweg unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Hyperbelfunktionen	68

III Differentialrechnung

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Induktionsspannung in einer Leiterschleife	Elementare Differentiation	70
2	Elektronenstrahl-Oszilloskop	Elementare Differentiation, Tangentengleichung	71
3	Querkraft- und Momentenverlauf längs eines belasteten Trägers	Elementare Differentiation	73
4	Rotierende Zylinderscheibe in einer zähen Flüssigkeit	Differentiation (Kettenregel)	75
5	Kurbeltrieb	Differentiation (Kettenregel)	76
6	Zusammenhang zwischen Fallbeschleunigung und Fallweg unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Differentiation (Kettenregel)	78

7	Periodische Bewegung eines Massenpunktes	Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors	80
8	Rollkurve oder gewöhnliche Zykloide	Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors	82
9	Linearisierung einer Halbleiter-Kennlinie	Linearisierung einer Funktion	84
10	Linearisierung der Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)	Linearisierung einer Funktion	86
11	Kritische Daten eines realen Gases	Sattelpunkt	88
12	Wurfparabel eines Wasserstrahls	Extremwertaufgabe	91
13	Scheibenpendel mit minimaler Schwingungsdauer	Extremwertaufgabe	93
14	Leistungsanpassung eines Verbraucherwiderstandes	Extremwertaufgabe	95
15	Resonanzfall bei einer erzwungenen Schwingung	Extremwertberechnung	97
16	Optimale Beleuchtung eines Punktes durch eine Lichtquelle	Extremwertaufgabe	99
17	Gaußsche Normalverteilung	Extremwerte, Wendepunkte	101
18	Elektrische Feldstärke in der Umgebung einer elektrischen Doppelleitung	Kurvendiskussion	104
19	Ungestörte Überlagerung zeitabhängiger Impulse	Kurvendiskussion	106
20	Überlagerung von Sinusschwingungen gleicher Raumrichtung, aber unterschiedlicher Frequenz	Kurvendiskussion	110
21	Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	113
22	Erzwungene Schwingung im Resonanzfall	Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	115
23	Eintauchtiefe einer Boje in Salzwasser	Tangentenverfahren von Newton	118
24	Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)	Tangentenverfahren von Newton	120

IV Integralrechnung

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Induktionsspannung in einer in einem Magnetfeld rotierenden Metallscheibe	Elementare Integration (Grundintegral)	123
2	Rollbewegung einer Kugel längs einer schiefen Ebene	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	124
3	Oberflächenprofil einer rotierenden Flüssigkeit	Elementare Integration (Grundintegral)	126
4	Resultierende eines ebenen parallelen Kräftesystems	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	127
5	Querkraft und Biegemoment längs eines Balkens mit linear ansteigender Last (Dreieckslast)	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	129
6	Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler	Elementare Integration (Grundintegral)	130
7	Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers mit elliptischem Querschnitt	Elementare Integration (Grundintegral)	133
8	Zugstab mit konstanter Zugspannung	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	134
9	Magnetischer Fluss durch eine Leiterschleife	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	135
10	Kapazität eines Koaxialkabels	Elementare Integration (Grundintegral)	137
11	Übergangswiderstand einer Kugel	Elementare Integration (Grundintegral)	138
12	Arbeit im Gravitationsfeld der Erde	Elementare Integration (Grundintegral)	140
13	Elektrischer Widerstand eines kegelförmigen Kontaktes	Integration mittels Substitution	141
14	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Integration mittels Substitution	143
15	Aufladung eines Kondensators in einem RC-Schaltkreis	Integration mittels Substitution	145
16	Rotation einer Scheibe in einer Flüssigkeit	Integration mittels Substitution	147

17	Kapazität einer elektrischen Doppelleitung	Integration mittels Substitution	149
18	Effektivwert eines Wechselstroms	Integration mittels Substitution	150
19	Bogenlänge einer Epizykloide	Integration mittels Substitution	152
20	Fallgesetze bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Integration mittels Substitution	155
21	Mittlere Geschwindigkeit von Gasmolekülen	Partielle Integration	156
22	Durchschnittliche Leistung eines Wechselstroms in einem RL-Schaltkreis	Integration mittels Substitution bzw. partieller Integration	159
23	Induktivität einer elektrischen Doppelleitung	Integration durch Partialbruchzerlegung des Integranden, Integration mittels Substitution	162
24	Schwingungsdauer eines Fadenpendels	Numerische Integration nach Simpson	164

V Taylor- und Fourier-Reihen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Grenzwertbestimmung mittels Reihenentwicklung	167
2	Elektrischer Widerstand zwischen zwei coaxialen Zylinderelektroden (Hohlzylinder)	Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynome	169
3	Temperaturabhängigkeit der Dichte eines Festkörpers	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	171
4	Magnetische Feldstärke in der Mitte einer stromdurchflossenen Zylinderspule	Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynom	172
5	Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	174
6	Spiegelgalvanometer	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	176
7	Kapazität einer elektrischen Doppelleitung	Potenzreihenentwicklung, Näherungsformel	177

8	Relativistische Masse und Energie eines Elektrons	Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynom	179
9	RC-Schaltung mit Rampenspannung	Potenzreihenentwicklung, Näherungsfunktionen	180
10	Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)	Lösen einer Gleichung mittels Reihenentwicklung, Näherungsparabel	182
11	Gaußsche Normalverteilung	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	184
12	Schwingungsdauer eines Fadenpendels	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	186
13	Fourier-Zerlegung einer periodischen Folge rechteckiger Spannungsimpulse	Fourier-Reihe, Amplitudenspektrum	190
14	Fourier-Reihe einer Kippspannung (Sägezahnimpuls)	Fourier-Reihe in reeller Form	194
15	Fourier-Zerlegung eines „angeschnittenen“ Wechselstroms	Fourier-Reihe in reeller Form	196
16	Fourier-Reihe einer Kippschwingung	Fourier-Reihe in komplexer und reeller Form	200

VI Komplexe Zahlen und Funktionen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Resonanz im Parallelschwingkreis	Komplexe Rechnung	203
2	Ohmscher Spannungsteiler	Komplexe Rechnung	204
3	Berechnung des komplexen Widerstandes eines Netzwerkes	Komplexe Rechnung	206
4	Wechselstrommessbrücke	Komplexe Rechnung	208
5	Wechselstromparadoxon	Komplexe Rechnung	210
6	Komplexer Wechselstromkreis	Komplexe Rechnung	212
7	Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung	Komplexe Zeiger, Zeigerdiagramm	215
8	Leitwertortskurve einer RC-Parallelschaltung	Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe	218
9	Widerstands- und Leitwertortskurve einer RL-Reihenschaltung	Ortskurven parameterabhängiger komplexer Größen	219

VII Lineare Algebra

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Widerstands- und Kettenmatrix eines lineare Vierpols	Matrix, Determinante einer Matrix	221
2	Vierpolgleichungen für ein symmetrisches T-Glied	Matrizenrechnung, inverse Matrix	223
3	Symmetrische π -Schaltung	Multiplikation von Matrizen	226
4	Kettenschaltung von Vierpolen	Multiplikation von Matrizen	227
5	Durchbiegung eines Trägers bei Belastung durch mehrere Kräfte (Superpositionsprinzip)	Multiplikation von Matrizen (Falk-Schema)	228
6	Eigenkreisfrequenzen einer Biegeschwingung	Determinantengleichung	230
7	Elektromagnetische Induktion in einem durch ein Magnetfeld bewegten elektrischen Leiter	Dreireihige Determinante	232
8	Kritische Drehzahlen einer zweifach gelagerten Welle	Homogenes lineares Gleichungssystem, Determinantengleichung	233
9	Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke	Homogenes lineares Gleichungssystem, Determinanten	236
10	Torsionsschwingung einer Welle	Dreireihige Determinante	238
11	Verzweigter Stromkreis	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	239
12	Beschleunigte Massen in einem Rollensystem	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	241
13	Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	243
14	Netzwerkanalyse nach dem Maschenstromverfahren	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	244
15	Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus (Matrizenform)	247
16	Berechnung der Ströme in einer Netzmasche	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	249
17	Modifizierter Gerber-Träger	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	251
18	Normalschwingungen eines diatomaren Moleküls (Zwei-Teilchen-Schwinger)	2-dimensionales Eigenwertproblem	254

VIII Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Potential und elektrische Feldstärke im elektrostatischen Feld zweier Punktladungen	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	258
2	Statisch unbestimmt gelagerter Balken	Partielle Ableitungen	260
3	Temperaturverteilung längs eines Metallstabes (eindimensionale Wärmeleitungsgleichung)	Partielle Ableitungen	263
4	Kapazität einer Kondensatorschaltung	Totales oder vollständiges Differential	265
5	Schwingungsgleichung der Mechanik	Totales oder vollständiges Differential	267
6	Thermodynamische Zustandsfunktionen	Totales Differential, wegunabhängiges Linienintegral	268
7	Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung	Linearisierung einer Funktion	270
8	Leistungsanpassung beim Wechselstromgenerator	Extremwertaufgabe	273
9	Eine Anwendung des Gaußschen Fehlerintegrals	Extremwertaufgabe	277
10	Flächeninhalt und Flächenschwerpunkt eines Kreisabschnittes (Kreissegmentes)	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	281
11	Magnetischer Fluss durch eine Leiterschleife	Doppelintegral in Polarkoordinaten	284
12	Stromstärke in einem Leiter bei ortsabhängiger Stromdichte	Doppelintegral in Polarkoordinaten	285
13	Gaußsche Normalverteilung	Doppelintegral in Polarkoordinaten	287
14	Schwerpunkt, Hauptachsen und Hauptflächenmomente 2. Grades (Hauptflächenträgheitsmomente) einer trapezförmigen Fläche	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	291
15	Volumen und Schwerpunkt eines Tetraeders	Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten	296

16	Massenträgheitsmoment eines Speichenrades	Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	299
17	Schwerpunkt eines rotations-symmetrischen Körpers mit elliptischem Querschnitt und zylindrischer Bohrung	Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten	301
18	Massenträgheitsmomente eines homogenen Kegels	Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten	304
19	Silo (Großspeicher) mit inhomogener Füllmasse	Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten	310
20	Kugelsymmetrische Ladungsverteilung in einer Kugel	Dreifachintegral in Kugelkoordinaten	313

IX Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Raketengleichung	Dgl 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x)$ (Integration mittels Substitution)	315
2	RL-Schaltkreis mit einer Gleichstromquelle	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)	319
3	Seilkräfte und Seilreibung	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)	322
4	Fallbewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)	323
5	RC-Schaltkreis mit einer Gleichspannungsquelle	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)	327
6	RC-Wechselstromkreis	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Aufsuchen einer partikulären Lösung)	330
7	Biegelinie eines beidseitig eingespannten Balkens bei konstanter Streckenlast	Dgl. 2. Ordnung vom Typ $y'' = f(x)$ (direkte Integration)	334
8	Knicklast nach Euler	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	336
9	Radialbewegung einer Masse in einer geraden, rotierenden Führung	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung	338

10	Elektromagnetischer Schwingkreis	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	340
11	Biegeschwingung einer elastischen Blattfeder	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	342
12	Scheibenpendel (physikalisches Pendel)	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	345
13	Vertikale Schwingungen eines Körpers in einer Flüssigkeit	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (gedämpfte Schwingung)	347
14	Schwingung eines rotierenden Federpendels	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	349
15	Drehspulinstrument	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	352
16	Erzwungene mechanische Schwingung	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (erzwungene Schwingung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	356
17	Gleichung einer Seilkurve (Kettenlinie)	Nichtlineare Dgl 2. Ordnung (Substitutionsmethode, Trennung der Variablen)	359
18	Torsionsschwingungen einer zweifach besetzten elastischen Welle	System linearer Dgln 2. Ordnung	361
19	Elektronenbahn im homogenen Magnetfeld	System linearer Dgln 2. Ordnung	363
20	2-stufige chemische Reaktion vom Typ $X \rightarrow Y \rightarrow Z$	System homogener linearer Dgln 1. Ordnung, Matrizeigenwert- problem, Lineares Gleichungssystem	367

X Fehler- und Ausgleichsrechnung

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Widerstandsmoment eines kreisring- förmigen Rohrquerschnittes gegen Torsion (Verdrehung)	Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)	372
2	Kombinierte Parallel-Reihenschaltung elastischer Federn	Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)	374

3	Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung	Fehlerfortpflanzung nach Gauß	376
4	Wirkleistung eines Wechselstroms	Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)	378
5	Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke	Mittelwert und Standardabweichung des Mittelwertes (mittlerer Fehler des Mittelwertes), Fehlerfortpflanzung nach Gauß	380
6	Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes	Auswertung von Messreihen, Fehlerfortpflanzung nach Gauß	382
7	Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)	Ausgleichskurve (Exponentialfunktion)	384
8	Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes (Glühlampe)	Ausgleichskurve (kubische Funktion)	386

XI Fourier-Transformationen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Spektraldichte eines \cos^2 -Impulses	Fourier-Integral, Fourier-Kosinus-Transformation	390
2	Amplituden- und Phasengang eines DT_1 -Regelkreisgliedes	Fourier-Transformation, Frequenzspektrum	392
3	Beidseitig gedämpfte (amplitudenmodulierte) Sinusschwingung	Fourier-Integral, Fourier-Sinus-Transformation	394
4	Spektraldichte (Frequenzspektrum) eines modulierten Rechteckimpulses	Fourier-Integral, Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	397
5	Impulsantwort eines PT_1 -Übertragungssystems	Inverse Fourier-Transformation, Zeitverschiebungssatz, Faltungssatz	400
6	Lineares zeitinvariantes Übertragungssystem (LTI-System)	Inverse Fourier-Transformation	403
7	Übertragungsverhalten einer RC-Schaltung	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung, Ableitungssatz für Originalfunktionen, inverse Fourier-Transformation	404
8	Fourier-Analyse einer gedämpften mechanischen Schwingung	Fourier-Integral, Amplituden- und Phasenspektrum	408

9	Frequenzgang und Impulsantwort eines linearen Übertragungssystems	Inverse Fourier-Transformation, Faltungsprodukt (Faltungsintegral), Partialbruchzerlegung	412
---	---	---	-----

XII Laplace-Transformationen

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Ausschaltvorgang in einem RL-Schaltkreis	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	416
2	RC-Wechselstromkreis	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen, Faltungssatz)	418
3	RL-Schaltkreis mit Rampenspannung	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	422
4	RC-Schaltkreis mit einem rechteckigen Spannungsimpuls	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen, 1. Verschiebungssatz)	424
5	Rohrzuckerinversion	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	428
6	Bewegung einer Masse im Erdkanal	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	430
7	Schwingung eines rotierenden Federpendels	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	432
8	Erzwungene mechanische Schwingung im Resonanzfall	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	435
9	Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	436
10	Elektromagnetischer Reihenschwingkreis	Integro-Differentialgleichung (Ableitungs- und Integrationssatz für Originalfunktionen)	439

11	Spannungsübertragung bei einem Vierpol	System linearer Dgln 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen, Partialbruchzerlegung der Bildfunktion)	442
12	Gekoppelte mechanische Schwingungen	System linearer Dgln 2. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)	447

XIII Vektoranalysis

Beispiel	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Temperaturverteilung auf einer dünnen Zylinderscheibe	Niveaulinien (Äquipotentiallinien), Gradient	452
2	Quellströmung einer Flüssigkeit	Niveaulinien, Gradient	454
3	Potential und Feldstärke des elektrischen Feldes in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel	Äquipotentialfläche (Niveaufläche), Gradient	456
4	Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Kugel	Rotation	458
5	Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und der räumlichen Ladungsdichte in einem elektrischen Feld (Maxwellsche Gleichung)	Divergenz, Rotation	460
6	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	Divergenz, Rotation	461
7	Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders	Divergenz, Rotation	463
8	Staupunktströmung einer Flüssigkeit	Rotation, Divergenz, Gradient, Differentialgleichung (Trennung der Variablen)	465
9	Stationäre (zeitunabhängige) Wärmeleitung durch eine Rohrwand	Laplace-Gleichung, Differentialgleichung (Trennung der Variablen)	469
10	Gravitationspotential und Fallbeschleunigung	Gradient, Laplace-Gleichung (Potentialgleichung)	471

11	Potential und Feldstärke des elektrischen Feldes im Innenraum eines homogen geladenen Zylinders	Gradient, Potentialgleichung (Laplace-Gleichung)	473
12	Wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung	Divergenz, Rotation, Gradient	475
13	Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	Linienintegral	478
14	Elektrisches Feld einer Linienquelle	Gradient, Rotation, Linienintegral	480
15	Magnetische Feldstärke in der Achse eines stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters	Linienintegral	484
16	Gravitationspotential der Erde	Rotation, Konservatives Feld, Linienintegral	486
17	Fluss eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche	Oberflächenintegral, Volumenintegral, Integralsatz von Gauß	488
18	Fluss eines Zentralfeldes durch eine konzentrische Kugeloberfläche	Divergenz, Oberflächenintegral, Integralsatz von Gauß	491
19	Elektrische Ladung und Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugel	Integralsatz von Gauß, Oberflächenintegral	493
20	Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen zylindrischen Leiters	Rotation, Integralsatz von Stokes	495

Anhang: Physikalische Grundlagen

I Vektorrechnung

Beispiel 1: Kraftzerlegung am Keil

Zerlegung eines Vektors in Komponenten

Zerlegen Sie gemäß Bild I-1 die am *Keil* angreifende Kraft \vec{F} vom Betrag $F = 5 \text{ kN}$ in die beiden *Normalkomponenten* \vec{F}_{N1} und \vec{F}_{N2} :

- zeichnerische Lösung,
- rechnerische Lösung.

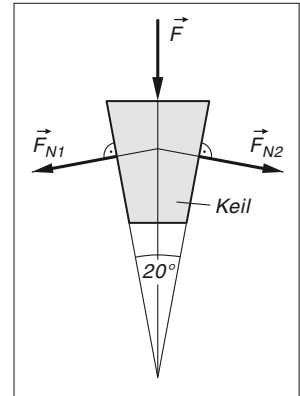


Bild I-1

Lehrbuch: Bd. 1, II.2.1

Lösung:

- Bild I-2 zeigt in einer Skizze, wie sich die beiden Normalkomponenten \vec{F}_{N1} und \vec{F}_{N2} vektoriell zum (vorgegebenen) Kraftvektor \vec{F} addieren. Da sie aus *Symmetriegründen* den gleichen Betrag haben, ist das zugehörige Kräfte-dreieck *gleichschenkelig*. Daher gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2}, \quad F_{N1} = F_{N2} = F_N, \quad \alpha = 80^\circ, \quad \beta = 20^\circ$$

Aus der gegebenen Seite $F = 5 \text{ kN}$ und den bekannten Winkeln konstruieren wir das *Kräfte-dreieck* und lesen die gesuchten Werte ab (Bild I-3):

$$F_{N1} = F_{N2} \approx 14,4 \text{ kN}$$

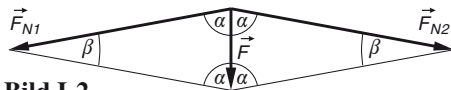


Bild I-2

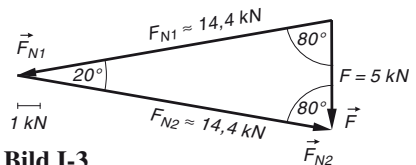


Bild I-3

- Aus dem Kräfte-dreieck folgt mit $F_{N1} = F_{N2} = F_N$ unter Verwendung des *Kosinussatzes*

$$F^2 = F_N^2 + F_N^2 - 2 F_N \cdot F_N \cdot \cos \beta = 2 F_N^2 - 2 F_N^2 \cdot \cos \beta = 2 (1 - \cos \beta) F_N^2$$

und somit

$$F_N^2 = \frac{F^2}{2 (1 - \cos \beta)} \Rightarrow F_N = \frac{F}{\sqrt{2 (1 - \cos \beta)}} = \frac{5 \text{ kN}}{\sqrt{2 (1 - \cos 20^\circ)}} = 14,4 \text{ kN}$$

Beispiel 2: Zusammengesetzte Bewegung einer Fähre

Vektoraddition

Eine Fähre bewegt sich mit der *Eigengeschwindigkeit* $v_0 = 4 \text{ m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf *kürzestem* Wege zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Bild I-4).

- Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1 \text{ m/s}$ hat?
- Wie groß ist dann die *resultierende Geschwindigkeit* v_r der Fähre?

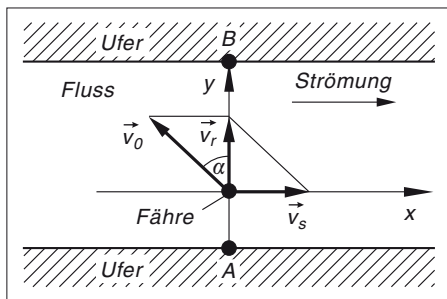


Bild I-4

Lehrbuch: Bd. 1, II.2.2.2

Lösung:

- Der *kürzeste* Weg ist die *geradlinige* Verbindung senkrecht zur Strömungsrichtung des Flusses (Weg A–B). Dazu muss die *resultierende* Geschwindigkeit \vec{v}_r , die sich aus der Eigengeschwindigkeit \vec{v}_0 und der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_s vektoriell zusammensetzt, in Richtung des Verbindungsweges A–B liegen. Die Geschwindigkeitsvektoren besitzen in dem skizzierten Koordinatensystem die folgende *Komponentendarstellung* (siehe Bild I-5):

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin \alpha \\ v_0 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_s = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ v_r \end{pmatrix}$$

Aus der Vektorgleichung $\vec{v}_r = \vec{v}_0 + \vec{v}_s$ folgt dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin \alpha \\ v_0 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin \alpha + v_s \\ v_0 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

oder (in Komponentenschreibweise)

$$(I) \quad 0 = -v_0 \cdot \sin \alpha + v_s$$

$$(II) \quad v_r = v_0 \cdot \cos \alpha$$

Aus Gleichung (I) lässt sich der gesuchte Winkel α berechnen:

$$\sin \alpha = \frac{v_s}{v_0} \Rightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{v_s}{v_0} \right) = \arcsin \left(\frac{1 \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} \right) = \arcsin \left(\frac{1}{4} \right) = 14,48^\circ$$

- Für die *resultierende* Geschwindigkeit der Fähre erhalten wir damit aus Gleichung (II)

$$v_r = v_0 \cdot \cos \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 14,48^\circ = 3,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

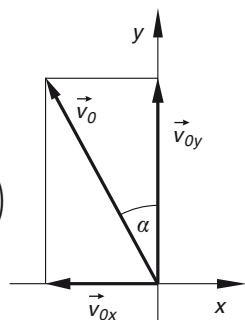


Bild I-5

Beispiel 3: Kräftegleichgewicht an einem belasteten Rollensystem Vektoraddition

Bild I-6 zeigt ein *symmetrisch* aufgebautes System mit den drei Massen $m_1 = m_2 = 2m$ und $m_3 = 3m$, die durch ein über zwei feste Rollen führendes Seil miteinander verbunden sind¹⁾. Welcher Winkel α stellt sich im Gleichgewichtszustand ein?

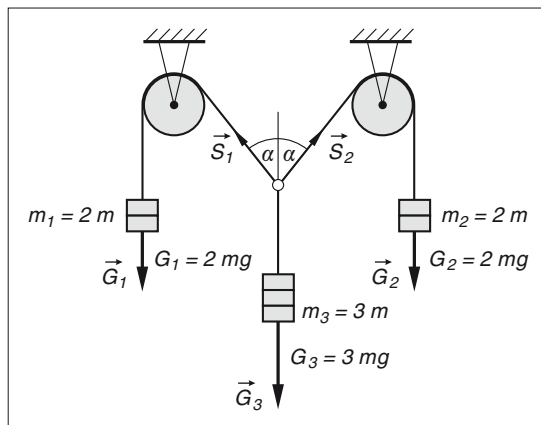


Bild I-6

Lehrbuch: Bd. 1, II.2.2.2

Physikalische Grundlagen: A1

Lösung:

Aus *Symmetriegründen* sind die Seilkräfte \vec{S}_1 und \vec{S}_2 *betragsmäßig* gleich groß: $S_1 = S_2 = 2mg$ (die Gewichtskräfte der Massen $m_1 = m_2 = 2m$ werden durch das Seil lediglich *umgelenkt*). Im statischen Gleichgewicht [A1] wird die Gewichtskraft \vec{G}_3 durch die beiden Seilkräfte gerade *kompensiert* (Bild I-7a)). Es gilt dann die *Vektorgleichung*

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{G}_3 = \vec{0}$$

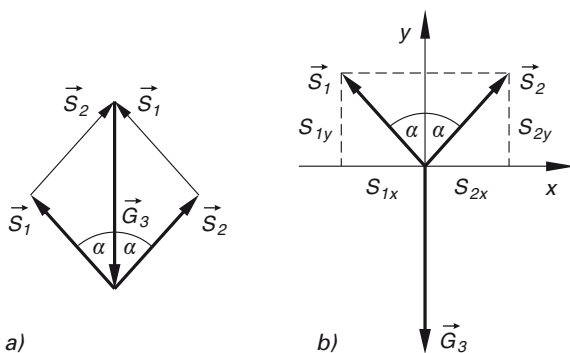


Bild I-7

Mit dem in Bild I-7b) eingeführten Koordinatensystem lautet die *Komponentendarstellung* der drei Kraftvektoren wie folgt (Berechnung der Komponenten aus den angedeuteten rechtwinkligen Dreiecken):

¹⁾ Die drei Massen werden aus Scheiben *gleicher Masse m* zusammengesetzt, sie bestehen demnach aus *zwei* bzw. *drei* solcher Scheiben.

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -S_1 \cdot \sin \alpha \\ S_1 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2mg \cdot \sin \alpha \\ 2mg \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} S_2 \cdot \sin \alpha \\ S_2 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mg \cdot \sin \alpha \\ 2mg \cdot \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\vec{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3mg \end{pmatrix}$$

Somit ist im *Gleichgewichtszustand*

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{G}_3 &= \begin{pmatrix} -2mg \cdot \sin \alpha \\ 2mg \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2mg \cdot \sin \alpha \\ 2mg \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3mg \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4mg \cdot \cos \alpha - 3mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies führt in der Komponentendarstellung zu der Identität $0 = 0$ (1. Vektorkomponente) und der *skalaren* Gleichung

$$4mg \cdot \cos \alpha - 3mg = 0$$

(2. Vektorkomponente), aus der sich der gesuchte Winkel α berechnen lässt:

$$\cos \alpha = \frac{3mg}{4mg} = 0,75 \Rightarrow \alpha = \arccos 0,75 = 41,4^\circ$$

Zeichnerische Lösung

Wir konstruieren das *gleichschenklige* Kräfte Dreieck, dessen drei Seiten S_1 , S_2 , G_3 sich wie $2:2:3$ oder $1:1:1,5$ verhalten und lesen für den gesuchten Winkel den Wert $\alpha \approx 41^\circ$ ab (Bild I-8).

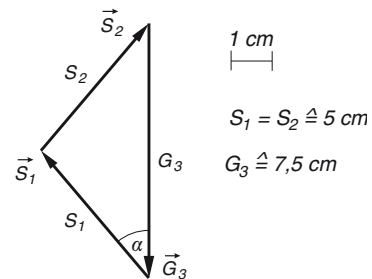


Bild I-8

Beispiel 4: Zweifach gelagerte Welle bei Belastung

Komponentenrechnung

Bild I-9 zeigt eine *zweifach gelagerte Welle*, die durch zwei parallele Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 (senkrecht zur Welle) belastet wird. Bestimmen Sie durch *Komponentenrechnung* die in den Lagern A und B auftretenden Kräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B .

$$a = 0,5 \text{ m}; \quad F_1 = 10 \text{ kN}; \quad F_2 = 40 \text{ kN}$$

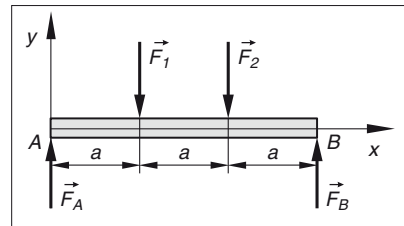


Bild I-9

Lösung:

Die Lagerkräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B haben die in Bild I-9 skizzierten Richtungen und lassen sich aus den folgenden *statischen Gleichgewichtsbedingungen* [A1] bestimmen:

1. Bedingung: $\sum F_{iy} = 0$ (y-Komponenten der Kräfte)²⁾

$$(I) \quad F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$$

2. Bedingung: $\sum M_{iz} = 0$ (z-Komponenten der Momente)³⁾

$$(II) \quad -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a + F_B \cdot 3a = 0 \quad (\text{Bezugspunkt: A})$$

Gleichung (II) lösen wir nach F_B auf und erhalten

$$F_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a}{3a} = \frac{F_1 + 2F_2}{3} = \frac{10 \text{ kN} + 2 \cdot 40 \text{ kN}}{3} = \frac{90 \text{ kN}}{3} = 30 \text{ kN}$$

Mit diesem Wert folgt aus Gleichung (I) für die *Auflagerkraft* F_A :

$$F_A = F_1 + F_2 - F_B = 10 \text{ kN} + 40 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

Die *Lagerkräfte* betragen somit im *Gleichgewichtszustand* $F_A = 20 \text{ kN}$ und $F_B = 30 \text{ kN}$.

Beispiel 5: Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem Ausleger
Vektoraddition

Bild I-10 zeigt einen aus zwei Stäben \overline{SA} und \overline{SB} bestehenden *Ausleger*. Im Gelenk S greift unter einem Winkel von $\alpha = 30^\circ$ gegen die Vertikale eine Kraft \vec{F} vom Betrag $F = 10 \text{ kN}$ an. Bestimmen Sie die in den Stäben auftretenden *Reaktionskräfte* (Zugkräfte, Druckkräfte) \vec{F}_A und \vec{F}_B .

$$a = 4 \text{ m}; \quad b = 3 \text{ m}$$

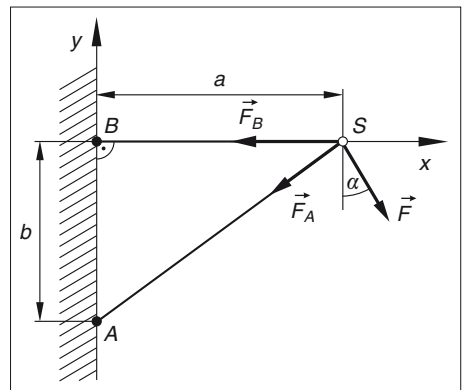


Bild I-10

²⁾ Die x-Komponenten *verschwinden*, ebenso die z-Komponenten, da alle Kräfte in der x,y-Ebene liegen. Die y-Komponenten sind zugleich die *Beträge* der Kräfte.

³⁾ Die übrigen Komponenten *verschwinden*, da die Momente *senkrecht* zur x,y-Ebene stehen.

Lösungshinweis: Setzen Sie die Reaktionskräfte in der aus Bild I-10 ersichtlichen Weise zunächst als *Zugkräfte* an. Das Eigengewicht der Stäbe bleibt dabei *unberücksichtigt*.

Lehrbuch: Bd. 1, II.2.2

Physikalische Grundlagen: A1

Lösung:

Wir beschreiben zunächst die beiden Stäbe durch Vektoren im eingezeichneten x, y -Koordinatensystem:

$$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ m}, \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Die Stabkräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B sind dann zu ihrem jeweiligen Stabvektor *parallel* (kollineare Vektoren). Somit gilt

$$\vec{F}_A = \lambda \overrightarrow{SA} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ m}, \quad \vec{F}_B = \mu \overrightarrow{SB} = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Die auf das Gelenk S einwirkende *äußere* Kraft ist

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F \cdot \sin \alpha \\ -F \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \text{ kN} \cdot \sin 30^\circ \\ -10 \text{ kN} \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8,66 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Im *statischen-Gleichgewicht* [A1] ist dann

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F} = \vec{0}$$

und somit

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ m} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} + \begin{pmatrix} 5 \\ -8,66 \end{pmatrix} \text{ kN} &= \\ &= \begin{pmatrix} -4 \text{ m} \cdot \lambda - 4 \text{ m} \cdot \mu + 5 \text{ kN} \\ -3 \text{ m} \cdot \lambda - 8,66 \text{ kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \end{aligned}$$

oder bei komponentenweiser Schreibweise

$$-4 \text{ m} \cdot \lambda - 4 \text{ m} \cdot \mu + 5 \text{ kN} = 0 \text{ kN}$$

$$-3 \text{ m} \cdot \lambda - 8,66 \text{ kN} = 0 \text{ kN}$$

Dieses *gestaffelte* System aus zwei *linearen* Gleichungen mit den beiden Unbekannten λ und μ lässt sich mühelos *von unten nach oben* lösen (zunächst die untere Gleichung lösen):

$$-3 \text{ m} \cdot \lambda = 8,66 \text{ kN} \Rightarrow \lambda = -2,89 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$-4 \text{ m} \cdot \mu = 4 \text{ m} \cdot \lambda - 5 \text{ kN} = 4 \text{ m} \left(-2,89 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) - 5 \text{ kN} =$$

$$= -11,56 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = -16,56 \text{ kN} \Rightarrow \mu = 4,14 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Die *Stabkräfte* lauten somit (einschließlich ihrer Beträge) wie folgt:

$$\vec{F}_A = -2,89 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{m} = \begin{pmatrix} 11,56 \\ 8,67 \end{pmatrix} \text{kN}, \quad F_A = \sqrt{11,56^2 + 8,67^2} \text{kN} = 14,45 \text{kN},$$

$$\vec{F}_B = 4,14 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} = \begin{pmatrix} -16,56 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN}, \quad F_B = 16,56 \text{kN}$$

\vec{F}_B ist (wie angenommen) eine *Zugkraft*, \vec{F}_A dagegen wegen $\lambda < 0$ eine *Druckkraft*. Der Stab \overline{SB} ist daher ein *Zugstab*, der Stab \overline{SA} dagegen ein *Druckstab*.

Beispiel 6: Schwerpunkt eines Massenpunktsystems Vektoraddition

In den Ecken A , B und C eines *gleichseitigen* Dreiecks mit der Seitenlänge $2a$ befinden sich jeweils *gleiche* Punktmassen m . Bestimmen Sie den *Schwerpunkt* S dieses Massenpunktsystems und zeigen Sie, dass dieser von *jeder* der drei Ecken *gleich weit* entfernt ist (Bild I-11).

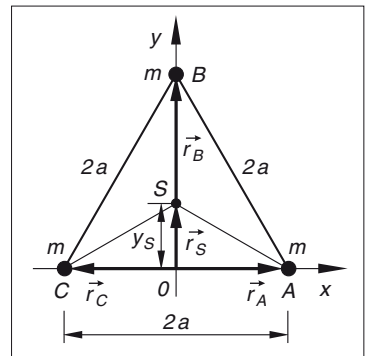


Bild I-11

Lehrbuch: Bd. 1, II.2.2

Physikalische Grundlagen: A2

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Ortsvektoren der drei Eckpunkte A , B und C sowie den Ortsvektor des Schwerpunktes S , der aus *Symmetriegründen* auf der y -Achse liegen muss. Sie lauten:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_C = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ y_S \end{pmatrix}$$

Die Ordinate y_B von B haben wir dabei aus dem rechtwinkligen Dreieck COB berechnet (Satz des Pythagoras): $a^2 + y_B^2 = 4a^2 \Rightarrow y_B^2 = 3a^2 \Rightarrow y_B = a\sqrt{3}$

Die Lage des *Schwerpunktes* lässt sich allgemein aus der Vektorgleichung [A2] bestimmen:

$$\left(\sum m_i \right) \vec{r}_S = \sum m_i \vec{r}_i$$

(\vec{r}_i ist der Ortsvektor der Masse m_i , summiert wird über *alle* zum System gehörenden Massenpunkte). In unserem Fall erhalten wir unter Beachtung von $m_1 = m_2 = m_3 = m$ die Vektorgleichung

$$3 m \vec{r}_S = m \vec{r}_A + m \vec{r}_B + m \vec{r}_C \quad \text{oder} \quad 3 \vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$$

und damit

$$3 \vec{r}_S = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die *Schwerpunktskoordinaten* lauten daher: $x_S = 0$, $y_S = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Die *Abstände* des Schwerpunktes S von den drei Ecken A , B und C betragen

$$\overline{SA} = \overline{SC} = \sqrt{a^2 + y_S^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

$$\overline{SB} = y_B - y_S = a\sqrt{3} - \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

und sind somit (wie behauptet) *gleich*.

Beispiel 7: Überlagerung elektrischer Felder

Vektoraddition

In den Ecken eines *gleichseitigen* Dreiecks mit der Seitenlänge $2a$ befinden sich jeweils *gleiche* (positive) Punktladungen Q (Bild I-12). Zeigen Sie, dass eine im *Schwerpunkt* S angebrachte Probeladung q *kräftefrei* bleibt.

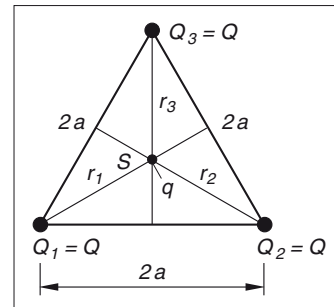


Bild I-12

Lösungshinweis: Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie auf die Ergebnisse aus dem Beispiel 6 dieses Kapitels zurückgreifen. Das System befindet sich in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ .

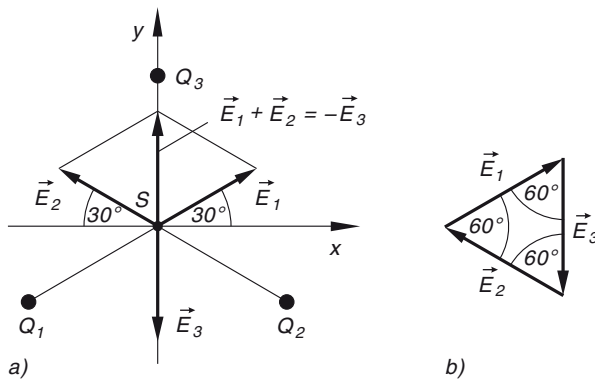
Lösung:

r_i ist der Abstand des Schwerpunktes S von der Ladung $Q_i = Q$ (mit $i = 1, 2, 3$). Nach Beispiel 6 hat dann der Schwerpunkt von jeder der drei Ladungen den gleichen Abstand r :

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{2}{3} a \sqrt{3}$$

d. h. der Schwerpunkt S liegt von *jeder* der drei Ladungen *gleich weit* entfernt. Diese Ladungen erzeugen daher im Schwerpunkt elektrische Felder, deren Feldstärkevektoren \vec{E}_1 , \vec{E}_2 und \vec{E}_3 [A3] *betragsmäßig* übereinstimmen (Bild I-13a):

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0\epsilon a^2}$$

**Bild I-13**

Die *geometrische* Addition der drei Feldstärkevektoren ergibt den *Nullvektor* (Bild I-13b)), das *resultierende* Feld im Schwerpunkt S *verschwindet* somit. Die im Schwerpunkt angebrachte Probeladung q bleibt daher *kräftefrei*.

Zum selben Ergebnis führt die Rechnung. Die *Komponentendarstellung* der Feldstärkevektoren lautet gemäß Bild I-13a)

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E \cdot \cos 30^\circ \\ E \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -E \cdot \cos 30^\circ \\ E \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix}$$

Ihre Vektorsumme ergibt den *Nullvektor*:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= \begin{pmatrix} E \cdot \cos 30^\circ - E \cdot \cos 30^\circ + 0 \\ E \cdot \sin 30^\circ + E \cdot \sin 30^\circ - E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \underbrace{2E \cdot \sin 30^\circ}_{1/2} - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Beispiel 8: Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern
Vektorprodukt

Zwei *parallele* lineare elektrische Leiter (Drähte) mit der Länge l und dem gegenseitigen Abstand a werden von Strömen *gleicher* Stärke I und *gleicher* Richtung durchflossen. Das System befindet sich im Vakuum (Permeabilität $\mu = 1$).

- a) Welche *magnetische Feldstärke* \vec{H} bzw. *magnetische Flussdichte* \vec{B} erzeugt jeder der beiden Leiter am Ort des anderen Leiters?
- b) Mit welcher *Kraft* \vec{F} wirken die beiden Leiter aufeinander?

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1

Physikalische Grundlagen: A4, A5, A6

Lösung:

- a) Bild I-14 zeigt das vom Leiter L_1 in seiner Umgebung erzeugte Magnetfeld. Die magnetischen Feldlinien sind *konzentrische* Kreise um die Leiterachse mit der eingezeichneten Richtung⁴⁾. Die magnetische Feldstärke \vec{H} [A4] besitzt im Abstand r von der Leiterachse den Betrag

$$H(r) = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r}, \quad r > 0$$

Die am Ort des *anderen* Leiters (Leiter L_2 am Ort $x = a$) erzeugte magnetische Feldstärke bzw. magnetische Flussdichte [A5] ist somit *betragsmäßig*

$$H(a) = \frac{I}{2\pi a}$$

bzw.

$$B(a) = \mu_0 \mu H(a) = \mu_0 \cdot 1 \cdot \frac{I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Umgekehrt erzeugt Leiter L_2 am Ort des Leiters L_1 ein Magnetfeld *gleicher* Stärke, jedoch *entgegengesetzter* Richtung.

- b) Leiter L_2 erfährt im Magnetfeld des Leiters L_1 die *Kraft* [A6]

$$\vec{F} = I_2 (\vec{l} \times \vec{B}) = I (\vec{l} \times \vec{B})$$

Sie ist *senkrecht* zum Leiter L_1 gerichtet (siehe Bild I-14).

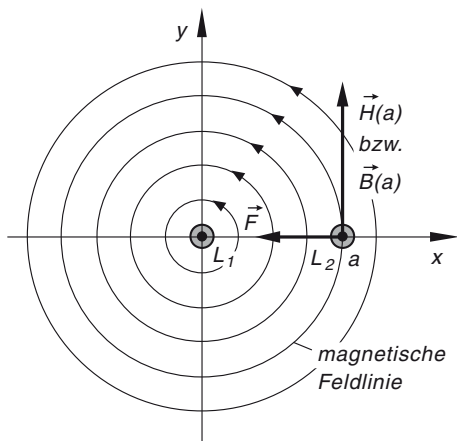


Bild I-14

⁴⁾ Die Ströme fließen in Richtung der *positiven* z -Achse, die aus der Papierebene *senkrecht* nach *oben* zeigt.

Mit $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B(a) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt daraus schließlich ⁵⁾

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B(a) \\ 0 \end{pmatrix} = IlB(a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Il \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\mu_0 Il^2}{2\pi a} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 Il^2}{2\pi a} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_x} = -\frac{\mu_0 Il^2}{2\pi a} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis wie folgt: Leiter L_2 erfährt eine Kraft in Richtung auf Leiter L_1 , umgekehrt gilt das gleiche. Zwischen zwei *parallelen*, von Strömen *gleicher* Stärke und *gleicher* Richtung durchflossenen Leitern besteht somit eine *Anziehungskraft* vom Betrag $F = \frac{\mu_0 Il^2}{2\pi a}$.

Beispiel 9: Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem belasteten Dreibein Räumliche Vektoraddition, Gaußscher Algorithmus

In dem in Bild I-15 dargestellten *Dreibein*, dessen Stäbe \overline{SA} , \overline{SB} und \overline{SC} *gelenkig* gelagert sind, greift im Gelenk S eine Gewichtskraft \vec{G} vom Betrag $G = 18 \text{ kN}$ an. Welche *Reaktionskräfte* (Zugkräfte, Druckkräfte) \vec{F}_A , \vec{F}_B und \vec{F}_C treten in den drei Stäben auf?

$$A = (2; 1; 0) \text{ m}; \quad B = (-1; 1; 0) \text{ m};$$

$$C = (1; -2; 0) \text{ m}; \quad S = (0; 0; 2) \text{ m}$$

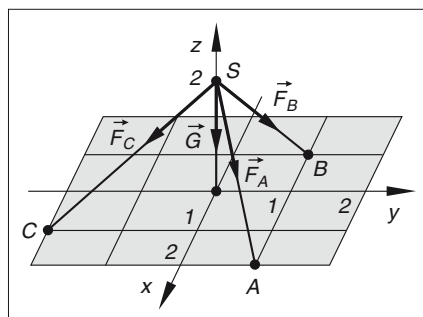


Bild I-15

Lösungshinweis: Setzen Sie die *Reaktionskräfte* in der aus Bild I-15 ersichtlichen Weise zunächst als *Zugkräfte* an. Das *Eigengewicht* der Stäbe bleibt *unberücksichtigt*.

⁵⁾ Die Leiter verlaufen *parallel* zur z -Achse (L_1 liegt sogar in dieser Achse).

Lösung:

Die drei Stäbe können wie folgt durch Vektoren beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} &= \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}, & \overrightarrow{SB} &= \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}, \\ \overrightarrow{SC} &= \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -2 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}\end{aligned}$$

Die Stabkräfte \vec{F}_A , \vec{F}_B und \vec{F}_C sind dann zu ihrem jeweiligen Stabvektor *parallel* (kollineare Vektoren). Somit gilt

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= \lambda \overrightarrow{SA} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}, & \vec{F}_B &= \mu \overrightarrow{SB} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}, \\ \vec{F}_C &= \nu \overrightarrow{SC} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}\end{aligned}$$

Im *statischen Gleichgewicht* [A1] ist dann

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{G} = \vec{0}$$

und somit

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \text{ kN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

oder bei komponentenweiser Schreibweise

$$\begin{aligned}2 \text{ m} \cdot \lambda - 1 \text{ m} \cdot \mu + 1 \text{ m} \cdot \nu &= 0 \text{ kN} \\ 1 \text{ m} \cdot \lambda + 1 \text{ m} \cdot \mu - 2 \text{ m} \cdot \nu &= 0 \text{ kN} \\ -2 \text{ m} \cdot \lambda - 2 \text{ m} \cdot \mu - 2 \text{ m} \cdot \nu - 18 \text{ kN} &= 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Dies ist ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und drei Unbekannten λ , μ und ν . Wir lösen das System mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* (die Ausgangsgleichungen sind grau unterlegt)⁶⁾:

⁶⁾ Bei der Durchführung der Rechnung verzichten wir der besseren Übersicht wegen auf die Angabe der Einheiten. Die Lösungen für λ , μ und ν sind dann jeweils mit der Einheit kN/m zu versehen. Die *dritte* Gleichung wurde noch durch 2 geteilt, das *absolute* Glied auf die *rechte* Seite gebracht.

	λ	μ	ν	c_i	Zeilensumme	
	2	-1	1	0	2	
$-2 \cdot E_1$	-2	-2	4	0	0	
E_1	1	1	-2	0	0	← Gleichungen des gestaffelten Systems ← ←
	-1	-1	-1	9	6	
$1 \cdot E_1$	1	1	-2	0	0	
		-3	5	0	2	
		0	-3	9	6	

Das *gestaffelte* System

$$\begin{aligned}
 \lambda + \mu - 2\nu &= 0 \Rightarrow \lambda - 5 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \uparrow \\
 -3\mu + 5\nu &= 0 \Rightarrow -3\mu - 15 = 0 \Rightarrow \mu = -5 \uparrow \\
 -3\nu &= 9 \Rightarrow \nu = -3
 \end{aligned}$$

lässt sich sukzessiv von unten nach oben lösen (Pfeilrichtung) und besitzt die folgende Lösung:

$$\lambda = -1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad \mu = -5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad \nu = -3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Die Stabkräfte sind somit (*entgegen* der Annahme) *Druckkräfte*:

$$\vec{F}_A = -1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ kN},$$

$$F_A = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \text{ kN} = 3 \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = -5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ kN},$$

$$F_B = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 10^2} \text{ kN} = 12,25 \text{ kN}$$

$$\vec{F}_C = -3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ kN},$$

$$F_C = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 6^2} \text{ kN} = 9 \text{ kN}$$

Beispiel 10: Arbeit an einer Punktladung in einem elektrischen Feld
Skalarprodukt

Eine positive *Punktladung* $Q = 10^{-7} \text{ C}$ soll in dem *konstanten* elektrischen Feld mit dem

Feldstärkevektor $\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ vom Punkt $P_1 = (-2; 3; 4) \text{ m}$ aus *geradlinig* längs

des *Richtungsvektors* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m}$ um 6 m in *positiver* Richtung verschoben werden (Bild I-16).

- a) Welche *Arbeit* W wird dabei an der Punktladung verrichtet?
- b) Welchen *Winkel* φ bildet der an der Punktladung angreifende Kraftvektor \vec{F} mit dem Verschiebungsvektor \vec{s} ?

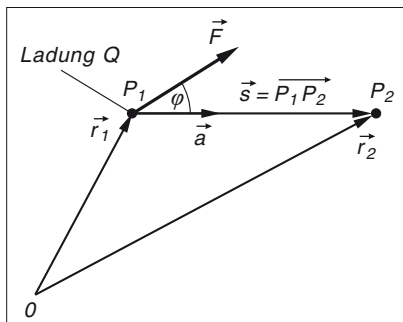


Bild I-16

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.3

Physikalische Grundlagen: A10

Lösung:

- a) Durch *Normierung* erhalten wir aus dem Richtungsvektor \vec{a} den *Einheitsvektor* gleicher Richtung:

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \text{ m}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Der Verschiebungsvektor $\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ hat die *gleiche* Richtung, jedoch die *6-fache* Länge. Somit ist

$$\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2} = 6 \text{ m } \vec{e}_a = 6 \text{ m } \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Die vom Feld verrichtete *Arbeit* ist definitionsgemäß das *skalare Produkt* aus dem Kraftvektor $\vec{F} = Q\vec{E}$ [A10] und dem Verschiebungsvektor \vec{s} :

$$\begin{aligned}
 W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = Q(\vec{E} \cdot \vec{s}) = 10^{-7} \text{ C} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ m} = \\
 &= 10^{-1} (4 + 6 + 20) \text{ Nm} = 3 \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

b) Wir berechnen zunächst die benötigten Beträge der Vektoren \vec{F} und \vec{s} :

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}| &= |Q\vec{E}| = Q|\vec{E}| = 10^{-7} \text{ C} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \\
 &= 5,916 \cdot 10^{-1} \text{ N} \approx 0,592 \text{ N} \\
 |\vec{s}| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} \text{ m} = 6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Für den gesuchten *Winkel* zwischen Kraftvektor und Verschiebungsvektor folgt damit aus dem Skalarprodukt $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$:

$$\begin{aligned}
 W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \\
 \cos \varphi &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{3 \text{ Nm}}{0,592 \text{ N} \cdot 6 \text{ m}} = 0,8446 \Rightarrow \\
 \varphi &= \arccos 0,8446 = 32,4^\circ
 \end{aligned}$$

Beispiel 11: Durchbiegung eines Balkens bei Belastung durch mehrere Kräfte
Skalarprodukt

Ein homogener *Balken* auf zwei Stützen wird in der aus Bild I-17 ersichtlichen Weise durch drei Kräfte F_1 , F_2 und F_3 belastet (Kräfte senkrecht zum Balken). Die von der Einzelkraft F_i in der *Balkenmitte* hervorgerufene *Durchbiegung* y_i ist dabei der einwirkenden Kraft direkt *proportional*: $y_i = \alpha_i F_i$ ($i = 1, 2, 3$). Der *Proportionalitätsfaktor* α_i beschreibt die durch die Einheitskraft $F_i = 1$ bewirkte Durchbiegung und wird als *Einflusszahl* bezeichnet. Nach dem *Superpositionsprinzip* der Mechanik *addieren* sich die von den Einzelkräften hervorgerufenen Durchbiegungen zur Gesamtdurchbiegung y . In dem vorliegenden Belastungsfall lauten die Berechnungsformeln für die drei Einflusszahlen wie folgt:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{11 l^3}{768 EI}, \quad \alpha_2 = \frac{l^3}{48 EI}$$

l : Balkenlänge; EI : konstante Biegesteifigkeit des Balkens; E : Elastizitätsmodul;

I : Flächenträgheitsmoment

- a) Zeigen Sie: Die *Gesamtdurchbiegung* y lässt sich durch ein *skalares Produkt* darstellen.
- b) Wie groß ist die von den drei Kräften $F_1 = 4 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$ und $F_3 = 5 \text{ kN}$ in der Mitte des Balkens hervorgerufene *Durchbiegung* y bei einer Balkenlänge von $l = 1 \text{ m}$ und einer Biegesteifigkeit von $EI = 3 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2$?

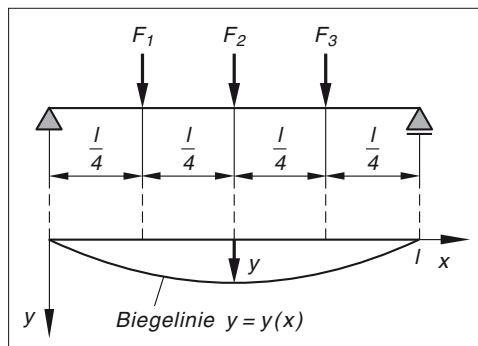


Bild I-17

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.3.1

Lösung:

a) Es ist

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

Diese Summe lässt sich auch als *skalares Produkt* aus dem *Einflusszahlenvektor*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ und dem Belastungsvektor } \vec{f} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \text{ auffassen:}$$

$$y = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \vec{f}$$

b) Mit den Einflusszahlen

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{11 l^3}{768 EI} = \frac{11 \cdot (10^3 \text{ mm})^3}{768 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2} = 4,7743 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{N}},$$

$$\alpha_2 = \frac{l^3}{48 EI} = \frac{(10^3 \text{ mm})^3}{48 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2} = 6,9444 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

und den in die Einheit *Newton* (N) umgerechneten Einzelkräften ergibt sich die folgende *Durchbiegung*:

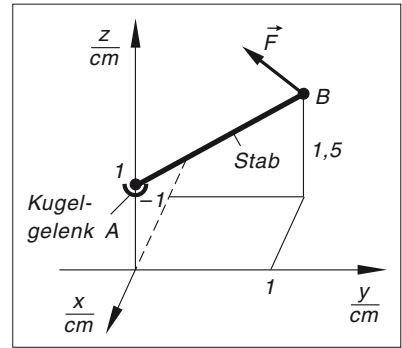
$$\begin{aligned} y = \vec{a} \cdot \vec{f} &= 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \begin{pmatrix} 4,7743 \\ 6,9444 \\ 4,7743 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 10^{-1} \begin{pmatrix} 4,7743 \\ 6,9444 \\ 4,7743 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mm} = \\ &= 10^{-1} (19,0972 + 13,8888 + 23,8715) \text{ mm} = 5,69 \text{ mm} \end{aligned}$$

Beispiel 12: Moment einer Kraft in einem Kugelgelenk
Vektorprodukt, Richtungswinkel

Im Endpunkt eines Stabes \overline{AB} , der in einem *Kugelgelenk* A gelagert ist, greift die konstante Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ N an (Bild I-18).}$$

Welches *Moment* \vec{M} erzeugt diese Kraft im Kugelgelenk A ? Bestimmen Sie ferner den *Betrag* M und die drei *Richtungswinkel* α , β und γ des Momentenvektors \vec{M} .



$$A = (0; 0; 1) \text{ m}; \quad B = (-1; 1; 1,5) \text{ m}$$

Bild I-18

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1 und II.3.3.3

Physikalische Grundlagen: A7

Lösung:

Definitionsgemäß erhalten wir für das auf das Kugelgelenk A bezogene Moment \vec{M} [A7] die folgende *Komponentendarstellung*:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 & -0 \\ 1 & -0 \\ 1,5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & +0,75 \\ -0,5 & +2 \\ 1,5 & +1 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \begin{pmatrix} 2,75 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \text{ Nm} \end{aligned}$$

Der *Betrag* des Momentes ist somit

$$M = \sqrt{2,75^2 + 1,5^2 + 2,5^2} \text{ Nm} = 4,01 \text{ Nm}$$

Die *Richtungswinkel* α , β und γ mit den drei Koordinatenachsen ergeben sich zu

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M} = \frac{2,75 \text{ Nm}}{4,01 \text{ Nm}} = 0,6858 \Rightarrow \alpha = \arccos 0,6858 = 46,7^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{M_y}{M} = \frac{1,5 \text{ Nm}}{4,01 \text{ Nm}} = 0,3741 \Rightarrow \beta = \arccos 0,3741 = 68,0^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{M_z}{M} = \frac{2,5 \text{ Nm}}{4,01 \text{ Nm}} = 0,6234 \Rightarrow \gamma = \arccos 0,6234 = 51,4^\circ$$

Beispiel 13: Umfangsgeschwindigkeit einer rotierenden Zylinderscheibe

Vektorprodukt, Ableitung eines Vektors

Eine dünne Zylinderscheibe vom Radius R rotiert in der aus Bild I-19 ersichtlichen Weise mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse (z -Achse). Die Bewegung eines Punktes P auf dem Umfang der Scheibe lässt sich dann durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ c \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

beschreiben ($c = \overline{OM}$). Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ dieses Punktes auf zwei verschiedene Arten und zwar

- als *vektorielles Produkt* aus dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und dem Ortsvektor $\vec{r}(t)$ [A8],
- durch *Differentiation* des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ nach der Zeit t .

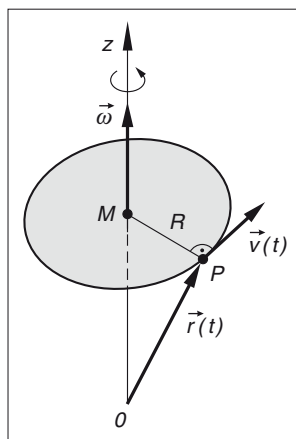


Bild I-19

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1 und Bd. 3, I.1.2

Physikalische Grundlagen: A8

Lösung:

- Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ hat die Komponenten $\omega_x = \omega_y = 0$ und $\omega_z = \omega$ (siehe Bild I-19). Somit ist nach [A8]

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant:

$$\begin{aligned} v(t) &= |\vec{v}(t)| = \omega R \sqrt{[-\sin(\omega t)]^2 + [\cos(\omega t)]^2 + 0^2} = \\ &= \omega R \underbrace{\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}}_1 = \omega R = \text{const.} \end{aligned}$$

- b) Durch *komponentenweise* Differentiation unter Verwendung der *Kettenregel* folgt (in Übereinstimmung mit dem unter a) erhaltenen Ergebnis)

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 14: Drehmoment einer stromdurchflossenen Leiterschleife in einem Magnetfeld
Vektorprodukt

Bild I-20 zeigt eine vom Strom I durchflossene rechteckige *Leiterschleife* mit der Fläche A , die um eine zur Zeichenebene *senkrechte* Achse D drehbar gelagert ist (Leiterschleife senkrecht zur Zeichenebene). Sie erfährt in einem *homogenen* Magnetfeld mit dem Flussdichtevektor \vec{B} das *Drehmoment* $\vec{M} = I(\vec{B} \times \vec{A})$. Der Flächenvektor \vec{A} steht dabei *senkrecht* zur Leiterschleife, seine Länge entspricht dem *Flächeninhalt* A der Leiterschleife.

Bestimmen Sie das *Drehmoment* für $I = 10 \text{ A}$, $A = 0,1 \text{ m}^2$, $B = 2 \text{ T}$ (in x -Richtung) in der durch den Winkel $\alpha = 30^\circ$ festgelegten augenblicklichen Position.

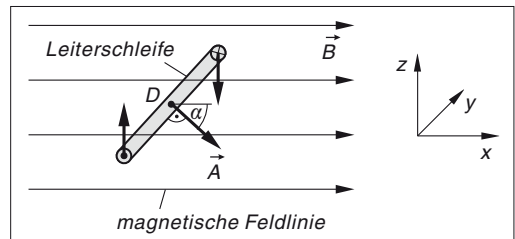


Bild I-20

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1

Lösung:

Die Vektoren \vec{B} und \vec{A} besitzen in dem gewählten Koordinatensystem die folgende *Komponentendarstellung* (Drehachse = z -Achse, senkrecht zur Zeichenebene nach oben gerichtet):

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad \left(1 \text{ T} = 1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A \cdot \cos \alpha \\ -A \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0,1 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ -\sin 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^2 = 0,1 \begin{pmatrix} 0,866 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^2$$

Der *Drehmomentvektor* lautet damit

$$\begin{aligned}\vec{M} &= I (\vec{B} \times \vec{A}) = 10 \cdot 0,1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,866 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ A} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,866 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ AVs} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Nm} \quad (1 \text{ AVs} = 1 \text{ Nm})\end{aligned}$$

Der Vektor \vec{M} liegt in der *z-Achse* in *negativer* Richtung (d. h. nach *unten* orientiert), sein *Betrag* ist $M = |\vec{M}| = 1 \text{ Nm}$.

Beispiel 15: Kräftefreie Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld
Vektorprodukt, Richtungswinkel

Ein *Elektron* wird mit der Geschwindigkeit \vec{v} in ein *zeitlich und räumlich konstantes* elektromagnetisches Feld mit der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} eingeschossen und erfährt dort die Kraft [A9, A10]

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (e: \text{Elementarladung})$$

- a) Unter welchen Voraussetzungen bleibt das Elektron *kräftefrei* (bei vorgegebenem \vec{v} und \vec{B})? Welche *Eigenschaften* muss der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} in diesem Sonderfall besitzen?
- b) Wie lauten *Betrag* E und die drei *Richtungswinkel* α , β und γ des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E} im unter a) genannten Fall für $\vec{v} = 200 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$?

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1 und II.3.3.3

Physikalische Grundlagen: A9, A10

Lösung:

- a) Im *kräftefreien* Fall ist $\vec{F} = \vec{0}$ und somit

$$-e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$$

Für die *Feldstärke* \vec{E} gilt dann

$$\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B} \times \vec{v}$$

Dies aber bedeutet (siehe Bild I-21)⁷⁾:

1. \vec{E} steht *senkrecht* auf den Vektoren \vec{B} und \vec{v} .
2. $|\vec{E}| = |\vec{B} \times \vec{v}|$, d. h. der *Betrag* der elektrischen Feldstärke ist somit gleich dem *Flächeninhalt* des von den Vektoren \vec{B} und \vec{v} aufgespannten Parallelogramms.
3. Die Vektoren \vec{B} , \vec{v} und \vec{E} bilden in dieser Reihenfolge ein *rechtshändiges* System.

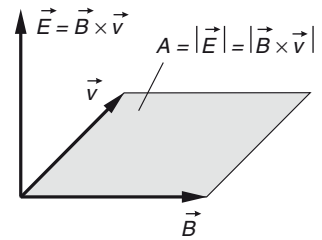


Bild I-21

$$\text{b) } \vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = 200 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 200 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 200 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die *Feldstärke* besitzt damit den folgenden Betrag:

$$E = |\vec{E}| = 200 \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 748,3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Für die *Richtungswinkel* α , β und γ des Feldstärkevektors \vec{E} mit den drei Koordinatenachsen ergeben sich die folgenden Werte:

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{E} = \frac{-600 \text{ V/m}}{748,3 \text{ V/m}} = -0,8018 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(-0,8018) = 143,3^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{E_y}{E} = \frac{200 \text{ V/m}}{748,3 \text{ V/m}} = 0,2673 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos 0,2673 = 74,5^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{E_z}{E} = \frac{400 \text{ V/m}}{748,3 \text{ V/m}} = 0,5345 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0,5345 = 57,7^\circ$$

Beispiel 16: Fachwerk im statischen Gleichgewicht

Vektoraddition, Vektorprodukt, lineares Gleichungssystem

Das in Bild I-22 dargestellte *Fachwerk* wird durch die Kräfte \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_3 in der angegebenen Weise belastet. Wie groß sind die *Auflagerkräfte* \vec{F}_A und \vec{F}_B und deren *Beträge* F_A und F_B im *statischen Gleichgewichtszustand* [A1]?

$$a = 5 \text{ m}; \quad b = 4 \text{ m}; \quad F_1 = 20 \text{ kN}; \quad F_2 = 30 \text{ kN}; \quad F_3 = 10 \text{ kN}; \quad \alpha = 30^\circ$$

Annahme: Die Komponenten der Auflagerkräfte wirken jeweils in positiver Richtung.

⁷⁾ Im Sonderfall $\vec{B} \times \vec{v} = \vec{0}$ ist $\vec{E} = \vec{0}$. Das Elektron bewegt sich dann *parallel* zum Magnetfeld und erfährt somit *keine* Lorentzkraft [A9]. Daher muss auch \vec{E} *verschwinden*.

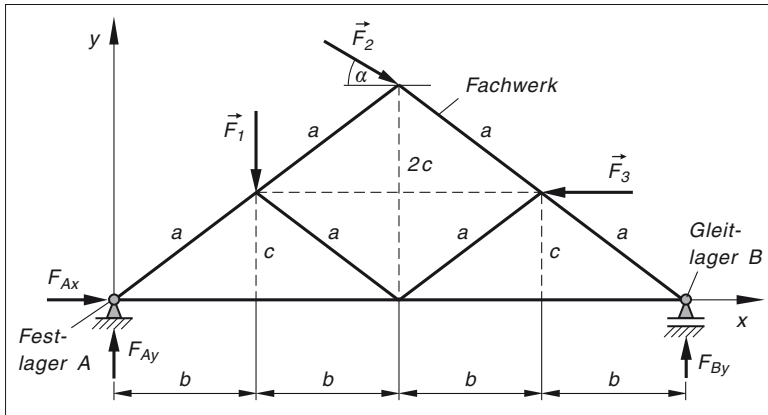


Bild I-22

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.2.2, II.3.4.1 und I.5.2

Physikalische Grundlagen: A1

Lösung:

Der besseren Übersicht wegen werden bei den Zwischenrechnungen alle Einheiten weggelassen (Kraftkomponenten in der Einheit kN, Lagekoordinaten in der Einheit m).

Die Kraftvektoren lauten in der *Komponentendarstellung* (alle z -Komponenten verschwinden):

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos \alpha \\ -F_2 \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos 30^\circ \\ -30 \cdot \sin 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,98 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_A = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichgewichtsbedingung [A1]: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_B = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25,98 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{Ax} + 15,98 \\ F_{Ay} + F_{By} - 35 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Gleichgewichtsbedingung [A1]: $\sum \vec{M}_i = \vec{0}$

Bezugspunkt (Pol) ist das Auflager A, d. h. der Nullpunkt des Koordinatensystems. Alle Momente liegen in der *z-Richtung*, so dass sämtliche *x*- und *y*-Komponenten *verschwinden*⁸⁾. Die benötigten Ortsvektoren der Angriffspunkte lauten:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 3b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(unter Berücksichtigung von $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ nach dem Satz des Pythagoras, siehe Bild I-22).

Damit erhalten wir aus der 2. Gleichgewichtsbedingung die folgende Vektorgleichung:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_B &= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3) + (\vec{r}_B \times \vec{F}_B) = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25,98 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -80 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -120 - 155,88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 + 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 16F_{By} - 0 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -275,88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16F_{By} \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -325,88 + 16F_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnung der Auflagerkräfte

Aus den beiden *vektoriellen* Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir drei *skalare* Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & F_{Ax} & + 15,98 & = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -15,98 \\ \text{(II)} & F_{Ay} + F_{By} - 35 & = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 14,63 \\ \text{(III)} & 16F_{By} - 325,98 & = 0 \Rightarrow F_{By} = 20,38 \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

⁸⁾ Alle Kraft- und Ortsvektoren liegen in der *x, y*-Ebene, die erzeugten Momente stehen somit senkrecht auf dieser Ebene und haben nur eine *z*-Komponente (die folgende Rechnung wird diese Aussage bestätigen).

Dieses bereits *gestaffelte* lineare Gleichungssystem wird von *unten* nach *oben* gelöst (Pfeilrichtung) und besitzt unter Berücksichtigung der Einheiten die eindeutige Lösung

$$F_{Ax} = -15,98 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 14,63 \text{ kN}, \quad F_{By} = 20,38 \text{ kN}$$

Die *Auflagerkräfte* haben somit die folgenden *Beträge*:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 + 0^2} = \sqrt{(-15,98)^2 + 14,63^2 + 0^2} \text{ kN} = 21,67 \text{ kN},$$

$$F_B = F_{By} = 20,38 \text{ kN}$$

Beispiel 17: Komplanare Kraftvektoren

Vektoraddition, Richtungswinkel, Skalarprodukt

An einem *Massenpunkt* greifen gleichzeitig die drei folgenden Kräfte an:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ N}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ N}, \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ N}$$

- Bestimmen Sie den *Betrag* F_R und die drei *Richtungswinkel* α , β und γ der *resultierenden* Kraft \vec{F}_R .
- Zeigen Sie: Die drei Einzelkräfte liegen in einer *Ebene*, sind demnach *komplanar*.

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.2.2, II.3.3.3 und II.3.5

Lösung:

- Die resultierende Kraft lautet in der *Komponentendarstellung* wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ N} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 - 2 + 11 \\ -2 + 1 - 4 \\ 1 + 4 + 11 \end{pmatrix} \text{ N} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ N} \end{aligned}$$

Der *Betrag* dieser Kraft ist

$$F_R = \sqrt{14^2 + (-5)^2 + 16^2} \text{ N} = 21,84 \text{ N}$$

Für die drei *Richtungswinkel* ergeben sich folgende Werte:

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{14 \text{ N}}{21,84 \text{ N}} = 0,6410 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0,6410 = 50,1^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{-5 \text{ N}}{21,84 \text{ N}} = -0,2289 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos (-0,2289) = 103,2^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R} = \frac{16 \text{ N}}{21,84 \text{ N}} = 0,7326 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0,7326 = 42,9^\circ$$

- b) Die drei Einzelkräfte liegen in einer *Ebene*, wenn ihr Spatprodukt *verschwindet*: Dies ist der Fall, da

$$[\vec{F}_1 \vec{F}_2 \vec{F}_3] = \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 11 & -4 & 11 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante } D=0} \text{ N} = 0 \text{ N}$$

Die Berechnung der Determinante erfolgt dabei nach der *Regel von Sarrus*:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 11 & -4 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \diagdown & \diagup & \diagdown \\ \diagup & \diagdown & \diagup \\ \diagdown & \diagup & \diagdown \end{matrix} \begin{matrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \\ 11 & -4 \end{matrix}$$

$$D = 55 - 88 + 8 - (11 - 80 + 44) = -25 - (-25) = -25 + 25 = 0$$

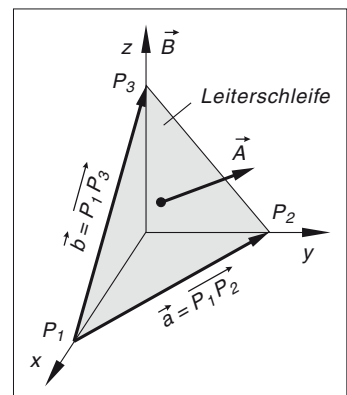
Beispiel 18: Spannungsstoß in einer Leiterschleife infolge elektromagnetischer Induktion
Vektor- und Spatprodukt

Eine dreieckige *Leiterschleife* mit den Ecken P_1 , P_2 und P_3 wird von einem *homogenen* Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} durchflutet (Bild I-23). Wie groß ist der *Spannungsstoß* $\int U dt$, der durch *Induktion* in der Leiterschleife beim *Einschalten* des Magnetfeldes zur Zeit $t = 0$ entsteht?

$$P_1 = (0,2; 0; 0) \text{ m}; \quad P_2 = (0; 0,3; 0) \text{ m};$$

$$P_3 = (0; 0; 0,1) \text{ m}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

Bild I-23



Lösungshinweis: Berechnen Sie zunächst den *magnetischen Fluss* $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$ [A11] durch die Leiterschleife und daraus mit Hilfe des *Induktionsgesetzes* [A12] den Spannungsstoß.

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1 und II.3.5

Physikalische Grundlagen: A11, A12

Lösung:

Wir bestimmen zunächst den *Flächenvektor* \vec{A} , der zur Dreiecksfläche *senkrecht* orientiert ist und dessen Länge (Betrag) dem Flächeninhalt A des Dreiecks entspricht⁹⁾. Bild I-24 zeigt das aus den Seitenvektoren

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 \\ 0,3 & -0 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

und

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 \\ 0 & -0 \\ 0,1 & -0 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \text{ m}$$

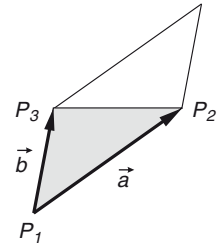


Bild I-24

konstruierte *Parallelogramm*. Es enthält das gegebene Dreieck $P_1 P_2 P_3$ und ist von *doppelter* Fläche.

Der Flächeninhalt des *Parallelogramms* ist andererseits durch den *Betrag* des *Vektorproduktes* $\vec{a} \times \vec{b}$ gegeben. Dieser Vektor steht definitionsgemäß *senkrecht* zur Parallelenerfläche und somit auch *senkrecht* zur Fläche des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Der gesuchte Vektor \vec{A} ist daher dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ *parallel*, besitzt jedoch nur die *halbe* Länge:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{a} \times \vec{b})$$

Damit erhalten wir für den *magnetischen Fluss* [A11]

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{B} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Spatprodukt } [\vec{B} \vec{a} \vec{b}]} = \frac{1}{2} [\vec{B} \vec{a} \vec{b}]$$

Aus dem *Induktionsgesetz* [A12] folgt zunächst $U dt = d\Phi$ und nach *beidseitiger* Integration $\int U dt = \Phi$. Der *Spannungsstoß* beträgt somit

$$\int U dt = \Phi = \frac{1}{2} [\vec{B} \vec{a} \vec{b}] = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ -0,2 & 0,3 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,1 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante } D=0,6} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{ m}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,6 \text{ Vs} = 0,3 \text{ Vs}$$

⁹⁾ Der Vektor \vec{A} ist ein *Normalenvektor* der Ebene, die das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ enthält.

Die Determinante D wurde dabei nach der Regel von Sarrus berechnet:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0,3 & 0 & -0,2 & 0,3 \\ -0,2 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 0 + 0 + 0 - (-0,6 + 0 + 0) = 0,6$$

Beispiel 19: Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld
Ableitungen eines Vektors, Skalar- und Spatprodukt

Elektronen, die *schief*, d. h. unter einem *spitzen* oder *stumpfen* Winkel gegen die Feldrichtung in ein *homogenes* Magnetfeld eingeschlossen werden, bewegen sich auf einer *schraubenlinienförmigen* Bahn, die durch den zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

beschrieben werden kann (Bild I-25; die magnetischen Feldlinien verlaufen *parallel* zur z -Achse).

- Bestimmen Sie den *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v}(t)$ sowie den *Beschleunigungsvektor* $\vec{a}(t)$ und zeigen Sie die besonderen Eigenschaften dieser Vektoren.
- Welche *Arbeit* W verrichtet die im Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} auf das Elektron einwirkende *Lorentzkraft* $\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ an diesem?

e : Elementarladung; $R > 0$, $c > 0$

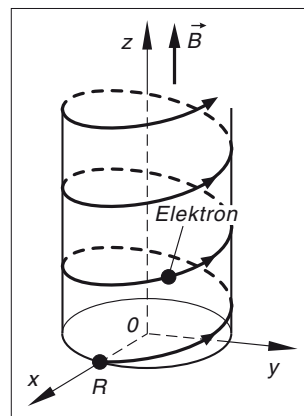


Bild I-25

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.3.1, II.3.4.1, II.3.5 und Bd. 3, I.1.2

Physikalische Grundlagen: A9

Lösung:

- Durch *ein-* bzw. *zweimaliges Differenzieren* des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ nach dem Zeitparameter t mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir die gesuchten Vektoren. Sie lauten:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cdot \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass beide Vektoren *zeitunabhängige* Beträge besitzen, d. h. Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} bleiben während der gesamten Bewegung *betragsmäßig konstant*, ändern aber laufend ihre *Richtung*:

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{[-\omega R \cdot \sin(\omega t)]^2 + [\omega R \cdot \cos(\omega t)]^2 + c^2} = \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2 \cdot \sin^2(\omega t) + \omega^2 R^2 \cdot \cos^2(\omega t) + c^2} = \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_1 + c^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + c^2} = \text{const.} \\ |\vec{a}| &= \omega^2 R \sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_1 + 0^2} = \omega^2 R \sqrt{1} = \omega^2 R \cdot 1 = \\ &= \omega^2 R = \text{const.}\end{aligned}$$

Darüberhinaus *verschwindet* die z -Komponente des Beschleunigungsvektors. Der Vektor \vec{a} liegt daher in einer zur z -Achse *senkrechten* Ebene und ist stets auf diese Achse gerichtet (Zentripetalbeschleunigung infolge der als *Zentripetalkraft* wirkenden Lorentz-Kraft!).

- b) Im Zeitintervall dt bewegt sich das Elektron in der *Tangentenrichtung*, d. h. in Richtung des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} um das Wegelement $d\vec{r} = \vec{v} dt$ weiter. Die dabei von der einwirkenden Lorentzkraft verrichtete *Arbeit* dW ist definitionsgemäß das *Skalarprodukt* aus Kraft- und Verschiebungsvektor:

$$dW = \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = -e \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{[\vec{v} \vec{B} \vec{v}]} dt = -e \underbrace{[\vec{v} \vec{B} \vec{v}]}_0 dt = 0$$

$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$ ist dabei das *Spatprodukt* $[\vec{v} \vec{B} \vec{v}]$ und dieses *verschwindet*, da es zwei *gleiche* Vektoren enthält. Die Lorentzkraft verrichtet somit am Elektron *keine Arbeit*.

II Funktionen und Kurven

Beispiel 1: Reihenschaltung aus n gleichen Spannungsquellen
Diskrete Funktion

Bild II-1 zeigt eine *Reihenschaltung* aus n gleichen Spannungsquellen und einem Verbraucherwiderstand R_a . Jede der Spannungsquellen liefert die konstante Quellenspannung U_q und hat den inneren Widerstand R_i .

Bestimmen Sie die Abhängigkeit der *Stromstärke* I von der Anzahl n der Spannungsquellen und skizzieren Sie den Verlauf dieser diskreten Funktion $I = I(n)$. Gegen welchen *Grenzwert* strebt die Stromstärke I , wenn man die Anzahl der Spannungsquellen beliebig vergrößert?

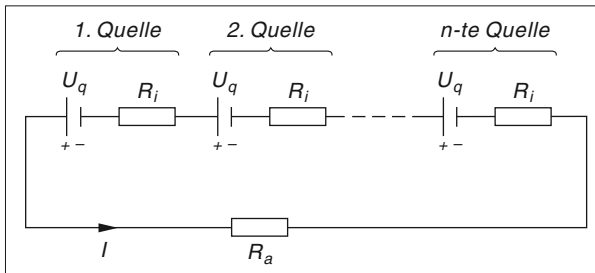


Bild II-1

Lehrbuch: Bd. 1, III.4.1.1

Physikalische Grundlagen: A13, A14

Lösung:

Wir fassen zunächst die n gleichen Spannungsquellen zu einer *Ersatzspannungsquelle* mit der Quellenspannung $U_0 = n U_q$ und dem Innenwiderstand $R_0 = n R_i$ zusammen [A13] (Bild II-2). Nach den *Kirchhoffschen Regeln* der *Reihenschaltung* [A13] beträgt der *Gesamtwiderstand* der Schaltung

$$R_g = R_0 + R_a = n R_i + R_a$$

Für die Stromstärke I erhält man damit nach dem *Ohmschen Gesetz* [A14]

$$I = I(n) = \frac{U_0}{R_g} = \frac{n U_q}{n R_i + R_a}$$

n ist dabei eine *diskrete* Variable, die nur *positive ganzzahlige* Werte annehmen kann: $n = 1, 2, 3, \dots$. Diese *diskrete* Funktion (Punktfolge) strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen den folgenden Grenzwert:

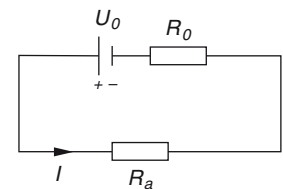


Bild II-2

$$I_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n U_q}{n R_i + R_a} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{U_q}{R_i + \frac{R_a}{n}} \right) = \frac{U_q}{R_i + 0} = \frac{U_q}{R_i}$$

(sog. *Kurzschlussstrom*, man erhält ihn für $R_a = 0$, d. h. bei *fehlendem* Verbraucherwiderstand R_a).

Bild II-3 zeigt den Verlauf dieser streng monoton wachsenden Funktion.

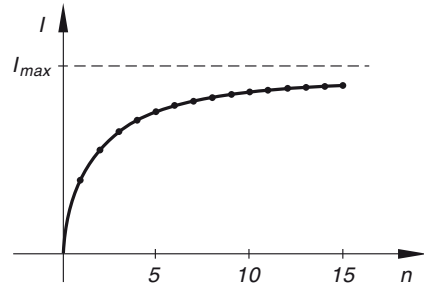


Bild II-3

Beispiel 2: Zeitversetzter freier Fall zweier Kugeln

Lineare Funktion

Zwei Kugeln fallen im *luftleeren* Raum im zeitlichen Abstand von 2 s aus *gleicher* Höhe und jeweils aus der *Ruhe* heraus. Wie verändert sich der *Abstand* d der beiden Kugeln im Laufe der *Zeit* t ? *Skizzieren* Sie den Verlauf dieser *Weg-Zeit-Funktion*. Welchen Abstand voneinander haben die Kugeln nach 5 s gemeinsamer Fallzeit?

Erdbeschleunigung: $g \approx 10 \text{ m/s}^2$

Lehrbuch: Bd. 1, III.5.2

Physikalische Grundlagen: A17

Lösung:

Den von der *ersten* Kugel bis zum Startpunkt der *zweiten* Kugel zurückgelegten Weg und die dabei erreichte Geschwindigkeit erhalten wir aus den *Fallgesetzen* [A17]

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{und} \quad v(t) = g t$$

zu

$$s(2 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2 = 20 \text{ m} \quad \text{und} \quad v(2 \text{ s}) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die *zweite* Kugel startet zur Zeit $t = 0^{1)}$. Bild II-4 zeigt Lage und Geschwindigkeit beider Kugeln zu diesem Zeitpunkt.

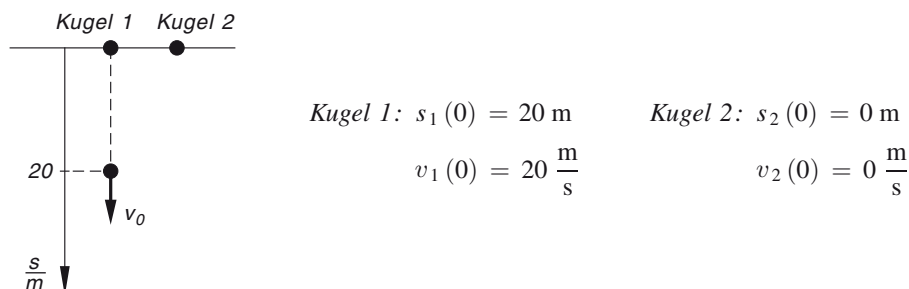


Bild II-4

Kugel 1 führt eine Fallbewegung mit der *Anfangsgeschwindigkeit* $v_0 = v_1(0) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der *Anfangslage* $s_0 = s_1(0) = 20 \text{ m}$ aus. Der in den folgenden t Sekunden zurückgelegte Weg wird nach der Gleichung

$$s_1(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 20 \text{ m}$$

berechnet. In der gleichen Zeit hat Kugel 2 den Weg

$$s_2(t) = \frac{1}{2} g t^2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

zurückgelegt. Der *Abstand* beider Kugeln zu diesem Zeitpunkt beträgt somit

$$\begin{aligned} d &= d(t) = s_1(t) - s_2(t) = \\ &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 20 \text{ m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 20 \text{ m} \end{aligned}$$

und nimmt daher im Laufe der Zeit *linear* zu (Bild II-5). Nach 5 s gemeinsamer Fallzeit beträgt der Abstand

$$\begin{aligned} d(5 \text{ s}) &= 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + 20 \text{ m} = \\ &= (100 + 20) \text{ m} = 120 \text{ m} \end{aligned}$$

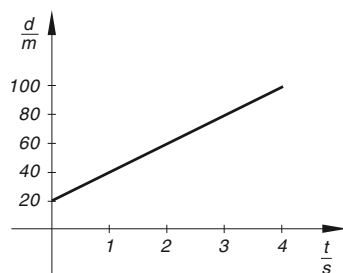


Bild II-5

¹⁾ Wir beginnen mit der Zeitmessung von neuem.

Beispiel 3: Zugspannung in einem rotierenden Stab
Quadratische Funktion

Ein homogener zylindrischer *Stab* der Länge l rotiert nach Bild II-6 mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω um die eingezeichnete Achse.

- Bestimmen Sie die durch die Zentrifugalkräfte hervorgerufene *Zugspannung* σ an einer beliebigen Schnittstelle x und *skizzieren* Sie den Spannungsverlauf längs des Stabes.
- An welcher Schnittstelle erreicht die Zugspannung ihren *Maximalwert*?
- Welchen Wert darf die Winkelgeschwindigkeit *nicht* überschreiten, wenn die aus materialtechnischen Gründen *höchstzulässige* Zugspannung σ_0 beträgt?

A: Querschnittsfläche des Stabes

ρ : konstante Dichte des Stabmaterials

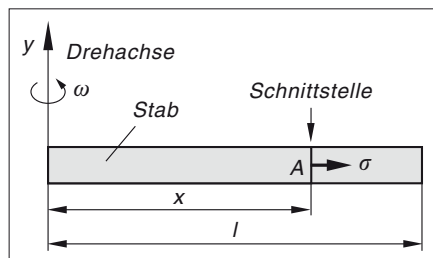


Bild II-6

Lehrbuch: Bd. 1, III.5.3

Physikalische Grundlagen: A15, A16

Lösung:

- Die an der Schnittstelle x nach *außen* wirkende Zentrifugalkraft lässt sich wie folgt *elementar* berechnen. Beiträge liefern alle *rechts* von der Schnittstelle liegenden Massenelemente, d. h. insgesamt der in Bild II-7 *dunkelgrau* unterlegte Teil des Stabes mit der Länge $l - x$ und der Masse $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A (l - x)$.

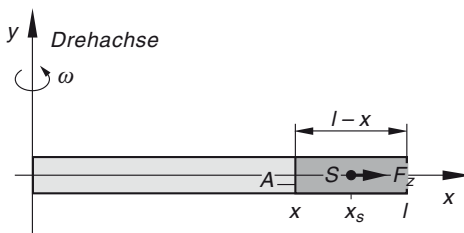


Bild II-7

Der *Schwerpunkt* dieses Teilstückes liegt aus *Symmetriegründen* genau in der *Mitte*, d. h. an der Stelle

$$x_s = x + \frac{l - x}{2} = \frac{2x + l - x}{2} = \frac{x + l}{2} = \frac{1}{2} (l + x)$$

Die in dem *Schwerpunkt* S angreifende Zentrifugalkraft [A15] beträgt somit

$$\begin{aligned} F_Z &= \Delta m \omega^2 x_s = \rho A (l - x) \omega^2 \cdot \frac{1}{2} (l + x) = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 \underbrace{(l - x)(l + x)}_{\text{3. Binom}} = \\ &= \frac{1}{2} \rho A \omega^2 (l^2 - x^2) \end{aligned}$$

Für die *Zugspannung* an der Stelle x erhalten wir damit definitionsgemäß [A16]

$$\sigma(x) = \frac{F_Z}{A} = \frac{\frac{1}{2} \varrho A \omega^2 (l^2 - x^2)}{A} = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 (l^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq l$$

Die Zugspannung nimmt daher von der Drehachse aus nach außen hin nach einer *quadratischen* Funktion ab (*parabelförmiger* Verlauf nach Bild II-8).

- b) Die Zugspannung erreicht ihren *größten* Wert an der Stelle $x = 0$, d. h. in der *Drehachse*:

$$\sigma_{\max} = \sigma(0) = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 l^2$$

- c) Die *maximale* Zugspannung σ_{\max} in der Drehachse darf den *höchstzulässigen* Wert σ_0 *nicht* überschreiten:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2} \varrho \omega^2 l^2 \leq \sigma_0$$

Aus dieser Bedingung erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit ω den *Maximalwert*

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\varrho l^2}}$$

der nicht überschritten werden darf.

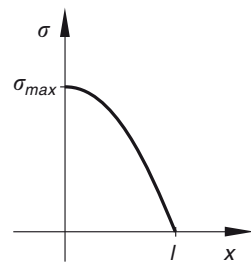


Bild II-8

Beispiel 4: Sortiervorrichtung

Parameterdarstellung, quadratische Funktion

Bild II-9 zeigt das Prinzip einer einfachen *Sortiervorrichtung*. Eine *Kugel* verlässt im Punkt A ihre (waagerechte) Bahn mit der Horizontalgeschwindigkeit $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und soll den im Punkt

$B = (x_0; y_0)$ postierten *Behälter* erreichen. An welcher Stelle x_0 muss dieser Behälter stehen, wenn die Höhendifferenz $y_0 = 1 \text{ m}$ beträgt?

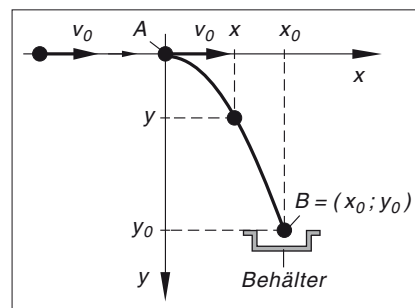


Bild II-9

Lösungshinweis: Behandeln Sie die Bewegung als einen *waagerechten Wurf* im *luftleeren* Raum mit der Erd- oder Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Lehrbuch: Bd. 1, III.1.2.4 und III.5.3

Physikalische Grundlagen: A17

Lösung:

Die Kugel beschreibt eine sog. *Wurfparabel* mit der *Parameterdarstellung*

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (t \geq 0: \text{Zeitparameter})$$

(in x -Richtung: Bewegung mit *konstanter* Geschwindigkeit v_0 ; in y -Richtung: *freier Fall* [A17]). Wir lösen die *erste* Gleichung nach dem Zeitparameter t auf und setzen den gefundenen Ausdruck $t = x/v_0$ in die *zweite* Gleichung ein:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2, \quad x \geq 0$$

Dies ist die Gleichung der *Bahnkurve* der Kugel in *expliziter* Form. Für den auf dieser Kurve liegenden Punkt $B = (x_0; y_0)$ gilt somit

$$y_0 = \frac{g}{2 v_0^2} \cdot x_0^2$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir für die gesuchte Ortskoordinate x_0 den folgenden Wert:

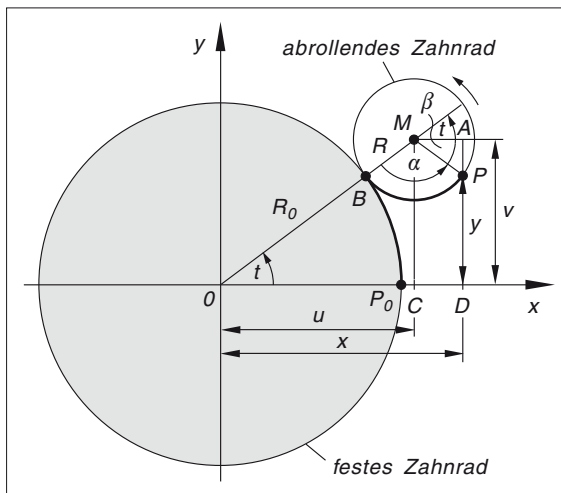
$$x_0 = \sqrt{\frac{2 v_0^2 y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 \text{ m/s})^2 \cdot 1 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 0,45 \text{ m}$$

Beispiel 5: Aufeinander abrollende Zahnräder (Epizykloide)

Parameterdarstellung einer Kurve

Bild II-10 zeigt in vereinfachter Darstellung ein in der *Getriebelehre* häufig auftretendes Problem: Auf der *Außenseite* eines (festen) Zahnrades mit dem Radius R_0 „rollt“ ein zweites Zahnrad mit dem Radius R ab.

- Wie lautet die *Parameterdarstellung* der als *Epizykloide* bezeichneten Kurve, die ein Punkt P auf dem *Umfang* des *abrollenden* Zahnrades bei dieser Bewegung beschreibt? Der Punkt P soll sich dabei zu *Beginn* der Abrollbewegung in der Position P_0 befinden, als Parameter wähle man den sog. *Drehwinkel* t .
- Zeichnen Sie die Epizykloide für $R_0 = 3$ und $R = 1$ im Winkelbereich $0^\circ \leq t \leq 360^\circ$ (entspricht einem vollen Umlauf) mit der Schrittweite $\Delta t = 10^\circ$.



t : Drehwinkel
 α : Wälzwinkel

Bild II-10

Lehrbuch: Bd. 1, III.1.2.4

Lösung:

- a) Zwischen den Koordinaten des Punktes $P = (x; y)$ und den Koordinaten des Mittelpunktes $M = (u; v)$ des abrollenden Zahnrads besteht der folgende Zusammenhang:

$$(I) \quad x = u + \overline{CD} = u + \overline{MA}, \quad y = v - \overline{PA}$$

Die Koordinaten u und v lassen sich dabei aus dem rechtwinkligen Dreieck OCM bestimmen. Aus

$$\cos t = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{u}{R_0 + R} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\overline{CM}}{\overline{OM}} = \frac{v}{R_0 + R}$$

folgt dann

$$(II) \quad u = (R_0 + R) \cdot \cos t \quad \text{und} \quad v = (R_0 + R) \cdot \sin t$$

Die Strecken \overline{MA} und \overline{PA} erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck AMP . Es gilt

$$\sin \beta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{PA}}{R} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\overline{MA}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{MA}}{R}$$

und somit

$$\overline{PA} = R \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad \overline{MA} = R \cdot \cos \beta$$

Aus

$$\alpha + \beta + t = 180^\circ \quad \text{und somit} \quad \beta = 180^\circ - (\alpha + t)$$

folgt weiter unter Verwendung der *Additionstheoreme* (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.1)

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= R \cdot \sin \beta = R \cdot \sin [180^\circ - (\alpha + t)] = \\ &= R \left[\underbrace{\sin 180^\circ}_{0} \cdot \cos (\alpha + t) - \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \cdot \sin (\alpha + t) \right] = R \cdot \sin (\alpha + t) \\ \overline{MA} &= R \cdot \cos \beta = R \cdot \cos [180^\circ - (\alpha + t)] = \\ &= R \left[\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \cdot \cos (\alpha + t) + \underbrace{\sin 180^\circ}_{0} \cdot \sin (\alpha + t) \right] = -R \cdot \cos (\alpha + t) \end{aligned}$$

Drehwinkel t und *Wälzwinkel* α sind dabei noch über die sog. *Abrollbedingung*

$$\widehat{P_0 B} = \widehat{PB}, \quad \text{d. h.} \quad R_0 t = R \alpha$$

miteinander verknüpft (die beiden Bögen sind in Bild II-10 *dick* gezeichnet). Somit ist

$$\alpha = \frac{R_0}{R} t \quad \text{und} \quad \alpha + t = \frac{R_0}{R} t + t = \left(\frac{R_0}{R} + 1 \right) t = \frac{R_0 + R}{R} t$$

Für die Strecken \overline{PA} und \overline{MA} folgt dann

$$(III) \quad \overline{PA} = R \cdot \sin \left(\frac{R_0 + R}{R} t \right), \quad \overline{MA} = -R \cdot \cos \left(\frac{R_0 + R}{R} t \right)$$

Wir setzen die Beziehungen (II) und (III) in die Gleichungen (I) ein und erhalten die gewünschte *Parameterdarstellung* in der Form

$$\begin{aligned} x &= x(t) = u + \overline{MA} = (R_0 + R) \cdot \cos t - R \cdot \cos \left(\frac{R_0 + R}{R} t \right) \\ y &= y(t) = v - \overline{PA} = (R_0 + R) \cdot \sin t - R \cdot \sin \left(\frac{R_0 + R}{R} t \right) \end{aligned} \quad (t \geq 0)$$

b) Die *Parametergleichungen* lauten mit den vorgegebenen Werten der beiden Radien wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= 4 \cdot \cos t - \cos(4t) \\ y(t) &= 4 \cdot \sin t - \sin(4t) \end{aligned} \quad (0^\circ \leq t \leq 360^\circ)$$

Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta t = 10^\circ$)

t	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
x	3	3,17	3,59	3,96	4,00	3,51	2,50	1,19	-0,07	-1
y	0	0,05	0,38	1,13	2,23	3,41	4,33	4,74	4,58	4

t	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°
x	-1,46	-1,54	-1,50	-1,63	-2,12	-2,96	-3,93	-4,71	-5	-4,71
y	3,30	2,77	2,60	2,72	2,91	2,87	2,35	1,34	0	-1,34

t	200°	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°	290°
x	-3,93	-2,96	-2,12	-1,63	-1,50	-1,54	-1,46	-1	-0,07	1,19
y	-2,35	-2,87	-2,91	-2,72	-2,60	-2,77	-3,30	-4	-4,58	-4,74

t	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
x	2,50	3,51	4,00	3,96	3,59	3,17	3
y	-4,33	-3,41	-2,23	-1,13	-0,38	-0,05	0

Wir erhalten die in Bild II-11 dargestellte aus *drei* deckungsgleichen Bögen bestehende *geschlossene Kurve* (*Epizykloide*).

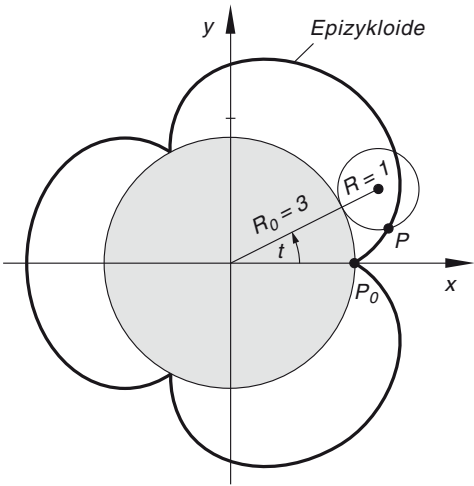
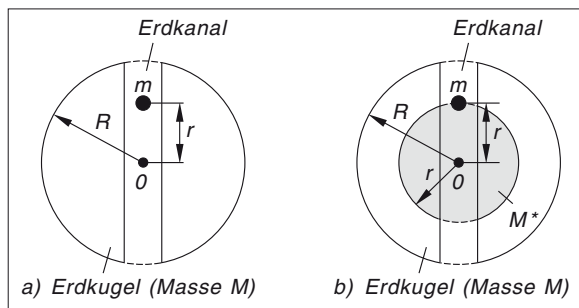


Bild II-11

Beispiel 6: Fallbeschleunigung innerhalb und außerhalb eines Erdkanals
Lineare Funktion, gebrochenrationale Funktion

Bild II-12a) zeigt die *Erdkugel* mit einem durch den Erdmittelpunkt verlaufenden *Kanal*. Welche *Fallbeschleunigung* (Erdbeschleunigung) g erfährt eine Masse m , die sich

- außerhalb* des Erdkanals,
- innerhalb* des Erdkanals befindet in Abhängigkeit von der *augenblicklichen* Position, d. h. dem *Abstand* r zwischen der Masse und dem Erdmittelpunkt O ?
- Skizzieren Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen der *Fallbeschleunigung* g und der *Relativkoordinate* $x = r/R$ im Bereich $0 \leq x < \infty$.



R : Erdradius
 g_0 : Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche
 M : Erdmasse

Bild II-12

Lösungshinweis: Verwenden Sie das *Gravitationsgesetz* [A18]. Befindet sich die Masse m *innerhalb* des Erdkanals, so kommt für die Gravitation nur der in Bild II-12b) *grau* unterlegte Teil der Erdkugel zur Wirkung (*konzentrische Kugel* vom Radius r). Die Erdkugel selbst wird als ein *homogener Körper* mit der *konstanten Dichte* ρ angesehen.

Lehrbuch: Bd. 1, III.5.2 und III.6

Physikalische Grundlagen: A18

Lösung:

- a) Die *Gewichtskraft* ist gleich der *Gravitationskraft* [A18]. Daher gilt für $r \geq R$ (also *außerhalb* der Erdkugel)

$$m g = \gamma \cdot \frac{m M}{r^2} \quad \text{und somit} \quad g = g(r) = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = \gamma M \cdot \frac{1}{r^2}, \quad r \geq R$$

Die Fallbeschleunigung nimmt *außerhalb* der Erdkugel *umgekehrt proportional* zum *Quadrat* der Entfernung r vom Erdmittelpunkt nach außen hin *ab* (siehe hierzu auch Bild II-13).

- b) *Innerhalb* des Erdkanals ist die Erdmasse M durch die Masse M^* der in Bild II-12b) *grau* unterlegten konzentrischen Kugel zu ersetzen. Diese Masse berechnet sich wie folgt:

$$M^* = \varrho V^* = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \underbrace{\varrho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}_M \cdot \frac{r^3}{R^3} = \frac{M r^3}{R^3} \quad (\text{mit } R^3 \text{ erweitert})$$

Sie ist noch abhängig vom Abstand r ($0 \leq r \leq R$). Für die Fallbeschleunigung *im* Erdkanal erhalten wir damit in Abhängigkeit von der Abstandskoordinate den funktionalen Zusammenhang

$$g(r) = \gamma M^* \cdot \frac{1}{r^2} = \gamma \cdot \frac{M r^3}{R^3} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma M}{R^3} \cdot r, \quad 0 \leq r \leq R$$

Im Erdkanal wächst demnach die Fallbeschleunigung g *proportional* mit dem Abstand r (siehe Bild II-13).

- c) Die Funktion $g = g(r)$ wird somit für $r \geq 0$ durch die Gleichungen

$$g(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\gamma M}{R^3} \cdot r & 0 \leq r \leq R \\ \gamma M \cdot \frac{1}{r^2} & R \leq r < \infty \end{array} \right. \quad \text{für}$$

beschrieben. Mit der *Relativkoordinate* $x = r/R$ wird hieraus unter Berücksichtigung von $g_0 = g(R) = \frac{\gamma M}{R^2}$ die Funktion

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} g_0 \cdot x & 0 \leq x \leq 1 \\ g_0 \cdot \frac{1}{x^2} & 1 \leq x < \infty \end{array} \right. \quad \text{für}$$

Nebenrechnung:

$$g = \frac{\gamma M}{R^3} \cdot r = \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{g_0} \cdot \underbrace{\frac{r}{R}}_x = g_0 \cdot x$$

$$g = \gamma M \cdot \frac{1}{r^2} = \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{g_0} \cdot \frac{R^2}{r^2} = g_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{R}{r}\right)^2}_{1/x} = g_0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = g_0 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Die Erdbeschleunigung erreicht ihren *Maximalwert* g_0 an der *Erdoberfläche*, d. h. für $x = 1$: $g(1) = g_0$.

Der Funktionsverlauf ist in Bild II-13 dargestellt.

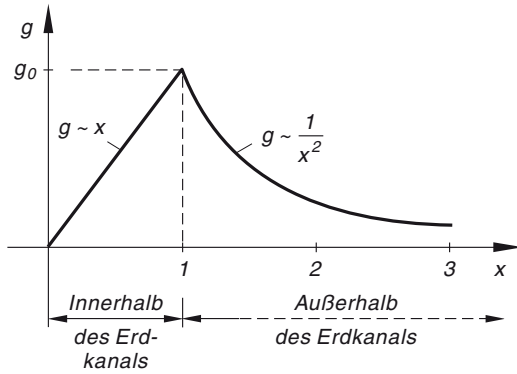


Bild II-13

Beispiel 7: Verteilung der Stromdichte in einem stromdurchflossenen Hohlzylinder
Gebrochenrationale Funktion

Bild II-14 zeigt im Querschnitt einen *Hohlzylinder* der Länge l mit dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a . Durch das *leitende* Zylindermaterial fließt dabei von innen nach außen ein *konstanter* Strom der Stärke I . Bestimmen und *skizzieren* Sie den Verlauf der *Stromdichte* S in *radialer* Richtung.

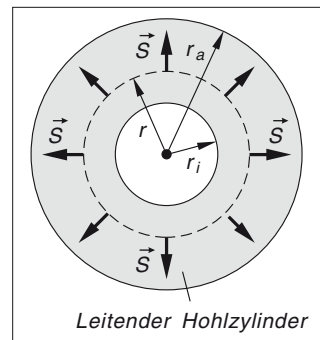


Bild II-14

Lehrbuch: Bd. 1, III.6

Physikalische Grundlagen: A19

Lösung:

Aus *Symmetriegründen* verläuft das elektrische Feld im Zylindermaterial *axialsymmetrisch*. Der *Betrag* des *Stromdichtevektors* \vec{S} kann daher nur vom Abstand r zur Symmetrieachse des Leiters abhängen: $S = S(r)$. Durch *jede* zum Zylindermantel *konzentrische* Zylinderfläche fließt der *gleiche* Strom I . Dies gilt somit auch für den in Bild II-14 *gestrichelt* gezeichneten konzentrischen Zylinder mit dem Radius r und der Mantelfläche $A = 2\pi r l$.

Die *Stromdichte* $S(r)$ beträgt daher an dieser Stelle *definitionsgemäß* [A19]

$$S(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{I}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r},$$

$$r_i \leq r \leq r_a$$

und nimmt somit von innen nach außen *ab*.

Bild II-15 zeigt den Verlauf dieser *gebrochenrationalen* Stromdichtefunktion.

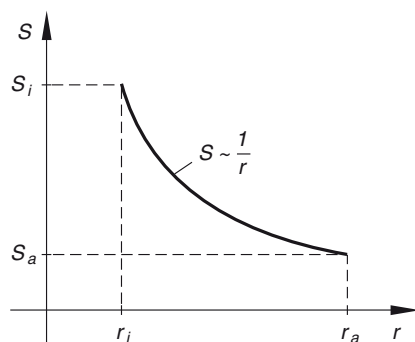


Bild II-15

Beispiel 8: Kapazität eines Kondensators mit geschichtetem Dielektrikum *Gebrochenrationale Funktion*

Bild II-16 zeigt einen *Plattenkondensator* mit einem *geschichteten* Dielektrikum.

- Welche *Kapazität* C besitzt der Kondensator in Abhängigkeit von der *Schichtdicke* x des eingebrachten Dielektrikums? *Skizzieren* Sie diese Funktion.
- Untersuchen Sie die *Sonderfälle* (Grenzfälle) $x = 0$ und $x = d$.

A : Plattenfläche; d : Plattenabstand; ϵ : Dielektrizitätskonstante; ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

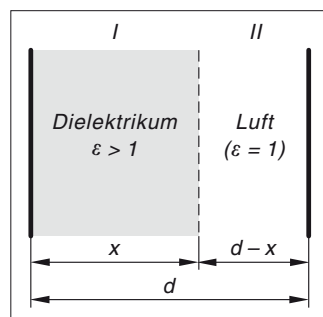


Bild II-16

Lehrbuch: Bd. 1, III.6

Physikalische Grundlagen: A20, A21

Lösung:

- Wir können den Kondensator als eine *Reihenschaltung* zweier Kondensatoren I und II ansehen. Diese besitzen dann folgende Kapazitäten [A20]:

$$\text{Kondensator I:} \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon A}{x} \quad (\text{Plattenabstand: } x)$$

$$\text{Kondensator II:} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d - x} \quad (\text{Plattenabstand: } d - x)$$

Bei *Reihenschaltung* gilt für die *Gesamtkapazität* C nach [A21]

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad \text{oder} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Wir erhalten daher

$$C = C(x) = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{x} \cdot \frac{\varepsilon_0 A}{d-x}}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{x} + \frac{\varepsilon_0 A}{d-x}} = \frac{\frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon A^2}{x(d-x)}}{\frac{\varepsilon_0 A [\varepsilon(d-x) + x]}{x(d-x)}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{\varepsilon(d-x) + x}$$

Die Abhängigkeit der *Gesamtkapazität* $C(x)$ von der Schichtdicke x ist somit durch die *echt gebrochenrationale* Funktion

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{\varepsilon(d-x) + x}, \quad 0 \leq x \leq d$$

gegeben (siehe Bild II-17).

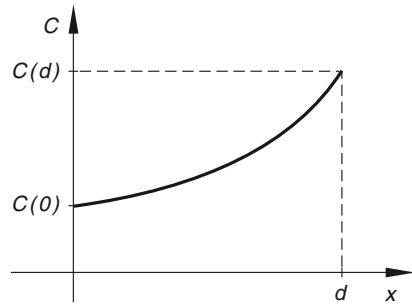


Bild II-17

b) **Sonderfall $x = 0$:** $C(0) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{\varepsilon d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Dieser Fall entspricht einem Kondensator *ohne* Dielektrikum, die Kapazität erreicht ihren *kleinsten* Wert (siehe Bild II-17).

Sonderfall $x = d$: $C(d) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d} = \varepsilon \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \varepsilon \cdot C(0) \quad (\text{mit } \varepsilon > 1)$

Der Kondensator ist *vollständig* mit dem Dielektrikum ausgefüllt und erreicht somit seinen *größten* Kapazitätswert (siehe Bild II-17).

Beispiel 9: Magnetfeld in der Umgebung einer stromdurchflossenen elektrischen Doppelleitung

Gebrochenrationale Funktionen

Bild II-18 zeigt im Querschnitt eine *stromdurchflossene* elektrische *Doppelleitung*, bestehend aus zwei langen *parallelen* Leitern (Drähten) L_1 und L_2 mit konstanter Querschnittsfläche. Der Durchmesser der Leiter soll dabei gegenüber dem Leiterabstand $d = 2a$ *vernachlässigbar klein* sein. Die Ströme in den beiden Leitungen haben die *gleiche* Stärke I , fließen jedoch in *entgegengesetzte* Richtungen.

Bestimmen Sie den Verlauf der *magnetischen Feldstärke* H

- längs der *Verbindungsline* der beiden Leiterquerschnitte (x -Achse),
- längs der *Mittelsenkrechten* dieser Verbindungsstrecke (y -Achse).

Die Ströme fließen parallel zur z -Achse (steht senkrecht zur Zeichenebene), im Leiter L_1 nach oben, im Leiter L_2 nach unten.

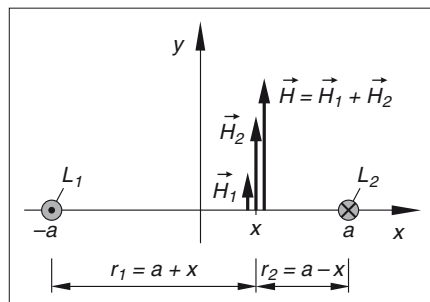


Bild II-18

Lehrbuch: Bd. 1, III.6

Physikalische Grundlagen: A4

Lösung:

- Der vom Strom I durchflossene *linke* Leiter L_1 erzeugt am Ort x , d. h. im Abstand $r_1 = a + x$ von seiner Leitermitte ein Magnetfeld der Stärke [A4]

$$H_1(x) = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{I}{2\pi(a+x)}$$

(der Feldvektor \vec{H}_1 verläuft parallel zur y -Achse).

An der *gleichen* Stelle, d. h. im Abstand $r_2 = a - x$ von seiner Leitermitte erzeugt der *rechte* Leiter L_2 ein Magnetfeld der Stärke [A4]

$$H_2(x) = \frac{I}{2\pi r_2} = \frac{I}{2\pi(a-x)}$$

Beide Felder haben *gleiche* Richtung (parallel zur y -Achse), die *Beträge* ihrer Feldstärken *addieren* sich somit. Das durch *Überlagerung* entstandene Magnetfeld besitzt demnach an der Stelle x eine *resultierende* Feldstärke vom *Betrag*

$$\begin{aligned} H(x) &= H_1(x) + H_2(x) = \frac{I}{2\pi(a+x)} + \frac{I}{2\pi(a-x)} = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{I}{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{a-x+a+x}{(a+x)(a-x)}}_{\substack{\text{3. Binom: } a^2 - x^2}} = \\ &= \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{2a}{a^2 - x^2} = \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}, \quad |x| \neq a \end{aligned}$$

Bild II-19 zeigt den Verlauf dieser *achsensymmetrischen* und *echt gebrochenrationalen* Funktion.

Zwischen den beiden Leitern nimmt die Feldstärke in Richtung Leiter *zu*, wird dann an den Orten der Leiter, d. h. den Stellen $x_1 = -a$ und $x_2 = a$ *unendlich groß* (Polstellen!) und fällt dann nach außen hin gegen *Null* ab, wobei sich gleichzeitig die *Richtung* des Feldstärkevektors *umkehrt* (die Richtung von \vec{H} beschreiben wir durch das Vorzeichen: $H > 0$ für $|x| < a$, $H < 0$ dagegen für $|x| > a$; siehe Bild II-20).

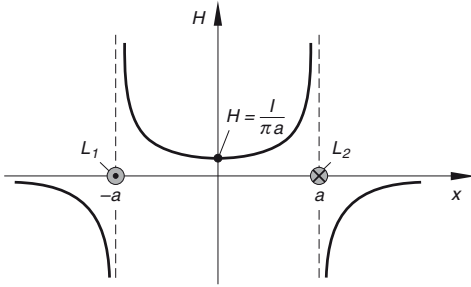


Bild II-19

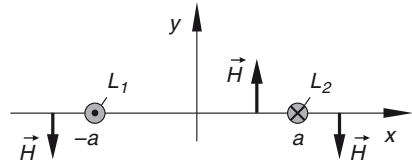


Bild II-20

- b) Die Feldstärkevektoren \vec{H}_1 und \vec{H}_2 eines Punktes P der y -Achse liegen jetzt *spiegelsymmetrisch* zur y -Achse, ihre *Beträge* sind somit *gleich groß* (Bild II-21). Beide Leiter liefern daher (dem Betrage nach) den *gleichen* Beitrag zur Gesamtfeldstärke H .

Der *resultierende* Feldstärkevektor \vec{H} liegt in der y -Achse in *positiver* Richtung. Den *Betrag* H erhalten wir durch Projektion der Feldstärkevektoren \vec{H}_1 und \vec{H}_2 auf die y -Achse. Diese Projektionen sind nichts anderes als die y -Komponenten H_{1y} und H_{2y} der Vektoren \vec{H}_1 und \vec{H}_2 , wobei aus *Symmetriegründen* $H_{1y} = H_{2y}$ ist (die Komponenten in Richtung der x -Achse heben sich auf). Somit gilt

$$H = H_{1y} + H_{2y} = 2H_{1y} = 2H_1 \cdot \cos \alpha$$

Die Feldstärke H_1 beträgt

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck L_1OP in Bild II-21 entnehmen wir die Beziehungen

$$\cos \alpha = \frac{a}{r_1} \quad \text{und} \quad r_1^2 = a^2 + y^2$$

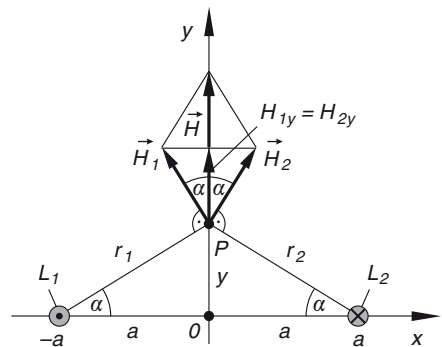


Bild II-21

Damit erhalten wir für den Betrag H der magnetischen Feldstärke \vec{H} längs der y -Achse die folgende Abhängigkeit von der Koordinate y :

$$H = H(y) = 2 H_1 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{I}{2\pi r_1} \cdot \frac{a}{r_1} = \frac{aI}{\pi} \cdot \frac{1}{r_1^2} = \frac{aI}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + y^2}$$

Bild II-22 zeigt den Verlauf der magnetischen Feldstärke längs der y -Achse. Die Funktion $H(y)$ ist *spiegelsymmetrisch* und *echt gebrochenrational*. Das *Maximum* liegt bei $y = 0$, mit *zunehmender* Entfernung wird die Feldstärke *kleiner* und verschwindet schließlich in *großer* Entfernung, d. h. für $y \rightarrow \pm \infty$.

Die *Richtung* des Feldstärkevektors \vec{H} ist dabei für alle Punkte der y -Achse die *gleiche*.

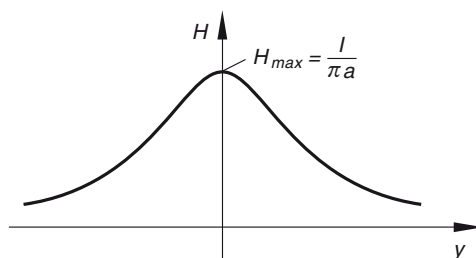


Bild II-22

Beispiel 10: Kennlinie einer Glühlampe

Interpolationsformel von Newton, kubische Funktion, Horner-Schema

Eine *Glühlampe* stellt einen *nichtlinearen* Widerstand dar, d. h. das *Ohmsche Gesetz* der Proportionalität zwischen Spannung U und Stromstärke I ist hier *nicht* erfüllt. Aus einer Messung sind die folgenden $(I; U)$ -Wertepaare bekannt:

$\frac{I}{\text{A}}$	0	0,1	0,2	0,4
$\frac{U}{\text{V}}$	0	21	48	144

Bestimmen Sie aus diesen vier Einzelmessungen ein *Näherungspolynom 3. Grades* für die Kennlinie $U = f(I)$ der Glühlampe

- mit Hilfe der *Interpolationsformel von Newton*,
- durch einen *geeigneten* Ansatz unter Berücksichtigung der in diesem Fall vorhandenen *speziellen Symmetrieeigenschaft* der Kennlinie.
- Welcher *Spannungsabfall* ist nach der unter a) bestimmten Kennlinie bei einer Stromstärke von $I = 0,3 \text{ A}$ zu erwarten (Berechnung mit Hilfe des *Horner-Schemas*)?

Lehrbuch: Bd. 1, III.5.4, III.5.5 und III.5.6.2

Lösung:

a) Der *Lösungsansatz* nach der Interpolationsformel von Newton lautet (I in A, U in V):

$$U = a_0 + a_1(I - I_0) + a_2(I - I_0)(I - I_1) + a_3(I - I_0)(I - I_1)(I - I_2)$$

Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 berechnen wir nach dem *Steigungs- oder Differenzschema*:

k	I_k	U_k			
0	0	a_0 0			
1	0,1	21	a_1 210		
2	0,2	48		a_2 300	
3	0,4	144			a_3 1000

Lösung:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 210$$

$$a_2 = 300$$

$$a_3 = 1000$$

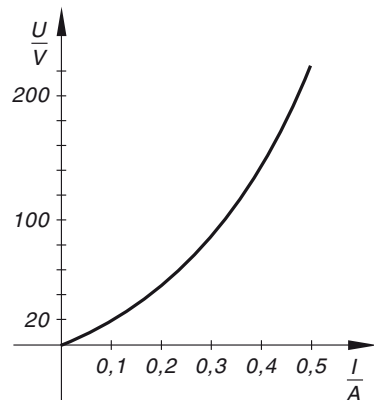
$$\begin{aligned} U &= 0 + 210(I - 0) + 300(I - 0)(I - 0,1) + 1000(I - 0)(I - 0,1)(I - 0,2) = \\ &= 210I + 300I(I - 0,1) + 1000I(I^2 - 0,3I + 0,02) = \\ &= 210I + 300I^2 - 30I + 1000I^3 - 300I^2 + 20I = 1000I^3 + 200I \end{aligned}$$

Somit gilt unter Berücksichtigung der *Einheiten*

$$U = 1000 \frac{\text{V}}{\text{A}^3} \cdot I^3 + 200 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot I$$

Bild II-23 zeigt den Verlauf dieser Kennlinie.

Bild II-23



b) Die gesuchte Kennlinie $U = f(I)$ muss *punktsymmetrisch* zum Nullpunkt verlaufen!

Begründung: Der Widerstand der Glühlampe ist *temperaturabhängig* und nimmt mit der Stromstärke zu. Andererseits ist die Wärmeentwicklung im Widerstand nur von der *Stärke* des Stromes, *nicht* jedoch von der *Stromrichtung* abhängig. In dem Lösungsansatz für die Kennlinie können daher nur *ungerade* Potenzen auftreten (bei einer Änderung der *Stromrichtung* ändert sich lediglich die *Richtung* der abfallenden Spannung).

Der *Lösungsansatz* lautet somit:

$$U = aI^3 + bI$$

Zur Bestimmung der beiden Koeffizienten a und b benötigen wir daher nur *zwei* der vier vorgegebenen Wertepaare, wobei das erste Wertepaar $(0; 0)$ den Lösungsansatz *automatisch* erfüllt.

Wir entscheiden uns für das zweite und dritte Wertepaar²⁾ und erhalten folgende *Bestimmungsgleichungen* für a und b :

$$U(0,1) = 21 \Rightarrow 0,001a + 0,1b = 21$$

$$U(0,2) = 48 \Rightarrow 0,008a + 0,2b = 48$$

Wir multiplizieren die *obere* Gleichung mit -2 und addieren sie zur *unteren* Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} -0,002a - 0,2b & = & -42 \\ 0,008a + 0,2b & = & 48 \\ \hline 0,006a & = & 6 \Rightarrow a = 1000 \end{array}$$

Für b folgt dann aus der *oberen* Gleichung:

$$0,001 \cdot 1000 + 0,1b = 21 \Rightarrow 0,1b = 21 - 1 = 20 \Rightarrow b = 200$$

Wir erhalten die bereits aus Lösungsteil a) bekannte Kennlinie mit der Gleichung

$$U = 1000 \frac{\text{V}}{\text{A}^3} \cdot I^3 + 200 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot I$$

c) *Horner-Schema* für $I = 0,3 \text{ A}$:

	1000	0	200	0	
$I = 0,3$		300	90	87	
	1000	300	290	87	
				$\underbrace{\hspace{1cm}}$	
				$U(0,3)$	

Lösung: $U = 87 \text{ V}$

Beispiel 11: Doppelschieber

Parameterdarstellung, Kegelschnittgleichung

Bild II-24 zeigt einen *Doppelschieber*, d. h. eine Stange der Länge l , deren Endpunkte A und B längs zweier aufeinander *senkrechter* Geraden geführt werden. Untersuchen Sie, wie sich ein *beliebiger* Punkt P auf der Stange, der vom Endpunkt A den Abstand $d = nl$ mit $0 < n < 1$ besitzt, bewegt und bestimmen Sie die dabei beschriebene *Bahnkurve*

²⁾ Das *vierte* Wertepaar müsste dann streng genommen ebenfalls die Kennliniengleichung erfüllen. Infolge der unvermeidlichen Messfehler *können* aber geringe Abweichungen auftreten.

- a) in der *Parameterform* mit dem eingezeichneten Winkel α als Parameter,
 b) in der *impliziten Form* unter Verwendung der kartesischen Koordinaten x und y .

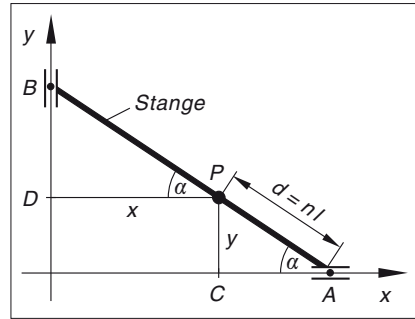


Bild II-24

Lehrbuch: Bd. 1, III.1.2.4 und III.8.3

Lösung:

- a) Aus den beiden *rechtwinkligen* (und ähnlichen) Dreiecken APC und PBD folgt unmittelbar

$$\text{Dreieck } APC: \quad \sin \alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{y}{nl}$$

$$\text{Dreieck } PBD: \quad \cos \alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{x}{l - nl} = \frac{x}{(1 - n)l}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den Koordinaten x bzw. y erhalten wir die gesuchte *Parameterdarstellung* in der Form

$$\begin{aligned} x &= (1 - n)l \cdot \cos \alpha \\ y &= nl \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{Parameter } \alpha \text{ mit } -180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

- b) Wir lösen die Parametergleichungen nach der jeweiligen *trigonometrischen* Funktion auf und setzen die gefundenen Ausdrücke in den „*trigonometrischen Pythagoras*“ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ein:

$$\cos \alpha = \frac{x}{(1 - n)l}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{nl}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{[(1 - n)l]^2} + \frac{y^2}{(nl)^2} = 1$$

Dies ist die Gleichung einer *Ursprungsellipse* mit den Halbachsen $a = (1 - n)l$ und $b = nl$ (Bild II-25). Im *Sonderfall* $n = 0,5$ liegt P in der *Stabmitte* und bewegt sich auf einem *Ursprungskreis* mit dem Radius $r = 0,5l$.

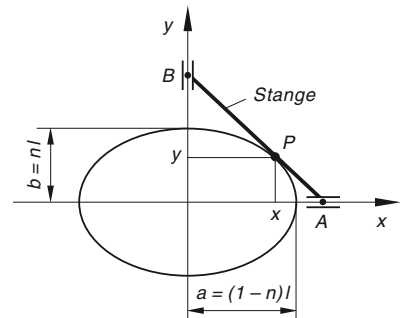


Bild II-25

Beispiel 12: Rollbewegung einer Zylinderwalze längs einer schiefen Ebene
Wurzelfunktion

Eine homogene Zylinderwalze mit der Masse m und dem Radius r rollt aus der Ruhe heraus eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α herab (Bild II-26; A: Startpunkt der Bewegung).

Bestimmen Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen der Endgeschwindigkeit v_0 , die der Schwerpunkt S der Walze am Fußpunkt B der schiefen Ebene erreicht und der dabei durchlaufenen Wegstrecke $s = \overline{AB}$. Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion $v_0(s)$.

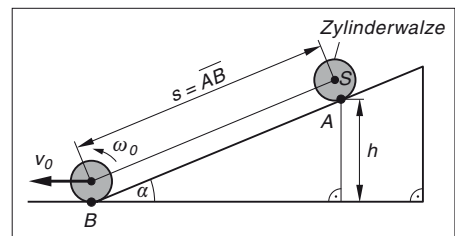


Bild II-26

Lösungshinweis: Verwenden Sie den *Energieerhaltungssatz* [A22] und beachten Sie, dass sich die *Gesamtbewegung* aus einer *Translation* des Walzenschwerpunktes S (kinetische und potentielle Energie) und einer *Rotation* der Walze um ihren Schwerpunkt (Rotationsenergie) zusammensetzt. Die *Rollreibung* soll dabei *vernachlässigt* werden. Das Massenträgheitsmoment der Zylinderwalze bezüglich der Zylinderachse (Schwerpunktachse) ist $J_S = \frac{1}{2} m r^2$.

Lehrbuch: Bd. 1, III.7.2

Physikalische Grundlagen: A8, A22

Lösung:

Wir lösen das Problem durch Anwendung des *Energieerhaltungssatzes* [A22]. Zu Beginn (Position A) besitzt die Walze ausschließlich *potentielle* Energie:

$$E_1 = E_{\text{pot}} = m g h$$

Diese geht nach und nach in *kinetische* Energie des Schwerpunktes S und in *Rotationsenergie* der rotierenden Walze über. Am Fußpunkt der schiefen Ebene (Position B) ist daher

$$E_2 = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_S \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{4} m r^2 \omega_0^2$$

ω_0 ist dabei die *Winkelgeschwindigkeit* der Drehbewegung der Walze um ihren Schwerpunkt S im *Fußpunkt* B der schiefen Ebene. Nach dem *Energieerhaltungssatz* [A22] gilt $E_2 = E_1$ und somit

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{4} m r^2 \omega_0^2 = m g h \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{4} r^2 \omega_0^2 = g h$$

Wir berücksichtigen noch die Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}, \quad h = s \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad v_0 = \omega_0 r, \quad \omega_0 = \frac{v_0}{r}$$

und erhalten zunächst

$$\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{4} r^2 \left(\frac{v_0}{r} \right)^2 = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{4} v_0^2 = g s \cdot \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4} v_0^2 = g s \cdot \sin \alpha$$

und daraus schließlich die gesuchte Beziehung

$$v_0 = v_0(s) = 2 \sqrt{\frac{g s \cdot \sin \alpha}{3}} = 2 \sqrt{\frac{g \cdot \sin \alpha}{3}} \cdot s = 2 \sqrt{\frac{g \cdot \sin \alpha}{3}} \cdot \sqrt{s}, \quad s \geq 0$$

Die *Endgeschwindigkeit* v_0 des Walzenschwerpunktes S am Fußpunkt der schiefen Ebene ist somit \sqrt{s} *proportional*.

Der funktionale Zusammenhang der beiden Größen ist in Bild II-27 dargestellt (*Wurzelfunktion*).

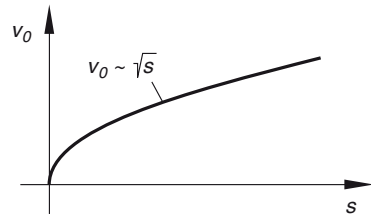


Bild II-27

Beispiel 13: Ballistisches Pendel

Zusammengesetzte Funktion

Bild II-28 zeigt ein sog. *ballistisches Pendel*, mit dessen Hilfe man unbekannte *Geschossgeschwindigkeiten* bestimmen kann. Das Geschoss mit der Masse m trifft mit der (noch *unbekannten*) Geschwindigkeit v_0 auf einen als Pendelkörper dienenden Holz-, Sand- oder Bleiblock der Masse M und bleibt darin stecken. Das Pendel der Länge l wird dabei um den Winkel α ausgelenkt. Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen der *Geschossgeschwindigkeit* v_0 und dem *Ausschlagwinkel* α ? *Skizzieren Sie diese Funktion.*

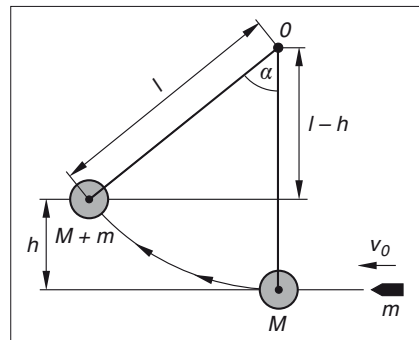


Bild II-28

Lösung:

Block und Geschoss bewegen sich unmittelbar *nach* dem Einschlag mit der *gemeinsamen* Geschwindigkeit v_1 . Ihre *kinetische* Energie wird dabei nach und nach *vollständig* in *potentielle* Energie umgesetzt. Nach Erreichen der *maximalen* Höhe h (*Umkehrpunkt* der Bewegung) gilt somit nach dem *Energieerhaltungssatz* [A22]

$$\frac{1}{2} (M + m) v_1^2 = (M + m) g h \quad \text{oder} \quad v_1^2 = 2 g h$$

Die erreichte (maximale) Höhe h lässt sich noch durch den Ausschlagswinkel α ausdrücken:

$$\cos \alpha = \frac{l - h}{l} \Rightarrow l \cdot \cos \alpha = l - h \Rightarrow h = l - l \cdot \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit v_1 im *tiefsten* Punkt der Pendelbewegung den folgenden Ausdruck:

$$v_1 = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}$$

Aus dieser Beziehung kann mit Hilfe des *Impulserhaltungssatzes* [A24] die gesuchte Geschossgeschwindigkeit v_0 bestimmt werden. Es gilt für den *Gesamtimpuls* [A23]

$$\text{vor dem Stoß: } p_1 = m v_0 + M \cdot 0 = m v_0$$

$$\text{nach dem Stoß: } p_2 = (M + m) v_1$$

Somit folgt aus $p_1 = p_2$

$$m v_0 = (M + m) v_1 \quad \text{oder} \quad v_0 = \frac{M + m}{m} v_1$$

und unter Berücksichtigung der bereits weiter oben aufgestellten Beziehung

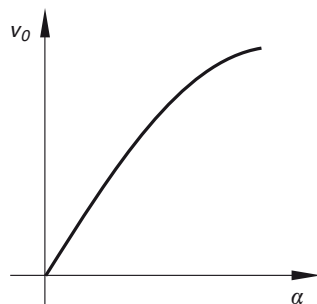
$$v_1 = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}$$

schließlich der gesuchte Zusammenhang zwischen der *Geschossgeschwindigkeit* v_0 und dem *Ausschlagswinkel* α :

$$v_0 = v_0(\alpha) = \frac{M + m}{m} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}, \quad \alpha \geq 0$$

Diese Abhängigkeit ist in Bild II-29 graphisch dargestellt.

Bild II-29



Beispiel 14: Momentane (zeitabhängige) Leistung eines Wechselstroms
Sinus- und Kosinusfunktionen

Ein *sinusförmiger Wechselstrom*

$$i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

erzeugt in einem *ohmschen Widerstand* R eine *momentane (zeitabhängige) Leistung* nach der Gleichung

$$p(t) = R \cdot i^2(t) = R i_0^2 \cdot \sin^2(\omega t), \quad t \geq 0$$

i_0 : Scheitelwert; ω : Kreisfrequenz des Wechselstroms

- a) Skizzieren Sie den *zeitlichen Verlauf* dieser Funktion *ohne* Erstellung einer Wertetabelle, indem Sie den Kurvenverlauf von $p(t)$ mittels einer geeigneten *trigonometrischen Umformung* auf den Verlauf der als *bekannt* vorausgesetzten Kosinusfunktion $y_1 = \cos(2\omega t)$ zurückführen.
- b) Bestimmen Sie aus den bekannten Eigenschaften dieser Kosinusfunktion sämtliche *Nullstellen*, *relativen Extremwerte* und *Wendepunkte* der Funktion $p(t)$.

Lehrbuch: Bd. 1, III.9.5.1

Lösung:

- a) Mit Hilfe der aus der Formelsammlung (Abschnitt III.7.6.4) entnommenen *trigonometrischen Formel*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$$

erhalten wir mit $x = \omega t$ für die Momentanleistung des Wechselstroms den Ausdruck

$$p(t) = R i_0^2 \cdot \sin^2(\omega t) = R i_0^2 \cdot \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] = R I^2 [1 - \cos(2\omega t)]$$

($I = i_0/\sqrt{2}$: *Effektivwert* des Wechselstroms). Den zeitlichen Verlauf dieser Funktion bestimmen wir *schrittweise* wie folgt. Zunächst zeichnen wir die *Kosinusfunktion* $y_1 = \cos(2\omega t)$ mit der *Schwingungsdauer (Periode)* $T = \pi/\omega$ (Bild II-30a)). Durch *Spiegelung* an der Zeitachse wird daraus die Kurve mit der Gleichung

$$y_2 = -y_1 = -\cos(2\omega t)$$

(siehe Bild II-30a)).

Verschieben wir nun die Zeitachse noch um *eine* Einheit nach *unten*, so erhalten wir das Bild der Funktion

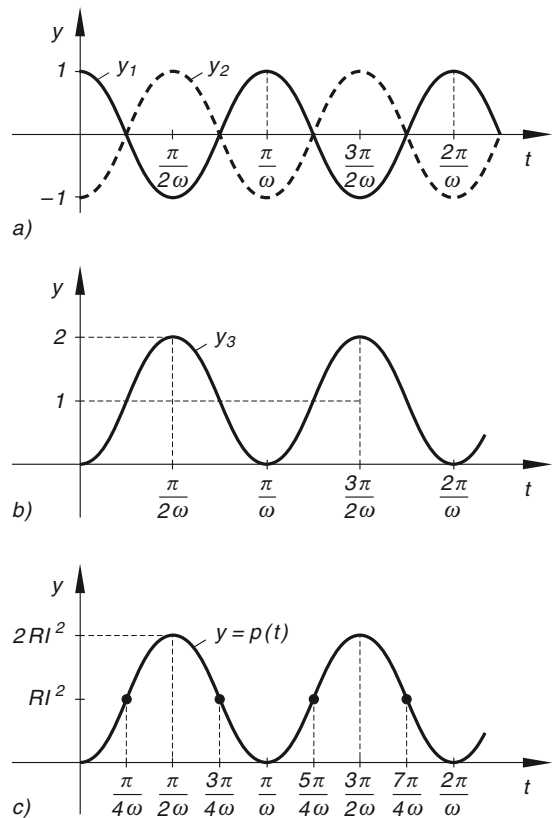
$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + 1 = \\ &= 1 - \cos(2\omega t) \end{aligned}$$

(Bild II-30b)). Eine *Maßstabsänderung* auf der y -Achse (alle Ordinatenwerte werden mit der Konstanten RI^2 multipliziert) führt schließlich zu der *gesuchten* Kurve mit der Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} y &= RI^2 \cdot y_3 = \\ &= RI^2 [1 - \cos(2\omega t)] \end{aligned}$$

Die *Periode* dieser Funktion ist $T = \pi/\omega$ (Bild II-30c)).

Bild II-30



b) Nullstellen: $t_k = k \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Relative Minima: $t_k = k \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Relative Maxima: $t_k = \frac{\pi}{2\omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} (1 + 2k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Wendepunkte: $t_k = \frac{\pi}{4\omega} + k \cdot \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4\omega} (1 + 2k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Nullstellen und relative Minima fallen dabei *zusammen*.

Beispiel 15: Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung
Sinus- und Kosinusfunktionen

Durch *ungestörte Überlagerung* (Superposition) der beiden *gleichfrequenten* mechanischen Schwingungen *gleicher* Raumrichtung

$$y_1 = 8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad y_2 = 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi\right)$$

entsteht eine *resultierende* Schwingung der *gleichen* Frequenz. Bestimmen Sie die *Amplitude* $A > 0$ und den *Phasenwinkel* φ dieser in der *Sinusform*

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \varphi), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

darzustellenden *Gesamtschwingung*

- a) *zeichnerisch* anhand des (reellen) *Zeigerdiagramms*,
 b) durch (reelle) *Rechnung*.

Anmerkung: In Kapitel VI, Übung 7 wird dieses Beispiel im *Komplexen* gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, III.9.5.3

Lösung:

- a) Wir zeichnen zunächst im *Zeigerdiagramm* die zugehörigen Zeiger ein und ergänzen sie zu einem *Parallelogramm* (Bild II-31). Der Zeiger der *resultierenden* Schwingung ist die *Hauptdiagonale* dieses Parallelogramms. *Amplitude* A und *Phasenwinkel* φ lassen sich dann (im Rahmen der Zeichengenauigkeit) unmittelbar *ablesen*:

$$A \approx 11,1 \text{ cm}, \quad \varphi \approx 254^\circ$$

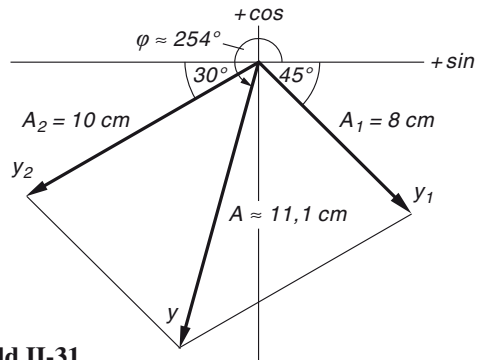


Bild II-31

- b) Die *Kosinusschwingung* y_2 muss zunächst in die *Sinusform* gebracht werden (Drehung um den Winkel $\pi/2$ im Gegenuhrzeigersinn):

$$\begin{aligned} y_2 &= 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi\right) = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{7}{6} \pi\right) \end{aligned}$$

Mit $A_1 = 8 \text{ cm}$, $A_2 = 10 \text{ cm}$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ und $\varphi_2 = \frac{7}{6}\pi$ erhalten wir für die *resultierende* Schwingung folgende *Amplitude*:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \\ &= \sqrt{(8 \text{ cm})^2 + (10 \text{ cm})^2 + 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{7}{6}\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = 11,07 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Berechnung des *Phasenwinkels* φ erfolgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2} = \\ &= \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)}{8 \text{ cm} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)} = 3,5483 \end{aligned}$$

Nach dem Zeigerdiagramm (Bild II-31) liegt der *resultierende* Zeiger im 3. *Quadrant*. Somit ist, wie aus Bild II-32 ersichtlich,

$$\varphi = \arctan 3,5483 + \pi = 4,4377 = 254,3^\circ$$

der gesuchte Phasenwinkel³⁾. Die Gleichung der *resultierenden* Schwingung lautet daher:

$$y = y_1 + y_2 = 11,07 \text{ cm} \cdot \sin(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,4377), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

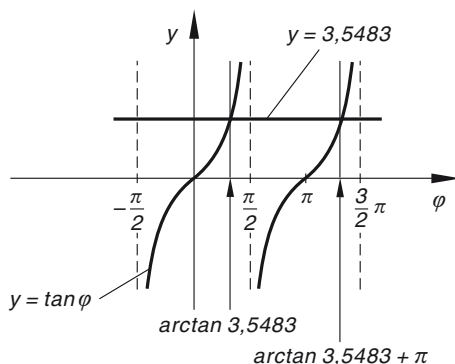


Bild II-32

³⁾ Die Parallele zur φ -Achse mit der Gleichung $y = 3,5483$ schneidet die Tangenskurve im 1. *Quadrant* an der Stelle $\arctan 3,5483$. Die gesuchte Schnittstelle im 3. *Quadrant* liegt von dieser Stelle um *eine* Periodenlänge, d. h. um π entfernt.

Beispiel 16: Lissajous-Figuren
Parameterdarstellung, Sinus- und Kosinusfunktionen, Wurzelfunktionen

Lissajous-Figuren entstehen durch *ungestörte Überlagerung* zweier aufeinander *senkrecht* stehender *harmonischer* Schwingungen, deren *Frequenzen* in einem *rationalen* Verhältnis zueinander stehen. Sie lassen sich beispielsweise auf einem *Oszillograph* durch Anlegen von *sinus-* oder *kosinusförmigen* Wechselspannungen an die beiden *Ablenkkondensatoren* realisieren.

- a) Bestimmen Sie den *Verlauf* der von einem Elektronenstrahl auf dem Oszillographenschirm gezeichneten *Lissajous-Figur* mit der *Parameterdarstellung*

$$x = a \cdot \sin(\omega t), \quad y = b \cdot \sin(2 \omega t), \quad t \geq 0$$

für $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ und $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ durch schrittweise Berechnung der Koordinaten mit der *Schrittweite* $\Delta t = \frac{\pi}{12} \text{ s}$.

- b) Durch welche Funktionen in *expliziter* Form lässt sich diese Kurve beschreiben?

Lehrbuch: Bd. 1, III.1.2.4, III.9.5.1 und III.7.2

Lösung:

- a) Mit den vorgegebenen Werten lautet die *Parameterdarstellung* der *Lissajous-Figur*

$$x = 4 \text{ cm} \cdot \sin(1 \text{ s}^{-1} \cdot t), \quad y = 3 \text{ cm} \cdot \sin(2 \text{ s}^{-1} \cdot t), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

Die Schwingungen in der x - und y -Richtung erfolgen mit den *Schwingungsdauern* (*Perioden*) $T_x = 2 \pi \text{ s}$ und $T_y = \pi \text{ s}$. Die *kleinste gemeinsame* Periode ist somit $T = 2 \pi \text{ s}$, d. h. nach Durchlaufen eines Periodenintervalls dieser Länge ist die *Lissajous-Figur geschlossen*, der Elektronenstrahl zeichnet die gleiche Figur von neuem.

Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta t = (\pi/12) \text{ s}$)

Bei der Berechnung der x - und y -Werte können wir uns wegen der Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion auf die folgenden Teilintervalle beschränken (diese Werte sind in der Tabelle grau unterlegt):

$x\text{-Werte: } 0 \leq t/\text{s} \leq \pi/2; \quad y\text{-Werte: } 0 \leq t/\text{s} \leq \pi/4$

$\frac{t}{\text{s}}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$2 \cdot \frac{\pi}{12}$	$3 \cdot \frac{\pi}{12}$	$4 \cdot \frac{\pi}{12}$	$5 \cdot \frac{\pi}{12}$	$6 \cdot \frac{\pi}{12}$
$\frac{x}{\text{cm}}$	0	1,04	2	2,83	3,46	3,86	4
$\frac{y}{\text{cm}}$	0	1,50	2,60	3	2,60	1,50	0

$\frac{t}{s}$	$7 \cdot \frac{\pi}{12}$	$8 \cdot \frac{\pi}{12}$	$9 \cdot \frac{\pi}{12}$	$10 \cdot \frac{\pi}{12}$	$11 \cdot \frac{\pi}{12}$	$12 \cdot \frac{\pi}{12}$	$13 \cdot \frac{\pi}{12}$
$\frac{x}{\text{cm}}$	3,86	3,46	2,83	2	1,04	0	-1,04
$\frac{y}{\text{cm}}$	-1,50	-2,60	-3	-2,60	-1,50	0	1,50

$\frac{t}{s}$	$14 \cdot \frac{\pi}{12}$	$15 \cdot \frac{\pi}{12}$	$16 \cdot \frac{\pi}{12}$	$17 \cdot \frac{\pi}{12}$	$18 \cdot \frac{\pi}{12}$	$19 \cdot \frac{\pi}{12}$	$20 \cdot \frac{\pi}{12}$
$\frac{x}{\text{cm}}$	-2	-2,83	-3,46	-3,86	-4	-3,86	-3,46
$\frac{y}{\text{cm}}$	2,60	3	2,60	1,50	0	-1,50	-2,60

$\frac{t}{s}$	$21 \cdot \frac{\pi}{12}$	$22 \cdot \frac{\pi}{12}$	$23 \cdot \frac{\pi}{12}$	2π
$\frac{x}{\text{cm}}$	-2,83	-2	-1,04	0
$\frac{y}{\text{cm}}$	-3	-2,60	-1,50	0

Bild II-33 zeigt den Verlauf der Lissajous-Figur mit dem *Startpunkt A* und eingezeichnetem *Durchlaufsin* der Kurve (in Pfeilrichtung).

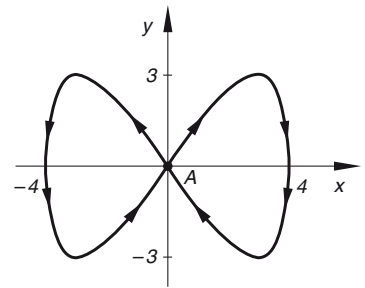


Bild II-33

- b) Mit Hilfe *trigonometrischer Umformungen* bringen wir die *y-Schwingung* zunächst auf die folgende Form:

$$y = b \cdot \sin(2\omega t) = 2b \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \pm 2b \cdot \sin(\omega t) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}$$

(Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3 und Abschnitt III.7.5). Die Gleichung der *x-Schwingung* lösen wir nach $\sin(\omega t)$ auf und setzen den gefundenen Ausdruck $\sin(\omega t) = x/a$ in diese Gleichung ein:

$$y = \pm 2b \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \pm \frac{2b}{a} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \pm \frac{2b}{a^2} \cdot x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

(mit $|x| \leq a$). Für die *speziellen Werte* $a = 4 \text{ cm}$ und $b = 3 \text{ cm}$ wird daraus schließlich

$$y = \pm \frac{3}{8 \text{ cm}} \cdot x \cdot \sqrt{16 \text{ cm}^2 - x^2}, \quad |x| \leq 4 \text{ cm}$$

Die *Bahnkurve* des Elektronenstrahls wird somit durch *zwei* zur *x-Achse* spiegelsymmetrische *Wurzelfunktionen* beschrieben (Bild II-33; oberes Vorzeichen: 1. und 3. Quadrant, unteres Vorzeichen: 2. und 4. Quadrant).

Beispiel 17: Schwebungen***Trigonometrische Funktionen***

Schwebungen sind Schwingungen mit einer *periodisch an- und abschwellenden* Amplitude. Sie entstehen durch *ungestörte Überlagerung* zweier *harmonischer* Schwingungen *gleicher* Raumrichtung vom Typ⁴⁾

$$y_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad y_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t) \quad (t \geq 0)$$

deren *Frequenzen* bzw. *Kreisfrequenzen* (ω_1, ω_2) in einem *ganzzahligen* Teilverhältnis zueinander stehen und sich *nur geringfügig* voneinander unterscheiden. Bestimmen Sie die *Funktionsgleichung* der Schwebung und zeichnen Sie den *Schwingungsverlauf* für

$$\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 18 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad A = 5 \text{ cm}.$$

Lösungshinweis: Die Funktionsgleichung der Schwebung lässt sich mit Hilfe *trigonometrischer Formeln* als ein *Produkt* aus einer Kosinus- und einer Sinusfunktion mit *unterschiedlichen* Perioden darstellen (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.5). *Zeichenhilfe:* Erstellen Sie zunächst eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta t = (\pi/76) \text{ s}$.

Lehrbuch: Bd. 1, III.9.5.1

Lösung:

Die *resultierende* Schwingung wird durch die Gleichung

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega_1 t) + A \cdot \sin(\omega_2 t) = A [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

beschrieben. Die in der Klammer stehende Summe lässt sich unter Verwendung der aus der Formelsammlung (Abschnitt III.7.6.5) entnommenen *trigonometrischen Formel*

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \cdot \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

wie folgt *umformen* (wir setzen dabei $x_1 = \omega_1 t$ und $x_2 = \omega_2 t$):

$$\begin{aligned} y &= 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right) = \\ &= 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

⁴⁾ Der Einfachheit halber werden folgende Annahmen gemacht: Die Schwingungen stimmen in ihren Amplituden überein ($A_1 = A_2 = A$), ihre Phasenwinkel sind beide gleich Null ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$).

erhalten wir schließlich eine *resultierende* Schwingung der Form

$$y = \underbrace{2A \cdot \cos(\Delta\omega t)}_{A^*(t)} \cdot \sin(\omega t) = A^*(t) \cdot \sin(\omega t)$$

mit der *zeitabhängigen* Amplitude $A^*(t) = 2A \cdot \cos(\Delta\omega t)$ (siehe hierzu Bild II-34). Es handelt sich offensichtlich um eine *nahezu harmonische* Schwingung mit der *Kreisfrequenz* $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ (*arithmetischer Mittelwert* aus ω_1 und ω_2) und der *Frequenz* $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{f_1 + f_2}{2}$, wobei f_1 und f_2 die Frequenzen der *Einzelschwingungen* bedeuten.

Die *Schwingungsdauer* beträgt

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{4\pi}{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}} = \frac{4\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} = \\ &= \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} \end{aligned}$$

T_1 und T_2 sind dabei die Schwingungsdauern der beiden *Einzelschwingungen*. Die *zeitabhängige* Amplitude $A^*(t) = 2A \cdot \cos(\Delta\omega t)$ ändert sich infolge der vergleichsweise *kleinen* Kreisfrequenz $\Delta\omega \ll \omega$ nur sehr *langsam*. Die sogenannte *Schwebungsfrequenz* beträgt $f_S = f_1 - f_2$, die *Periodendauer* der Schwebung, d. h. der *zeitliche* Abstand zweier *benachbarter* Amplitudenmaxima ist somit

$$T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{f_1 - f_2} = \frac{1}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} = \frac{1}{\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

Bild II-34 zeigt den Verlauf der Schwebungen für die *vorgegebenen* Werte $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 18 \text{ s}^{-1}$ und $A = 5 \text{ cm}$. Die *Gleichung* der Schwebung lautet dabei mit $\Delta\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ und $\omega = 19 \text{ s}^{-1}$ wie folgt:

$$y = 10 \text{ cm} \cdot \cos(1 \text{ s}^{-1} \cdot t) \cdot \sin(19 \text{ s}^{-1} \cdot t), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

Die Periodendauer der *eigentlichen Schwingung* ist $T = 0,33 \text{ s}$, die Periodendauer der *Schwebung* beträgt $T_S = \pi \text{ s} = 3,14 \text{ s}$ ($T_S = 9,5 T$).

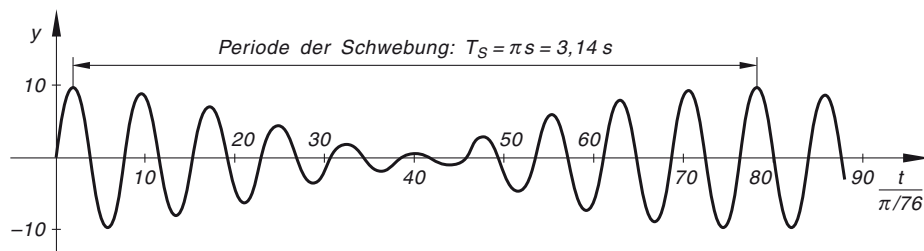
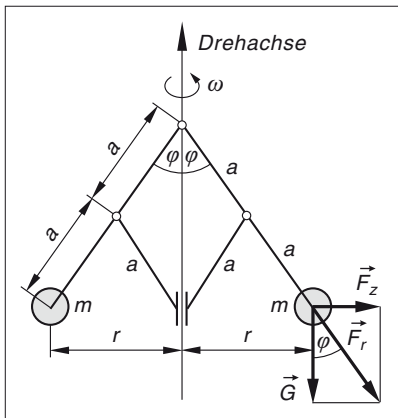


Bild II-34

Beispiel 18: Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler***Trigonometrische Funktionen, Arkuskosinusfunktion***

Bild II-35 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines *Fliehkraft-* oder *Zentrifugalkraftreglers*. Die beiden Arme der Länge $l = 2a$ werden dabei als *nahezu masselos* angenommen, die anhängenden *punktförmigen* Massen m rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die eingezeichnete Drehachse. Zu jedem Wert der Winkelgeschwindigkeit ω gehört genau ein Winkel φ , unter dem sich infolge der nach *außen* wirkenden *Zentrifugalkräfte* die Arme gegenüber der Drehachse einstellen.

Bestimmen und skizzieren Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Winkel φ und der Winkelgeschwindigkeit ω und zeigen Sie, dass zum Abheben der Arme eine *Mindestwinkelgeschwindigkeit* ω_0 nötig ist.



\vec{F}_Z : Zentrifugalkraft

\vec{G} : Gewichtskraft

\vec{F}_r : resultierende Kraft

Bild II-35

Lehrbuch: Bd. 1, III.9 und III.10.3

Physikalische Grundlagen: A15

Lösung:

Auf *jede* der beiden Punktmassen m wirkt neben der *Gewichtskraft* \vec{G} vom Betrag $G = mg$ noch eine nach *außen* gerichtete *Zentrifugalkraft* \vec{F}_Z vom Betrag $F_Z = m\omega^2 r$ ein, wobei r der *senkrechte* Abstand der Masse von der Drehachse ist [A15]. Die *dynamische Gleichgewichtslage* ist erreicht, wenn die aus beiden Kräften gebildete *resultierende* Kraft \vec{F}_r in Verlängerung des jeweiligen Armes wirkt. Aus dem *Kräfteparallelogramm* nach Bild II-35 folgt dann unmittelbar

$$\tan \varphi = \frac{F_Z}{G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Mit den Beziehungen

$$\sin \varphi = \frac{r}{2a}, \quad \text{d. h.} \quad r = 2a \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

(gewonnen aus dem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $2a$ und der dem Winkel φ gegenüberliegenden Kathete r) folgt hieraus

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega^2 \cdot 2a \cdot \sin \varphi}{g} \quad \text{und somit} \quad \cos \varphi = \frac{g}{2a\omega^2}$$

Wir lösen diese Gleichung nach φ auf und erhalten die gesuchte Beziehung in Form der *Arkusfunktion*

$$\varphi = \arccos \left(\frac{g}{2a\omega^2} \right)$$

Der *kleinstmögliche* Winkel ist $\varphi = 0^\circ$. Zu ihm gehört die folgende Winkelgeschwindigkeit ω_0 :

$$\cos 0^\circ = 1 = \frac{g}{2a\omega_0^2} \Rightarrow 2a\omega_0^2 = g \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

Erst ab einer Winkelgeschwindigkeit *oberhalb* von ω_0 bewegen sich die Arme erstmals nach außen. Der *größtmögliche* Winkel $\varphi_{\max} = 90^\circ$ wird dabei (theoretisch) für $\omega \rightarrow \infty$ erreicht. Bild II-36 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Winkel φ und der Winkelgeschwindigkeit ω , der auch durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \left(\frac{g}{2a\omega^2} \right) = \arccos \left(\underbrace{\frac{g}{2a}}_{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\omega^2} \right) = \arccos \left(\omega_0^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \right) = \arccos \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \\ &= \arccos \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right), \quad \omega \geq \omega_0 \end{aligned}$$

beschrieben werden kann.

Die Abbildung lässt deutlich erkennen, dass mit *zunehmender* Winkelgeschwindigkeit auch die Winkel *zunehmen*. Dies ist aus *physikalischer* Sicht einleuchtend, da die für das Abheben verantwortliche Zentrifugalkraft selbst mit der Winkelgeschwindigkeit *wächst*!

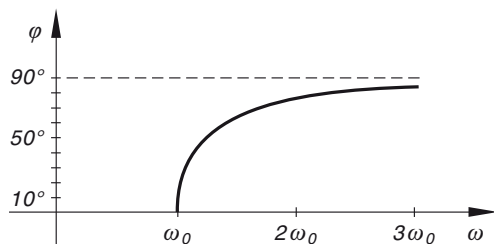


Bild II-36

Beispiel 19: Ladestrom in einer RC-Parallelschaltung
Exponentialfunktion (Abklingfunktion)

An die in Bild II-37 dargestellte *RC-Parallelschaltung* mit den ohmschen Widerständen R_1 und R_2 und einem Kondensator mit der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine Gleichspannung $U = 100 \text{ V}$ angelegt. Der *Ladestrom* i im *Hauptkreis* besitzt dann den folgenden *zeitlichen* Verlauf:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0 \quad (\tau = R_2 C: \text{Zeitkonstante})$$

- a) Bestimmen Sie die beiden *ohmschen Widerstände* R_1 und R_2 , die *Zeitkonstante* τ sowie die *Kapazität* C aus den drei *Messwerten*

$$i(t = 0 \text{ s}) = 15 \text{ A}, \quad i(t = 1 \text{ s}) = 5,2 \text{ A},$$

$$i_\infty = i(t \rightarrow \infty) = 5 \text{ A}^{5)}$$

und zeichnen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Stromstärke* i .

- b) Nach welcher Zeit t_1 hat der Ladestrom i um genau 10 % seines *Anfangswertes* abgenommen?

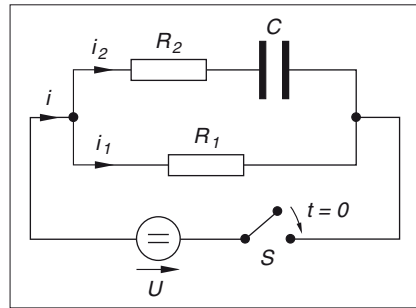


Bild II-37

Lehrbuch: Bd. 1, III.11.3.1

Lösung:

- a) Aus dem *Anfangswert* $i(t = 0 \text{ s}) = 15 \text{ A}$ und dem *Endwert* $i_\infty = 5 \text{ A}$ lassen sich die beiden Widerstände wie folgt berechnen:

$$i_\infty = 5 \text{ A} \Rightarrow \frac{100 \text{ V}}{R_1} + \frac{100 \text{ V}}{R_2} \cdot 0 = \frac{100 \text{ V}}{R_1} = 5 \text{ A} \Rightarrow R_1 = \frac{100 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 20 \Omega$$

$$(e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty)$$

$$i(t = 0 \text{ s}) = 15 \text{ A} \Rightarrow \frac{100 \text{ V}}{R_1} + \frac{100 \text{ V}}{R_2} \cdot e^0 = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} + \frac{100 \text{ V}}{R_2} = 15 \text{ A} \Rightarrow$$

$$5 \text{ A} + \frac{100 \text{ V}}{R_2} = 15 \text{ A} \Rightarrow \frac{100 \text{ V}}{R_2} = 10 \text{ A} \Rightarrow R_2 = \frac{100 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 10 \Omega$$

⁵⁾ Dieser Wert wird nach *unendlich* langer Zeit erreicht (*Endwert* der Stromstärke für $t \rightarrow \infty$).

Somit erhalten wir als Zwischenergebnis:

$$i(t) = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} + \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 \text{ A} + 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die *Zeitkonstante* τ bestimmen wir aus dem Messwert $i(t = 1 \text{ s}) = 5,2 \text{ A}$:

$$\begin{aligned} i(t = 1 \text{ s}) = 5,2 \text{ A} &\Rightarrow 5 \text{ A} + 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{1 \text{ s}}{\tau}} = 5,2 \text{ A} \Rightarrow \\ 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{1 \text{ s}}{\tau}} &= 0,2 \text{ A} \Rightarrow e^{-\frac{1 \text{ s}}{\tau}} = 0,02 \quad \left| \text{logarithmieren} \right. \Rightarrow \\ -\frac{1 \text{ s}}{\tau} &= \ln 0,02 = -3,9120 \Rightarrow \tau = \frac{1 \text{ s}}{3,9120} = 0,2556 \text{ s} \end{aligned}$$

Für die *Kapazität* C folgt dann aus $\tau = R_2 C$:

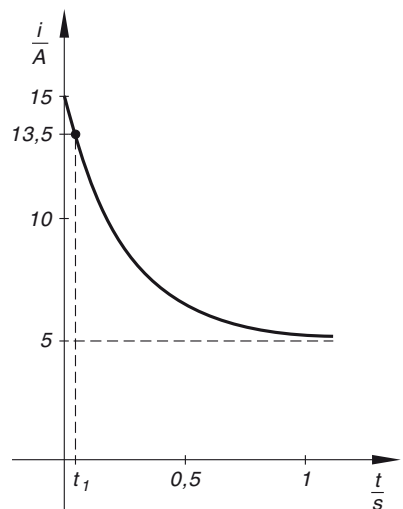
$$C = \frac{\tau}{R_2} = \frac{0,2556 \text{ s}}{10 \Omega} = 0,02556 \text{ F} = 25,56 \text{ mF}$$

Der *Ladestrom* $i(t)$ genügt damit folgendem Zeitgesetz (mit $t \geq 0 \text{ s}$):

$$\begin{aligned} i(t) &= 5 \text{ A} + 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0,2556 \text{ s}}} = \\ &= 5 \text{ A} + 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{3,9120 t}{\text{s}}} \end{aligned}$$

Bild II-38 zeigt den Verlauf dieser Funktion (*Abklingfunktion*).

Bild II-38



- b) Zur Zeit t_1 beträgt die Stromstärke $i(t = t_1) = 13,5 \text{ A}$ (90 % des Anfangswertes, siehe hierzu auch Bild II-38). Somit gilt:

$$5 \text{ A} + 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{3,9120 t_1}{\text{s}}} = 13,5 \text{ A}$$

Wir *isolieren* die e-Funktion und lösen anschließend die Exponentialgleichung durch *Logarithmierung*:

$$\begin{aligned} 10 \text{ A} \cdot e^{-\frac{3,9120 t_1}{\text{s}}} &= 8,5 \text{ A} \Rightarrow e^{-\frac{3,9120 t_1}{\text{s}}} = 0,85 \quad \left| \text{logarithmieren} \right. \Rightarrow \\ -\frac{3,9120 t_1}{\text{s}} &= \ln 0,85 = -0,1625 \Rightarrow t_1 = \frac{0,1625}{3,9120} \text{ s} = 0,0415 \text{ s} = 41,5 \text{ ms} \end{aligned}$$

Beispiel 20: RC-Glied mit Rampenspannung
Exponentialfunktion (Sättigungsfunktion)

An ein *RC-Glied* wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine *linear ansteigende Spannung* $u = kt$ angelegt⁶⁾ (Bild II-39). Die am *ohmschen Widerstand* R *abfallende Spannung* u_R strebt dabei nach dem *Zeitgesetz*

$$u_R(t) = k\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

gegen den *Endwert* $u_R(t \rightarrow \infty) = k\tau$.

C : Kapazität; $\tau = RC$: Zeitkonstante

- a) Skizzieren Sie diese *Sättigungsfunktion* im Zeitintervall
 $0 \leq t/s \leq 8$ für $R = 200 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ und
 $k = 50 \text{ V/s}$ bei einer Schrittweite von $\Delta t = 0,25 \text{ s}$.
- b) Nach welcher Zeit t_1 wird 50 % des *Endwertes* erreicht?

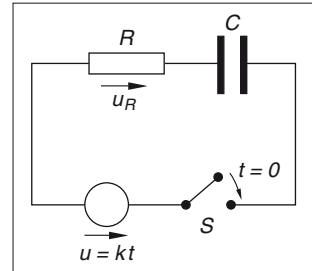


Bild II-39

Lehrbuch: Bd. 1, III.11.3.2

Lösung:

- a) *Zeitkonstante*: $\tau = RC = 200 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ }\mu\text{F} = 2 \cdot 10^5 \Omega \cdot 10^{-5} \text{ F} = 2 \text{ s}$

$$u_R(t) = 50 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} \left(1 - e^{-\frac{t}{2\text{s}}}\right) = 100 \text{ V} \left(1 - e^{-\frac{t}{2\text{s}}}\right), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

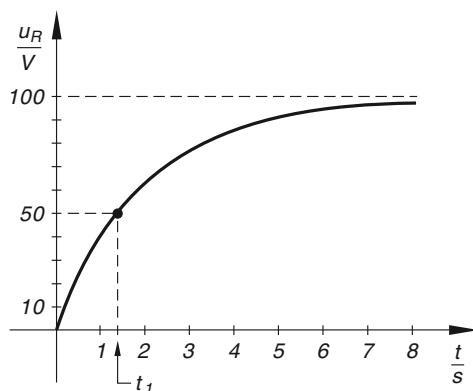
Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta t = 0,25 \text{ s}$)

$\frac{t}{\text{s}}$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$\frac{u_R}{\text{V}}$	0	11,75	22,12	31,27	39,35	46,47	52,76	58,31	63,21	67,53	71,35
$\frac{t}{\text{s}}$	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25
$\frac{u_R}{\text{V}}$	74,72	77,69	80,31	82,62	84,66	86,47	88,06	89,46	90,70	91,79	92,76
$\frac{t}{\text{s}}$	5,5	5,75	6	6,25	6,5	6,75	7	7,25	7,5	7,75	8
$\frac{u_R}{\text{V}}$	93,61	94,36	95,02	95,61	96,12	96,58	96,98	97,34	97,65	97,92	98,17

⁶⁾ Man bezeichnet eine solche Spannung auch als *Rampenspannung*.

Bild II-40 zeigt, wie die am ohmschen Widerstand abfallende Spannung mit der Zeit ansteigt und *asymptotisch* ihrem Endwert $u_R(t \rightarrow \infty \text{ s}) = 100 \text{ V}$ entgegen strebt.

Bild II-40



- b) Zur Zeit t_1 beträgt die Spannung $u_R(t = t_1) = 50 \text{ V}$ (50 % des Endwertes, siehe hierzu auch Bild II-40). Somit gilt:

$$100 \text{ V} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{2\text{s}}}\right) = 50 \text{ V} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t_1}{2\text{s}}} = 0,5$$

Wir *isolieren* die e-Funktion und lösen die Exponentialgleichung anschließend durch *Logarithmierung*:

$$e^{-\frac{t_1}{2\text{s}}} = 0,5 \quad \Big| \ln \Rightarrow -\frac{t_1}{2\text{s}} = \ln 0,5 = -0,6931 \Rightarrow t_1 = 1,386 \text{ s}$$

Beispiel 21: Aperiodischer Grenzfall einer Schwingung *Kriechfunktion (Exponentialfunktion)*

Das in Bild II-41 skizzierte *schwingungsfähige mechanische System*, bestehend aus einer Masse $m = 0,5 \text{ kg}$ und einer *elastischen Feder* mit der Federkonstanten $c = 128 \text{ N/m}$, wird in einer *zähen Flüssigkeit* so stark *gedämpft*, dass gerade der *aperiodische Grenzfall* eintritt. Das System ist daher infolge zu großer Energieverluste zu *keiner* echten Schwingung mehr fähig. Das *Weg-Zeit-Gesetz* dieser *Kriechbewegung* lässt sich dabei, wenn die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ aus der *Ruhe* heraus mit einer *anfänglichen Auslenkung* von $x(0 \text{ s}) = 20 \text{ cm}$ beginnt, durch die folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$x(t) = \left(320 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t + 20 \text{ cm}\right) \cdot e^{-\frac{16}{\text{s}}t}$$

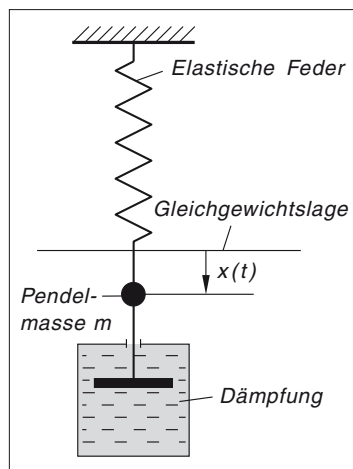


Bild II-41

Skizzieren Sie dieses Weg-Zeit-Gesetz im Zeitintervall $0 \leq t/\text{s} \leq 0,4$ mit Hilfe einer Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta t = 0,02 \text{ s}$).

Lehrbuch: Bd. 1, III.11.3.4

Lösung:

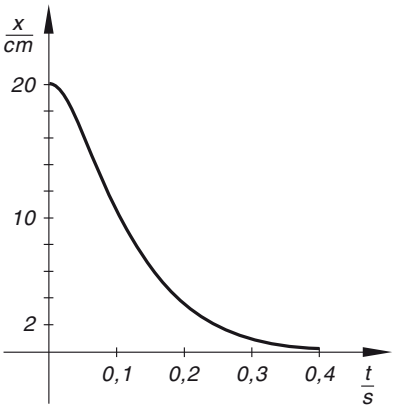
Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta t = 0,02 \text{ s}$)

$\frac{t}{\text{s}}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
$\frac{x}{\text{cm}}$	20	19,17	17,30	15,01	12,68	10,50	8,56	6,90	5,50	4,36	3,42

$\frac{t}{\text{s}}$	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40
$\frac{x}{\text{cm}}$	2,68	2,08	1,61	1,24	0,95	0,73	0,56	0,43	0,32	0,25

Bild II-42 zeigt deutlich, wie die Masse in kurzer Zeit aus der Anfangslage $x(0 \text{ s}) = 20 \text{ cm}$ in die Gleichgewichtslage (Ruhelage) $x = 0 \text{ cm}$ zurückkehrt (Kriechfall).

Bild II-42



Beispiel 22: Barometrische Höhenformel
Logarithmusfunktion

Zwischen *Luftdruck* p und *Höhe* h (gemessen gegenüber dem *Meeresniveau*) gilt unter der Annahme *konstanter* Lufttemperatur der folgende Zusammenhang (sog. *barometrische Höhenformel*):

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991 \text{ m}}}, \quad h \geq 0 \text{ m}$$

($p_0 = 1,013 \text{ bar}$: Luftdruck an der Erdoberfläche). In Bild II-43 ist der Verlauf dieser Funktion dargestellt (die Höhenangabe erfolgt dabei in der Einheit km).

- a) Geben Sie die *Höhe* h als Funktion des *Luftdruckes* p an (Übergang zur *Umkehrfunktion*) und *skizzieren* Sie diesen Funktionsverlauf.
- b) In welcher Höhe h_1 ist der Luftdruck auf die *Halfte* seines Maximalwertes p_0 gesunken?

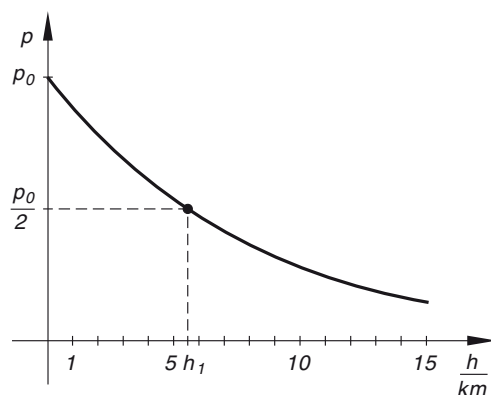


Bild II-43

Lehrbuch: Bd. 1, III.12.2

Lösung:

- a) Zunächst wird die e-Funktion *isoliert*, anschließend wird die Gleichung *logarithmiert*:

$$e^{-\frac{h}{7991 \text{ m}}} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow -\frac{h}{7991 \text{ m}} = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \Rightarrow h = -7991 \text{ m} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Die gesuchte Beziehung lautet somit:

$$h = h(p) = -7991 \text{ m} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -7,991 \text{ km} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Der Verlauf dieser streng monoton fallenden *Logarithmusfunktion* ist in Bild II-44 dargestellt.

- b) Der Druck $p_1 = p_0/2$ wird in der Höhe

$$h_1 = h(p_0/2) = -7991 \text{ m} \cdot \ln\left(\frac{p_0/2}{p_0}\right) = -7991 \text{ m} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5539 \text{ m}$$

erreicht (siehe auch Bild II-44). In der Höhe $h_1 = 5539 \text{ m} \approx 5,54 \text{ km}$ ist somit der Luftdruck nur noch *halb* so groß wie an der Erdoberfläche (Meeresniveau).

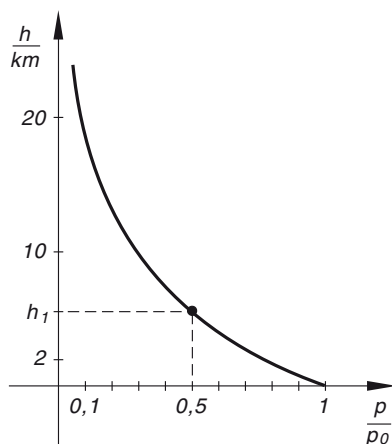


Bild II-44

Beispiel 23: Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Fallweg unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes
Hyperbelfunktionen

Wird beim *freien Fall* der Luftwiderstand durch eine dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit v proportionale *Reibungskraft* kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgenden komplizierten Zeitabhängigkeiten für den *Fallweg* s und die *Fallgeschwindigkeit* v ⁷⁾:

$$s(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right) \right] \quad (\text{mit } t \geq 0)$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right)$$

m : Masse des aus der Ruhe frei fallenden Körpers; $k > 0$: Reibungskoeffizient;
 g : Erdbeschleunigung

Wie lautet die Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* v vom *Fallweg* s ? Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion $v = v(s)$.

Lösungshinweis: Die *Zeitvariable* t der beiden Fallgesetze $s(t)$ und $v(t)$ lässt sich unter Verwendung bestimmter *hyperbolischer* Beziehungen *eliminieren* (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.11.2).

Lehrbuch: Bd. 1, III.13.1

Lösung:

Der besseren Übersicht wegen führen wir zunächst die *Abkürzung* $\alpha = \sqrt{\frac{gk}{m}}$ ein. Die Fallgesetze lauten dann:

$$s(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln [\cosh(\alpha t)] \quad \text{und} \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh(\alpha t)$$

Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* lässt sich unter Verwendung der aus der *Formelsammlung* (Abschnitt III.11.2) entnommenen *hyperbolischen Beziehung*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 x}}$$

auch wie folgt darstellen ($x = \alpha t$):

⁷⁾ Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v(t)$ wurde bereits im *Lehrbuch* hergeleitet (siehe Bd. 1, Abschnitt V.10.1.1, Beispiel 2). In Kapitel IV, Beispiel 21 zeigen wir, wie man aus dem *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v(t)$ mittels *Integration* das *Weg-Zeit-Gesetz* $s(t)$ erhält.

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh(\alpha t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(\alpha t)}}$$

Nun lösen wir das *Weg-Zeit-Gesetz* durch *Entlogarithmierung* nach der hyperbolischen Funktion $\cosh(\alpha t)$ auf:

$$\ln[\cosh(\alpha t)] = \frac{k}{m} s \Rightarrow \cosh(\alpha t) = e^{\frac{k}{m}s}$$

Die gewünschte Beziehung zwischen der *Fallgeschwindigkeit* v und dem *Fallweg* s erhalten wir dann durch Einsetzen dieses Ausdruckes in das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*:

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\left(e^{\frac{k}{m}s}\right)^2}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e^{\frac{2k}{m}s}}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}$$

Nach *unendlich langer* Fallstrecke ($s \rightarrow \infty$) erreicht die Fallgeschwindigkeit ihren *Endwert* v_E . Er beträgt:

$$\begin{aligned} v_E &= \lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}} = \\ &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \underbrace{\sqrt{\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s}\right)}}_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \end{aligned}$$

Gewicht (Gravitationskraft) und *Luftwiderstand* sind jetzt im *Gleichgewicht*:

$$mg = kv_E^2$$

Der Körper fällt mit der *konstanten* Endgeschwindigkeit $v_E = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Das *Fallgesetz* $v(s)$ lässt sich damit auch in der Form

$$v(s) = v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}, \quad s \geq 0$$

darstellen. Bild II-45 zeigt den Verlauf dieser Funktion.

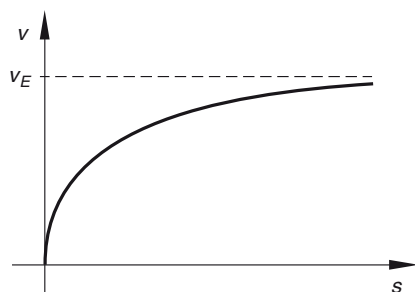


Bild II-45

III Differentialrechnung

Beispiel 1: Induktionsspannung in einer Leiterschleife Elementare Differentiation

Eine u-förmig gebogene *Leiterschleife* wird von einem *homogenen* Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} *senkrecht* durchflutet (Bild III-1). Auf der Leiterschleife gleitet in der eingezeichneten Weise ein *Leiter*, dessen Geschwindigkeit v aus der Ruhe heraus mit der Zeit t *linear* ansteigt.

Bestimmen Sie die nach dem *Induktionsgesetz* [A12] in der Leiterschleife *induzierte Spannung* U .

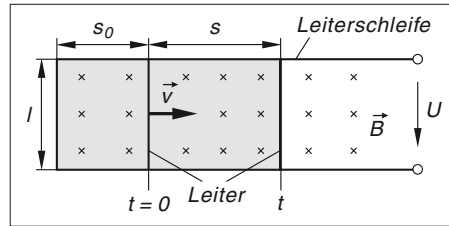


Bild III-1

l : Breite der Leiterschleife; s_0 : Anfangslage des Leiters zu Beginn der Bewegung, d. h. zur Zeit $t = 0$

Lehrbuch: Bd. 1, IV.1.3

Physikalische Grundlagen: A11, A12

Lösung:

Der Leiter bewegt sich aus der Ruhe heraus mit *linear* ansteigender Geschwindigkeit, unterliegt demnach einer *konstanten* Beschleunigung a . Somit ist $v = at$ und der vom Leiter in der Zeit t zurückgelegte Weg beträgt $s = \frac{1}{2} at^2$. Die vom Magnetfeld zu diesem Zeitpunkt *durchflutete* Fläche A (in Bild III-1 *grau* unterlegt) ist ein Rechteck mit den Seitenlängen l und $s_0 + s = s_0 + \frac{1}{2} at^2$ und dem *Flächeninhalt*

$$A = l(s_0 + s) = l \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right)$$

Der *magnetische Fluss* [A11] durch diese Fläche ist dann

$$\Phi = BA = Bl \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) \quad (\text{mit } B = |\vec{B}|)$$

Nach dem *Induktionsgesetz* [A12] beträgt die in der Leiterschleife *induzierte Spannung*

$$\begin{aligned} U &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[Bl \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) \right] = Bl \cdot \frac{d}{dt} \left(s_0 + \frac{1}{2} at^2 \right) = \\ &= Bl(0 + at) = Blat = (\text{const.}) \cdot t \quad (\text{mit } Bla = \text{const.}) \end{aligned}$$

Die Induktionsspannung steigt somit mit der Zeit *linear* an (Bild III-2).

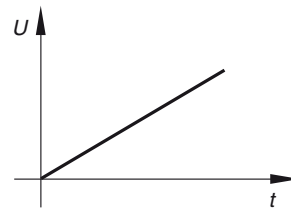
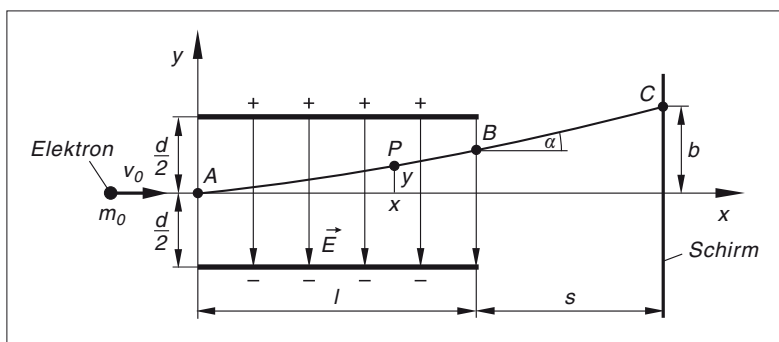


Bild III-2

Beispiel 2: Elektronenstrahl-Oszilloskop*Elementare Differentiation, Tangentengleichung*

Beim *Elektronenstrahl-Oszilloskop* werden die von einer Glühkathode ausgesandten Elektronen zunächst auf eine *konstante* Geschwindigkeit v_0 beschleunigt und treten dann *senkrecht* zu den elektrischen Feldlinien in einen auf die Spannung U aufgeladenen *Plattenkondensator* ein, wo sie aus ihrer ursprünglichen Richtung *abgelenkt* werden (Bild III-3).

**Bild III-3**

d : Plattenabstand; l : Länge der Kondensatorplatten; e : Elementarladung des Elektrons; m_0 : Ruhemasse des Elektrons

- Unter welchem *Ablenkwinkel* α (gegenüber der Eintrittsrichtung, also der x -Richtung gemessen) verlassen die Elektronen den Kondensator?
- Im Abstand s hinter dem Kondensator befindet sich ein Auffangschirm für die Elektronen. Wie groß ist die *seitliche Ablenkung* b der Elektronen auf diesem Schirm, gemessen gegenüber der ursprünglichen Flugbahn vor dem Eintritt in den Kondensator?

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst die *Bahnkurve* der Elektronen innerhalb des Plattenkondensators.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.1.3 und IV.3.1

Physikalische Grundlagen: A10, A25, A27

Lösung:

- Die Elektronenbewegung im Plattenkondensator setzt sich aus *zwei* voneinander *unabhängigen* Teilbewegungen zusammen. In der x -Richtung bewegt sich das Elektron mit der *konstanten* Geschwindigkeit v_0 , der im Zeitraum t in dieser Richtung zurückgelegte Weg beträgt somit

$$x = v_0 t$$

(der Eintritt des Elektrons in das Kondensatorfeld erfolgt im Punkt A zur Zeit $t = 0$). In der y -Richtung wird das Elektron infolge des elektrischen Feldes mit der Feldstärke $E = U/d$ nach oben (in Richtung der positiv geladenen Kondensatorplatte) *beschleunigt* [A25].

Das Feld wirkt dabei mit der Kraft $F_e = eE = (eU)/d$ auf das Elektron ein [A10]. Für die *konstante* Elektronenbeschleunigung a folgt aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]:

$$m_0 a = F_e = eE = \frac{eU}{d} \Rightarrow a = \frac{eU}{m_0 d}$$

Der in der Zeit t in y -Richtung zurückgelegte Weg beträgt daher

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{m_0 d} \cdot t^2 = \frac{eU}{2m_0 d} \cdot t^2$$

Die *Parameterdarstellung* der vom Elektron durchlaufenen *Bahnkurve* lautet somit innerhalb des Plattenkondensators

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{eU}{2m_0 d} \cdot t^2, \quad t \geq 0$$

Durch *Eliminierung* des Zeitparameters t erhalten wir hieraus die *parabelförmige* Bahnkurve mit der Gleichung ¹⁾

$$y = \frac{eU}{2m_0 d} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{eU}{2m_0 d v_0^2} \cdot x^2, \quad 0 \leq x \leq l$$

Im Punkt B mit den Koordinaten

$$x_B = l, \quad y_B = \frac{eU}{2m_0 d v_0^2} \cdot l^2 = \frac{eU l^2}{2m_0 d v_0^2}$$

verlässt das Elektron den Kondensator und bewegt sich nun bis zum Auftreffen auf dem Schirm *geradlinig* auf der *Bahntangente* des Punktes B ²⁾. Die *1. Ableitung* der Bahnkurve an dieser Stelle ist definitionsgemäß der *Tangens* des gesuchten Ablenkwinkels α :

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{eU}{2m_0 d v_0^2} \cdot x^2 \right) = \frac{eU}{m_0 d v_0^2} \cdot 2x = \frac{eU}{m_0 d v_0^2} \cdot x \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = y'(x = l) = \frac{eU}{m_0 d v_0^2} \cdot l = \frac{eU l}{m_0 d v_0^2}$$

Durch Auflösung nach α folgt hieraus der gesuchte Ablenkwinkel:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{eU l}{m_0 d v_0^2} \right)$$

¹⁾ Die 1. Parametergleichung wird nach t aufgelöst, der gefundene Ausdruck $t = x/v_0$ anschließend in die 2. Gleichung eingesetzt.

²⁾ Dies gilt nur unter der Voraussetzung $y_B < d/2$, die Kondensatorspannung U muss daher die Bedingung $U < \frac{m_0 d^2 v_0^2}{e l^2}$ erfüllen! Ansonsten trifft das Elektron auf die obere Kondensatorplatte.

- b) Das Elektron bewegt sich von B nach C *geradlinig* auf der *Kurventangente* des Punktes B . Diese lautet in der *Punkt-Steigungsform* wie folgt:

$$\frac{y - y_B}{x - x_B} = y'(x_B) = y'(x = l) \Rightarrow \frac{y - \frac{eUl^2}{2m_0 d v_0^2}}{x - l} = \frac{eUl}{m_0 d v_0^2}$$

Wir lösen diese Gleichung nach y auf:

$$\begin{aligned} y - \frac{eUl^2}{2m_0 d v_0^2} &= \frac{eUl}{m_0 d v_0^2} (x - l) = \frac{eUl}{m_0 d v_0^2} \cdot x - \frac{eUl^2}{m_0 d v_0^2} \Rightarrow \\ y &= \frac{eUl}{m_0 d v_0^2} \cdot x - \frac{eUl^2}{m_0 d v_0^2} + \frac{eUl^2}{2m_0 d v_0^2} = \frac{eUl}{m_0 d v_0^2} \cdot x - \frac{eUl^2}{2m_0 d v_0^2} = \\ &= \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} \cdot 2x - \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} \cdot l = \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} (2x - l), \quad l \leq x \leq l + s \end{aligned}$$

Im Auftreffpunkt $C = (l + s; b)$ ist dann

$$\begin{aligned} b = y(x = l + s) &= \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} [2(l + s) - l] = \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} (2l + 2s - l) = \\ &= \frac{eUl}{2m_0 d v_0^2} (l + 2s) = \frac{eUl(l + 2s)}{2m_0 d v_0^2} \end{aligned}$$

Beispiel 3: Querkraft- und Momentenverlauf längs eines belasteten Trägers

Elementare Differentiation

Der in Bild III-4a) skizzierte einseitig eingespannte Träger der Länge l wird durch eine *konstante* Streckenlast $q(x) = q_0$ und zusätzlich am freien Ende durch eine Kraft F belastet. Die Gleichung der *elastischen Linie* (Biegelinie) lautet dann im Intervall $0 \leq x \leq l$ wie folgt:

$$y(x) = \frac{1}{24EI} [q_0(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2) - 4F(x^3 - 3lx^2)]$$

(Bild III-4b)).

EI : konstante Biegesteifigkeit des Trägers

E : Elastizitätsmodul

I : Flächenmoment des Trägerquerschnitts

Bestimmen und skizzieren Sie den Verlauf des *Biegemomentes* $M_b(x)$ und der *Querkraft* $Q(x)$ längs des Trägers.

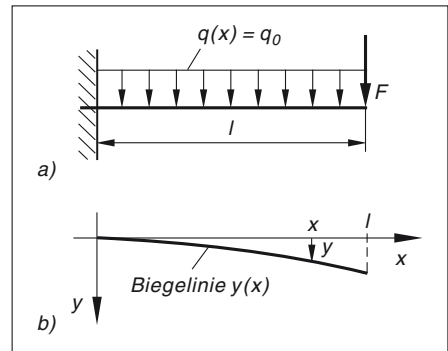


Bild III-4

Lösungshinweis: Gehen Sie bei der Lösung der Aufgabe von der *Biegegleichung* [A28] aus, die den Zusammenhang zwischen dem Biegemoment $M_b(x)$ und der Biegelinie $y(x)$ herstellt.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.1.3

Physikalische Grundlagen: A28, A29

Lösung:

Nach der *Biegegleichung* [A28] besteht der folgende Zusammenhang zwischen dem *Biegemoment* $M_b(x)$ und der *Biegelinie* $y(x)$:

$$M_b(x) = -EI \cdot y''(x)$$

Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{24EI} [q_0(4x^3 - 12lx^2 + 12l^2x) - 4F(3x^2 - 6lx)] = \\ &= \frac{1}{6EI} [q_0(x^3 - 3lx^2 + 3l^2x) - 3F(x^2 - 2lx)] \\ y''(x) &= \frac{1}{6EI} [q_0(3x^2 - 6lx + 3l^2) - 3F(2x - 2l)] = \\ &= \frac{1}{2EI} [q_0(\underbrace{x^2 - 2lx + l^2}_{(x-l)^2}) - 2F(x-l)] = \frac{1}{2EI} [q_0(x-l)^2 - 2F(x-l)] \end{aligned}$$

erhalten wir daraus für das *Biegemoment* den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} M_b(x) &= -EI \cdot y''(x) = -EI \cdot \frac{1}{2EI} [q_0(x-l)^2 - 2F(x-l)] = \\ &= -\frac{1}{2} [q_0(x-l)^2 - 2F(x-l)], \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Der *parabelförmige* Verlauf des Biegemomentes längs des Trägers ist in Bild III-5 dargestellt. Zwischen der *Querkraft* $Q(x)$ und dem *Biegemoment* $M_b(x)$ besteht die Beziehung $Q(x) = M'_b(x)$ [A29]. Somit gilt im Intervall $0 \leq x \leq l$:

$$Q(x) = M'_b(x) = -\frac{1}{2} [2q_0(x-l) - 2F] = -q_0(x-l) + F = q_0(l-x) + F$$

Die Querkraft nimmt daher längs des Trägers *linear* ab (Bild III-6).

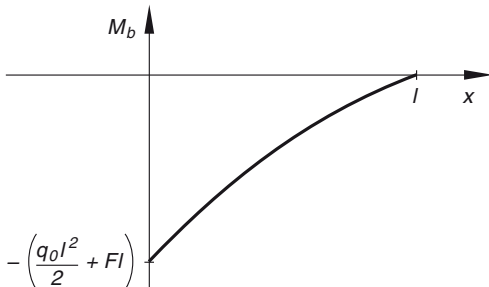


Bild III-5 Biegemoment $M_b(x)$

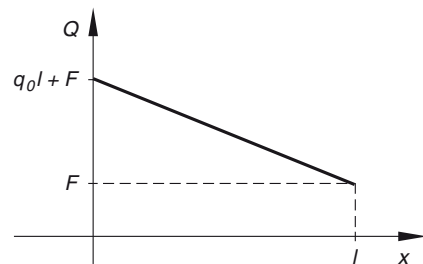


Bild III-6 Querkraft $Q(x)$

Beispiel 4: Rotierende Zylinderscheibe in einer zähen Flüssigkeit
Differentiation (Kettenregel)

Eine Zylinderscheibe rotiert in einer zähen Flüssigkeit nach dem „Weg-Zeit-Gesetz“

$$\varphi(t) = \frac{1}{k} \cdot \ln(k\omega_0 t + 1), \quad t \geq 0$$

φ ist dabei der *Drehwinkel* zur Zeit t (Bild III-7), k und ω_0 sind *positive* Konstanten.

- a) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der *Winkelgeschwindigkeit* $\omega = \dot{\varphi}$ und der *Winkelbeschleunigung* $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Welche physikalische Bedeutung hat die Konstante ω_0 ?
- b) Welcher funktionale Zusammenhang besteht zwischen der *Winkelbeschleunigung* α und der *Winkelgeschwindigkeit* ω ? Welche physikalische Bedeutung kommt dabei der Konstanten k zu?

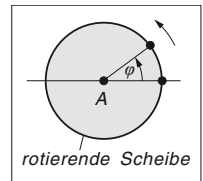


Bild III-7

Lehrbuch: Bd. 1, IV.2.5

Physikalische Grundlagen: A30

Lösung:

- a) Unter Verwendung der *Kettenregel* erhalten wir für die *Winkelgeschwindigkeit* [A30]

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k} \cdot \ln(k\omega_0 t + 1) \right] = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k\omega_0 t + 1} \cdot k\omega_0 = \frac{\omega_0}{k\omega_0 t + 1}$$

Die Konstante ω_0 ist die Winkelgeschwindigkeit zu *Beginn* der Drehbewegung, d. h. zur Zeit $t = 0$: $\omega(0) = \omega_0$. Für die *Winkelbeschleunigung* α folgt durch *nochmalige* Differentiation unter Verwendung der *Kettenregel* [A30]

$$\begin{aligned} \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_0}{k\omega_0 t + 1} \right] = \omega_0 \cdot \frac{d}{dt} (k\omega_0 t + 1)^{-1} = \\ &= \omega_0 (-1) (k\omega_0 t + 1)^{-2} \cdot k\omega_0 = - \frac{k\omega_0^2}{(k\omega_0 t + 1)^2} \end{aligned}$$

Der *zeitliche* Verlauf von ω und α ist in den Bildern III-8 und III-9 dargestellt.

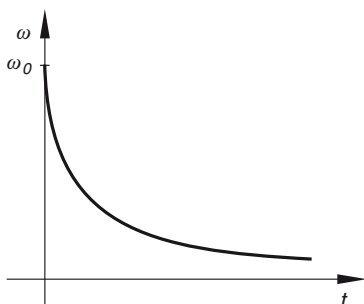


Bild III-8

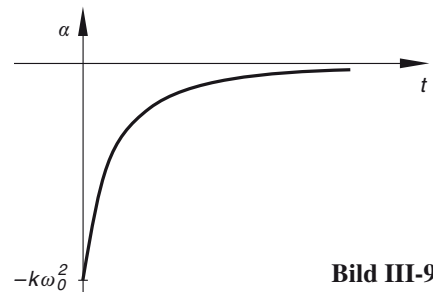


Bild III-9

b) Die Gleichung für die Winkelbeschleunigung α lässt sich wie folgt umstellen:

$$\alpha = -\frac{k\omega_0^2}{(k\omega_0 t + 1)^2} = -k\frac{\omega_0^2}{(k\omega_0 t + 1)^2} = -k\underbrace{\left(\frac{\omega_0}{k\omega_0 t + 1}\right)^2}_{\omega} = -k\omega^2$$

Physikalische Deutung: Die rotierende Scheibe wird verzögert (negative Winkelbeschleunigung!), Verzögerung und Bremskraft (Reibungskraft) sind dem *Quadrat* der Winkelgeschwindigkeit *proportional*. Die Konstante k ist somit der *Reibungskoeffizient*.

Beispiel 5: Kurbeltrieb

Differentiation (Kettenregel)

Mit dem in Bild III-10 dargestellten *Kurbeltrieb* lässt sich eine *Kreisbewegung* in eine (periodische) *geradlinige* Bewegung umwandeln und umgekehrt. Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf

- a) des Kolbenweges x ,
 b) der Kolbengeschwindigkeit v und der Kolbenbeschleunigung a bei gleichmäßiger Drehung der Kurbel (Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω).

l : Länge der Schubstange

r : Radius der Kurbel

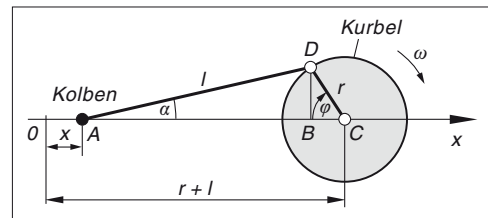


Bild III-10

Lösungshinweis: Drücken Sie zunächst den Kolbenweg x durch den Winkel φ aus und entwickeln Sie den dabei auftretenden Wurzelausdruck mit Hilfe der *Binomischen Reihe*. Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem *zweiten* Glied erhalten Sie eine *Näherungsfunktion* für x , mit der Sie dann weiterarbeiten.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.2.5 und VI.3.2.3

Lösung:

a) Aus Bild III-10 entnehmen wir für den Kolbenweg

$$x = \overline{OC} - \overline{AC} = r + l - (\overline{AB} + \overline{BC}) = r + l - \overline{AB} - \overline{BC}$$

Weiter folgt aus den beiden *rechtwinkligen* Dreiecken ABD und BCD

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{l} \Rightarrow \overline{AB} = l \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{BC}}{r} \Rightarrow \overline{BC} = r \cdot \cos \varphi$$

Somit ist

$$x = r + l - \overline{AB} - \overline{BC} = r + l - l \cdot \cos \alpha - r \cdot \cos \varphi$$

Der *Hilfswinkel* α lässt sich noch durch den Winkel φ ausdrücken. Zunächst folgt durch Anwendung des *Sinussatzes* (Formelsammlung, Abschnitt I.6.6) im Dreieck ACD

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{r}{l} = \lambda \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = \lambda \cdot \sin \varphi$$

($\lambda = r/l$ ist das sog. *Schubstangenverhältnis*). Aus dem „trigonometrischen Pythagoras“ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ erhalten wir dann unter Berücksichtigung dieser Beziehung

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Der *Kolbenweg* beträgt somit in Abhängigkeit vom Winkel φ

$$x = r + l - l \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} - r \cdot \cos \varphi$$

Den Wurzelausdruck entwickeln wir mit Hilfe der *Binomischen Reihe*

$$\sqrt{1 - z} = (1 - z)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 - \dots$$

(Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4). Mit $z = \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$ folgt hieraus durch *Abbruch* der Reihe nach dem *zweiten* Glied³⁾:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

Damit erhalten wir für den Kolbenweg die folgende *Näherungsfunktion*:

$$\begin{aligned} x &= r + l - l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi \right) - r \cdot \cos \varphi = \\ &= r + l - l + \frac{1}{2} l \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi - r \cdot \cos \varphi = r + \frac{1}{2} l \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi - r \cdot \cos \varphi = \\ &= r + \frac{1}{2} \underbrace{(l \lambda)}_r \lambda \cdot \sin^2 \varphi - r \cdot \cos \varphi = r + \frac{1}{2} r \lambda \cdot \sin^2 \varphi - r \cdot \cos \varphi = \\ &= r \left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2 \varphi \right) \end{aligned}$$

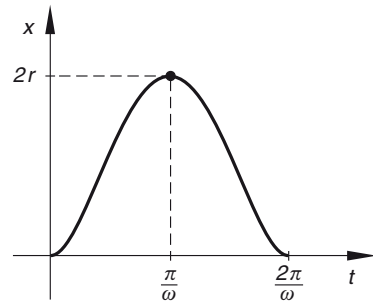
(aus $\lambda = r/l$ folgt $l \lambda = r$). Wegen der *gleichmäßigen* Drehung der Kurbel ist $\varphi = \omega t$ und das *Weg-Zeit-Gesetz* für den Kolben lautet damit

$$x(t) = r \left(1 - \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2(\omega t) \right), \quad t \geq 0$$

³⁾ Diese Näherung ist in der Praxis meist gerechtfertigt, da $\lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi \ll 1$ ist.

Bild III-11 zeigt den Verlauf dieser *periodischen* Funktion im Periodenintervall $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$.

Bild III-11



- b) Aus dem *Weg-Zeit-Gesetz* $x(t)$ erhalten wir durch *Differentiation* nach der Zeit t unter Verwendung der *Kettenregel* das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t) = r(0 + \omega \cdot \sin(\omega t) + \lambda \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)) = \\ &= r\omega \left(\sin(\omega t) + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin(2\omega t) \right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir von der *trigonometrischen Formel* $\sin(2\omega t) = 2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$ Gebrauch gemacht (Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3). Durch *nochmalige* Differentiation nach der Zeit (abermals nach der *Kettenregel*) folgt für die *Beschleunigung*

$$\begin{aligned} a(t) &= \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = r\omega(\omega \cdot \cos(\omega t) + \lambda \omega \cdot \cos(2\omega t)) = \\ &= r\omega^2(\cos(\omega t) + \lambda \cdot \cos(2\omega t)), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 6: Zusammenhang zwischen Fallbeschleunigung und Fallweg unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes
Differentiation (Kettenregel)

Wird beim *freien Fall* der Luftwiderstand in Form einer dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit v *proportionalen* Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgende funktionale Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* v vom *Fallweg* s ⁴⁾:

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}} \right)}, \quad s \geq 0$$

m : Masse des aus der Ruhe heraus frei fallenden Körpers; g : Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche; $k > 0$: Reibungskoeffizient

⁴⁾ Diese Beziehung wird in Kapitel II, Übung 23 aus den *Zeitabhängigkeiten* von v und s und in Kapitel IV, Übung 14 durch *Integration* des *Newtonschen Grundgesetzes* hergeleitet.

Leiten Sie hieraus unter Verwendung der *Kettenregel* den funktionalen Zusammenhang zwischen der *Fallbeschleunigung* a und dem *Fallweg* s her und *skizzieren* Sie diese Funktion. Welches Ergebnis erhält man im Grenzfall $k \rightarrow 0$ (luftleerer Raum)?

Lehrbuch: Bd. 1, IV.2.5

Lösung:

Es ist *definitionsgemäß* $a = \frac{dv}{dt}$, wobei die Geschwindigkeit v über den Weg s von der Zeit t abhängt (*zusammengesetzte Funktion*). Nach der *Kettenregel* folgt dann

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = \frac{dv}{ds} \cdot v = v \cdot \frac{dv}{ds} \quad \left(\text{mit } v = \frac{ds}{dt} \right)$$

Wir differenzieren nun die vorgegebene Funktion $v(s)$ unter Verwendung der *Kettenregel* nach der Variablen s und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}} \right)} \right) = \frac{1}{2 \underbrace{\sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}} \right)}}_v} \cdot \frac{mg}{k} \cdot \frac{2k}{m} \cdot e^{-\frac{2ks}{m}} = \\ &= \frac{1}{2v} \cdot 2g \cdot e^{-\frac{2ks}{m}} = \frac{g}{v} \cdot e^{-\frac{2ks}{m}} \end{aligned}$$

Die gesuchte Beziehung zwischen der Fallbeschleunigung a und dem Fallweg s lautet somit:

$$a = v \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \frac{g}{v} \cdot e^{-\frac{2ks}{m}} = g \cdot e^{-\frac{2ks}{m}}, \quad s \geq 0$$

Die Fallbeschleunigung ist *keine* Konstante mehr, sondern nimmt infolge des Luftwiderstandes mit *zunehmendem* Fallweg nach einem *Exponentialgesetz* gegen *null* ab (Bild III-12).

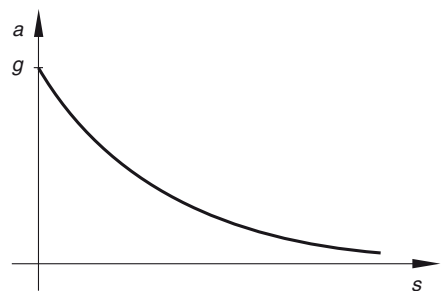


Bild III-12

Sonderfall $k \rightarrow 0$ (luftleerer Raum):

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} \left(g \cdot e^{-\frac{2ks}{m}} \right) = g \cdot \lim_{k \rightarrow 0} e^{-\frac{2s}{m}k} = g \cdot e^0 = g \cdot 1 = g$$

Die Fallbeschleunigung (Erdbeschleunigung) ist im luftleeren Raum eine Konstante.

Beispiel 7: Periodische Bewegung eines Massenpunktes
Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors

Die Bewegung eines *Massenpunktes* in der x, y -Ebene erfolge auf der durch den von der Zeit t abhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin^2(\omega t) \\ b \cdot \cos^2(\omega t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

beschriebenen Bahn (a, b und ω sind positive Konstanten).

- a) Wie lautet die Gleichung der *Bahnkurve* in der *expliziten* Form $y = y(x)$? Untersuchen Sie die wesentlichen Eigenschaften dieser Bewegung.
- b) Wie lauten *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v}(t)$ und *Beschleunigungsvektor* $\vec{a}(t)$, wie groß sind ihre *Beträge*? In welchen Punkten erreichen sie ihren *kleinsten* bzw. *größten* Wert?

Lehrbuch: Bd. 1, IV.2.5 und Bd. 3, I.1.2

Lösung:

- a) Die Koordinaten $x = a \cdot \sin^2(\omega t)$ und $y = b \cdot \cos^2(\omega t)$ sind *periodische* Funktionen der Zeit mit der Periode $p = \pi/\omega$. Daher ist auch die *Gesamtbewegung* periodisch mit $p = \pi/\omega$. Wir lösen die Koordinatengleichungen nach der jeweiligen trigonometrischen Funktion auf und setzen die gefundenen Ausdrücke in den „trigonometrischen Pythagoras“ ein (Formelsammlung, Abschnitt III.7.5):

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Die *Bahnkurve* ist somit ein *Geradenstück* mit den Achsenabschnitten a und b (Bild III-13). In *expliziter* Form lautet die Geradengleichung

$$y = -\frac{b}{a}(x - a), \quad 0 \leq x \leq a$$

Der Massenpunkt bewegt sich dabei in der Zeit $T = p = \pi/\omega$ vom „Startpunkt“ A aus bis zum Punkt B und zurück zum Punkt A . Dann beginnt die *periodische* Bewegung von *neuem*. Die Bewegung kann daher als eine *Schwingung* zwischen den *extremen* Lagen A und B mit der Schwingungsdauer $T = \pi/\omega$ aufgefasst werden.

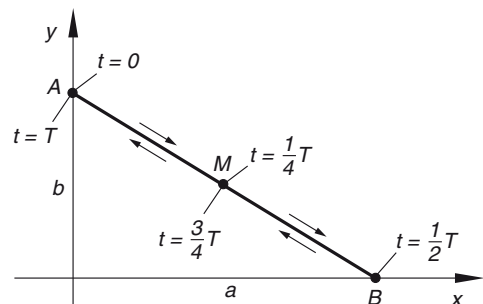


Bild III-13

b) Unter Verwendung der *Kettenregel* folgt durch *komponentenweise* Differentiation:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \cdot \sin^2(\omega t) \\ b \cdot \cos^2(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \\ -2b\omega \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a\omega \cdot \sin(2\omega t) \\ -b\omega \cdot \sin(2\omega t) \end{pmatrix} = \omega \cdot \sin(2\omega t) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

$(2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \sin(2\omega t)$, siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3)

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \omega |\sin(2\omega t)| \cdot \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \omega \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\sin(2\omega t)|$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\omega \cdot \sin(2\omega t) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right] = \omega \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} [\sin(2\omega t)] = \\ &= \omega \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \cdot \cos(2\omega t) \cdot 2\omega = 2\omega^2 \cdot \cos(2\omega t) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = 2\omega^2 |\cos(2\omega t)| \cdot \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 2\omega^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\cos(2\omega t)|$$

Wir untersuchen nun die Bewegung im *Periodenintervall* $0 \leq t \leq T$ mit $T = \pi/\omega$. Die *Umkehrpunkte* A und B und die *Mitte* M werden dabei zu den folgenden Zeiten erreicht (siehe hierzu Bild III-13):

Zeit t	0	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{3}{4}T$	T
Punkt	A	M	B	M	A

Bild III-14 zeigt den *zeitlichen* Verlauf der *Geschwindigkeit* v . Sie ist in beiden *Umkehrpunkten* (A, B) jeweils *null* und erreicht ihren *Maximalwert* $v_{\max} = \omega \sqrt{a^2 + b^2}$ in der *Bahnmitte* M . Bei der *Beschleunigung* ist es genau *umgekehrt* (Bild III-15). In den beiden *Umkehrpunkten* erreicht sie ihren *größten* Wert $a_{\max} = 2\omega^2 \sqrt{a^2 + b^2}$, in der *Mitte* ist sie *null*.

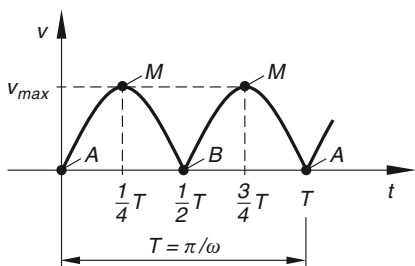


Bild III-14

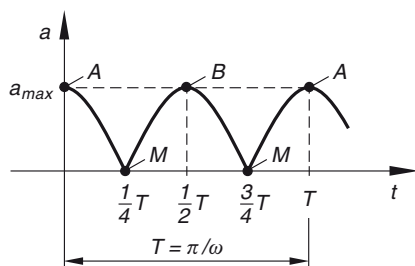
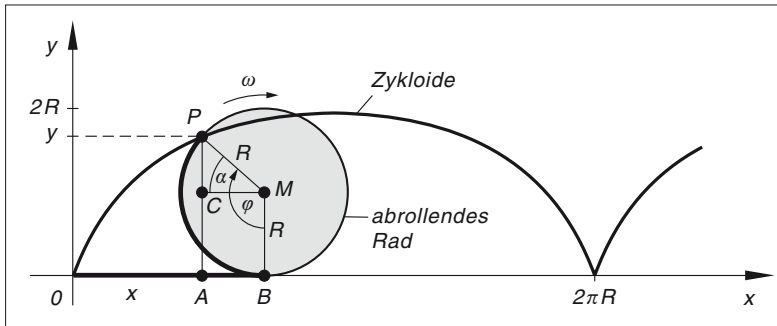


Bild III-15

Beispiel 8: Rollkurve oder gewöhnliche Zykloide*Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors*

Ein Rad vom Radius R rollt auf einer Geraden mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Bei dieser Bewegung beschreibt ein Punkt P auf dem Umfang des abrollenden Rades (Kreises) eine als Rollkurve oder gewöhnliche Zykloide bezeichnete periodische Bahnkurve (Bild III-16).

**Bild III-16**

- Beschreiben Sie diese ebene Kurve durch einen vom „Wälzwinkel“ $\varphi = \omega t$ bzw. vom Zeitparameter t abhängigen Ortsvektor $\vec{r}(t)$.
- Wie lauten Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ und Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$?
- Zu welchen Zeiten erreicht die Geschwindigkeit dem Betrage nach ihren kleinsten bzw. größten Wert. Welchen Punkten der Zykloide entsprechen diese Zeiten?

Hinweis: Die Rollbewegung des Rades beginnt zur Zeit $t = 0$, der Punkt P befindet sich dann im Koordinatenursprung.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.2.5 und Bd. 3, I.1.2

Lösung:

- Für die Koordinaten x und y des Punktes P erhalten wir aus Bild III-16 die folgenden Beziehungen:

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{CM} \quad (\overline{AB} = \overline{CM})$$

$$y = \overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP} = \overline{BM} + \overline{CP} = R + \overline{CP} \quad (\overline{AC} = \overline{BM} = R)$$

Aus der Abrollbedingung folgt für die Strecke \overline{OB} :

$$\overline{OB} = \widehat{BP} = R\varphi$$

(diese Strecken sind im Bild dick gezeichnet). Die Strecken \overline{CM} und \overline{CP} lassen sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MPC berechnen ($\overline{MP} = R$; α ist ein Hilfswinkel):

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{CM}}{R} \Rightarrow \overline{CM} = R \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CP}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{CP}}{R} \Rightarrow \overline{CP} = R \cdot \sin \alpha$$

Mit $\alpha = \varphi - 90^\circ$ und unter Verwendung der *Additionstheoreme* (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.1) wird hieraus

$$\begin{aligned} \overline{CM} &= R \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos (\varphi - 90^\circ) = \\ &= R (\underbrace{\cos \varphi \cdot \cos 90^\circ}_0 + \underbrace{\sin \varphi \cdot \sin 90^\circ}_1) = R \cdot \sin \varphi \\ \overline{CP} &= R \cdot \sin \alpha = R \cdot \sin (\varphi - 90^\circ) = \\ &= R (\underbrace{\sin \varphi \cdot \cos 90^\circ}_0 - \underbrace{\cos \varphi \cdot \sin 90^\circ}_1) = -R \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Die *Parameterdarstellung* der Rollkurve mit dem *Wälzwinkel* φ als Parameter lautet damit

$$\left. \begin{aligned} x &= \overline{OB} - \overline{CM} = R\varphi - R \cdot \sin \varphi = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y &= R + \overline{CP} = R - R \cdot \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \varphi \geq 0$$

Mit $\varphi = \omega t$ wird daraus der *zeitabhängige Ortsvektor*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ R(1 - \cos(\omega t)) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \omega t - \sin(\omega t) \\ 1 - \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

- b) Wir differenzieren (unter Verwendung der *Kettenregel*) den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ *komponentenweise* nach der Zeit t und erhalten den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R \begin{pmatrix} \omega - \omega \cdot \cos(\omega t) \\ 0 + \omega \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} 1 - \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

mit dem *Betrag*

$$\begin{aligned} v(t) &= |\vec{v}(t)| = \omega R \sqrt{[1 - \cos(\omega t)]^2 + \sin^2(\omega t)} = \\ &= \omega R \sqrt{1 - 2 \cdot \cos(\omega t) + \underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_1} = \omega R \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\omega t)} = \\ &= \omega R \sqrt{2[1 - \cos(\omega t)]} = \omega R \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = 2\omega R \left| \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right| \\ &\quad 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{aligned}$$

Die *trigonometrischen Umrechnungen* wurden der Formelsammlung entnommen (Abschnitt III.7.5 bzw. III.7.6.4). Durch *nochmalige* (komponentenweise) Differentiation mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir aus $v(t)$ den *Beschleunigungsvektor*

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \omega R \begin{pmatrix} 0 + \omega \cdot \sin(\omega t) \\ \omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \omega^2 R \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

dessen *Betrag* zeitlich *konstant* ist:

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \omega^2 R \underbrace{\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}}_1 = \omega^2 R \cdot 1 = \omega^2 R$$

- c) Der *Geschwindigkeitsbetrag* $v(t) = 2\omega R \left| \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right|$ ist eine *periodische* Funktion mit der Periode $p = \frac{2\pi}{\omega}$ (Bild III-17).

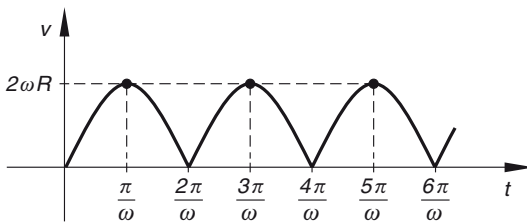


Bild III-17

Der *kleinste* bzw. *größte* Wert wird zu den folgenden Zeiten erreicht:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimum} & v_{\min} = 0: \quad t_{1k} = 0 + k \cdot \frac{2\pi}{\omega} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \\ \text{Maximum} & v_{\max} = 2\omega R: \quad t_{2k} = \frac{\pi}{\omega} + k \cdot \frac{2\pi}{\omega} = (1 + 2k) \frac{\pi}{\omega} \end{array} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Der Punkt P des abrollenden Rades befindet sich dann in seiner *tiefsten* bzw. *höchsten* Lage.

Beispiel 9: Linearisierung einer Halbleiter-Kennlinie

Linearisierung einer Funktion

Die *Strom-Spannung-Kennlinie* eines *Halbleiters* mit pn -Übergang lässt sich bei Raumtemperatur durch die Gleichung

$$I(U) = I_S \left(e^{\frac{U}{25 \text{ mV}}} - 1 \right)$$

beschreiben (I : Stromstärke; I_S : Sperrstrom; U : Spannung).

- a) *Linearisieren* Sie diese Kennlinie in der Umgebung der „Arbeitsspannung“ $U_0 = 20 \text{ mV}$ für den Sperrstrom $I_S = 1 \text{ mA}$.
- b) Welchen Stromwert liefert die *linearisierte* Kennlinie für $U = 23 \text{ mV}$, wie groß ist der *exakte* Wert? Wie groß ist die *prozentuale* Abweichung des Näherungswertes vom exakten Wert?

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.2

Lösung:

- a) Bild III-18 zeigt den Verlauf der Kennlinie

$$I(U) = 1 \text{ mA} \left(e^{\frac{U}{25 \text{ mV}}} - 1 \right)$$

im Spannungsbereich $-40 \leq \frac{U}{\text{mV}} \leq 40$.

Die „Koordinaten“ des *Arbeitspunktes* A betragen:

$$U_0 = 20 \text{ mV}$$

$$I_0 = I(U_0 = 20 \text{ mV}) =$$

$$= 1 \text{ mA} \left(e^{\frac{20 \text{ mV}}{25 \text{ mV}}} - 1 \right) =$$

$$= (e^{0,8} - 1) \text{ mA} = 1,2255 \text{ mA}$$

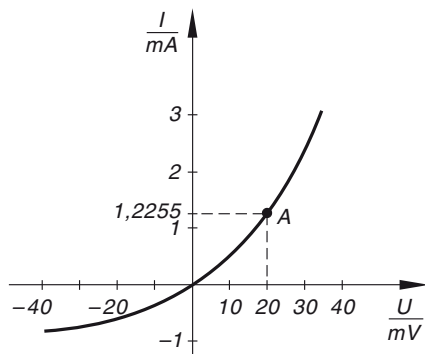


Bild III-18

Die *Steigung* der Kurventangente in A erhalten wir über die 1. *Ableitung* der Funktion $I = I(U)$ mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$I'(U) = 1 \text{ mA} \cdot e^{\frac{U}{25 \text{ mV}}} \cdot \frac{1}{25 \text{ mV}} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} \cdot e^{\frac{U}{25 \text{ mV}}} \Rightarrow$$

$$I'(U_0 = 20 \text{ mV}) = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} \cdot e^{\frac{20 \text{ mV}}{25 \text{ mV}}} = \frac{1}{25} \cdot e^{0,8} \frac{\text{mA}}{\text{mV}} = 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}}$$

Die *Tangente* lautet somit in der *Punkt-Steigungsform* wie folgt:

$$\frac{I - I_0}{U - U_0} = I'(U_0) \Rightarrow \frac{I - 1,2255 \text{ mA}}{U - 20 \text{ mV}} = 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}}$$

Diese Gleichung lösen wir nach I auf und erhalten die gewünschte *linearisierte* Funktion in der *Hauptform*:

$$I - 1,2255 \text{ mA} = 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}} (U - 20 \text{ mV}) = 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}} \cdot U - 1,7800 \text{ mA} \Rightarrow$$

$$I = 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}} \cdot U - 0,5545 \text{ mA}$$

Für Spannungen in der *unmittelbaren* Umgebung der Arbeitsspannung $U_0 = 20 \text{ mV}$ gilt somit *näherungsweise*

$$I(U) = 1 \text{ mA} \left(e^{\frac{U}{25 \text{ mV}}} - 1 \right) \approx 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}} \cdot U - 0,5545 \text{ mA}$$

(sog. *linearisierte* Kennlinie).

b) *Exakter Wert:* $I(U = 23 \text{ mV}) = 1 \text{ mA} \left(e^{\frac{23 \text{ mV}}{25 \text{ mV}}} - 1 \right) = (e^{0,92} - 1) \text{ mA} = 1,5093 \text{ mA}$

Näherungswert: $I(U = 23 \text{ mV}) \approx 0,0890 \frac{\text{mA}}{\text{mV}} \cdot 23 \text{ mV} - 0,5545 \text{ mA} = 1,4925 \text{ mA}$

Abweichung (absolut): $\Delta I = 1,4925 \text{ mA} - 1,5093 \text{ mA} = -0,0168 \text{ mA}$

Abweichung (prozentual): $\frac{\Delta I}{I_{\text{exakt}}} \cdot 100 \% = \frac{-0,0168 \text{ mA}}{1,5093 \text{ mA}} \cdot 100 \% = -1,11 \%$

Die *linearisierte* Kennlinie liefert somit einen um rund 1,11 % zu *kleinen* Wert.

Beispiel 10: Linearisierung der Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)
Linearisierung einer Funktion

Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand R mit *zunehmender* Temperatur T nach der Gleichung

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}} \quad (a > 0, b > 0)$$

abnimmt (gute Leitfähigkeit im „heißen“ Zustand, *schlechte* Leitfähigkeit im „kalten“ Zustand).

a) *Linearisieren* Sie diese Funktion in der Umgebung der „Arbeitstemperatur“

$$T_0 = 373,15 \text{ K} \quad \text{für} \quad a = 0,1 \, \Omega \quad \text{und} \quad b = 2500 \text{ K}.$$

b) Berechnen Sie den Wert des *Temperaturkoeffizienten* $\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}$ bei dieser Temperatur.

Lösung:

a) Bild III-19 zeigt den Verlauf der Kennlinie

$$R(T) = 0,1 \, \Omega \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{T}}$$

im Temperaturbereich $320 \, \text{K} \leq T \leq 430 \, \text{K}$, d. h. für Temperaturen zwischen ca. 47°C und ca. 157°C .

Die „Koordinaten“ des *Arbeitspunktes A* lauten:

$$T_0 = 373,15 \, \text{K}$$

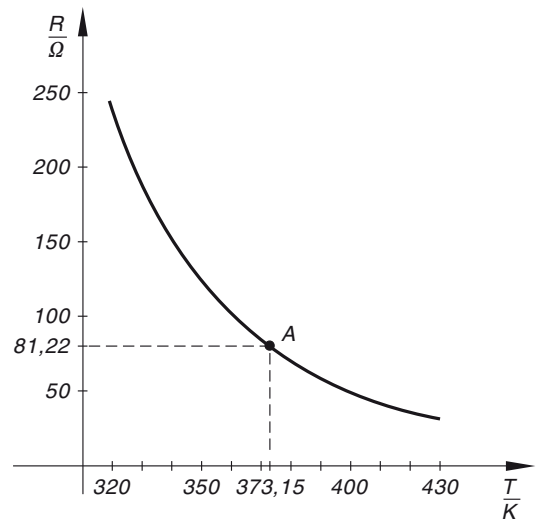
$$R_0 = R(T_0 = 373,15 \, \text{K}) =$$

$$= 0,1 \, \Omega \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{373,15 \, \text{K}}} =$$

$$= 0,1 \cdot e^{6,6997} \, \Omega =$$

$$= 81,22 \, \Omega$$

Bild III-19



Die *Steigung* der Kurventangente in *A* ist die *1. Ableitung* der Funktion $R = R(T)$ an der Stelle $T_0 = 373,15 \, \text{K}$. Die *Kettenregel* liefert:

$$R'(T) = \frac{dR}{dT} = 0,1 \, \Omega \cdot \left(-\frac{2500 \, \text{K}}{T^2} \right) \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{T}} = -\frac{250 \, \Omega \, \text{K}}{T^2} \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{T}} \Rightarrow$$

$$R'(T_0 = 373,15 \, \text{K}) = -\frac{250 \, \Omega \, \text{K}}{(373,15 \, \text{K})^2} \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{373,15 \, \text{K}}} = -1,458 \, \frac{\Omega}{\text{K}}$$

Die Gleichung der *Tangente* im Arbeitspunkt *A* lautet somit in der *Punkt-Steigungsform*

$$\frac{R - R_0}{T - T_0} = R'(T_0) \Rightarrow \frac{R - 81,22 \, \Omega}{T - 373,15 \, \text{K}} = -1,458 \, \frac{\Omega}{\text{K}}$$

bzw. in der *Hauptform*

$$R = -1,458 \, \frac{\Omega}{\text{K}} (T - 373,15 \, \text{K}) + 81,22 \, \Omega = -1,458 \, \frac{\Omega}{\text{K}} \cdot T + 625,28 \, \Omega$$

In der Umgebung der „Arbeitstemperatur“ $T_0 = 373,15 \, \text{K}$ gilt dann *näherungsweise*

$$R = 0,1 \, \Omega \cdot e^{\frac{2500 \, \text{K}}{T}} \approx -1,458 \, \frac{\Omega}{\text{K}} \cdot T + 625,28 \, \Omega$$

(sog. *linearisierte Kennlinie*).

- b) Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus dem Lösungsteil a) folgt für den *Temperaturkoeffizient* bei der Temperatur $T_0 = 373,15 \text{ K}$

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{dR}{dT} \Big|_{T=T_0} = \frac{1}{R_0} \cdot R'(T_0) = \frac{R'(T_0)}{R_0} = \frac{-1,458 \frac{\Omega}{\text{K}}}{81,22 \Omega} = -0,0180 \text{ K}^{-1}$$

Beispiel 11: Kritische Daten eines realen Gases

Sattelpunkt

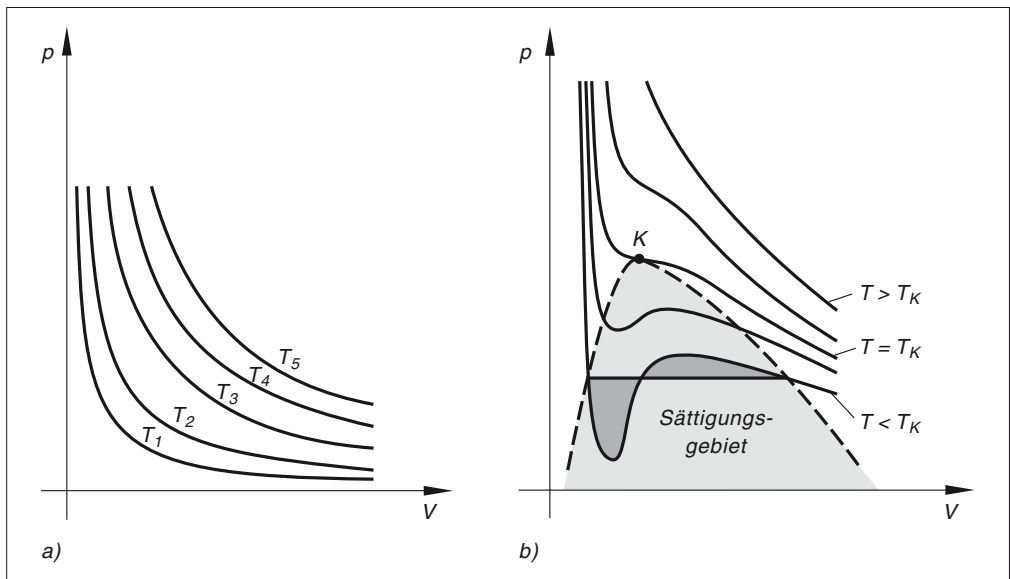
In der Thermodynamik wird der Zustand eines Gases durch die drei *Zustandsvariablen* p (Druck), V (Volumen) und T (absolute Temperatur) beschrieben. Für 1 Mol eines *idealen* Gases gilt die bekannte Zustandsgleichung $pV = RT$ (R : allgemeine Gaskonstante). Die *Isothermen* (Kurven gleicher Temperatur), in einem p, V -Diagramm dargestellt, sind streng monoton fallende (rechtwinklige) Hyperbeln (Bild III-20a)). Die Praxis jedoch lehrt, dass sich ein Gas insbesondere bei tiefen Temperaturen (in der Nähe der Verflüssigungstemperatur) deutlich anders verhält als ein ideales Gas. Der Grund liegt auf der Hand: Beim idealen Gas bleibt sowohl das Eigenvolumen der Gasmoleküle als auch die Wechselwirkung (Anziehung) der Gasmoleküle untereinander *unberücksichtigt*. Von *van der Waals* stammt die folgende (nach ihm benannte) *modifizierte Zustandsgleichung*, die das Verhalten *realer* Gase in guter Näherung beschreibt:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (\text{für 1 Mol; } V > b)$$

a und b sind dabei artspezifische (positive) Konstanten, die experimentell ermittelt werden müssen. Der Korrekturterm a/V^2 beschreibt dabei die *Wechselwirkung* (Anziehung) zwischen den Gasmolekülen (sog. *Binnendruck*), während der Term b das *Eigenvolumen* der Gasmoleküle berücksichtigt (sog. *Kovolumen*). Der Verlauf der Isothermen eines sog. *van der Waalsschen Gases* ist im Bild III-20b) dargestellt.

Bei hinreichend tiefer Temperatur lässt sich ein (reales) Gas bekanntlich durch Komprimieren *verflüssigen* (Übergang von der gasförmigen in die flüssige Phase). Oberhalb einer bestimmten Temperatur, *kritische Temperatur* T_K genannt, ist dies jedoch nicht mehr möglich. Die zugehörige Isotherme unterscheidet sich dabei von allen anderen Isothermen dadurch, dass sie einen *Wendepunkt* mit einer *waagerechten* Tangente, also einen sog. *Sattelpunkt* besitzt (Punkt K in Bild III-20b), kritischer Punkt genannt). Der Verlauf der übrigen Isothermen ist sehr unterschiedlich. Für $T > T_K$ verlaufen die Isothermen monoton fallend, für sehr hohe Temperaturen nahezu hyperbelförmig wie bei einem idealen Gas. In diesem Temperaturbereich ist kein Phasenübergang möglich (es existiert nur der gasförmige Zustand). Für Temperaturen, die *unterhalb* der kritischen Temperatur liegen ($T < T_K$) gilt dagegen: Jede Isotherme hat sowohl ein relatives Minimum als auch ein relatives Maximum und verläuft hier „schleifenförmig“ (siehe Bild III-20b)). Das Gas geht in diesem Bereich durch Komprimieren nach und nach in den *flüssigen* Zustand über (2-Phasenbereich, in Bild III-20b) grau unterlegt)⁵⁾.

⁵⁾ In Wirklichkeit verläuft die Isotherme im 2-Phasenbereich parallel zur V -Achse (konstanter Druck). Diese Parallele wird so gelegt, dass die beiden in Bild III-20b) dunkelgrau markierten Teilflächen zwischen der „van der Waals-Schleife“ und dieser Geraden gleich groß sind.

**Bild III-20** Isothermen eines Gasesa) Ideales Gas ($T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$)b) Van der Waalssches Gas (K : kritischer Punkt; T_K : kritische Temperatur)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung die *kritischen Daten* p_K , V_K und T_K , d. h. die Werte der drei Zustandsvariablen im *kritischen Punkt* K .

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.4.2

Lösung:

Wir lösen die van der Waalsche Zustandsgleichung nach p auf:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

Die durch den kritischen Punkt K verlaufende Isotherme gehört zur Temperatur $T = T_K$. Der Druck p ist auf dieser Isotherme nur vom Volumen V abhängig, d. h. eine Funktion der Zustandsvariable V :

$$p = p(V) = \frac{RT_K}{V - b} - \frac{a}{V^2} = RT_K(V - b)^{-1} - aV^{-2}$$

Der kritische Punkt ist der *Sattelpunkt* der Isotherme. Um ihn zu berechnen, benötigen wir die ersten drei Ableitungen der Funktion $p = p(V)$. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dV} &= \frac{d}{dV} [RT_K (V - b)^{-1} - aV^{-2}] = RT_K (-1) (V - b)^{-2} \cdot 1 - a(-2)V^{-3} = \\ &= -RT_K (V - b)^{-2} + 2aV^{-3} = -\frac{RT_K}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2p}{dV^2} &= \frac{d}{dV} [-RT_K (V - b)^{-2} + 2aV^{-3}] = \\ &= -RT_K (-2) (V - b)^{-3} \cdot 1 + 2a(-3)V^{-4} = \\ &= 2RT_K (V - b)^{-3} - 6aV^{-4} = \frac{2RT_K}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3p}{dV^3} &= \frac{d}{dV} [2RT_K (V - b)^{-3} - 6aV^{-4}] = \\ &= 2RT_K (-3) (V - b)^{-4} \cdot 1 - 6a(-4)V^{-5} = \\ &= -6RT_K (V - b)^{-4} + 24aV^{-5} = -\frac{6RT_K}{(V - b)^4} + \frac{24a}{V^5}\end{aligned}$$

In einem Sattelpunkt müssen die ersten beiden Ableitungen *verschwinden* (notwendige Bedingungen für einen Sattelpunkt). Wir erhalten zwei Bestimmungsgleichungen für die kritischen Werte von Volumen und Temperatur:

$$\frac{dp}{dV} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{RT_K}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\frac{d^2p}{dV^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2RT_K}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

Diese Gleichungen lösen wir nach dem gemeinsamen Term RT_K auf und erhalten dann durch Gleichsetzen eine Gleichung, aus der sich das *kritische Volumen* V_K berechnen lässt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad RT_K = \frac{2a(V - b)^2}{V^3} \\ \text{(II)} \quad RT_K = \frac{3a(V - b)^3}{V^4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2a(V - b)^2}{V^3} = \frac{3a(V - b)^3}{V^4} \quad \Rightarrow \quad 2a(V - b)^2 V^4 = 3a(V - b)^3 V^3 \quad \Rightarrow$$

$$2V = 3(V - b) = 3V - 3b \quad \Rightarrow \quad -V = -3b \quad \Rightarrow \quad V_K = 3b$$

Diesen (kritischen) Wert setzen wir für V in Gleichung (I) ein und berechnen aus dieser Gleichung die *kritische Temperatur* T_K :

$$RT_K = \frac{2a(V_K - b)^2}{V_K^3} = \frac{2a(3b - b)^2}{(3b)^3} = \frac{2a \cdot 4b^2}{27b^3} = \frac{8a}{27b} \Rightarrow T_K = \frac{8a}{27bR}$$

Den *kritischen Druck* p_K bestimmen wir aus der van der Waalschen Zustandsgleichung, indem wir für V und T die bereits bekannten kritischen Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} p_K &= \frac{RT_K}{V_K - b} - \frac{a}{V_K^2} = \frac{R \cdot \frac{8a}{27bR}}{3b - b} - \frac{a}{(3b)^2} = \frac{\frac{8a}{27b}}{2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \\ &= \frac{4a - 3a}{27b^2} = \frac{a}{27b^2} \end{aligned}$$

Wir müssen noch prüfen, ob auch das *hinreichende* Kriterium für einen Sattelpunkt erfüllt ist. Die 1. und 2. Ableitung von p nach V verschwinden für $V = V_K$ und $T = T_K$. Die 3. Ableitung an dieser Stelle ist (wie gefordert) von Null verschieden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3p}{dV^3} \right|_{(V=V_K, T=T_K)} &= -\frac{6RT_K}{(V_K - b)^4} + \frac{24a}{V_K^5} = -\frac{6R \cdot \frac{8a}{27bR}}{(3b - b)^4} + \frac{24a}{(3b)^5} = \\ &= -\frac{\frac{16a}{9b}}{(2b)^4} + \frac{24a}{243b^5} = -\frac{\frac{16a}{9b}}{16b^4} + \frac{24a}{243b^5} = -\frac{a}{9b^5} + \frac{8a}{81b^5} = \\ &= \frac{-9a + 8a}{81b^5} = \frac{-a}{81b^5} \neq 0 \end{aligned}$$

Die *kritischen Daten* eines van der Waalschen Gases lauten somit wie folgt:

$$p_K = \frac{a}{27b^2}, \quad V_K = 3b, \quad T_K = \frac{8a}{27bR}$$

Beispiel 12: Wurfparabel eines Wasserstrahls

Extremwertaufgabe

Bild III-21 zeigt einen bis zur Höhe H mit Wasser gefüllten Zylinder. In der Tiefe h (von der als *unveränderlich* angenommenen Wasseroberfläche $h = 0$ aus gerechnet) befindet sich eine *seitliche Öffnung*, aus der das Wasser in *waagerechter* Richtung mit der nach der Formel $v_0 = \sqrt{2gh}$ berechneten Geschwindigkeit austritt.

An *welcher* Stelle A des Gefäßes muss man diese Öffnung anbringen, damit der seitlich austretende Wasserstrahl den Boden an einer *möglichst weit* entfernten Stelle B (in horizontaler Richtung gemessen) trifft?

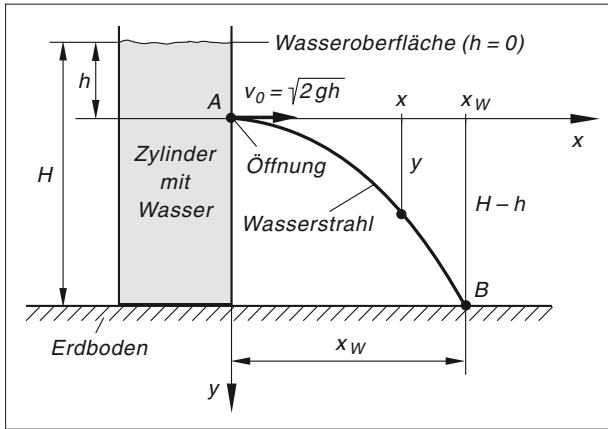


Bild III-21

Lösungshinweis: Die Bewegung eines Wasserstrahlteilchens kann in guter Näherung als ein *waagerechter Wurf* im luftleeren Raum betrachtet werden (siehe hierzu auch Übung 4 in Kapitel II).

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.5

Physikalische Grundlagen: A17

Lösung:

Die Koordinaten eines Wasserstrahlteilchens zur Zeit t lauten⁶⁾:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2, \quad t \geq 0$$

Wir *eliminieren* den Zeitparameter t und erhalten als Gleichung des Wasserstrahls die *Wurfparabel*

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2 = \frac{g}{2 \cdot 2 g h} \cdot x^2 = \frac{x^2}{4 h}, \quad x \geq 0$$

(unter Berücksichtigung von $v_0 = \sqrt{2 g h}$).

In diese Gleichung setzen wir die Koordinaten des *Auftreffpunktes* $B = (x_W; H - h)$ ein und lösen nach x_W auf:

$$H - h = \frac{x_W^2}{4 h} \Rightarrow x_W^2 = 4 h (H - h) \Rightarrow x_W = 2 \sqrt{h (H - h)}, \quad 0 \leq h \leq H$$

Erwartungsgemäß hängt die „Wurfweite“ x_W noch von der Lage der Austrittsöffnung, d. h. von h ab. Der *Maximalwert* wird erreicht, wenn die „Zielfunktion“

$$z(h) = h (H - h) = H h - h^2, \quad 0 \leq h \leq H$$

ihr Maximum annimmt, d. h. der unter der Wurzel stehende Ausdruck $h (H - h)$ seinen größtmöglichen Wert erreicht.

⁶⁾ Die Bewegung in der x -Richtung erfolgt mit der *konstanten* Geschwindigkeit v_0 , in der y -Richtung gelten die Gesetze des *freien Falls* [A17].

Mit den benötigten Ableitungen

$$z'(h) = H - 2h \quad \text{und} \quad z''(h) = -2 < 0$$

folgt aus der *notwendigen* Bedingung $z'(h) = 0$

$$H - 2h = 0 \quad \text{und somit} \quad h = H/2$$

Ferner ist $z''(h = H/2) = -2 < 0$, so dass auch das *hinreichende* Kriterium für ein *Maximum* erfüllt ist. Die Wurfweite x_W erreicht somit ihren *größtmöglichen* Wert, wenn die Austrittsöffnung genau in der *Mitte* des Gefäßes liegt. Sie beträgt dann

$$x_{W, \max} = x_W(h = H/2) = 2 \sqrt{\frac{H}{2} \left(H - \frac{H}{2} \right)} = 2 \sqrt{\frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2}} = 2 \cdot \frac{H}{2} = H$$

Beispiel 13: Scheibenpendel mit minimaler Schwingungsdauer
Extremwertaufgabe

Bild III-22 zeigt ein Scheibenpendel (auch *physikalisches Pendel* genannt) mit einer homogenen *Kreis-scheibe* vom Radius R und der Masse m als schwingenden Körper. Die Schwingung erfolgt dabei um die eingezeichnete Achse A (*senkrecht* zur Zeichenebene) mit der nach der Formel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{mgx}}$$

berechneten Schwingungsdauer.

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$: Erdbeschleunigung; x : Abstand des Schwerpunktes S von der Achse A ; J_A : Massenträgheitsmoment der Scheibe, bezogen auf die Achse A

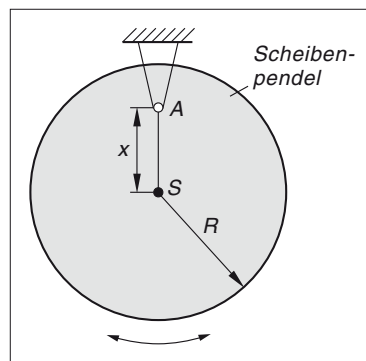


Bild III-22

Für *welchen* Wert der Abstandscoordinate x schwingt dieses Pendel mit der *kleinstmöglichen* Schwingungsdauer T ?

Lösungshinweis: Das Massenträgheitsmoment J_A lässt sich nach dem *Satz von Steiner* [A31] bestimmen. Das dabei benötigte Massenträgheitsmoment der Scheibe bezüglich der zur Achse A *parallelen* Schwerpunktachse S beträgt $J_S = \frac{1}{2} m R^2$.

Lösung:

Zunächst berechnen wir das Massenträgheitsmoment J_A mit Hilfe des *Satzes von Steiner* [A31]:

$$J_A = J_S + m x^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m x^2 = \frac{1}{2} m (R^2 + 2x^2) = \frac{m (R^2 + 2x^2)}{2}$$

Für die Schwingungsdauer T gilt somit in Abhängigkeit vom Abstand x :

$$\begin{aligned} T = T(x) &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m g x}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{m (R^2 + 2x^2)}{2}}{m g x}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^2 + 2x^2}{2 g x}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (R^2 + 2x^2)}{2 g x}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{g} \cdot \frac{R^2 + 2x^2}{x}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{R^2 + 2x^2}{x}} \end{aligned}$$

$T(x)$ wird *minimal*, wenn die unter der Wurzel stehende *Hilfsfunktion* („Zielfunktion“)

$$z(x) = \frac{R^2 + 2x^2}{x}, \quad 0 < x \leq R$$

ihr *Minimum* erreicht. Die benötigten Ableitungen dieser Funktion lauten (unter Verwendung der *Quotientenregel*):

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{4x \cdot x - 1(R^2 + 2x^2)}{x^2} = \frac{4x^2 - R^2 - 2x^2}{x^2} = \frac{2x^2 - R^2}{x^2} \\ z''(x) &= \frac{4x \cdot x^2 - 2x(2x^2 - R^2)}{x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 2R^2x}{x^4} = \frac{2R^2x}{x^4} = \frac{2R^2}{x^3} \end{aligned}$$

Aus der *notwendigen* Bedingung $z'(x) = 0$ folgt

$$\frac{2x^2 - R^2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - R^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} R \approx \pm 0,707 R$$

Wegen $x > 0$ kommt nur der *positive*, im Intervall $0 < x \leq R$ liegende Wert infrage. Da

$$z''\left(x_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} R\right) = \frac{2R^2}{\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} R\right)^3} = \frac{2R^2}{\frac{1}{8} \cdot 2 \sqrt{2} R^3} = \frac{8}{\sqrt{2} R} = \frac{4\sqrt{2}}{R} > 0$$

ist, besitzt die Zielfunktion an dieser Stelle ein *Minimum*. Die *Schwingungsdauer* T des physikalischen Scheibenpendels wird somit am *kleinsten*, wenn der Abstand zwischen der Achse A und dem Schwerpunkt S genau $x = \frac{1}{2} \sqrt{2} R \approx 0,707 R$ beträgt. Sie besitzt dann den folgenden noch vom Scheibenradius R abhängigen Wert:

$$\begin{aligned}
 T_{\min} &= T \left(x = \frac{1}{2} \sqrt{2} R \right) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{R^2 + R^2}{\frac{1}{2} \sqrt{2} R}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{g} \cdot \frac{2 \cdot 2 R^2}{\sqrt{2} R}} = \\
 &= \sqrt{\frac{8\pi^2}{\sqrt{2} g}} \cdot R = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\sqrt{2} \cdot 9,81}} \cdot \sqrt{R} \approx 2,3856 \cdot \sqrt{R} \quad (R \text{ in m, } T \text{ in s})
 \end{aligned}$$

Beispiel 14: Leistungsanpassung eines Verbraucherwiderstandes
Extremwertaufgabe

Bild III-23 zeigt einen *veränderlichen* Verbraucherwiderstand R_a , der von einer Spannungsquelle mit der konstanten Quellenspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i gespeist wird. Bei *Kurzschluss* (d. h. $R_a = 0$) und *Leerlauf* (d. h. $R_a \rightarrow \infty$) erfolgt *keine* Leistungsaufnahme. Dazwischen gibt es für den Verbraucherwiderstand R_a einen Wert, bei dem er die *größtmögliche* Energie aufnimmt (sog. *Leistungsanpassung*).

Bestimmen Sie diesen *Extremwert*.

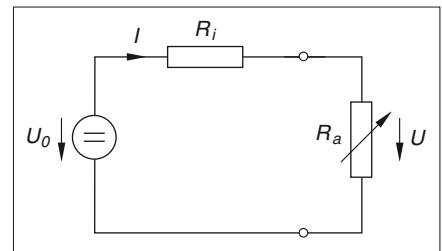


Bild III-23

Lösungshinweis: Stellen Sie zunächst die vom Verbraucherwiderstand R_a aufgenommene *Leistung* P [A33] als eine *Funktion* von R_a dar und bestimmen Sie dann das *Maximum* dieser Funktion.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.5

Physikalische Grundlagen: A13, A14, A32, A33

Lösung:

Der *Gesamtwiderstand* der Reihenschaltung [A13] ist $R_g = R_a + R_i$, nach dem *Ohmschen Gesetz* [A14] fließt somit ein *Strom* der Stärke

$$I = \frac{U_0}{R_g} = \frac{U_0}{R_a + R_i}$$

Die am Verbraucher liegende Spannung U ist dann nach der *Maschenregel* [A32]

$$U = U_0 - R_i I$$

($R_i I$ ist der Spannungsabfall am *Innenwiderstand* der Spannungsquelle). Somit beträgt die vom Verbraucherwiderstand R_a aufgenommene *Leistung* [A33]

$$\begin{aligned}
 P = UI &= (U_0 - R_i I) I = \left(U_0 - \frac{R_i U_0}{R_a + R_i} \right) \left(\frac{U_0}{R_a + R_i} \right) = \\
 &= \frac{R_a U_0 + R_i U_0 - R_i U_0}{R_a + R_i} \cdot \frac{U_0}{R_a + R_i} = \frac{R_a U_0}{R_a + R_i} \cdot \frac{U_0}{R_a + R_i} = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2}
 \end{aligned}$$

Sie hängt noch von R_a ab, d. h. $P = f(R_a)$. Wir bestimmen das *Maximum* dieser Funktion aus den *hinreichenden* Bedingungen $\frac{dP}{dR_a} = 0$ und $\frac{d^2P}{dR_a^2} < 0$. Die dabei benötigten Ableitungen lauten (unter Verwendung der *Quotienten-* und *Kettenregel*):

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dR_a} &= U_0^2 \frac{1(R_a + R_i)^2 - 2(R_a + R_i) \cdot 1 \cdot R_a}{(R_a + R_i)^4} = U_0^2 \frac{(R_a + R_i) [(R_a + R_i) - 2R_a]}{(R_a + R_i)^4} = \\
 &= U_0^2 \frac{R_a + R_i - 2R_a}{(R_a + R_i)^3} = U_0^2 \frac{R_i - R_a}{(R_a + R_i)^3} \\
 \frac{d^2P}{dR_a^2} &= U_0^2 \frac{-1(R_a + R_i)^3 - 3(R_a + R_i)^2 \cdot 1 \cdot (R_i - R_a)}{(R_a + R_i)^6} = \\
 &= U_0^2 \frac{(R_a + R_i)^2 [-(R_a + R_i) - 3(R_i - R_a)]}{(R_a + R_i)^6} = U_0^2 \frac{-R_a - R_i - 3R_i + 3R_a}{(R_a + R_i)^4} = \\
 &= U_0^2 \frac{2R_a - 4R_i}{(R_a + R_i)^4} = 2U_0^2 \frac{R_a - 2R_i}{(R_a + R_i)^4}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dR_a} = 0 &\Rightarrow U_0^2 \frac{R_i - R_a}{(R_a + R_i)^3} = 0 \Rightarrow R_i - R_a = 0 \Rightarrow R_a = R_i \\
 \frac{d^2P}{dR_a^2} (R_a = R_i) &= 2U_0^2 \frac{R_i - 2R_i}{(R_i + R_i)^4} = 2U_0^2 \frac{-R_i}{(2R_i)^4} = 2U_0^2 \frac{-R_i}{16R_i^4} = -\frac{U_0^2}{8R_i^3} < 0
 \end{aligned}$$

Maximale Leistungsaufnahme erfolgt somit für $R_a = R_i$, d. h. wenn der *Verbraucherwiderstand* mit dem *Innenwiderstand* der Spannungsquelle *übereinstimmt*. Bild III-24 zeigt die *Verbraucherleistung* P als Funktion des *Verbraucherwiderstandes* R_a . Der *Maximalwert* der Leistung beträgt

$$P_{\max} = P(R_a = R_i) = U_0^2 \frac{R_i}{(R_i + R_i)^2} = U_0^2 \frac{R_i}{(2R_i)^2} = U_0^2 \frac{R_i}{4R_i^2} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

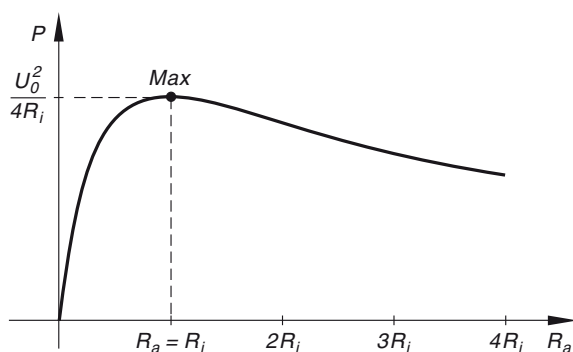


Bild III-24

Beispiel 15: Resonanzfall bei einer erzwungenen Schwingung

Extremwertberechnung

Ein *schwingungsfähiges mechanisches System* (Modell: elastisches Federpendel oder Feder-Masse-Schwinger) mit der Masse m und der Eigenkreisfrequenz ω_0 wird durch eine *periodisch* von der Zeit t abhängige *äußere Kraft* mit der Gleichung

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

zu *erzwungenen* Schwingungen angeregt. Das System schwingt dann nach Ablauf einer gewissen Einschwingphase mit der von außen *aufgezwungenen* Erregerkreisfrequenz ω , wobei die *Schwingungsamplitude* A noch wie folgt von dieser *Kreisfrequenz* abhängt:

$$A = A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \omega > 0$$

($\delta > 0$: Dämpfungsfaktor). Bei *welcher* Kreisfrequenz ω_R schwingt das System mit *größtmöglicher* Amplitude (sog. *Resonanzfall*)?

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.4.1

Lösung:

Die Amplitude A erreicht genau dann ihren größtmöglichen Wert, wenn der unter der Wurzel stehende von der Kreisfrequenz ω abhängige Ausdruck (auch „Zielfunktion“ genannt)

$$z(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2, \quad \omega > 0$$

seinen *kleinsten* Wert annimmt. Zur Berechnung dieses Extremwertes benötigen wir die ersten beiden Ableitungen. Sie lauten (unter Verwendung der *Ketten-* bzw. *Produktregel*):

$$\begin{aligned}
 z'(\omega) &= 2(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\omega + 4\delta^2 \cdot 2\omega = 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\omega \cdot 2\delta^2 = \\
 &= 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \\
 z''(\omega) &= 4(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) + 2\omega \cdot 4\omega = 4(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) + 4 \cdot 2\omega^2 = \\
 &= 4(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 + 2\omega^2) = 4(3\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)
 \end{aligned}$$

Aus der für einen Extremwert *notwendigen* Bedingung $z'(\omega) = 0$ folgt dann

$$4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0$$

und weiter wegen $\omega > 0$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \Rightarrow \omega_{1/2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

(reelle Lösungen nur für schwache Dämpfung, d. h. $\omega_0^2 > 2\delta^2$).

Es kommt jedoch nur die *positive* Lösung ω_1 infrage. Für diesen Wert ist die 2. Ableitung *positiv*:

$$\begin{aligned}
 z''(\omega = \omega_1) &= 4(3\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 4[3(\omega_0^2 - 2\delta^2) - \omega_0^2 + 2\delta^2] = \\
 &= 4(3\omega_0^2 - 6\delta^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 4(2\omega_0^2 - 4\delta^2) = 8 \underbrace{(\omega_0^2 - 2\delta^2)}_{\omega_1^2} = \\
 &= 8\omega_1^2 > 0
 \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $z(\omega)$ besitzt daher für ω_1 ein *relatives Minimum*. Der *Resonanzfall* tritt somit bei der Kreisfrequenz $\omega_R = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ ein (sog. *Resonanzkreisfrequenz*).

Die Schwingungsamplitude erreicht dann ihren *größtmöglichen* Wert

$$\begin{aligned}
 A_{\max} &= A(\omega = \omega_R) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_R^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega_R^2}} = \\
 &= \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - 2\delta^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 (\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \\
 &= \frac{F_0}{m \sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2 (\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{F_0}{m \sqrt{4\delta^2 (\delta^2 + \omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \\
 &= \frac{F_0}{m \cdot 2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2m\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}
 \end{aligned}$$

Bild III-25 zeigt den Verlauf der Amplitudenfunktion $A = A(\omega)$ (sog. Resonanzkurve). Infolge der Dämpfung liegt die Resonanzstelle ω_R stets unterhalb der Eigenkreisfrequenz ω_0 !

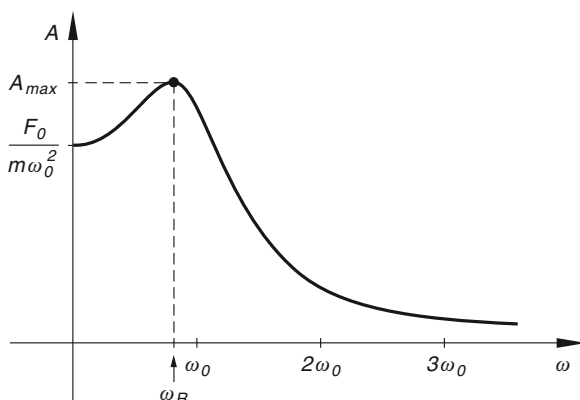


Bild III-25

Beispiel 16: Optimale Beleuchtung eines Punktes durch eine Lichtquelle *Extremwertaufgabe*

Ein fester Punkt A auf einer ebenen *Bühne* wird durch eine in der Höhe verstellbare *punktförmige Lichtquelle* L mit der konstanten Lichtstärke I_0 beleuchtet (Bild III-26). Die von der *Lichtquelle* L im Punkt A erzeugte *Beleuchtungsstärke* B genügt dabei dem *Lambertschen Gesetz*

$$B = \frac{I_0 \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

Dabei ist α der Einfallswinkel des Lichtes (gegen die Vertikale gemessen) und r der Abstand zwischen der Lichtquelle und dem Punkt A . In welcher *Höhe* h über der Bühne muss man die Lichtquelle anbringen, damit der Punkt A *optimal* beleuchtet wird, die Beleuchtungsstärke B somit im Punkt A ihren *größtmöglichen* Wert erreicht?

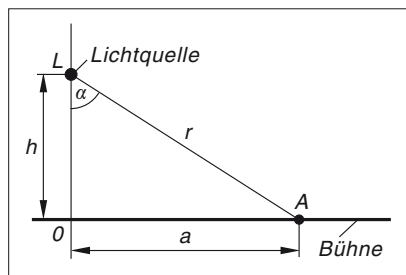


Bild III-26

Lösungshinweis: Stellen Sie zunächst die Beleuchtungsstärke B als eine nur von der *Höhe* h abhängige Funktion dar (die Abstandsgröße a ist vorgegeben).

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.4.1 und IV.3.5

Lösung:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OAL folgt

$$\cos \alpha = \frac{h}{r} \quad \text{und} \quad r^2 = a^2 + h^2 \quad \text{oder} \quad r = (a^2 + h^2)^{1/2}$$

Damit erhalten wir für die *Beleuchtungsstärke* B die folgende Abhängigkeit von der *Höhe* h der Lichtquelle über der Bühne:

$$B = B(h) = \frac{I_0 \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{I_0 \cdot \frac{h}{r}}{r^2} = I_0 \frac{h}{r \cdot r^2} = I_0 \frac{h}{r^3} = I_0 \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}, \quad h \geq 0$$

Die für die Bestimmung des Extremwertes (Maximums) benötigten *Ableitungen* lauten (unter Verwendung der *Quotienten-* und *Kettenregel*):

$$\begin{aligned} B'(h) &= I_0 \frac{1(a^2 + h^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(a^2 + h^2)^{1/2} \cdot 2h \cdot h}{(a^2 + h^2)^3} = \\ &= I_0 \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}(a^2 + h^2) - 3h^2(a^2 + h^2)^{1/2}}{(a^2 + h^2)^3} = \\ &= I_0 \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}[a^2 + h^2 - 3h^2]}{(a^2 + h^2)^{6/2}} = I_0 \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{5/2}} \\ B''(h) &= I_0 \frac{-4h(a^2 + h^2)^{5/2} - \frac{5}{2}(a^2 + h^2)^{3/2} \cdot 2h(a^2 - 2h^2)}{(a^2 + h^2)^5} = \\ &= \frac{-4h(a^2 + h^2)^{3/2}(a^2 + h^2) - 5h(a^2 + h^2)^{3/2}(a^2 - 2h^2)}{(a^2 + h^2)^5} = \\ &= I_0 \frac{h(a^2 + h^2)^{3/2}[-4(a^2 + h^2) - 5(a^2 - 2h^2)]}{(a^2 + h^2)^{10/2}} = \\ &= I_0 \frac{h(-4a^2 - 4h^2 - 5a^2 + 10h^2)}{(a^2 + h^2)^{7/2}} = I_0 \frac{h(6h^2 - 9a^2)}{(a^2 + h^2)^{7/2}} = \\ &= 3I_0 \frac{h(2h^2 - 3a^2)}{(a^2 + h^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

Aus der *notwendigen* Bedingung $B'(h) = 0$ folgt dann

$$I_0 \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow a^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} a$$

wobei nur der *positive* Wert als Lösung infrage kommt. Wegen

$$B''\left(h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} a\right) = 3I_0 \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a (a^2 - 3a^2)}{\left(a^2 + \frac{1}{2} a^2\right)^{7/2}} = 3I_0 \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a (-2a^2)}{\left(\frac{3}{2} a^2\right)^{7/2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{3 \sqrt{2} I_0 a^3}{\left(\frac{3}{2} a^2\right)^3 \left(\frac{3}{2} a^2\right)^{1/2}} = - \frac{3 \sqrt{2} I_0 a^3}{\frac{27}{8} a^6 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} a} = - \frac{3 \sqrt{2} I_0 a^3}{\frac{27 \sqrt{3} a^7}{8 \sqrt{2}}} = \\
 &= - \frac{8 \sqrt{2} \cdot 3 \sqrt{2} I_0}{27 \sqrt{3} a^4} = - \frac{16 I_0}{9 \sqrt{3} a^4} = - \frac{16 \sqrt{3} I_0}{27 a^4} < 0
 \end{aligned}$$

erreicht die Beleuchtungsstärke im Punkt A bei der Höhe $h = \frac{1}{2} \sqrt{2} a \approx 0,707 a$ ihren größtmöglichen Wert. Er beträgt

$$\begin{aligned}
 B_{\max} &= B\left(h = \frac{1}{2} \sqrt{2} a\right) = I_0 \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a}{\left(a^2 + \frac{1}{2} a^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a I_0}{\left(\frac{3}{2} a^2\right)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a I_0}{\frac{3}{2} a^2 \left(\frac{3}{2} a^2\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2} I_0}{3 a \sqrt{\frac{3}{2}} a} = \frac{\sqrt{2} I_0}{\frac{3 \sqrt{3}}{\sqrt{2}} a^2} = \frac{2 I_0}{3 \sqrt{3} a^2} = \frac{2 \sqrt{3} I_0}{9 a^2}
 \end{aligned}$$

Beispiel 17: Gaußsche Normalverteilung

Extremwerte, Wendepunkte

Messwerte und Messfehler einer Größe x unterliegen in der Regel der sog. *Gaußschen Normalverteilung* mit der Verteilungsdichtefunktion⁷⁾

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

und den beiden Kennwerten (Parametern)

μ (Mittelwert oder Erwartungswert) und σ (Standardabweichung).

- Bestimmen Sie die *Extremwerte* und *Wendepunkte* der Verteilungskurve und zeigen Sie, dass diese durch die beiden Kennwerte eindeutig festgelegt sind.
- Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.4.1 und IV.3.4.2

⁷⁾ Siehe hierzu Band 3, Abschnitt II.6.4.1

Lösung:**a) Ableitungen 1. bis 3. Ordnung**

Wir differenzieren $\varphi(x)$ nach der *Kettenregel* und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} (x - \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\end{aligned}$$

Durch nochmalige Differentiation unter Verwendung von *Produkt-* und *Kettenregel* folgt

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} \left[1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\sigma} (x - \mu) \right] = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} \left[1 - \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5} \cdot [\sigma^2 - (x - \mu)^2] \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\end{aligned}$$

und schließlich (wiederum nach der *Produkt-* und *Kettenregel*):

$$\begin{aligned}\varphi'''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5} \left[-2(x - \mu) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} [\sigma^2 - (x - \mu)^2] \right] = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5} \cdot (x - \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \left[-2 - \frac{1}{\sigma^2} [\sigma^2 - (x - \mu)^2] \right] = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5} \cdot (x - \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{-2\sigma^2 - \sigma^2 + (x - \mu)^2}{\sigma^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^7} \cdot (x - \mu) [3\sigma^2 - (x - \mu)^2] \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\end{aligned}$$

Extremwerte: $\varphi'(x) = 0$, $\varphi''(x) \neq 0$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3}}_{\neq 0} \cdot (x - \mu) \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow$$

$$x - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \mu$$

$$\varphi''(x_1 = \mu) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5} \cdot \sigma^2 \cdot e^0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} < 0 \Rightarrow$$

relatives *Maximum* an der Stelle $x_1 = \mu$

$$\text{Maximum: Max} = \left(\mu; \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right)$$

Das *relative Maximum* ist zugleich auch das *absolute Maximum*, seine Lage ist *eindeutig* durch den Kennwert μ bestimmt.

Wendepunkte: $\varphi''(x) = 0$, $\varphi'''(x) \neq 0$

$$\varphi''(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^5}}_{\neq 0} \cdot [\sigma^2 - (x - \mu)^2] \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma^2 - (x - \mu)^2 = 0 \Rightarrow (x - \mu)^2 = \sigma^2 \Rightarrow x - \mu = \pm \sigma \Rightarrow$$

$$x_{2/3} = \mu \pm \sigma$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(x_{2/3} = \mu \pm \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^7} \cdot (\pm \sigma) (3\sigma^2 - \sigma^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pm \sigma}{\sigma}\right)^2} = \\ &= \pm \frac{2\sigma^3}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^7} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^4} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Wendepunkte bei $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$

$$\text{Wendepunkte: } W_{1/2} = \left(\mu \pm \sigma; \frac{1}{\sqrt{2\pi} e \cdot \sigma} \right)$$

Die Lage der beiden *Wendepunkte* ist damit *eindeutig* durch die beiden Kennwerte μ und σ bestimmt.

- b) Die Dichtefunktion der Normalverteilung besitzt ein (absolutes) *Maximum* bei $x_1 = \mu$ und zwei *symmetrisch* zum Maximum liegende *Wendepunkte* bei $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$, jedoch *keine* Nullstellen. *Symmetrieachse* ist die Parallele zur φ -Achse durch das Maximum (Gerade $x = \mu$), für *große* $|x|$ strebt die Funktion asymptotisch gegen die x -Achse ($\varphi = 0$ ist *Asymptote im Unendlichen*). Bild III-27 zeigt den Verlauf dieser Funktion.

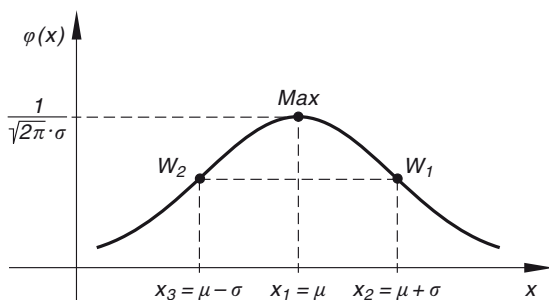


Bild III-27

Beispiel 18: Elektrische Feldstärke in der Umgebung einer elektrischen Doppelleitung

Kurvendiskussion

Die in Bild III-28 im Querschnitt skizzierte *Doppelleitung* besteht aus zwei *parallelen* Leitern (Drähten) L_1 und L_2 der Länge l , die *entgegengesetzt gleichstark* aufgeladen sind (Ladung: $\pm Q$). Der Leiterabstand beträgt $d = 2a$, der Leiterradius soll vernachlässigbar klein sein. Das System befindet sich in *Luft*.

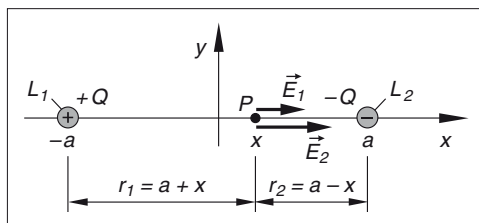


Bild III-28

- Ermitteln Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Betrag der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} und der *Ortskoordinate* x eines Punktes P auf der *Verbindungsline* der beiden Leiterquerschnitte.
- Diskutieren* Sie den Verlauf der unter a) hergeleiteten (gebrochenrationalen) Funktion $E = E(x)$ (Symmetrie, Nullstellen, Pole, vertikale Asymptoten, relative Extremwerte, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Skizze des Funktionsverlaufs).

Lösungshinweis: Gehen Sie zunächst von dem elektrischen Feld einer *Linienquelle* aus [A34]. Das gesuchte Feld entsteht durch *ungestörte Überlagerung* der beiden Einzelfelder. Die Dielektrizitätskonstante von Luft ist $\varepsilon \approx 1$.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.6

Physikalische Grundlagen: A34

Lösung:

- Leiter L_1 erzeugt aufgrund seiner *positiven* Ladung ein *axial* nach *außen* gerichtetes elektrisches Feld, Leiter L_2 dagegen aufgrund seiner *negativen* Ladung ein *axial* nach *innen* gerichtetes elektrisches Feld. Die von den beiden Leitern im Punkt $P = (x; 0)$ erzeugten Feldstärkevektoren \vec{E}_1 und \vec{E}_2 sind somit *gleichgerichtet* (siehe Bild III-28). L_1 erzeugt in P , d. h. im Abstand $r_1 = a + x$ ein Feld der Stärke [A34]

$$E_1(P) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l (a + x)}$$

Die vom Leiter L_2 in P , d. h. im Abstand $r_2 = a - x$ erzeugte Feldstärke ist dem *Betrage* nach

$$E_2(P) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l (a - x)}$$

Die *Beträge* der beiden Feldstärkevektoren \vec{E}_1 und \vec{E}_2 *addieren* sich somit in P :

$$\begin{aligned} E(P) &= E_1(P) + E_2(P) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l(a+x)} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l(a-x)} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{a-x+a+x}{\underbrace{(a+x)(a-x)}} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{2a}{a^2-x^2} = \frac{aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{a^2-x^2} \end{aligned}$$

3. Binom: $a^2 - x^2$

Diese Beziehung bleibt auch gültig für $|x| > a$, der *resultierende* Feldstärkevektor hat dort jedoch die *entgegengesetzte* Richtung ($E < 0$). Die *elektrische Feldstärke* längs der Verbindungslinie der beiden Leiter lässt sich demnach durch die *echt gebrochenrationale* Funktion

$$E(x) = \frac{aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}, \quad |x| \neq a$$

beschreiben.

- b) **Symmetrie:** $E(x)$ ist eine *gerade* Funktion: $E(-x) = E(x)$ wegen $(-x)^2 = (x)^2 = x^2$.

Nullstellen: Sind *nicht* vorhanden (der Zähler von $E(x)$ ist ungleich null).

Pole: $a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm a$ (Pole *mit* Vorzeichenwechsel in der Mitte der Leiterquerschnitte)

Vertikale Asymptoten: $x = \pm a$

In den *Polstellen*, d. h. in der Mitte der beiden Leiterquerschnitte wird die elektrische Feldstärke *unendlich* groß.

Ableitungen (unter Verwendung der *Ketten-* bzw. *Quotientenregel*):

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{aQ}{\pi\epsilon_0 l} (a^2 - x^2)^{-1} \\ E'(x) &= \frac{aQ}{\pi\epsilon_0 l} (-1) (a^2 - x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \frac{2aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{x}{(a^2 - x^2)^2} \\ E''(x) &= \frac{2aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1(a^2 - x^2)^2 - 2(a^2 - x^2)(-2x)x}{(a^2 - x^2)^4} = \\ &= \frac{2aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{(a^2 - x^2)(a^2 - x^2 + 4x^2)}{(a^2 - x^2)^4} = \frac{2aQ}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{3x^2 + a^2}{(a^2 - x^2)^3} \end{aligned}$$

Die 3. Ableitung wird *nicht* benötigt, da $E''(x)$ stets *ungleich* null ist (Zähler des Bruches $\geq a^2$). Daher kann es *keine* Wendepunkte geben!

Relative Extremwerte: $E'(x) = 0$, $E''(x) \neq 0$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2aQ}{\pi \varepsilon_0 l} \cdot \frac{x}{(a^2 - x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$E''(x_3 = 0) = \frac{2aQ}{\pi \varepsilon_0 l} \cdot \frac{a^2}{a^6} = \frac{2Q}{\pi \varepsilon_0 l a^3} > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } x_3 = 0$$

Minimum: $\text{Min} = \left(0; \frac{Q}{\pi \varepsilon_0 a l}\right)$

Wendepunkte: Sind nicht vorhanden, da stets $E''(x) \neq 0$ ist.

Verhalten im Unendlichen:

Die Funktion ist *echt gebrochen-rational* und nähert sich somit für $x \rightarrow \pm \infty$ asymptotisch der x -Achse. Die Feldstärke verschwindet also im Unendlichen.

Skizze des Funktionsverlaufs:
siehe Bild III-29.

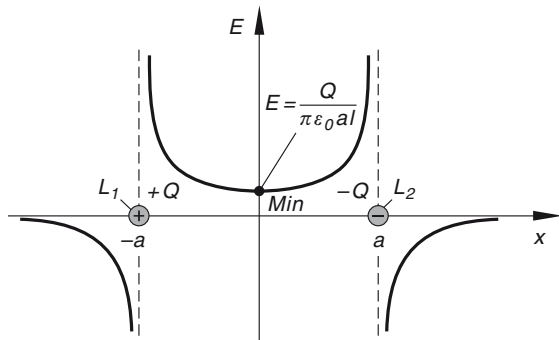


Bild III-29

Beispiel 19: Ungestörte Überlagerung zeitabhängiger Impulse

Kurvendiskussion

Auf einem Oszillograph wird der *sinusförmige* Impuls $y_1 = 2 \cdot \sin t$ mit dem *linearen* Impuls $y_2 = t$ zur Überlagerung gebracht (Bild III-30). Diskutieren Sie den zeitlichen Verlauf des *Gesamtimpulses*

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot \sin t + t$$

für $t \geq 0$ (Nullstellen, relative Extremwerte, Wendepunkte, Skizze des Funktionsverlaufs).

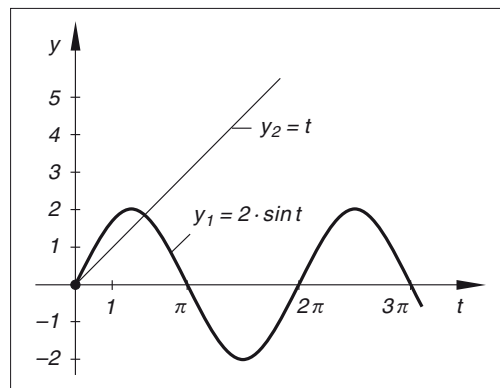


Bild III-30

Lösung:

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin t + t = 0$ oder $2 \cdot \sin t = -t \Rightarrow t_0 = 0$

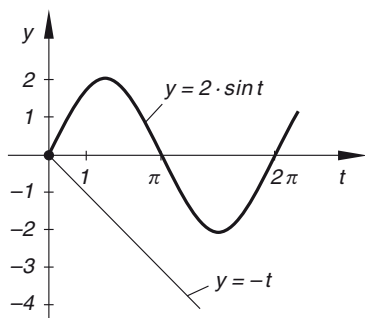
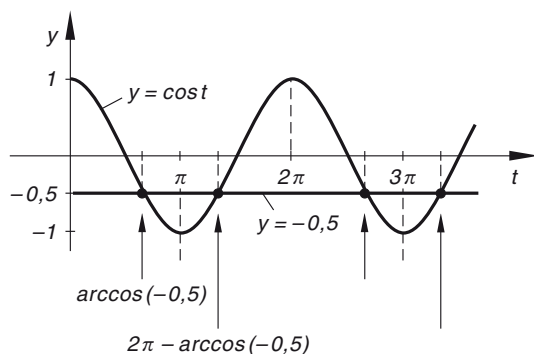
Es gibt, wie aus Bild III-31 unmittelbar ersichtlich, *keine* weiteren Nullstellen (die Kurven $y = 2 \cdot \sin t$ und $y = -t$ schneiden sich nur an der Stelle $t_0 = 0$).

Ableitungen der Funktion: $y' = 2 \cdot \cos t + 1$, $y'' = -2 \cdot \sin t$, $y''' = -2 \cdot \cos t$

Relative Extremwerte: $y' = 0$, $y'' \neq 0$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos t + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \cos t = -0,5$$

Die im Intervall $t \geq 0$ liegenden Lösungen dieser *trigonometrischen* Gleichung bestimmen wir anhand einer Skizze (Schnittpunkte der Kurven $y = \cos t$ und $y = -0,5$; siehe Bild III-32).

**Bild III-31****Bild III-32**

Wir lösen die Gleichung $\cos t = -0,5$ nach t auf und erhalten die im Intervall $0 \leq t \leq \pi$ liegende Lösung:

$$\cos t = -0,5 \Rightarrow t_1 = \arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3}$$

Wegen der *Periodizität* der Kosinusfunktion folgen weitere Lösungen im Abstand von jeweils einer Periode 2π :

$$t_{1k} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Diese Lösungen sind in Bild III-32 durch *kurze* Pfeile gekennzeichnet. Eine weitere Lösung liegt aus *Symmetriegründen* bei $t_2 = 2\pi - \arccos(-0,5) = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Wegen der *Periodizität* sind auch

$$t_{2k} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Lösungen der Gleichung $\cos t = -0,5$. Sie entsprechen den *langen* Pfeilen in Bild III-32.

Wir prüfen nun das Verhalten der 2. Ableitung an den Stellen t_{1k} bzw. t_{2k} :

$$\begin{aligned} y''(t_{1k}) &= -2 \cdot \sin t_{1k} = -2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right) = \\ &= -2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -1,732 < 0 \Rightarrow \text{relative Maxima} \end{aligned}$$

An den Stellen t_{1k} liegen somit *relative Maxima*. Die zugehörigen Ordinaten sind

$$\begin{aligned} y_{1k} &= 2 \cdot \sin t_{1k} + t_{1k} = 2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right) + \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \\ &= 2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi = 3,826 + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Die ersten *Maxima* lauten somit

$$\begin{aligned} k = 0: \text{Max}_1 &= \left(\frac{2\pi}{3}; 3,826 \right) = (2,094; 3,826) \\ k = 1: \text{Max}_2 &= \left(\frac{8\pi}{3}; 10,110 \right) = (8,378; 10,110) \\ k = 2: \text{Max}_3 &= \left(\frac{14\pi}{3}; 16,393 \right) = (14,661; 16,393) \end{aligned}$$

An den Stellen t_{2k} ist die 2. Ableitung dagegen *positiv*:

$$y''(t_{2k}) = -2 \cdot \sin t_{2k} = -2 \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right) = -2 \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) = 1,732 > 0$$

Dort liegen demnach *relative Minima*. Die zugehörigen Ordinatenwerte sind

$$\begin{aligned} y_{2k} &= 2 \cdot \sin t_{2k} + t_{2k} = 2 \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right) + \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \\ &= 2 \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) + \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi = 2,457 + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Die ersten *Minima* lauten daher

$$\begin{aligned} k = 0: \text{Min}_1 &= \left(\frac{4\pi}{3}; 2,457 \right) = (4,189; 2,457) \\ k = 1: \text{Min}_2 &= \left(\frac{10\pi}{3}; 8,740 \right) = (10,472; 8,740) \\ k = 2: \text{Min}_3 &= \left(\frac{16\pi}{3}; 15,023 \right) = (16,755; 15,023) \end{aligned}$$

Wendepunkte: $y'' = 0$, $y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \Rightarrow -2 \cdot \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$

Lösungen dieser Gleichung sind die bei

$$t_{3k} = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

liegenden Nullstellen der Sinusfunktion. Die 3. Ableitung ist dort (wie verlangt) von null *verschieden*:

$$y'''(t_{3k}) = -2 \cdot \cos t_{3k} = -2 \cdot \cos(k \cdot \pi) = \begin{cases} -2 & k = 0, 2, 4, \dots \\ 2 & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \neq 0$$

Die zugehörigen Ordinaten sind

$$y_{3k} = 2 \cdot \sin t_{3k} + t_{3k} = 2 \cdot \sin(k \cdot \pi) + k \cdot \pi = 0 + k \cdot \pi = k \cdot \pi$$

Die ersten *Wendepunkte* lauten somit

$$\left. \begin{array}{l} k = 0: W_1 = (0; 0) \\ k = 1: W_2 = (\pi; \pi) = (3,142; 3,142) \\ k = 2: W_3 = (2\pi; 2\pi) = (6,283; 6,283) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Alle Wendepunkte liegen} \\ \text{auf der Winkelhalbierenden} \\ \text{des 1. Quadranten } (y = t) \end{array}$$

Funktionsverlauf

Der zeitliche Verlauf des Impulses

$$y = 2 \cdot \sin t + t \quad \text{für } t \geq 0$$

ist in Bild III-33 dargestellt. Die Kurve *oszilliert* um die Winkelhalbierende $y = t$.

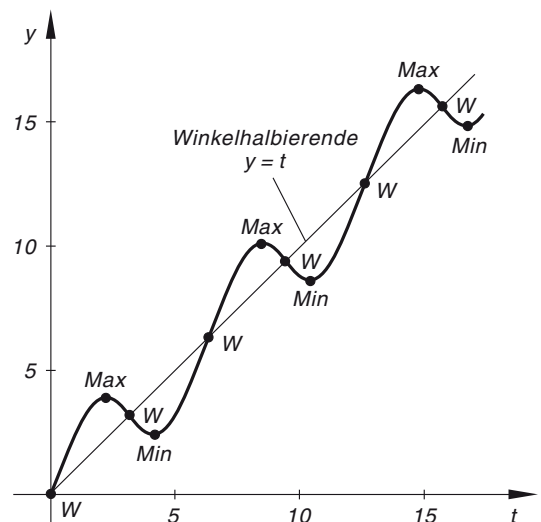


Bild III-33

Beispiel 20: Überlagerung von Sinusschwingungen mit gleicher Raumrichtung, aber unterschiedlicher Frequenz
Kurvendiskussion

Die durch die Gleichungen $y_1 = \sin t$ und $y_2 = \sin(2t)$ beschriebenen Sinusschwingungen *gleicher* Raumrichtung und gleicher Amplitude ($= 1$), aber *unterschiedlicher* Frequenz (Frequenzverhältnis $1:2$) werden *ungestört* zur *Überlagerung* gebracht (Bild III-34).

Diskutieren Sie den zeitlichen Verlauf der *Gesamtschwingung*

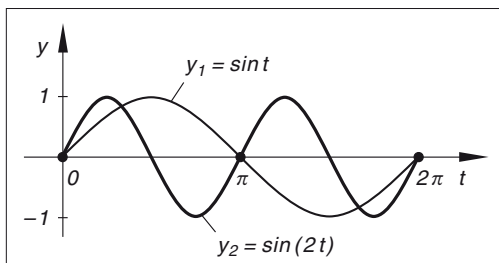


Bild III-34

$$y = y_1 + y_2 = \sin t + \sin(2t)$$

im Zeitintervall $t \geq 0$ (Periode, Nullstellen, relative Extremwerte, Wendepunkte, Skizze des Funktionsverlaufs).

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.6

Lösung:

Periode: Die Einzelschwingungen y_1 und y_2 besitzen die Perioden (Schwingungsdauern) $T_1 = 2\pi$ bzw. $T_2 = \pi$. Somit ist die *kleinste gemeinsame* Periode $T = 2\pi$ zugleich auch die Periode der *Gesamtschwingung*. Wir können uns daher bei allen weiteren Überlegungen auf das *Periodenintervall* $0 \leq t \leq 2\pi$ beschränken.

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow \sin t + \sin(2t) = 0 \Rightarrow \sin t + 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow$

$$\sin t (1 + 2 \cdot \cos t) = 0 \begin{cases} \sin t = 0 \\ 1 + 2 \cdot \cos t = 0 \quad \text{oder} \quad \cos t = -0,5 \end{cases}$$

($\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$, siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3)

Die Gleichung zerfällt somit in zwei Teilgleichungen:

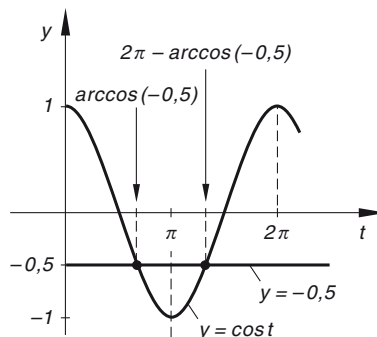
$$\sin t = 0 \Rightarrow t_1 = 0; \quad t_2 = \pi; \quad t_3 = 2\pi$$

$$\cos t = -0,5 \quad (\text{siehe Bild III-35}) \Rightarrow$$

$$t_4 = \arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_5 = 2\pi - \arccos(-0,5) = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Bild III-35



Nullstellen (neu nummeriert):

$$N_1 = (0; 0); \quad N_2 = (2\pi/3; 0); \quad N_3 = (\pi; 0); \quad N_4 = (4\pi/3; 0); \quad N_5 = (2\pi; 0)$$

Ableitungen:

$$y' = \cos t + 2 \cdot \cos(2t); \quad y'' = -\sin t - 4 \cdot \sin(2t);$$

$$y''' = -\cos t - 8 \cdot \cos(2t)$$

Relative Extremwerte: $y' = 0$, $y'' \neq 0$

$$y' = 0 \Rightarrow \cos t + 2 \cdot \cos(2t) = 0 \Rightarrow \cos t + 2(2 \cdot \cos^2 t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos t + 4 \cdot \cos^2 t - 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 t + 0,25 \cdot \cos t - 0,5 = 0$$

Dabei haben wir die trigonometrische Formel $\cos(2t) = 2 \cdot \cos^2 t - 1$ verwendet (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3). Mit Hilfe der *Substitution* $z = \cos t$ erhalten wir hieraus eine *quadratische* Gleichung mit folgenden Lösungen:

$$z^2 + 0,25z - 0,5 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = -0,125 \pm \sqrt{0,125^2 + 0,5} = -0,125 \pm 0,718$$

$$\Rightarrow z_1 = 0,593, \quad z_2 = -0,843$$

Nach *Rücksstitution* ergeben sich zwei *einfache* trigonometrische Gleichungen, deren Lösungen wir anhand der Bilder III-36 und III-37 als Schnittpunkte der Kosinuskurve mit Parallelen zur t -Achse wie folgt bestimmen:

$$\cos t = z_1 = 0,593 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_6 = \arccos 0,593 = 0,936 \\ t_7 = 2\pi - \arccos 0,593 = 5,347 \end{array} \right\} \text{ siehe Bild III-36}$$

$$\cos t = z_2 = -0,843 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_8 = \arccos(-0,843) = 2,574 \\ t_9 = 2\pi - \arccos(-0,843) = 3,710 \end{array} \right\} \text{ siehe Bild III-37}$$

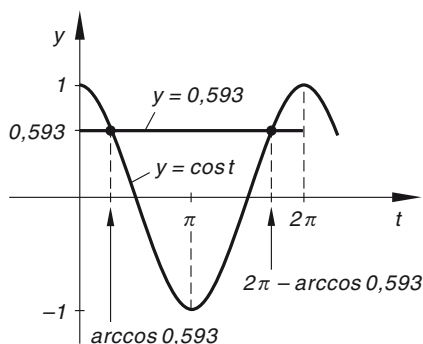


Bild III-36

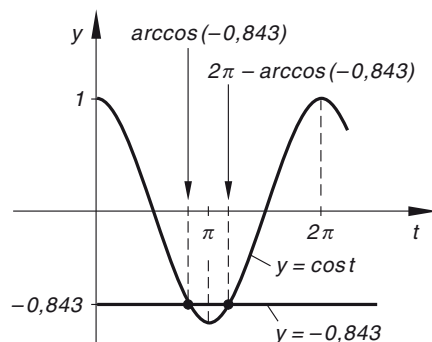


Bild III-37

Wie verhält sich die *zweite* Ableitung an den Stellen t_6 bis t_9 ?

$$y''(t_6 = 0,936) = -4,625 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } t_6 = 0,936$$

$$y''(t_7 = 5,347) = 4,625 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } t_7 = 5,347$$

$$y''(t_8 = 2,574) = 3,089 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } t_8 = 2,574$$

$$y''(t_9 = 3,710) = -3,089 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } t_9 = 3,710$$

Wir erhalten somit im Periodenintervall $0 \leq t \leq 2\pi$ *zwei* Maxima und *zwei* Minima:

$$\text{Maxima: } \text{Max}_1 = (0,936; 1,760); \quad \text{Max}_2 = (3,710; 0,369)$$

$$\text{Minima: } \text{Min}_1 = (2,574; -0,369); \quad \text{Min}_2 = (5,347; -1,760)$$

Wendepunkte: $y'' = 0, y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \Rightarrow -\sin t - 4 \cdot \sin(2t) = 0 \Rightarrow -\sin t - 8 \cdot \sin t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow$$

$$-\sin t(1 + 8 \cdot \cos t) = 0 \begin{cases} \sin t = 0 \\ 1 + 8 \cdot \cos t = 0 \text{ oder } \cos t = -0,125 \end{cases}$$

Dabei haben wir wiederum die *trigonometrische Formel* $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ verwendet (Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.3). Wir beschäftigen uns nun mit den Lösungen der erhaltenen *Teilgleichungen*:

$$\sin t = 0 \Rightarrow t_{10} = 0; \quad t_{11} = \pi; \quad t_{12} = 2\pi$$

$$\cos t = -0,125 \text{ (siehe Bild III-38)} \Rightarrow$$

$$t_{13} = \arccos(-0,125) = 1,696$$

$$t_{14} = 2\pi - \arccos(-0,125) = 4,587$$

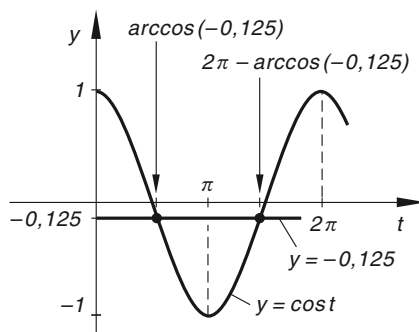


Bild III-38

Die 3. Ableitung ist an den Stellen t_{10} bis t_{14} von null *verschieden*:

$$y'''(t_{10} = 0) = -9 \neq 0; \quad y'''(t_{11} = \pi) = -7 \neq 0;$$

$$y'''(t_{12} = 2\pi) = -9 \neq 0; \quad y'''(t_{13} = 1,696) = 7,875 \neq 0;$$

$$y'''(t_{14} = 4,587) = 7,875 \neq 0$$

Somit gibt es im *Periodenintervall* $0 \leq t \leq 2\pi$ genau *fünf* Wendepunkte (von links nach rechts geordnet):

$$W_1 = (0; 0); \quad W_2 = (1,696; 0,744); \quad W_3 = (\pi; 0);$$

$$W_4 = (4,587; -0,744); \quad W_5 = (2\pi; 0)$$

(W_1 , W_3 und W_5 sind zugleich *Nullstellen*)

Funktionsverlauf

Bild III-39 zeigt den *zeitlichen* Verlauf der *Gesamtschwingung* $y = \sin t + \sin(2t)$ im *Periodenintervall* $0 \leq t \leq 2\pi$.

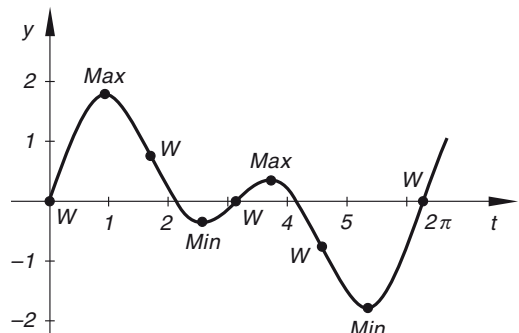


Bild III-39

Beispiel 21: Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes

Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Zwischen der *Fallgeschwindigkeit* v und dem *Fallweg* s besteht bei Berücksichtigung des *Luftwiderstandes* der folgende funktionale Zusammenhang⁸⁾:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} = \sqrt{mg} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{2ks}{m}}}{k}}, \quad s \geq 0$$

m : Masse des aus der Ruhe heraus frei fallenden Körpers; g : Erdbeschleunigung; $k > 0$: Reibungskoeffizient

Zeigen Sie mit Hilfe der *L'Hospital'schen Regel*, dass man aus dieser Beziehung durch den *Grenzübergang* $k \rightarrow 0$ das bekannte Fallgesetz für den *lufteleeren* Raum

$$v = \sqrt{2gs}, \quad s \geq 0$$

erhält.

Anmerkung: In Kapitel V, Beispiel 1 wird diese Aufgabe durch *Reihenentwicklung* gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.3.3

⁸⁾ Diese Beziehung wird in Kapitel II, Beispiel 23 aus den *Zeitabhängigkeiten* von v und s und in Kapitel IV, Beispiel 14 durch *Integration* des *Newtonschen Grundgesetzes* hergeleitet.

Lösung:

Mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Formelsammlung, Abschnitt III.3.3) erhalten wir zunächst

$$v = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{mg} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{2ks}{m}}}{k}} = \sqrt{mg} \cdot \sqrt{\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2s}{m}k}}{k} \right)}$$

Der Grenzwert unter der Wurzel führt dabei zu dem *unbestimmten Ausdruck*

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2s}{m}k}}{k} \right) \rightarrow \frac{0}{0} \quad \left(\text{da } e^{-\frac{2s}{m}k} \rightarrow e^{-0} = 1 \text{ für } k \rightarrow 0 \right)$$

auf den die Grenzwertregel von *Bernoulli* und *de L'Hospital* anwendbar ist:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2s}{m}k}}{k} \right) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dk} \left(1 - e^{-\frac{2s}{m}k} \right)}{\frac{d}{dk} (k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - e^{-\frac{2s}{m}k} \cdot \left(-\frac{2s}{m} \right)}{1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{2s}{m} \cdot e^{-\frac{2s}{m}k} \right) = \frac{2s}{m} \cdot \underbrace{\lim_{k \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{2s}{m}k} \right)}_{e^0 = 1} = \frac{2s}{m} \cdot 1 = \frac{2s}{m} \end{aligned}$$

Das *Fallgesetz* geht damit über in

$$v = \sqrt{mg} \cdot \sqrt{\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2s}{m}k}}{k} \right)} = \sqrt{mg} \cdot \sqrt{\frac{2s}{m}} = \sqrt{mg \frac{2s}{m}} = \sqrt{2gs}$$

Bild III-40 zeigt die Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* v vom *Fallweg* s im luftleeren Raum und unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes⁹⁾.

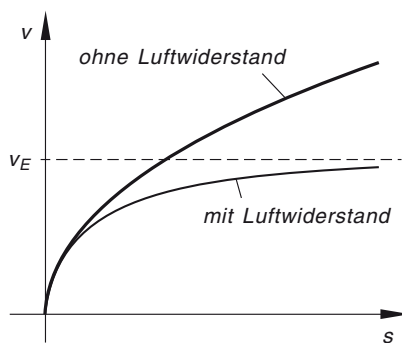


Bild III-40

⁹⁾ Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den *Endwert* $v_E = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (Endgeschwindigkeit nach unendlich langer Fallstrecke). Das Fallgesetz lässt sich dann auch in der Form

$$v = v(s) = v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}, \quad s \geq 0$$

darstellen (siehe hierzu auch Kapitel II, Beispiel 23).

Beispiel 22: Erzwungene Schwingung im Resonanzfall***Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital***

Ein *schwach gedämpftes schwingungsfähiges mechanisches System* mit dem Dämpfungsfaktor δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0 (des ungedämpften Systems) wird von außen durch eine *periodische Kraft* mit *derselben* Kreisfrequenz ω_0 zu *erzwungenen* Schwingungen angeregt. In Kapitel IX, Beispiel 16 wird gezeigt, dass das *Weg-Zeit-Gesetz* dieser *Resonanzschwingung* wie folgt lautet¹⁰⁾:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\delta} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right], \quad t \geq 0$$

m : Schwingmasse; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $x(t)$: Auslenkung zur Zeit t

Bestimmen Sie hieraus durch die *Grenzwertbildung* $\delta \rightarrow 0$ das entsprechende Weg-Zeit-Gesetz $x_0(t)$ der *ungedämpften* Schwingung.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.3.3

Lösung:

Beim Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ ist zu beachten, dass die Kreisfrequenz ω_d noch von δ abhängt: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Wir erhalten zunächst den folgenden *unbestimmten Ausdruck*:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_0}{2m\delta} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right] = \\ &= \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d}}{\delta} \right] \rightarrow \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Denn für $\delta \rightarrow 0$ gilt

$$e^{-\delta t} \rightarrow e^0 = 1, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \rightarrow \omega_0,$$

$$\sin(\omega_d t) = \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right) \rightarrow \sin(\omega_0 t)$$

und der Zähler des Bruches strebt somit ebenfalls gegen 0:

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \rightarrow \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{1 \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} = \frac{\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} = 0$$

¹⁰⁾ Die *Anregung* des Systems erfolgt durch die zeitabhängige *periodische Kraft* $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$, die *Anfangswerte* der Bewegung sind $x(0) = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Wegen der Form „ $\frac{0}{0}$ “ ist die Grenzwertregel von *Bernoulli* und *de L'Hospital* anwendbar und führt zunächst zu ¹¹⁾

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\delta} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right]}{\frac{d}{d\delta} [\delta]} = \\
 &= \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{d\delta} \left[- \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right] = - \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \underbrace{\frac{d}{d\delta} \left[\frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right]}_{z(\delta)} = \\
 &= - \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{d\delta} [z(\delta)] = - \frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} z'(\delta)
 \end{aligned}$$

Bevor wir diesen Grenzwert bestimmen, muss die *Ableitung* der in der eckigen Klammer stehenden Funktion

$$z(\delta) = \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} = \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

gebildet werden (differenziert wird nach δ). Sie erfolgt nach der *Quotientenregel*, wobei die *Zählerfunktion* nach der *Produktregel* zu differenzieren ist. Wir setzen daher der besseren Übersicht wegen:

$$\text{Zähler: } u = e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) = \underbrace{e^{-\delta t}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right)}_{\beta} = \alpha\beta$$

$$\text{Nenner: } v = \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Somit ist

$$z = \frac{u}{v} = \frac{\alpha\beta}{v} \quad \text{mit} \quad \alpha = e^{-\delta t}, \quad \beta = \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right), \quad v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Die gesuchte Ableitung $z' = z'(\delta)$ wird dann nach der Quotientenregel in Verbindung mit der Produktregel gebildet, wobei stets nach der Variablen δ zu differenzieren ist:

$$z' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{mit} \quad u = \alpha\beta, \quad u' = \alpha'\beta + \beta'\alpha$$

¹¹⁾ Die Ableitung des *ersten* Summanden im *Zähler* des Bruches verschwindet (dieser ist von δ *unabhängig*), während die Ableitung des *Nenners* den Wert *eins* ergibt.

Wir bilden daher zunächst unter Verwendung der *Kettenregel* die benötigten Ableitungen α' , β' , u' und v' :

$$\alpha' = \frac{d}{d\delta} [e^{-\delta t}] = e^{-\delta t} \cdot (-t) = -t \cdot e^{-\delta t}$$

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{d}{d\delta} \left[\sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t \right) \right] = \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot (-2\delta) \cdot t = \\ &= - \frac{\delta t \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t \right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = - \frac{\delta t \cdot \cos(\omega_d t)}{\omega_d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u' &= \alpha' \beta + \beta' \alpha = -t \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) - \frac{\delta t \cdot \cos(\omega_d t)}{\omega_d} \cdot e^{-\delta t} = \\ &= -t \cdot e^{-\delta t} \left[\sin(\omega_d t) + \frac{\delta \cdot \cos(\omega_d t)}{\omega_d} \right] = \\ &= - \frac{t \cdot e^{-\delta t}}{\omega_d} [\omega_d \cdot \sin(\omega_d t) + \delta \cdot \cos(\omega_d t)] \end{aligned}$$

$$v' = \frac{d}{d\delta} \left[\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot (-2\delta) = - \frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = - \frac{\delta}{\omega_d}$$

Die gesuchte Ableitung $z' = z'(\delta)$ lautet damit wie folgt:

$$\begin{aligned} z' &= z'(\delta) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \\ &= \frac{- \frac{t \cdot e^{-\delta t}}{\omega_d} [\omega_d \cdot \sin(\omega_d t) + \delta \cdot \cos(\omega_d t)] \omega_d + \frac{\delta}{\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d^2} = \\ &= \frac{-t \cdot e^{-\delta t} [\omega_d \cdot \sin(\omega_d t) + \delta \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{\delta}{\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d^2} = \\ &= - \frac{e^{-\delta t}}{\omega_d^2} \left[\omega_d t \cdot \sin(\omega_d t) + \delta t \cdot \cos(\omega_d t) - \frac{\delta}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \end{aligned}$$

Beim *Grenzübergang* $\delta \rightarrow 0$ und somit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \rightarrow \omega_0$ und $e^{-\delta t} \rightarrow e^0 = 1$ wird hieraus

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} z' = \lim_{\delta \rightarrow 0} z'(\delta) = - \frac{1}{\omega_0^2} [\omega_0 t \cdot \sin(\omega_0 t)] = - \frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

Das gesuchte *Weg-Zeit-Gesetz* bei *fehlender Dämpfung* besitzt damit die Gestalt

$$x_0(t) = -\frac{F_0}{2m} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} z'(\delta) = -\frac{F_0}{2m} \cdot \left(-\frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Bild III-41 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser *ungedämpften erzwungenen* Schwingung im *Resonanzfall*. Die Schwingungsamplituden nehmen dabei *rasch zu* und *zerstören* somit im Laufe der Zeit das System.

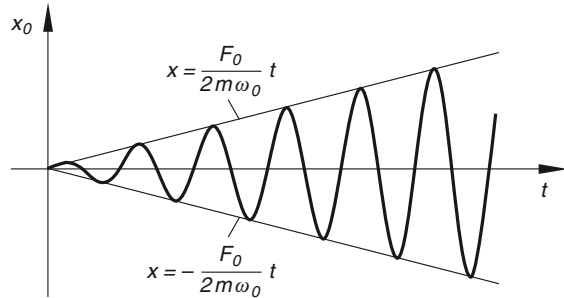
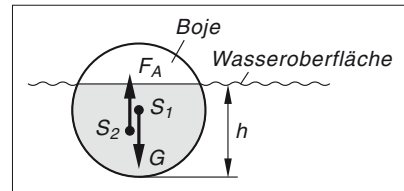


Bild III-41

Beispiel 23: Eintauchtiefe einer Boje in Salzwasser

Tangentenverfahren von Newton

Wie tief taucht eine *kugelförmige Boje* mit dem Radius $R = 45 \text{ cm}$ in Salzwasser der Dichte $\rho_S = 1,03 \text{ g/cm}^3$ ein, wenn die Dichte der Boje $\rho_B = 0,7 \text{ g/cm}^3$ beträgt (Bild III-42)?



S_1 : Schwerpunkt der Boje; S_2 : Schwerpunkt der eingetauchten Kugelkappe, im Bild *grau* unterlegt

Bild III-42

Lösungshinweis: Die Eintauchtiefe h genügt (wie sich zeigen wird) einer *kubischen* Gleichung. Lösen Sie diese nach dem *Newtonschen Tangentenverfahren*.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.7.2

Physikalische Grundlagen: A35

Lösung:

Im *Gleichgewichtszustand* wird die nach *unten* gerichtete *Gewichtskraft* G , die im Schwerpunkt S_1 der kugelförmigen Boje angreift, durch den nach *oben* gerichteten *Auftrieb* F_A , der im Schwerpunkt S_2 der (eingetauchten) *Kugelkappe* angreift, *kompensiert*¹²⁾.

¹²⁾ Im *Gleichgewichtszustand* liegen Gewichtskraft und Auftriebskraft in einer *gemeinsamen Wirkungslinie*. Die beiden Schwerpunkte S_1 (Kugel) und S_2 (Kugelkappe) liegen dann *übereinander*.

Das *Gewicht* der Boje beträgt dabei

$$G = mg = \varrho_B V g = \varrho_B \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g = \frac{4}{3} \pi \varrho_B g R^3$$

($V = \frac{4}{3} \pi R^3$: Volumen der kugelförmigen Boje). Nach dem *Archimedischen Prinzip* [A35] ist der *Auftrieb* F_A gleich dem Gewicht der *verdrängten* Salzwassermenge (d. h. gleich dem *Gewicht* der in Bild III-42 *grau* unterlegten Kugelkappe, wäre diese mit *Salzwasser* gefüllt!):

$$F_A = m_K g = \varrho_S V_K g$$

($m_K = \varrho_S V_K$: Masse der mit Salzwasser gefüllten Kugelkappe; V_K : Volumen der Kugelkappe). Aus der Formelsammlung (Abschnitt I.8.14) entnehmen wir für das Volumen der *Kugelkappe* die Formel

$$V_K = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) = \frac{1}{3} \pi (3Rh^2 - h^3)$$

Somit ist

$$F_A = \varrho_S V_K g = \varrho_S \cdot \frac{1}{3} \pi (3Rh^2 - h^3) g = \frac{1}{3} \pi \varrho_S g (3Rh^2 - h^3)$$

Aus der *Gleichgewichtsbedingung* $G = F_A$ erhalten wir damit für die Eintauchtiefe h die folgende *kubische* Bestimmungsgleichung:

$$\frac{4}{3} \pi \varrho_B g R^3 = \frac{1}{3} \pi \varrho_S g (3Rh^2 - h^3) \Rightarrow h^3 - 3Rh^2 + \frac{4\varrho_B R^3}{\varrho_S} = 0$$

Nach Einsetzen der Werte für die Größen R , ϱ_B und ϱ_S lautet diese Gleichung wie folgt:

$$h^3 - 1,35h^2 + 0,24772 = 0 \quad (h \text{ in m})$$

Die gesuchte Lösung muss aus *physikalischen* Gründen im Intervall $0 < h \leq 2R = 0,9$ liegen. Eine *Näherungslösung* beschaffen wir uns, indem wir die Gleichung zunächst geringfügig umstellen

$$h^3 = 1,35h^2 - 0,24772$$

und dann *zeichnerisch* den *Schnittpunkt* der beiden Funktionen (Kurven) $y = h^3$ und $y = 1,35h^2 - 0,24772$ bestimmen. Anhand der Skizze (Bild III-43) wählen wir als *Startwert* für das *Newtonsche Tangentenverfahren* $h_0 = 0,55$ (die Schnittstelle liegt zwischen 0,5 und 0,6).

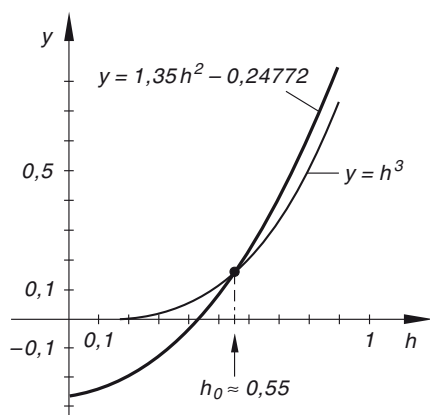


Bild III-43

Die *Newton-Iteration* liefert dann mit

$$f(h) = h^3 - 1,35 h^2 + 0,24772, \quad f'(h) = 3 h^2 - 2,7 h$$

nach der *Iterationsformel*

$$h_n = h_{n-1} - \frac{f(h_{n-1})}{f'(h_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bereits nach *zwei* Schritten eine auf *vier* Nachkommastellen genaue Näherungslösung:

n	h_{n-1}	$f(h_{n-1})$	$f'(h_{n-1})$	h_n
1	0,55	0,005 720	− 0,577 500	0,559 905
2	0,559 905	0,000 030	− 0,571 263	0,559 958

Ergebnis: $h = 0,559 958 \approx 0,56$

Die *Eintauchtiefe* beträgt somit $h = 0,56 \text{ m} = 56 \text{ cm}$.

Beispiel 24: Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)

Tangentenverfahren von Newton

Bild III-44 zeigt ein *freihängendes Seil* mit einer Spannweite von $2l = 20 \text{ m}$ und dem Durchhang $h = 1 \text{ m}$. Die Höhe der beiden Träger beträgt $H = 8 \text{ m}$. Die Funktionsgleichung dieser *Seilkurve* (auch *Kettenlinie* genannt) ist dann in der Form

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b, \quad -l \leq x \leq l$$

darstellbar. Berechnen Sie die beiden *Kurvenparameter* $a > 0$ und b .

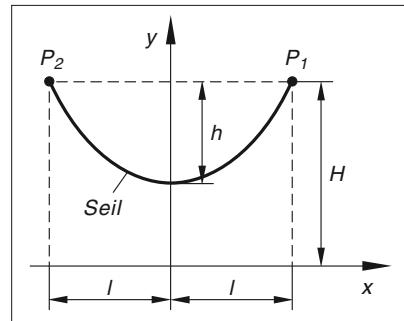


Bild III-44

Lösungshinweis: Sie stoßen beim Lösen dieser Aufgabe auf eine *transzendente* Gleichung, die exakt *nicht* lösbar ist. Bestimmen Sie die *Näherungslösung* dieser Gleichung nach dem *Newtonschen Tangentenverfahren* mit einer Genauigkeit von *vier* Stellen nach dem Komma.

Anmerkung: Diese Aufgabe wird in Kapitel V, Beispiel 10 mit Hilfe der *Reihenentwicklung* näherungsweise gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, IV.3.7.2

Lösung:

Die Seilkurve schneidet die y -Achse bei

$$y(0) = a \cdot \cosh 0 + b = a \cdot 1 + b = a + b$$

Zwischen Trägerhöhe H , Durchhang h und diesem Schnittpunkt besteht dann nach Bild III-44 der folgende Zusammenhang:

$$y(0) + h = H \Rightarrow a + b + h = H$$

Der Kurvenparameter b ist somit durch den Kurvenparameter a *eindeutig* bestimmt:

$$b = H - h - a$$

Die *Bestimmungsgleichung* für a erhalten wir auf folgende Weise. Der Aufhängepunkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = l$ und $y_1 = H$ liegt *auf* der Seilkurve. Daher ist

$$H = a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) + b = a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) + H - h - a$$

und somit

$$a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) = a + h$$

Wir dividieren diese *Bestimmungsgleichung* für den Kurvenparameter a noch durch a selbst und setzen dann die gegebenen Werte ein:

$$\cosh\left(\frac{l}{a}\right) = 1 + \frac{h}{a} \quad \text{oder} \quad \cosh\left(\frac{10 \text{ m}}{a}\right) = 1 + \frac{1 \text{ m}}{a}$$

Mit der *Substitution* $z = \frac{10 \text{ m}}{a}$ geht diese Gleichung schließlich über in

$$\cosh z = 1 + 0,1z = 0,1z + 1, \quad z > 0 \quad (\text{da } a > 0)$$

Eine *Näherungslösung* erhalten wir, indem wir die Kurven $y = 0,1z + 1$ und $y = \cosh z$ zum *Schnitt* bringen. Der *Schnittpunkt* liegt dabei nach Bild III-45 in der Nähe von $z_0 = 0,2$ ¹³⁾. Dieser Wert dient uns als *Startwert* für die *1. Iteration nach Newton*.

Wir lösen jetzt die auf die *spezielle* Form

$$f(z) = \cosh z - 0,1z - 1 = 0$$

gebrachte Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton.

¹³⁾ Ein weiterer Schnittpunkt liegt *exakt* bei $z = 0$. Er scheidet jedoch wegen $a > 0$ und somit auch $z > 0$ aus.

Die *Iterationsformel* lautet:

$$z_n = z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$(f'(z) = \sinh z - 0,1)$. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

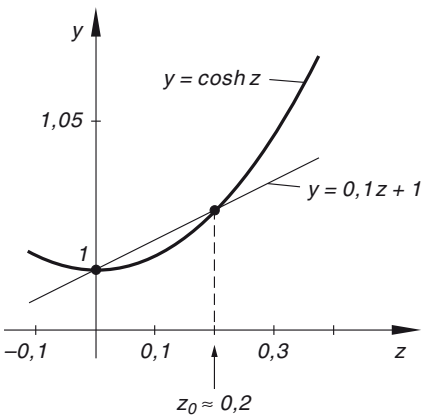


Bild III-45

n	z_{n-1}	$f(z_{n-1})$	$f'(z_{n-1})$	z_n
1	0,2	0,000 067	0,101 336	0,199 339
2	0,199 339	-0,000 000	0,100 662	0,199 339

Ergebnis: $z = 0,199\,339 \Rightarrow a = \frac{10\,\text{m}}{z} = \frac{10\,\text{m}}{0,199\,339} = 50,1658\,\text{m}$

Für den noch unbekannten Parameter b erhalten wir den folgenden Wert:

$$b = H - h - a = (8 - 1 - 50,1658)\,\text{m} = -43,1658\,\text{m}$$

Die Gleichung der *Seilkurve* (*Kettenlinie*) lautet somit:

$$y = 50,1658\,\text{m} \cdot \cosh(0,0199\,\text{m}^{-1} \cdot x) - 43,1658\,\text{m}, \quad -10\,\text{m} \leq x \leq 10\,\text{m}$$

IV Integralrechnung

Beispiel 1: Induktionsspannung in einer in einem Magnetfeld rotierenden Metallscheibe

Elementare Integration (Grundintegral)

Eine *Metallscheibe* vom Radius R rotiert in einem *homogenen* Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω um die Feldrichtung (senkrecht zur Zeichenebene, siehe Bild IV-1). Bestimmen Sie die über zwei Schleifkontakte abgreifbare *Induktionsspannung* U zwischen der Scheibenmitte M und dem Scheibenrandpunkt P durch Anwendung des *Induktionsgesetzes* [A37].

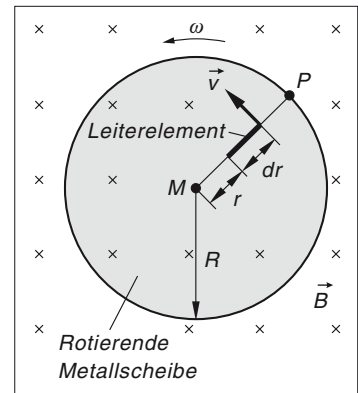


Bild IV-1

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A8, A37

Lösung:

Wir betrachten das in Bild IV-1 eingezeichnete, in *radialer* Richtung im Abstand r von der Drehachse M liegende *Leiterelement* der Länge dr . Es bewegt sich mit der *konstanten* Bahngeschwindigkeit [A8] $v = \omega r$ *senkrecht* durch das Magnetfeld mit der konstanten Flussdichte \vec{B} . Nach dem *Induktionsgesetz* [A37] wird in diesem Leiterelement eine *Spannung* vom Betrag

$$dU = B v dr = B \omega r dr \quad (\text{mit } B = |\vec{B}|)$$

induziert. Die zwischen Scheibenmitte M und Scheibenrandpunkt P abgreifbare Induktionsspannung erhält man dann durch Summierung, d. h. *Integration* der Beiträge *aller* zwischen M und P gelegener Leiterelemente. Die gesuchte *Induktionsspannung* beträgt somit

$$U = \int_{r=0}^R dU = B \omega \cdot \int_0^R r dr = B \omega \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = B \omega \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} B \omega R^2$$

und ist *konstant*.

Beispiel 2: Rollbewegung einer Kugel längs einer schiefen Ebene
Elementare Integrationen (Grundintegrale)

Eine homogene *Vollkugel* mit der Masse m und dem Radius r *rollt* (ohne zu gleiten) eine *schiefe Ebene* mit dem Neigungswinkel α hinab (Bild IV-2).

- a) Beschreiben Sie die Bewegung des *Kugelschwerpunktes* S durch den *zeitlichen Verlauf* von *Beschleunigung* a , *Geschwindigkeit* v und *Ortskoordinate* x .
- b) Mit welcher (zeitabhängigen) *Winkelgeschwindigkeit* ω erfolgt die *Drehung* der Kugel um ihren Schwerpunkt S ?

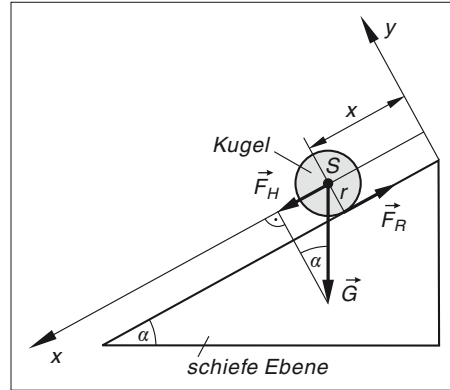


Bild IV-2

Lösungshinweis: Die Bewegung erfolgt aus der *Anfangslage* $x(t = 0) = 0$ und aus der *Ruhe* heraus. Gehen Sie bei der Lösung dieser Aufgabe von dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] aus. Die *konstante* Haftreibungskraft \vec{F}_R lässt sich aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36] bestimmen. Das *Massenträgheitsmoment* der Kugel bezüglich der *Schwerpunktachse* beträgt $J = \frac{2}{5} m r^2$.

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A7, A27, A36

Lösung:

- a) Auf den *Schwerpunkt* S , dessen Lage wir nach Bild IV-2 durch die Koordinate x beschreiben, wirken die folgende Kräfte ein (Kraftkomponenten in x -Richtung):

1. Die *Hangabtriebskraft*¹⁾ $F_H = m g \cdot \sin \alpha$;
2. Die *konstante Haftreibungskraft* F_R .

Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann

$$m a = m \ddot{x} = F_H - F_R = m g \cdot \sin \alpha - F_R \quad (\text{Beschleunigung } a = \ddot{x})$$

¹⁾ Sie ist die *Komponente* der Gewichtskraft $G = m g$ *längs* der schiefen Ebene und lässt sich aus dem eingezeichneten *Kräftedreieck* bestimmen.

Zugleich erfolgt eine *Drehung* der Kugel um ihren *Schwerpunkt* S , hervorgerufen durch das *Moment* $M = r F_R$ der Haftreibungskraft F_R [A7]. Nach dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36] gilt dann

$$J \ddot{\varphi} = M = r F_R$$

(die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ ist die *zweite Ableitung* des zeitabhängigen Drehwinkels φ nach der Zeit t). Zwischen dem Drehwinkel φ und der Schwerpunktskoordinate x besteht ferner die lineare *Abrollbedingung* $x = r\varphi$, aus der man durch *zweimalige* Differentiation nach der Zeit t die Beziehung

$$\ddot{x} = r \ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

gewinnt. Wir setzen diesen Ausdruck in das Grundgesetz der Drehbewegung ein und erhalten unter Berücksichtigung von $J = \frac{2}{5} m r^2$ eine Gleichung, die wir nach der Haftreibungskraft F_R auflösen:

$$J \ddot{\varphi} = \frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{2}{5} m r \ddot{x} = r F_R \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{2}{5} m \ddot{x}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in das *Newtonsche Grundgesetz* ein:

$$m \ddot{x} = m g \cdot \sin \alpha - \frac{2}{5} m \ddot{x} \quad | : m \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = g \cdot \sin \alpha - \frac{2}{5} \ddot{x}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach \ddot{x} erhalten wir für die *Beschleunigung* des Kugelschwerpunktes den *konstanten* Wert

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha$$

Die *Integration* dieser Gleichung führt unter Berücksichtigung der Anfangsgeschwindigkeit $v(t=0) = 0$ zu dem folgenden *linearen Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* (die Integrationsvariable bezeichnen wir mit τ):

$$v(t) = \dot{x} = \int_0^t \ddot{x} d\tau = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \cdot \int_0^t 1 d\tau = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \left[\tau \right]_0^t = \left(\frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \right) t$$

Nochmalige Integration liefert das *Weg-Zeit-Gesetz* (Anfangswert: $x(t=0) = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v d\tau = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \cdot \int_0^t \tau d\tau = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \left[\frac{1}{2} \tau^2 \right]_0^t = \\ &= \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} t^2 = \left(\frac{5}{14} g \cdot \sin \alpha \right) t^2 \end{aligned}$$

b) Aus der *Abrollbedingung* $x = r\varphi$ folgt durch *Differenzieren* nach der Zeit t

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \quad \text{oder} \quad v = r\omega \quad (\text{mit } v = \dot{x} \text{ und } \omega = \dot{\varphi})$$

Somit ist unter Beachtung von Lösungsteil a)

$$\omega = \omega(t) = \frac{v}{r} = \left(\frac{5g \cdot \sin \alpha}{7r} \right) t$$

d. h. die *Winkelgeschwindigkeit* wächst wie die Geschwindigkeit *linear* mit der Zeit.

Beispiel 3: Oberflächenprofil einer rotierenden Flüssigkeit
Elementare Integration (Grundintegral)

Bild IV-3 zeigt einen ebenen Schnitt durch die Symmetrieachse eines mit Wasser gefüllten *zylindrischen Gefäßes* vom Radius R , das mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse rotiert. Welches *Profil* nimmt die Wasseroberfläche im dynamischen *Gleichgewichtszustand* an?

Zylinderachse (Symmetrieachse): y -Achse

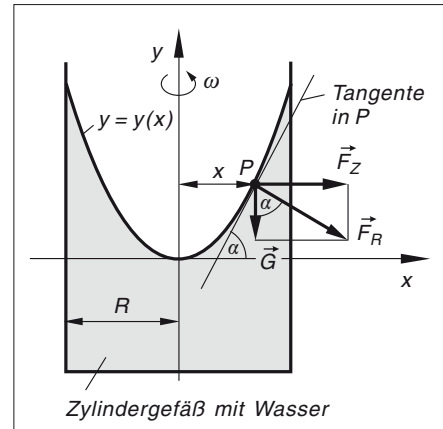


Bild IV-3

Lösungshinweis: Die auf ein in der Wasseroberfläche liegendes Masseteilchen (Punkt P) einwirkende *Gesamtkraft* steht im dynamischen Gleichgewichtszustand *senkrecht* zur Wasseroberfläche.

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A15

Lösung:

Wir betrachten ein *Masseteilchen* m im Punkt $P = (x; y)$ der *stabilisierten* Wasseroberfläche (Bild IV-3). Es unterliegt dem Einfluss *zweier* Kräfte. Senkrecht nach *unten* wirkt das *Gewicht* \vec{G} vom Betrag $G = mg$, nach *außen* die *Zentrifugalkraft* \vec{F}_Z vom Betrag $F_Z = m\omega^2 x$ [A15]. Beide Kräfte setzen sich zu einer *Resultierenden* \vec{F}_R zusammen, die im Gleichgewichtszustand *senkrecht* zur Wasseroberfläche, d. h. *senkrecht* zur eingezeichneten *Tangente* an die gesuchte Schnittkurve $y = y(x)$ verlaufen muss²⁾.

²⁾ Andernfalls gäbe es eine *tangentiale* Kraftkomponente, die das Wasserteilchen *entgegen* der Annahme *verschieben* würde.

Der Steigungswinkel α der Tangente in P ist zugleich der Winkel zwischen der Gewichtskraft \vec{G} und der Resultierenden \vec{F}_R . Aus dem *Kräftedreieck* erhalten wir die Beziehung

$$\tan \alpha = \frac{F_Z}{G} = \frac{m \omega^2 x}{m g} = \frac{\omega^2}{g} x$$

Andererseits ist $\tan \alpha$ definitionsgemäß die *Steigung* der *Kurventangente* und somit identisch mit der 1. Ableitung der (noch unbekannten) Schnittkurve $y = y(x)$. Aus der Beziehung

$$y' = \tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} x$$

erhalten wir dann durch *Integration* die gesuchte Gleichung der Schnittkurve:

$$y = \int y' dx = \frac{\omega^2}{g} \cdot \int x dx = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

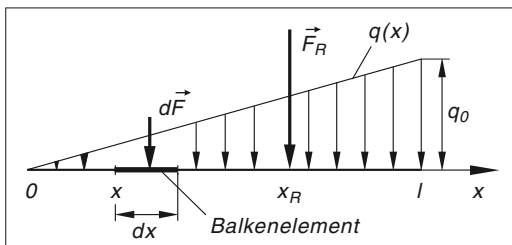
Diese *Parabel* verläuft nach unserer Wahl des Koordinatensystems durch den *Koordinatenursprung*, somit hat die Integrationskonstante den Wert $C = 0$. Die Wasseroberfläche selbst besitzt daher das Profil eines *Rotationsparaboloids* mit der Funktionsgleichung³⁾

$$y = \frac{\omega^2}{2g} r^2, \quad 0 \leq r \leq R \quad (r: \text{Zylinderkoordinate})$$

Beispiel 4: Resultierende eines ebenen parallelen Kräftesystems *Elementare Integrationen (Grundintegrale)*

Ein *homogener* Balken der Länge l wird nach Bild IV-4 durch eine *linear ansteigende Streckenlast* (*Dreieckslast*) $q(x)$ beansprucht. Bestimmen Sie die *resultierende Kraft* \vec{F}_R nach Größe (Betrag) und Lage (Wirkungslinie).

Bild IV-4



Lösungshinweis: Gehen Sie zunächst von dem eingezeichneten *Balkenelement* dx aus und bestimmen Sie die auf dieses Element einwirkende *Kraft* vom Betrag dF sowie das von dieser Kraft erzeugte *Moment* vom Betrag dM [A7].

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A7

³⁾ Die Wasseroberfläche ist eine *Rotationsfläche*, die durch Drehung der Parabel um die Zylinderachse entsteht. Dabei wird die Koordinate x zum *Radius* der Drehbewegung und geht somit in die *Zylinderkoordinate* r über (r : senkrechter Abstand des Punktes P von der Symmetrieachse).

Lösung:

An der Stelle x wirkt auf das eingezeichnete *Balkenelement* der Länge dx eine Kraft vom Betrag $dF = q(x) dx$. Mit der im Intervall $0 \leq x \leq l$ linear ansteigenden Streckenlast (Dreieckslast) $q(x) = \frac{q_0}{l} x$ erhalten wir somit ⁴⁾

$$dF = q(x) dx = \frac{q_0}{l} x dx$$

und durch Summation, d. h. *Integration* über sämtliche Balkenelemente zwischen $x = 0$ und $x = l$ schließlich den Betrag der *resultierenden Kraft*:

$$F_R = \int_{x=0}^l dF = \frac{q_0}{l} \cdot \int_0^l x dx = \frac{q_0}{l} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^l = \frac{q_0}{l} \cdot \frac{1}{2} l^2 = \frac{q_0 l}{2}$$

Die *Wirkungslinie* der Resultierenden F_R wird durch die Koordinate x_R *eindeutig* festgelegt. Wir bestimmen sie wie folgt. Die an der Stelle x einwirkende Kraft dF erzeugt bezüglich des Koordinatenursprungs 0 ein Moment vom Betrag [A7]

$$dM = x dF = x q(x) dx = x \frac{q_0}{l} x dx = \frac{q_0}{l} x^2 dx$$

Durch Summation, d. h. *Integration* in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = l$ erhält man hieraus das *Gesamtmoment*

$$M = \int_{x=0}^l dM = \frac{q_0}{l} \cdot \int_0^l x^2 dx = \frac{q_0}{l} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^l = \frac{q_0}{l} \cdot \frac{1}{3} l^3 = \frac{q_0 l^2}{3}$$

Dieses Moment erzeugt auch die im Abstand x_R angreifende *resultierende Kraft* F_R :

$$M = x_R F_R = x_R \frac{q_0 l}{2}$$

Somit ist

$$M = x_R \frac{q_0 l}{2} = \frac{q_0 l^2}{3} \quad \text{und damit} \quad x_R = \frac{2}{3} l$$

Die *Resultierende* $F_R = \frac{q_0 l}{2}$ greift daher im Abstand $x_R = \frac{2}{3} l$ vom *linken* Randpunkt an. Ihre *Richtung* ist die der Einzelkräfte (senkrecht zum Balken).

⁴⁾ Die Streckenlast $q(x)$ steigt im Intervall $0 \leq x \leq l$ *gleichmäßig* (d. h. *linear*) von $q(x=0) = 0$ auf $q(x=l) = q_0$ an. Die *Steigung* der Geraden beträgt somit q_0/l .

Beispiel 5: Querkraft und Biegemoment längs eines Balkens mit linear ansteigender Last (Dreieckslast)
Elementare Integrationen (Grundintegrale)

Bild IV-5 zeigt einen zweifach gelagerten homogenen Balken der Länge l , der durch die linear ansteigende Streckenlast (Dreieckslast)

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l$$

senkrecht zum Balken belastet wird. Bestimmen Sie den Verlauf von Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M_b(x)$ längs des Balkens [A29].

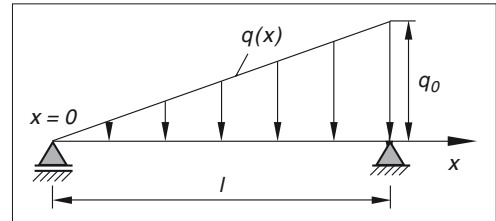


Bild IV-5

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A29

Lösung:

Zwischen der Streckenlast $q(x)$, der Querkraft $Q(x)$ und dem Biegemoment $M_b(x)$ besteht der folgende Zusammenhang [A29]:

$$Q(x) = - \int q(x) dx, \quad M_b(x) = \int Q(x) dx$$

Daraus erhalten wir für diesen speziellen Belastungsfall die Gleichungen

$$Q(x) = - \int q(x) dx = - \frac{q_0}{l} \cdot \int x dx = - \frac{q_0}{l} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_1 = - \frac{q_0}{2l} x^2 + C_1$$

$$\begin{aligned} M_b(x) &= \int Q(x) dx = \int \left(- \frac{q_0}{2l} x^2 + C_1 \right) dx = - \frac{q_0}{2l} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C_1 x + C_2 = \\ &= - \frac{q_0}{6l} x^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

In den beiden Lagern, d. h. an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ verschwindet das Biegemoment: $M_b(x = 0) = M_b(x = l) = 0$. Aus diesen Randbedingungen lassen sich die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 leicht bestimmen:

$$M_b(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$M_b(x = l) = 0 \quad \Rightarrow \quad - \frac{q_0}{6l} l^3 + C_1 l + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad - \frac{q_0 l^2}{6} + C_1 l = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{q_0 l}{6}$$

Somit gilt im Intervall $0 \leq x \leq l$:

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2l}x^2 + \frac{q_0 l}{6} = \frac{-3q_0 x^2 + q_0 l^2}{6l} = \frac{-q_0(3x^2 - l^2)}{6l} = -\frac{q_0}{6l}(3x^2 - l^2)$$

$$\begin{aligned} M_b(x) &= -\frac{q_0}{6l}x^3 + \frac{q_0 l}{6}x = \frac{-q_0 x^3 + q_0 l^2 x}{6l} = \frac{-q_0(x^3 - l^2 x)}{6l} = \\ &= -\frac{q_0}{6l}(x^3 - l^2 x) \end{aligned}$$

Der Verlauf beider Funktionen ist in den Bildern IV-6 und IV-7 dargestellt.

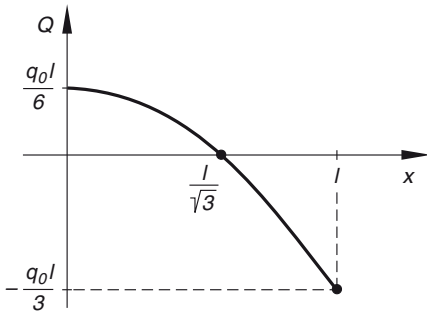


Bild IV-6 Querkraft $Q(x)$

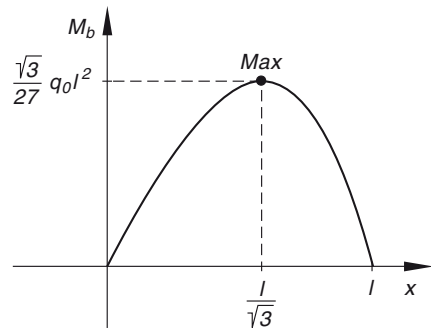


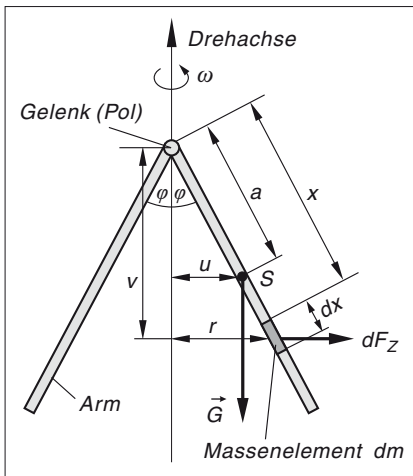
Bild IV-7 Biegemoment $M_b(x)$

Beispiel 6: Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler
Elementare Integration (Grundintegral)

Bild IV-8 zeigt einen *Fliehkraft-* oder *Zentrifugalkraftregler*, der mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω um die eingezeichnete Achse rotiert. Infolge der nach *außen* wirkenden *Zentrifugalkräfte* stellen sich beide Arme unter einem Winkel φ gegen die Drehachse ein.

- Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Winkel φ ?
- Bei welcher Winkelgeschwindigkeit ω_0 heben die Arme *erstmal*s ab?

$l = 2a$: Länge eines Arms; m : Masse eines Arms; A : *konstante* Querschnittsfläche eines Arms; ρ : *konstante* Dichte



Beziehungen (siehe Bild IV-8):

$$\sin \varphi = \frac{u}{a} \Rightarrow u = a \cdot \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{v}{x} \Rightarrow v = x \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{x} \Rightarrow r = x \cdot \sin \varphi$$

Bild IV-8

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A7, A15

Lösung:

- a) Im dynamischen Gleichgewichtszustand heben sich die von *Schwerkraft* und *Zentrifugalkraft* hervorgerufenen *Momente* in ihrer Wirkung auf. Die im *Schwerpunkt S* im Abstand *a* vom *Gelenk (Pol)* angreifende *Gewichtskraft* $G = mg$ erzeugt das *Moment* [A7]

$$M_G = Gu = mga \cdot \sin \varphi \quad (u = a \cdot \sin \varphi)$$

Bei der Berechnung des durch die *Zentrifugalkraft* erzeugten Momentes gehen wir von einem im Abstand *x* vom Pol liegenden *Massenelement dm* aus. Es unterliegt der *Zentrifugalkraft* [A15]

$$dF_Z = (dm) \omega^2 r$$

wobei *r* der *senkrechte* Abstand von der Drehachse ist. Mit $dm = \rho dV = \rho A dx$ folgt

$$dF_Z = (\rho A dx) \omega^2 r = \rho A \omega^2 r dx$$

($dV = A dx$ ist das Volumen des Massenelementes *dm*). Das von dieser Kraft erzeugte *Moment* [A7] beträgt

$$dM_Z = (dF_Z) v = (\rho A \omega^2 r dx) v = \rho A \omega^2 r v dx$$

Mit $r = x \cdot \sin \varphi$ und $v = x \cdot \cos \varphi$ erhalten wir schließlich

$$dM_Z = \rho A \omega^2 (x \cdot \sin \varphi) (x \cdot \cos \varphi) dx = \rho A \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot x^2 dx$$

Durch Summation, d. h. *Integration* über alle Beiträge zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2a$ ergibt sich das *Gesamtmoment* der *Zentrifugalkräfte* zu

$$\begin{aligned}
 M_Z &= \int_{x=0}^{2a} dM_Z = \varrho A \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \int_0^{2a} x^2 dx = \\
 &= \varrho A \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2a} = \varrho A \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{8}{3} a^3 = \\
 &= \frac{8}{3} \varrho A a^3 \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{4}{3} \underbrace{(\varrho A \cdot 2a)}_m a^2 \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \\
 &= \frac{4}{3} m a^2 \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

($m = \varrho A \cdot 2a$ ist die Masse eines Arms). Aus der *Gleichgewichtsbedingung* $M_Z = M_G$ folgt die gewünschte Beziehung zwischen ω und φ :

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{3} m a^2 \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= m g a \cdot \sin \varphi \Rightarrow \\
 \omega^2 &= \frac{3 m g a \cdot \sin \varphi}{4 m a^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{3 g}{4 a \cdot \cos \varphi} \Rightarrow \\
 \omega &= \omega(\varphi) = \sqrt{\frac{3 g}{4 a \cdot \cos \varphi}}, \quad 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ
 \end{aligned}$$

b) Die Arme heben *erstmal*s ab, wenn die Winkelgeschwindigkeit den Wert

$$\omega_0 = \omega(\varphi = 0^\circ) = \sqrt{\frac{3 g}{4 a \cdot \cos 0^\circ}} = \sqrt{\frac{3 g}{4 a \cdot 1}} = \sqrt{\frac{3 g}{4 a}}$$

überschreitet. Bild IV-9 zeigt den Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit vom Winkel φ .

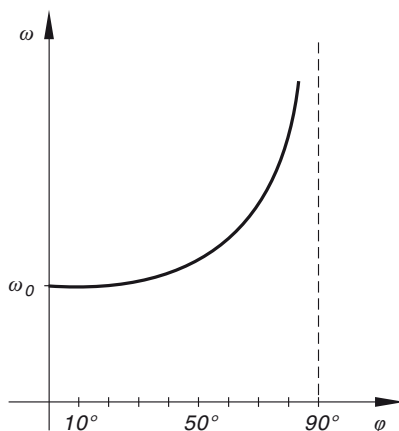


Bild IV-9

Beispiel 7: Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers mit elliptischem Querschnitt

Elementare Integration (Grundintegral)

Bild IV-10 zeigt einen *homogenen Rotationskörper* mit *elliptischem* Querschnitt. Er entsteht durch Drehung einer *Ellipse* mit den Halbachsen a und b um die y -Achse.

- Berechnen Sie das *Massenträgheitsmoment* J_y dieses Körpers bezüglich der Rotationsachse in Abhängigkeit vom Parameter h , der die halbe *Höhe* des Rotationskörpers beschreibt ($0 \leq h \leq b$).
- Welche Werte ergeben sich aus a) für die Massenträgheitsmomente eines *Rotationsellipsoids* und einer *Kugel* vom Radius R ?

ϱ : konstante Dichte des Rotationskörpers

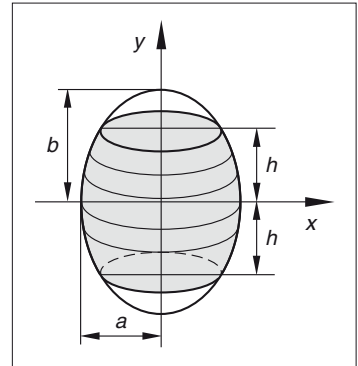


Bild IV-10

Lehrbuch: Bd. 1, V.5 und V.10.9.3

Lösung:

a) Definitionsgemäß ist

$$J_y = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_{y=-h}^h x^4 dy = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot 2 \cdot \int_{y=0}^h x^4 dy = \pi \varrho \cdot \int_{y=0}^h x^4 dy$$

wobei $x = g(y)$ die Gleichung der *rotierenden* Kurve ist. Wir erhalten sie, indem wir die *Ellipsengleichung* nach der Variablen x bzw. nach x^2 auflösen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) = a^2 \left(\frac{b^2 - y^2}{b^2} \right) = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} J_y &= \pi \varrho \cdot \frac{a^4}{b^4} \cdot \int_0^h (b^2 - y^2)^2 dy = \frac{\pi \varrho a^4}{b^4} \cdot \int_0^h (b^4 - 2b^2 y^2 + y^4) dy = \\ &= \frac{\pi \varrho a^4}{b^4} \left[b^4 y - \frac{2}{3} b^2 y^3 + \frac{1}{5} y^5 \right]_0^h = \frac{\pi \varrho a^4}{b^4} \left(b^4 h - \frac{2}{3} b^2 h^3 + \frac{1}{5} h^5 \right) \end{aligned}$$

- b) Für den *Sonderfall* $h = b$ erhalten wir ein *Rotationsellipsoid* mit dem Massenträgheitsmoment

$$J_{\text{Rotationsellipsoid}} = \frac{\pi \varrho a^4}{b^4} \left(b^5 - \frac{2}{3} b^5 + \frac{1}{5} b^5 \right) = \frac{\pi \varrho a^4}{b^4} \cdot b^5 \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right)}_{8/15} = \frac{8}{15} \pi \varrho a^4 b$$

Die *Kugel* vom Radius R wiederum ist der *Sonderfall* eines Rotationsellipsoids für $a = b = R$:

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{8}{15} \pi \varrho R^4 R = \frac{8}{15} \pi \varrho R^5$$

Beispiel 8: Zugstab mit konstanter Zugspannung

Elementare Integrationen (Grundintegrale)

Bild IV-11 zeigt einen *Zugstab* mit einer *orts-abhängigen* Querschnittsfläche A , der am oberen Ende gelagert ist und am unteren Ende durch eine *konstante* Kraft F_0 belastet wird. Wie ist die *Querschnittsfläche* A in Abhängigkeit von der *Koordinate* x zu wählen, damit die *Zugspannung* σ an jeder Schnittstelle den *gleichen* Wert besitzt?

l : Länge des Zugstabes

A_0 : Querschnittsfläche am *unteren* Ende

ϱ : konstante Dichte des Zugstabes

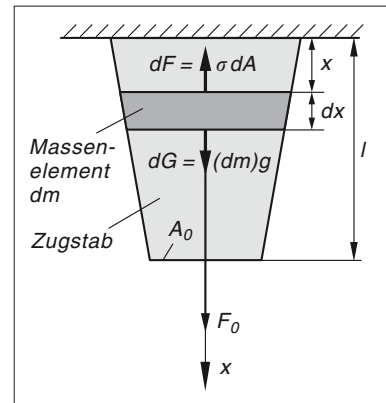


Bild IV-11

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A1, A16

Lösung:

Das in Bild IV-11 eingezeichnete (*dunkelgrau* unterlegte) *Massenelement* $dm = \varrho dV = \varrho A dx$ befindet sich im *Gleichgewicht*, wenn die *Zugkraft* $dF = d(\sigma A) = \sigma dA$ die *Gewichtskraft* $dG = (dm)g = \varrho g A dx$ in ihrer Wirkung *aufhebt* [A16, A1]. Somit gilt

$$\sigma dA + \varrho g A dx = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma dA = -\varrho g A dx^{5)}$$

⁵⁾ Das Minuszeichen bringt zum Ausdruck, dass die beiden Kräfte in *entgegengesetzte* Richtungen weisen.

Wir formen diese Gleichung noch geringfügig um (Trennung der beiden Variablen A und x einschließlich ihrer Differentiale)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\varrho g}{\sigma} dx$$

und integrieren anschließend beide Seiten, wobei wir die Integrationskonstante zweckmäßigerweise in der „logarithmischen“ Form $\ln C$ ansetzen:

$$\int \frac{dA}{A} = -\frac{\varrho g}{\sigma} \cdot \int 1 dx \Rightarrow \ln A = -\frac{\varrho g}{\sigma} x + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln A - \ln C = \ln \left(\frac{A}{C} \right) = -\frac{\varrho g}{\sigma} x$$

Durch Entlogarithmierung folgt

$$\frac{A}{C} = e^{-\frac{\varrho g}{\sigma} x} \quad \text{oder} \quad A = A(x) = C \cdot e^{-\frac{\varrho g}{\sigma} x}$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir aus dem Randwert $A(x=l) = A_0$:

$$A(x=l) = A_0 \Rightarrow C \cdot e^{-\frac{\varrho g}{\sigma} l} = A_0 \Rightarrow C = A_0 \cdot e^{\frac{\varrho g}{\sigma} l}$$

Die Querschnittsfläche des Zugstabes ändert sich damit nach dem Exponentialgesetz

$$A(x) = A_0 \cdot e^{\frac{\varrho g}{\sigma} l} \cdot e^{-\frac{\varrho g}{\sigma} x} = A_0 \cdot e^{\frac{\varrho g}{\sigma} (l-x)}, \quad 0 \leq x \leq l$$

Der Stabquerschnitt nimmt daher von oben nach unten exponentiell ab (Bild IV-12). Die Zugspannung besitzt dabei an jeder Stelle den gleichen Wert $\sigma = F_0/A_0$.

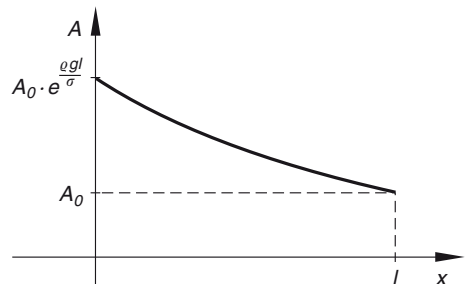


Bild IV-12

Beispiel 9: Magnetischer Fluss durch eine Leiterschleife

Elementare Integrationen (Grundintegrale)

Die in Bild IV-13 dargestellte Anordnung zeigt einen geradlinigen, vom Gleichstrom I in der angegebenen Richtung durchflossenen Leiter und eine rechteckige Leiterschleife mit den Seiten a und b . Die Seite b ist dabei parallel zum Leiter. Beide Leiter liegen in einer gemeinsamen Ebene, ihr (kürzester) Abstand ist R , das Medium ist Luft mit der Permeabilität $\mu \approx 1$.

- a) Bestimmen Sie den vom *Magnetfeld* des Stromes erzeugten *magnetischen Fluss* Φ durch die *Leiterschleife*.
- b) Wie groß ist der *arithmetische Mittelwert* \bar{B} der magnetischen Flussdichte \vec{B} *innerhalb* der Leiterschleife?

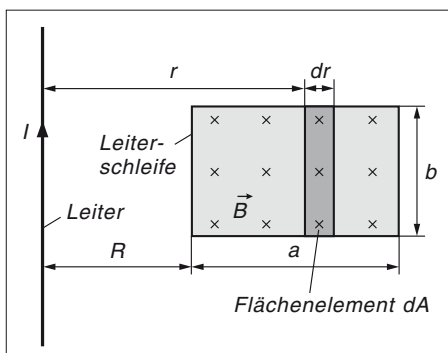


Bild IV-13

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A4, A5, A38

Lösung:

- a) Der Strom I erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien als *konzentrische Kreise* um die Stromrichtung verlaufen. Das Feld besitzt dabei im senkrechten Abstand r von der Leiterachse die *magnetische Feldstärke* vom Betrag [A4]

$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad r > 0$$

und somit die *magnetische Flussdichte* [A5]

$$B = B(r) = \mu_0 \mu H = \mu_0 \cdot 1 \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > 0$$

Die Leiterschleife wird von diesem Feld *senkrecht* durchflutet. Der *magnetische Fluss* [A38] durch das eingezeichnete (*dunkelgrau unterlegte*) *Flächenelement* $dA = b dr$ beträgt daher

$$d\Phi = B dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} dr$$

Den *Gesamtfluss* Φ erhalten wir durch Summierung, d. h. *Integration* über sämtliche Flächenelemente zwischen $r = R$ und $r = R + a$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r=R}^{R+a} d\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\ln r \right]_R^{R+a} = \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} [\ln(R+a) - \ln R] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{R+a}{R} \right), \quad R > 0 \end{aligned}$$

(unter Verwendung der Rechenregel $\ln \left(\frac{u}{v} \right) = \ln u - \ln v$)

- b) Der *arithmetische*, d. h. *lineare* Mittelwert der magnetischen Flussdichte $B = B(r)$ im Intervall $R \leq r \leq R + a$ der Länge a ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{1}{a} \cdot \int_{r=R}^{R+a} B(r) dr = \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\ln r \right]_R^{R+a} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} [\ln(R+a) - \ln R] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus Lösungsteil a) zeigt, dass der magnetische Fluss Φ durch die Leiterschleife das Produkt aus dem *arithmetischen Mittelwert* \bar{B} der magnetischen Flussdichte und der Fläche $A = ab$ der Leiterschleife ist:

$$\bar{B}A = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \ln \left(\frac{R+a}{R} \right) \cdot ab = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{R+a}{R} \right) = \Phi$$

Beispiel 10: Kapazität eines Koaxialkabels

Elementare Integration (Grundintegral)

Ein Koaxialkabel der Länge l besteht aus zwei leitenden koaxialen Zylinderflächen mit den Radien r_1 und r_2 . Der Raum zwischen dem Innen- und Außenleiter ist mit einem Isolator der Dielektrizitätskonstanten ε ausgefüllt (Bild IV-14 zeigt den Querschnitt des Kabels). Welche Kapazität C besitzt das Koaxialkabel?

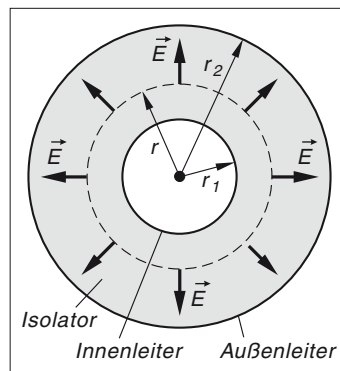


Bild IV-14

Lösungshinweis: Gehen Sie zunächst von der Überlegung aus, dass der Innenleiter eine *gleichmäßig* über den Zylindermantel verteilte *positive* Ladung Q trage. Berechnen Sie dann den Betrag der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} im Innern des Koaxialkabels in Abhängigkeit von der Ortskoordinate r und daraus die Spannung U zwischen den beiden leitenden Zylinderflächen.

Lösung:

Die Ladung Q erzeugt ein *zylindersymmetrisches* elektrisches Feld (im Schnitt *senkrecht* zur Zylinderachse ist das elektrische Feld *radialsymmetrisch*). Der Betrag der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} hat daher auf einer zum Innenleiter *koaxialen* Zylinderfläche überall den *gleichen* Wert (siehe *gestrichelte* Linie in Bild IV-14). Im senkrechten Abstand r von der Symmetrieachse gilt für die *Feldstärke* E [A34]

$$E = E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \cdot \frac{1}{r}, \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

Die *Spannung* [A39] zwischen dem Innen- und Außenleiter ist dann dem Betrage nach

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \left[\ln r \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Das Koaxialkabel besitzt damit die folgende *Kapazität* [A40]:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

Beispiel 11: Übergangswiderstand einer Kugel
Elementare Integration (Grundintegral)

Bild IV-15 zeigt (im Querschnitt) eine Anordnung aus zwei *konzentrischen Kugelelektroden* mit den Radien r_1 und r_2 . Der Zwischenraum ist mit einem Material der *Leitfähigkeit* κ ausgefüllt.

- Welche *Spannung* U liegt zwischen den beiden Elektroden, wenn von innen nach außen ein Strom der *konstanten* Stärke I fließt? Welchen *Widerstand* R besitzt diese Anordnung?
- Welchen *Übergangswiderstand* R_{Kugel} besitzt eine Kugel vom Radius r ?

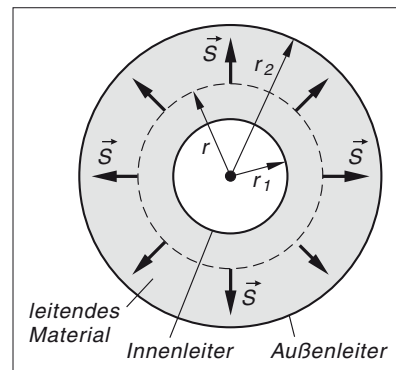


Bild IV-15

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst die Beträge der *Stromdichte* \vec{S} und der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} in der Kugel in Abhängigkeit von der Abstandscoordinate r und daraus die *Spannung* U zwischen den beiden Kugelelektroden. Der *Übergangswiderstand* einer Kugel ist der Widerstand bei *unendlich weit* entfernter Gegenelektrode.

Lehrbuch: Bd. 1, V.5

Physikalische Grundlagen: A14, A19, A39, A41

Lösung:

- a) Wegen der *Radialsymmetrie* des elektrischen Feldes besitzt der Stromdichtevektor \vec{S} in jedem Punkt einer zu den Kugelelektroden *konzentrischen* Kugeloberfläche den *gleichen* Betrag. Durch die Oberfläche $A = 4\pi r^2$ der im Bild eingezeichneten (*gestrichelten*) Kugel vom Radius r fließt der *konstante* Strom I . Somit ist der Betrag der *Stromdichte* im Abstand r nach [A19]

$$S(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2}, \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

Aus der Beziehung $S = \kappa E$ [A41] folgt für den *Betrag* der *elektrischen Feldstärke*

$$E(r) = \frac{S(r)}{\kappa} = \frac{I}{4\pi\kappa r^2} = \frac{I}{4\pi\kappa} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

Die *Spannung* zwischen den beiden Kugelelektroden beträgt dann [A39]

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{I}{4\pi\kappa} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{I}{4\pi\kappa} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{I}{4\pi\kappa} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

Für den gesuchten Widerstand erhalten wir damit nach dem *ohmschen Gesetz* [A14]

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{I}{4\pi\kappa} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}}{I} = \frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

- b) Wir setzen zunächst $r_1 = r$ und $r_2 = x$ und bilden dann den *Grenzübergang* für $x \rightarrow \infty$. Er führt zu dem folgenden *Übergangswiderstand* einer Kugel vom Radius r :

$$\begin{aligned} R_{\text{Kugel}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \frac{x - r}{rx} \right) = \frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \frac{1}{r} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - r}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\kappa r} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{x} \right)}_1 = \frac{1}{4\pi\kappa r} \cdot 1 = \frac{1}{4\pi\kappa r} \end{aligned}$$

Beispiel 12: Arbeit im Gravitationsfeld der Erde

Elementare Integration (Grundintegral)

Welche *Arbeit* W ist aufzuwenden, um eine an der Erdoberfläche befindliche Masse m aus dem Einflussbereich der Erde heraus zu bringen (Bild IV-16)? Mit welcher *Geschwindigkeit* v_0 muss dieser Körper daher von der Erdoberfläche abgeschossen werden?

Erdradius: $r_0 = 6370 \text{ km}$

Gravitationskonstante: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Erdmasse: $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Lösungshinweis: Benutzen Sie bei der Berechnung der Arbeit das *Gravitationsgesetz* [A18].

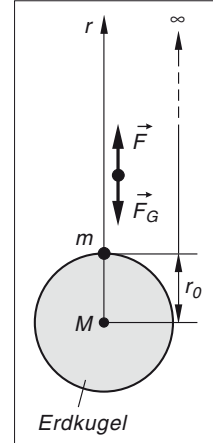


Bild IV-16

Lehrbuch: Bd. 1, V.5 und V.10.6

Physikalische Grundlagen: A18

Lösung:

Die *gegen* das Gravitationsfeld der Erde aufzubringende *Arbeit* ist definitionsgemäß durch das *Arbeitsintegral*⁶⁾

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{\infty} F(r) dr$$

gegeben, wobei \vec{F} eine Kraft ist, die der *Gravitationskraft* \vec{F}_G [A18] stets das *Gleichgewicht* hält. Daher ist

$$F(r) = |\vec{F}_G| = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} = \gamma mM \cdot \frac{1}{r^2}, \quad r \geq r_0$$

Wir berechnen mit dieser *ortsabhängigen* Kraft das *Arbeitsintegral* und erhalten

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{\infty} F(r) dr = \gamma mM \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \gamma mM \cdot \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} dr = \gamma mM \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_0}^{\infty} = \\ &= \gamma mM \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = \gamma mM \left(-0 + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{\gamma mM}{r_0} \end{aligned}$$

⁶⁾ Die Anziehungskraft durch die Erdkugel verschwindet erst in *großer* Entfernung von der Erdoberfläche ($r \rightarrow \infty$). Daher ist die *Integration* von $r = r_0$ bis hin zu $r = \infty$ zu erstrecken.

Diese Arbeit (Energie) muss der Masse m beim Verlassen der Erdoberfläche in Form von *kinetischer* Energie zugeführt werden. Aus $E_{\text{kin}} = W$ folgt dann

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{\gamma m M}{r_0} \quad \text{oder} \quad v_0^2 = \frac{2 \gamma M}{r_0} \quad \left(\text{mit } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \right)$$

Die auch als *Fluchtgeschwindigkeit* bezeichnete Abschussgeschwindigkeit der Masse beträgt daher

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \\ &= 11\,191 \text{ m/s} \approx 11,19 \text{ km/s} \end{aligned}$$

und ist (unabhängig von der Masse) für *alle* Körper *gleich*.

Beispiel 13: Elektrischer Widerstand eines kegelstumpfförmigen Kontaktes

Integration mittels Substitution

Ein homogener *elektrischer Kontakt* besitzt die Gestalt eines *Kegelstumpfes* (Bild IV-17). Wie groß ist sein *ohmscher Widerstand* R ?

r_1, r_2 : Radien der begrenzenden Kreisflächen des Kegelstumpfes

l : Länge des Kontaktes

ϱ : konstanter spezifischer Widerstand

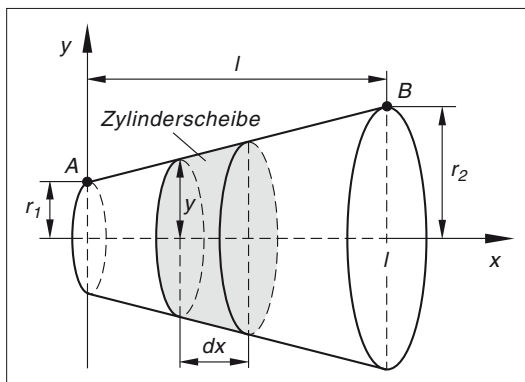


Bild IV-17

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Physikalische Grundlagen: A42

Lösung:

Wir zerlegen den *Kegelstumpf* durch ebene Schnitte *senkrecht* zur Symmetrieachse (x -Achse) in eine große Anzahl nahezu *zylinderförmiger* Scheiben. In Bild IV-17 ist eine solche (hauchdünne) Scheibe mit dem Radius $r = y$ und der Höhe (Dicke) dx *grau* unterlegt. Ihr *ohmscher Widerstand* ist demnach [A42]

$$dR = \varrho \frac{dx}{\pi y^2}$$

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten x und y ist dabei durch die Gleichung der eingezeichneten *Mantellinie* \overline{AB} gegeben, die durch Rotation um die x -Achse den Kegelsumpf erzeugt. Ihre Funktionsgleichung lautet

$$y = \frac{r_2 - r_1}{l} x + r_1, \quad 0 \leq x \leq l$$

(Steigung: $m = (r_2 - r_1)/l$; Achsenabschnitt auf der y -Achse: r_1 ; siehe Bild IV-17). Damit erhalten wir für den *Widerstand* der Zylinderscheibe

$$\begin{aligned} dR &= \varrho \frac{dx}{\pi y^2} = \frac{\varrho}{\pi} \cdot \frac{dx}{\left(\frac{r_2 - r_1}{l} x + r_1\right)^2} = \frac{\varrho}{\pi} \cdot \frac{dx}{\left[\frac{(r_2 - r_1)x + r_1 l}{l}\right]^2} = \\ &= \frac{\varrho l^2}{\pi} \cdot \frac{dx}{[(r_2 - r_1)x + r_1 l]^2} \end{aligned}$$

Summation, d. h. *Integration* über sämtliche Zylinderscheiben zwischen $x = 0$ und $x = l$ führt schließlich zu dem *Gesamtwiderstand*

$$R = \int_{x=0}^l dR = \frac{\varrho l^2}{\pi} \cdot \int_0^l \frac{1}{[(r_2 - r_1)x + r_1 l]^2} dx$$

Dieses Integral lösen wir mittels der folgenden *Substitution*, wobei die Grenzen *mitsubstituiert* werden:

$$u = (r_2 - r_1)x + r_1 l, \quad \frac{du}{dx} = r_2 - r_1, \quad dx = \frac{1}{r_2 - r_1} du$$

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = r_1 l$$

$$\text{Obere Grenze: } x = l \Rightarrow u = (r_2 - r_1)l + r_1 l = r_2 l - r_1 l + r_1 l = r_2 l$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R &= \frac{\varrho l^2}{\pi} \cdot \int_0^l \frac{1}{[(r_2 - r_1)x + r_1 l]^2} dx = \frac{\varrho l^2}{\pi} \cdot \int_{r_1 l}^{r_2 l} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{r_2 - r_1} du = \\ &= \frac{\varrho l^2}{\pi(r_2 - r_1)} \cdot \int_{r_1 l}^{r_2 l} u^{-2} du = \frac{\varrho l^2}{\pi(r_2 - r_1)} \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right]_{r_1 l}^{r_2 l} = \frac{\varrho l^2}{\pi(r_2 - r_1)} \left[-\frac{1}{u} \right]_{r_1 l}^{r_2 l} = \\ &= \frac{\varrho l^2}{\pi(r_2 - r_1)} \left(-\frac{1}{r_2 l} + \frac{1}{r_1 l} \right) = \frac{\varrho l^2}{\pi(r_2 - r_1)} \cdot \frac{-r_1 l + r_2 l}{r_1 r_2 l^2} = \\ &= \frac{\varrho}{\pi(r_2 - r_1)} \cdot \frac{(r_2 - r_1)l}{r_1 r_2} = \frac{\varrho l}{\pi r_1 r_2} \end{aligned}$$

Beispiel 14: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes
Integration mittels Substitution

Wird beim *freien Fall* der Luftwiderstand in Form einer dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit v *proportionalen* Reibungskraft $k v^2$ berücksichtigt, so gilt nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]

$$m a = m g - k v^2$$

m : Masse des frei fallenden Körpers; a : Beschleunigung; g : Erdbeschleunigung;
 $k > 0$: Reibungskoeffizient.

Leiten Sie aus dieser Gleichung durch *Integration* die Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* v vom *Fallweg* s für den Anfangswert $v(s = 0) = 0$ her.

Lösungshinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Beziehung $a = v \frac{dv}{ds}$. Die *Newtonsche* Gleichung lässt sich dann unter Berücksichtigung dieser Beziehung integrieren.

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

Wir lösen zunächst die *Newtonsche Bewegungsgleichung* nach der *Fallbeschleunigung* a auf:

$$a = g - \frac{k}{m} v^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{m g}{k} - v^2 \right)$$

Aus der *allgemeingültigen* Beziehung

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds} \quad \left(\text{mit } v = \frac{ds}{dt} \right)$$

folgt durch Umstellung

$$a ds = v dv \quad \text{oder seitenvertauscht} \quad v dv = a ds$$

In diese Gleichung setzen wir für die Beschleunigung a den weiter oben gefundenen Ausdruck ein und erhalten

$$v dv = \frac{k}{m} \left(\frac{m g}{k} - v^2 \right) ds \quad \text{oder} \quad \frac{v dv}{\frac{m g}{k} - v^2} = \frac{k}{m} ds$$

Beide Seiten werden nun *integriert*, wobei wir noch zur Abkürzung $\alpha = m g/k$ setzen:

$$\int \frac{v dv}{\alpha - v^2} = \frac{k}{m} \cdot \int 1 ds = \frac{k}{m} s + C_1$$

Das Integral der *linken* Seite lösen wir durch die *Substitution*

$$u = \alpha - v^2, \quad \frac{du}{dv} = -2v \quad \text{oder} \quad v dv = -\frac{1}{2} du$$

und erhalten⁷⁾

$$\int \frac{v dv}{\alpha - v^2} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C_2 = -\frac{1}{2} \cdot \ln (\alpha - v^2) + C_2$$

Somit ist

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln (\alpha - v^2) + C_2 = \frac{k}{m} s + C_1 \quad \text{oder} \quad \ln (\alpha - v^2) = -\frac{2k}{m} s + C$$

(mit $C = -2(C_1 - C_2)$). Bevor wir diese Gleichung nach v auflösen, bestimmen wir aus dem *Anfangswert* $v(s = 0) = 0$ die Integrationskonstante C :

$$v(s = 0) = 0 \Rightarrow \ln \alpha = C \Rightarrow C = \ln \alpha$$

Die gesuchte Funktion lautet damit in *impliziter* Form wie folgt:

$$\ln (\alpha - v^2) = -\frac{2k}{m} s + \ln \alpha$$

Wir fassen die logarithmischen Terme noch zusammen

$$\ln (\alpha - v^2) - \ln \alpha = \ln \left(\frac{\alpha - v^2}{\alpha} \right) = -\frac{2k}{m} s$$

und *entlogarithmieren* diese Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - v^2}{\alpha} &= e^{-\frac{2k}{m}s} \Rightarrow \alpha - v^2 = \alpha \cdot e^{-\frac{2k}{m}s} \Rightarrow \\ v^2 &= \alpha - \alpha \cdot e^{-\frac{2k}{m}s} = \alpha \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s} \right) \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach der Variablen v erhalten wir das gewünschte *Fallgesetz*. Es lautet (unter Berücksichtigung von $\alpha = mg/k$):

$$v(s) = \sqrt{\alpha \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s} \right)} = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s} \right)} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}$$

Nach *unendlich langem* Fallweg s strebt die Fallgeschwindigkeit v schließlich gegen ihren *Endwert*

$$v_E = \lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{\lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s} \right)}_1} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

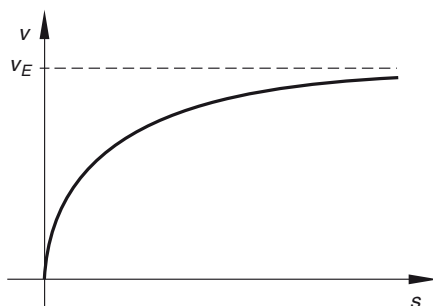
⁷⁾ Es gilt $mg > kv^2$ und somit $\alpha > v^2$, da Reibungskräfte stets der Bewegungsrichtung entgegen wirken (also keine Beschleunigung verursachen können). Daher dürfen die *Betragsstriche* in der logarithmischen Funktion weggelassen werden.

Das *Fallgesetz* lässt sich damit auch in der Form

$$v(s) = v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}, \quad s \geq 0$$

darstellen. Bild IV-18 zeigt den Verlauf dieser Funktion.

Bild IV-18



Beispiel 15: Aufladung eines Kondensators in einem RC-Schaltkreis
Integration mittels Substitution

In der in Bild IV-19 skizzierten *RC-Schaltung* fließt nach Schließen des Schalters S zur Zeit $t = 0$ der folgende *Ladestrom*:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

R : ohmscher Widerstand; C : Kapazität

U_0 : angelegte Gleichspannung; $i_0 = i(t = 0)$

- Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der *Kondensatorladung* $q(t)$, wenn der Kondensator zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) *energieelos*, d. h. *ungeladen* ist.
- Welche *Energie* W wird bis zur Beendigung des Aufladevorgangs im ohmschen Widerstand R umgesetzt (*Stromarbeit* [A44] von $t = 0$ bis $t \rightarrow \infty$)?

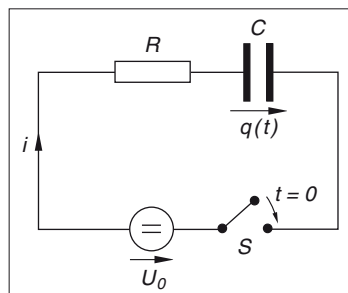


Bild IV-19

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Physikalische Grundlagen: A43, A44

Lösung:

- Es ist definitionsgemäß $i(t) = \dot{q}(t)$ und somit [A43]

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau = i_0 \cdot \int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau$$

(τ : Integrationsvariable)

Wir lösen dieses Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution* (die Grenzen werden mitsubstituiert):

$$z = -\frac{\tau}{RC}, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{RC}, \quad d\tau = -RC \, dz$$

$$\text{Untere Grenze: } \tau = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } \tau = t \Rightarrow z = -\frac{t}{RC}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} q(t) &= i_0 \cdot \int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = i_0 \cdot \int_0^{-t/RC} e^z \cdot (-RC \, dz) = -RC i_0 \cdot \int_0^{-t/RC} e^z \, dz = \\ &= -RC i_0 \left[e^z \right]_0^{-t/RC} = -RC i_0 \left(e^{-t/RC} - 1 \right) = RC i_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right) \end{aligned}$$

Mit dem Endwert $q_0 = RC i_0$, der (theoretisch) nach unendlich langer Zeit erreicht wird, lässt sich diese Gleichung auch in der Form

$$q(t) = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad t \geq 0$$

schreiben. Wir erhalten den in Bild IV-20 dargestellten zeitlichen Verlauf für die Kondensatorladung $q(t)$, die im Laufe der Zeit vom Anfangswert 0 auf den Endwert q_0 ansteigt.

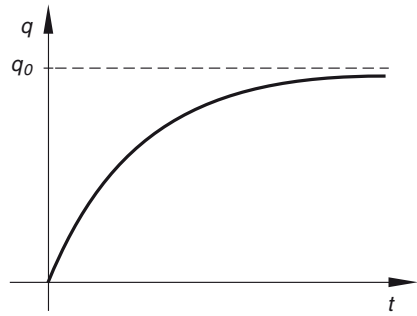


Bild IV-20 Kondensatorladung $q(t)$

- b) Der *Energieumsatz* im ohmschen Widerstand R ist durch das *Arbeitsintegral* (Stromarbeit) [A44]

$$W = R \cdot \int_0^{\infty} [i(t)]^2 dt = R \cdot \int_0^{\infty} \left[i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right]^2 dt = R i_0^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

gegeben, das wir durch die folgende *Substitution* lösen (die Grenzen werden wiederum mitsubstituiert):

$$z = -\frac{2t}{RC}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{2}{RC}, \quad dt = -\frac{RC}{2} dz$$

$$\text{Untere Grenze: } t = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } t = \infty \Rightarrow z = -\infty$$

Damit ist

$$\begin{aligned} W &= R i_0^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = R i_0^2 \cdot \int_0^{-\infty} e^z \cdot \left(-\frac{RC}{2} dz\right) = -\frac{R^2 C i_0^2}{2} \cdot \int_0^{-\infty} e^z dz = \\ &= -\frac{R^2 C i_0^2}{2} \left[e^z\right]_0^{-\infty} = -\frac{R^2 C i_0^2}{2} (0 - 1) = \frac{R^2 C i_0^2}{2} \end{aligned}$$

der gesuchte Energieumsatz im ohmschen Widerstand R ($e^z \rightarrow 0$ für $z \rightarrow -\infty$).

Beispiel 16: Rotation einer Scheibe in einer Flüssigkeit

Integration mittels Substitution

Eine Zylinderscheibe vom Radius r rotiert in einer Flüssigkeit mit einer nach dem Zeitgesetz

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}, \quad t \geq 0$$

exponentiell abnehmenden Umfangsgeschwindigkeit v (Bild IV-21).

v_0 : maximale Geschwindigkeit (zur Zeit $t = 0$)

$k > 0$: Reibungsfaktor

Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ω und des Drehwinkels φ für den Anfangswert $\varphi(0) = 0$.

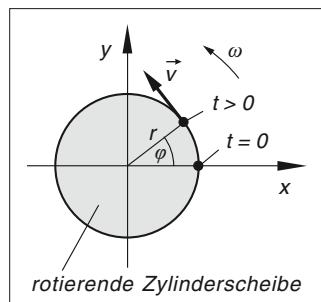


Bild IV-21

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Physikalische Grundlagen: A8, A30

Lösung:

Aus der Beziehung $v = \omega r$ [A8] erhalten wir das Zeitgesetz der Winkelgeschwindigkeit ω . Es lautet:

$$\omega = \omega(t) = \frac{v(t)}{r} = \left(\frac{v_0}{r}\right) \cdot e^{-kt} = \omega_0 \cdot e^{-kt}, \quad t \geq 0$$

Dabei ist $\omega_0 = v_0/r$ der Maximalwert der Winkelgeschwindigkeit. Er wird zur Zeit $t = 0$ angenommen: $\omega(t = 0) = \omega_0$. Die Winkelgeschwindigkeit ω nimmt wie die Umfang-

geschwindigkeit v im Laufe der Zeit *exponentiell* ab (Bild IV-22; beide Größen sind einander *proportional*). Wegen $\dot{\varphi} = \omega$ [A30] liefert die *Integration* der Gleichung $\omega = \omega(t)$ die gesuchte *Zeitabhängigkeit* des *Drehwinkels* φ :

$$\varphi(t) = \int_0^t \dot{\varphi} d\tau = \int_0^t \omega d\tau = \omega_0 \cdot \int_0^t e^{-k\tau} d\tau \quad (\tau: \text{Integrationsvariable})$$

Dieses Integral lösen wir durch die *Substitution*

$$u = -k\tau, \quad \frac{du}{d\tau} = -k, \quad d\tau = -\frac{du}{k}$$

$$\text{Untere Grenze: } \tau = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } \tau = t \Rightarrow u = -kt$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \omega_0 \cdot \int_0^t e^{-k\tau} d\tau = \omega_0 \cdot \int_0^{-kt} e^u \cdot \left(-\frac{du}{k}\right) = -\frac{\omega_0}{k} \cdot \int_0^{-kt} e^u du = \\ &= -\frac{\omega_0}{k} \left[e^u \right]_0^{-kt} = -\frac{\omega_0}{k} (e^{-kt} - 1) = \frac{\omega_0}{k} (1 - e^{-kt}), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Der *Maximalwert* des Drehwinkels φ ist erreicht, wenn die rotierende Scheibe *zur Ruhe* gekommen ist (theoretisch ist dies der Fall nach unendlicher Zeit, d. h. für $t \rightarrow \infty$). Er ist durch den *Grenzwert*

$$\varphi_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{\omega_0}{k} \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt})}_1 = \frac{\omega_0}{k} \cdot 1 = \frac{\omega_0}{k}$$

gegeben. Bild IV-23 zeigt den *zeitlichen Verlauf* des *Drehwinkels* φ (*Sättigungsfunktion*).

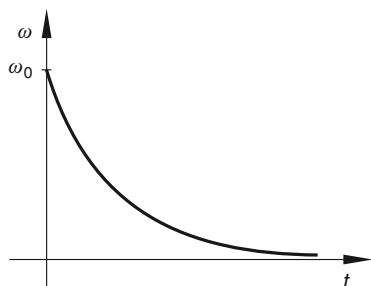


Bild IV-22 Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$

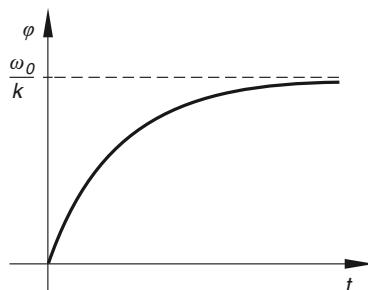
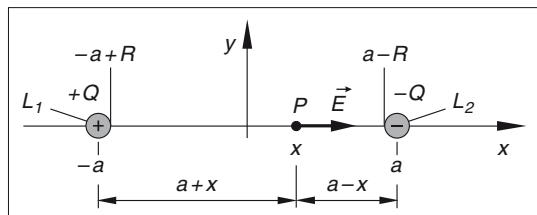


Bild IV-23 Drehwinkel $\varphi(t)$

Beispiel 17: Kapazität einer elektrischen Doppelleitung*Integration mittels Substitution*

Die in Bild IV-24 dargestellte *elektrische Doppelleitung* besteht aus zwei *parallelen* Leitern (Drähten) L_1 und L_2 mit der Länge l und dem Leiterradius R (ebener Schnitt senkrecht zur Doppelleitung). Der Leiterabstand beträgt $d = 2a$.

Welche *Kapazität* C besitzt diese Doppelleitung unter den Voraussetzungen $l \gg d$ und $d \gg R$ im Medium *Luft* mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon \approx 1$?

**Bild IV-24**

Lösungshinweis: Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie auf die Ergebnisse aus Beispiel 18, Kapitel III zurückgreifen (Berechnung der *elektrischen Feldstärke* E längs der Verbindungslinie der Leiterquerschnitte). Aus der Feldstärke E lässt sich dann die *Spannung* U zwischen den beiden Leitern und daraus die *Kapazität* C der Doppelleitung bestimmen.

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Physikalische Grundlagen: A39, A40

Lösung:

Trägt der *linke* Leiter L_1 die *positive* Ladung $Q_1 = Q$ und der *rechte* Leiter L_2 die *negative* Ladung $Q_2 = -Q$, so beträgt die *elektrische Feldstärke* E im Punkt P auf der Verbindungslinie der beiden Leiterquerschnitte nach den Ergebnissen aus Beispiel 18, Kapitel III (mit $\varepsilon = 1$)

$$E(P) = E(x) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right), \quad -a < x < a$$

Die *Spannung* zwischen den beiden Leitern ist dann definitionsgemäß durch das Integral

$$U = \int_{-a+R}^{a-R} E(x) dx = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \int_{-a+R}^{a-R} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx$$

gegeben [A39]. Wir lösen die beiden Teilintegrale zunächst *unbestimmt* mit Hilfe der *Substitutionen*

$$u = a + x, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du$$

bzw.

$$v = a - x, \quad \frac{dv}{dx} = -1, \quad dx = -dv$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx &= \int \underbrace{\frac{1}{a+x}}_u dx + \int \underbrace{\frac{1}{a-x}}_v dx = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{v} dv = \\ &= \ln |u| - \ln |v| = \ln \left| \frac{u}{v} \right| = \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \end{aligned}$$

Somit liegt zwischen den beiden Leitern die Spannung

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right]_{-a+R}^{a-R} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln \left(\frac{2a-R}{R} \right) - \ln \left(\frac{R}{2a-R} \right) \right]^{8)} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[2 \cdot \ln \left(\frac{2a-R}{R} \right) \right] = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln \left(\frac{2a-R}{R} \right) \end{aligned}$$

Für die *Kapazität* erhalten wir damit nach der Definitionsformel [A40] den Ausdruck

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln \left(\frac{2a-R}{R} \right)} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2a-R}{R} \right)}$$

Für $2a \gg R$ (wie vorausgesetzt) und somit $2a - R \approx 2a$ erhalten wir die *Näherungsformel*

$$C \approx \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2a}{R} \right)}$$

Beispiel 18: Effektivwert eines Wechselstroms

Integration mittels Substitution

Der in Bild IV-25 skizzierte Wechselstrom wird durch die Gleichung

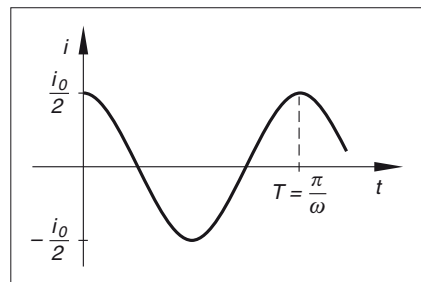
$$i(t) = i_0 \left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2} \right), \quad t \geq 0$$

beschrieben. Wie groß ist sein *Effektivwert* I ?

$i_0 > 0$: doppelter Scheitelwert des Stroms

$\omega > 0$: Kreisfrequenz

Bild IV-25



Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1 und V.10.7

⁸⁾ Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist vom Typ $\ln \alpha - \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)$ mit $\alpha = \frac{2a-R}{R}$ und lässt sich wie folgt umformen (siehe Formelsammlung, Abschnitt I.2.6):

$$\ln \alpha - \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \ln \alpha - (\ln 1 - \ln \alpha) = \ln \alpha - (0 - \ln \alpha) = 2 \cdot \ln \alpha = 2 \cdot \ln \left(\frac{2a-R}{R} \right)$$

Lösung:

Zunächst formen wir die Funktionsgleichung mit Hilfe der *trigonometrischen Formel*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.4) wie folgt um (mit $x = \omega t$):

$$i(t) = i_0 \left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2} \right) = i_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \right) = \frac{i_0}{2} \cdot \cos(2\omega t)$$

Der Strom ist somit ein *kosinusförmiger* Wechselstrom mit dem *Scheitelwert* $i_0/2$, der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\omega$ und der *Periode* $T = 2\pi/\omega_0 = \pi/\omega$. Der *Effektivwert* I ist dann definitionsgemäß durch das Integral

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{i_0^2}{4T} \cdot \int_0^T \cos^2(2\omega t) dt}$$

gegeben (*quadratischer Mittelwert*). Wir berechnen nun das unter der Wurzel stehende Integral. Mit Hilfe der bereits weiter oben angeführten trigonometrischen Formel (jetzt mit $x = 2\omega t$) lässt sich das unter der Wurzel stehende Integral wie folgt umwandeln:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(2\omega t) dt &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^T [1 + \cos(4\omega t)] dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T 1 dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(4\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2} [t]_0^T + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(4\omega t) dt = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(4\omega t) dt \end{aligned}$$

Das verbliebene Integral lösen wir durch die *Substitution*

$$\alpha = 4\omega t, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 4\omega, \quad dt = \frac{d\alpha}{4\omega}$$

$$\text{Untere Grenze: } t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } t = T \Rightarrow \alpha = 4\omega T = 4\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} = 4\pi$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(4\omega t) dt &= \int_0^{4\pi} \cos \alpha \cdot \left(\frac{d\alpha}{4\omega} \right) = \frac{1}{4\omega} \cdot \int_0^{4\pi} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\omega} [\sin \alpha]_0^{4\pi} = \\ &= \frac{1}{4\omega} [\sin(4\pi) - \sin 0] = \frac{1}{4\omega} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_0^T \cos^2(2\omega t) dt = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(4\omega t) dt = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} T$$

Der *Effektivwert* des Wechselstroms beträgt daher

$$I = \sqrt{\frac{i_0^2}{4T} \cdot \int_0^T \cos^2(2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{i_0^2}{4T} \cdot \frac{1}{2} T} = \sqrt{\frac{i_0^2}{8}} = \frac{i_0}{2\sqrt{2}} \approx 0,354 i_0$$

Beispiel 19: Bogenlänge einer Epizykloide

Integration mittels Substitution

Auf der *Außenseite* eines (festen) Zahnrades mit dem Radius R_0 „rollt“ ein zweites Zahnrad mit dem Radius R in der aus Bild IV-26 ersichtlichen Weise ab. Die dabei von einem Punkt P auf dem *Umfang* des abrollenden Zahnrades beschriebene Kurve heißt *Epizykloide* und lässt sich durch die *Parametergleichungen*

$$x(t) = a \cdot \cos t - R \cdot \cos\left(\frac{a}{R} t\right)$$

$$y(t) = a \cdot \sin t - R \cdot \sin\left(\frac{a}{R} t\right)$$

beschreiben ($t \geq 0$; $a = R_0 + R$)⁹⁾.

Welche *Länge* s hat der Bogen, der bei einer *vollen* Umdrehung des abrollenden Rades entsteht?

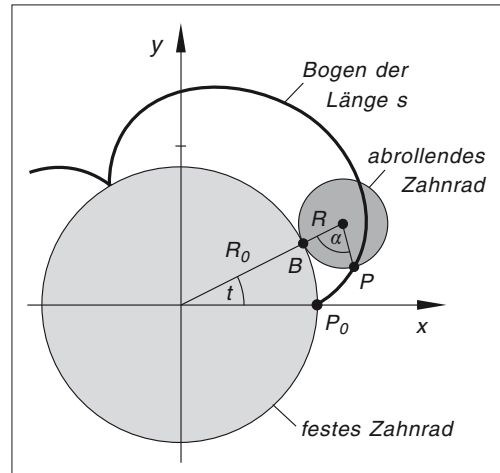


Bild IV-26

Lösungshinweis: Das Verhältnis $m = R_0/R$ soll *ganzzahlig* sein. Die Epizykloide besteht dann aus genau m Bögen und ist in sich *geschlossen*.

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1 und V.10.4

⁹⁾ In Kapitel II, Beispiel 5 wird diese Parameterdarstellung der Epizykloide hergeleitet.

Lösung:

Für die Berechnung der Bogenlänge s steht die aus Band 1, Abschnitt V.10.4 bekannte Integralformel

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

zur Verfügung. Unter Berücksichtigung von

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad dx = \dot{x} dt$$

wird daraus das Integral

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \cdot \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} \cdot \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \dot{x}^2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \end{aligned}$$

mit zunächst noch unbekannten Integrationsgrenzen t_1 und t_2 . Wir berechnen zunächst den unter der Wurzel stehenden Ausdruck und bringen ihn mit Hilfe trigonometrischer Umformungen auf eine für die weitere Rechnung bequemere Form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(-\sin t) - R \left[-\sin\left(\frac{a}{R} t\right) \right] \cdot \frac{a}{R} = -a \cdot \sin t + a \cdot \sin\left(\frac{a}{R} t\right) = \\ &= a[-\sin t + \sin(bt)] \\ \dot{y} &= a \cdot \cos t - R \left[\cos\left(\frac{a}{R} t\right) \right] \cdot \frac{a}{R} = a \cdot \cos t - a \cdot \cos\left(\frac{a}{R} t\right) = \\ &= a[\cos t - \cos(bt)] \end{aligned}$$

(jeweils mit der vorübergehenden Abkürzung $b = a/R$)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2 [-\sin t + \sin(bt)]^2 + a^2 [\cos t - \cos(bt)]^2 = \\ &= a^2 [\sin^2 t - 2 \cdot \sin t \cdot \sin(bt) + \sin^2(bt) + \\ &\quad + \cos^2 t - 2 \cdot \cos t \cdot \cos(bt) + \cos^2(bt)] = \\ &= a^2 \left[\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_1 + \underbrace{(\sin^2(bt) + \cos^2(bt))}_1 - 2 \underbrace{(\sin t \cdot \sin(bt) + \cos t \cdot \cos(bt))}_{\cos(t-bt) = \cos(bt-t)} \right] = \\ &= a^2 [2 - 2 \cdot \cos(bt-t)] = 2a^2 \underbrace{[1 - \cos(bt-t)]}_{2 \cdot \sin^2\left(\frac{bt-t}{2}\right)} = 4a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{bt-t}{2}\right) \end{aligned}$$

(trigonometrische Umformungen: siehe Formelsammlung, Abschnitte III.7.5, III.7.6.1 und III.7.6.4.) Mit $b = a/R$ und $a = R_0 + R$ lässt sich der Winkel der Sinusfunktion auch wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}\frac{bt - t}{2} &= \frac{1}{2} (b - 1)t = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} - 1 \right) t = \frac{1}{2} \left(\frac{a - R}{R} \right) t = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0 + R - R}{R} \right) t = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right) t = \frac{R_0}{2R} t\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4a^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{R_0}{2R} t \right) \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a \cdot \sin \left(\frac{R_0}{2R} t \right)$$

Damit erhalten wir für die gesuchte *Bogenlänge* das Integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2a \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sin \left(\frac{R_0}{2R} t \right) dt$$

Die *Integrationsgrenzen* lassen sich aus der *Abrollbedingung*

$$\widehat{P_0 B} = \widehat{P B}, \quad \text{d. h.} \quad R_0 t = R \alpha \quad \text{oder} \quad t = \frac{R}{R_0} \alpha$$

bestimmen. Der *vollen* Umdrehung des abrollenden Rades entspricht der Winkelbereich $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Dabei durchläuft der Parameter t alle Werte von $t_1 = 0$ bis hin zu $t_2 = 2\pi R/R_0$. Somit ist

$$s = 2a \cdot \int_0^{2\pi R/R_0} \sin \left(\frac{R_0}{2R} t \right) dt$$

Mit der *Substitution* (die Grenzen werden mitsubstituiert)

$$u = \frac{R_0}{2R} t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{R_0}{2R}, \quad dt = \frac{2R}{R_0} du$$

$$\text{Untere Grenze: } t = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } t = \frac{2\pi R}{R_0} \Rightarrow u = \frac{R_0}{2R} \cdot \frac{2\pi R}{R_0} = \pi$$

wird daraus schließlich

$$\begin{aligned}s &= 2a \cdot \int_0^\pi \sin u \cdot \frac{2R}{R_0} du = \frac{4aR}{R_0} \cdot \int_0^\pi \sin u du = \frac{4aR}{R_0} \left[-\cos u \right]_0^\pi = \\ &= \frac{4aR}{R_0} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4aR}{R_0} (1 + 1) = \frac{8aR}{R_0} = \frac{8(R_0 + R)R}{R_0}\end{aligned}$$

Beispiel 20: Fallgesetze bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes
Integration mittels Substitution

Wird beim *freien Fall* der Luftwiderstand durch eine dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit v *proportionale* Reibungskraft $k v^2$ berücksichtigt, so erhält man das folgende *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* (Bild IV-27)¹⁰⁾:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t\right), \quad t \geq 0$$

m : Masse des aus der Ruhe heraus frei fallenden Körpers

g : Erdbeschleunigung

$k > 0$: Reibungskoeffizient

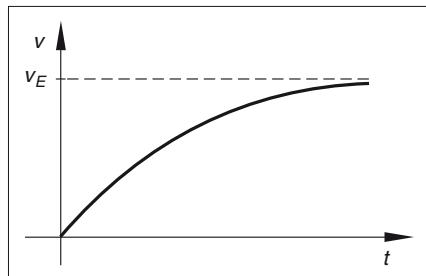


Bild IV-27

Bestimmen Sie hieraus das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ für den Anfangswert $s(t = 0) = 0$.

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1

Lösung:

Wir führen zunächst der besseren Übersicht wegen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{gk}{m}}$$

Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* lautet dann

$$v(t) = \alpha \cdot \tanh(\beta t), \quad t \geq 0$$

Durch *Integration* dieser Gleichung gewinnen wir das *Weg-Zeit-Gesetz*:

$$s(t) = \int v(t) dt = \alpha \cdot \int \tanh(\beta t) dt = \alpha \cdot \int \frac{\sinh(\beta t)}{\cosh(\beta t)} dt$$

Dieses Integral lösen wir mittels *Substitution*:

$$u = \cosh(\beta t), \quad \frac{du}{dt} = \beta \cdot \sinh(\beta t), \quad dt = \frac{du}{\beta \cdot \sinh(\beta t)}$$

¹⁰⁾ Dieses Gesetz wurde bereits in Band 1, Abschnitt V.10.1.1 hergeleitet (Beispiel 2). Der Endwert der *Fallgeschwindigkeit* (nach unendlicher langer Fallzeit, d. h. für $t \rightarrow \infty$) beträgt $v_E = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Somit ist

$$\begin{aligned} s(t) &= \alpha \cdot \int \frac{\sinh(\beta t)}{\cosh(\beta t)} dt = \alpha \cdot \int \frac{\sinh(\beta t)}{u} \cdot \frac{du}{\beta \cdot \sinh(\beta t)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \int \frac{1}{u} du = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \ln |u| + C = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \ln [\cosh(\beta t)] + C \end{aligned}$$

Aus dem Anfangswert $s(t=0) = 0$ bestimmen wir die Integrationskonstante C :

$$s(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \ln \underbrace{[\cosh 0]}_1 + C = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \underbrace{\ln 1}_0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Das Weg-Zeit-Gesetz lautet damit

$$s(t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \ln [\cosh(\beta t)] = \frac{m}{k} \cdot \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right) \right], \quad t \geq 0$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}}{\sqrt{\frac{gk}{m}}} = \sqrt{\frac{\frac{mg}{k}}{\frac{gk}{m}}} = \sqrt{\frac{mg}{k} \cdot \frac{m}{gk}} = \sqrt{\frac{m^2}{k^2}} = \frac{m}{k}$$

Bild IV-28 zeigt den Verlauf dieser komplizierten Funktion.

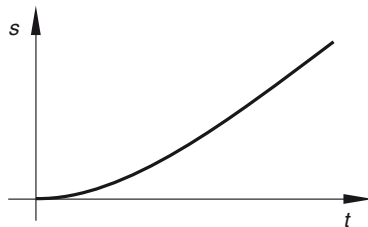


Bild IV-28

Beispiel 21: Mittlere Geschwindigkeit von Gasmolekülen

Partielle Integration

Die Moleküle eines Gases bewegen sich mit *unterschiedlichen* Geschwindigkeiten, die sich infolge von Zusammenstößen auch noch laufend ändern. Dabei treten *alle* Geschwindigkeiten zwischen $v = 0$ und $v = \infty$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf, die durch die sog. *Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsfunktion*

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad v \geq 0$$

beschrieben wird.

m : Molekülmasse; k : Boltzmannsche Konstante; T : absolute Temperatur des Gases.

Die Größe $F(v) dv$ gibt dabei denjenigen *Bruchteil* von Molekülen an, deren Geschwindigkeitsbetrag zwischen v und $v + dv$ liegt (entspricht dem Flächeninhalt des grau unterlegten Streifens, siehe Bild IV-29)¹¹⁾.

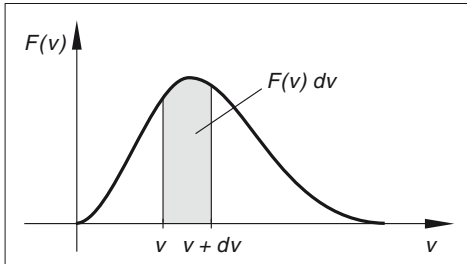


Bild IV-29

- a) Mit welcher *mittleren (durchschnittlichen)* Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot F(v) dv$$

bewegen sich die Gasmoleküle?

- b) Wie groß ist diese Geschwindigkeit für ein *Helium-Gas* der Temperatur $\vartheta = 800^\circ\text{C}$?

$$m_{\text{He}} = 6,646\,577 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad k = 1,380\,622 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K}$$

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.2 und V.9.1

Lösung:

- a) Mit der Abkürzung $a = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ erhalten wir zunächst

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot F(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \int_0^{\infty} v \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = a \cdot \int_0^{\infty} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v dv$$

Dieses Integral lösen wir mittels der folgenden *Substitution*:

$$x = -\frac{mv^2}{2kT}, \quad v^2 = -\frac{2kT}{m} x, \quad \frac{dx}{dv} = -\frac{mv}{kT}, \quad v dv = -\frac{kT}{m} dx$$

$$\text{Untere Grenze: } v = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } v = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -\infty$$

¹¹⁾ Die (noch temperaturabhängige!) Funktion $F(v)$ ist *normiert*, d. h. $\int_0^{\infty} F(v) dv = 1$.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= a \cdot \int_0^{\infty} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v \, dv = a \cdot \int_0^{\infty} \left(-\frac{2kT}{m} x\right) \cdot e^x \cdot \left(-\frac{kT}{m} dx\right) = \\ &= \frac{2ak^2T^2}{m^2} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^x dx}_I = \frac{2ak^2T^2}{m^2} \cdot I\end{aligned}$$

Das Integral I lässt sich dabei durch *partielle Integration* wie folgt lösen:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\infty} x \cdot e^x dx = ? \\ &\quad \alpha \quad \beta' \quad \alpha = x, \quad \beta' = e^x \Rightarrow \alpha' = 1, \quad \beta = e^x \\ I &= \int_0^{\infty} x \cdot e^x dx = \int_0^{\infty} \alpha \cdot \beta' dx = \left[\alpha \cdot \beta\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \alpha' \cdot \beta dx = \\ &= \left[x \cdot e^x\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^x dx = \\ &= \left[x \cdot e^x\right]_0^{\infty} - \left[e^x\right]_0^{\infty} = (0 - 0) - (0 - 1) = 1 \\ &\quad (e^x \rightarrow 0 \text{ und } x \cdot e^x \rightarrow 0 \text{ jeweils für } x \rightarrow -\infty)\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die *mittlere* Geschwindigkeit der Gasmoleküle den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{2ak^2T^2}{m^2} \cdot I = \frac{2ak^2T^2}{m^2} \cdot 1 = 2a \cdot \frac{k^2T^2}{m^2} = 2 \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{k^2T^2}{m^2} = \\ &= 8\pi \cdot \frac{m}{2\pi kT} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \frac{k^2T^2}{m^2} = \frac{4kT}{m} \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = \sqrt{\frac{16k^2T^2}{m^2} \cdot \frac{m}{2\pi kT}} = \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\end{aligned}$$

b) Es ist $T = (800 + 273,15) \text{ K} = 1073,15 \text{ K}$ und somit

$$\bar{v}_{\text{He}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,380\,662 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K} \cdot 1073,15 \text{ K}}{\pi \cdot 6,646\,577 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 2383 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,38 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Beispiel 22: Durchschnittliche Leistung eines Wechselstroms in einem RL -Schaltkreis

Integration mittels Substitution bzw. partieller Integration

Der in Bild V-30 dargestellte RL -Wechselstromkreis wird durch Anlegen einer Wechselspannung $u(t)$ von einem kosinusförmigen Wechselstrom mit der Gleichung

$$i(t) = i_0 \cdot \cos(\omega t), \quad t \geq 0$$

durchflossen.

R : ohmscher Widerstand; L : Induktivität;

i_0 : Scheitelwert des Stroms; ω : Kreisfrequenz

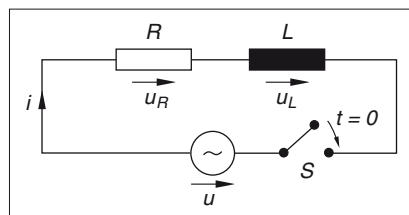


Bild IV-30

Berechnen Sie die *durchschnittliche Leistung* P dieses Stroms während einer Periode $T = 2\pi/\omega$.

Lösungshinweis: Die angelegte Wechselspannung $u(t)$ lässt sich aus der *Maschenregel* [A32] bestimmen.

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1, V.8.2 und V.10.7

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A45, A46

Lösung:

Die am ohmschen Widerstand R und an der Induktivität L liegenden *Teilspannungen* u_R und u_L *addieren* sich nach der *Maschenregel* [A32] zur Gesamtspannung u . Unter Berücksichtigung des *ohmschen Gesetzes* [A14] und des *Induktionsgesetzes* [A45] gilt dann

$$u = u_R + u_L = Ri + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Die *momentane Leistung* p ist dann nach der Definitionsformel [A46] durch den Ausdruck

$$p = ui = \left(Ri + L \cdot \frac{di}{dt} \right) i = Ri^2 + Li \cdot \frac{di}{dt}$$

gegeben. Mit

$$i = i_0 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \frac{di}{dt} = i_0 [-\sin(\omega t)] \cdot \omega = -\omega i_0 \cdot \sin(\omega t)$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} p &= Ri^2 + Li \cdot \frac{di}{dt} = Ri_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) + Li_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot (-\omega i_0) \cdot \sin(\omega t) = \\ &= Ri_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) - \omega Li_0^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die *durchschnittliche* Leistung P während der Periode $T = 2\pi/\omega$ die Integraldarstellung [A46]

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p \, dt = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^T [R i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) - \omega L i_0^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] \, dt = \\ &= \frac{\omega R i_0^2}{2\pi} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega t) \, dt - \frac{\omega^2 L i_0^2}{2\pi} \cdot \int_0^T \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \, dt \end{aligned}$$

In beiden Integralen führen wir zunächst die folgende *Substitution* durch (die Grenzen werden mitsubstituiert):

$$\alpha = \omega t, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \quad dt = \frac{d\alpha}{\omega}$$

$$\text{Untere Grenze: } t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } t = T \Rightarrow \alpha = \omega T = \omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega R i_0^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{\omega} - \frac{\omega^2 L i_0^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{\omega} = \\ &= \frac{R i_0^2}{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha}_{I_1} - \frac{\omega L i_0^2}{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \, d\alpha}_{I_2} = \frac{R i_0^2}{2\pi} \cdot I_1 - \frac{\omega L i_0^2}{2\pi} \cdot I_2 \end{aligned}$$

Berechnung der Integrale I_1 und I_2

Wir integrieren zunächst *unbestimmt* und lassen dabei die (später nicht benötigten) Integrationskonstanten fort.

(1) Berechnung von I_1 (mittels partieller Integration)

$$\int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int \begin{matrix} \cos \alpha & \cdot & \cos \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & & v' \end{matrix} d\alpha$$

$$u = \cos \alpha, \quad v' = \cos \alpha \Rightarrow u' = -\sin \alpha, \quad v = \sin \alpha$$

$$\int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int u \cdot v' \, d\alpha = u \cdot v - \int u' \cdot v \, d\alpha =$$

$$= \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \int (-\sin \alpha) \cdot \sin \alpha \, d\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

Mit $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ („trigonometrischer Pythagoras“) und anschließend „Rückwurf“ folgt weiter

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \alpha \, d\alpha &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int \sin^2 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int (1 - \cos^2 \alpha) \, d\alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int 1 \, d\alpha - \int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha - \underbrace{\int \cos^2 \alpha \, d\alpha}_{\text{„Rückwurf“ auf die linke Seite}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \cdot \int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha \Rightarrow \int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \left[\frac{1}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sin(2\pi)}_0 \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_1 + 2\pi - \underbrace{\sin 0}_0 \cdot \underbrace{\cos 0}_1 - 0 \right] = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

(2) Berechnung von I_2 (mittels Substitution)

$$\begin{aligned} z &= \sin \alpha, \quad \frac{dz}{d\alpha} = \cos \alpha, \quad d\alpha = \frac{dz}{\cos \alpha} \\ \int \sin \alpha \cdot \cos \alpha \, d\alpha &= \int z \cdot \cos \alpha \cdot \frac{dz}{\cos \alpha} = \int z \, dz = \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \alpha \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \, d\alpha = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2 \alpha \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sin^2(2\pi)}_0 - \underbrace{\sin^2 0}_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

Die *Durchschnittsleistung* des Wechselstroms während einer *Periode* beträgt damit

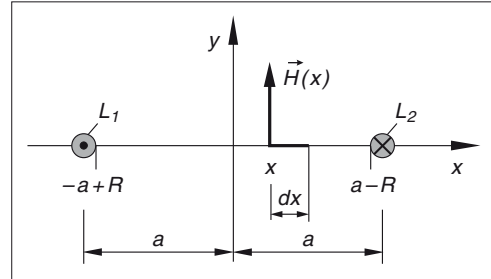
$$P = \frac{R i_0^2}{2\pi} \cdot I_1 - \frac{\omega L i_0^2}{2\pi} \cdot I_2 = \frac{R i_0^2}{2\pi} \cdot \pi - \frac{\omega L i_0^2}{2\pi} \cdot 0 = \frac{R i_0^2}{2}$$

Wegen $I_2 = 0$ findet der Energieumsatz *ausschließlich* im *ohmschen Widerstand* statt (sog. *Wirkleistung*).

Beispiel 23: Induktivität einer elektrischen Doppelleitung

*Integration durch Partialbruchzerlegung des Integranden,
Integration mittels Substitution*

Bild IV-31 zeigt im Querschnitt eine von einem konstanten Strom I durchflossene *elektrische Doppelleitung* der Länge l . Der Durchmesser $2R$ der Leiter soll dabei gegenüber dem Leiterabstand $2a$ vernachlässigbar klein sein. Bei *entgegengesetzter* Stromrichtung erzeugen die Leiterströme auf der Verbindungslinie der Leiterquerschnitte (x -Achse) ein resultierendes *Magnetfeld* mit einer *ortsabhängigen* magnetischen Feldstärke vom Betrag ¹²⁾

**Bild IV-31**

$$H(x) = \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}, \quad -a + R \leq x \leq a - R$$

Das Magnetfeld ist dabei *senkrecht* zur x -Achse und somit *parallel* zur y -Achse gerichtet. Berechnen Sie die *Induktivität* L dieser Doppelleitung nach der Formel $L = \Phi/I$. Dabei ist Φ der *magnetische Fluss* [A38] durch die rechteckige Fläche zwischen den beiden Leitern (diese Fläche steht *senkrecht* zur Papierebene).

Lösungshinweis: Das Magnetfeld *innerhalb* der Leiter bleibt *unberücksichtigt*. Die Doppelleitung befindet sich in *Luft* (Permeabilität $\mu \approx 1$).

Lehrbuch: Bd. 1, V.8.1 und V.8.3

Physikalische Grundlagen: A5, A38

Lösung:

Wir betrachten einen *schmalen* in der Ebene der beiden Leiter liegenden *Flächenstreifen* mit der Länge l und der Breite dx (Bild IV-31; Streifen *senkrecht* zur Papierebene). Er besitzt den Flächeninhalt $dA = l dx$ und wird infolge der geringen Streifenbreite von dem *nahezu konstanten* Magnetfeld der Stärke $H(x)$ bzw. der magnetischen Flussdichte $B(x)$ senkrecht durchflutet. Der *magnetische Fluss* $d\Phi$ durch diesen Streifen ist dann definitionsgemäß [A38, A5]

$$d\Phi = B(x) dA = \mu_0 \mu H(x) dA = \mu_0 \cdot 1 \cdot \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} l dx = \frac{\mu_0 I a l}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

Durch Summation, d. h. *Integration* über alle in der Fläche liegenden Streifen in den Grenzen von $x = -a + R$ bis $x = a - R$ erhalten wir den *Gesamtfluss*

$$\Phi = \int_{x=-a+R}^{a-R} d\Phi = \frac{\mu_0 I a l}{\pi} \cdot \int_{-a+R}^{a-R} \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{2\mu_0 I a l}{\pi} \cdot \int_0^{a-R} \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

¹²⁾ Siehe hierzu Beispiel 9 aus Kapitel II.

Die Integralberechnung erfolgt mittels *Partialbruchzerlegung* des echt gebrochenrationalen Integranden.

Nullstellen des Nenners: $a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm a$

Partialbruchzerlegung (Ansatz): $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{-1}{x^2 - a^2} = \frac{C_1}{x - a} + \frac{C_2}{x + a}$

Hauptnenner: $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 :

$$\frac{-1}{x^2 - a^2} = \frac{-1}{(x - a)(x + a)} = \frac{C_1}{x - a} + \frac{C_2}{x + a} = \frac{C_1(x + a) + C_2(x - a)}{(x - a)(x + a)} \Rightarrow$$

$$-1 = C_1(x + a) + C_2(x - a)$$

Wir setzen für x der Reihe nach die Werte der beiden *Nennernullstellen* ein:

$$\boxed{x = a} \quad -1 = C_1 \cdot 2a + C_2 \cdot 0 = 2aC_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2a}$$

$$\boxed{x = -a} \quad -1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-2a) = -2aC_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2a}$$

Somit ist

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{C_1}{x - a} + \frac{C_2}{x + a} = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x - a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x + a} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x - a} \right)$$

und

$$\Phi = \frac{2\mu_0 I a l}{\pi} \cdot \int_0^{a-R} \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{2\mu_0 I a l}{\pi} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \int_0^{a-R} \left(\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x - a} \right) dx =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \cdot \int_0^{a-R} \underbrace{\left(\frac{1}{x + a} \right)}_u - \underbrace{\left(\frac{1}{x - a} \right)}_v dx$$

Die Teilintegrale lassen sich mit den *Substitutionen* $u = x + a$, $dx = du$ und $v = x - a$, $dx = dv$ leicht lösen. Sie führen auf die Stammfunktionen $\ln|u| = \ln|x + a|$ und $\ln|v| = \ln|x - a|$. Wir erhalten damit für den *magnetischen Fluss*

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left[\ln|x + a| - \ln|x - a| \right]_0^{a-R} = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left[\ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right| \right]_0^{a-R} =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left(\ln \left| \frac{2a - R}{-R} \right| - \ln \left| \frac{a}{-a} \right| \right) = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left(\ln \left(\frac{2a - R}{R} \right) - \underbrace{\ln 1}_0 \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{2a - R}{R} \right)$$

Die Induktivität der Doppelleitung beträgt somit

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{2a - R}{R} \right)$$

Beispiel 24: Schwingungsdauer eines Fadenpendels
Numerische Integration nach Simpson

Das in Bild IV-32 skizzierte *Fadenpendel* (*mathematische Pendel*) mit der Fadenlänge l und der angehängten Masse m schwingt für *kleine* Auslenkwinkel φ *nahezu harmonisch* zwischen den beiden Umkehrpunkten A und B , wobei die *Schwingungsdauer* T aus der *Näherungsgleichung*

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnet werden kann. Die *exakte* Berechnung der Schwingungsdauer erfolgt nach der komplizierten *Integralformel*

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 u}} du \quad (\text{mit } \lambda = \sin(\varphi_0/2))$$

g : Erdbeschleunigung

φ_0 : maximaler Auslenkwinkel

Das darin auftretende sog. *elliptische Integral 1. Gattung* ist elementar *nicht* lösbar. Berechnen Sie dieses Integral und damit die Schwingungsdauer für einen maximalen Auslenkwinkel von $\varphi_0 = 60^\circ$ *numerisch* nach der *Simpsonschen Formel* für $2n = 8$ einfache Streifen und vergleichen Sie das Ergebnis mit der *Näherungslösung*.

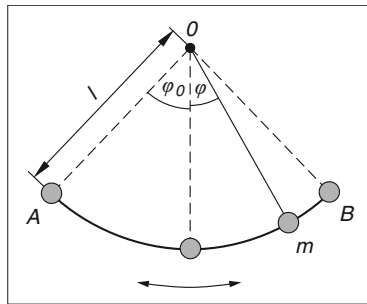


Bild IV-32

Anmerkung: Dieses Integral wird in Kapitel V, Beispiel 12 durch *Reihenentwicklung* des Integranden und anschließende *gliedweise* Integration näherungsweise gelöst.

Lösung:

$\lambda = \sin \varphi_0 = \sin 30^\circ = 0,5$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25 \cdot \sin^2 u}} du = ?$$

Schrittweite: $h = (\pi/2)/8 = \pi/16$

		„Erstrechnung“ mit $h = \pi/16$			„Zweitrechnung“ mit $h^* = 2h = \pi/8$		
k	u_k	$y_k = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25 \cdot \sin^2 u_k}}$			$y_k = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25 \cdot \sin^2 u_k}}$		
0	0	1,000 000			1,000 000		
1	$1 \cdot \frac{\pi}{16}$		1,004 792				
2	$2 \cdot \frac{\pi}{16}$			1,018 824		1,018 824	
3	$3 \cdot \frac{\pi}{16}$		1,040 969				
4	$4 \cdot \frac{\pi}{16}$			1,069 045			1,069 045
5	$5 \cdot \frac{\pi}{16}$		1,099 522				
6	$6 \cdot \frac{\pi}{16}$			1,127 508		1,127 508	
7	$7 \cdot \frac{\pi}{16}$		1,147 445				
8	$8 \cdot \frac{\pi}{16}$	1,154 701			1,154 701		
		$\underbrace{2,154\,701}_{\Sigma_0}$	$\underbrace{4,292\,728}_{\Sigma_1}$	$\underbrace{3,215\,377}_{\Sigma_2}$	$\underbrace{2,154\,701}_{\Sigma_0^*}$	$\underbrace{2,146\,332}_{\Sigma_1^*}$	$\underbrace{1,069\,045}_{\Sigma_2^*}$

„**Erstrechnung**“ mit der Schrittweite $h = \pi/16$:

$$I_h = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25 \cdot \sin^2 u}} du = (\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2) \frac{h}{3} =$$

$$= (2,154\,701 + 4 \cdot 4,292\,728 + 2 \cdot 3,215\,377) \frac{\pi}{48} = 1,685\,750$$

„**Zweitrechnung**“ mit der doppelten Schrittweite $h^* = 2h = \pi/8$:

$$I_{h^*} = I_{2h} = (\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^*) \frac{h^*}{3} =$$

$$= (2,154\,701 + 4 \cdot 2,146\,332 + 2 \cdot 1,069\,045) \frac{\pi}{24} = 1,685\,742$$

Fehlerabschätzung:

$$\Delta I = \frac{1}{15} (I_h - I_{h^*}) = \frac{1}{15} (I_h - I_{2h}) = \frac{1}{15} (1,685\,750 - 1,685\,742) = 0,6 \cdot 10^{-6}$$

Für die *Schwingungsdauer* erhalten wir damit die *exakte* Formel

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot I_h = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 1,685\,750 = 6,743\,000 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,743 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die *Näherungsformel*

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,283\,185 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 6,283 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

liefert einen um rund 6,8 % zu *kleinen* Wert.

V Taylor- und Fourier-Reihen

Beispiel 1: Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes
Grenzwertbestimmung mittels Reihenentwicklung

In Kapitel IV (Beispiel 14) wird für die *Fallgeschwindigkeit* v die folgende Abhängigkeit vom *Fallweg* s hergeleitet:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}s}\right)}, \quad s \geq 0$$

Diese Beziehung gilt unter der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand R dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit *proportional* ist: $R = kv^2$.

m : Masse des aus der Ruhe heraus frei fallenden Körpers; g : Erdbeschleunigung; $k > 0$: Reibungskoeffizient

Zeigen Sie mit Hilfe der *Reihenentwicklung*, dass man aus dieser Beziehung mittels *Grenzübergang* $k \rightarrow 0$ das bekannte Fallgesetz für den *luftleeren* Raum $v = \sqrt{2gs}$ erhält.

Anmerkung: In Kapitel III (Beispiel 21) wird diese Aufgabe mit Hilfe der *Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital* gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.3.3

Lösung:

Die *direkte* Ausführung des Grenzüberganges $k \rightarrow 0$ führt zu einem *unbestimmten Ausdruck*¹⁾. Wir entwickeln daher zunächst die Exponentialfunktion $e^{-\frac{2k}{m}s}$ in eine *Potenzreihe*, wobei wir von der bekannten *Mac Laurinschen Reihe* der e-Funktion ausgehen (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Mit $x = -\frac{2k}{m}s$ wird hieraus die (alternierende) Reihe

$$e^{-\frac{2k}{m}s} = 1 - \frac{2k}{m}s + \frac{2k^2}{m^2}s^2 - \frac{4k^3}{3m^3}s^3 + \dots$$

¹⁾ Der Ausdruck unter der Wurzel strebt für $k \rightarrow 0$ gegen den *unbestimmten Ausdruck* „ $\frac{0}{0}$ “ (siehe hierzu auch Beispiel 21 in Kapitel III).

Somit ist

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{2k}{m}s} &= 1 - \left(1 - \frac{2k}{m}s + \frac{2k^2}{m^2}s^2 - \frac{4k^3}{3m^3}s^3 + \dots \right) = \\ &= \frac{2k}{m}s - \frac{2k^2}{m^2}s^2 + \frac{4k^3}{3m^3}s^3 - + \dots \end{aligned}$$

und die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s lässt sich damit auch in der Form

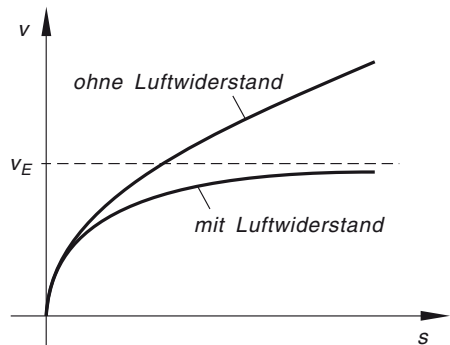
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{mg}{k} \left(\frac{2k}{m}s - \frac{2k^2}{m^2}s^2 + \frac{4k^3}{3m^3}s^3 - + \dots \right)} = \\ &= \sqrt{2g \left(s - \frac{k}{m}s^2 + \frac{2k^2}{3m^2}s^3 - + \dots \right)} \end{aligned}$$

darstellen. Der *Grenzübergang* $k \rightarrow 0$, d. h. der Übergang zum freien Fall im *luftleeren* Raum (der Luftwiderstand R verschwindet für $k \rightarrow 0$), bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr und führt zu dem aus dem Physikunterricht bekannten *Fallgesetz*

$$\begin{aligned} v &= \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2g \left(s - \frac{k}{m}s^2 + \frac{2k^2}{3m^2}s^3 - + \dots \right)} = \\ &= \sqrt{2g \cdot \underbrace{\lim_{k \rightarrow 0} \left(s - \frac{k}{m}s^2 + \frac{2k^2}{3m^2}s^3 - + \dots \right)}_s} = \sqrt{2gs} \end{aligned}$$

Bild V-1 zeigt die Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* vom *Fallweg* im *luftleeren* Raum und unter Berücksichtigung des *Luftwiderstandes*²⁾.

Bild V-1



²⁾ Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den *Endwert* $v_E = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, der (theoretisch) nach unendlich langer Fallstrecke erreicht wird. Das Fallgesetz lässt sich dann auch in der Form

$$v = v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{m}s}}, \quad s \geq 0$$

darstellen (siehe hierzu auch Kapitel II, Beispiel 23).

Beispiel 2: Elektrischer Widerstand zwischen zwei coaxialen Zylinderelektroden (Hohlzylinder)
Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynome

Der elektrische Widerstand R zwischen zwei coaxialen Zylinderelektroden wird nach der Formel

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right), \quad r_a > r_i$$

berechnet (Querschnitt siehe Bild V-2).

r_i : Innenradius; r_a : Außenradius; l : Länge der Elektroden; κ : Leitfähigkeit des Materials zwischen den Elektroden

- a) Drücken Sie den Widerstand R zunächst durch die (positive) Größe $x = \frac{r_a - r_i}{r_i}$ aus und entwickeln Sie anschließend die Funktion $R(x)$ in eine *Mac Laurinsche Reihe*.
- b) Leiten Sie anschließend aus der unter a) gewonnenen Reihenentwicklung für den *Sonderfall* $x \ll 1$, d. h. $d = r_a - r_i \ll r_i$ *Näherungsformeln* 1. und 2. Ordnung zur Berechnung des Widerstandes R her.

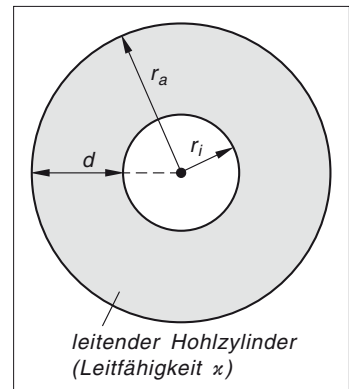


Bild V-2

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.1 und VI.3.3.1

Lösung:

- a) Es ist

$$\frac{r_a}{r_i} = \frac{r_a + (r_i - r_i)}{r_i} = \frac{r_i + (r_a - r_i)}{r_i} = \frac{r_i}{r_i} + \frac{r_a - r_i}{r_i} = 1 + x$$

und somit

$$R(x) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln(1 + x), \quad x > 0$$

Wir setzen nun $f(x) = \ln(1 + x)$ und entwickeln diese Funktion nach *Mac Laurin* in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1+x) & \Rightarrow & f(0) = \ln 1 = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\
 f''(x) &= -(1+x)^{-2} & \Rightarrow & f''(0) = -1 \\
 f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \\
 &\vdots & & \vdots
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1+x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots = \\
 &= 0 + \frac{1}{1!} x^1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 - + \dots = \\
 &= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - + \dots \quad (0 < x \leq 1)
 \end{aligned}$$

und die Widerstandsformel lässt sich damit auch durch *die Reihe*

$$R(x) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln(1+x) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - + \dots \right) \quad (0 < x \leq 1)$$

darstellen.

b) Mit $x = \frac{r_a - r_i}{r_i} = \frac{d}{r_i}$ lautet die Reihenentwicklung wie folgt:

$$R(d) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \left[\left(\frac{d}{r_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{r_i} \right)^3 - + \dots \right] \quad (0 < d \leq r_i)$$

Für $x \ll 1$, d. h. $d \ll r_i$ lassen sich hieraus durch *Abbruch* nach dem 1. bzw. 2. Reihenglied die gewünschten Näherungsformeln 1. bzw. 2. Ordnung gewinnen. Sie lauten:

$$1. \text{ Näherung: } R \approx \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \left(\frac{d}{r_i} \right)$$

$$2. \text{ Näherung: } R \approx \frac{1}{2\pi\kappa l} \left[\left(\frac{d}{r_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \right]$$

Beispiel 3: Temperaturabhängigkeit der Dichte eines Festkörpers
Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion

Die Dichte ϱ eines Festkörpers hängt wie folgt von der Temperatur ϑ ab:

$$\varrho(\vartheta) = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \vartheta}$$

Dabei ist ϱ_0 die Dichte bei $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$ und γ der räumliche Ausdehnungskoeffizient.

- a) Beschreiben Sie die Temperaturabhängigkeit der Dichte ϱ durch eine *lineare Näherungsfunktion*. In welcher *Größenordnung* liegt der dabei entstandene *prozentuale Fehler*?
- b) Wie groß ist die mit dieser Näherungsfunktion berechnete *prozentuale* Abnahme der Dichte ϱ für eine Stahlkugel, wenn diese von $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_1 = 100^\circ\text{C}$ erwärmt wird ($\gamma = 3,3 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$)?

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

- a) Wir gehen von der *Binomischen Formel*

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - + \dots \quad (|x| < 1)$$

aus (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4). Mit $x = \gamma \vartheta$ wird daraus

$$\frac{1}{1+\gamma \vartheta} = 1 - \gamma \vartheta + (\gamma \vartheta)^2 - + \dots \quad (|\gamma \vartheta| < 1)$$

und die Temperaturabhängigkeit der Dichte lässt sich daher auch durch die *Potenzreihe*

$$\varrho(\vartheta) = \frac{\varrho_0}{1+\gamma \vartheta} = \varrho_0 \cdot \frac{1}{1+\gamma \vartheta} = \varrho_0 (1 - \gamma \vartheta + (\gamma \vartheta)^2 - + \dots)$$

beschreiben. Für $|\gamma \vartheta| \ll 1$ dürfen wir diese Reihe nach dem *ersten nichtkonstanten* Glied, hier also nach dem *linearen* Glied abbrechen³⁾ und erhalten die folgende *lineare Näherungsfunktion*:

$$\varrho(\vartheta) = \varrho_0 (1 - \gamma \vartheta)$$

Der dabei entstandene *absolute Fehler* $\Delta \varrho$ liegt in der *Größenordnung* des nichtberücksichtigten *quadratischen* Reihengliedes (die Näherungsformel liefert einen zu *kleinen* Wert):

$$\Delta \varrho \approx \varrho_0 (\gamma \vartheta)^2$$

³⁾ Die Bedingung $|\gamma \vartheta| \ll 1$ ist in der Praxis erfüllt, da γ in der Größenordnung $(10^{-6} \dots 10^{-5}) \text{K}^{-1}$ liegt.

Der entsprechende *prozentuale* Fehler beträgt somit näherungsweise

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \cdot 100 \% = \frac{\varrho_0 (\gamma \vartheta)^2}{\varrho_0 (1 - \gamma \vartheta)} \cdot 100 \% = \frac{(\gamma \vartheta)^2}{1 - \gamma \vartheta} \cdot 100 \%$$

b) $\varrho_1 = \varrho(\vartheta_1) = \varrho_0(1 - \gamma \vartheta_1)$

Die *Dichteänderung* beträgt

$$\Delta \varrho = \varrho_1 - \varrho_0 = \varrho_0(1 - \gamma \vartheta_1) - \varrho_0 = \varrho_0(1 - \gamma \vartheta_1 - 1) = -\varrho_0 \gamma \vartheta_1$$

Die Dichte nimmt somit um den Wert $\varrho_0 \gamma \vartheta_1$ *ab*. Daraus ergibt sich der folgende Wert für die *prozentuale Abnahme* der Dichte:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} \right| \cdot 100 \% &= \frac{\varrho_0 \gamma \vartheta_1}{\varrho_0} \cdot 100 \% = \gamma \vartheta_1 \cdot 100 \% = \\ &= 3,3 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1} \cdot 100 \text{ °C} \cdot 100 \% = 0,33 \% \end{aligned}$$

Beispiel 4: Magnetische Feldstärke in der Mitte einer stromdurchflossenen Zylinderspule
Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynom

Eine aus N Windungen bestehende *Zylinderspule* mit der Länge l und dem Durchmesser d wird von einem Strom der Stärke I durchflossen. Das magnetische Feld besitzt dann in der *Mitte* der Zylinderspule eine *magnetische Feldstärke* vom Betrag

$$H = \frac{NI}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}}$$

- a) Leiten Sie für den Fall $d \ll l$ (d. h. für eine im Verhältnis zum Durchmesser *lange* Spule) durch *Reihenentwicklung* des Wurzelausdruckes eine *erste Näherungsformel* zur Berechnung der magnetischen Feldstärke H her.
- b) In welcher *Größenordnung* liegt dabei der *prozentuale* Fehler der nach der *Näherungsformel* berechneten magnetischen Feldstärke H , wenn der Durchmesser der Spule 10 % der Spulenlänge beträgt?

Lösung:

- a) Wir setzen $x = \left(\frac{d}{l}\right)^2$ und entwickeln die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$ nach der *Binomischen Formel* (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{(1+x)^{1/2}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - + \dots \quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}} = \left(1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^4 - + \dots$$

und

$$H = \frac{NI}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}} = \frac{NI}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^4 - + \dots\right)$$

Durch *Abbruch* dieser für $d < l$ gültigen Reihenentwicklung nach dem 2. *Glied* erhalten wir eine *erste Näherungsformel* zur Berechnung der magnetischen Feldstärke H . Sie lautet:

$$H = \frac{NI}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right) = \frac{NI}{l} \cdot \frac{2l^2 - d^2}{2l^2} = \frac{NI(2l^2 - d^2)}{2l^3}$$

- b) Der *absolute Fehler* ΔH liegt in der *Größenordnung* des *ersten* weggelassenen Reihengliedes und beträgt somit näherungsweise (die Näherungsformel liefert einen zu *kleinen* Wert):

$$\Delta H = \frac{NI}{l} \cdot \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^4$$

Der *prozentuale Fehler* ist daher

$$\frac{\Delta H}{H} \cdot 100\% = \frac{\frac{NI}{l} \cdot \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^4}{\frac{NI}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right)} \cdot 100\% = \frac{\frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2} \cdot 100\%$$

Für das vorgegebene Verhältnis $\frac{d}{l} = 0,1$ erhalten wir einen *prozentualen* Fehler von

$$\frac{\Delta H}{H} \cdot 100\% = \frac{\frac{3}{8} \cdot 0,1^4}{1 - \frac{1}{2} \cdot 0,1^2} \cdot 100\% = 0,0038\% \approx 0,004\%$$

Die *Näherungsformel* liefert einen nur um rund 0,004% zu *kleinen* Wert.

Beispiel 5: Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft
Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion

Die *Temperaturabhängigkeit* der *Schallgeschwindigkeit* c in Luft wird durch die Funktionsgleichung

$$c(\vartheta) = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}}}$$

beschrieben (ϑ : Temperatur in $^\circ\text{C}$). Entwickeln Sie diesen Wurzelausdruck mit Hilfe der allgemeinen *Binomischen Formel* in eine Potenzreihe und leiten Sie daraus durch Reihenabbruch eine *lineare Näherungsformel* zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit c her. Der dabei entstandene *prozentuale* Fehler soll für den Temperaturbereich $0^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 40^\circ\text{C}$ *größenordnungsmäßig* abgeschätzt werden.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

Wir setzen $x = \frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}}$ und entwickeln die Wurzel $\sqrt{1+x}$ nach der allgemeinen *Binomischen Formel*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4) für $n = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}x^1 + \binom{1/2}{2}x^2 + \dots \quad (|x| \leq 1)$$

Die *Binomialkoeffizienten* haben dabei die folgenden Werte:

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$$

Somit ist

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + - \dots \quad (|x| \leq 1)$$

und die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c lässt sich daher auch durch die folgende *Potenzreihe* beschreiben:

$$c(\vartheta) = 331 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}} \right)^2 + - \dots \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Im Temperaturintervall $0^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 40^\circ\text{C}$ bewegt sich die Größe $x = \frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}}$ zwischen den Werten 0 und 0,1464 und kann somit als *klein* gegenüber 1 betrachtet werden. Durch *Reihenabbruch* nach dem 2. *Glied* erhalten wir dann die gewünschte *lineare Näherungsformel*. Sie lautet:

$$c(\vartheta) = 331 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}} \right) \right] \frac{\text{m}}{\text{s}} = 331 \left(1 + \frac{\vartheta}{546,3^\circ\text{C}} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der *absolute Fehler* Δc liegt dabei in der *Größenordnung* des *ersten* weggelassenen *Reihen*-*gliedes*⁴⁾:

$$\Delta c \approx 331 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}} \right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei der *Höchsttemperatur* von $\vartheta = 40^\circ\text{C}$ ergeben sich für die Schallgeschwindigkeit c und ihren *absoluten Fehler* Δc somit folgende Werte:

$$c = 331 \left(1 + \frac{40^\circ\text{C}}{546,3^\circ\text{C}} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 355,24 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\Delta c = 331 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{40^\circ\text{C}}{273,15^\circ\text{C}} \right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der *prozentuale Fehler* beträgt demnach näherungsweise

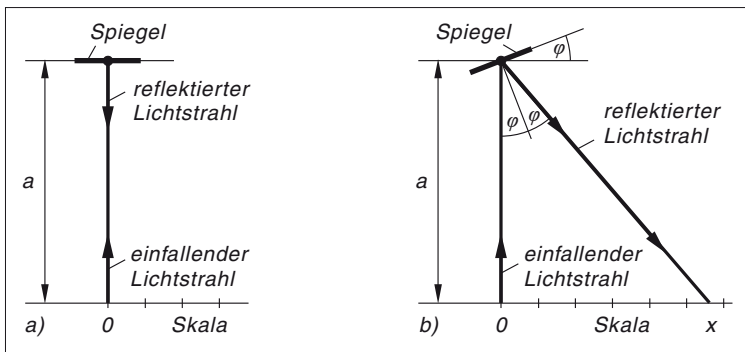
$$\frac{\Delta c}{c} \cdot 100\% = \frac{0,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{355,24 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 100\% = 0,25\% \approx 0,3\%$$

Die *lineare Näherungsformel* liefert daher im Temperaturbereich von 0°C bis 40°C einen um *höchstens* 0,3% zu *großen* Wert für die Schallgeschwindigkeit c .

⁴⁾ Die Näherungsformel liefert einen zu *großen* Wert.

Beispiel 6: Spiegelgalvanometer***Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion***

Ein *Spiegelgalvanometer* ist ein empfindliches *Drehspulmessgerät* für *Gleichstrom*. Die Spule ist dabei an einem dünnen Metallband aufgehängt und mit einem *Spiegel* zwecks Ablesung der vom Messstrom hervorgerufenen *Drehung* verbunden. Ein auf den Spiegel fallender Lichtstrahl erfährt bei einer Drehung des Spiegels um den Winkel φ eine Ablenkung um den *doppelten* Winkel (Bild V-3). Dies bewirkt auf einer im Abstand a zum Spiegel angebrachten Skala eine *Verschiebung* des reflektierten Lichtstrahls um die Strecke x gegenüber der Nulllage (*stromloses Messgerät*, Bild V-3a)).

**Bild V-3**

- a) Welcher funktionale Zusammenhang besteht zwischen dem *Drehwinkel* φ und der *Verschiebung* x auf der Skala?
- b) Leiten Sie aus dieser Beziehung mittels *Reihenentwicklung* eine *lineare* Abhängigkeit zwischen den Größen φ und x her und schätzen Sie den durch *Reihenabbruch* entstandenen prozentualen Fehler *größenordnungsmäßig* ab (Rechenbeispiel: $\frac{x}{a} \leq 0,1$).

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

- a) Aus Bild V-3b) folgt zunächst (aus dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck)

$$\tan(2\varphi) = \frac{x}{a}$$

und daraus durch *Umkehrung* die gesuchte Beziehung

$$2\varphi = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

- b) Wir greifen auf die als *bekannt* vorausgesetzte *Mac Laurinsche Reihe* von $\arctan z$ zurück (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4):

$$\arctan z = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - + \dots \quad (|z| \leq 1)$$

Mit $z = \frac{x}{a}$ wird daraus

$$\arctan \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{x}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{a} \right)^5 - + \dots \quad (x \leq a)$$

Damit erhalten wir für den *Drehwinkel* φ die folgende *Reihenentwicklung*:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{a} \right)^5 - + \dots \right] \quad (x \leq a)$$

Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem *ersten* Glied ergibt sich die gewünschte *lineare Näherungsformel*:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)$$

Der *absolute Fehler* $\Delta\varphi$ ist dabei von der *Größenordnung* des *ersten* weggelassenen Reihengliedes (die *lineare Näherungsformel* liefert einen zu *großen* Wert.):

$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{x}{a} \right)^3$$

Somit beträgt der *prozentuale Fehler* rund

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{x}{a} \right)^3}{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)} \cdot 100\% = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \cdot 100\%$$

Rechenbeispiel: Für $\frac{x}{a} \leq 0,1$ ist der *prozentuale Fehler* *kleiner* als $\frac{1}{3}\%$ d. h. die *lineare Näherungsformel* liefert in diesem Bereich einen um rund 0,33% zu *großen* Wert für den Drehwinkel φ .

Beispiel 7: Kapazität einer elektrischen Doppelleitung
Potenzreihenentwicklung, Näherungsformel

Die in Bild V-4 im Querschnitt dargestellte *elektrische Doppelleitung* besteht aus zwei *parallelen* Leitern (Drähten) mit der Länge l und dem Leiterradius R . Der Mittelpunktsabstand der beiden Leitungen beträgt $d = 2a$. Die *Kapazität* dieser Anordnung berechnet sich dann nach der folgenden relativ komplizierten Formel:

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left[\frac{a}{R} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2} \right) \right]}$$

ε_0 : elektrische Feldkonstante

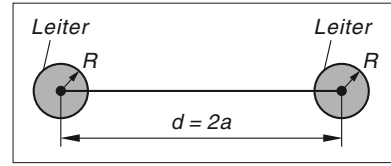


Bild V-4

Leiten Sie hieraus mittels *Reihenentwicklung* eine für $R \ll a$ (d. h. dünne Drähte in großem Abstand) gültige *Näherungsformel* zur Berechnung der Kapazität her.

Lösungshinweis: Entwickeln Sie zunächst den Wurzelausdruck unter Verwendung der *Binomischen Formel* in eine Potenzreihe und brechen Sie diese dann nach dem *ersten nicht konstanten* Glied ab.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

Wir entwickeln den Wurzelausdruck mit Hilfe der *Binomischen Formel*

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \dots = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \dots$$

(mit $|x| \leq 1$; siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4). Mit $x = \left(\frac{R}{a}\right)^2$ wird hieraus

$$\sqrt{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{a}\right)^4 - \dots \quad (R \leq a)$$

Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem *ersten nichtkonstanten* Glied, d. h. hier also nach dem *quadratischen* Glied erhalten wir die Näherung

$$\sqrt{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 = 1 - \frac{R^2}{2a^2}$$

und somit für die Kapazität der Doppelleitung die folgende für $R \ll a$ gültige *Näherungsformel*:

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left[\frac{a}{R} \left(1 + 1 - \frac{R^2}{2a^2} \right) \right]} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left[\frac{a}{R} \left(2 - \frac{R^2}{2a^2} \right) \right]} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{2a} \right)} = \\ &= \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{4a^2 - R^2}{2aR} \right)} \end{aligned}$$

Beispiel 8: Relativistische Masse und Energie eines Elektrons
Potenzreihenentwicklung, Näherungspolynom

Die *Masse* m eines *Elektrons* ist keine absolute, sondern eine noch von der *Elektronengeschwindigkeit* v abhängige Größe. Sie nimmt mit der Geschwindigkeit nach der sog. *relativistischen Formel* wie folgt zu:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dabei ist $m_0 = m(v = 0)$ die Ruhemasse des Elektrons und $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ die *Lichtgeschwindigkeit* im Vakuum. Die *kinetische* Energie des Elektrons wird dann nach der Formel

$$E_{\text{kin}} = (m - m_0) c^2$$

berechnet. Zeigen Sie mit Hilfe der *Reihenentwicklung*, dass dieser Ausdruck für sehr *kleine* Elektronengeschwindigkeiten, d. h. für $v \ll c$ in die aus der Elementarphysik bereits bekannte Formel $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$ übergeht.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

Wir gehen von der als *bekannt* vorausgesetzten *Binomischen Reihe*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \frac{1}{(1-x)^{1/2}} = (1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

aus (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4). Mit $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ erhalten wir hieraus zunächst

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \quad (v < c)$$

und damit die folgende *Potenzreihenentwicklung* für die relativistische Masse:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots\right)$$

Durch *Abbruch* der Reihe nach dem *ersten nichtkonstanten Glied*, d. h. hier also nach dem *quadratischen Glied* ergibt sich die für $v \ll c$ gültige *Näherungsformel*

$$m(v) \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

Für die *kinetische* Energie folgt daraus

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= (m - m_0) c^2 \approx \left[m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) - m_0 \right] c^2 = \left(m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} - m_0 \right) c^2 = \\ &= \frac{m_0 v^2}{2c^2} \cdot c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned}$$

Dies ist die bereits aus der Schulphysik bekannte Formel für die kinetische Energie, die somit eine nur für *kleine* Geschwindigkeiten, d. h. für $v \ll c$ zulässige *Näherung* darstellt!

Beispiel 9: RC-Schaltung mit Rampenspannung

Potenzreihenentwicklung, Näherungsfunktionen

An die in Bild V-5 dargestellte *RC-Schaltung* wird zur Zeit $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine *linear* mit der Zeit ansteigende sog. *Rampenspannung* $u = kt$ angelegt. Die *Kondensatorspannung* $u_C(t)$ wächst dabei im Laufe der Zeit vom Anfangswert $u_C(t = 0) = 0$ aus nach dem folgenden *Zeitgesetz*:

$$u_C(t) = k \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], \quad t \geq 0$$

R : ohmscher Widerstand; C : Kapazität; $k > 0$: Konstante; $\tau = RC$: Zeitkonstante

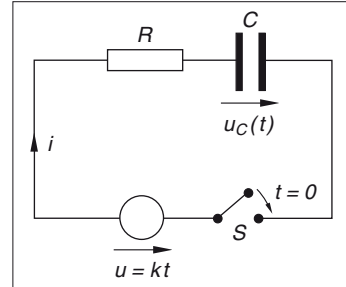


Bild V-5

- Zeigen Sie mittels *Reihenentwicklung*, dass die Kondensatorspannung $u_C(t)$ in der *Anfangsphase*, d. h. für $t \ll \tau$ *nahezu quadratisch* mit der Zeit t ansteigt.
- Wie verhält sich die Kondensatorspannung für $t \gg \tau$?

Lehrbuch: Bd. 1, V1.3.2.3 und VI.3.3.1

Lösung:

- Aus der als *bekannt* vorausgesetzten Reihenentwicklung von e^{-x} in der Form

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - + \dots = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - + \dots \quad (|x| < \infty)$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4) erhalten wir mit $x = t/\tau$ die *Potenzreihe*

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - + \dots = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} - + \dots$$

Für $t \ll \tau$, d. h. $t/\tau \ll 1$ darf diese Reihe nach dem *quadratischen* Glied abgebrochen werden:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}$$

Diese *Näherung* setzen wir in das Zeitgesetz der Kondensatorspannung ein und erhalten

$$\begin{aligned} u_C(t) &= k \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \approx k \left[t - \tau \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} \right) \right) \right] = \\ &= k \left[t - \tau \left(1 - 1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right) \right] = k \left[t - \tau \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right) \right] = \\ &= k \left(t - t + \frac{t^2}{2\tau} \right) = k \cdot \frac{t^2}{2\tau} = \frac{k}{2\tau} t^2 \end{aligned}$$

Die *Kondensatorspannung* $u_C(t)$ steigt somit in der Anfangsphase *quadratisch* mit der Zeit t an (Bild V-6a)).

b) Für $t \gg \tau$ und somit $t/\tau \gg 1$ gilt $e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0$ und daher

$$u_C(t) = k \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \approx k [t - \tau(1 - 0)] = k(t - \tau) = kt - k\tau$$

Die Kondensatorspannung wächst somit für $t \gg \tau$ nur *noch linear* mit der Zeit (Bild V-6b)).

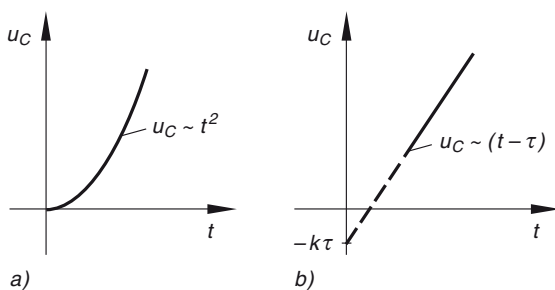


Bild V-6

Beispiel 10: Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)**Lösen einer Gleichung mittels Reihenentwicklung, Näherungsparabel**

Bild V-7 zeigt ein *freihängendes Seil* mit der Spannweite $2l = 20$ m und dem Durchhang $h = 1$ m. Die Höhe der beiden Träger beträgt $H = 8$ m. Die Funktionsgleichung dieser *Seilkurve* (auch *Kettenlinie* genannt) ist dann in der Form

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b, \quad -l \leq x \leq l$$

darstellbar.

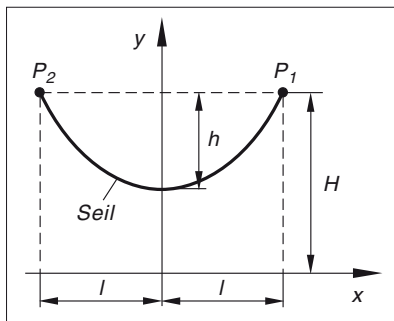


Bild V-7

- Wie lauten die allgemeinen *Bestimmungsgleichungen* für die Kurvenparameter a und b ?
- Die unter a) gefundene *transzendente* Gleichung für den Parameter a ist exakt *nicht* lösbar. Lösen Sie diese Gleichung *näherungsweise* durch *Reihenentwicklung* der in ihr auftretenden transzendenten Funktion und Abbruch dieser Reihe nach dem *ersten nichtkonstanten* Glied. Unter welcher Voraussetzung führt diese Näherung zu einem „vernünftigen“ Ergebnis? Zeigen Sie, dass diese Bedingung im vorliegenden Fall erfüllt ist. Welche *Näherungswerte* besitzen somit die beiden Kurvenparameter a und b ?
- Zeigen Sie, dass die Seilkurve im vorliegenden Fall *nahezu parabelförmige* Gestalt besitzt und bestimmen Sie die *Gleichung* dieser Näherungsparabel.

Anmerkung: In Kapitel III, Beispiel 24 wird diese Aufgabe *numerisch* nach dem *Newtonschen Tangentenverfahren* gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.2.3

Lösung:

- Die Seilkurve schneidet die y -Achse bei

$$y(0) = a \cdot \cosh 0 + b = a \cdot 1 + b = a + b$$

Zwischen Trägerhöhe H , Durchhang h und diesem Schnittpunkt besteht dann nach Bild V-7 der folgende Zusammenhang:

$$y(0) + h = H \quad \Rightarrow \quad a + b + h = H$$

Der Kurvenparameter b ist somit durch den Kurvenparameter a *eindeutig* bestimmt:

$$b = H - h - a$$

Die *Bestimmungsgleichung* für a erhalten wir auf folgende Weise. Der Aufhängepunkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = l$ und $y_1 = H$ liegt auf der Seilkurve. Daher ist

$$H = a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) + b = a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) + H - h - a$$

und somit

$$a \cdot \cosh\left(\frac{l}{a}\right) = a + h$$

Dies ist die gesuchte (transzendente) *Bestimmungsgleichung* für den Kurvenparameter a .

- b) Aus der Formelsammlung (Abschnitt VI.3.4) entnehmen wir die *Mac Laurinsche Reihe* für $\cosh x$:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad (|x| < \infty)$$

Mit $x = l/a$ folgt hieraus durch *Abbruch* nach dem *ersten nichtkonstanten* Glied, d. h. hier also nach dem *quadratischen* Glied

$$\cosh\left(\frac{l}{a}\right) \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a}\right)^2 = 1 + \frac{l^2}{2a^2}$$

Die (seitenvertauschte) transzendente Bestimmungsgleichung für a geht damit in die *lineare Näherungsgleichung*

$$a + h = a \left(1 + \frac{l^2}{2a^2}\right) = a + \frac{l^2}{2a} \quad \text{oder} \quad h = \frac{l^2}{2a}$$

über und besitzt die *Näherungslösung*

$$a = \frac{l^2}{2h}$$

Der Abbruch der Reihe nach dem *quadratischen* Glied ist jedoch nur sinnvoll, wenn $l/a \ll 1$ und somit $l \ll a$ ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn wie in diesem Beispiel $h \ll l$ ist ($h = 1 \text{ m}$, $l = 10 \text{ m} \Rightarrow h \ll l$).

Die *Näherungslösung* für die Kurvenparameter a und b lautet daher für die vorgegebenen Werte wie folgt⁵⁾:

$$a = \frac{l^2}{2h} = \frac{(10 \text{ m})^2}{2 \cdot 1 \text{ m}} = 50 \text{ m}, \quad b = H - h - a = (8 - 1 - 50) \text{ m} = -43 \text{ m}$$

Die *Seilkurve* wird somit durch die Gleichung

$$y = 50 \text{ m} \cdot \cosh(0,02 \text{ m}^{-1} \cdot x) - 43 \text{ m}, \quad -10 \leq \frac{x}{\text{m}} \leq 10$$

beschrieben.

⁵⁾ Das *Tangentenverfahren von Newton* führt zu dem *genaueren* Ergebnis $a = 50,1658 \text{ m}$, $b = -43,1658 \text{ m}$ (siehe Kapitel III, Beispiel 24).

- c) Für $\left| \frac{x}{a} \right| \ll 1$, d. h. $|x| \ll a$ darf die Reihenentwicklung der Hyperbelfunktion $\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ nach dem *quadratischen* Glied abgebrochen werden⁶⁾:

$$\cosh z \approx 1 + \frac{1}{2} z^2 \xrightarrow[z=x/a]{\text{Substitution}} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2a^2} x^2$$

Die Gleichung der *Seilkurve* geht dabei über in

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b \approx a \left(1 + \frac{1}{2a^2} x^2\right) + b = a + \frac{1}{2a} x^2 + b = \\ &= \frac{1}{2a} x^2 + a + b \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer nach *oben* geöffneten achsensymmetrischen *Parabel* mit dem Scheitelpunkt $S = (0; a + b)$. Mit den gefundenen Werten für a und b erhalten wir

$$y = 50 \text{ m} \cdot \cosh(0,02 \text{ m}^{-1} \cdot x) - 43 \text{ m} \approx 0,01 \text{ m}^{-1} \cdot x^2 + 7 \text{ m}$$

Beispiel 11: Gaußsche Normalverteilung

Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

Die Messwerte und Messfehler einer Größe x unterliegen in der Regel der sog. *Gaußschen Normalverteilung* mit der Verteilungsdichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$(-\infty < x < \infty; \text{Bild V-8}).$

μ : Mittelwert oder Erwartungswert

σ : Standardabweichung

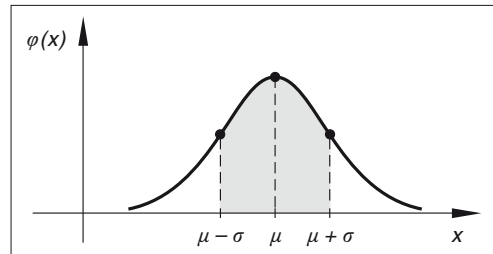


Bild V-8

Die *Wahrscheinlichkeit* P dafür, dass ein Messwert in das Intervall $a \leq x \leq b$ fällt, ist dabei durch das Integral

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

gegeben. Zeigen Sie: Rund 68,3 % aller Messwerte liegen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ (entspricht der grau unterlegten Fläche in Bild V-8).

⁶⁾ Diese Bedingung ist wegen $|x| \leq l$ und $l \ll a$ erfüllt.

Lösungshinweis: Führen Sie zunächst eine geeignete *Integralsubstitution* durch und berechnen Sie dann das anfallende Integral mittels *Reihenentwicklung des Integranden* und einer sich anschließenden *gliedweisen Integration*.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.3.2

Lösung:

Wir bringen zunächst das gesuchte *Wahrscheinlichkeitsintegral*

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

(in Bild V-8 durch die grau unterlegte Fläche bildlich dargestellt) mit Hilfe der *Substitution*

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma}, \quad dx = \sigma dt$$

$$\text{Untere Grenze: } x = \mu - \sigma \Rightarrow t = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

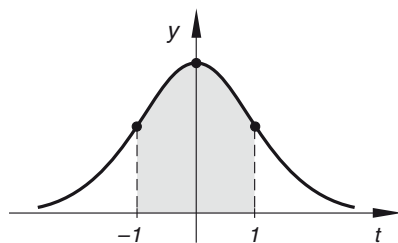
$$\text{Obere Grenze: } x = \mu + \sigma \Rightarrow t = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

in eine etwas *übersichtlichere* Form:

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) &= P(-1 \leq t \leq 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{2} t^2} \cdot \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \end{aligned}$$

Der Integralwert entspricht dabei der Fläche unter der *standardisierten* Gaußschen Verteilungsdichtefunktion $y = e^{-\frac{1}{2} t^2}$ im Bereich ihrer beiden *Wendepunkte* an den Stellen $t_{1/2} = \pm 1$ (Bild V-9).

Bild V-9



Wegen der *Spiegelsymmetrie* zur *y*-Achse ist

$$P(-1 \leq t \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

Dieses Integral lösen wir wie folgt. Ausgehend von der als bekannt vorausgesetzten *Mac Laurinschen Reihe* der Exponentialfunktion in der Form

$$e^z = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (|z| < \infty)$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4) erhalten wir mit Hilfe der *Substitution* $z = -\frac{1}{2}t^2$ die *Potenzreihe des Integranden* $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$:

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1 - \frac{t^2}{2 \cdot 1!} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} - \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} - \frac{t^{10}}{32 \cdot 5!} + - \dots$$

Diese Reihe konvergiert *beständig* und darf daher *gliedweise* integriert werden. Somit ist

$$\begin{aligned} P(-1 \leq t \leq 1) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{2 \cdot 1!} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} - \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} - \frac{t^{10}}{32 \cdot 5!} + - \dots \right) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[t - \frac{t^3}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} - \frac{t^{11}}{11 \cdot 32 \cdot 5!} + - \dots \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 16 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 32 \cdot 5!} + - \dots \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \frac{1}{42240} + - \dots \right) = 0,6827 \approx 0,683 \end{aligned}$$

Wie behauptet liegen bei einer *normalverteilten* Größe x rund 68,3% aller Messwerte im sog. σ -Bereich $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$ um den *Mittelwert* μ .

Beispiel 12: Schwingungsdauer eines Fadenpendels

Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

Das in Bild V-10 dargestellte *Fadenpendel* (*mathematische Pendel*) mit der Fadenlänge l und der angehängten Masse m schwingt für *kleine* Auslenkungswinkel φ *nahezu harmonisch* zwischen den beiden Umkehrpunkten A und B , wobei die Schwingungsdauer T aus der *Näherungsgleichung*

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnet werden kann.

Die *exakte* Berechnung von T erfolgt nach der komplizierten *Integralformel*

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 u}} du$$

g : Erdbeschleunigung

φ_0 : maximaler Auslenkungswinkel

$\lambda = \sin(\varphi_0/2)$

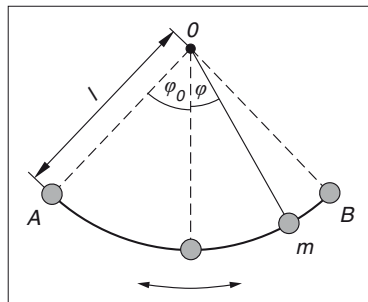


Bild V-10

Das darin auftretende sog. *elliptische Integral 1. Gattung* ist elementar *nicht* lösbar. Berechnen Sie dieses Integral und damit die Schwingungsdauer T näherungsweise für den maximalen Auslenkungswinkel $\varphi_0 = 60^\circ$ durch *Reihenentwicklung des Integranden* und anschließende *gliedweise Integration* auf *drei* Dezimalstellen nach dem Komma genau. Die dabei anfallenden Integrale dürfen mit Hilfe einer Integraltafel berechnet werden.

Anmerkung: Dieses Integral wird in Kapitel IV, Beispiel 24 *numerisch* nach dem *Simpson-Verfahren* gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, VI.3.3.2

Lösung:

Wir gehen von der *Binomischen Reihe*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \frac{1}{(1-x)^{1/2}} = (1-x)^{-1/2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^5 + \dots \end{aligned}$$

aus (siehe Formelsammlung, Abschnitt VI.3.4). Mit $\lambda = \sin(\varphi_0/2) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $x = \lambda^2 \cdot \sin^2 u = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 u$ wird hieraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \sin^2 u}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \sin^4 u + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{64} \cdot \sin^6 u + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{256} \cdot \sin^8 u + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{1024} \cdot \sin^{10} u + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{8} \cdot \sin^2 u + \frac{3}{128} \cdot \sin^4 u + \frac{5}{1024} \cdot \sin^6 u + \frac{35}{32768} \cdot \sin^8 u + \frac{63}{262144} \cdot \sin^{10} u + \dots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das *elliptische Integral* die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \sin^2 u}} du = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \sin^2 u + \frac{3}{128} \cdot \sin^4 u + \frac{5}{1024} \cdot \sin^6 u + \frac{35}{32768} \cdot \sin^8 u + \frac{63}{262144} \cdot \sin^{10} u + \dots \right) du = \\
 &= \underbrace{\int_0^{\pi/2} 1 du}_{\pi/2} + \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 u du}_{I_1} + \frac{3}{128} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^4 u du}_{I_2} + \frac{5}{1024} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^6 u du}_{I_3} + \\
 &\quad + \frac{35}{32768} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^8 u du}_{I_4} + \frac{63}{262144} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{10} u du}_{I_5} + \dots = \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} I_1 + \frac{3}{128} I_2 + \frac{5}{1024} I_3 + \frac{35}{32768} I_4 + \frac{63}{262144} I_5 + \dots
 \end{aligned}$$

Auswertung der Integrale (unter Verwendung der Integraltafel der Formelsammlung):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du = \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} - 0 + \frac{\sin 0}{4} = \\
 &= \frac{\pi}{4} - 0 - 0 + 0 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Integral Nr. 205})
 \end{aligned}$$

Die übrigen Integrale lassen sich mit Hilfe der *Rekursionsformel* (Integral Nr. 207)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \sin^n u du &= \underbrace{\left[-\frac{\sin^{n-1} u \cdot \cos u}{n} \right]_0^{\pi/2}}_0 + \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} u du = \\
 &= \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} u du
 \end{aligned}$$

wie folgt schrittweise auf das Integral $I_1 = \pi/4$ zurückführen ($n = 4, 6, 8, 10$)⁷⁾:

⁷⁾ *Begründung:* Der Zähler $\sin^{n-1} u \cdot \cos u$ *verschwindet* sowohl an der oberen Grenze (wegen $\cos(\pi/2) = 0$) als auch an der unteren Grenze (wegen $\sin 0 = 0$ und somit auch $\sin^{n-1} 0 = 0$).

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 u \, du = \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du}_{I_1} = \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 u \, du = \frac{5}{6} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^4 u \, du}_{I_2} = \frac{5}{6} I_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^8 u \, du = \frac{7}{8} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^6 u \, du}_{I_3} = \frac{7}{8} I_3 = \frac{7}{8} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} u \, du = \frac{9}{10} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^8 u \, du}_{I_4} =$$

$$= \frac{9}{10} I_4 = \frac{9}{10} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Somit ist

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} I_1 + \frac{3}{128} I_2 + \frac{5}{1024} I_3 + \frac{35}{32768} I_4 + \frac{63}{262144} I_5 + \dots =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{5}{1024} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{35}{32768} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \frac{63}{262144} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{\pi}{4} + \dots =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(2 + \frac{1}{8} + \frac{9}{512} + \frac{25}{8192} + \frac{1225}{2097152} + \frac{3969}{33554432} + \dots \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} (2 + 0,125 + 0,017578 + 0,003052 + 0,000584 + 0,000118 + \dots) =$$

$$\approx \frac{\pi}{4} (2,146332) \approx 1,686$$

Für die *Schwingungsdauer* folgt damit

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot I \approx 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 1,686 = 6,744 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Beispiel 13: Fourier-Zerlegung einer periodischen Folge rechteckiger Spannungsimpulse
Fourier-Reihe, Amplitudenspektrum

Bild V-11 zeigt eine *periodische* Folge *rechteckiger Spannungsimpulse* $u(t)$ der Breite $2a$ und der Stärke (Höhe) \hat{u} mit der Periodendauer T und der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$.

Wie lautet die Fourier-Zerlegung

- a) in *reeller* Darstellung,
- b) in *komplexer* Darstellung?
- c) Bestimmen Sie das *Amplitudenspektrum* für den Sonderfall $a = T/4$.

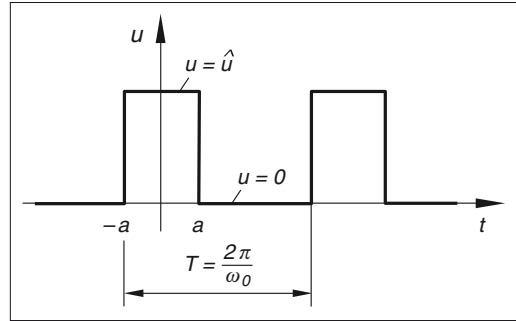


Bild V-11

Lehrbuch: Bd. 2, II.2.1

Lösung:

- a) Wir wählen als *Periodenintervall* $-a < t < T - a$. Der Spannungsimpuls wird dort durch die Funktion

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} & -a < t < a \\ 0 & \text{für } a < t < T - a \end{cases}$$

beschrieben. Da diese Funktion *gerade* ist (*Spiegelsymmetrie* zur u -Achse), enthält die Fourier-Reihe *keine* Sinusglieder. Daher verschwinden alle Koeffizienten b_n der Sinusschwingungen: $b_n = 0$ (für $n = 1, 2, 3, \dots$). Die Fourier-Reihe *reduziert* sich somit auf

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

Wir berechnen zunächst den *Gleichspannungsanteil* (Koeffizient a_0) und anschließend die Koeffizienten *der Kosinusglieder*.

Berechnung des Fourierkoeffizienten a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} u(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^a \hat{u} dt = 2 \cdot \frac{2}{T} \cdot \hat{u} \cdot \int_0^a 1 dt = \frac{4\hat{u}}{T} \left[t \right]_0^a = \frac{4\hat{u}a}{T} = \\ &= \frac{4\hat{u}a\omega_0}{2\pi} = \frac{2\hat{u}a\omega_0}{\pi} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)(Integral Nr. 228; $\omega_0 T = 2\pi$)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} u(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^a \hat{u} \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \\
 &= 2 \cdot \frac{2}{T} \cdot \hat{u} \cdot \int_0^a \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4\hat{u}}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^a = \frac{4\hat{u}}{n \underbrace{\omega_0 T}_{2\pi}} \left[\sin(n\omega_0 t) \right]_0^a = \\
 &= \frac{4\hat{u}}{n \cdot 2\pi} [\sin(n\omega_0 a) - \underbrace{\sin 0}_0] = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n}
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe der Impulsfolge nimmt damit die folgende reelle Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) = \frac{\hat{u} a \omega_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot \cos(n\omega_0 t) = \\
 &= \frac{\hat{u} a \omega_0}{\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot \cos(n\omega_0 t) = \\
 &= \frac{\hat{u} a \omega_0}{\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega_0 a)}{1} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin(2\omega_0 a)}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin(3\omega_0 a)}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

b) Darstellung der Fourier-Reihe von $u(t)$ in *komplexer* Form:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Die komplexen Koeffizienten c_n lassen sich aus den bereits bekannten Koeffizienten a_n und b_n der reellen Darstellung wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{2\hat{u} a \omega_0}{\pi}; \quad a_n = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n}; \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\hat{u} a \omega_0}{\pi} = \frac{\hat{u} a \omega_0}{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = c_n^* = c_n = \frac{1}{2} a_n = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n}$$

Man beachte, dass alle Fourierkoeffizienten *reell* sind und die Beziehung $c_{-n} = c_n$ besteht!

Fourier-Zerlegung in komplexer Form

Wir zerlegen die Fourier-Reihe zunächst wie folgt in zwei Teilsommen:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

In diesem Beispiel besteht kein Unterschied zwischen den Fourierkoeffizienten c_n und c_{-n} :

$$c_n = c_{-n} = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Die *komplexe* Fourier-Reihe der rechteckigen Impulsfolge lautet damit:

$$\begin{aligned} u(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) = \\ &= \frac{\hat{u}a\omega_0}{\pi} + \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \end{aligned}$$

Kontrolle: Zwischen der (reellen) Kosinusfunktion und der komplexen Exponentialfunktion besteht der folgende Zusammenhang (siehe Formelsammlung, Abschnitt VIII.7.3.2):

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \Rightarrow e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos x$$

Mit $x = n\omega_0 t$ ist dann

$$e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} = 2 \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

und die *komplexe* Fourier-Reihe geht in die aus Lösungsteil a) bereits bekannte *reelle* Form über:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\hat{u}a\omega_0}{\pi} + \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot \underbrace{(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})}_{2 \cdot \cos(n\omega_0 t)} = \\ &= \frac{\hat{u}a\omega_0}{\pi} + \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot 2 \cdot \cos(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{\hat{u}a\omega_0}{\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a)}{n} \cdot \cos(n\omega_0 t) \end{aligned}$$

c) Im Sonderfall $a = \frac{T}{4}$ ist $\omega_0 a = \frac{\omega_0 T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ und somit

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega_0 a) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \sin(2\omega_0 a) &= \sin(\pi) = 0 \\ \sin(3\omega_0 a) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \\ \sin(4\omega_0 a) &= \sin(2\pi) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Viererzyklus } 1; 0; -1; 0$$

$$\begin{aligned} \sin(5\omega_0 a) &= \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Sinuswerte *wiederholen* sich in einem *regelmäßigen Viererzyklus*: 1, 0, −1, 0; 1, 0, −1, 0; Somit treten nur *Oberschwingungen* auf, deren Kreisfrequenzen ein *ungeradzahliges Vielfaches* der Kreisfrequenz ω_0 der Grundschiwingung sind. Die *ersten Glieder* der Fourier-Reihe lauten damit

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\hat{u}}{2} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{1}{1} \cdot \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - + \dots \right] = \\ &= \frac{\hat{u}}{2} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cdot \cos[(2n-1)\omega_0 t] \end{aligned}$$

Das zugehörige *Amplitudenspektrum* ist in Bild V-12 dargestellt.

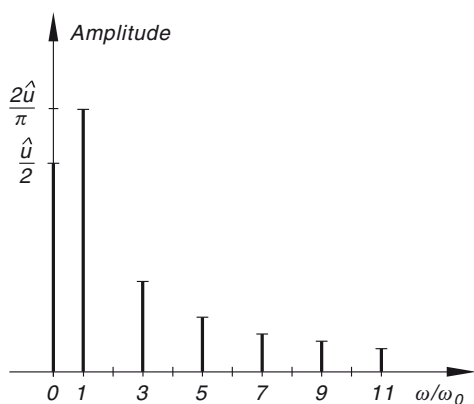


Bild V-12

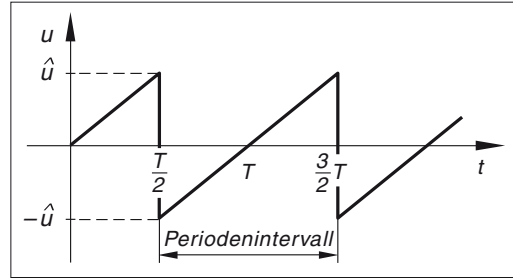
Beispiel 14: Fourier-Reihe einer Kippspannung (Sägezahnimpuls)
Fourier-Reihe in reeller Form

Die in Bild V-13 skizzierte *Kippspannung* mit der Periode T lässt sich im *Periodenintervall* $\frac{T}{2} < t < \frac{3}{2}T$ durch die Gleichung

$$u(t) = \frac{2\hat{u}}{T}t - 2\hat{u}$$

beschreiben.

Bild V-13



- a) Wie lautet die *Fourier-Zerlegung* dieser nichtsinusförmigen Wechselspannung in reeller Darstellung?
- b) Zeichnen Sie das zugehörige *Amplitudenspektrum*.

Lehrbuch: Bd. 2, II.2.1

Lösung:

- a) Die Funktion $u(t)$ ist *ungerade*, die Fourier-Reihe kann daher nur *Sinusglieder* enthalten. Somit gilt $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ und die Entwicklung reduziert sich wie folgt auf die Sinusglieder:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} u(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{T/2}^{3T/2} \left(\frac{2\hat{u}}{T}t - 2\hat{u}\right) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^{3T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt}_{I_1} - \frac{4\hat{u}}{T} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^{3T/2} \sin(n\omega_0 t) dt}_{I_2} = \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot I_1 - \frac{4\hat{u}}{T} \cdot I_2 \end{aligned}$$

Die *Auswertung* der Integrale I_1 und I_2 erfolgt mit Hilfe der *Integraltafel der Formelsammlung* unter Berücksichtigung von $\omega_0 T = 2\pi$.

Integral I_1 (Integral Nr. 208)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{T/2}^{3T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^{3T/2} = \\
 &= \frac{\sin\left(n \frac{3\omega_0 T}{2}\right)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{\frac{3T}{2} \cdot \cos\left(n \frac{3\omega_0 T}{2}\right)}{n\omega_0} - \frac{\sin\left(n \frac{\omega_0 T}{2}\right)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{\frac{T}{2} \cdot \cos\left(n \frac{\omega_0 T}{2}\right)}{n\omega_0} = \\
 &= \frac{\sin(n3\pi)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{3T \cdot \cos(n3\pi)}{2n\omega_0} - \frac{\sin(n\pi)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0}
 \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\sin(n3\pi) = 0, \quad \sin(n\pi) = 0,$$

$$\cos(n3\pi) = \cos[n(2\pi + \pi)] = \cos(n2\pi + n\pi) = \cos(n\pi)$$

Das 1. und 3. Glied verschwinden somit und wir erhalten unter Berücksichtigung von $\omega_0 T = 2\pi$ und $\cos(n3\pi) = \cos(n\pi)$:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{3T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} + \frac{T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} = \frac{-3T \cdot \cos(n\pi) + T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} = \\
 &= \frac{-2T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} = -\frac{T \cdot \cos(n\pi)}{n\omega_0} = -\frac{T^2 \cdot \cos(n\pi)}{2\pi n}
 \end{aligned}$$

Integral I_2 (Integral Nr. 204)

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{T/2}^{3T/2} \sin(n\omega_0 t) dt = \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^{3T/2} = \\
 &= \frac{-\cos\left(n \frac{3\omega_0 T}{2}\right) + \cos\left(n \frac{\omega_0 T}{2}\right)}{n\omega_0} = \frac{-\cos(n3\pi) + \cos(n\pi)}{n\omega_0} = \\
 &= \frac{-\cos(n\pi) + \cos(n\pi)}{n\omega_0} = \frac{0}{n\omega_0} = 0
 \end{aligned}$$

(unter Berücksichtigung von $\omega_0 T = 2\pi$ und $\cos(n3\pi) = \cos(n\pi)$)

Fourier-Zerlegung

Damit erhalten wir für die *Fourierkoeffizienten* b_n den Formelausdruck

$$b_n = \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot I_1 - \frac{4\hat{u}}{T} \cdot I_2 = \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \left(-\frac{T^2 \cdot \cos(n\pi)}{2\pi n} \right) - \frac{4\hat{u}}{T} \cdot 0 = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

Unter Beachtung von

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & n = \text{ungerade} \\ 1 & n = \text{gerade} \end{cases} \quad \text{für} \quad = (-1)^n$$

ergeben sich *abwechselnd* positive und negative Koeffizienten:

$$b_n = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi)}{n} = (-1)^1 \cdot \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Die Fourier-Reihe lautet somit wie folgt:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{2\hat{u}}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) - + \dots \right) \end{aligned}$$

- b) Das zugehörige *Amplitudenspektrum* ist in Bild V-14 dargestellt.

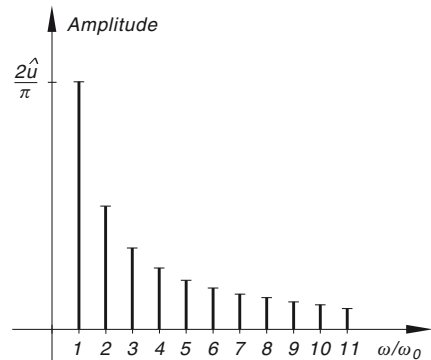


Bild V-14

Beispiel 15: Fourier-Zerlegung eines „angeschnittenen“ Wechselstroms *Fourier-Reihe in reeller Form*

Bild V-15 zeigt einen „angeschnittenen“ Wechselstrom, dessen Zeitabhängigkeit im Periodenintervall $0 \leq t \leq T$ durch die Gleichung

$$i(t) = \begin{cases} \hat{i} \cdot \cos(\omega_0 t) & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{4} \leq t \leq T \end{cases}$$

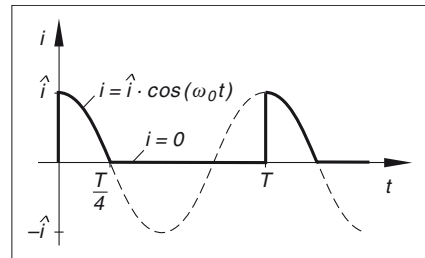


Bild V-15

beschrieben wird ($\omega_0 = 2\pi/T$: Kreisfrequenz).

Wie lautet die *Fourier-Zerlegung* dieser Funktion in reeller Darstellung?

Lehrbuch: Bd. 2, II.2.1

Lösung:

Es ist

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)]$$

Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten beachten wir, dass $\omega_0 T = 2\pi$ ist. Bei den Integrationen können wir uns auf das Intervall $0 \leq t \leq T/4$ beschränken, da der Strom im restlichen Periodenintervall *verschwindet*.

Berechnung des Fourierkoeffizienten a_0

(Integral Nr. 228; $\omega_0 T = 2\pi$; $\sin 0 = 0$; $\sin(\pi/2) = 1$)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} i(t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right]_0^{T/4} = \\ &= \frac{2\hat{i}}{\omega_0 T} \left[\sin(\omega_0 t) \right]_0^{T/4} = \frac{2\hat{i}}{2\pi} \left[\underbrace{\sin(\omega_0 T/4)}_{\pi/2} - \underbrace{\sin 0}_0 \right] = \frac{2\hat{i}}{2\pi} \cdot \underbrace{\sin(\pi/2)}_1 = \frac{\hat{i}}{\pi} \end{aligned}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} i(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$$

Wir müssen die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ unterscheiden.

$n = 1$ (Integral Nr. 229; $\omega_0 T = 2\pi$; $\sin 0 = \sin \pi = 0$)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right]_0^{T/4} = \\ &= \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{T}{8} + \frac{\sin(\omega_0 T/2)}{4\omega_0} - 0 - \frac{\sin 0}{4\omega_0} \right] = \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{T}{8} + \frac{\sin \pi}{4\omega_0} \right] = \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \frac{T}{8} = \frac{\hat{i}}{4} \end{aligned}$$

$n > 1$ (Integral Nr. 252; $\omega_0 T = 2\pi$; $\sin 0 = 0$)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \\
 &= \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{\sin[(n-1)\omega_0 t]}{2(n-1)\omega_0} + \frac{\sin[(n+1)\omega_0 t]}{2(n+1)\omega_0} \right]_0^{T/4} = \\
 &= \frac{2\hat{i}}{2\omega_0 T} \left[\frac{\sin[(n-1)\omega_0 t]}{n-1} + \frac{\sin[(n+1)\omega_0 t]}{n+1} \right]_0^{T/4} = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \left[\frac{\sin[(n-1)\omega_0 T/4]}{n-1} + \frac{\sin[(n+1)\omega_0 T/4]}{n+1} - \frac{\sin 0}{n-1} - \frac{\sin 0}{n+1} \right] = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \left[\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{n-1} + \frac{\sin[(n+1)\pi/2]}{n+1} \right] = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(n+1) \cdot \sin[(n-1)\pi/2] + (n-1) \cdot \sin[(n+1)\pi/2]}{(n-1)(n+1)} = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(n+1) \cdot \sin[(n-1)\pi/2] + (n-1) \cdot \sin[(n+1)\pi/2]}{n^2 - 1} =
 \end{aligned}$$

Wegen

$$(n+1) \frac{\pi}{2} = (n-1+2) \frac{\pi}{2} = (n-1) \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = (n-1) \frac{\pi}{2} + \pi$$

und

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

ist

$$\sin\left[(n+1) \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[(n-1) \frac{\pi}{2} + \pi\right] = -\sin\left[(n-1) \frac{\pi}{2}\right]$$

Der Fourierkoeffizient a_n ($n > 1$) lässt sich somit auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(n+1) \cdot \sin[(n-1)\pi/2] - (n-1) \cdot \sin[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1} = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{[(n+1) - (n-1)] \cdot \sin[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1} = \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{2 \cdot \sin[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1} = \\
 &= \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} i(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

Wir müssen wiederum die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ unterscheiden.

$n = 1$ (Integral Nr. 254; $\omega_0 T = 2\pi$; $\sin 0 = 0$; $\sin(\pi/2) = 1$)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{i}}{T} \left[\frac{\sin^2(\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_0^{T/4} = \\ &= \frac{2\hat{i}}{2\omega_0 T} [\sin^2(\omega_0 T/4) - \sin^2 0] = \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \sin^2(\pi/2) = \frac{\hat{i}}{2\pi} \end{aligned}$$

$n > 1$ (Integral Nr. 285; $\omega_0 T = 2\pi$; $\cos 0 = 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2\hat{i}}{T} \cdot \int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{2\hat{i}}{T} \left[-\frac{\cos[(n+1)\omega_0 t]}{2(n+1)\omega_0} - \frac{\cos[(n-1)\omega_0 t]}{2(n-1)\omega_0} \right]_0^{T/4} = \\ &= -\frac{2\hat{i}}{2\omega_0 T} \left[\frac{\cos[(n+1)\omega_0 t]}{n+1} + \frac{\cos[(n-1)\omega_0 t]}{n-1} \right]_0^{T/4} = \\ &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \left[\frac{\cos[(n+1)\omega_0 T/4]}{n+1} + \frac{\cos[(n-1)\omega_0 T/4]}{n-1} - \frac{\cos 0}{n+1} - \frac{\cos 0}{n-1} \right] = \\ &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \left[\frac{\cos[(n+1)\pi/2]}{n+1} + \frac{\cos[(n-1)\pi/2]}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] = \\ &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(n-1) \cdot \cos[(n+1)\pi/2] + (n+1) \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - (n-1) - (n+1)}{(n+1)(n-1)} = \\ &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(n-1) \cdot \cos[(n+1)\pi/2] + (n+1) \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - 2n}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

Wegen $(n+1) \frac{\pi}{2} = (n-1) \frac{\pi}{2} + \pi$ und $\cos(a + \pi) = -\cos a$ gilt:

$$\cos\left[(n+1) \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[(n-1) \frac{\pi}{2} + \pi\right] = -\cos\left[(n-1) \frac{\pi}{2}\right]$$

Der Fourierkoeffizient b_n ($n > 1$) lässt sich somit auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{-(n-1) \cdot \cos[(n-1)\pi/2] + (n+1) \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - 2n}{n^2 - 1} = \\
 &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{[-(n-1) + (n+1)] \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - 2n}{n^2 - 1} = \\
 &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{(-n+1+n+1) \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - 2n}{n^2 - 1} = \\
 &= -\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{2 \cdot \cos[(n-1)\pi/2] - 2n}{n^2 - 1} = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \frac{n - \cos[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Die *Fourier-Reihe* des „angeschnittenen“ Wechselstroms besitzt somit die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] = \\
 &= \frac{\hat{i}}{2\pi} + \frac{\hat{i}}{4} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1} \cdot \cos(n\omega_0 t) + \\
 &\quad + \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \cos[(n-1)\pi/2]}{n^2 - 1} \cdot \sin(n\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Fourier-Koeffizienten der Kosinusanteile *verschwinden* für $n = 3, 5, 7, \dots$, d. h. die entsprechenden Oberschwingungen *fehlen* in der Fourier-Zerlegung.

Beispiel 16: Fourier-Reihe einer Kippschwingung

Fourier-Reihe in komplexer und reeller Form

Die in Bild V-16 skizzierte *Kippschwingung* mit der Gleichung

$$y(t) = \frac{y_0}{T} t, \quad 0 \leq t < T$$

soll als *komplexe* Fourier-Reihe dargestellt werden. Leiten Sie anschließend aus der komplexen Form die *reelle* Darstellungsform her.

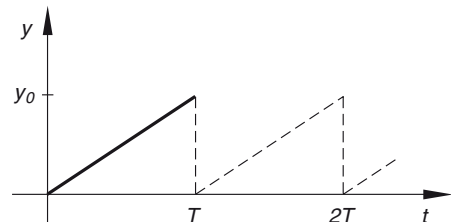


Bild V-16

In komplexer Darstellung gilt

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{y_0}{T} t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{y_0}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Wir müssen bei der Berechnung dieser Koeffizienten die Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ unterscheiden.

$$n = 0$$

$$c_0 = \frac{y_0}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot e^0 dt = \frac{y_0}{T^2} \cdot \int_0^T t dt = \frac{y_0}{T^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{y_0}{T^2} \cdot \frac{1}{2} T^2 = \frac{y_0}{2}$$

$$n \neq 0$$

(Integral Nr. 313; $\omega_0 T = 2\pi$; $\cos(n2\pi) = 1$; $\sin(n2\pi) = 0$; $j^2 = -1$)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{y_0}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{y_0}{T^2} \left[\frac{-jn\omega_0 t - 1}{j^2 n^2 \omega_0^2} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T = \\ &= \frac{y_0}{T^2} \left[\frac{-(jn\omega_0 t + 1)}{-n^2 \omega_0^2} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T = \\ &= \frac{y_0}{n^2 \omega_0^2 T^2} \left[(jn\omega_0 t + 1) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T = \\ &= \frac{y_0}{n^2 \underbrace{(\omega_0 T)^2}_{2\pi}} [(jn\omega_0 T + 1) \cdot e^{-jn\omega_0 T} - e^0] = \\ &= \frac{y_0}{n^2 4\pi^2} [(jn2\pi + 1) \cdot e^{-jn2\pi} - 1] = \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Eulerschen Formel $e^{-j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$ mit $\varphi = n2\pi$ gilt

$$e^{-jn2\pi} = \underbrace{\cos(n2\pi)}_1 + j \cdot \underbrace{\sin(n2\pi)}_0 = 1$$

und somit

$$c_n = \frac{y_0}{4\pi^2 n^2} [(jn2\pi + 1) \cdot 1 - 1] = \frac{y_0}{4\pi^2 n^2} \cdot jn2\pi = j \frac{y_0}{2\pi n}$$

Damit erhalten wir für die Kippschwingung die folgende Fourier-Zerlegung in *komplexer* Form (zunächst wird die Fourier-Reihe in Teilsummen zerlegt):

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + c_0 \cdot \underbrace{e^{j0\omega_0 t}}_{e^0 = 1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_0 t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_0 t}) = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} - c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t}) = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) = \frac{y_0}{2} + j \frac{y_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir beachtet, dass in diesem konkreten Fall $c_{-n} = -c_n$ gilt. Denn ersetzen wir in dem Formelausdruck für den Fourierkoeffizienten c_n formal n durch $-n$, so tritt ein Vorzeichenwechsel ein:

$$c_n = j \frac{y_0}{2\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow -n} c_{-n} = j \frac{y_0}{2\pi(-n)} = -j \frac{y_0}{2\pi n} = -c_n$$

Übergang von der komplexen in die reelle Form

Wir verwenden den Zusammenhang zwischen der (reellen) Sinusfunktion und der komplexen Exponentialfunktion (siehe Formelsammlung, Abschnitt VIII.7.3.2):

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \sin x$$

Mit $x = n\omega_0 t$ folgt dann aus der *komplexen* Fourier-Reihe die gewünschte *reelle* Reihe:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{y_0}{2} + j \frac{y_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})}_{2j \cdot \sin(n\omega_0 t)} = \\
 &= \frac{y_0}{2} + j \frac{y_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 2j \cdot \sin(n\omega_0 t) = \frac{y_0}{2} + j^2 \frac{2y_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t) = \\
 &= \frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

VI Komplexe Zahlen und Funktionen

Beispiel 1: Resonanz im Parallelschwingkreis

Komplexe Rechnung

Der in Bild VI-1 skizzierte *Parallelschwingkreis* mit dem ohmschen Widerstand $R = 10 \, \Omega$, der Induktivität $L = 0,2 \, \text{H}$ und der Kapazität $C = 10 \, \mu\text{F}$ wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert $I = 10 \, \text{A}$ und der *variablen* Kreisfrequenz ω zu *elektromagnetischen Schwingungen* angeregt.

- Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 tritt der *Resonanzfall* ein? Wie groß ist dann der *komplexe Gesamt Widerstand* \underline{Z} ?
- Welche *Spannung* \underline{U} liegt dann an den drei Schaltelementen R , L und C ?
- In welchem Verhältnis zueinander stehen dann die *Ströme* \underline{I}_C und \underline{I}_L ? Wie groß sind diese?

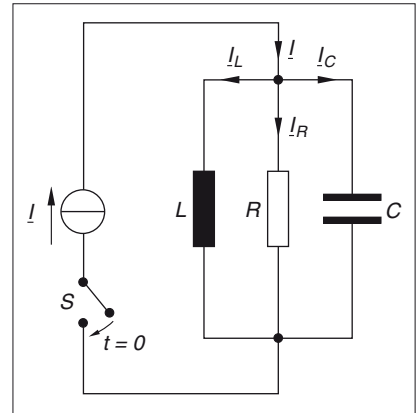


Bild VI-1

Lösungshinweis: Im *Resonanzfall* sind Gesamtstrom \underline{I} und angelegte Spannung \underline{U} *in Phase*.

Lehrbuch: Bd. 1, VII.2

Physikalische Grundlagen: A13, A50, A52, A53

Lösung:

- Im *Resonanzfall* sind Gesamtstrom \underline{I} und Spannung \underline{U} *phasengleich*. Dies aber kann nach dem *ohmschen Gesetz* [A52] in der Form $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$ nur dann eintreten, wenn der *komplexe Leitwert* \underline{Y} der Gesamtschaltung *reell* ist, d. h. einen *verschwindenden* Imaginärteil besitzt: $\text{Im}(\underline{Y}) = 0$. Nach den *Kirchhoffschen Regeln* [A13] *addieren* sich bei einer Parallelschaltung die *Einzelleitwerte* [A53] zum *Gesamtleitwert*. Daher gilt

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R} + j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_{\text{Im}(\underline{Y})}$$

und im *Resonanzfall* somit

$$\text{Im}(\underline{Y}) = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Die *Resonanzkreisfrequenz* beträgt demnach für die vorgegebenen Werte von L und C :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \text{ H} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 707,11 \text{ s}^{-1} \quad (1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F})$$

Leitwert \underline{Y} und Gesamt Widerstand \underline{Z} sind dann *reelle* Größen mit den folgenden Werten:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} = \frac{1}{10 \Omega} = 0,1 \text{ S}, \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = R = 10 \Omega \quad (\text{S} = \text{Siemens} = 1/\Omega)$$

- b) An allen drei Schaltelementen R , L und C liegt die gleiche Spannung \underline{U} (Parallelschaltung). Sie beträgt nach dem ohmschen Gesetz [A52]:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 10 \Omega \cdot 10 \text{ A} = 100 \text{ V}$$

(\underline{U} und \underline{I} sind *phasengleich*; wir setzen $\varphi_u = \varphi_i = 0$.)

- c) An den Schaltelementen R , L und C liegt jeweils die gleiche Spannung \underline{U} . Im *Resonanzfall* erhalten wir für die durch Induktivität L bzw. Kapazität C fließenden Ströme nach dem *ohmschen Gesetz* [A52]:

$$\underline{I}_L = \underline{Y}_L \cdot \underline{U} = -j \frac{1}{\omega_0 L} \underline{U} = -j \frac{\underline{U}}{\omega_0 L}$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \cdot \underline{U} = j \omega_0 C \underline{U}$$

Ihre *Summe* aber *verschwindet*, da im Resonanzfall $\text{Im}(\underline{Y}) = 0$ ist:

$$\underline{I}_C + \underline{I}_L = j \omega_0 C \underline{U} - j \frac{\underline{U}}{\omega_0 L} = j \underbrace{\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \right)}_{\text{Im}(\underline{Y}) = 0} \underline{U} = 0$$

Somit ist $\underline{I}_L = -\underline{I}_C$, d. h. die Ströme sind *entgegengesetzt* gleich groß (*gleiche* Beträge, *Phasendifferenz* = 180°). Sie werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\underline{I}_C = j \omega_0 C \underline{U} = j \cdot 707,11 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 100 \text{ V} = j \cdot 0,707 \text{ A} = 0,707 \text{ A} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\underline{I}_L = -\underline{I}_C = -j \cdot 0,707 \text{ A} = 0,707 \text{ A} \cdot e^{j270^\circ} = 0,707 \text{ A} \cdot e^{-j90^\circ}$$

Die beiden Ströme haben somit den *Effektivwert*

$$I_C = I_L = 0,707 \text{ A}.$$

Beispiel 2: Ohmscher Spannungsteiler

Komplexe Rechnung

Der in Bild VI-2 dargestellte *ohmsche Spannungsteiler* enthält die ohmschen Teilwiderstände $R_1 = 400 \Omega$ und $R_2 = 100 \Omega$ sowie eine Wechselspannungsquelle mit dem Effektivwert $U = 220 \text{ V}$ und der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$.

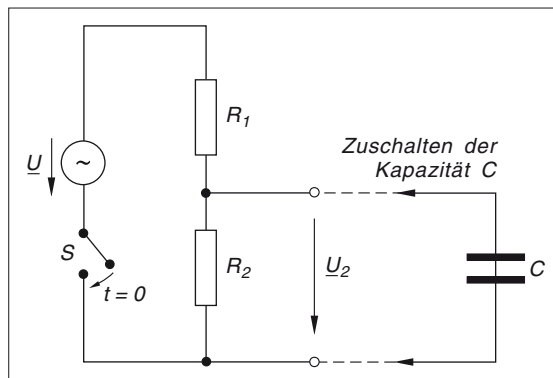
Berechnen Sie die am Teilwiderstand R_2 abfallende Spannung \underline{U}_2

- im *unbelasteten* Zustand,
- im *belasteten* Zustand nach dem Zuschalten eines Kondensators mit der Kapazität $C = 20 \mu\text{F}$.

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$S = \text{Siemens} = 1/\Omega$$

Bild VI-2



Lehrbuch: Bd. 1, VII.2

Physikalische Grundlagen: A13, A53

Lösung:

Der Spannungsabfall an einem Teilwiderstand ist diesem direkt *proportional*.

- Im *unbelasteten* Zustand gilt die *Proportion* $\underline{U}_2 : \underline{U} = R_2 : (R_1 + R_2)$. Daher fällt am Teilwiderstand R_2 die *Spannung*

$$\underline{U}_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{U} = \frac{100 \Omega}{400 \Omega + 100 \Omega} \cdot 220 \text{ V} = 44 \text{ V}$$

ab. \underline{U}_2 und \underline{U} sind dabei *phasengleich* (es sind nur ohmsche Widerstände vorhanden).

- Durch Zuschalten des Kondensators entsteht eine *Parallelschaltung* aus R_2 und C mit dem *komplexen* Leitwert [A13, A53]

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \underline{Y}_{R_2} + \underline{Y}_C = \frac{1}{R_2} + j \omega C = \frac{1}{R_2} + j(2\pi f) C = \\ &= \frac{1}{100 \Omega} + j \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ F} = (0,01 + j \cdot 0,0063) \text{ S} \end{aligned}$$

Darstellung in der Exponentialform $\underline{Y}_2 = Y_2 \cdot e^{j\varphi}$:

$$Y_2 = |\underline{Y}_2| = \sqrt{0,01^2 + 0,0063^2} \text{ S} = 0,0118 \text{ S}$$

$$\tan \varphi = \frac{0,0063 \text{ S}}{0,01 \text{ S}} = 0,63 \Rightarrow \varphi = \arctan 0,63 = 32,21^\circ$$

$$\underline{Y}_2 = Y_2 \cdot e^{j\varphi} = 0,0118 \text{ S} \cdot e^{j32,21^\circ}$$

Der komplexe Widerstand beträgt somit:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{0,0118 \text{ S} \cdot e^{j32,2^\circ}} = 84,75 \Omega \cdot e^{-j32,2^\circ} = \\ &= 84,75 \Omega [\cos(-32,2^\circ) + j \cdot \sin(-32,2^\circ)] = 71,71 \Omega - j \cdot 45,16 \Omega \end{aligned}$$

Damit besitzt die Schaltung den folgenden komplexen *Gesamtwiderstand* [A13]:

$$\underline{Z}_g = R_1 + \underline{Z}_2 = 400 \, \Omega + 71,71 \, \Omega - j \cdot 45,16 \, \Omega = 471,71 \, \Omega - j \cdot 45,16 \, \Omega$$

Komplexer Gesamtwiderstand in der Exponentialdarstellung $\underline{Z}_g = Z_g \cdot e^{j\varphi}$:

$$Z_g = |\underline{Z}_g| = \sqrt{471,71^2 + (-45,16)^2} \, \Omega = 473,87 \, \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{-45,16 \, \Omega}{471,71 \, \Omega} = -0,0957 \Rightarrow \varphi = \arctan(-0,0957) = -5,5^\circ$$

$$\underline{Z}_g = Z_g \cdot e^{j\varphi} = 473,87 \, \Omega \cdot e^{-j5,5^\circ}$$

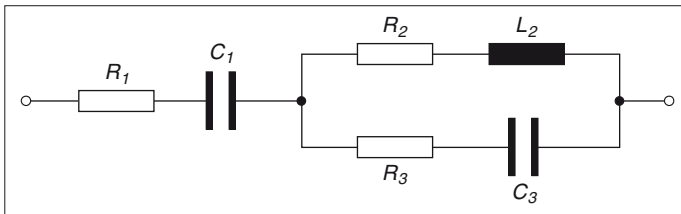
Der Spannungsabfall \underline{U}'_2 bei *kapazitiver* Belastung wird aus der *Proportion* $\underline{U}'_2 : \underline{U} = \underline{Z}_2 : \underline{Z}_g$ berechnet. Wir erhalten jetzt

$$\underline{U}'_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_g} \underline{U} = \frac{84,75 \, \Omega \cdot e^{-j32,2^\circ}}{473,87 \, \Omega \cdot e^{-j5,5^\circ}} \cdot 220 \, \text{V} = 39,35 \, \text{V} \cdot e^{-j26,7^\circ}$$

Am ohmschen Widerstand R_2 fällt somit eine Wechselspannung mit dem *Effektivwert* $U'_2 = 39,35 \, \text{V}$ ab, die der angelegten Wechselspannung in der Phase um $26,7^\circ$ *nachhinkt*.

Beispiel 3: Berechnung des komplexen Widerstandes eines Netzwerkes
Komplexe Rechnung

Das in Bild VI-3 skizzierte *elektrische Netzwerk* mit den ohmschen Widerständen $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$ und $R_3 = 100 \, \Omega$, den Kapazitäten $C_1 = 20 \, \mu\text{F}$ und $C_3 = 10 \, \mu\text{F}$ und der Induktivität $L_2 = 0,1 \, \text{H}$ wird von einem Wechselstrom der Kreisfrequenz $\omega = 500 \, \text{s}^{-1}$ durchflossen. Berechnen Sie den *komplexen Widerstand* \underline{Z} dieses Netzwerkes. Wie groß sind *Wirkwiderstand* R und *Blindwiderstand* X ?

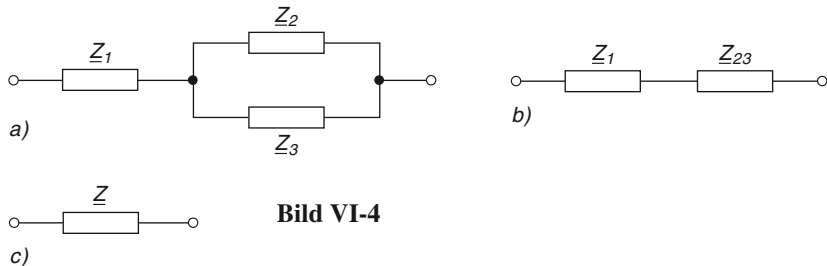


$$1 \, \mu\text{F} = 10^{-6} \, \text{F}$$

Bild VI-3

Lösung:

Bild VI-4 verdeutlicht die einzelnen Schritte zur Berechnung des *Gesamtwechselstromwiderstandes* (komplexen Widerstandes) \underline{Z} .

**Bild VI-4****1. Schritt (Bild VI-4a))**

Nach den Gesetzen der *Reihenschaltung* [A13] *addieren* sich in jedem der drei Zweige die Teilwiderstände zum jeweiligen Gesamtwiderstand:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = 100 \, \Omega - j \frac{1}{500 \, \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \, \text{F}} = \\ &= 100 \, \Omega - j \cdot 100 \, \Omega = (100 - 100j) \, \Omega\end{aligned}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j \omega L_2 = 50 \, \Omega + j \cdot 500 \, \text{s}^{-1} \cdot 0,1 \, \text{H} = 50 \, \Omega + j \cdot 50 \, \Omega = (50 + 50j) \, \Omega$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_3 &= R_3 - j \frac{1}{\omega C_3} = 100 \, \Omega - j \frac{1}{500 \, \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \, \text{F}} = \\ &= 100 \, \Omega - j \cdot 200 \, \Omega = (100 - 200j) \, \Omega\end{aligned}$$

2. Schritt (Bild VI-4b))

Bei der *Parallelschaltung* [A13] *addieren* sich die *Kehrwerte* der beiden Einzelwiderstände \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 zum *Kehrwert* des Gesamtwiderstandes \underline{Z}_{23} :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}_{23}} &= \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3} \Rightarrow \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \underline{Z}_{23} &= \frac{(50 + 50j) \, \Omega \cdot (100 - 200j) \, \Omega}{(50 + 50j) \, \Omega + (100 - 200j) \, \Omega} = \frac{50(1 + j) \cdot 100(1 - 2j)}{150 - 150j} \, \Omega = \\ &= \frac{50 \cdot 100(1 - 2j + j + 2)}{150(1 - j)} \, \Omega = \frac{100(3 - j)}{3(1 - j)} \, \Omega = \frac{100(3 - j)(1 + j)}{3(1 - j)(1 + j)} \, \Omega = \\ &= \frac{100(3 + 3j - j + 1)}{3(1 + 1)} \, \Omega = \frac{100(4 + 2j)}{6} \, \Omega = \frac{50}{3} (4 + 2j) \, \Omega = \\ &= \left(\frac{200}{3} + \frac{100}{3} j \right) \, \Omega\end{aligned}$$

3. Schritt (Bild VI-4c))

Die Widerstände \underline{Z}_1 und \underline{Z}_{23} sind in *Reihe* geschaltet und werden daher addiert. Somit ist der *komplexe Gesamt Widerstand* des Netzwerkes [A13]

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = (100 - 100j) \Omega + \left(\frac{200}{3} + \frac{100}{3}j \right) \Omega = \\ &= \left(100 + \frac{200}{3} \right) \Omega + \left(-100j + \frac{100}{3}j \right) \Omega = \frac{500}{3} \Omega - \frac{200}{3}j \Omega = \\ &= \left(\frac{500}{3} - \frac{200}{3}j \right) \Omega = (166,67 - 66,67j) \Omega\end{aligned}$$

Der *Wirkwiderstand* beträgt $R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = 166,67 \Omega$, der *Blindwiderstand* $X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = -66,67 \Omega$. Der *Betrag* des *komplexen Widerstandes*, kurz auch als *Scheinwiderstand* bezeichnet, ist

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{166,67^2 + (-66,67)^2} \Omega = 179,51 \Omega$$

Beispiel 4: Wechselstrommessbrücke

Komplexe Rechnung

Mit der in Bild VI-5 dargestellten *Brückenschaltung* lässt sich ein unbekannter *komplexer Widerstand* $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_x$ wie folgt bestimmen: Bei *vorgegebenen* (komplexen) Widerständen \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 wird der stetig *veränderbare* komplexe Widerstand \underline{Z}_4 so eingestellt, dass der Brückenweig *A–B* *stromlos* wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromamperemeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand \underline{Z}_5 dient dabei lediglich als *Nullindikator*.

- a) Wie lautet die sog. *Abgleichbedingung*, d. h. die Bedingung für die *Stromlosigkeit* des Brückenweiges *A–B*?
- b) In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 folgende Werte:

$$\underline{Z}_2 = 10 \Omega - j \cdot 2 \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = 8 \Omega + j \cdot 6 \Omega$$

Die Brücke *A–B* wird dabei genau dann *stromlos*, wenn der *variable* Widerstand \underline{Z}_4 auf den Wert

$$\underline{Z}_4 = 5 \Omega + j \cdot 2 \Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch *unbekannte*) Widerstand \underline{Z}_x ?

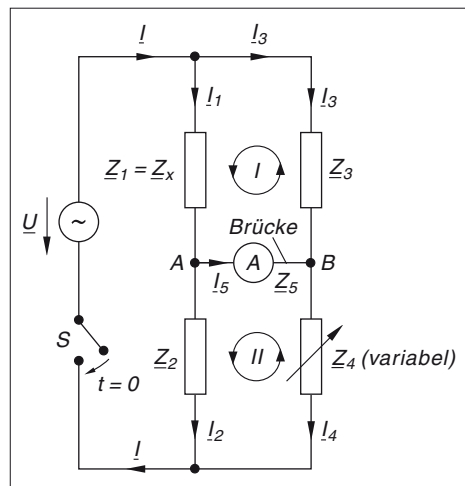


Bild VI-5

Lösungshinweis: Wenden Sie die *Maschenregel* [A32] auf die beiden eingezeichneten Maschen (I) und (II) an und setzen Sie anschließend $I_5 = 0$.

Lehrbuch: Bd. 1, VII.2

Physikalische Grundlagen: A32, A52

Lösung:

- a) Wir nehmen zunächst an, dass durch das Amperemeter der Strom I_5 fließt. Für die eingezeichneten Maschen (I) und (II) gilt dann nach der *Maschenregel* [A32] unter Beachtung der im Bild vorgegebenen Umlaufsrichtungen

$$(I) \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_5 \cdot \underline{I}_5 - \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = 0$$

$$(II) \quad \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4 - \underline{Z}_5 \cdot \underline{I}_5 = 0$$

Der *Abgleich*, d. h. die Einstellung des variablen komplexen Widerstandes \underline{Z}_4 erfolgt nun so, dass $\underline{I}_5 = 0$ wird (*stromloser Brückenweig*). In diesem Fall ist

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \quad \text{und} \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_3$$

und die *Maschengleichungen* lauten jetzt

$$(I) \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3$$

$$(II) \quad \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_3$$

Wir dividieren nun *seitenweise* die obere Gleichung (I) durch die untere Gleichung (II):

$$\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3}{\underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_3} \Rightarrow \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad \text{oder} \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

Aus dieser *Abgleichbedingung* erhalten wir für den *unbekannten* Widerstand $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_x$:

$$\underline{Z}_x \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \Rightarrow \underline{Z}_x = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

Liegen die Widerstände in der *Exponentialform* $\underline{Z}_i = |\underline{Z}_i| \cdot e^{j\varphi_i}$ vor ($i = 2, 3, 4$), so lautet die *Lösung* der gestellten Aufgabe wie folgt:

$$\underline{Z}_x = |\underline{Z}_x| \cdot e^{j\varphi_x} = \frac{|\underline{Z}_2| \cdot e^{j\varphi_2} \cdot |\underline{Z}_3| \cdot e^{j\varphi_3}}{|\underline{Z}_4| \cdot e^{j\varphi_4}} = \frac{|\underline{Z}_2| \cdot |\underline{Z}_3|}{|\underline{Z}_4|} \cdot e^{j(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4)}$$

- b) Wir stellen die Widerstände \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 und \underline{Z}_4 zunächst in der *Exponentialform* dar:

$$\underline{Z}_2 = 10 \, \Omega - j \cdot 2 \, \Omega = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$Z_2 = |\underline{Z}_2| = \sqrt{10^2 + (-2)^2} \, \Omega = 10,198 \, \Omega$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{-2 \, \Omega}{10 \, \Omega} = -0,2 \Rightarrow \varphi_2 = \arctan(-0,2) = -11,31^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 10 \, \Omega - j \cdot 2 \, \Omega = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = 10,198 \, \Omega \cdot e^{-j11,31^\circ}$$

Analog erhält man für die beiden übrigen Widerstände:

$$\underline{Z}_3 = 8 \, \Omega + j \cdot 6 \, \Omega = 10 \, \Omega \cdot e^{j36,87^\circ}$$

$$\underline{Z}_4 = 5 \, \Omega + j \cdot 2 \, \Omega = 5,385 \, \Omega \cdot e^{j21,80^\circ}$$

Der gesuchte komplexe Widerstand \underline{Z}_x besitzt damit nach der *Abgleichbedingung* den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_x &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} = \frac{(10,198 \, \Omega \cdot e^{-j11,31^\circ}) \cdot (10 \, \Omega \cdot e^{j36,87^\circ})}{5,385 \, \Omega \cdot e^{j21,80^\circ}} = \\ &= \frac{10,198 \, \Omega \cdot 10 \, \Omega}{5,385 \, \Omega} \cdot e^{j(-11,31^\circ + 36,87^\circ - 21,80^\circ)} = 18,938 \, \Omega \cdot e^{j3,76^\circ} = \\ &= 18,938 \, \Omega (\cos 3,76^\circ + j \cdot \sin 3,76^\circ) = (18,897 + j \cdot 1,242) \, \Omega \approx \\ &\approx 18,90 \, \Omega + j \cdot 1,24 \, \Omega \end{aligned}$$

Beispiel 5: Wechselstromparadoxon

Komplexe Rechnung

Der in Bild VI-6 dargestellte *Wechselstromkreis* enthält die ohmschen Widerstände R und R_x und einen zu R_x *parallel* geschalteten Kondensator mit der Kapazität C . Beim Anlegen einer Wechselspannung \underline{U} mit der Kreisfrequenz ω fließt der Gesamtstrom \underline{I} , dessen Effektivwert I durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät (A) gemessen wird¹⁾. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand R_x lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige *unabhängig* ist von der Stellung des Schalters S (geschlossen oder offen; sog. *Wechselstromparadoxon*).

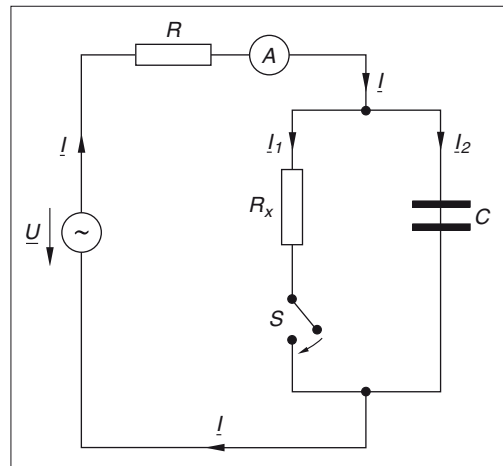


Bild VI-6

¹⁾ Der Innenwiderstand R_i des Gerätes ist im Widerstand R bereits enthalten.

Lösung:

Die an den Schaltkreis angelegte Wechselspannung \underline{U} ist *unabhängig* davon, ob der Schalter S offen oder geschlossen ist. Daher gilt nach dem *ohmschen Gesetz* [A52]

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{Z}' \cdot \underline{I}' = \text{constant}$$

Dabei sind \underline{Z} und \underline{I} der *komplexe Gesamt Widerstand* bzw. der *komplexe Gesamtstrom* bei *offenem* Schalter, \underline{Z}' und \underline{I}' die entsprechenden Größen bei *geschlossenem* Schalter. Das Wechselstrommessgerät zeigt den *Effektivwert* der Stromstärke an. Somit muss, falls das Wechselstromparadoxon existiert, $I = I'$ sein, d. h. der *Betrag* (*Effektivwert*) der Gesamtstromstärke muss dann von der Schalterstellung *unabhängig* sein. Dies aber ist bei *konstanter* Wechselspannung nur möglich, wenn sich der *Betrag* des komplexen Gesamt Widerstandes ebenfalls *nicht* ändert. Die gesuchte Bedingung lautet somit:

$$|\underline{Z}'| = |\underline{Z}| \quad \text{oder} \quad |\underline{Z}'|^2 = |\underline{Z}|^2$$

Wir berechnen nun für *beide* Schalterstellungen den jeweiligen *komplexen Gesamt Widerstand*.

(1) Offener Schalter

R und C sind in *Reihe* geschaltet, die Einzelwiderstände addieren sich. Der *komplexe Gesamt Widerstand* beträgt daher [A13, A53]:

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega C R - j}{\omega C}$$

Sein *Betrag* ist

$$|\underline{Z}| = \frac{|\omega C R - j|}{|\omega C|} = \frac{\sqrt{(\omega C R)^2 + (-1)^2}}{\omega C} = \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}{\omega C}$$

(2) Geschlossener Schalter

Wir berechnen zunächst den komplexen *Leitwert* \underline{Y}_p und daraus den komplexen *Widerstand* \underline{Z}_p der *Parallelschaltung* aus R_x und C . Es ist

$$\underline{Y}_p = \underline{Y}_{R_x} + \underline{Y}_C = \frac{1}{R_x} + j \omega C = \frac{1 + j \omega C R_x}{R_x}$$

(bei *Parallelschaltung* [A13] *addieren* sich die einzelnen Leitwerte zum Gesamtleitwert [A53]):

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{R_x}{1 + j \omega C R_x}$$

Dieser Widerstand ist mit R in *Reihe* geschaltet, die Widerstände addieren sich daher. Somit beträgt der *komplexe Gesamt Widerstand* bei *geschlossenem* Schalter [A13]

$$\begin{aligned} \underline{Z}' &= R + \underline{Z}_p = R + \frac{R_x}{1 + j \omega C R_x} = \frac{R(1 + j \omega C R_x) + R_x}{1 + j \omega C R_x} = \\ &= \frac{R + j \omega C R R_x + R_x}{1 + j \omega C R_x} = \frac{(R + R_x) + j \omega C R R_x}{1 + j \omega C R_x} \end{aligned}$$

Sein *Betrag* ist

$$\begin{aligned} |\underline{Z}'| &= \left| \frac{(R + R_x) + j\omega C R R_x}{1 + j\omega C R_x} \right| = \frac{|(R + R_x) + j\omega C R R_x|}{|1 + j\omega C R_x|} = \\ &= \frac{\sqrt{(R + R_x)^2 + (\omega C R R_x)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C R_x)^2}} = \sqrt{\frac{(R + R_x)^2 + \omega^2 C^2 R^2 R_x^2}{1 + \omega^2 C^2 R_x^2}} \end{aligned}$$

(3) Bestimmung des Widerstandes R_x

Aus der Bedingung $|\underline{Z}'| = |\underline{Z}|$ und somit $|\underline{Z}'|^2 = |\underline{Z}|^2$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{(R + R_x)^2 + \omega^2 C^2 R^2 R_x^2}{1 + \omega^2 C^2 R_x^2} &= \frac{\omega^2 C^2 R^2 + 1}{\omega^2 C^2} \\ \omega^2 C^2 [(R + R_x)^2 + \omega^2 C^2 R^2 R_x^2] &= (1 + \omega^2 C^2 R_x^2) (\omega^2 C^2 R^2 + 1) \\ \omega^2 C^2 (R + R_x)^2 + \omega^4 C^4 R^2 R_x^2 &= \omega^2 C^2 R^2 + 1 + \omega^4 C^4 R^2 R_x^2 + \omega^2 C^2 R_x^2 \\ \omega^2 C^2 (R + R_x)^2 &= \omega^2 C^2 R^2 + 1 + \omega^2 C^2 R_x^2 \\ \omega^2 C^2 (R + R_x)^2 - \omega^2 C^2 R^2 - \omega^2 C^2 R_x^2 &= 1 \\ \omega^2 C^2 [(R + R_x)^2 - R^2 - R_x^2] &= \omega^2 C^2 (R^2 + 2RR_x + R_x^2 - R^2 - R_x^2) = 1 \\ \omega^2 C^2 \cdot 2RR_x &= 2\omega^2 C^2 RR_x = 1 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{1}{2\omega^2 C^2 R} \end{aligned}$$

Bei dieser Wahl des ohmschen Widerstandes R_x zeigt das Wechselstrommessgerät bei offenem und geschlossenem Schalter jeweils *denselben* Effektivwert des Gesamtstromes an. Die Ströme bei offenem bzw. geschlossenem Schalter unterscheiden sich dann lediglich in ihrem *Phasenwinkel*!

Beispiel 6: Komplexer Wechselstromkreis

Komplexe Rechnung

Der in Bild VI-7 dargestellte *Wechselstromkreis* mit den ohmschen Widerständen $R_1 = 4\Omega$ und $R_2 = 6\Omega$ sowie den Induktivitäten $L_2 = 20\text{ mH}$ und $L_3 = 60\text{ mH}$ wird durch eine Wechselspannung \underline{U} mit dem Effektivwert $U = 10\text{ V}$ und der Kreisfrequenz $\omega = 100\text{ s}^{-1}$ gespeist. Berechnen Sie

- den *komplexen Gesamtwiderstand* \underline{Z} der Schaltung,
- die *Effektivwerte* sämtlicher *Ströme* und *Teilspannungen*,
- die *komplexe Scheinleistung* \underline{S} sowie *Wirkleistung* P und *Blindleistung* Q .

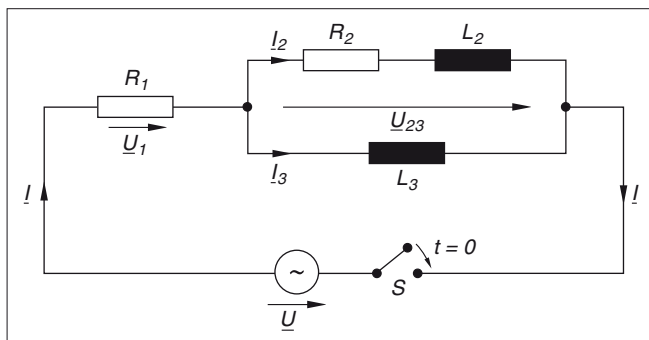


Bild VI-7

Lehrbuch: Bd. 1, VII.2

Physikalische Grundlagen: A13, A52, A53, A54

Lösung:

- a) Bild VI-8 verdeutlicht die einzelnen Schritte zur Berechnung des *komplexen Gesamtwiderstandes* \underline{Z} der Gesamtschaltung.

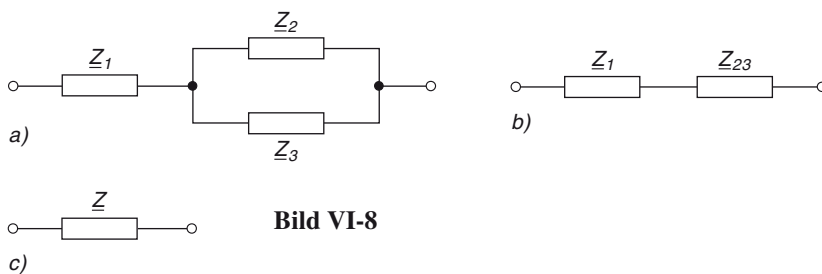


Bild VI-8

- 1. Schritt (Bild VI-8a))** [A13, A53]: R_2 und L_2 sind in Reihe geschaltet, die Widerstände addieren sich also zum Ersatzwiderstand \underline{Z}_2 .

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 4 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 6 \, \Omega + j \cdot 100 \, \text{s}^{-1} \cdot 0,02 \, \text{H} = 6 \, \Omega + j \cdot 2 \, \Omega = (6 + 2j) \, \Omega$$

$$Z_2 = |\underline{Z}_2| = \sqrt{6^2 + 2^2} \, \Omega = 6,325 \, \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \, \Omega}{6 \, \Omega} = 0,3333 \Rightarrow \varphi = \arctan 0,3333 = 18,43^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = (6 + 2j) \, \Omega = Z_2 \cdot e^{j\varphi} = 6,325 \, \Omega \cdot e^{j18,43^\circ}$$

$$\underline{Z}_3 = j\omega L_3 = j \cdot 100 \, \text{s}^{-1} \cdot 0,06 \, \text{H} = j \cdot 6 \, \Omega = 6 \, \Omega \cdot e^{j90^\circ}$$

- 2. Schritt (Bild VI-8b))** [A13]: \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 sind parallel geschaltet, sie werden zum Ersatzwiderstand \underline{Z}_{23} zusammengefasst (die Kehrwerte der Widerstände addieren sich zum Kehrwert von \underline{Z}_{23}).

$$\frac{1}{\underline{Z}_{23}} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3} \Rightarrow \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (6 + 2j) \Omega + j \cdot 6 \Omega = (6 + 8j) \Omega$$

$$|\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3| = \sqrt{6^2 + 8^2} \Omega = 10 \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{8 \Omega}{6 \Omega} = 1,3333 \Rightarrow \varphi = \arctan 1,3333 = 53,13^\circ$$

$$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (6 + 8j) \Omega = |\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3| \cdot e^{j\varphi} = 10 \Omega \cdot e^{j53,13^\circ}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{6,325 \Omega \cdot e^{j18,43^\circ} \cdot 6 \Omega \cdot e^{j90^\circ}}{10 \Omega \cdot e^{j53,13^\circ}} = \\ &= \frac{6,325 \Omega \cdot 6 \Omega}{10 \Omega} \cdot e^{j(18,43^\circ + 90^\circ - 53,13^\circ)} = 3,795 \Omega \cdot e^{j55,30^\circ} = \\ &= 3,795 \Omega (\cos 55,30^\circ + j \cdot \sin 55,30^\circ) = (2,160 + 3,120j) \Omega \end{aligned}$$

- 3. Schritt (Bild VI-8c))** [A13]: $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}$ sind in Reihe geschaltet, sie addieren sich zu \underline{Z} .

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = R_1 + \underline{Z}_{23} = 4 \Omega + (2,160 + 3,120j) \Omega = \\ &= (6,160 + 3,120j) \Omega \end{aligned}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{6,160^2 + 3,120^2} \Omega = 6,905 \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{3,120 \Omega}{6,160 \Omega} = 0,5065 \Rightarrow \varphi = \arctan 0,5065 = 26,86^\circ$$

Der gesuchte komplexe Gesamtwiderstand der Schaltung lautet somit:

$$\underline{Z} = (6,160 + 3,120j) \Omega = Z \cdot e^{j\varphi} = 6,905 \Omega \cdot e^{j26,86^\circ}$$

- b) Wir berechnen zunächst den *Gesamtstrom* \underline{I} nach dem *ohmschen Gesetz* [A52]:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{10 \text{ V}}{6,905 \Omega \cdot e^{j26,86^\circ}} = 1,448 \text{ A} \cdot e^{-j26,86^\circ}$$

Für die *Teilspannungen* \underline{U}_1 und \underline{U}_{23} folgt damit

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I} = 4 \Omega \cdot 1,448 \text{ A} \cdot e^{-j26,86^\circ} = 5,792 \text{ V} \cdot e^{-j26,86^\circ} = \\ &= 5,792 \text{ V} [\cos(-26,86^\circ) + j \cdot \sin(-26,86^\circ)] = (5,167 - 2,617j) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_{23} = \underline{U} \quad (\text{Kirchhoffsche Regeln [A13]}) \Rightarrow$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U} - \underline{U}_1 = 10 \text{ V} - (5,167 - 2,617j) \text{ V} = (4,833 + 2,617j) \text{ V}$$

$$U_{23} = |\underline{U}_{23}| = \sqrt{4,833^2 + 2,617^2} \text{ V} = 5,496 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = \frac{2,617 \text{ V}}{4,833 \text{ V}} = 0,5415 \Rightarrow \varphi = \arctan 0,5415 = 28,43^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = (4,833 + 2,617j) \text{ V} = U_{23} \cdot e^{j\varphi} = 5,496 \text{ V} \cdot e^{j28,43^\circ}$$

Die Berechnung der *Teilströme* \underline{I}_2 und \underline{I}_3 erfolgt mit Hilfe des *ohmschen Gesetzes* [A52]:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{5,496 \text{ V} \cdot e^{j28,43^\circ}}{6,325 \Omega \cdot e^{j18,43^\circ}} = \frac{5,496 \text{ V}}{6,325 \Omega} \cdot e^{j(28,43^\circ - 18,43^\circ)} = 0,869 \text{ A} \cdot e^{j10^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{5,496 \text{ V} \cdot e^{j28,43^\circ}}{6 \Omega \cdot e^{j90^\circ}} = \frac{5,496 \text{ V}}{6 \Omega} \cdot e^{j(28,43^\circ - 90^\circ)} = 0,916 \text{ A} \cdot e^{-j61,57^\circ}$$

Es ergeben sich somit für die *Ströme* und *Teilspannungen* folgende *Effektivwerte*:

$$I_2 = 0,869 \text{ A}, \quad I_3 = 0,916 \text{ A}, \quad I = 1,448 \text{ A}$$

$$U_1 = 5,792 \text{ V}, \quad U_{23} = 5,496 \text{ V}$$

- c) Aus der Definitionsformel der *komplexen Scheinleistung* [A54] folgt (\underline{I}^* ist konjugiert komplex zu \underline{I}):

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 10 \text{ V} \cdot 1,448 \text{ A} \cdot e^{j26,86^\circ} = 14,48 \text{ W} \cdot e^{j26,86^\circ} = \\ &= 14,48 \text{ W} (\cos 26,86^\circ + j \cdot \sin 26,86^\circ) = (12,918 + 6,542j) \text{ W} \end{aligned}$$

Für *Wirk-* und *Blindleistung* ergeben sich daraus die Werte

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = 12,918 \text{ W} \quad \text{und} \quad Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = 6,542 \text{ W}$$

Beispiel 7: Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung

Komplexe Zeiger, Zeigerdiagramm

Durch ungestörte *Superposition* der beiden *gleichfrequenten* mechanischen Schwingungen *gleicher* Raumrichtung mit den Gleichungen

$$y_1 = 8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad y_2 = 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi\right)$$

entsteht eine *resultierende* Schwingung der *gleichen* Frequenz. Bestimmen Sie *Amplitude* $A > 0$ und *Phasenwinkel* φ dieser in der *Sinusform*

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

darzustellenden *Gesamtschwingung* mit Hilfe der *komplexen Rechnung*.

Anmerkung: In Kapitel II, Beispiel 15 wird diese Aufgabe im *reellen* Zeigerdiagramm gelöst.

Lehrbuch: Bd. 1, VII.3.1.2

Lösung:

Vor der Durchführung der komplexen Rechnung müssen wir die Schwingung y_2 als *Sinus-schwingung* darstellen. Aus dem *Zeigerdiagramm* nach Bild VI-9 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} y_2 &= 10 \text{ cm} \cdot \cos \left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi \right) = \\ &= 10 \text{ cm} \cdot \sin \left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 10 \text{ cm} \cdot \sin \left(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{7}{6} \pi \right) \end{aligned}$$

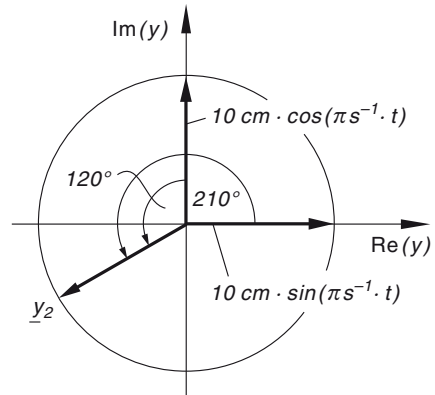


Bild VI-9

Die Berechnung der *Amplitude* A und des *Phasenwinkels* φ der resultierenden Schwingung erfolgt in drei Schritten.

(1) Übergang von der reellen Form zur komplexen Form

Den beiden Einzelschwingungen y_1 und y_2 sowie der resultierenden Schwingung y werden wie folgt *komplexe Zeiger* zugeordnet²⁾:

$$y_1 \rightarrow \underline{y}_1 = 8 \text{ cm} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})} = \underbrace{\left(8 \text{ cm} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)}_{\underline{A}_1} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t}$$

$$y_2 \rightarrow \underline{y}_2 = 10 \text{ cm} \cdot e^{j(\omega t + \frac{7}{6}\pi)} = \underbrace{\left(10 \text{ cm} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} \right)}_{\underline{A}_2} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

$$y \rightarrow \underline{y} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\left(A \cdot e^{j\varphi} \right)}_{\underline{A}} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

Die *komplexen* Schwingungsamplituden der beiden Einzelschwingungen lauten somit:

$$\underline{A}_1 = 8 \text{ cm} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 8 \text{ cm} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + j \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = 5,6569 \text{ cm} - j \cdot 5,6569 \text{ cm}$$

$$\underline{A}_2 = 10 \text{ cm} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} = 10 \text{ cm} \left[\cos \left(\frac{7}{6} \pi \right) + j \cdot \sin \left(\frac{7}{6} \pi \right) \right] = -8,6603 \text{ cm} - j \cdot 5 \text{ cm}$$

²⁾ Wir setzen vorübergehend zur Abkürzung $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$.

(2) Addition der komplexen Amplituden

Die komplexen Einzelamplituden \underline{A}_1 und \underline{A}_2 addieren sich geometrisch nach der *Parallelogrammregel* zur komplexen Amplitude \underline{A} der *resultierenden* Schwingung (Bild VI-10). Aus der Abbildung entnehmen wir für Amplitude A und Phasenwinkel φ die folgenden Werte:

$$A \approx 11,1 \text{ cm}, \quad \varphi \approx 254^\circ$$

Die komplexe *Rechnung* ist naturgemäß wesentlich *genauer*. Wir erhalten zunächst für die *resultierende komplexe Amplitude* \underline{A} :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = (5,6569 \text{ cm} - j \cdot 5,6569 \text{ cm}) + (-8,6603 \text{ cm} - j \cdot 5 \text{ cm}) = \\ &= (5,6569 - 8,6603) \text{ cm} + j(-5,6569 - 5) \text{ cm} = -3,0034 \text{ cm} - j \cdot 10,6569 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die *Umrechnung* der komplexen Amplitude \underline{A} aus der *kartesischen* Form in die *Exponentialform* erfolgt am bequemsten anhand von Bild VI-11 über den *Satz des Pythagoras* und den *Hilfswinkel* α :

$$A = \sqrt{3,0034^2 + 10,6569^2} \text{ cm} = 11,07 \text{ cm}$$

$$\tan \alpha = \frac{3,0034 \text{ cm}}{10,6569 \text{ cm}} = 0,2818 \Rightarrow$$

$$\alpha = \arctan 0,2818 = 15,74^\circ$$

$$\varphi = 270^\circ - \alpha = 270^\circ - 15,74^\circ = 254,26^\circ \cong 4,438$$

$$\underline{A} = A \cdot e^{j\varphi} = 11,07 \text{ cm} \cdot e^{j4,438}$$

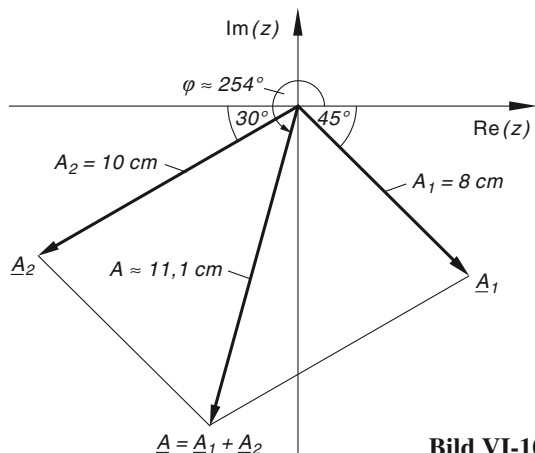
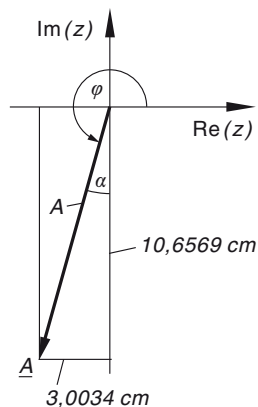
Der *komplexe Zeiger* der *resultierenden Schwingung* lautet also mit $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$:

$$\underline{y} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t} = (11,07 \text{ cm} \cdot e^{j4,438}) \cdot e^{j(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t)} = 11,07 \text{ cm} \cdot e^{j(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,438)}$$

(3) Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form

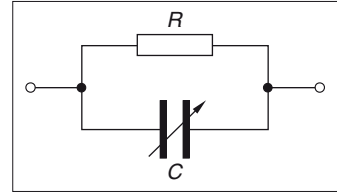
Die *reelle* Form der *resultierenden Sinusschwingung* erhalten wir als *Imaginärteil* des komplexen Zeigers:

$$\begin{aligned} y &= \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}(11,07 \text{ cm} \cdot e^{j(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,438)}) = \\ &= \text{Im}(11,07 \text{ cm} [\cos(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,438) + j \cdot \sin(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,438)]) = \\ &= 11,07 \text{ cm} \cdot \sin(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + 4,438) \end{aligned}$$

**Bild VI-10****Bild VI-11**

Beispiel 8: Leitwertortskurve einer RC-Parallelschaltung*Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe*

Die in Bild VI-12 dargestellte *RC-Parallelschaltung* besteht aus einem ohmschen Widerstand mit dem *festen* Wert $R = 10\ \Omega$ und einem dazu *parallel* geschalteten *Drehkondensator*, dessen Kapazität C sich *stetig* von $0\ \mu\text{F}$ bis zum Maximalwert $100\ \mu\text{F}$ *verändern* lässt. Bestimmen Sie die *Leitwertortskurve* $\underline{Y}(C)$ dieser Schaltung bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 100\ \text{s}^{-1}$ und *beschriften* Sie diese Kurve mit den zugehörigen Werten der Kapazität C .

**Bild VI-12**

Lehrbuch: Bd. 1, VII.4.2

Physikalische Grundlagen: A13, A53

Lösung:

Bei Parallelschaltung *addieren* sich die Einzeleleitwerte zum Gesamtleitwert [A13]. Die Gleichung der *Netzwerkfunktion* $\underline{Y}(C)$ lautet somit

$$\underline{Y}(C) = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{10\ \Omega} + j \cdot 100\ \text{s}^{-1} \cdot C = 0,1\ \text{S} + j \cdot 100\ \text{s}^{-1} \cdot C$$

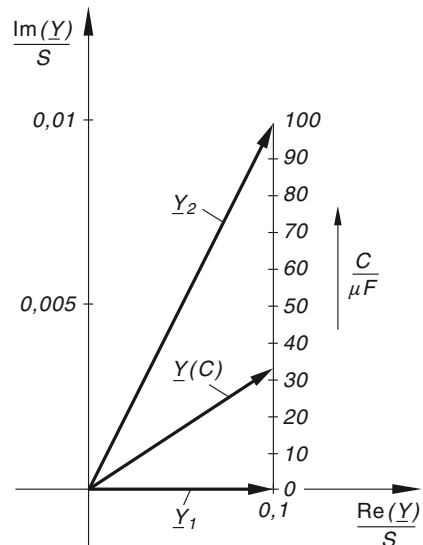
$$(0\ \mu\text{F} \leq C \leq 100\ \mu\text{F};\ S = \text{Siemens} = 1/\Omega)$$

Die *Ortskurve* des *komplexen Leitwertes* ist eine *Parallele* zur imaginären Achse, die durch die beiden Randpunkte mit den Parameterwerten $C_1 = 0\ \mu\text{F}$ und $C_2 = 100\ \mu\text{F}$ begrenzt wird (Bild VI-13). Die *Ortsvektoren* der beiden Randpunkte lauten (mit $1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$):

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}(C_1 = 0\ \mu\text{F}) = 0,1\ \text{S}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \underline{Y}(C_2 = 100\ \mu\text{F}) = \\ &= 0,1\ \text{S} + j \cdot 100\ \text{s}^{-1} \cdot 10^{-4}\ \text{F} = \\ &= 0,1\ \text{S} + j \cdot 10^{-2}\ \text{S} = \\ &= (0,1 + 0,01j)\ \text{S} \end{aligned}$$

Die Beschriftung der Leitwertortskurve ist *linear*, da der Imaginärteil von $\underline{Y}(C)$ der Kapazität C *proportional* ist.

**Bild VI-13**

Beispiel 9: Widerstands- und Leitwertortskurve einer RL-Reihenschaltung
Ortskurven parameterabhängiger komplexer Größen

Eine *Reihenschaltung* aus dem ohmschen Widerstand $R = 2 \Omega$ und der Induktivität $L = 2 \text{ mH}$ liegt an einem *Wechselspannungsgenerator*, dessen Kreisfrequenz ω im Bereich von 0 s^{-1} bis 1200 s^{-1} *stetig veränderbar* ist (Bild VI-14).

Bestimmen Sie

a) die *Widerstandsortskurve* $\underline{Z}(\omega)$,

b) die *Leitwertortskurve* $\underline{Y}(\omega)$

dieses Netzwerkes und *beschriften* Sie beide Kurven mit den zugehörigen Werten der Kreisfrequenz ω .

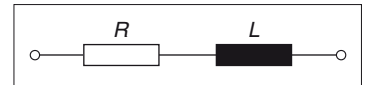


Bild VI-14

Lehrbuch: Bd. 1, VII.4.2 und VII.4.4

Physikalische Grundlagen: A13, A53

Lösung:

a) Die Gleichung der *Netzwerkfunktion* $\underline{Z}(\omega)$ lautet [A13]:

$$\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L = 2 \Omega + j \cdot 0,002 \text{ H} \cdot \omega, \quad 0 \text{ s}^{-1} \leq \omega \leq 1200 \text{ s}^{-1}$$

Die zugehörige *Widerstandsortskurve* ist eine *Parallele* zur *imaginären Achse*, die durch die beiden Randpunkte mit den Parameterwerten $\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_2 = 1200 \text{ s}^{-1}$ und den zugehörigen *Ortsvektoren*

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}) = 2 \Omega$$

und

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \underline{Z}(\omega_2 = 1200 \text{ s}^{-1}) = \\ &= 2 \Omega + j \cdot 0,002 \text{ H} \cdot 1200 \text{ s}^{-1} = \\ &= 2 \Omega + j \cdot 2,4 \Omega \end{aligned}$$

begrenzt wird.

Beschriftung der Widerstandsortskurve

Da der induktive Widerstand ωL der Kreisfrequenz ω *proportional* ist, wird die Gerade zwischen den beiden Randpunkten $\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_2 = 1200 \text{ s}^{-1}$ *linear* geteilt (Bild VI-15).

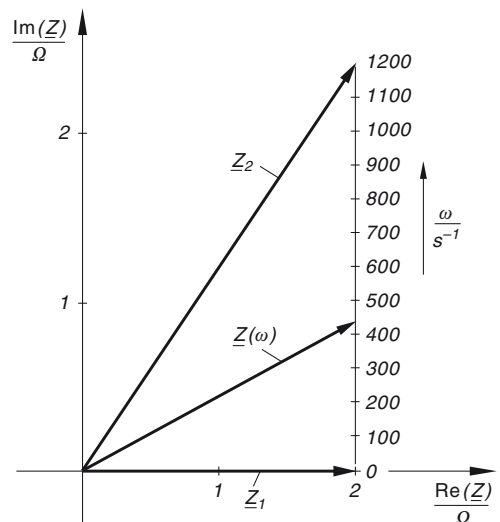


Bild VI-15

- b) Die *Leitwertortskurve* erhalten wir durch *Inversion* der Widerstandsorkskurve. Sie wird durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\underline{Y}(\omega) &= \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{R - j\omega L}{R^2 - (j\omega L)^2} = \\ &= \frac{R - j\omega L}{R^2 - j^2\omega^2 L^2} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{2\ \Omega - j \cdot 0,002\ \text{H} \cdot \omega}{4\ \Omega^2 + 4 \cdot 10^{-6}\ \text{H}^2 \cdot \omega^2}\end{aligned}$$

beschrieben (mit $0\ \text{s}^{-1} \leq \omega \leq 1200\ \text{s}^{-1}$). Der Nenner $R + j\omega L$ wurde dabei durch Erweiterung des Bruches mit der *konjugiert komplexen Zahl* $R - j\omega L$ *reell* gemacht. In der zeichnerischen Darstellung erhalten wir nach den *Inversionsregeln* (siehe Band 1, Abschnitt VII.4.4.2) eine Ortskurve, die Teil eines *Kreises* ist, der durch den *Nullpunkt* geht und dessen *Mittelpunkt* auf der *reellen Achse* liegt. Den *Kreisdurchmesser* bestimmen wir wie folgt: Zum *kleinsten* Wert des Widerstandes, der für $\omega = 0\ \text{s}^{-1}$ angenommen wird, gehört der *größte* Wert des Leitwertes:

$$\underline{Z}_{\min} = \underline{Z}(\omega = 0\ \text{s}^{-1}) = 2\ \Omega \longrightarrow \underline{Y}_{\max} = \underline{Y}(\omega = 0) = \frac{1}{\underline{Z}_{\min}} = \frac{1}{2\ \Omega} = 0,5\ \text{S}$$

$$(\text{S} = \text{Siemens} = 1/\Omega)$$

Dieser Wert ist zugleich der gesuchte *Kreisdurchmesser*. Der Radius des Kreises beträgt somit $r = 0,25$, der Mittelpunkt ist $M = (0,25; 0)$ (siehe Bild VI-16).

Beschriftung der Leitwertortskurve

Für *jeden* Wert des Parameters ω gilt: *Widerstandszeiger* $\underline{Z}(\omega)$ und *Leitwertzeiger* $\underline{Y}(\omega)$ liegen *spiegelsymmetrisch* bezüglich der *reellen Achse* (sie unterscheiden sich lediglich in ihrer *Länge*). Die Beschriftung der Leitwertortskurve erhalten wir daher, indem wir zunächst die Skala der Widerstandsorkskurve an der *reellen Achse spiegeln*, die Spiegelpunkte mit dem Ursprung *geradlinig* verbinden und dann diese Verbindungslinien durch *rückwärtige Verlängerung* mit der Leitwertortskurve zum *Schnitt* bringen (Bild VI-16).

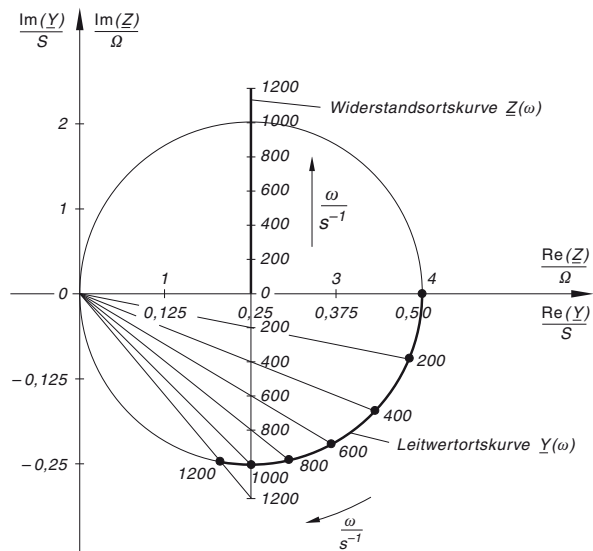


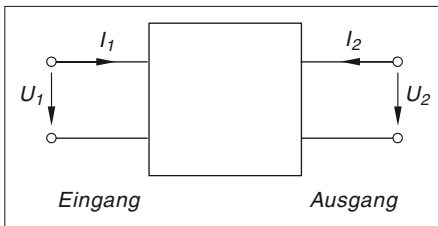
Bild VI-16

VII Lineare Algebra

Beispiel 1: Widerstands- und Kettenmatrix eines linearen Vierpols
Matrix, Determinante einer Matrix

Die Vierpolgleichungen des in Bild VII-1 dargestellten *linearen passiven Vierpols* lauten in der sog. *Widerstandsform*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Widerstandsmatrix } \mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Z_{21} = Z_{12}$$



U_1 : Eingangsspannung
 I_1 : Eingangsstrom
 U_2 : Ausgangsspannung
 I_2 : Ausgangsstrom

Bild VII-1

- Bestimmen Sie hieraus die sog. *Kettenmatrix* \mathbf{A} , die die Abhängigkeit der Eingangsgrößen U_1 , I_1 von den Ausgangsgrößen U_2 , I_2 beschreibt.
- Welchen Wert besitzt die Determinante der *Kettenmatrix* \mathbf{A} ?

Lehrbuch: Bd. 2, I.2.2 und I.3.2

Physikalische Grundlagen: A47

Lösung:

- Die vorgegebenen Vierpolgleichungen lauten ausgeschrieben unter Berücksichtigung der *symmetrischen* Widerstandsmatrix \mathbf{Z} ($Z_{21} = Z_{12}$) wie folgt:

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2$$

Wir lösen zunächst die *zweite* Gleichung nach I_1 auf¹⁾:

$$Z_{12} I_1 = U_2 - Z_{22} I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{Z_{12}} U_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{12}} I_2 = \frac{1}{Z_{12}} U_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{12}} (-I_2)$$

Dies ist bereits *eine* der beiden Vierpolgleichungen in der *Kettenform*.

¹⁾ Definitionsgemäß sind U_1 und I_1 Funktionen von U_2 und $-I_2$ [A47].

Die *zweite* Gleichung erhalten wir durch Einsetzen dieser Beziehung in die *erste* Gleichung der *Widerstandsform*:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = Z_{11} \left(\frac{1}{Z_{12}} U_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{12}} I_2 \right) + Z_{12} I_2 = \\ &= \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{12}} I_2 + Z_{12} I_2 = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 + \left(Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{12}} \right) I_2 = \\ &= \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 + \frac{Z_{12}^2 - Z_{11} Z_{22}}{Z_{12}} I_2 = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 - \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{12}} I_2 \end{aligned}$$

Im Zähler des letzten Bruches steht genau die *Determinante* der Widerstandsmatrix \mathbf{Z} :

$$\det \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2$$

Somit gilt:

$$U_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 - \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{12}} I_2 = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} U_2 + \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{12}} (-I_2)$$

Die Vierpolgleichungen in der *Kettenform* werden somit durch die *Matrizengleichung*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{12}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{12}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \end{pmatrix}}_{\text{Kettenmatrix } \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die *Koeffizientenmatrix* ist dabei definitionsgemäß die gesuchte *Kettenmatrix* \mathbf{A} [A47].

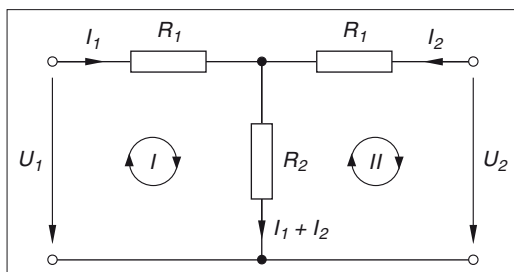
b) Es ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{12}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{12}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \end{vmatrix} = \frac{1}{Z_{12}} \cdot \frac{1}{Z_{12}} \cdot \begin{vmatrix} Z_{11} & \det \mathbf{Z} \\ 1 & Z_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{Z_{12}^2} (Z_{11} Z_{12} - \det \mathbf{Z}) = \\ &= \frac{Z_{11} Z_{22} - \det \mathbf{Z}}{Z_{12}^2} = \frac{Z_{11} Z_{22} - (Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2)}{Z_{12}^2} = \\ &= \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{11} Z_{22} + Z_{12}^2}{Z_{12}^2} = \frac{Z_{12}^2}{Z_{12}^2} = 1 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Vierpolgleichungen für ein symmetrisches T-Glied
Matrizenrechnung, inverse Matrix

Bild VII-2 zeigt einen Vierpol in Form eines *symmetrisch* ausgebildeten *T-Gliedes* mit den ohmschen Widerständen $R_1 = 10\ \Omega$ (zweimal) und $R_2 = 20\ \Omega$. Die Eingangsgrößen sind U_1 und I_1 , die Ausgangsgrößen U_2 und I_2 .

Bild VII-2



- Bestimmen Sie *Widerstandsmatrix* \mathbf{Z} , *Leitwertmatrix* \mathbf{Y} und *Kettenmatrix* \mathbf{A} dieses Vierpols. Welchen Wert besitzt die Determinante der *Kettenmatrix* \mathbf{A} ?
- Wie lauten die *Spannungswerte* U_1 und U_2 für $I_1 = 0,5\text{ A}$ und $I_2 = 2\text{ A}$?
- Welche *Ströme* I_1 und I_2 fließen bei den Gleichspannungen $U_1 = 10\text{ V}$ und $U_2 = 5\text{ V}$?
- Die Ausgangsgrößen besitzen die Werte $U_2 = 10\text{ V}$, $I_2 = 0,1\text{ A}$. Welche Werte besitzen die zugehörigen *Eingangsgrößen* U_1 und I_1 ?

Lösungshinweis: Die *Widerstandsform* $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ des symmetrischen T-Gliedes erhalten Sie durch Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die beiden in Bild VII-2 näher gekennzeichneten Maschen.

Lehrbuch: Bd. 2, I.3.2 und I.4.2

Physikalische Grundlagen: A32, A47

Lösung:

a) Widerstandsmatrix \mathbf{Z}

Die Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die beiden eingezeichneten Maschen (I) und (II) führt zu den folgenden Gleichungen:

$$(I) \quad R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_2) - U_1 = 0$$

$$(II) \quad -R_1 I_2 - R_2 (I_1 + I_2) + U_2 = 0$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach den Größen U_1 und U_2 erhalten wir die gesuchten Beziehungen. Sie lauten (sog. *Widerstandsform* des symmetrischen T-Gliedes):

$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_2) = R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_2$$

$$U_2 = R_1 I_2 + R_2 (I_1 + I_2) = R_1 I_2 + R_2 I_1 + R_2 I_2 = R_2 I_1 + (R_1 + R_2) I_2$$

In der *Matrizenform*:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}}_{\text{Widerstandsmatrix } \mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

Für die *symmetrische Widerstandsmatrix* \mathbf{Z} erhalten wir damit nach Einsetzen der Werte

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \, \Omega + 20 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 10 \, \Omega + 20 \, \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{pmatrix}$$

Leitwertmatrix \mathbf{Y} [A47]

Die *Leitwertmatrix* \mathbf{Y} ist die *Inverse* der Widerstandsmatrix \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} \end{pmatrix}$$

Dabei ist C_{ik} das *algebraische Komplement* des Widerstandselementes Z_{ik} in $\det \mathbf{Z}$ ($i, k = 1, 2$). Aus *Symmetriegründen* ist hier $Z_{22} = Z_{11}$ und $Z_{21} = Z_{12}$ und somit $C_{22} = C_{11}$ und $C_{21} = C_{12}$. Die Berechnung der Größen $\det \mathbf{Z}$, C_{11} und C_{12} führt dann zu den folgenden Werten:

$$\det \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{vmatrix} = 30 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega - 20 \, \Omega \cdot 20 \, \Omega = (900 - 400) \, \Omega^2 = 500 \, \Omega^2$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{vmatrix} = 30 \, \Omega,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{vmatrix} = -20 \, \Omega$$

(die grau markierten Zeilen und Spalten in den beiden Determinanten werden gestrichen)

Die *symmetrische Leitwertmatrix* lautet damit

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{500 \, \Omega^2} \cdot \begin{pmatrix} 30 \, \Omega & -20 \, \Omega \\ -20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,06 \, \text{S} & -0,04 \, \text{S} \\ -0,04 \, \text{S} & 0,06 \, \text{S} \end{pmatrix} \quad (\text{S} = \text{Siemens} = 1/\Omega)$$

Kettenmatrix \mathbf{A} [A47]

Wir gehen von der *Widerstandsform* $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ und somit

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} U_1 &= 30 \, \Omega \cdot I_1 + 20 \, \Omega \cdot I_2 \\ U_2 &= 20 \, \Omega \cdot I_1 + 30 \, \Omega \cdot I_2 \end{aligned}$$

aus und lösen die *untere* Gleichung nach I_1 auf:

$$I_1 = \frac{U_2 - 30 \, \Omega \cdot I_2}{20 \, \Omega} = \frac{1}{20 \, \Omega} \cdot U_2 - \frac{30 \, \Omega}{20 \, \Omega} \cdot I_2 = 0,05 \, \text{S} \cdot U_2 + 1,5 \cdot (-I_2)$$

Dies ist bereits *eine* der beiden gesuchten Beziehungen in der *Kettenform*. Die *zweite* Gleichung folgt durch Einsetzen dieser Beziehung in die *obere* Gleichung der *Widerstandsform*:

$$\begin{aligned} U_1 &= 30 \, \Omega \cdot I_1 + 20 \, \Omega \cdot I_2 = 30 \, \Omega (0,05 \, \text{S} \cdot U_2 - 1,5 \cdot I_2) + 20 \, \Omega \cdot I_2 = \\ &= 1,5 \cdot U_2 - 45 \, \Omega \cdot I_2 + 20 \, \Omega \cdot I_2 = 1,5 \cdot U_2 + 25 \, \Omega \cdot (-I_2) \end{aligned}$$

Die *Vierpolgleichungen* des *symmetrischen T-Gliedes* lauten somit in der *Kettenform*²⁾

$$\begin{aligned} U_1 &= 1,5 \cdot U_2 + 25 \, \Omega \cdot (-I_2) \\ I_1 &= 0,05 \, \text{S} \cdot U_2 + 1,5 \cdot (-I_2) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \, \text{S} & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte *Kettenmatrix* **A** hat daher die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \, \text{S} & 1,5 \end{pmatrix}$$

Ihre *Determinante* besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \, \text{S} & 1,5 \end{vmatrix} = 1,5 \cdot 1,5 - 0,05 \, \text{S} \cdot 25 \, \Omega = 2,25 - 1,25 = 1$$

Die *Kettenform* lautet somit:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \, \text{S} & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

- b) Aus der *Widerstandsform* $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ folgt durch Einsetzen der Stromwerte $I_1 = 0,5 \, \text{A}$ und $I_2 = 2 \, \text{A}$:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \, \Omega & 20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 30 \, \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \, \text{A} \\ 2 \, \text{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \, \Omega \cdot 0,5 \, \text{A} + 20 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} \\ 20 \, \Omega \cdot 0,5 \, \text{A} + 30 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \, \text{V} \\ 70 \, \text{V} \end{pmatrix}$$

Somit ist $U_1 = 55 \, \text{V}$ und $U_2 = 70 \, \text{V}$.

- c) Durch Einsetzen der Spannungswerte $U_1 = 10 \, \text{V}$ und $U_2 = 5 \, \text{V}$ in die *Leitwertform* $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}$ [A47] erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,06 \, \text{S} & -0,04 \, \text{S} \\ -0,04 \, \text{S} & 0,06 \, \text{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \, \text{V} \\ 5 \, \text{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,06 \, \text{S} \cdot 10 \, \text{V} - 0,04 \, \text{S} \cdot 5 \, \text{V} \\ -0,04 \, \text{S} \cdot 10 \, \text{V} + 0,06 \, \text{S} \cdot 5 \, \text{V} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,6 \, \text{A} - 0,2 \, \text{A} \\ -0,4 \, \text{A} + 0,3 \, \text{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \, \text{A} \\ -0,1 \, \text{A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die *Stromstärken* betragen somit $I_1 = 0,4 \, \text{A}$ und $I_2 = -0,1 \, \text{A}$.

²⁾ U_1 und I_1 sind definitionsgemäß Funktionen von U_2 und $-I_2$ [A47].

- d) Aus der Kettenform $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$ erhalten wir mit $U_2 = 10 \text{ V}$ und $I_2 = 0,1 \text{ A}$ die gesuchten Eingangsgrößen U_1 und I_1 [A47]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \text{ S} & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \text{ V} \\ -0,1 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cdot 10 \text{ V} + 25 \, \Omega \cdot (-0,1 \text{ A}) \\ 0,05 \text{ S} \cdot 10 \text{ V} + 1,5 \cdot (-0,1 \text{ A}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 15 \text{ V} - 2,5 \text{ V} \\ 0,5 \text{ A} - 0,15 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,5 \text{ V} \\ 0,35 \text{ A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Eingangswerte lauten somit $U_1 = 12,5 \text{ V}$ und $I_1 = 0,35 \text{ A}$.

Beispiel 3: Symmetrische π -Schaltung Multiplikation von Matrizen

Die in Bild VII-3 dargestellte *symmetrische π -Schaltung* entsteht durch Kettenschaltung [A48] eines π -Halbgliedes mit einem Querwiderstand.

- a) Bestimmen Sie aus den vorgegebenen Kettenmatrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 der beiden Einzelglieder die Kettenmatrix \mathbf{A} der Gesamtschaltung.
- b) Die Ausgangsgrößen U_2 und I_2 besitzen die Werte $U_2 = 20 \text{ V}$ und $I_2 = 1 \text{ A}$. Wie groß sind Eingangsspannung U_1 und Eingangsstrom I_1 ?

$$Z_1 = 10 \, \Omega; \quad Z_2 = 5 \, \Omega;$$

$$Y_1 = 1/Z_1 = 0,1 \text{ S}$$

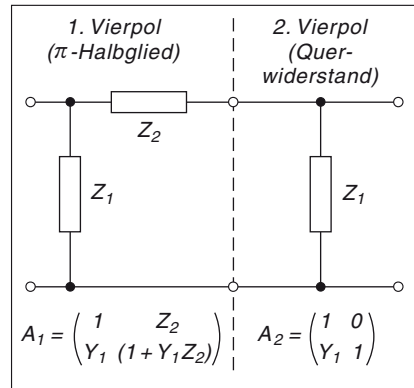


Bild VII-3

Lehrbuch: Bd. 2, I.2.6.3

Physikalische Grundlagen: A47, A48

Lösung:

- a) Bei der Kettenschaltung *multiplizieren* sich die Kettenmatrizen der Einzelglieder [A48]. Wir erhalten somit für die Kettenmatrix \mathbf{A} der symmetrischen π -Schaltung

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ Y_1 & 1 + Y_1 Z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + Y_1 Z_2 & Z_2 \\ Y_1 + (1 + Y_1 Z_2) Y_1 & 1 + Y_1 Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Y_1 Z_2 & Z_2 \\ Y_1 (2 + Y_1 Z_2) & 1 + Y_1 Z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den vorgegebenen Werten lautet diese Matrix dann wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 0,1 \text{ S} \cdot 5 \Omega & 5 \Omega \\ 0,1 \text{ S} (2 + 0,1 \text{ S} \cdot 5 \Omega) & 1 + 0,1 \text{ S} \cdot 5 \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 5 \Omega \\ 0,25 \text{ S} & 1,5 \end{pmatrix}$$

- b) Zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen besteht der folgende Zusammenhang (sog. *Kettenform* [A47]):

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 5 \Omega \\ 0,25 \text{ S} & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \text{ V} \\ -1 \text{ A} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5 \cdot 20 \text{ V} + 5 \Omega \cdot (-1 \text{ A}) \\ 0,25 \text{ S} \cdot 20 \text{ V} + 1,5 \cdot (-1 \text{ A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \text{ V} - 5 \text{ V} \\ 5 \text{ A} - 1,5 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \text{ V} \\ 3,5 \text{ A} \end{pmatrix}$$

Die *Eingangsspannung* beträgt somit $U_1 = 25 \text{ V}$, der *Eingangsstrom* $I_1 = 3,5 \text{ A}$.

Beispiel 4: Kettenschaltung von Vierpolen

Multiplikation von Matrizen

Bild VII-4 zeigt, wie man durch *Kettenschaltung* [A48] dreier Vierpole, nämlich zweier *Längswiderstände* Z_1 und Z_3 sowie eines *Querswiderstandes* Z_2 ein *unsymmetrisches T-Glied* erhält.

- a) Bestimmen Sie aus den angegebenen *Kettenmatrizen* \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_3 der drei *Einzelvierpole* die *Kettenmatrix* \mathbf{A} des *T-Gliedes*.
- b) Wie lautet diese Matrix für ein *symmetrisches T-Glied* mit $Z_1 = 10 \Omega$, $Z_2 = 20 \Omega$ und $Z_3 = 10 \Omega$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Beispiel 2, Teil a) in diesem Kapitel.

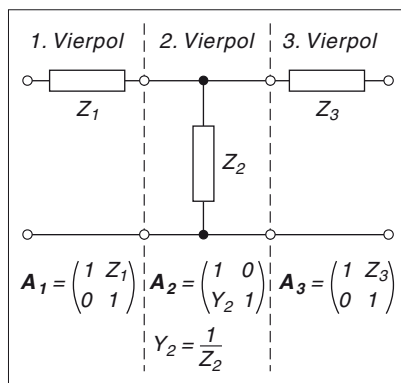


Bild VII-4

Lehrbuch: Bd. 2, I.2.6.3

Physikalische Grundlagen: A47, A48

Lösung:

- a) Bei der Kettenschaltung *multiplizieren* sich die Kettenmatrizen der Einzelglieder [A48]. Somit gilt für die *Kettenmatrix* \mathbf{A} des *unsymmetrischen T-Gliedes*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikationen werden dabei definitionsgemäß von *links* nach *rechts* ausgeführt. Wir erhalten demnach schrittweise

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & Z_1 \\ Y_2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & Z_1 \\ Y_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & (1 + Y_2 Z_1) Z_3 + Z_1 \\ Y_2 & Y_2 Z_3 + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & Z_1 + (1 + Y_2 Z_1) Z_3 \\ Y_2 & 1 + Y_2 Z_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Für $Z_3 = Z_1$ erhalten wir ein *symmetrisches T-Glied* mit der Kettenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & Z_1 + (1 + Y_2 Z_1) Z_1 \\ Y_2 & 1 + Y_2 Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Y_2 Z_1 & Z_1 (2 + Y_2 Z_1) \\ Y_2 & 1 + Y_2 Z_1 \end{pmatrix}$$

Sie lautet für die *speziellen* Werte $Z_1 = Z_3 = 10 \, \Omega$, $Z_2 = 20 \, \Omega$ und $Y_2 = 1/Z_2 = 1/(20 \, \Omega) = 0,05 \, \text{S}$ in *Übereinstimmung* mit dem Ergebnis aus Beispiel 2, Teil a) wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 0,05 \, \text{S} \cdot 10 \, \Omega & 10 \, \Omega (2 + 0,05 \, \text{S} \cdot 10 \, \Omega) \\ 0,05 \, \text{S} & 1 + 0,05 \, \text{S} \cdot 10 \, \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 25 \, \Omega \\ 0,05 \, \text{S} & 1,5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5: Durchbiegung eines Trägers bei Belastung durch mehrere Kräfte (Superpositionsprinzip)

Multiplikation von Matrizen (Falk-Schema)

Ein homogener Träger (z. B. ein Balken) auf zwei Stützen wird in der aus Bild VII-5 ersichtlichen Weise durch drei Kräfte F_1 , F_2 und F_3 belastet. Die dabei an den Orten der Kräfteeinwirkungen, d. h. an den Stellen x_1 , x_2 und x_3 hervorgerufenen *Durchbiegungen* sind y_1 , y_2 und y_3 .

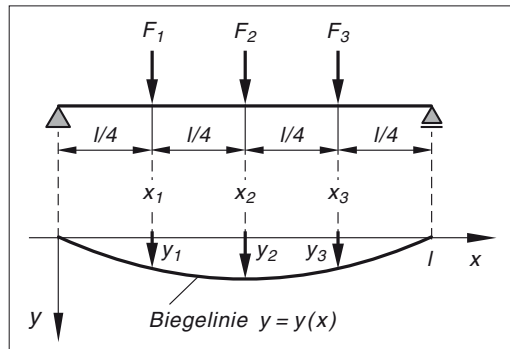


Bild VII-5

Zwischen den einwirkenden *Kräften* und den von ihnen hervorgerufenen *Durchbiegungen* besteht dann der folgende Zusammenhang:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}$$

Dabei ist \mathbf{y} der *Durchbiegungsvektor*, \mathbf{f} der *Belastungsvektor* und die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} die Matrix der sog. *Einflusszahlen* α_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$)³⁾. In diesem speziellen Belastungsfall ist die Matrix \mathbf{A} *symmetrisch* und besitzt die folgende Struktur:

$$\mathbf{A} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^*} = \lambda \mathbf{A}^* \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{l^3}{768 EI}$$

l : Länge des Trägers; EI : konstante Biegesteifigkeit des Trägers; E : Elastizitätsmodul;
 I : Flächenträgheitsmoment

Wie groß sind die von den Kräften $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$ und $F_3 = 3 \text{ kN}$ hervorgerufenen *Durchbiegungen* y_1 , y_2 und y_3 bei einem Träger mit der Länge $l = 1 \text{ m}$ und der Biegesteifigkeit $EI = 5 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2$?

Lehrbuch: Bd. 2, I.2.6.3

Lösung:

Aus $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} = (\lambda \mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{f} = \lambda (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{f})$ folgt nach Einsetzen der vorgegebenen Werte ($l = 1 \text{ m} = 10^3 \text{ mm}$; die Kräfte müssen in der Einheit $\text{N} = \text{Newton}$ eingesetzt werden):

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} &= \frac{(10^3 \text{ mm})^3}{768 \cdot 5 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} 10^3 \text{ N} = \\ &= 2,6042 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

³⁾ Die *Einflusszahl* α_{ik} ist die an der Stelle x_i hervorgerufene Durchbiegung, wenn der Träger *nur* an der Stelle x_k durch die *Einheitslast* $\bar{F}_k = 1$ (ohne Einheit) belastet wird. Nach dem *Superpositionsprinzip* der Mechanik addieren sich dann die von verschiedenen Kräften am *gleichen* Ort hervorgerufenen Durchbiegungen.

Das *Matrizenprodukt* $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{f}$ berechnen wir nach dem *Falk-Schema*:

				\mathbf{f}	2	
					4	
					3	
\mathbf{A}^*	9	11	7	83	$\leftarrow (18 + 44 + 21 = 83)$	
	11	16	11	119	$\leftarrow (22 + 64 + 33 = 119)$	
	7	11	9	85	$\leftarrow (14 + 44 + 27 = 85)$	
				$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{f}$		

Somit ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2,6042 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \begin{pmatrix} 83 \\ 119 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,16 \\ 3,10 \\ 2,21 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

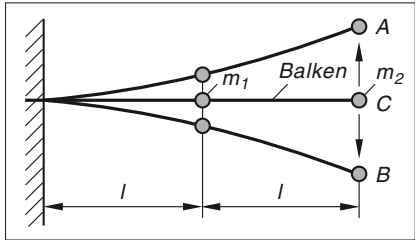
Die von den einwirkenden Kräften an den Stellen $x_1 = 0,25 \text{ m}$, $x_2 = 0,5 \text{ m}$ und $x_3 = 0,75 \text{ m}$ hervorgerufenen *Durchbiegungen* betragen daher der Reihe nach

$$y_1 = 2,16 \text{ mm}, \quad y_2 = 3,10 \text{ mm}, \quad y_3 = 2,21 \text{ mm}.$$

Beispiel 6: Eigenkreisfrequenzen einer Biegeschwingung

Determinantengleichung

Der in Bild VII-6 dargestellte *elastische Balken* ist am linken Ende fest eingespannt und trägt in der angegebenen Weise zwei *gleiche* Punktmassen $m_1 = m_2 = m$. Infolge seiner Elastizität ist er zu *Biegeschwingungen* fähig.



A, B: Umkehrpunkte der Biegeschwingung
C: Gleichgewichtslage des Balkens

Bild VII-6

Die Kreisfrequenzen ω dieser *Eigenschwingungen* lassen sich aus der *Determinantengleichung*

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \omega^2) & -\frac{5}{2} \omega^2 \\ -\frac{5}{2} \omega^2 & (\alpha - 8\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\text{mit } \alpha = \frac{3EI}{ml^3} \right)$$

bestimmen.

EI : konstante Biegesteifigkeit des Balkens: E : Elastizitätsmodul; I : Flächenträgheitsmoment;
 $2l$: Balkenlänge

Berechnen Sie diese *Eigenkreisfrequenzen*.

Lehrbuch: Bd. 2, I.3.2

Lösung:

Die Berechnung der 2-reihigen *Determinante* führt zu der folgenden algebraischen Gleichung 4. Grades in der Unbekannten ω :

$$\begin{aligned} (\alpha - \omega^2)(\alpha - 8\omega^2) - \frac{25}{4} \omega^4 &= \alpha^2 - 8\alpha\omega^2 - \alpha\omega^2 + 8\omega^4 - \frac{25}{4} \omega^4 = 0 \Rightarrow \\ \frac{7}{4} \omega^4 - 9\alpha\omega^2 + \alpha^2 &= 0 \quad \text{oder} \quad \omega^4 - \frac{36}{7} \alpha\omega^2 + \frac{4}{7} \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

Wir lösen diese *biquadratische* Gleichung mit Hilfe der *Substitution* $z = \omega^2$ und erhalten

$$\begin{aligned} z^2 - \frac{36}{7} \alpha z + \frac{4}{7} \alpha^2 &= 0 \Rightarrow \\ z_{1/2} &= \frac{18}{7} \alpha \pm \sqrt{\left(\frac{18}{7} \alpha\right)^2 - \frac{4}{7} \alpha^2} = \frac{18}{7} \alpha \pm \sqrt{\frac{324}{49} \alpha^2 - \frac{4}{7} \alpha^2} = \\ &= \frac{18}{7} \alpha \pm \sqrt{\frac{324 - 28}{49} \alpha^2} = \frac{18}{7} \alpha \pm \sqrt{\frac{296}{49} \alpha^2} = \frac{18}{7} \alpha \pm \frac{\sqrt{296}}{7} \alpha = \\ &= \frac{18 \pm \sqrt{296}}{7} \alpha = \frac{18 \pm 17,2047}{7} \alpha \end{aligned}$$

Somit: $z_1 = 5,0292 \alpha$, $z_2 = 0,1136 \alpha$

Bei der *Rücksubstitution* ist zu beachten, dass für ω aus *physikalischen* Gründen nur *positive* Werte infrage kommen. Demnach gibt es genau *zwei* Eigenschwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{5,0292 \alpha} = \sqrt{5,0292 \cdot \frac{3EI}{ml^3}} = 3,8843 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

und

$$\omega_2 = \sqrt{z_2} = \sqrt{0,1136 \alpha} = \sqrt{0,1136 \cdot \frac{3EI}{ml^3}} = 0,5838 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Beispiel 7: Elektromagnetische Induktion in einem durch ein Magnetfeld bewegten elektrischen Leiter
Dreireihige Determinante

Ein *homogenes Magnetfeld* mit einer magnetischen Flussdichte vom Betrag $B = 2 \text{ Vs/m}^2$ besitzt die Orientierung der z -Achse eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems. In diesem Feld wird ein *metallischer Leiter* mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v = 0,1 \text{ m/s}$ in Richtung der *Raumdiagonale* eines achsenparallelen Würfels bewegt (Bild VII-7). Die dabei im Leiter *induzierte elektrische Feldstärke* \vec{E} ist nach dem *Induktionsgesetz* das *vektorielle Produkt* aus dem *Geschwindigkeitsvektor* \vec{v} und dem Vektor \vec{B} der *magnetischen Flussdichte*:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Berechnen Sie dieses *Vektorprodukt* nach der *Determinantenmethode*.

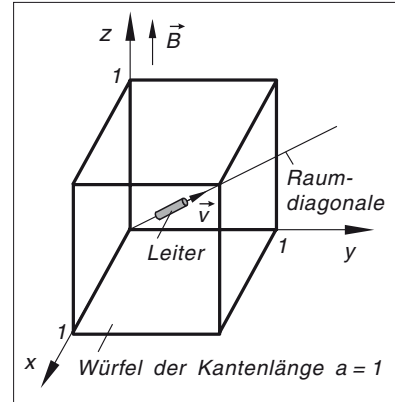


Bild VII-7

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1 und Bd. 2, I.3.3

Lösung:

Das *Vektorprodukt* $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ ist formal durch die *dreireihige Determinante*

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

darstellbar ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenachsen). Aus *Symmetriegründen* sind alle drei Geschwindigkeitskomponenten *gleich* und zwar

$$v_x = v_y = v_z = v/\sqrt{3}$$

Der Vektor \vec{B} hat nur in der z -Richtung eine *nichtverschwindende* Komponente:

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = B$$

Somit ist

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v/\sqrt{3} & v/\sqrt{3} & v/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \frac{vB}{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_D = \frac{vB}{\sqrt{3}} \cdot D$$

Die 3-reihige Determinante D berechnen wir nach der *Regel von Sarrus*:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z - (0\vec{e}_z + 0\vec{e}_x + 1\vec{e}_y) = 1\vec{e}_x - 1\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$$

Das *induzierte* elektrische Feld wird somit durch den folgenden *Feldstärkevektor* beschrieben:

$$\vec{E} = \frac{vB}{\sqrt{3}} \cdot D = \frac{vB}{\sqrt{3}} (1\vec{e}_x - 1\vec{e}_y + 0\vec{e}_z) \quad \text{oder} \quad \vec{E} = \frac{vB}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} besitzt *keine* Komponente in z -Richtung, d. h. in Richtung des Magnetfeldes ($\vec{E} \perp \vec{B}$). Mit den gegebenen Werten erhalten wir schließlich

$$\vec{E} = \frac{0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,115 \frac{\text{V}}{\text{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{E}| = 0,115 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \sqrt{2} = 0,163 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Beispiel 8: Kritische Drehzahlen einer zweifach gelagerten Welle
Homogenes lineares Gleichungssystem,
Determinantengleichung

Die in Bild VII-8 dargestellte *zweifach gelagerte Welle* trägt in den angegebenen Abständen zwei *Zylinderscheiben* gleicher Masse ($m_1 = m_2 = m$). Rotiert die Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre *Längsachse*, so treten an den Scheiben *Zentrifugalkräfte*⁴⁾ auf, die zu einer *Verbiegung* der Welle führen. An den Orten der Scheiben sind diese *seitlichen Auslenkungen* durch die Gleichungen

$$y_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2$$

$$y_2 = \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2$$

gegeben.

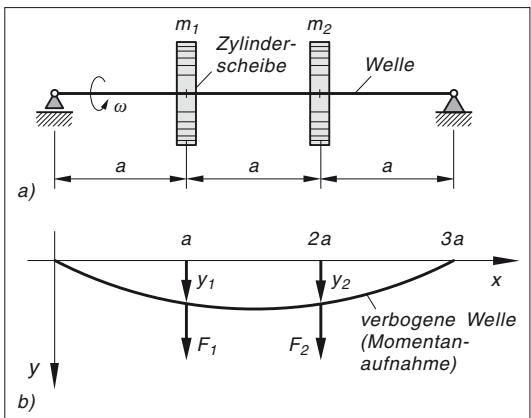


Bild VII-8

⁴⁾ Zum Beispiel infolge der Exzentrizität der Scheiben.

F_1 und F_2 sind dabei die auf die Scheibenmassen m_1 und m_2 einwirkenden *Zentrifugalkräfte* [A15]

$$F_1 = m_1 \omega^2 y_1 = m \omega^2 y_1 \quad \text{und} \quad F_2 = m_2 \omega^2 y_2 = m \omega^2 y_2$$

Die Koeffizienten a_{ik} sind *reziproke* Federkonstanten und werden als *Einflusszahlen* bezeichnet. Aus *Symmetriegründen* ist für den hier behandelten Belastungsfall $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha$ und $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta$. Die Auslenkungen genügen somit dem *homogenen linearen Gleichungssystem*

$$y_1 = \alpha F_1 + \beta F_2 = \alpha m \omega^2 y_1 + \beta m \omega^2 y_2$$

$$y_2 = \beta F_1 + \alpha F_2 = \beta m \omega^2 y_1 + \alpha m \omega^2 y_2$$

oder (nach Ordnen der Glieder):

$$(I) \quad (\alpha m \omega^2 - 1) y_1 + \beta m \omega^2 y_2 = 0$$

$$(II) \quad \beta m \omega^2 y_1 + (\alpha m \omega^2 - 1) y_2 = 0$$

In der Matrizen Schreibweise lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \alpha m \omega^2 - 1 & \beta m \omega^2 \\ \beta m \omega^2 & \alpha m \omega^2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

$$\alpha = \frac{4a^3}{9EI}; \quad \beta = \frac{7a^3}{18EI}; \quad EI: \text{konstante Biegesteifigkeit der Welle; } 3a: \text{Länge der Welle}$$

- Bestimmen Sie die *kritischen Drehzahlen* der Welle, d. h. diejenigen Drehzahlen (bzw. Winkelgeschwindigkeiten), für die das lineare Gleichungssystem *nichttriviale* Lösungen besitzt.
- Was lässt sich über die *Auslenkungen* der Welle bei diesen *kritischen* Drehzahlen aussagen?

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.4.2

Physikalische Grundlagen: A15

Lösung:

- Das *homogene lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist bekanntlich nur dann *nichttrivial* lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante $\det \mathbf{A}$ *verschwindet*. Die *kritischen* Winkelgeschwindigkeiten genügen somit der folgenden Gleichung 4. Grades:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha m \omega^2 - 1 & \beta m \omega^2 \\ \beta m \omega^2 & \alpha m \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = (\alpha m \omega^2 - 1)^2 - \beta^2 m^2 \omega^4 = 0$$

Wir lösen diese *biquadratische* Gleichung wie folgt, wobei für ω aus *physikalischen* Gründen nur *positive* Werte infrage kommen:

$$\begin{aligned}
 (\alpha m \omega^2 - 1)^2 &= \beta^2 m^2 \omega^4 \mid \text{Wurzelziehen} \Rightarrow \alpha m \omega^2 - 1 = \mp \beta m \omega^2 \Rightarrow \\
 \alpha m \omega^2 \pm \beta m \omega^2 &= 1 \Rightarrow \omega^2 (\alpha m \pm \beta m) = 1 \Rightarrow \\
 \omega^2 &= \frac{1}{\alpha m \pm \beta m} = \frac{1}{m(\alpha \pm \beta)} \Rightarrow \omega_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{m(\alpha \pm \beta)}}
 \end{aligned}$$

Es gibt demnach zwei *kritische Winkelgeschwindigkeiten*. Sie lauten unter Berücksichtigung von

$$\alpha \pm \beta = \frac{4a^3}{9EI} \pm \frac{7a^3}{18EI} = \frac{8a^3 \pm 7a^3}{18EI} = \frac{8 \pm 7}{18} \cdot \frac{a^3}{EI}$$

wie folgt:

$$\omega_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{m(\alpha \pm \beta)}} = \frac{1}{\sqrt{m \left(\frac{8 \pm 7}{18} \right) \frac{a^3}{EI}}} = \sqrt{\frac{18}{8 \pm 7}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{18}{15}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} = 1,0954 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{18} \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} = 4,2426 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

Die zugehörigen *kritischen Drehzahlen* sind ($f = \omega/(2\pi)$):

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0,1743 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 0,6752 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

b) Kritische Winkelgeschwindigkeit ω_1

Wir setzen in das homogene lineare Gleichungssystem für ω den *kritischen* Wert

$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{m(\alpha + \beta)}}$ ein und erhalten aus Gleichung (I):

$$(\alpha m \omega_1^2 - 1)y_1 + \beta m \omega_1^2 y_2 = \left(\frac{\alpha m}{m(\alpha + \beta)} - 1 \right) y_1 + \frac{\beta m}{m(\alpha + \beta)} y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - 1 \right) y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 = \\
 &= \frac{(\alpha - \alpha - \beta) y_1 + \beta y_2}{\alpha + \beta} = \frac{-\beta y_1 + \beta y_2}{\alpha + \beta} = \\
 &= \frac{\beta(-y_1 + y_2)}{\alpha + \beta} = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\beta(-y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (\text{da } \beta \neq 0) \quad -y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Gleichung (II) führt zum *selben* Ergebnis. Bei der *kritischen Winkelgeschwindigkeit* ω_1 erfahren die Scheiben somit Auslenkungen *gleicher* Größe und Richtung (Bild VII-9 zeigt eine *Momentanaufnahme*). Die *absolute* Größe der Auslenkung jedoch bleibt *unbestimmt*!

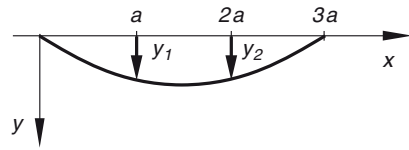


Bild VII-10

Kritische Winkelgeschwindigkeit ω_2

Die 1. Gleichung des homogenen linearen Gleichungssystems liefert für den *kritischen* Wert $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{m(\alpha - \beta)}}$ die folgende Beziehung zwischen den Auslenkungen y_1 und y_2 der beiden Zylinderscheiben⁵⁾:

$$\begin{aligned} (\alpha m \omega_2^2 - 1) y_1 + \beta m \omega_2^2 y_2 &= \left(\frac{\alpha m}{m(\alpha - \beta)} - 1 \right) y_1 + \frac{\beta m}{m(\alpha - \beta)} y_2 = 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - 1 \right) y_1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} y_2 &= \frac{\alpha - (\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} y_2 = \\ &= \frac{(\alpha - \alpha + \beta) y_1 + \beta y_2}{\alpha - \beta} = \frac{\beta y_1 + \beta y_2}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\beta (y_1 + y_2)}{\alpha - \beta} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta (y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (\text{da } \beta \neq 0) \quad y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -y_1$$

Wir *folgern*: Bei der *größeren* der beiden *kritischen* Winkelgeschwindigkeiten erfahren die beiden Scheiben *entgegengesetzt* gleich große Auslenkungen, deren *absolute* Größe jedoch ebenfalls *unbestimmt* bleibt (Bild VII-10 zeigt eine *Momentanaufnahme*).

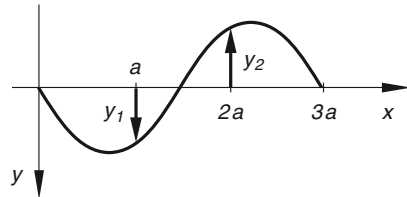


Bild VII-9

Beispiel 9: Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke

Homogenes lineares Gleichungssystem, Determinanten

Die in Bild VII-11 dargestellte *Wheatstonesche Brückenschaltung* enthält drei *feste* ohmsche Widerstände $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$ und $R_3 = 5 \Omega$ sowie einen *variablen* Widerstand R_x . Wie muss dieser Widerstand eingestellt werden, damit die „Brücke“ *B–D stromlos* wird?

⁵⁾ Die 2. Gleichung führt zu *derselben* Aussage.

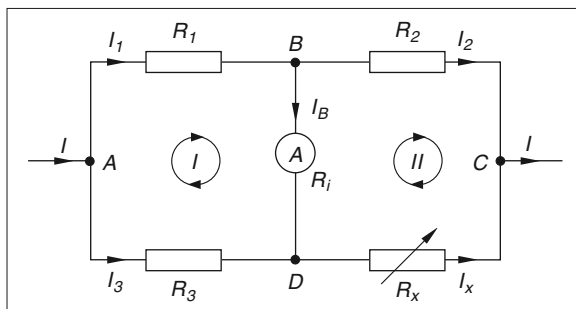


Bild VII-11

Lösungshinweis: Stellen Sie zunächst die *Maschengleichungen* [A32] der beiden in Bild VII-11 näher gekennzeichneten Maschen auf. Das in die Brücke geschaltete *Amperemeter* dient lediglich als *Nullindikator*, die Größe des Innenwiderstandes R_i dieses Messinstrumentes ist dabei für die Lösung dieser Aufgabe *ohne* Bedeutung.

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.4.2

Physikalische Grundlagen: A32

Lösung:

Wir nehmen zunächst an, dass die Brücke $B-D$ vom Strom I_B durchflossen wird. Durch Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die eingezeichneten Maschen I und II folgt dann:

$$(I) \quad R_1 I_1 + R_i I_B - R_3 I_3 = 0$$

$$(II) \quad R_2 I_2 - R_x I_x - R_i I_B = 0$$

Der *variable* Widerstand R_x wird nun so eingestellt, dass die Brücke *stromlos* wird. Dann aber ist $I_B = 0$ und somit $I_2 = I_1$ und $I_x = I_3$. Die Maschengleichungen gehen dann über in

$$\begin{aligned} (I) \quad R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\ (II) \quad R_2 I_1 - R_x I_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 & -R_3 \\ R_2 & -R_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses *homogene lineare Gleichungssystem* mit zwei Gleichungen und den beiden Unbekannten I_1 und I_3 ist nur dann *nichttrivial* lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante $D = \det \mathbf{A}$ *verschwindet*⁶⁾. Aus dieser Bedingung erhalten wir die gewünschte Beziehung (auch *Abgleichbedingung* genannt):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} R_1 & -R_3 \\ R_2 & -R_x \end{vmatrix} = -R_1 R_x + R_2 R_3 = 0 \Rightarrow$$

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{20 \, \Omega \cdot 5 \, \Omega}{10 \, \Omega} = 10 \, \Omega$$

⁶⁾ Der *triviale* Fall $I_1 = I_3 = 0$ ist physikalisch *ohne* Bedeutung.

Beispiel 10: Torsionsschwingungen einer Welle

Dreireihige Determinante

Bild VII-12 zeigt eine *elastische Welle* mit konstantem Durchmesser, die in *symmetrischer* Anordnung drei *starre Zylinderscheiben* vom *gleichen* Massenträgheitsmoment $J_1 = J_2 = J_3 = J$ trägt. Werden die Scheiben gegeneinander *verdreht*, so treten infolge der elastischen Rückstellmomente *Torsionsschwingungen* um die Wellenachse auf.

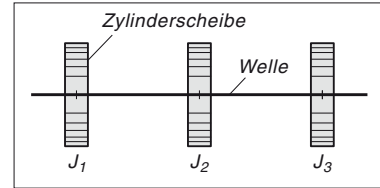


Bild VII-12

Die *Kreisfrequenzen* ω dieser *Eigenschwingungen* (auch *Eigenkreisfrequenzen* genannt) lassen sich dabei aus der folgenden Determinantengleichung berechnen:

$$D = \begin{vmatrix} (-\omega^2 J + c) & -c & 0 \\ -c & (-\omega^2 J + 2c) & -c \\ 0 & -c & (-\omega^2 J + c) \end{vmatrix} = 0$$

c : Federkonstante des Rückstellmomentes; Welle *nahezu masselos*

Wie lauten diese *Eigenkreisfrequenzen*?

Lehrbuch: Bd. 2, I.3.3

Lösung:

Zunächst berechnen wir die *3-reihige Determinante* nach der *Regel von Sarrus*:

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 J + c) & -c & 0 \\ -c & (-\omega^2 J + 2c) & -c \\ 0 & -c & (-\omega^2 J + c) \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Diagonale 1} \\ \text{Diagonale 2} \\ \text{Diagonale 3} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} D &= (-\omega^2 J + c)^2 (-\omega^2 J + 2c) + 0 + 0 - \\ &\quad - [0 + c^2 (-\omega^2 J + c) + c^2 (-\omega^2 J + c)] = \\ &= (-\omega^2 J + c)^2 (-\omega^2 J + 2c) - 2c^2 (-\omega^2 J + c) = \\ &= (-\omega^2 J + c) [(-\omega^2 J + c) (-\omega^2 J + 2c) - 2c^2] = \\ &= (-\omega^2 J + c) [\omega^4 J^2 - 2c\omega^2 J - c\omega^2 J + 2c^2 - 2c^2] = \\ &= (-\omega^2 J + c) (\omega^4 J^2 - 3c\omega^2 J) = (-\omega^2 J + c) (\omega^2 J - 3c) \omega^2 J \end{aligned}$$

Die gesuchten *Eigenkreisfrequenzen* genügen somit der Gleichung 6. Grades

$$(-\omega^2 J + c)(\omega^2 J - 3c)\omega^2 J = 0$$

Aus *physikalischen* Gründen ist $\omega > 0$, sodass diese Gleichung nur erfüllt ist, wenn entweder der *erste* Faktor oder der *zweite* Faktor oder beide Faktoren verschwinden. Wir erhalten daher zwei Gleichungen mit insgesamt *zwei* Lösungen. Sie lauten:

$$-\omega^2 J + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{J}}$$

$$\omega^2 J - 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{J}}$$

Das System besitzt somit genau *zwei* Eigenschwingungen mit den *Kreisfrequenzen* $\omega_1 = \sqrt{c/J}$ und $\omega_2 = \sqrt{3c/J}$.

Beispiel 11: Verzweigter Stromkreis

Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel

Der in Bild VII-13 skizzierte *verzweigte Stromkreis* mit den ohmschen Widerständen R_1 , R_2 und R_3 wird durch eine Gleichspannungsquelle mit der Quellenspannung U_q gespeist.

Bestimmen Sie die drei *Zweigströme* I_1 , I_2 und I_3 mit Hilfe der *Cramerschen Regel*.

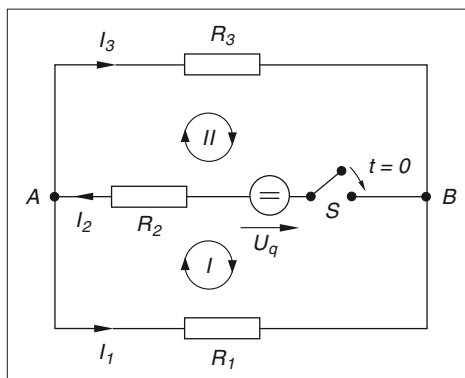


Bild VII-13

Lösungshinweis: Durch Anwendung der *Knotenpunktregel* [A50] und der *Maschenregel* [A32] erhalten Sie ein *lineares Gleichungssystem* für die drei unbekannten *Zweigströme* I_1 , I_2 und I_3 .

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.4.3

Physikalische Grundlagen: A32, A50

Lösung:

Durch Anwendung der *Knotenpunktregel* [A50] auf den Knotenpunkt A und der *Maschenregel* [A32] auf die eingezeichneten Maschen I und II erhalten wir das folgende *inhomogene lineare Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten I_1 , I_2 und I_3 :

$$(A) \quad -I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$(I) \quad -R_1 I_1 - R_2 I_2 + U_q = 0$$

$$(II) \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_q = 0$$

Es lautet in der *Matrizenform*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_q \\ U_q \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A}: \text{Koeffizientenmatrix})$$

Wir berechnen zunächst die *Koeffizientendeterminante* $D = \det \mathbf{A}$ mit Hilfe der *Regel von Sarrus*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -R_1 & -R_2 & 0 & -R_1 & -R_2 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$D = R_2 R_3 + 0 + R_1 R_2 - (0 + 0 - R_1 R_3) = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$$

Analog werden die nach der *Cramerschen Regel* benötigten *Hilfsdeterminanten* D_1 , D_2 und D_3 bestimmt:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -U_q & -R_2 & 0 \\ U_q & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 U_q - R_2 U_q + R_3 U_q = R_3 U_q$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -R_1 & -U_q & 0 \\ 0 & U_q & R_3 \end{vmatrix} = R_3 U_q + R_1 U_q = (R_1 + R_3) U_q$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -R_1 & -R_2 & -U_q \\ 0 & R_2 & U_q \end{vmatrix} = R_2 U_q - R_2 U_q + R_1 U_q = R_1 U_q$$

Die Berechnungsformeln für die drei *Zweigströme* lauten daher der Reihe nach wie folgt:

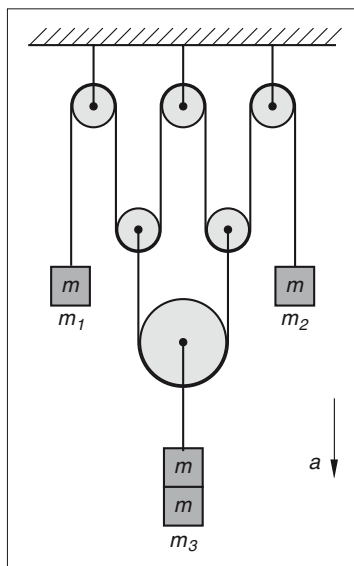
$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{R_3 U_q}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{(R_1 + R_3) U_q}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{R_1 U_q}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Beispiel 12: Beschleunigte Massen in einem Rollensystem***Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel***

Das in Bild VII-14 skizzierte System enthält in *symmetrischer* Anordnung drei Massen $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = 2m$, die durch ein über Rollen führendes Seil miteinander verbunden sind. Bestimmen Sie die *Beschleunigungen* a_1 , a_2 und a_3 dieser Massen sowie die im Seil wirkende konstante *Seilkraft* F_S unter Verwendung der *Cramerschen Regel*.

Lösungshinweis: Wenden Sie das *Newtonsche Grundgesetz* [A27] auf die einzelnen Massen an. Seil und Rollen werden dabei als *masselos* angenommen, Reibungskräfte *vernachlässigt*.

**Bild VII-14**

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.4.3

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

Aus *Symmetriegründen* erfahren die Massen m_1 und m_2 die *gleiche* Beschleunigung. Somit ist $a_1 = a_2$. An *jeder* Stelle des Seils wirkt die *gleiche* Seilkraft F_S . Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] folgt dann für die einzelnen Massen:

Masse $m_1 = m$ bzw. Masse $m_2 = m$

Die *Seilkraft* F_S wirkt der *Schwerkraft* $G_1 = m_1 g = m g$ *entgegen*. Daher gilt

$$m a_1 = m g - F_S \quad \text{oder} \quad m a_1 + F_S = m g$$

Masse $m_3 = 2m$

Der *Schwerkraft* $G_3 = m_3 g = 2m g$ wirkt insgesamt die von *vier* Seilstücken erzeugte Kraft $4 F_S$ *entgegen* (Beitrag eines jeden Seilstücks: F_S). Somit ist

$$2m a_3 = 2m g - 4 F_S \quad \text{oder} \quad m a_3 + 2 F_S = m g$$

Damit haben wir *zwei* Gleichungen für die *drei* Unbekannten a_1 , a_3 und F_S . Die noch fehlende dritte Gleichung erhalten wir durch die folgende Überlegung: Bewegt sich die *mittlere* Masse $m_3 = 2m$ um *eine* Längeneinheit nach *oben*, so *senken* sich in der gleichen Zeit (bei undehnbarem und straffem Seil) die beiden *äußeren* Massen $m_1 = m_2 = m$ um jeweils

zwei Längeneinheiten. Diese Überlegung gilt für *jede* Phase der Bewegung. Daher muss die Beschleunigung der beiden *äußeren* Massen *doppelt* so groß sein wie die Beschleunigung der *mittleren* Masse. Sie erfolgt jedoch in *entgegengesetzter* Richtung. Somit ist

$$a_1 = a_2 = -2a_3 \quad \text{und somit} \quad a_1 + 2a_3 = 0$$

Die Beschleunigungen a_1 und a_3 sowie die Seilkraft F_S genügen daher dem *inhomogenen linearen Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rcl} m a_1 & + & F_S = m g \\ & m a_3 + 2 F_S & = m g \\ a_1 + 2 a_3 & & = 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix } \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ F_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m g \\ m g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen dieses System nach der *Cramerschen Regel*. Die dabei benötigte *Koeffizientendeterminante* $D = \det \mathbf{A}$ sowie die drei *Hilfsdeterminanten* D_1 , D_2 und D_3 werden nach der *Regel von Sarrus* berechnet. Wir erhalten:

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 0 & m \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 0 + 0 + 0 - (m + 4m + 0) = -5m$$

Analog werden die drei *Hilfsdeterminanten* berechnet:

$$D_1 = \begin{vmatrix} m g & 0 & 1 \\ m g & m & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 m g - 4 m g = -2 m g$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m & m g & 1 \\ 0 & m g & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 m g - m g = m g$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} m & 0 & m g \\ 0 & m & m g \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(m^2 g + 2 m^2 g) = -3 m^2 g$$

Nach der *Cramerschen Regel* ist dann

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2 m g}{-5 m} = 0,4 g; \quad a_3 = \frac{D_2}{D} = \frac{m g}{-5 m} = -0,2 g;$$

$$F_S = \frac{D_3}{D} = \frac{-3 m^2 g}{-5 m} = 0,6 m g$$

Die drei Massen erfahren somit der Reihe nach die *Beschleunigungen* $a_1 = a_2 = 0,4 g$ (jeweils nach *unten*) und $a_3 = 0,2 g$ (nach *oben*). Die *Seilkraft* beträgt $F_S = 0,6 m g$, das sind 60 % des Gewichtes der Masse $m_1 = m$ bzw. $m_2 = m$.

Beispiel 13: Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk

Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel

Das in Bild VII-15 skizzierte *elektrische Netzwerk* enthält neben den beiden ohmschen Widerständen $R_1 = 6 \Omega$ und $R_2 = 4 \Omega$ eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_q = 10 \text{ V}$ sowie eine Stromquelle, die den *konstanten* Quellenstrom $I_q = 2 \text{ A}$ liefert. Berechnen Sie die beiden *Zweigströme* I_1 und I_2 unter Verwendung von *Determinanten* (Cramersche Regel).

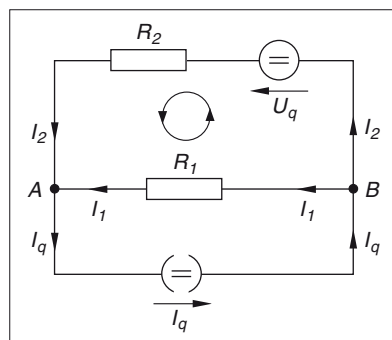


Bild VII-15

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.4.3

Physikalische Grundlagen: A32, A50

Lösung:

Die beiden *Knotenpunkte* A und B liefern genau *eine* (unabhängige) Gleichung. Wir wenden die *Knotenpunktregel* [A50] auf den Knotenpunkt A an:

$$I_1 + I_2 - I_q = 0$$

Die *zweite* benötigte Gleichung erhalten wir durch Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die im Bild eingezeichnete Masche:

$$-R_1 I_1 + U_q + R_2 I_2 = 0$$

Das *inhomogene lineare Gleichungssystem* mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

$$\begin{array}{rcl} I_1 + I_2 & = & I_q \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 & = & -U_q \end{array} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ -U_q \end{pmatrix}$$

lösen wir mit Hilfe der *Cramerschen Regel*. Die *Koeffizientendeterminante* besitzt den Wert

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 \end{vmatrix} = R_2 + R_1 = R_1 + R_2 = 6 \Omega + 4 \Omega = 10 \Omega$$

Die beiden *Hilfsdeterminanten* D_1 und D_2 werden analog berechnet:

$$D_1 = \begin{vmatrix} I_q & 1 \\ -U_q & R_2 \end{vmatrix} = R_2 I_q + U_q = 4 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} + 10 \, \text{V} = 18 \, \text{V}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & I_q \\ -R_1 & -U_q \end{vmatrix} = -U_q + R_1 I_q = -10 \, \text{V} + 6 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} = 2 \, \text{V}$$

Damit besitzen die *Zweigströme* I_1 und I_2 die folgenden Werte:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{18 \, \text{V}}{10 \, \Omega} = 1,8 \, \text{A}, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2 \, \text{V}}{10 \, \Omega} = 0,2 \, \text{A}$$

Beispiel 14: Netzwerkanalyse nach dem Maschenstromverfahren
Inhomogenes lineares Gleichungssystem,
Gaußscher Algorithmus

Das in Bild VII-16 dargestellte *elektrische Netzwerk* enthält sechs ohmsche Widerstände $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \, \Omega$, $R_4 = 15 \, \Omega$, $R_5 = 5 \, \Omega$ und $R_6 = 25 \, \Omega$ sowie drei Gleichspannungsquellen mit den Quellenspannungen $U_{q1} = 65 \, \text{V}$, $U_{q2} = 95 \, \text{V}$ und $U_{q3} = 130 \, \text{V}$. Berechnen Sie die *Zweigströme* I_1 bis I_6 nach dem *Maschenstromverfahren* [A51] unter Verwendung des *Gaußschen Algorithmus*.

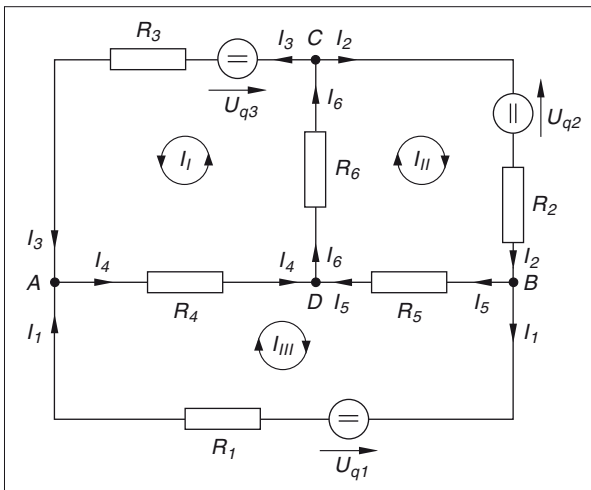


Bild VII-16

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe schrittweise wie folgt [A51]:

(1) Einführung der Maschenströme

Das Netzwerk enthält $k = 4$ Knotenpunkte und $z = 6$ Zweige. Somit gibt es $m = z - (k - 1) = 6 - 3 = 3$ unabhängige Maschen und ebenso viele unabhängige Maschenströme. Wir wählen die in Bild VII-16 eingezeichneten Maschen I, II und III und ordnen ihnen der Reihe nach die fiktiven Maschenströme I_I , I_{II} und I_{III} zu.

(2) Aufstellung der Maschengleichungen nach der Maschenregel [A32]

Masche I (ADCA)

$$(R_3 + R_4 + R_6) I_I + R_4 I_{III} + R_6 I_{II} - U_{q3} = 0$$

Masche II (BDCB)

$$(R_2 + R_5 + R_6) I_{II} - R_5 I_{III} + R_6 I_I - U_{q2} = 0$$

Masche III (ADBA)

$$(R_1 + R_4 + R_5) I_{III} - R_5 I_{II} + R_4 I_I - U_{q1} = 0$$

Die drei Maschenströme genügen somit dem folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrrrcl} (R_3 + R_4 + R_6) I_I & + & R_6 I_{II} & + & R_4 I_{III} & = & U_{q3} \\ R_6 I_I & + & (R_2 + R_5 + R_6) I_{II} & - & R_5 I_{III} & = & U_{q2} \\ R_4 I_I & - & R_5 I_{II} & + & (R_1 + R_4 + R_5) I_{III} & = & U_{q1} \end{array}$$

(3) Berechnung der Maschenströme nach dem Gaußschen Algorithmus

Nach Einsetzen der Werte für die Widerstände und Quellenspannungen erhalten wir das Gleichungssystem (ohne Einheiten)

$$\left. \begin{array}{l} (10 + 15 + 25) I_I + 25 I_{II} + 15 I_{III} = 130 \\ 25 I_I + (10 + 5 + 25) I_{II} - 5 I_{III} = 95 \\ 15 I_I - 5 I_{II} + (10 + 15 + 5) I_{III} = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 50 I_I + 25 I_{II} + 15 I_{III} = 130 \\ 25 I_I + 40 I_{II} - 5 I_{III} = 95 \\ 15 I_I - 5 I_{II} + 30 I_{III} = 65 \end{array}$$

oder (nach Kürzen durch den gemeinsamen Faktor 5)

$$\left. \begin{array}{l} 10 I_I + 5 I_{II} + 3 I_{III} = 26 \\ 5 I_I + 8 I_{II} - I_{III} = 19 \\ 3 I_I - I_{II} + 6 I_{III} = 13 \end{array} \right\} \text{ alle Ströme in der Einheit Ampere}$$

Wir verwenden beim Lösen das *elementare Rechengeschema* aus Band 1, Abschnitt I.5.2.

	I_I	I_{II}	I_{III}	c_i	Zeilensumme
$3 \cdot E_I$	10	5	3	26	44
	15	24	-3	57	93
E_I	5	8	-1	19	31
$6 \cdot E_I$	3	-1	6	13	21
	30	48	-6	114	186
E_2	25	29		83	137
$-1,32 \cdot E_2$	33	47		127	207
	-33	-38,28		-109,56	-180,84
		8,72		17,44	26,16

Das *gestaffelte* Gleichungssystem lautet somit (von unten nach oben gelöst):

$$\begin{array}{rclcl}
 5I_I + 8I_{II} - I_{III} & = & 19 & \Rightarrow & 5 + 16 - I_{III} = 19 & \Rightarrow & I_{III} = 2 \\
 25I_I + 29I_{II} & = & 83 & \Rightarrow & 25I_I + 58 = 83 & \Rightarrow & I_I = 1 \\
 8,72I_{II} & = & 17,44 & \Rightarrow & & \Rightarrow & I_{II} = 2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \uparrow
 \end{array}$$

Die (fiktiven) *Maschenströme* haben damit folgende Werte:

$$I_I = 1 \text{ A}; \quad I_{II} = 2 \text{ A}; \quad I_{III} = 2 \text{ A}$$

(4) Berechnung der Zweigströme

Die (realen) *Zweigströme* I_1 bis I_6 entstehen durch *Überlagerung* gewisser *Maschenströme*. Aus Bild VII-16 folgt unmittelbar:

$$\begin{array}{l|l}
 I_1 = I_{III} = 2 \text{ A} & I_4 = I_I + I_{III} = 1 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3 \text{ A} \\
 I_2 = I_{II} = 2 \text{ A} & I_5 = I_{II} - I_{III} = 2 \text{ A} - 2 \text{ A} = 0 \text{ A} \\
 I_3 = I_I = 1 \text{ A} & I_6 = I_I + I_{II} = 1 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3 \text{ A}
 \end{array}$$

Der Widerstand R_5 ist somit *stromlos*.

Beispiel 15: Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk

*Inhomogenes lineares Gleichungssystem,
Gaußscher Algorithmus (Matrizenform)*

Bild VII-17 zeigt ein aus drei Zweigen bestehendes elektrisches Netzwerk mit vier ohmschen Widerständen $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$ und $R_4 = 5\ \Omega$ sowie den beiden Spannungsquellen mit den Quellenspannungen $U_{q1} = 10\text{ V}$ und $U_{q2} = 20\text{ V}$. Berechnen Sie die drei Zweigströme I_1 , I_2 und I_3 mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in Matrizenform.

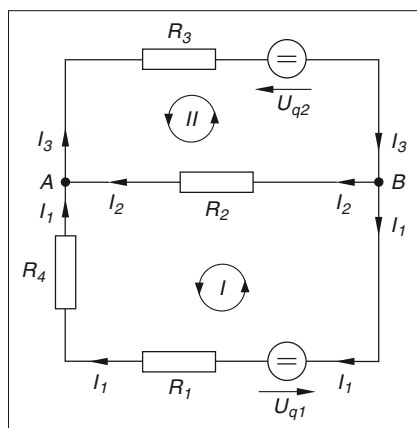


Bild VII-17

Lösungshinweis: Die Anwendung der *Knotenpunktregel* [A50] bzw. der *Maschenregel* [A32] auf die in Bild VII-17 gekennzeichneten Knotenpunkte bzw. Maschen führt zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Zweigströme.

Lehrbuch: Bd. 2, I.5.2

Physikalische Grundlagen: A32, A50

Lösung:

Die beiden *Knotenpunkte* A und B liefern durch Anwendung der *Knotenpunktregel* [A50] genau eine unabhängige Gleichung:

$$(A) \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Aus den beiden *Maschen* I und II erhalten wir nach der *Maschenregel* [A32] unter Berücksichtigung des eingezeichneten Umlaufsinn *zwei* weitere unabhängige Gleichungen:

$$(I) \quad -R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_1 + U_{q1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(R_1 + R_4) I_1 + R_2 I_2 + U_{q1} = 0$$

$$(II) \quad -R_2 I_2 - R_3 I_3 + U_{q2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{q2} = 0$$

Die drei *Zweigströme* genügen somit dem *inhomogenen linearen Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten I_1 , I_2 und I_3

$$\begin{array}{rcl} I_1 + & I_2 - & I_3 = 0 \\ -(R_1 + R_4) I_1 + R_2 I_2 & & = -U_{q1} \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 & = & U_{q2} \end{array}$$

oder (in der *Matrizenform*)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -(R_1 + R_4) & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -U_{q1} \\ U_{q2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}$$

Mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* lässt sich die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{R} | \mathbf{U})$ in die *Trapezform* bringen (*Gaußscher Algorithmus*). Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}$ geht dabei in das *gestaffelte* System $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}^*$ über, das dann sukzessiv *von unten nach oben* gelöst werden kann.

Zeilenumformungen in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{R} | \mathbf{U})$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte (ohne Einheiten) folgt (Z_i : i -te Zeile):

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} | \mathbf{U}) &= \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \right) + 6Z_1 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} \right) \cdot (-4) \Rightarrow \\ &\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -80 \end{pmatrix} \right) + Z_2 \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^*} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -90 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^*} \right) = (\mathbf{R}^* | \mathbf{U}^*) \end{aligned}$$

Das *gestaffelte* System lautet somit

$$\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}^* \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -90 \end{pmatrix}$$

Wir lösen es sukzessiv *von unten nach oben*:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \Rightarrow I_1 + 2,5 - 5 = 0 \Rightarrow I_1 = 2,5 \\ 8I_2 - 6I_3 &= -10 \Rightarrow 8I_2 - 30 = -10 \Rightarrow I_2 = 2,5 \\ -18I_3 &= -90 \Rightarrow I_3 = 5 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$$

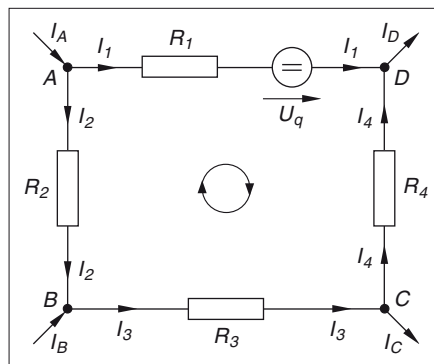
Die drei *Zweigströme* besitzen damit folgende Werte:

$$I_1 = 2,5 \text{ A}; \quad I_2 = 2,5 \text{ A}; \quad I_3 = 5 \text{ A}$$

Beispiel 16: Berechnung der Ströme in einer Netzmasche
*Inhomogenes lineares Gleichungssystem,
 Gaußscher Algorithmus*

Bild VII-18 zeigt eine *viereckige Netzmasche* mit den ohmschen Widerständen $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 2 \, \Omega$, $R_3 = 5 \, \Omega$, $R_4 = 2 \, \Omega$ und der Quellenspannung $U_q = 19 \, \text{V}$. Die in den Knotenpunkten A und B zufließenden Ströme betragen $I_A = 2 \, \text{A}$ und $I_B = 1 \, \text{A}$, der im Knotenpunkt C abfließende Strom $I_C = 1 \, \text{A}$. Berechnen Sie den Knotenstrom I_D sowie die vier Zweigströme I_1 bis I_4 mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Bild VII-18



Lösungshinweis: Die benötigten Beziehungen zwischen den Strömen erhalten Sie durch Anwendung der *Knotenpunktregel* [A50] bzw. der *Maschenregel* [A32].

Lehrbuch: Bd. 1, I.5.2 und Bd. 2, I.5.2

Physikalische Grundlagen: A32, A50

Lösung:

Für die Gesamtschaltung (Netzmasche) muss die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein (der Knotenstrom I_D wird als abfließend angenommen):

$$I_A + I_B = I_C + I_D \quad \text{oder} \quad I_D = I_A + I_B - I_C$$

Somit ist mit den vorgegebenen Werten

$$I_D = I_A + I_B - I_C = 2 \, \text{A} + 1 \, \text{A} - 1 \, \text{A} = 2 \, \text{A}$$

Die vier Knotenpunkte liefern drei unabhängige Knotenpunktgleichungen. Wir wählen die Knotenpunkte A , B und C . Nach der Knotenpunktregel [A50] gilt dann

$$(A) \quad -I_1 - I_2 + I_A = 0$$

$$(B) \quad I_2 - I_3 + I_B = 0$$

$$(C) \quad I_3 - I_4 - I_C = 0$$

Die vierte benötigte Gleichung erhalten wir durch Anwendung der Maschenregel [A32] auf die Gesamtmasche ABCDA:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 + U_q = 0$$

Die *Zweigströme* genügen somit dem folgenden *inhomogenen linearen Gleichungssystem* mit vier Gleichungen und den vier Unbekannten I_1, I_2, I_3 und I_4 :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_A \\ I_2 - I_3 &= -I_B \\ I_3 - I_4 &= I_C \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 &= U_q \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte ergibt (alle Ströme in der Einheit Ampere):

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 2 \\ I_2 - I_3 &= -1 \\ I_3 - I_4 &= 1 \\ -I_1 + 2I_2 + 5I_3 + 2I_4 &= 19 \end{aligned}$$

Wir lösen dieses System mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* in *elementarer Form* (siehe Band 1, Abschnitt I.5.2).

	I_1	I_2	I_3	I_4	c_i	Zeilensumme
E_1	1	1	0	0	2	4
	0	1	-1	0	-1	-1
	0	0	1	-1	1	1
	-1	2	5	2	19	27
$1 \cdot E_1$	1	1	0	0	2	4
E_2		1	-1	0	-1	-1
		0	1	-1	1	1
		3	5	2	21	31
$-3 \cdot E_2$		-3	3	0	3	3
E_3			1	-1	1	1
			8	2	24	34
$-8 \cdot E_3$			-8	8	-8	-8
				10	16	26

Das *gestaffelte* System besteht aus den Gleichungen E_1, E_2 und E_3 sowie der letzten Gleichung und lautet somit

$$\begin{array}{rclcl}
 I_1 + I_2 & = & 2 & \Rightarrow & I_1 + 1,6 = 2 & \Rightarrow & I_1 = 0,4 \\
 I_2 - I_3 & = & -1 & \Rightarrow & I_2 - 2,6 = -1 & \Rightarrow & I_2 = 1,6 \\
 I_3 - I_4 & = & 1 & \Rightarrow & I_3 - 1,6 = 1 & \Rightarrow & I_3 = 2,6 \\
 10I_4 & = & 16 & & & \Rightarrow & I_4 = 1,6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \uparrow \\
 \uparrow \\
 \uparrow
 \end{array}$$

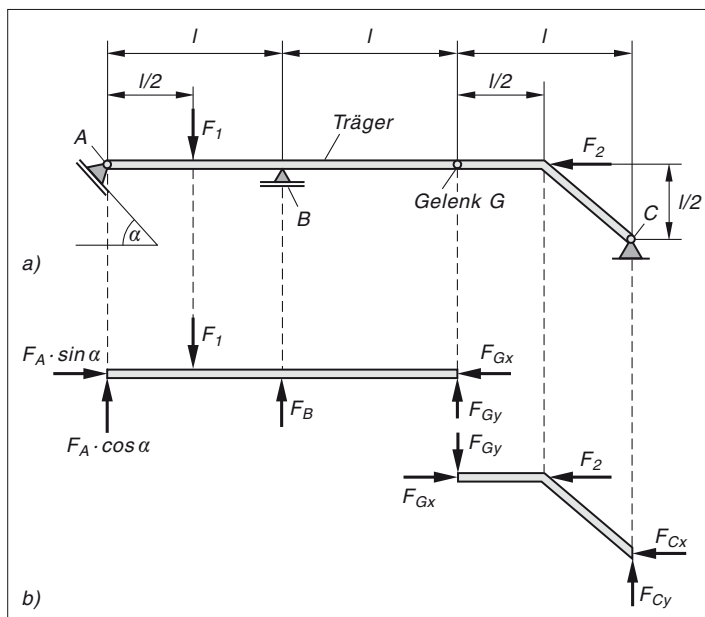
Es lässt sich schrittweise von *unten nach oben* lösen. Die *Zweigströme* I_1 bis I_4 besitzen daher die folgenden Werte:

$$I_1 = 0,4 \text{ A}; \quad I_2 = 1,6 \text{ A}; \quad I_3 = 2,6 \text{ A}; \quad I_4 = 1,6 \text{ A}$$

Beispiel 17: Modifizierter Gerber-Träger

*Inhomogenes lineares Gleichungssystem,
Gaußscher Algorithmus*

Der in Bild VII-19 skizzierte *modifizierte Gerber-Träger* wird in der angegebenen Weise durch zwei Einzelkräfte F_1 und F_2 belastet. Bestimmen Sie die *Auflagerkräfte* F_A , F_B und F_C sowie die im Gelenk G auftretende *Gelenkkraft* F_G aus den *statischen Gleichgewichtsbedingungen* [A1].



$$l = 4 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$F_1 = 50 \text{ kN}$$

$$F_2 = 20 \text{ kN}$$

Bild VII-19

Lösung:

Zunächst zerlegen wir den *Gerber-Träger* in der aus Bild VII-19 ersichtlichen Weise durch einen *Schnitt* im Gelenk *G* in zwei Teile und wenden dann auf *jedes* der beiden Teilstücke die *statischen Gleichgewichtsbedingungen* [A1] an. Dies führt, wie wir noch sehen werden, zu *sechs* linearen Gleichungen mit den *sechs* unbekannten *Kräften* bzw. *Kraftkomponenten* F_A , F_B , F_{Gx} , F_{Gy} , F_{Cx} und F_{Cy} .

Linkes Teilstück (Teilbild b))

Die Summe der *Kraftkomponenten* in *x*- bzw. *y*-Richtung *verschwindet* ebenso wie die Summe aller *Momente* [A7] bezüglich des (ausgewählten) Lagerpunktes *A* [A1]:

$$\sum F_x = 0: F_A \cdot \sin \alpha - F_{Gx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: F_A \cdot \cos \alpha + F_B + F_{Gy} - F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{(A)} = 0: F_B \cdot l + F_{Gy} \cdot 2l - F_1 \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad (3)$$

Rechtes Teilstück (Teilbild b))

Wiederum gilt: Die Summe der *Kraftkomponenten* in *x*- bzw. *y*-Richtung *verschwindet* ebenso wie die Summe aller *Momente* [A7] bezüglich des (ausgewählten) Gelenkpunktes *G* [A1]:

$$\sum F_x = 0: F_{Gx} - F_{Cx} - F_2 = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0: -F_{Gy} + F_{Cy} = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{(G)} = 0: -F_{Cx} \cdot \frac{l}{2} + F_{Cy} \cdot l = 0 \quad (6)$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte (ohne Einheiten) erhalten wir das folgende *inhomogene lineare Gleichungssystem* (alle Kräfte in der Einheit kN):

	F_A	F_B	F_{Gx}	F_{Gy}	F_{Cx}	F_{Cy}	
(1)	0,7071		-1				$\cdot \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_{Gx} \\ F_{Gy} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
(2)	0,7071	1		1			
(3)		4		8			
(4)			1		-1		
(5)				-1		1	
(6)					-2	4	

Aus den Gleichungen (1), (5) und (6) erhalten wir der Reihe nach

$$(1) \quad 0,7071 F_A - F_{Gx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Gx} = 0,7071 F_A$$

$$(5) \quad -F_{Gy} + F_{Cy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Gy} = F_{Cy}$$

$$(6) \quad -2 F_{Cx} + 4 F_{Cy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Cx} = 2 F_{Cy}$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen gewinnen wir aus den verbliebenen Gleichungen (2), (3) und (4) das folgende *inhomogene lineare Gleichungssystem* mit den Unbekannten F_A , F_B und F_{Cy} :

$$(2) \quad 0,7071 F_A + F_B + F_{Cy} = 50$$

$$(3) \quad 4 F_B + 8 F_{Cy} = 100$$

$$(4) \quad 0,7071 F_A - 2 F_{Cy} = 20$$

Wir lösen dieses System nach dem *Gaußschen Algorithmus* in *elementarer* Form (siehe Band 1, Abschnitt I.5.2).

	F_A	F_B	F_{Cy}	c_i	Zeilensumme
E_1	0,7071	1	1	50	52,7071
		4	8	100	112
$-1 \cdot E_1$	0,7071 -0,7071	-1	-2 -1	20 -50	18,7071 -52,7071
$4 \cdot E_2$		4 -4	8 -12	100 -120	112 -136
E_2		-1	-3	-30	-34
			-4	-20	-24

Das *gestaffelte* System (bestehend aus den Gleichungen E_1, E_2 und der letzten Gleichung)

$$\begin{aligned}
 0,7071 F_A + F_B + F_{Cy} &= 50 \Rightarrow 0,7071 F_A + 15 + 5 = 50 \Rightarrow F_A = 42,4 \\
 -F_B - 3 F_{Cy} &= -30 \Rightarrow -F_B - 15 = -30 \Rightarrow F_B = 15 \\
 -4 F_{Cy} &= -20 \Rightarrow F_{Cy} = 5
 \end{aligned}
 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$$

lässt sich sukzessiv von *unten nach oben* lösen und besitzt die *Lösung* $F_A = 42,4$, $F_B = 15$ und $F_{Cy} = 5$ (in kN). Die gesuchten *Lager-* und *Gelenkkräfte* betragen somit

$$F_A = 42,4 \text{ kN}, \quad F_B = 15 \text{ kN}$$

$$F_{Cx} = 2 F_{Cy} = 2 \cdot 5 \text{ kN} = 10 \text{ kN}, \quad F_{Cy} = 5 \text{ kN},$$

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} \text{ kN} = 11,2 \text{ kN}$$

$$F_{Gx} = 0,7071 F_A = 0,7071 \cdot 42,4 \text{ kN} = 30 \text{ kN}, \quad F_{Gy} = F_{Cy} = 5 \text{ kN},$$

$$F_G = \sqrt{F_{Gx}^2 + F_{Gy}^2} = \sqrt{30^2 + 5^2} \text{ kN} = 30,4 \text{ kN}$$

Beispiel 18: Normalschwingungen eines diatomaren Moleküls
(Zwei-Teilchen-Schwinger)
2-dimensionales Eigenwertproblem

Als Modell für ein *diatomares* Molekül vom Typ X_2 wie z. B. H_2 oder O_2 dient ein schwingungsfähiges System aus zwei identischen Massenpunkten $m_1 = m_2 = m$, die durch eine elastische Feder mit der Federkonstanten c *gekoppelt* sind (Bild VII-20).

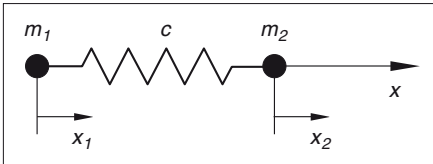


Bild VII-20

Von besonderer Bedeutung sind dabei die sog. *Normalschwingungen*, bei der beide Massen (Bindungspartner) harmonisch mit der gleichen Kreisfrequenz ω längs der Systemachse (x -Achse) schwingen. Die Koordinaten x_1 und x_2 beschreiben die augenblickliche Lage der Massen; sie sind periodische Funktionen der Zeit t mit Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ und genügen nach *Newton* [A27] dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$$m\ddot{x}_1 = -c(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1)$$

- Stellen Sie dieses System in der *Matrizenform* dar.
- Zeigen Sie, dass der Lösungsansatz $x_i = A_i \cdot e^{j\omega t}$ (A_i : Amplitude; $i = 1, 2$) auf ein *Eigenwertproblem* führt und bestimmen Sie die *Eigenwerte* und zugehörigen *Eigenvektoren*. Wie lässt sich das Ergebnis physikalische deuten?

Lehrbuch: Bd. 2, I.7.2

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

- Wir bringen zunächst die beiden Differentialgleichungen auf die folgende Form:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_0^2(x_1 - x_2) = -\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2(x_2 - x_1) = \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2\end{aligned}\quad (\omega_0^2 = c/m)$$

Vertauschen der beiden Seiten liefert dann:

$$\begin{aligned}-\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 &= \ddot{x}_1 \\ \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 &= \ddot{x}_2\end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem können wir auch in der *Matrizenform* darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{K} \mathbf{x} = \ddot{\mathbf{x}}$$

Der Vektor \mathbf{x} enthält die beiden Ortskoordinaten x_1 und x_2 , der Vektor $\ddot{\mathbf{x}}$ die zweiten Ableitungen dieser Koordinaten nach der Zeit, \mathbf{K} ist die Koeffizientenmatrix, in diesem Zusammenhang häufig auch als *Strukturmatrix* bezeichnet.

- b) Aus dem Lösungsansatz $x_i = A_i \cdot e^{j\omega t}$ folgt durch Differentiation nach der Zeit t mit Hilfe der Kettenregel:

$$\dot{x}_i = (j\omega) A_i \cdot e^{j\omega t}, \quad \ddot{x}_i = (j\omega)^2 A_i \cdot e^{j\omega t} = -\omega^2 \underbrace{A_i \cdot e^{j\omega t}}_{x_i} = -\omega^2 x_i$$

(mit $i = 1, 2$). Somit gilt $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}$ und

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\text{mit } \lambda = -\omega^2)$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich auch in der Form

$$\mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{E} \mathbf{x} = (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

darstellen (\mathbf{E} : 2-reihige Einheitsmatrix). Diese Matrizengleichung beschreibt ein *zweidimensionales Eigenwertproblem*. Die gesuchten Lösungen \mathbf{x} sind somit die *Eigenvektoren* der Strukturmatrix \mathbf{K} zum *Eigenwert* $\lambda = -\omega^2$. Bevor wir uns mit den Lösungen näher beschäftigen, können wir das Eigenwertproblem noch wie folgt vereinfachen. Mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot e^{j\omega t} \\ A_2 \cdot e^{j\omega t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} e^{j\omega t} = \mathbf{u} e^{j\omega t}$$

geht die Matrizengleichung $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ in eine entsprechende zeitunabhängige Gleichung für den Amplitudenvektor \mathbf{u} über:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{u} e^{j\omega t} = \mathbf{0} \mid : e^{j\omega t} \neq 0 \Rightarrow (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Der Vektor \mathbf{u} enthält nur die gesuchten Amplituden A_1 und A_2 der Normalschwingung, hängt aber im Gegensatz zum Vektor \mathbf{x} nicht mehr von der Zeit ab.

Berechnung der Eigenwerte

Die Eigenwerte sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung* $\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) = 0$:

$$\begin{vmatrix} (-\omega_0^2 - \lambda) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & (-\omega_0^2 - \lambda) \end{vmatrix} = (-\omega_0^2 - \lambda)^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow$$

$$(\omega_0^2 + \lambda)^2 = \omega_0^4 \Rightarrow \omega_0^2 + \lambda = \mp \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = -\omega_0^2 \mp \omega_0^2 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -2\omega_0^2, \quad \lambda_2 = 0$$

Damit ergeben sich folgende Kreisfrequenzen ($\lambda = -\omega^2$ mit $\omega > 0$) aus physikalischen Gründen:

$$\lambda_1 = -\omega_1^2 = -2\omega_0^2 \Rightarrow \omega_1^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$$

$$\lambda_2 = -\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0 \quad (\text{keine Schwingung})$$

Berechnung der Eigenvektoren

Die zugehörigen *Eigenvektoren* werden aus dem homogenen linearen Gleichungssystem $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ berechnet.

$$\lambda_1 = -2\omega_0^2 \quad (\mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{u} = (\mathbf{K} + 2\omega_0^2 \mathbf{E}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} (-\omega_0^2 + 2\omega_0^2) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & (-\omega_0^2 + 2\omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1$$

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = -2\omega_0^2$ gehörige Eigenvektor besitzt somit die folgenden *Komponenten*:

$$x_1 = A_1 \cdot e^{j\sqrt{2}\omega_0 t}, \quad x_2 = A_2 \cdot e^{j\sqrt{2}\omega_0 t} = -A_1 \cdot e^{j\sqrt{2}\omega_0 t} \Rightarrow x_2 = -x_1$$

Physikalische Deutung: Beide Massen (Bindungspartner) schwingen mit gleicher Amplitude in *Gegenphase* mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ (siehe Bild VII-21)



Bild VII-21 Normalschwingung eines diatomaren Moleküls in Gegenphase

$$\lambda_2 = 0 \quad (\mathbf{K} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 + A_2 \\ A_1 - A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = A_1$$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$ gehört somit der Eigenvektor mit folgenden *Komponenten*:

$$x_1 = A_1 \cdot e^{j0t} = A_1, \quad x_2 = A_2 \cdot e^{j0t} = A_1 \cdot e^{j0t} = A_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Physikalische Deutung: Dieser Eigenvektor beschreibt keine Schwingung, sondern eine (Translationsbewegung) des Systems längs der Systemachse (x -Achse).

Somit gibt es nur eine einzige Normalschwingung, bei der beide Massen (Bindungspartner) mit gleicher Amplitude in Gegenphase mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{2c/m}$ schwingen.

Anmerkung: Um die Schwingungsamplitude und die Translation zu bestimmen, benötigt man weitere Informationen über das schwingungsfähige System z. B. in Form von Anfangsbedingungen.

VIII Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Hinweis: Alle in den Lösungen angegebenen Integralnummern beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors.

Beispiel 1: Potential und elektrische Feldstärke im elektrostatischen Feld zweier Punktladungen
Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Gegeben sind zwei *entgegengesetzt* gleich große Punktladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$ im Abstand $2a$ ($Q > 0$).

- a) Bestimmen Sie das *elektrostatische Potential* φ sowie den *elektrischen Feldstärkevektor* $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ in einem beliebigen Punkt $P = (x; y)$ des *resultierenden* elektrischen Feldes (Bild VIII-1).
- b) Zeigen Sie: Die y -Achse liegt in einer sog. *Äquipotentialfläche* [A55].

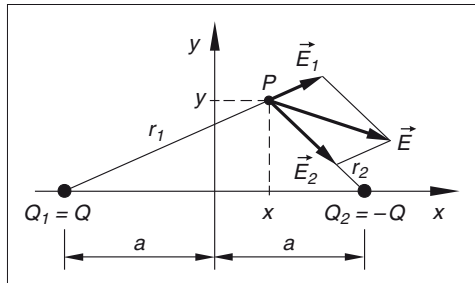


Bild VIII-1

Lösungshinweis: Gehen Sie von dem elektrostatischen Potential einer *Punktladung* aus [A56]. Das *resultierende* elektrische Feld entsteht dann durch *ungestörte Überlagerung* der beiden Einzelfelder. Das System befindet sich in *Luft* (Dielektrizitätskonstante $\varepsilon \approx 1$).

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.1

Physikalische Grundlagen: A55, A56, A57

Lösung:

- a) Eine Punktladung Q^* erzeugt im Abstand r das *Potential* [A56]

$$\varphi_{Q^*} = \frac{Q^*}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > 0$$

Das von den Punktladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$ im Punkt P erzeugte *Potential* beträgt somit:

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \varphi_{Q_1} + \varphi_{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Die Abstände r_1 und r_2 lassen sich nach Bild VIII-1 mit Hilfe des *Satzes von Pythagoras* durch die Koordinaten x und y des Punktes P wie folgt ausdrücken:

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

Damit lautet die Potentialfunktion

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \varphi(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} \right)\end{aligned}$$

Die *Komponenten* der elektrischen Feldstärke \vec{E} sind die mit -1 multiplizierten *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* dieser Potentialfunktion [A57]. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir für die x -Komponente:

$$\begin{aligned}E_x(x, y) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} \right) \right] = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[[(a+x)^2 + y^2]^{-1/2} - [(a-x)^2 + y^2]^{-1/2} \right] = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} [(a+x)^2 + y^2]^{-3/2} \cdot 2(a+x) \cdot 1 - \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{1}{2} \right) [(a-x)^2 + y^2]^{-3/2} \cdot 2(a-x) \cdot (-1) \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a+x}{[(a+x)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{a-x}{[(a-x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]\end{aligned}$$

Analog folgt für die y -Komponente E_y :

$$E_y(x, y) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[[(a+x)^2 + y^2]^{-1/2} - [(a-x)^2 + y^2]^{-1/2} \right] = \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} [(a+x)^2 + y^2]^{-3/2} \cdot 2y - \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{1}{2} \right) [(a-x)^2 + y^2]^{-3/2} \cdot 2y \right] = \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{[(a+x)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(a-x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

b) Längs der y -Achse ist $x = 0$ und somit

$$E_x(0; y) = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[a^2 + y^2]^{3/2}}$$

und

$$E_y(0; y) = 0$$

Der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} steht daher *senkrecht* auf der y -Achse, und diese liegt somit in einer *Äquipotentialfläche*¹⁾ (Bild VIII-2).

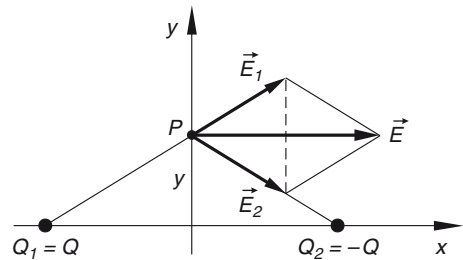


Bild VIII-2

Beispiel 2: Statisch unbestimmt gelagerter Balken

Partielle Ableitungen

Bild VIII-3 zeigt einen *beidseitig* eingespannten homogenen Balken der Länge l , belastet mit einer *konstanten* Streckenlast q . Bestimmen Sie die beiden *Auflagerkräfte* F_A und F_B sowie das *Einspannmoment* M_0 .

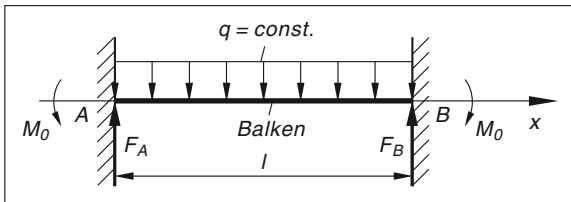


Bild VIII-3

¹⁾ Diese Äquipotentialfläche ist eine *Ebene* senkrecht zur Zeichenebene. Sie enthält die y -Achse und die aus der Zeichenebene senkrecht nach oben gerichtete z -Achse. Das *Potential* der Äquipotentialfläche ist $\varphi = 0$.

Lösungshinweis: Das System ist *statisch unbestimmt*, d. h. die *statischen Gleichgewichtsbedingungen* [A1] reichen in diesem Fall nicht aus, um die drei Unbekannten F_A , F_B und M_0 berechnen zu können. Die *fehlende* Gleichung erhält man durch eine Betrachtung der *Formänderung* des Balkens nach dem Satz von *Castigliano* [A58]. Die Biegesteifigkeit EI des Balkens wird dabei als *konstant* angenommen.

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.1 und III.2.2

Physikalische Grundlagen: A1, A7, A58

Lösung:

Aus *Symmetriegründen* verteilt sich die *Gesamtlast* $F = ql$ *gleichmäßig* auf beide Auflager ($F_A = F_B$). Aus der *statischen Gleichgewichtsbedingung* [A1] folgt dann

$$F_A + F_B - F = 0 \quad \text{oder} \quad F_A + F_B - ql = 0$$

und weiter unter Berücksichtigung von $F_A = F_B$:

$$F_A + F_A - ql = 2F_A - ql = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

Das noch *unbekannte* Einspannmoment M_0 lässt sich jedoch aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen [A1] *nicht* berechnen. Das System ist somit (einfach) *statisch unbestimmt*. Bei der Lösung des Problems müssen daher *Formänderungen* des Balkens berücksichtigt werden. Nach *Castigliano* [A58] stellt sich das Einspannmoment M_0 dabei so ein, dass die durch die Gleichung

$$W = \int_0^l \frac{M_b^2(x)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^l M_b^2(x) dx$$

definierte *Formänderungsarbeit* ein *Minimum* annimmt. Dabei ist $M_b(x)$ das *Biegemoment* an der Schnittstelle x (Bild VIII-4).

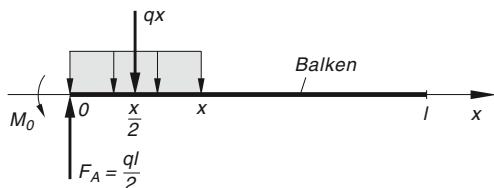


Bild VIII-4

Es setzt sich aus den folgenden drei *Einzelmomenten* [A7] zusammen:

1. Dem *Einspannmoment* $-M_0$;
2. Dem von der *Auflagerkraft* F_A erzeugten Moment

$$M_A = F_A x = \frac{ql}{2} x;$$

3. Dem von der konstanten *Streckenlast* q im Intervall von 0 bis x erzeugten Moment²⁾

$$M_x = -qx \frac{x}{2} = -\frac{q}{2} x^2.$$

²⁾ Die in diesem Intervall von der Streckenlast q erzeugte Kraft qx greift in der *Intervallmitte*, d. h. an der Stelle $x/2$ an (siehe Bild VIII-4).

Somit ist

$$M_b(x) = -M_0 + M_A + M_x = -M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq l$$

und die *Formänderungsarbeit* ist durch das Integral

$$W = \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^l M_b^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^l \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right)^2 dx$$

gegeben. Das (noch unbekannte) *Einspannmoment* M_0 erhalten wir dann nach dem *Satz von Castigliano* [A58] aus der Bedingung $\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0$. Daraus folgt zunächst

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{\partial}{\partial M_0} \left[\int_0^l \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right)^2 dx \right] = 0$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial M_0} \left[\int_0^l \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right)^2 dx \right] = 0$$

wobei die Differentiation mit der Integration *vertauscht* werden darf:

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial M_0} \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right)^2 dx = 0$$

Wir bilden nun mit Hilfe der *Kettenregel* die benötigte *partielle Ableitung* unter dem Integral:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M_0} \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right)^2 &= 2 \left(-M_0 + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) \cdot (-1) = \\ &= 2 \left(M_0 - \frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \right) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die folgende Bestimmungsgleichung für das Einspannmoment M_0 :

$$2 \cdot \int_0^l \left(M_0 - \frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \right) dx = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \left(M_0 - \frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \right) dx = 0$$

Wir integrieren und lösen schließlich die Gleichung nach der Unbekannten M_0 auf:

$$\begin{aligned} \left[M_0 x - \frac{ql}{4}x^2 + \frac{q}{6}x^3 \right]_0^l &= M_0 l - \frac{ql^3}{4} + \frac{ql^3}{6} = M_0 l - \frac{3ql^3}{12} + \frac{2ql^3}{12} = \\ &= M_0 l - \frac{ql^3}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{ql^2}{12} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial M_0^2} &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{\partial}{\partial M_0} \left[2 \left(M_0 - \frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial}{\partial M_0} \left(M_0 - \frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \right) = \frac{1}{EI} \cdot 1 = \frac{1}{EI} > 0\end{aligned}$$

handelt es sich um das gesuchte *Minimum*. Damit sind *sämtliche* Reaktionsgrößen bestimmt und die *Lösung* der Aufgabe lautet wie folgt:

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}, \quad M_0 = \frac{ql^2}{12}$$

Beispiel 3: Temperaturverteilung längs eines Metallstabes (eindimensionale Wärmeleitungsgleichung)

Partielle Ableitungen

Bei einem dünnen homogenen zylindrischen Metallstab (z. B. aus Kupfer) der Länge L mit konstantem Querschnitt ist eine Wärmeübertragung nur in Richtung der Stabachse möglich, wenn die Oberfläche (Mantelfläche) völlig wärmeisoliert ist. Die Temperaturverteilung ist dabei vom Ort x und der Zeit t abhängig, also eine Funktion $T = T(x; t)$ dieser Variablen. In einem konkreten Fall erhält man die folgende Temperaturverteilung:

$$T(x; t) = T_0 \cdot e^{-(\pi/L)^2 at} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L; \quad t \geq 0$$

$a > 0$: Temperaturleitfähigkeit (eine Materialkonstante); $T_0 > 0$

Zeigen Sie, dass diese Verteilung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

genügt. Skizzieren und kommentieren Sie den Temperaturverlauf längs des Stabes zu verschiedenen Zeiten (insbesondere auch zur Zeit $t = 0$).

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.1 und III.2.2

Physikalische Grundlagen: A65

Lösung:

Wir setzen $k = \pi/L$ und bilden die benötigten partiellen Ableitungen der Temperaturverteilungsfunktion nach der Variablen t bzw. x :

$$T(x; t) = T_0 \cdot e^{-(\pi/L)^2 at} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \sin(kx)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot (-ak^2) \cdot \sin(kx) = -ak^2 T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \sin(kx)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot [\cos(kx)] \cdot k = kT_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \cos(kx)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = kT_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot [-\sin(kx)] \cdot k = -k^2 T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \sin(kx)$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -ak^2 T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \sin(kx) = a \underbrace{[-k^2 T_0 \cdot e^{-ak^2 t} \cdot \sin(kx)]}_{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Die Temperaturverteilungsfunktion $T(x; t)$ ist somit eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung.

Pysikalische Interpretation

Bild VIII-5 zeigt die sinusförmige Temperaturverteilung längs des Stabes zu verschiedenen Zeiten. Der zeitabhängige Exponentialfaktor in der Verteilungsfunktion (streng monoton fallende Funktion) bewirkt an jeder Stelle des Stabes eine im Laufe der Zeit zunehmende Abkühlung. In den beiden Randpunkten des Stabes hat die Temperatur zu jeder Zeit t den Wert 0 (der Faktor $\sin(kx)$ in der Temperaturverteilungsfunktion $T(x; t)$ verschwindet an diesen Stellen):

$$T(x = 0; t) = 0 \quad \text{und} \quad T(x = L; t) = 0$$

$$\text{Verteilung zu Beginn } (t = 0): T(x; t = 0) = T_0 \cdot \underbrace{e^0}_1 \cdot \sin(kx) = T_0 \cdot \sin(kx)$$

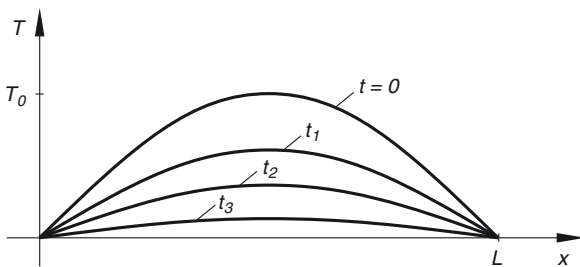
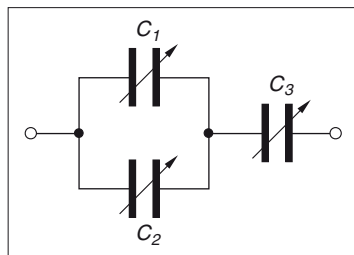


Bild VIII-5 Temperaturverteilung längs des Stabes zu verschiedenen Zeiten ($t_1 < t_2 < t_3$)

Beispiel 4: Kapazität einer Kondensatorschaltung*Totales oder vollständiges Differential*

Die in Bild VIII-6 dargestellte Schaltung enthält drei *Drehkondensatoren*, deren Kapazitäten zunächst auf die festen Werte $C_1 = 100 \mu\text{F}$, $C_2 = 150 \mu\text{F}$ und $C_3 = 250 \mu\text{F}$ eingestellt werden. Berechnen Sie die *Gesamtkapazität* C und deren *Änderung* ΔC , wenn die Einzelkapazitäten der Reihe nach um $\Delta C_1 = 2 \mu\text{F}$, $\Delta C_2 = -1 \mu\text{F}$ und $\Delta C_3 = 3 \mu\text{F}$ geändert werden

**Bild VIII-6**

- durch *exakte* Rechnung,
- durch *Näherungsrechnung* mit Hilfe des *totalen Differentials*.

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.4

Physikalische Grundlagen: A21

Lösung:

- Wir berechnen zunächst die *Gesamtkapazität* C . Die Einzelkapazitäten C_1 und C_2 sind *parallel* geschaltet und *addieren* sich somit zur Kapazität [A21]

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

Diese Ersatzkapazität ist mit C_3 in *Reihe* geschaltet. Daher *addieren* sich die *Kehrwerte* von C_{12} und C_3 zum *Kehrwert* der gesuchten Gesamtkapazität C [A21]:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3 + C_1 + C_2}{(C_1 + C_2) C_3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{(C_1 + C_2) C_3}$$

Durch *Kehrwertbildung* folgt daraus für die Gesamtkapazität

$$C = \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{(100 + 150) \mu\text{F} \cdot 250 \mu\text{F}}{(100 + 150 + 250) \mu\text{F}} = 125 \mu\text{F}$$

Die *Drehkondensatoren* besitzen *nach* den vorgegebenen Änderungen nunmehr folgende Kapazitätswerte:

$$C_1 \rightarrow C_1^* = C_1 + \Delta C_1 = (100 + 2) \mu\text{F} = 102 \mu\text{F}$$

$$C_2 \rightarrow C_2^* = C_2 + \Delta C_2 = (150 - 1) \mu\text{F} = 149 \mu\text{F}$$

$$C_3 \rightarrow C_3^* = C_3 + \Delta C_3 = (250 + 3) \mu\text{F} = 253 \mu\text{F}$$

Die *Gesamtkapazität* C^* der Schaltung ist nunmehr

$$C^* = \frac{(C_1^* + C_2^*) C_3^*}{C_1^* + C_2^* + C_3^*} = \frac{(102 + 149) \mu\text{F} \cdot 253 \mu\text{F}}{(102 + 149 + 253) \mu\text{F}} = 125,998 \mu\text{F}$$

Sie hat sich somit um

$$\Delta C = C^* - C = (125,998 - 125) \mu\text{F} = 0,998 \mu\text{F} \approx 1 \mu\text{F}$$

vergrößert.

b) Das *totale Differential* der Funktion

$$C = C(C_1; C_2; C_3) = \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

lautet

$$dC = \frac{\partial C}{\partial C_1} dC_1 + \frac{\partial C}{\partial C_2} dC_2 + \frac{\partial C}{\partial C_3} dC_3$$

Wir bilden nun mit Hilfe der *Quotientenregel* die benötigten *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial C_1} &= \frac{1 \cdot C_3 (C_1 + C_2 + C_3) - 1 \cdot (C_1 + C_2) C_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \\ &= \frac{C_3 (C_1 + C_2 + C_3 - C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \frac{C_3^2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} \end{aligned}$$

Aus *Symmetriegründen* ist

$$\frac{\partial C}{\partial C_2} = \frac{C_3^2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2}$$

Für die partielle Ableitung 1. Ordnung nach der Variablen C_3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial C_3} &= \frac{(C_1 + C_2) \cdot 1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3) - 1 \cdot (C_1 + C_2) C_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \\ &= \frac{(C_1 + C_2) (C_1 + C_2 + C_3 - C_3)}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \frac{(C_1 + C_2)^2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} dC &= \frac{C_3^2 dC_1}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} + \frac{C_3^2 dC_2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} + \frac{(C_1 + C_2)^2 dC_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \\ &= \frac{C_3^2 (dC_1 + dC_2) + (C_1 + C_2)^2 dC_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} \end{aligned}$$

Die Differentiale dC_1 , dC_2 und dC_3 sind die vorgegebenen (kleinen) *Änderungen* der Einzelkapazitäten:

$$dC_1 = \Delta C_1 = 2 \mu\text{F}, \quad dC_2 = \Delta C_2 = -1 \mu\text{F}, \quad dC_3 = \Delta C_3 = 3 \mu\text{F}$$

Das *totale Differential* dC gibt dann *näherungsweise* die *Änderung* der Gesamtkapazität an. Somit gilt

$$\begin{aligned}\Delta C \approx dC &= \frac{C_3^2 (\Delta C_1 + \Delta C_2) + (C_1 + C_2)^2 \Delta C_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} = \\ &= \frac{250^2 (2 - 1) + (100 + 150)^2 \cdot 3}{(100 + 150 + 250)^2} \mu\text{F} = \frac{250^2 (1 + 3)}{500^2} \mu\text{F} = 1 \mu\text{F}\end{aligned}$$

Die *Näherungsrechnung* führt hier zum *gleichen* Ergebnis wie die *exakte* Rechnung.

Beispiel 5: Schwingungsgleichung der Mechanik

Totales oder vollständiges Differential

Das aus einer elastischen Feder mit der Federkonstanten c und einer angehängten Schwingmasse m bestehende *Federpendel* (Feder-Masse-Schwinger) kann als *Modell einer ungedämpften harmonischen Schwingung* angesehen werden (Bild VIII-7). Leiten Sie aus dem *Energieerhaltungssatz der Mechanik* [A22] mit Hilfe des *totalen Differentials* die *Differentialgleichung* dieser Schwingung (auch *Schwingungsgleichung* genannt) her.

$x = x(t)$: Auslenkung zur Zeit t (Lagekoordinate der Pendelmasse)

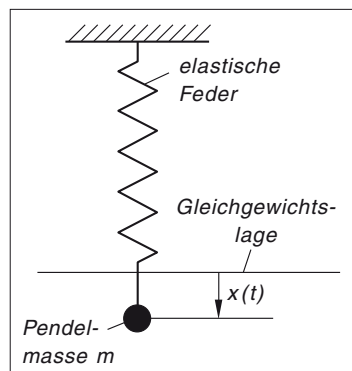


Bild VIII-7

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.4

Physikalische Grundlagen: A22

Lösung:

Ist $x = x(t)$ die *Auslenkung* und $v = v(t)$ die *Geschwindigkeit* des Federpendels zur Zeit t , so gilt nach dem *Energieerhaltungssatz der Mechanik* [A22]

$$E(v; x) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c x^2 = \text{const.}$$

Wir bilden nun das *totale Differential* dieser von v und x abhängigen (konstanten) Funktion:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial v} dv + \frac{\partial E}{\partial x} dx = m v dv + c x dx$$

Wegen $E = \text{const.}$ ist die *Energieänderung* dE und somit das totale Differential gleich null:

$$dE = 0 \Rightarrow m v dv + c x dx = 0$$

Diese Gleichung dividieren wir formal durch das Zeitdifferential dt und beachten dabei, dass definitionsgemäß $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v$ und $\frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$ ist:

$$m v \frac{dv}{dt} + c x \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad m v \ddot{x} + c x v = 0$$

Durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors v folgt weiter

$$v(m \ddot{x} + c x) = 0$$

Da $v \neq 0$ ist (sonst würde keine Schwingung vorliegen) muss der *Klammerausdruck* verschwinden. Dies führt zu der als *Schwingungsgleichung* bekannten *Differentialgleichung* einer *ungedämpften harmonischen Schwingung*:

$$m \ddot{x} + c x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{mit } \omega_0^2 = c/m)$$

Die *allgemeine Lösung* dieser Differentialgleichung lautet im Übrigen wie folgt:

$$x = x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Sie beschreibt eine ungestörte *Überlagerung* (Superposition) gleichfrequenter Sinus- und Kosinusschwingungen, die auch als eine *resultierende* Sinusschwingung mit der Amplitude A , der Kreisfrequenz ω_0 und dem Phasenwinkel φ darstellbar ist (siehe hierzu Band 2, Abschnitt V.4.1.2). Die Konstanten C_1 und C_2 bzw. A und φ werden in der Regel durch vorgegebene Anfangsbedingungen festgelegt.

Beispiel 6: Thermodynamische Zustandsfunktionen

Totales Differential, wegunabhängiges Linienintegral

In der Thermodynamik werden die Eigenschaften makroskopischer Systeme durch sog. *Zustandsfunktionen* $f(T; V)$ zweier unabhängiger Zustandsvariablen T (absolute Temperatur) und V (Volumen) beschrieben ($T > 0, V > 0$). Diese Zustandsfunktionen sind eindeutige Funktionen von T und V , d.h. die während eines Prozesses eintretende Änderung einer Zustandsfunktion hängt *nicht* von der Prozessführung ab, sondern nur von den Werten der beiden unabhängigen Zustandsvariablen im Anfangs- und Endzustand.

Zeigen Sie, dass das Differential

$$dF = dU - d(T \cdot S)$$

der freien Energie $F = F(T; V)$ eines idealen Gases *vollständig* ist und bestimmen Sie diese Funktion.

Lösungshinweis: U ist die innere Energie, S die Entropie des Gases. Beide Funktionen hängen von T und V ab und gehören zu den thermodynamischen Zustandsfunktionen.

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.4 und Bd. 3, I.7.4

Lösung:

U , S und F sind Funktionen von T und V und es gilt dann (nach der Produktregel):

$$dF = dU - d(T \cdot S) = dU - (dT \cdot S + dS \cdot T) = dU - T dS - S dT$$

Mit den vollständigen Differentialen

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV \quad \text{und} \quad dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned} dF &= dU - T dS - S dT = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV - T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \right) - S dT = \\ &= \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV - T \cdot \frac{\partial S}{\partial T} dT - T \cdot \frac{\partial S}{\partial V} dV - S dT = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial T} - S \right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial V} \right) dV \end{aligned}$$

Das Differential dF der freien Energie $F(T; V)$ ist vollständig, wenn die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial T} - S \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial V} \right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - T \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} - \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} - 1 \cdot \frac{\partial S}{\partial V} - T \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} - T \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} - \frac{\partial S}{\partial V} \end{aligned}$$

gilt (sog. *Integrabilitätsbedingung*, siehe Bd. 3, Abschnitt I.7.4).

Die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung stimmen überein, da U und S als thermodynamische Zustandsfunktionen den *Satz von Schwarz* erfüllen, d. h. den Beziehungen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

genügen. Für die freie Energie $F(T; V)$ erhält man somit durch Integration:

$$F(T; V) = \int dF = \int [dU - d(T \cdot S)] = U(T; V) - T \cdot S(T; V) + \text{const.}$$

Beispiel 7: Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung
Linearisierung einer Funktion

Eine *elektrische Doppelleitung* besteht aus zwei *parallelen* Leitern (Drähten) mit der Länge l und dem Leiterradius r . Der Mittelpunktsabstand der beiden Leiter beträgt a (Bild VIII-8; Querschnitt der Doppelleitung).

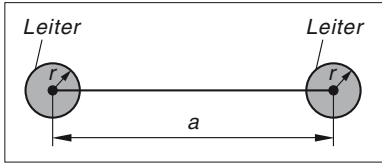


Bild VIII-8

Die *Selbstinduktivität* L dieser Doppelleitung in Luft wird dabei nach der folgenden Formel berechnet:

$$L = L(l; r; a) = \frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln \left(\frac{a - r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right]$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$: magnetische Feldkonstante

- a) *Linearisieren* Sie diese Funktion in der Umgebung des „Arbeitspunktes“ $l_0 = 3 \text{ km}$, $r_0 = 2 \text{ mm}$ und $a_0 = 30 \text{ cm}$, d. h. leiten Sie eine *lineare* Funktionsgleichung her, aus der sich die *Änderung* ΔL der Selbstinduktivität L bei *kleinen* Änderungen Δl , Δr und Δa der drei unabhängigen Größen l , r und a berechnen lässt.
- b) Berechnen Sie mit dieser *linearisierten* Funktion die *absolute Änderung* ΔL der Selbstinduktivität L , wenn die *Länge* der Doppelleitung um 1 % *vergrößert*, der *Leiterradius* um 1 % *verkleinert* und gleichzeitig der *Mittelpunktsabstand* um 2 % *vergrößert* wird. Vergleichen Sie diesen *Näherungswert* mit der *tatsächlichen* Änderung ΔL_{exakt} .

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.5.2

Lösung:

- a) Bei *geringen* Änderungen der drei unabhängigen Variablen gilt *näherungsweise* der folgende *lineare* Zusammenhang zwischen den Größen L , l , r und a :

$$\Delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial l} \right)_0 \Delta l + \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)_0 \Delta r + \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)_0 \Delta a$$

(*linearisierte* Funktion mit Hilfe des *totalen Differentials*). Der Index „0“ kennzeichnet dabei den „Arbeitspunkt“ l_0 , r_0 , a_0 . Wir bilden nun die benötigten *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*.

Sie lauten der Reihe nach wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial l} (l) = \\
 &= \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right] \cdot 1 = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right] \\
 \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln(a-r) - \ln r + \frac{1}{4} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{1}{a-r} \cdot (-1) - \frac{1}{r} + 0 \right) = \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{-1}{a-r} - \frac{1}{r} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \left(\frac{1}{a-r} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{r+a-r}{(a-r)r} = -\frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{a}{(a-r)r} = \\
 &= -\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{al}{(a-r)r} \\
 \frac{\partial L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left[\ln(a-r) - \ln r + \frac{1}{4} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{1}{a-r} \cdot 1 - 0 + 0 \right) = \frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{1}{a-r} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{l}{a-r}
 \end{aligned}$$

Im *Arbeitspunkt* besitzen diese Ableitungen folgende Werte (alle Längengrößen wurden in mm umgerechnet):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial L}{\partial l} \right)_0 &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \left[\ln \left(\frac{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right) + \frac{1}{4} \right] = 2,102 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\
 \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)_0 &= -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \cdot \frac{300 \text{ mm} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ mm}}{(300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}) 2 \text{ mm}} = -0,604 027 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\
 \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)_0 &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^6 \text{ mm}}{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}} = 0,004 027 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}
 \end{aligned}$$

Die *linearisierte* Funktion nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\Delta L = (2,102 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta l - 0,604 027 \cdot \Delta r + 0,004 027 \cdot \Delta a) \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Alle in dieser Gleichung auftretenden Größen sind *Relativkoordinaten*, d. h. die auf den *Arbeitspunkt* bezogenen Änderungen von l , r , a und L .

b) Näherungsrechnung

Die *linearisierte* Funktion liefert mit den vorgegebenen Änderungen ³⁾

$$\Delta l = 30 \text{ m}, \quad \Delta r = -0,02 \text{ mm} = -2 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad \Delta a = 0,6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

den *Näherungswert*

$$\begin{aligned} \Delta L &= \left[2,102 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \text{ m} - 0,604 027 \cdot (-2 \cdot 10^{-5} \text{ m}) + \right. \\ &\quad \left. + 0,004 027 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \right] \frac{V_S}{A_m} = 0,000 099 \text{ m} \cdot \frac{V_S}{A_m} = 0,000 099 \frac{V_S}{A} = \\ &= 0,000 099 \text{ H} = 0,099 \text{ mH} \quad \left(1 \frac{V_S}{A} = 1 \text{ H} \right) \end{aligned}$$

Die *Selbstinduktivität* L nimmt somit *näherungsweise* um $\Delta L = 0,099 \text{ mH}$ zu.

Exakte Rechnung

Die *Selbstinduktivität* der *vorgegebenen* Doppelleitung beträgt für die vorgegebenen Werte $l_0 = 3 \text{ km} = 3 \cdot 10^3 \text{ m}$, $r = 2 \text{ mm}$ und $a = 30 \text{ cm} = 300 \text{ mm}$:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_S}{A_m}}{\pi} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ m} \left[\ln \left(\frac{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right) + \frac{1}{4} \right] = 0,006 305 \frac{V_S}{A} = \\ &= 0,006 305 \text{ H} = 6,305 \text{ mH} \end{aligned}$$

Die Größen l , r und a besitzen *nach* den vorgenommenen Änderungen nunmehr die folgenden Werte:

$$l_1 = l_0 + \Delta l = 3000 \text{ m} + 30 \text{ m} = 3030 \text{ m} = 3,03 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$r_1 = r_0 + \Delta r = 2 \text{ mm} - 0,02 \text{ mm} = 1,98 \text{ mm}$$

$$a_1 = a_0 + \Delta a = 30 \text{ cm} + 0,6 \text{ cm} = 30,6 \text{ cm} = 306 \text{ mm}$$

Die *Selbstinduktivität* beträgt jetzt

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_S}{A_m}}{\pi} \cdot 3,03 \cdot 10^3 \text{ m} \left[\ln \left(\frac{306 \text{ mm} - 1,98 \text{ mm}}{1,98 \text{ mm}} \right) + \frac{1}{4} \right] = \\ &= 0,006 404 \frac{V_S}{A} = 0,006 404 \text{ H} = 6,404 \text{ mH} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die *exakte* Änderung der Selbstinduktivität der Wert

$$\Delta L_{\text{exakt}} = L_1 - L_0 = 6,404 \text{ mH} - 6,305 \text{ mH} = 0,099 \text{ mH}$$

in *Übereinstimmung* mit der *Näherungsrechnung*!

³⁾ Aus *Dimensionsgründen* werden alle Werte auf die Einheit *Meter* umgerechnet.

Beispiel 8: Leistungsanpassung beim Wechselstromgenerator

Extremwertaufgabe

Ein Wechselstromgenerator mit dem komplexen Innenwiderstand $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ liefert eine konstante Quellenspannung \underline{U} mit dem Effektivwert U . Ein zum Zeitpunkt $t = 0$ angeschlossener Verbraucher mit dem stetig veränderbaren komplexen Widerstand $\underline{Z}_a = R_a + jX_a$ soll so abgestimmt werden, dass die von ihm aufgenommene Wirkleistung P [A60] einen maximalen Wert erreicht (sog. Leistungsanpassung; Bild VIII-9).

Wie sind Wirkwiderstand R_a und Blindwiderstand X_a des Verbrauchers zu wählen?

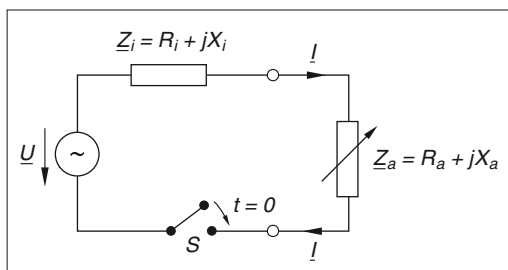


Bild VIII-9

Lösungshinweis: Die Stromstärke I lässt sich aus dem ohmschen Gesetz der Wechselstromtechnik [A52] bestimmen. Die Wirkleistung P [A60] ist dann als eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen R_a und X_a darstellbar.

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.5.4

Physikalische Grundlagen: A13, A52, A60

Lösung:

Der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung [A13] ist

$$\underline{Z} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_i = R_a + jX_a + R_i + jX_i = (R_a + R_i) + j(X_a + X_i)$$

Nach dem Ohmschen Gesetz der Wechselstromtechnik [A52] beträgt dann die Stromstärke

$$I = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}}{(R_a + R_i) + j(X_a + X_i)}$$

Die vom Verbraucher aufgenommene Wirkleistung ist definitionsgemäß [A60]

$$P = R_a I^2$$

Dabei ist I der Effektivwert der Stromstärke. Mit

$$I^2 = \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \frac{\underline{U}}{(R_a + R_i) + j(X_a + X_i)} \cdot \frac{\underline{U}^*}{(R_a + R_i) - j(X_a + X_i)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\underline{U} \cdot \underline{U}^*}{\left[(R_a + R_i) + j(X_a + X_i) \right] \left[(R_a + R_i) - j(X_a + X_i) \right]} = \\
 &\quad \text{3. Binom: } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ mit } a = (R_a + R_i), b = j(X_a + X_i) \\
 &= \frac{U^2}{(R_a + R_i)^2 - j^2(X_a + X_i)^2} = \frac{U^2}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}
 \end{aligned}$$

folgt schließlich:

$$P = P(R_a; X_a) = R_a I^2 = \frac{R_a U^2}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}$$

($\underline{U} \cdot \underline{U}^* = U^2$). Dabei sind \underline{I}^* und \underline{U}^* die zu \underline{I} und \underline{U} konjugiert komplexen Größen.

Wirkwiderstand R_a und Blindwiderstand X_a sind nun (bei vorgegebenen Werten für U , R_i und X_i) so zu bestimmen, dass die Wirkleistung $P = P(R_a; X_a)$ ihren größtmöglichen Wert annimmt. Es handelt sich also um eine Extremwertaufgabe für eine von zwei unabhängigen Variablen abhängige Funktion.

Bestimmung der benötigten partiellen Ableitungen

Die für die Extremwertberechnung benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung erhalten wir mit Hilfe der Quotienten- und Kettenregel. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial R_a} &= \frac{\partial}{\partial R_a} \left[\frac{R_a U^2}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2} \right] = \\
 &= U^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R_a} \left[\frac{R_a}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2} \right] = \\
 &= U^2 \cdot \frac{1 \cdot [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2] - 2(R_a + R_i) \cdot 1 \cdot R_a}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2} = \\
 &= U^2 \cdot \frac{R_a^2 + 2R_a R_i + R_i^2 + (X_a + X_i)^2 - 2R_a^2 - 2R_a R_i}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2} = \\
 &= U^2 \cdot \frac{R_i^2 - R_a^2 + (X_a + X_i)^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2} \\
 \frac{\partial P}{\partial X_a} &= \frac{\partial}{\partial X_a} [R_a U^2 [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^{-1}] = \\
 &= U^2 R_a \cdot \frac{\partial}{\partial X_a} [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^{-1} = \\
 &= U^2 R_a \cdot (-1) \cdot [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^{-2} \cdot 2(X_a + X_i) \cdot 1 = \\
 &= -2 U^2 \cdot \frac{R_a (X_a + X_i)}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial R_a^2} &= \frac{\partial}{\partial R_a} \left[U^2 \cdot \frac{R_i^2 - R_a^2 + (X_a + X_i)^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2} \right] = \\
&= U^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R_a} \left[\frac{R_i^2 - R_a^2 + (X_a + X_i)^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2} \right] = \\
&= U^2 \left[\frac{-2 R_a [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2] \cdot 2 (R_a + R_i) \cdot 1 \cdot [R_i^2 - R_a^2 + (X_a + X_i)^2]}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^4} \right] = \\
&= -2 U^2 \cdot \frac{R_a [(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2] + 2 (R_a + R_i) [R_i^2 - R_a^2 + (X_a + X_i)^2]}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^3}
\end{aligned}$$

Der grau unterlegte Faktor $[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]$ wurde dabei gekürzt.

Im Zähler des Bruches nehmen wir noch die folgenden Umformungen vor:

$$\begin{aligned}
R_a (R_a + R_i)^2 + R_a (X_a + X_i)^2 + 2 (R_a + R_i) \underbrace{(R_i^2 - R_a^2)}_{\substack{\text{3. Binom: } (R_i + R_a)(R_i - R_a)}} + 2 (R_a + R_i) (X_a + X_i)^2 &= \\
= R_a (R_a + R_i)^2 + R_a (X_a + X_i)^2 + 2 (R_a + R_i)^2 (R_i - R_a) + 2 (R_a + R_i) (X_a + X_i)^2 &= \\
= R_a (R_a + R_i)^2 + 2 (R_a + R_i)^2 (R_i - R_a) + R_a (X_a + X_i)^2 + 2 (R_a + R_i) (X_a + X_i)^2 &
\end{aligned}$$

Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(R_a + R_i)^2$ (1. und 2. Summand) bzw. $(X_a + X_i)^2$ (3. und 4. Summand) führen zu

$$\begin{aligned}
&\left[\underbrace{R_a + 2(R_i - R_a)}_{2R_i - R_a} \right] (R_a + R_i)^2 + \left[\underbrace{R_a + 2(R_a + R_i)}_{3R_a + 2R_i} \right] (X_a + X_i)^2 = \\
&= (2R_i - R_a) (R_a + R_i)^2 + (3R_a + 2R_i) (X_a + X_i)^2
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_a^2} = -2 U^2 \cdot \frac{(2R_i - R_a) (R_a + R_i)^2 + (3R_a + 2R_i) (X_a + X_i)^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^3}$$

Analog findet man für die restlichen partiellen Ableitungen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X_a^2} = -2 U^2 R_a \cdot \frac{(R_a + R_i)^2 - 3(X_a + X_i)^2}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_a \partial X_a} = \frac{\partial^2 P}{\partial X_a \partial R_a} = -2U^2 \cdot \frac{(X_a + X_i) [(R_a + R_i)(R_i - 3R_a) + (X_a + X_i)^2]}{[(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2]^3}$$

Extremwertberechnung

Aus den *notwendigen* Bedingungen $\frac{\partial P}{\partial R_a} = 0$ und $\frac{\partial P}{\partial X_a} = 0$ erhalten wir folgende Lösung:

$$\frac{\partial P}{\partial X_a} = 0 \Rightarrow R_a (X_a + X_i) = 0 \Rightarrow X_a + X_i = 0 \Rightarrow X_a = -X_i$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_a} = 0 \Rightarrow R_i^2 - R_a^2 + \underbrace{(X_a + X_i)^2}_0 = 0 \Rightarrow R_i^2 = R_a^2 \Rightarrow R_a = R_i$$

Wir prüfen, ob auch das *hinreichende* Kriterium für einen relativen Extremwert erfüllt ist. Dazu berechnen wir zunächst die benötigten Werte der partiellen Ableitungen 2. Ordnung an der Stelle $R_a = R_i$, $X_a = -X_i$ (die grau unterlegten Ausdrücke verschwinden):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_a^2} = -2U^2 \cdot \frac{(2R_i - R_i)(R_i + R_i)^2 + (3R_i + 2R_i)(-X_i + X_i)^2}{[(R_i + R_i)^2 + (-X_i + X_i)^2]^3} =$$

$$= -2U^2 \cdot \frac{R_i(2R_i)^2}{(2R_i)^6} = -\frac{2U^2 R_i}{(2R_i)^4} = -\frac{2U^2 R_i}{16R_i^4} = -\frac{U^2}{8R_i^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X_a^2} = -2U^2 R_i \cdot \frac{(R_i + R_i)^2 - 3(-X_i + X_i)^2}{[(R_i + R_i)^2 + (-X_i + X_i)^2]^3} = -\frac{2U^2 R_i (2R_i)^2}{(2R_i)^6} = -\frac{U^2}{8R_i^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_a \partial X_a} = -2U^2 \cdot \frac{(-X_i + X_i) [(R_i + R_i)(R_i - 3R_i) + (-X_i + X_i)^2]}{[(R_i + R_i)^2 + (-X_i + X_i)^2]^3} = 0$$

Wegen

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial R_a^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X_a^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial R_a \partial X_a} \right)^2 = \left(-\frac{U^2}{8R_i^3} \right) \cdot \left(-\frac{U^2}{8R_i^3} \right) - 0^2 = \frac{U^4}{64R_i^6} > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_a^2} = -\frac{U^2}{8R_i^3} < 0$$

liegt ein *relatives Maximum* vor. Die *Leistungsaufnahme* des Verbrauchers ist somit *optimal*, wenn $R_a = R_i$ und $X_a = -X_i$ und somit $\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$ ist, d. h. der Verbraucherwiderstand muss zum Innenwiderstand des Generators *konjugiert komplex* sein. Die *Blindwiderstände* von Verbraucher und Generator *kompensieren* sich somit im Falle der Leistungsanpassung, die Leistung erreicht dann ihren *Maximalwert*

$$P_{\max} = P(R_a = R_i; X_a = -X_i) = \frac{R_i U^2}{(R_i + R_i)^2 + (-X_i + X_i)^2} = \frac{R_i U^2}{4R_i^2} = \frac{U^2}{4R_i}$$

Beispiel 9: Eine Anwendung des Gaußschen Fehlerintegrals
Extremwertaufgabe

In der Technik (insbesondere in der Elektrotechnik) stellt sich häufig das Problem, eine *nicht-sinusförmige* periodische Funktion $y(t)$ mit der Periode T durch ein *trigonometrisches Polynom m -ten Grades* vom Typ

$$y_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)]$$

näherungsweise zu ersetzen ($\omega_0 = 2\pi/T$: Kreisfrequenz der *Grundschiwingung*; $\omega_k = k\omega_0$: Kreisfrequenzen der *harmonischen Oberschwingungen*). Ein Maß für den dabei begangenen Fehler liefert das sog. *Gaußsche Fehlerintegral*

$$F = \int_0^T [y(t) - y_m(t)]^2 dt$$

- a) Bestimmen Sie die noch unbekannten *Koeffizienten* $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ des trigonometrischen Näherungspolynoms $y_m(t)$ so, dass das Fehlerintegral einen *möglichst kleinen* Wert annimmt.
- b) Zeigen Sie, dass die unter a) berechneten Koeffizienten genau die *Fourierkoeffizienten* der Fourier-Reihe von $y(t)$ sind. Was folgern Sie daraus?

Lösungshinweis: Betrachten Sie das Gaußsche Fehlerintegral als eine *Funktion* der $2m + 1$ *unabhängigen* Variablen $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$. Bei der Lösung dieser Extremwertaufgabe dürfen Sie ferner auf die folgenden bestimmten Integrale zurückgreifen:

$$I_k = \int_0^T \cos(k\omega_0 t) dt = \int_0^T \sin(k\omega_0 t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$\begin{aligned} I_{kn} &= \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \\ &= \int_0^T \sin(k\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ T/2 & \text{für } k = n \end{cases} \end{aligned}$$

$$I_{kn}^* = \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \int_0^T \sin(k\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

Lösung:

- a) Das *Gaußsche Fehlerintegral* wird als eine Funktion der insgesamt $2m + 1$ unabhängigen Variablen $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ betrachtet:

$$F(a_0; a_1; \dots; a_m; b_1; b_2; \dots; b_m) = \int_0^T [y(t) - y_m(t)]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left[y(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)] \right]^2 dt$$

Die für ein *Minimum* notwendigen Bedingungen lauten dann

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = \frac{\partial F}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial F}{\partial b_1} = \frac{\partial F}{\partial b_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial b_m} = 0$$

d. h. *sämtliche* partiellen Ableitungen 1. Ordnung müssen *verschwinden*. Bei der Bildung der benötigten Ableitungen (mit Hilfe der *Kettenregel*) beachten wir, dass Differentiation und Integration *vertauschbar* sind, d. h. die Differentiation darf „unter“ dem Integralzeichen ausgeführt werden.

Berechnung des Koeffizienten a_0

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = \int_0^T 2 \left[y(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)] \right] \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt =$$

$$= - \int_0^T \left[y(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)] \right] dt = 0$$

Wir spalten das Integral in *Teilintegrale* auf und lösen die Gleichung dann nach a_0 auf:

$$- \int_0^T y(t) dt + \underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot \int_0^T 1 dt}_T + \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{a_k \cdot \int_0^T \cos(k\omega_0 t) dt}_{I_k = 0} + \underbrace{b_k \cdot \int_0^T \sin(k\omega_0 t) dt}_{I_k = 0} \right) = 0$$

Sämtliche Glieder der Summe von $k = 1$ bis $k = m$ *verschwinden* wegen $I_k = 0$ für $k = 1, 2, \dots, m$. Aus dem verbliebenen Ausdruck lässt sich der gesuchte Koeffizient a_0 wie folgt berechnen:

$$- \int_0^T y(t) dt + \frac{a_0}{2} \cdot T = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) dt$$

Berechnung der Koeffizienten a_n ($n = 1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial a_n} &= \int_0^T 2 \left[y(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t)] \right] \cdot [-\cos(n \omega_0 t)] dt = \\
 &= 2 \cdot \int_0^T \left[-y(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) + \frac{a_0}{2} \cdot \cos(n \omega_0 t) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(n \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(n \omega_0 t)] \right] dt = 0
 \end{aligned}$$

Wir dividieren durch 2 und spalten das Integral in *Teilintegrale* auf:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T y(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt + \underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot \int_0^T \cos(n \omega_0 t) dt}_{I_k = 0 \text{ (mit } k = n)} + \\
 & + \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{a_k \cdot \int_0^T \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt}_{I_{kn}} + \underbrace{b_k \cdot \int_0^T \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt}_{I_{kn}^* = 0} \right) = \\
 & = - \int_0^T y(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt + \sum_{k=1}^m a_k \cdot I_{kn} = 0
 \end{aligned}$$

Die Integrale I_{kn} verschwinden bis auf $I_{nn} = T/2$. Damit folgt für den Koeffizienten a_n :

$$- \int_0^T y(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt + a_n \cdot \frac{T}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt$$

Berechnung der Koeffizienten b_n ($n = 1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial b_n} &= \int_0^T 2 \left[y(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t)] \right] \cdot [-\sin(n \omega_0 t)] dt = \\
 &= 2 \cdot \int_0^T \left[-y(t) \cdot \sin(n \omega_0 t) + \frac{a_0}{2} \cdot \sin(n \omega_0 t) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) \cdot \sin(n \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(n \omega_0 t)] \right] dt = 0
 \end{aligned}$$

Wir dividieren durch 2 und spalten das Integral in *Teilintegrale* auf:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt + \underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot \int_0^T \sin(n\omega_0 t) dt}_{I_k = 0 \text{ (mit } k = n)} + \\
 & + \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{a_k \cdot \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt}_{I_{kn}^* = 0} + \underbrace{b_k \cdot \int_0^T \sin(k\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt}_{I_{kn}} \right) = \\
 & = - \int_0^T y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt + \sum_{k=1}^m b_k \cdot I_{kn} = 0
 \end{aligned}$$

Wegen $I_{kn} = 0$ für $k \neq n$ und $I_{nn} = T/2$ folgt schließlich für den Koeffizienten b_n :

$$- \int_0^T y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt + b_n \cdot \frac{T}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

- b) Die Berechnungsformeln für die *Koeffizienten* des trigonometrischen Näherungspolynoms m -ten Grades lauten nach den Ergebnissen aus Teil a):

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt
 \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots, m$$

Sie stimmen, wie ein Vergleich zeigt, mit den entsprechenden *Fourierkoeffizienten* der Fourier-Reihe von $y(t)$ überein (siehe Band 2, Abschnitt II.2.1, Formel (II-28) bzw. Formelsammlung, Abschnitt VI.4.2). Wir folgern: Von allen möglichen *trigonometrischen* Polynomen m -ten Grades vom Typ

$$y_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)]$$

liefert dasjenige die *bestmögliche* Näherung für $y(t)$, dessen Koeffizienten mit den entsprechenden *Fourierkoeffizienten* von $y(t)$ übereinstimmen.

Beispiel 10: Flächeninhalt und Flächenschwerpunkt eines Kreisabschnittes (Kreissegmentes)

Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten

Bild VIII-10 zeigt ein *Kreissegment* aus dünnem homogenen Blech mit dem Radius R und dem Zentriwinkel $\varphi = 2\alpha$. Berechnen Sie unter *ausschließlicher* Verwendung von *Doppelintegralen* in kartesischen Koordinaten

- den *Flächeninhalt* A ,
- die Lage des *Flächenschwerpunktes* S .
- Untersuchen Sie den Sonderfall $\varphi = \pi$.

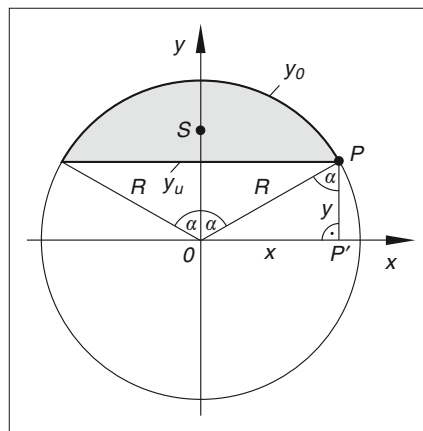


Bild VIII-10

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.1.3

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die benötigten *Integrationsgrenzen* unter Verwendung *kartesischer* Koordinaten. Aus dem *rechtwinkligen* Dreieck $OP'P$ erhalten wir für die Koordinaten des Punktes $P = (x; y)$ die folgenden Beziehungen:

$$\sin \alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cdot \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \cdot \cos \alpha$$

Das Kreissegment wird somit *unten* von der zur x -Achse parallelen Geraden $y_u = R \cdot \cos \alpha$ und *oben* von der Kreislinie $y_0 = \sqrt{R^2 - x^2}$ berandet. Die Kurvenschnittpunkte liegen bei $x_{1/2} = \pm R \cdot \sin \alpha$.

Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

$$y\text{-Integration: Von } y = R \cdot \cos \alpha \quad \text{bis} \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$x\text{-Integration: Von } x = -R \cdot \sin \alpha \quad \text{bis} \quad x = R \cdot \sin \alpha$$

- Das *Doppelintegral* für den *Flächeninhalt* lautet unter Berücksichtigung der Spiegelsymmetrie zur y -Achse:

$$A = \iint_{(A)} 1 \, dA = \int_{x=-R \cdot \sin \alpha}^{R \cdot \sin \alpha} \int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 1 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_{x=0}^{R \cdot \sin \alpha} \int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 1 \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy = \left[y \right]_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \sqrt{R^2-x^2} - R \cdot \cos \alpha$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{R \cdot \sin \alpha} (\sqrt{R^2-x^2} - R \cdot \cos \alpha) \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{R^2-x^2} + R^2 \cdot \arcsin \left(\frac{x}{R} \right) \right) - R \cdot \cos \alpha \cdot x \right]_0^{R \cdot \sin \alpha} = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} R^2 \cdot \underbrace{\arcsin(\sin \alpha)}_{\alpha} - R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{R^2 (1 - \sin^2 \alpha)} + \frac{1}{2} R^2 \alpha - R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &\quad \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} R^2 \alpha - R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \cdot \underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)} = \frac{1}{2} R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \quad (\text{siehe Formelsammlung, III.7.6.3}) \end{aligned}$$

(Berechnung des Integrals $\int \sqrt{R^2-x^2} \, dx$ nach Integral Nr. 141 mit $a = R$)
Die Fläche beträgt somit

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right) = R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right)$$

oder (unter Berücksichtigung von $\alpha = \varphi/2$)

$$A = R^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \right) = \frac{1}{2} R^2 (\varphi - \sin \varphi)$$

- b) Der *Schwerpunkt* S liegt aus *Symmetriegründen* auf der *y-Achse* (Symmetrieachse). Somit ist $x_S = 0$. Für die Schwerpunktsordinate y_S gilt dann unter Berücksichtigung der Spiegelsymmetrie des Kreissegmentes bezüglich der *y-Achse*:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y \, dA = \frac{1}{R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right)} \cdot \int_{x=-R \cdot \sin \alpha}^{R \cdot \sin \alpha} \int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy \, dx =$$

$$= \frac{2}{R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right)} \cdot \int_{x=0}^{R \cdot \sin \alpha} \int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\begin{aligned} \int_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y \, dy &= \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_{y=R \cdot \cos \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} (R^2 - x^2 - R^2 \cdot \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2} [R^2 (\underbrace{1 - \cos^2 \alpha}_{\sin^2 \alpha}) - x^2] = \\ &= \frac{1}{2} (R^2 \cdot \sin^2 \alpha - x^2) \end{aligned}$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{R \cdot \sin \alpha} \frac{1}{2} (R^2 \cdot \sin^2 \alpha - x^2) \, dx &= \frac{1}{2} \left[R^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{R \cdot \sin \alpha} = \\ &= \frac{1}{2} \left(R^3 \cdot \sin^3 \alpha - \frac{1}{3} R^3 \cdot \sin^3 \alpha \right) = \frac{1}{3} R^3 \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Für die Schwerpunktskoordinate y_S erhalten wir damit

$$y_S = \frac{2}{R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right)} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot \sin^3 \alpha = \frac{2R \cdot \sin^3 \alpha}{3 \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right)}$$

oder (unter Berücksichtigung von $\alpha = \varphi/2$)

$$y_S = \frac{2R \cdot \sin^3(\varphi/2)}{3 \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \right)} = \frac{2R \cdot \sin^3(\varphi/2)}{\frac{3}{2} (\varphi - \sin \varphi)} = \frac{4R \cdot \sin^3(\varphi/2)}{3 (\varphi - \sin \varphi)}$$

Anmerkung: Bei einem Blech der Stärke (Dicke) h liegt die Höhenkoordinate (z -Koordinate) des Schwerpunktes bei $z_S = h/2$. Für ein hauchdünnes Blech ($h \rightarrow 0$) gilt $z_S = 0$.

- c) Im Sonderfall $\varphi = \pi$ erhalten wir einen *Halbkreis* mit der Fläche $A = \frac{1}{2} \pi R^2$ und den Schwerpunktskoordinaten $x_S = 0$ und $y_S = \frac{4R}{3\pi} = 0,424 R$.

Beispiel 11: Magnetischer Fluss durch eine Leiterschleife
Doppelintegral in Polarkoordinaten

Eine kreisförmig gebogene *Leiterschleife* vom Radius R wird *senkrecht* von einem *Magnetfeld* durchflutet, dessen magnetische Flussdichte B nach der Gleichung

$$B(r) = B_0 \cdot e^{-r^2}, \quad r \geq 0$$

in *radialer* Richtung nach außen hin abnimmt (Bild VIII-11).

r : Abstand vom Kreismittelpunkt; $B_0 > 0$

Bestimmen Sie den *magnetischen Fluss* Φ durch die Leiterschleife mittels *Doppelintegration*.

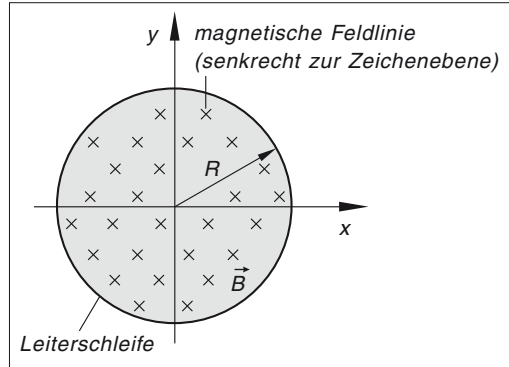


Bild VIII-11

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.1.2.2

Physikalische Grundlagen: A38

Lösung:

Der *magnetische Fluss* Φ durch die Leiterschleife ist definitionsgemäß durch das Doppelintegral

$$\Phi = \iint_{(A)} B(r) dA$$

gegeben [A38]. In *Polarkoordinaten* ist $dA = r dr d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* lauten dann:

r-Integration: Von $r = 0$ bis $r = R$

φ -Integration: Von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Somit ist

$$\Phi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R B_0 \cdot e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi = B_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r \cdot e^{-r^2} dr d\varphi$$

Innere Integration (nach der Variablen r):

Das innere Integral $\int_{r=0}^R r \cdot e^{-r^2} dr$ lösen wir durch die folgende *Substitution*:

$$u = -r^2, \quad \frac{du}{dr} = -2r, \quad dr = -\frac{du}{2r}$$

$$\text{Untere Grenze: } r = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } r = R \Rightarrow u = -R^2$$

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^R r \cdot e^{-r^2} dr &= \int_{u=0}^{-R^2} r \cdot e^u \cdot \left(-\frac{du}{2r}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-R^2} e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_0^{-R^2} = \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-R^2} - 1) = \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ):

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) d\varphi &= \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) [\varphi]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \cdot 2\pi = \pi (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Der *magnetische Fluss* durch die kreisförmige Leiterschleife beträgt somit

$$\Phi = B_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r \cdot e^{-r^2} dr d\varphi = B_0 \pi (1 - e^{-R^2})$$

Beispiel 12: Stromstärke in einem Leiter bei ortsabhängiger Stromdichte

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Der in Bild VIII-12 skizzierte *elektrische Leiter* besitzt einen *kreisringförmigen* Querschnitt mit dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a . Er wird in seiner *Längsrichtung* von einem Strom durchflossen, dessen *Stromdichte* \vec{S} dem Betrage nach von innen nach außen hin nach der Gleichung

$$S(r) = S_0 \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad r_i \leq r \leq r_a$$

abnimmt.

r : senkrechter Abstand von der Symmetrieachse (z -Achse); $S_0 > 0$; $\alpha > 0$

Berechnen Sie die *Stromstärke* I durch ein *Doppelintegral*.

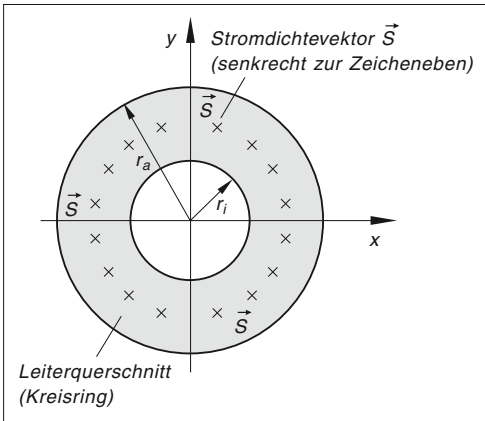


Bild VIII-12

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.1.2.2

Physikalische Grundlagen: A61

Lösung:

Definitionsgemäß [A61] ist die Stromstärke durch das Doppelintegral

$$I = \iint_{(A)} dI = \iint_{(A)} S dA$$

gegeben. Wegen der Kreissymmetrie verwenden wir zweckmäßigerweise *Polarkoordinaten* r und φ . Das *Flächenelement* ist $dA = r dr d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* lauten (siehe Bild VIII-12):

r-Integration: Von $r = r_i$ bis $r = r_a$

φ -Integration: Von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Die *Stromstärke* lässt sich damit durch das folgende *Doppelintegral* berechnen:

$$I = \iint_{(A)} S(r) \cdot r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} S_0 \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{r} \cdot r dr d\varphi = S_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} e^{-\alpha r} dr d\varphi$$

Wir lösen dieses Integral durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen.

Innere Integration (nach der Variablen r):

Das innere Integral lösen wir durch die folgende *Substitution*:

$$u = -\alpha r, \quad \frac{du}{dr} = -\alpha, \quad dr = -\frac{du}{\alpha}$$

$$\text{Untere Grenze: } r = r_i \Rightarrow u = -\alpha r_i$$

$$\text{Obere Grenze: } r = r_a \Rightarrow u = -\alpha r_a$$

$$\begin{aligned}
 \int_{r=r_i}^{r_a} e^{-\alpha r} dr &= \int_{u=-\alpha r_i}^{-\alpha r_a} e^u \cdot \left(-\frac{du}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \int_{-\alpha r_i}^{-\alpha r_a} e^u du = -\frac{1}{\alpha} \left[e^u \right]_{-\alpha r_i}^{-\alpha r_a} = \\
 &= -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_a} - e^{-\alpha r_i}) = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a})
 \end{aligned}$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ):

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a}) d\varphi &= \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a}) \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \\
 &= \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a}) \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a}) \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a})
 \end{aligned}$$

Die Stromstärke beträgt damit

$$I = S_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} e^{-\alpha r} dr d\varphi = \frac{2\pi S_0}{\alpha} (e^{-\alpha r_i} - e^{-\alpha r_a})$$

Beispiel 13: Gaußsche Normalverteilung

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Messwerte und Messfehler einer physikalisch-technischen Größe t sind im Regelfall *normalverteilt*, d. h. sie unterliegen der *Gaußschen Normalverteilung* mit der Dichtefunktion

$$\varphi(t) = N \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

und den beiden Kennwerten (Parametern)

μ (Mittel- oder Erwartungswert) und σ (Standardabweichung)⁴⁾.

Der Faktor N in der Dichtefunktion wird dabei so gewählt, dass die *Gesamtfläche* unter der Gaußschen Kurve den Wert 1 erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} dt = 1$$

⁴⁾ Eine ausführliche Darstellung der Gaußschen Normalverteilung finden Sie in Band 3, Abschnitt II.6.4.1.

Man bezeichnet diesen Vorgang als *Normierung*, den Faktor N daher folgerichtig als *Normierungsfaktor*. Dieses Vorgehen hat einen tieferen Grund: Im Falle der Normierung ist die *Wahrscheinlichkeit* P dafür, dass man bei einer *Messung* der Größe t einen *zwischen* a und b liegenden Messwert erhält, durch die *Fläche* unter der Gaußkurve im Intervall $a \leq t \leq b$, d. h. durch das *Integral*

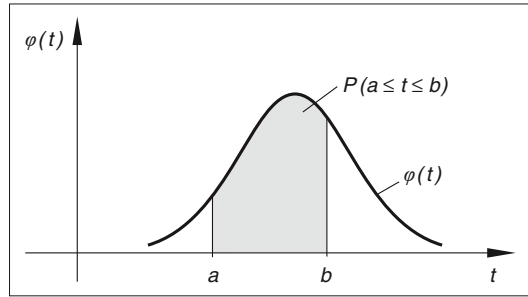


Bild VIII-13

$$P(a \leq t \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt = N \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} dt$$

gegeben (grau unterlegte Fläche in Bild VIII-13). Bestimmen Sie den *Normierungsfaktor* N unter Beachtung des Lösungshinweises.

Lösungshinweis: Das uneigentliche Integral ist elementar *nicht* lösbar. Es lässt sich jedoch mit einem (zunächst vielleicht etwas sonderbar erscheinenden) „mathematischen Trick“ mit Hilfe eines *Doppelintegrals* schrittweise wie folgt lösen:

- (1) Führen Sie zunächst die *Substitution* $x = \frac{t - \mu}{\sigma}$ durch. Sie führt auf die übersichtlichere Gleichung

$$N \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = 1$$

- (2) *Quadrieren* Sie jetzt diese Gleichung und führen Sie in den beiden (identischen) Integralen der linken Seite *formal unterschiedliche* Bezeichnungen für die Integrationsvariable ein (z. B. x und y)⁵⁾. Sie erhalten dann die Gleichung

$$N^2 \sigma^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \right) = 1$$

Das Produkt der beiden Integrale lässt sich durch ein *Doppelintegral* in kartesischen Koordinaten darstellen, wobei über die *gesamte* x, y -Ebene zu integrieren ist.

- (3) Lösen Sie dieses Doppelintegral, in dem Sie jetzt zu *Polarkoordinaten* übergehen und berechnen Sie anschließend aus der Gleichung den Normierungsfaktor N .

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.1.2.2

⁵⁾ Der Wert der Integrale bleibt davon unberührt.

Lösung:

Wir gehen in der vorgeschlagenen Weise vor.

$$(1) \text{ Substitution: } x = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sigma}, \quad dt = \sigma dx$$

$$\text{Untere Grenze: } t = -\infty \Rightarrow x = -\infty$$

$$\text{Obere Grenze: } t = \infty \Rightarrow x = \infty$$

$$N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} dt = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} \cdot \sigma dx = N \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = 1$$

(2) *Quadrieren* der Gleichung und *Umbenennen* der Integrationsvariablen des zweiten (rechten) Integrals ($x \rightarrow y$):

$$N^2 \sigma^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \right) = 1$$

Darstellung des Integralproduktes als *Doppelintegral*:

$$\begin{aligned} N^2 \sigma^2 \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2} dy dx &= \\ &= N^2 \sigma^2 \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (x^2 + y^2)} dy dx = 1 \end{aligned}$$

(3) Übergang zu den *Polarkoordinaten* r und φ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2} (x^2 + y^2)} = e^{-\frac{1}{2} r^2}$$

$$dA = dy dx \Rightarrow dA = r dr d\varphi$$

Die Integration erfolgt dabei über die *gesamte* x, y -Ebene. Somit lauten die *Integrationsgrenzen* (in Polarkoordinaten ausgedrückt):

$$r\text{-Integration: Von } r = 0 \text{ bis } r = \infty$$

$$\varphi\text{-Integration: Von } \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 2\pi$$

Damit erhalten wir das folgende *Doppelintegral* in Polarkoordinaten:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} r^2} \cdot r dr d\varphi$$

Wir lösen dieses Integral durch zwei (gewöhnliche) Integrationen.

Innere Integration (nach der Variablen r):

Das innere Integral $\int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \, dr$ wird durch die *Substitution*

$$u = -\frac{1}{2}r^2, \quad \frac{du}{dr} = -r, \quad dr = -\frac{du}{r}$$

$$\text{Untere Grenze: } r = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } r = \infty \Rightarrow u = -\infty$$

wie folgt gelöst:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \, dr &= \int_{u=0}^{-\infty} e^u \cdot r \left(-\frac{du}{r}\right) = - \int_0^{-\infty} e^u \, du = - \left[e^u \right]_0^{-\infty} = \\ &= -(0 - 1) = 1 \quad (e^u \rightarrow 0 \text{ für } u \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ):

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Somit ist

$$\begin{aligned} N^2 \sigma^2 \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dy \, dx &= \\ &= N^2 \sigma^2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \, dr = N^2 \sigma^2 \cdot 2\pi = 1 \end{aligned}$$

und der *Normierungsfaktor* besitzt den Wert

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$$

Die normierte Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung lautet damit:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

Beispiel 14: Schwerpunkt, Hauptachsen und Hauptflächenmomente
2. Grades (Hauptflächenträgheitsmomente) einer
trapezförmigen Fläche

Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten

Bestimmen Sie für die in Bild VIII-14 skizzierte trapezförmige Fläche folgende Größen mittels *Doppelintegration*:

- Die Lage des Flächenschwerpunktes $S = (x_S; y_S)$,
- die axialen Flächenmomente I_x und I_y sowie das gemischte Flächenmoment I_{xy} (auch Zentrifugalmoment genannt),
- die entsprechenden Flächenmomente I_ξ , I_η , und $I_{\xi\eta}$, bezogen auf die Achsen eines durch den Schwerpunkt S gehenden ξ, η -Parallelkoordinatensystems, unter Verwendung des Satzes von Steiner [A62],
- die beiden Hauptachsen u und v sowie die Hauptflächenmomente I_u und I_v [A63].

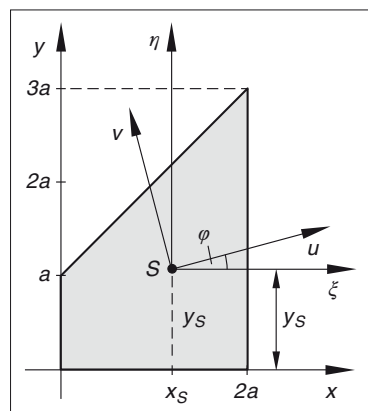


Bild VIII-14

u, v : Hauptachsen der Fläche; φ : Winkel zwischen der Hauptachse u und der ξ - bzw. x -Achse

Lösungshinweis: Die Berechnungsformel für das gemischte Flächenmoment (Zentrifugalmoment) I_{xy} lautet:

$$I_{xy} = \iint_{(A)} xy \, dA = \iint_{(A)} xy \, dy \, dx$$

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.1.3

Physikalische Grundlagen: A62, A63

Lösung:

Das trapezförmige Flächenstück hat den Flächeninhalt $A = \frac{(a + 3a)}{2} \cdot 2a = 4a^2$ und wird unten von der x -Achse und oben von der Geraden $y = x + a$ berandet. Damit ergeben sich für die anfallenden Doppelintegrale folgende Integrationsgrenzen:

y -Integration: Von $y = 0$ bis $y = x + a$

x -Integration: Von $x = 0$ bis $x = 2a$

a) **Berechnung der Schwerpunktskoordinate x_S**

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x \, dA = \frac{1}{4a^2} \cdot \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} x \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\int_{y=0}^{x+a} x \, dy = x \cdot \int_{y=0}^{x+a} 1 \, dy = x \left[y \right]_{y=0}^{x+a} = x(x+a) = x^2 + ax$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2a} (x^2 + ax) \, dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} ax^2 \right]_0^{2a} = \frac{8}{3} a^3 + 2a^3 = \\ &= \frac{8}{3} a^3 + \frac{6}{3} a^3 = \frac{14}{3} a^3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$x_S = \frac{1}{4a^2} \cdot \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} x \, dy \, dx = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{14}{3} a^3 = \frac{7}{6} a$$

Berechnung der Schwerpunktskoordinate y_S

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y \, dA = \frac{1}{4a^2} \cdot \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} y \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\int_{y=0}^{x+a} y \, dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x+a} = \frac{1}{2} (x+a)^2 = \frac{1}{2} (x^2 + 2ax + a^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2a} (x^2 + 2ax + a^2) \, dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 + ax^2 + a^2 x \right]_0^{2a} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} a^3 + 4a^3 + 2a^3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} a^3 + 6a^3 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} a^3 + \frac{18}{3} a^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} a^3 = \frac{13}{3} a^3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$y_S = \frac{1}{4a^2} \cdot \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} y \, dy \, dx = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{13}{3} a^3 = \frac{13}{12} a$$

Der *Schwerpunkt* liegt im Punkt $S = \left(\frac{7}{6} a; \frac{13}{12} a \right)$.

b) Berechnung des axialen Flächenmomentes I_x

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \, dA = \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} y^2 \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\int_{y=0}^{x+a} y^2 \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{x+a} = \frac{1}{3} (x+a)^3 = \frac{1}{3} (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \int_{x=0}^{2a} (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3) \, dx &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} x^4 + ax^3 + \frac{3}{2} a^2 x^2 + a^3 x \right]_0^{2a} = \\ &= \frac{1}{3} (4a^4 + 8a^4 + 6a^4 + 2a^4) = \frac{20}{3} a^4 \end{aligned}$$

Somit ist $I_x = \frac{20}{3} a^4$.

Berechnung des axialen Flächenmomentes I_y ⁶⁾

$$I_y = \iint_{(A)} x^2 \, dA = \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} x^2 \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\int_{y=0}^{x+a} x^2 \, dy = x^2 \cdot \int_{y=0}^{x+a} 1 \, dy = x^2 \left[y \right]_{y=0}^{x+a} = x^2 (x+a) = x^3 + ax^2$$

⁶⁾ Aus *Symmetriegründen* ist $I_y = I_x$. Der Übung halber wollen wir jedoch auf die direkte Berechnung nach der Definitionsformel nicht verzichten.

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2a} (x^3 + ax^2) dx &= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} ax^3 \right]_0^{2a} = 4a^4 + \frac{8}{3} a^4 = \\ &= \frac{12}{3} a^4 + \frac{8}{3} a^4 = \frac{20}{3} a^4 \end{aligned}$$

Somit ist $I_y = \frac{20}{3} a^4$ und $I_y = I_x$, wie bereits weiter vorne erkannt.

Berechnung des gemischten Flächenmomentes (Zentrifugalmomentes) I_{xy}

$$I_{xy} = \iint_{(A)} xy \, dA = \int_{x=0}^{2a} \int_{y=0}^{x+a} xy \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y):

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{x+a} xy \, dy &= x \cdot \int_{y=0}^{x+a} y \, dy = x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x+a} = \frac{1}{2} x \left[y^2 \right]_{y=0}^{x+a} = \frac{1}{2} x (x+a)^2 = \\ &= \frac{1}{2} x (x^2 + 2ax + a^2) = \frac{1}{2} (x^3 + 2ax^2 + a^2x) \end{aligned}$$

Äußere Integration (nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2a} (x^3 + 2ax^2 + a^2x) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} ax^3 + \frac{1}{2} a^2 x^2 \right]_0^{2a} = \\ &= \frac{1}{2} \left(4a^4 + \frac{16}{3} a^4 + 2a^4 \right) = \frac{1}{2} \left(6a^4 + \frac{16}{3} a^4 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{18}{3} a^4 + \frac{16}{3} a^4 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{3} a^4 = \frac{17}{3} a^4 \end{aligned}$$

Somit ist $I_{xy} = \frac{17}{3} a^4$.

c) Nach dem Satz von Steiner [A62] gilt

$$I_x = I_{\xi} + A \cdot y_S^2 \quad \text{und somit} \quad I_{\xi} = I_x - A \cdot y_S^2$$

Damit erhalten wir für das gesuchte axiale Flächenmoment I_{ξ} :

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \frac{20}{3} a^4 - 4a^2 \cdot \left(\frac{13}{12} a \right)^2 = \frac{20}{3} a^4 - 4a^2 \cdot \frac{169}{144} a^2 = \frac{20}{3} a^4 - \frac{169}{36} a^4 = \\ &= \frac{240}{36} a^4 - \frac{169}{36} a^4 = \frac{71}{36} a^4 \end{aligned}$$

Analog werden die Flächenmomente I_η und $I_{\xi\eta}$ bestimmt:

$$I_y = I_\eta + A \cdot x_S^2 \quad \text{oder} \quad I_\eta = I_y - A \cdot x_S^2$$

$$I_\eta = \frac{20}{3} a^4 - 4a^2 \cdot \left(\frac{7}{6} a\right)^2 = \frac{20}{3} a^4 - \frac{49}{9} a^4 = \frac{60}{9} a^4 - \frac{49}{9} a^4 = \frac{11}{9} a^4$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + A \cdot x_S \cdot y_S \quad \text{und somit} \quad I_{\xi\eta} = I_{xy} - A \cdot x_S \cdot y_S$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{17}{3} a^4 - 4a^2 \cdot \frac{7}{6} a \cdot \frac{13}{12} a = \frac{17}{3} a^4 - \frac{91}{18} a^4 = \frac{102}{18} a^4 - \frac{91}{18} a^4 = \frac{11}{18} a^4$$

- d) Die *Hauptachsen* u und v entstehen durch *Drehung* des ξ, η -Koordinatensystems um den Winkel φ , der aus der Gleichung

$$\tan(2\varphi) = -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta}$$

berechnet werden kann [A63]. Wir erhalten die folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \tan(2\varphi) &= -\frac{2 \cdot \frac{11}{18} a^4}{\frac{71}{36} a^4 - \frac{11}{9} a^4} = -\frac{\frac{11}{9}}{\frac{71}{36} - \frac{44}{36}} = -\frac{\frac{11}{9}}{\frac{27}{36}} = -\frac{11}{9} \cdot \frac{36}{27} = -\frac{44}{27} = \\ &= -1,6296 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2\varphi = \arctan(-1,6296) = -58,47^\circ \Rightarrow \varphi = -29,23^\circ$$

Die *Hauptachsen* u und v entstehen somit durch *Drehung* der Schwerpunktskoordinatenachsen ξ und η um den Winkel $29,23^\circ$ im *Uhrzeigersinn*!

Für die beiden *Hauptflächenmomente* I_u und I_v ergeben sich folgende Werte [A63]:

$$\begin{aligned} I_{u/v} &= \frac{1}{2} \left(I_\xi + I_\eta \pm \sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{71}{36} a^4 + \frac{11}{9} a^4 \pm \sqrt{\left(\frac{71}{36} a^4 - \frac{11}{9} a^4\right)^2 + 4\left(\frac{11}{18} a^4\right)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{71+44}{36} a^4 \pm \sqrt{\left(\frac{71-44}{36}\right)^2 \cdot a^8 + 4\left(\frac{22}{36}\right)^2 \cdot a^8} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{115}{36} a^4 \pm \sqrt{\left(\frac{27}{36}\right)^2 + 4\left(\frac{22}{36}\right)^2 \cdot a^4} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{115 \pm \sqrt{27^2 + 4 \cdot 22^2}}{36} \right] a^4 = \frac{1}{72} (115 \pm \sqrt{2665}) a^4 = \\
 &= \frac{1}{72} (115 \pm 51,624) a^4 = (1,597 \pm 0,717) a^4 \\
 I_u &= (1,597 + 0,717) a^4 = 2,314 a^4 \\
 I_v &= (1,597 - 0,717) a^4 = 0,880 a^4
 \end{aligned}$$

Beispiel 15: Volumen und Schwerpunkt eines Tetraeders
Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten

Bild VIII-15 zeigt einen *homogenen* Körper in Gestalt eines *Tetraeders* (*dreiseitige Pyramide*). Bestimmen Sie unter *ausschließlicher* Verwendung von *Dreifachintegralen*

- a) das *Volumen* V ,
 b) den *Schwerpunkt* $S = (x_S; y_S; z_S)$ dieses Körpers.

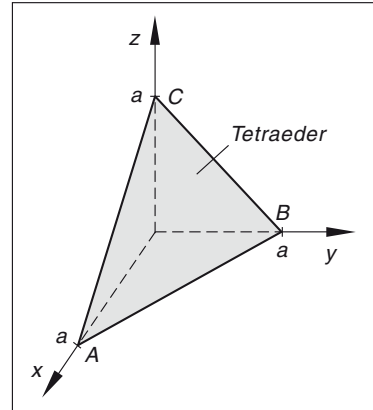


Bild VIII-15

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.2.3

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die *Integrationsgrenzen* der anfallenden *Dreifachintegrale*. Der „*Boden*“ des Tetraeders liegt in der x, y -Ebene mit der Gleichung $z = 0$, die ebene „*Deckelfläche*“ ist das *gleichseitige* Dreieck ABC . Die Gleichung der Ebene, die dieses Dreieck enthält, kann wegen der vorhandenen *Symmetrie* in der besonders einfachen Form

$$x + y + z + d = 0 \quad \text{oder} \quad z = -x - y - d$$

angesetzt werden. Die noch fehlende Konstante d lässt sich dann leicht durch Einsetzen der Koordinaten *eines* der drei Punkte, z. B. des Punktes $A = (a; 0; 0)$ in diese Gleichung bestimmen. Dies führt zu

$$0 = -a - 0 - d = -a - d \Rightarrow d = -a$$

Somit ist $z = -x - y + a$ die Gleichung der ebenen „Deckelfläche“. Die Schnittkurve dieser Ebene mit der x, y -Ebene ist die Gerade $y = -x + a$ (sie verläuft durch die Punkte A und B , siehe Bild VIII-15). Damit ergeben sich folgende Integrationsgrenzen:

z -Integration: Von $z = 0$ bis $z = -x - y + a$

y -Integration: Von $y = 0$ bis $y = -x + a$

x -Integration: Von $x = 0$ bis $x = a$

a) Die Volumenberechnung erfolgt durch das Dreifachintegral

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{-x+a} \int_{z=0}^{-x-y+a} 1 \, dz \, dy \, dx$$

in drei nacheinander auszuführenden Integrationsschritten.

1. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):

$$\int_{z=0}^{-x-y+a} 1 \, dz = \left[z \right]_{z=0}^{-x-y+a} = -x - y + a = (-x + a) - y$$

2. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen y):

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-x+a} [(-x + a) - y] \, dy &= \left[(-x + a)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{-x+a} = \\ &= (-x + a)(-x + a) - \frac{1}{2}(-x + a)^2 = (-x + a)^2 - \frac{1}{2}(-x + a)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(-x + a)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 2ax + a^2) \end{aligned}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen x):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^a (x^2 - 2ax + a^2) \, dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{-x+a} \int_{z=0}^{-x-y+a} 1 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{6}a^3$$

- b) Bei der Berechnung der *Schwerpunktskoordinaten* beachten wir, dass diese aus *Symmetriegründen* übereinstimmen: $x_S = y_S = z_S$. Es genügt daher, die Schwerpunktskoordinate x_S zu berechnen:

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} x \, dV = \frac{6}{a^3} \cdot \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{-x+a} \int_{z=0}^{-x-y+a} x \, dz \, dy \, dx$$

1. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):*

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{-x-y+a} x \, dz &= x \cdot \int_{z=0}^{-x-y+a} 1 \, dz = x \left[z \right]_{z=0}^{-x-y+a} = x(-x-y+a) = \\ &= x(-x+a-y) = x(-x+a) - xy \end{aligned}$$

2. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-x+a} [x(-x+a) - xy] \, dy &= \left[x(-x+a)y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^{-x+a} = \\ &= x(-x+a)(-x+a) - \frac{1}{2}x(-x+a)^2 = x(-x+a)^2 - \frac{1}{2}x(-x+a)^2 = \\ &= \frac{1}{2}x(-x+a)^2 = \frac{1}{2}x(x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{2}(x^3 - 2ax^2 + a^2x) \end{aligned}$$

3. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen x):*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^a (x^3 - 2ax^2 + a^2x) \, dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^4 + \frac{1}{2}a^4 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{12}a^4 - \frac{8}{12}a^4 + \frac{6}{12}a^4 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}a^4 = \frac{1}{24}a^4 \end{aligned}$$

Somit ist

$$x_S = \frac{6}{a^3} \cdot \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{-x+a} \int_{z=0}^{-x-y+a} x \, dz \, dy \, dx = \frac{6}{a^3} \cdot \frac{1}{24}a^4 = \frac{1}{4}a$$

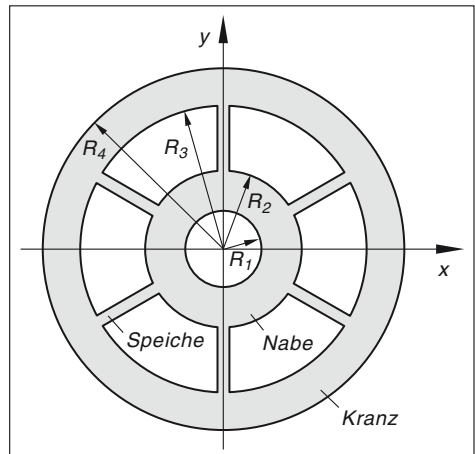
und $S = \left(\frac{1}{4}a; \frac{1}{4}a; \frac{1}{4}a \right)$ der gesuchte *Schwerpunkt* des Tetraeders.

Beispiel 16: Massenträgheitsmoment eines Speichenrades
Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

Bild VIII-16 zeigt ein homogenes *Speichenrad* der Dicke h , dessen Speichen als *masselos* angenommen werden.

- Bestimmen Sie das *Massenträgheitsmoment* J_{Rad} dieses Rades bezüglich der Drehachse (z -Achse, *senkrecht* aus der Zeichenebene nach *oben* ragend).
- Wie groß ist das *Massenträgheitsmoment* J_{Scheibe} einer homogenen *Zylinderscheibe* mit dem Radius R bei gleicher Dicke und gleichem Material?
Behandeln Sie diese Teilaufgabe als einen *Sonderfall* von a).

Bild VIII-16



R_1, R_2 : Innen- bzw. Außenradius der *Nabe*; R_3, R_4 : Innen- bzw. Außenradius des *Kranzes*;
 ϱ : *konstante* Dichte des Materials

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.2.3.3

Lösung:

- Wir verwenden zweckmäßigerweise *Zylinderkoordinaten*. Die Integralformel zur Berechnung eines *Massenträgheitsmomentes* lautet dann

$$J = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r^3 dz dr d\varphi$$

Die *Grundfläche* des Speichenrads legen wir in die x, y -Ebene. Die „*Deckelfläche*“ befindet sich dann in der *oberhalb* dieser Ebene gelegenen *Parallelebene* mit der Gleichung $z = h$. Das gesuchte *Massenträgheitsmoment* des Speichenrads setzt sich *additiv* aus den *Massenträgheitsmomenten* von *Nabe* und *Kranz* zusammen, die wir nun einzeln berechnen.

Massenträgheitsmoment der Nabe

Die *Integrationsgrenzen* lauten:

z -Integration: Von $z = 0$ bis $z = h$

r -Integration: Von $r = R_1$ bis $r = R_2$

φ -Integration: Von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Somit ist

$$J_{\text{Nabe}} = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{z=0}^h r^3 dz dr d\varphi$$

Die Integralberechnung erfolgt in *drei* nacheinander auszuführenden Integrationsschritten.

1. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):*

$$\int_{z=0}^h r^3 dz = r^3 \cdot \int_{z=0}^h 1 dz = r^3 \left[z \right]_{z=0}^h = r^3 h$$

2. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen r):*

$$\int_{r=R_1}^{R_2} r^3 h dr = h \cdot \int_{r=R_1}^{R_2} r^3 dr = h \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=R_1}^{R_2} = \frac{h}{4} \left[r^4 \right]_{r=R_1}^{R_2} = \frac{h}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

3. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen φ):*

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{h}{4} (R_2^4 - R_1^4) d\varphi &= \frac{h}{4} (R_2^4 - R_1^4) \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{h}{4} (R_2^4 - R_1^4) \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{h}{4} (R_2^4 - R_1^4) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} h (R_2^4 - R_1^4) \end{aligned}$$

Das Massenträgheitsmoment der *Nabe* beträgt damit

$$J_{\text{Nabe}} = \varrho \cdot \frac{\pi}{2} h (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{2} \varrho h (R_2^4 - R_1^4)$$

Massenträgheitsmoment des Kranzes

Die *Integrationsgrenzen* sind die *gleichen* wie bei der Nabe mit *Ausnahme* der Integration in radialer (axialer) Richtung. Diese erfolgt beim *Kranz* von $r = R_3$ bis $r = R_4$. Somit ist

$$J_{\text{Kranz}} = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_3}^{R_4} \int_{z=0}^h r^3 dz dr d\varphi$$

Die Durchführung der einzelnen Integrationen verläuft wie bei der *Nabe* und führt zu folgendem *Endergebnis*:

$$J_{\text{Kranz}} = \frac{\pi}{2} \varrho h (R_4^4 - R_3^4)$$

Massenträgheitsmoment des Speichenrades

Das gesuchte *Massenträgheitsmoment* des *Speichenrades* beträgt damit

$$\begin{aligned} J_{\text{Rad}} &= J_{\text{Nabe}} + J_{\text{Kranz}} = \frac{\pi}{2} \varrho h (R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi}{2} \varrho h (R_4^4 - R_3^4) = \\ &= \frac{\pi}{2} \varrho h (R_2^4 + R_4^4 - R_1^4 - R_3^4) \end{aligned}$$

- b) Für den Sonderfall $R_1 = 0$, $R_2 = R_3$ erhält man ein *Zylinderrad* (eine Zylinderscheibe) mit dem Radius $R = R_4$. Das Massenträgheitsmoment führt dann auf die aus dem Lehrbuch bereits bekannte Formel⁷⁾

$$\begin{aligned} J_{\text{Scheibe}} &= \frac{\pi}{2} \varrho h (R_3^4 + R^4 - 0 - R_3^4) = \frac{\pi}{2} \varrho h R^4 = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\varrho \cdot \pi R^2 h)}_{m = \varrho V} R^2 = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

$V = \pi R^2 h$ ist dabei das Volumen, $m = \varrho \cdot \pi R^2 h$ die Masse des Zylinderrads.

Beispiel 17: Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers mit elliptischem Querschnitt und zylindrischer Bohrung
Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten

Bild VIII-17 zeigt im Längsschnitt einen homogenen *Rotationskörper* mit einem *elliptischem* Querschnitt und einer *zylindrischen* Bohrung in Achsenrichtung (z -Achse).

a, b : Halbachsen der elliptischen Querschnittsfläche

c : Radius der Bohrung ($0 < c < a$)

Wo liegt der *Schwerpunkt* S dieses Körpers?

Wie verschiebt sich der Schwerpunkt im Grenzfall $c \rightarrow 0$ (keine Bohrung)?

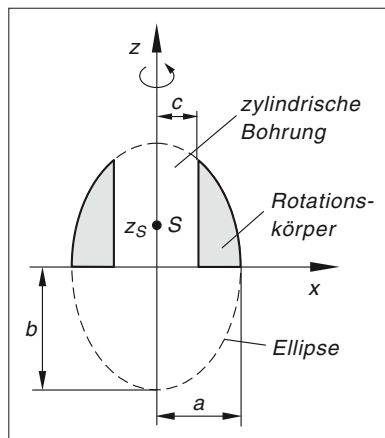


Bild VIII-17

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.2.2.2 und III.3.2.3.2

⁷⁾ Siehe hierzu Band 1, Abschnitt V.10.9.1.

Lösung:

Wegen der *Rotationssymmetrie* verwenden wir zweckmäßigerweise *Zylinderkoordinaten*. Für die anfallenden Dreifachintegrale müssen zunächst die *Integrationsgrenzen* bestimmt werden. Die *obere* Begrenzungsfläche des Rotationskörpers entsteht durch Drehung der *Ellipse* mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad z = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad c \leq x \leq a$$

um die z -Achse. Die kartesische Koordinate x wird dabei zur Zylinderkoordinate r . Die Gleichung dieser *Rotationsfläche* lautet damit $z = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$, $c \leq r \leq a$. Die „*Bodenfläche*“ ist Teil der x, y -Ebene $z = 0$. Die Werte der Zylinderkoordinate r bewegen sich dabei zwischen $r = c$ und $r = a$. Somit lauten die *Integrationsgrenzen* wie folgt:

$$z\text{-Integration: Von } z = 0 \text{ bis } z = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$r\text{-Integration: Von } r = c \text{ bis } r = a$$

$$\varphi\text{-Integration: Von } \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 2\pi$$

Für die Bestimmung des *Schwerpunktes* benötigen wir das *Rotationsvolumen*, das wir daher zuerst berechnen.

Volumenberechnung (Volumenelement $dV = r \, dz \, dr \, d\varphi$)

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=c}^a \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

1. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):*

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz &= r \cdot \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} 1 \, dz = r \left[z \right]_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} = r \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} = \\ &= \frac{b}{a} \cdot r \sqrt{a^2 - r^2} \end{aligned}$$

2. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen r):*

$$\frac{b}{a} \cdot \int_{r=c}^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = ?$$

Wir lösen dieses Integral mit der folgenden Substitution:

$$u = a^2 - r^2, \quad \frac{du}{dr} = -2r, \quad dr = -\frac{du}{2r}$$

$$\text{Untere Grenze: } r = c \Rightarrow u = a^2 - c^2$$

$$\text{Obere Grenze: } r = a \Rightarrow u = a^2 - a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \cdot \int_{r=c}^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr &= \frac{b}{a} \cdot \int_{u=a^2-c^2}^0 r \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{du}{2r}\right) = -\frac{b}{2a} \cdot \int_{a^2-c^2}^0 \sqrt{u} du = \\ &= \frac{b}{2a} \cdot \int_0^{a^2-c^2} u^{1/2} du = \frac{b}{2a} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^{a^2-c^2} = \frac{b}{2a} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^{a^2-c^2} = \\ &= \frac{b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3} \end{aligned}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen φ):

$$\begin{aligned} \frac{b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi &= \frac{b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3} \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3} \end{aligned}$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt somit

$$V = \frac{2\pi b}{3a} \sqrt{(a^2 - c^2)^3}$$

Berechnung des Schwerpunktes S

Der Schwerpunkt $S = (x_S; y_S; z_S)$ liegt wegen der Rotationssymmetrie auf der z -Achse. Daher gilt $x_S = y_S = 0$. Die Berechnung der z -Koordinate erfolgt durch das Dreifachintegral

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z dV = \frac{3a}{2\pi b \sqrt{(a^2 - c^2)^3}} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=c}^a \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} z r dz dr d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} z r dz &= r \cdot \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} z dz = r \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{2} r \left[z^2 \right]_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= \frac{1}{2} r \cdot \frac{b^2}{a^2} (a^2 - r^2) = \frac{b^2}{2a^2} r (a^2 - r^2) = \frac{b^2}{2a^2} (a^2 r - r^3) \end{aligned}$$

2. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen r):*

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2}{2a^2} \cdot \int_{r=c}^a (a^2 r - r^3) dr &= \frac{b^2}{2a^2} \left[\frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_c^a = \\
 &= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{2} a^2 c^2 + \frac{1}{4} c^4 \right) = \\
 &= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{2} a^2 c^2 + \frac{1}{4} c^4 \right) = \frac{b^2}{2a^2} \cdot \frac{a^4 - 2a^2 c^2 + c^4}{4} = \\
 &= \frac{b^2}{8a^2} \underbrace{(a^4 - 2a^2 c^2 + c^4)}_{(a^2 - c^2)^2} = \frac{b^2}{8a^2} (a^2 - c^2)^2 = \frac{b^2 (a^2 - c^2)^2}{8a^2}
 \end{aligned}$$

3. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen φ):*

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2 (a^2 - c^2)^2}{8a^2} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi &= \frac{b^2 (a^2 - c^2)^2}{8a^2} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{b^2 (a^2 - c^2)^2}{8a^2} \cdot 2\pi = \\
 &= \frac{\pi b^2 (a^2 - c^2)^2}{4a^2}
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 z_S &= \frac{3a}{2\pi b \sqrt{(a^2 - c^2)^3}} \cdot \frac{\pi b^2 (a^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{3b (a^2 - c^2)^{4/2}}{8a (a^2 - c^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{3b (a^2 - c^2)^{1/2}}{8a} = \frac{3b}{8a} \sqrt{a^2 - c^2}
 \end{aligned}$$

Grenzfall $c \rightarrow 0$ (Rotationskörper ohne Bohrung)

Im Grenzfall $c \rightarrow 0$ erhalten wir die obere Hälfte eines Rotationsellipsoids mit dem Volumen $V = \frac{2}{3} \pi a^2 b$. Der Schwerpunkt des Rotationskörpers verschiebt sich auf der z -Achse weiter nach oben und liegt jetzt bei $z_S = \frac{3}{8} b$.

Beispiel 18: Massenträgheitsmomente eines homogenen Kegels

Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten

Bild VIII-18 zeigt einen homogenen *Kreiskegel* mit dem Grundkreisradius R und der Höhe H , dessen Rotationsachse in die z -Achse fällt. Bestimmen Sie für diesen Körper mittels *Dreifachintegration* das jeweilige *Massenträgheitsmoment* J

- a) bezüglich eines *Durchmessers* der kreisförmigen Grundfläche,
- b) bezüglich einer zu diesem Durchmesser *parallelen* *Schwerpunktachse*,
- c) bezüglich einer zum Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche *parallelen* Achse durch die *Kegelspitze* (Punkt A),
- d) bezüglich der *Rotationsachse* (z -Achse)

ϱ : konstante Dichte des Kegels

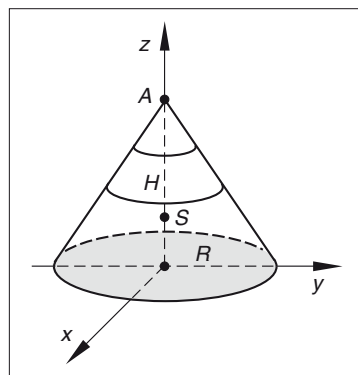


Bild VIII-18

Lösungshinweise: Zu a): Wegen der *Rotationssymmetrie* ist das Massenträgheitsmoment für *jeden* Durchmesser gleich. Stellen Sie zunächst die Integralformeln für J_x und J_y auf und *addieren* Sie diese. Durch Übergang zu *Zylinderkoordinaten* lässt sich dann das *Dreifachintegral* leicht lösen.

Zu b) und c): Verwenden Sie die Ergebnisse aus a) im Zusammenhang mit dem *Satz von Steiner* [A31] (Abstand des Schwerpunktes S von der Grundfläche: $z_S = H/4$).

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.2.2.2 und III.3.2.3.3

Physikalische Grundlagen: A31

Lösung:

- a) Wir gehen bei unseren Überlegungen von einem *im Kegel* gelegenen *Volumenelement* dV mit der *Masse* $dm = \varrho dV$ aus, dessen *räumliche Lage* gemäß Bild VIII-19 durch den Punkt $P = (x; y; z)$ beschrieben wird. Der *senkrechte Abstand* zur x -Achse ist $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$ (Satz des Pythagoras). Dieses Element liefert damit definitionsgemäß den Beitrag

$$dJ_x = r_x^2 dm = \varrho (y^2 + z^2) dV$$

zum Massenträgheitsmoment des Kegels bezüglich der x -Achse. Durch *Summation* über sämtliche Volumenelemente im Kegelvolumen, d. h. *Integration* wird hieraus das *Dreifachintegral*

$$J_x = \iiint_{(V)} dJ_x = \varrho \cdot \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dV$$

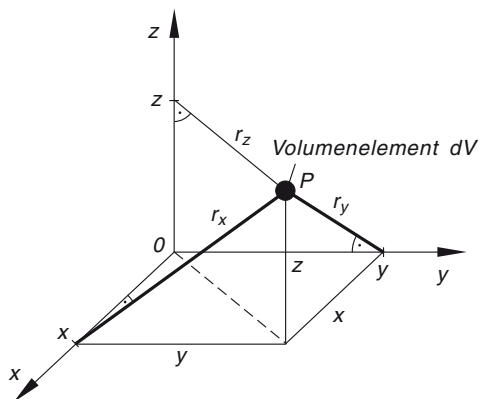


Bild VIII-19

Analoge Überlegungen führen bei der y -Achse als Bezugsachse auf das *Dreifachintegral*

$$J_y = \iiint_{(V)} dJ_y = \varrho \cdot \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) dV$$

Aus *Symmetriegründen* ist $J_x = J_y$. Wir *addieren* die beiden Integrale und fassen sie zu *einem Integral* zusammen:

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= J_x + J_x = 2J_x = \varrho \cdot \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dV + \varrho \cdot \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) dV = \\ &= \varrho \cdot \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + 2z^2) dV \end{aligned}$$

Beim Übergang zu den *Zylinderkoordinaten* r , φ und z wird daraus unter Berücksichtigung von $x^2 + y^2 = r^2$ und $dV = r dz dr d\varphi$

$$2J_x = \varrho \cdot \iiint_{(V)} (r^2 + 2z^2) r dz dr d\varphi$$

(r_z ist der senkrechte Abstand des Volumenelementes dV von der z -Achse und damit identisch mit der Zylinderkoordinate r , siehe Bild VIII-19). Somit ist

$$J_x = \frac{1}{2} \varrho \cdot \iiint_{(V)} (r^2 + 2z^2) r dz dr d\varphi = \frac{1}{2} \varrho \cdot \iiint_{(V)} (r^3 + 2rz^2) dz dr d\varphi$$

Festlegung der Integrationsgrenzen (siehe Bild VIII-20)

Der Kegel entsteht durch Rotation der *Geraden* $z = -\frac{H}{R}(x - R)$, $0 \leq x \leq R$ um die z -Achse. Dabei wird aus der kartesischen Koordinate x die Zylinderkoordinate r . Seine *Mantelfläche* wird somit durch die Funktionsgleichung $z = -\frac{H}{R}(r - R)$, $0 \leq r \leq R$ beschrieben und bildet die *obere* Begrenzungsfläche des Kegels. Die „*Bodenfläche*“ ist Teil der x, y -Ebene $z = 0$. Die *Projektion* des Kegels in diese Ebene führt zu der *Kreisfläche* $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

$$z\text{-Integration: Von } z = 0 \text{ bis } z = -\frac{H}{R}(r - R)$$

$$r\text{-Integration: Von } r = 0 \text{ bis } r = R$$

$$\varphi\text{-Integration: Von } \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 2\pi$$

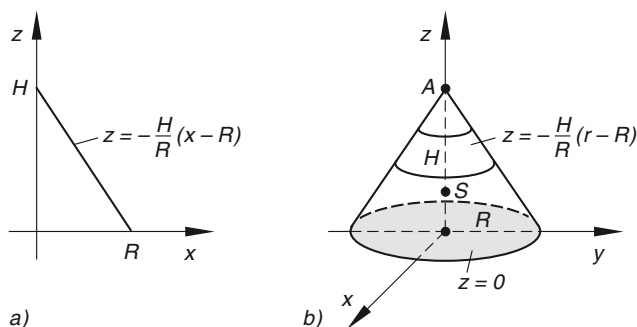


Bild VIII-20

Integralberechnung (Massenträgheitsmoment J_x)

Die Integralformel für das gesuchte Massenträgheitsmoment J_x lautet somit

$$J_x = \frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} (r^3 + 2rz^2) dz dr d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):

$$\begin{aligned} & \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} (r^3 + 2rz^2) dz = \left[r^3 z + \frac{2}{3} r z^3 \right]_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} = \\ & = r^3 \left(-\frac{H}{R}(r-R) \right) + \frac{2}{3} r \left(-\frac{H}{R}(r-R) \right)^3 = \\ & = -\frac{H}{R} r^3 (r-R) + \frac{2}{3} r \left(-\frac{H^3}{R^3} \right) (r-R)^3 = \\ & = -\frac{H}{R} (r^4 - Rr^3) - \frac{2H^3}{3R^3} r (r^3 - 3Rr^2 + 3R^2r - R^3) = \\ & = -\frac{H}{R} (r^4 - Rr^3) - \frac{2H^3}{3R^3} (r^4 - 3Rr^3 + 3R^2r^2 - R^3r) \end{aligned}$$

2. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen r):

$$\begin{aligned} & \int_{r=0}^R \left[-\frac{H}{R} (r^4 - Rr^3) - \frac{2H^3}{3R^3} (r^4 - 3Rr^3 + 3R^2r^2 - R^3r) \right] dr = \\ & = \left[-\frac{H}{R} \left(\frac{1}{5} r^5 - \frac{1}{4} Rr^4 \right) - \frac{2H^3}{3R^3} \left(\frac{1}{5} r^5 - \frac{3}{4} Rr^4 + R^2r^3 - \frac{1}{2} R^3r^2 \right) \right]_0^R = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{H}{R} \left(\frac{1}{5} R^5 - \frac{1}{4} R^5 \right) - \frac{2H^3}{3R^3} \left(\frac{1}{5} R^5 - \frac{3}{4} R^5 + R^5 - \frac{1}{2} R^5 \right) = \\
 &= -\frac{H}{R} \left(\frac{4}{20} R^5 - \frac{5}{20} R^5 \right) - \frac{2H^3}{3R^3} \left(\frac{4}{20} R^5 - \frac{15}{20} R^5 + \frac{20}{20} R^5 - \frac{10}{20} R^5 \right) = \\
 &= -\frac{H}{R} \left(-\frac{1}{20} R^5 \right) - \frac{2H^3}{3R^3} \left(-\frac{1}{20} R^5 \right) = \frac{1}{20} H R^4 + \frac{1}{30} H^3 R^2 = \\
 &= \frac{3}{60} H R^4 + \frac{2}{60} H^3 R^2 = \frac{1}{60} H R^2 (3R^2 + 2H^2)
 \end{aligned}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen φ):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{60} H R^2 (3R^2 + 2H^2) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi &= \frac{1}{60} H R^2 (3R^2 + 2H^2) [\varphi]_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{1}{60} H R^2 (3R^2 + 2H^2) \cdot 2\pi = \frac{1}{30} \pi H R^2 (3R^2 + 2H^2)
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{1}{2} \varrho \cdot \frac{1}{30} \pi H R^2 (3R^2 + 2H^2) = \frac{1}{60} \varrho \pi H R^2 (3R^2 + 2H^2) = \\
 &= \frac{1}{20} \left(\underbrace{\varrho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H}_{m = \varrho V} \right) (3R^2 + 2H^2) = \frac{1}{20} m (3R^2 + 2H^2)
 \end{aligned}$$

das gesuchte *Massenträgheitsmoment* des Kegels, bezogen auf einen *beliebigen* Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche. Dabei ist $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ das Volumen und $m = \varrho V = \varrho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H$ die *Masse des Kegels*.

- b) Wir wählen als Durchmesser die *x-Achse*. Die dazu *parallele* Schwerpunktachse hat den Abstand $z_S = H/4$ (Bild VIII-21).

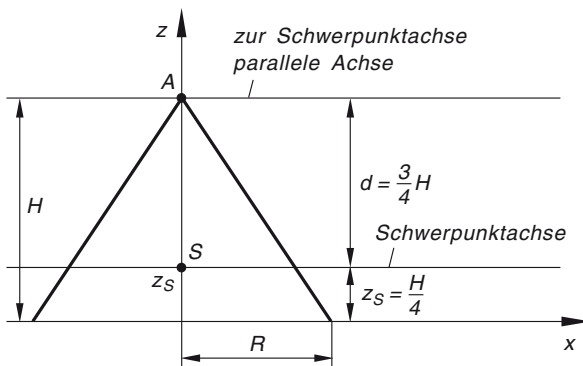


Bild VIII-21

Aus dem *Satz von Steiner* [A31] folgt dann für das gesuchte Massenträgheitsmoment J_S bezüglich dieser Schwerpunktachse:

$$J_x = J_S + m z_S^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} J_S &= J_x - m z_S^2 = \frac{1}{20} m (3R^2 + 2H^2) - \frac{1}{16} m H^2 = \\ &= \frac{4}{80} m (3R^2 + 2H^2) - \frac{5}{80} m H^2 = \frac{1}{80} m [4(3R^2 + 2H^2) - 5H^2] = \\ &= \frac{1}{80} m (12R^2 + 8H^2 - 5H^2) = \frac{1}{80} m (12R^2 + 3H^2) = \frac{3}{80} m (4R^2 + H^2) \end{aligned}$$

- c) Die beiden *Parallelachsen* durch Kegelspitze A und Schwerpunkt S verlaufen nach Bild VIII-21 im Abstand $d = H - z_S = H - \frac{H}{4} = \frac{3}{4} H$. Aus dem *Satz von Steiner* [A31] folgt dann unter Verwendung der Ergebnisse aus Lösungsteil b):

$$\begin{aligned} J_A &= J_S + m d^2 = \frac{3}{80} m (4R^2 + H^2) + \frac{9}{16} m H^2 = \\ &= \frac{3}{80} m (4R^2 + H^2) + \frac{45}{80} m H^2 = \frac{3}{80} m (4R^2 + H^2 + 15H^2) = \\ &= \frac{3}{80} m (4R^2 + 16H^2) = \frac{3}{20} m (R^2 + 4H^2) \end{aligned}$$

- d) Der Abstand r_z eines im Kegel gelegenen *Massenelementes* $dm = \varrho dV$ von der Drehachse (z -Achse) ist die *Zylinderkoordinate* r (Bild VIII-19). Somit gilt definitionsgemäß

$$dJ_z = r_z^2 dm = r^2 dm = \varrho r^2 dV$$

und

$$J_z = \iiint_{(V)} dJ_z = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r^2 dV$$

Wir verwenden wiederum *Zylinderkoordinaten*, die Integrationsgrenzen sind die gleichen wie unter a):

$$J_z = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} r^2 \cdot r dz dr d\varphi = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} r^3 dz dr d\varphi$$

1. *Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):*

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} r^3 dz &= r^3 \cdot \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} 1 dz = r^3 \left[z \right]_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} = r^3 \left(-\frac{H}{R} (r-R) \right) = \\ &= -\frac{H}{R} r^3 (r-R) = -\frac{H}{R} (r^4 - Rr^3) \end{aligned}$$

2. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen r):

$$\begin{aligned} -\frac{H}{R} \cdot \int_{r=0}^R (r^4 - R r^3) dr &= -\frac{H}{R} \left[\frac{1}{5} r^5 - \frac{1}{4} R r^4 \right]_0^R = \\ &= -\frac{H}{R} \left(\frac{1}{5} R^5 - \frac{1}{4} R^5 \right) = -\frac{H}{R} \left(\frac{4}{20} R^5 - \frac{5}{20} R^5 \right) = \\ &= -\frac{H}{R} \left(-\frac{1}{20} R^5 \right) = \frac{1}{20} H R^4 \end{aligned}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen φ):

$$\frac{1}{20} H R^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{1}{20} H R^4 \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{20} H R^4 \cdot 2\pi = \frac{1}{10} \pi H R^4$$

Somit ist

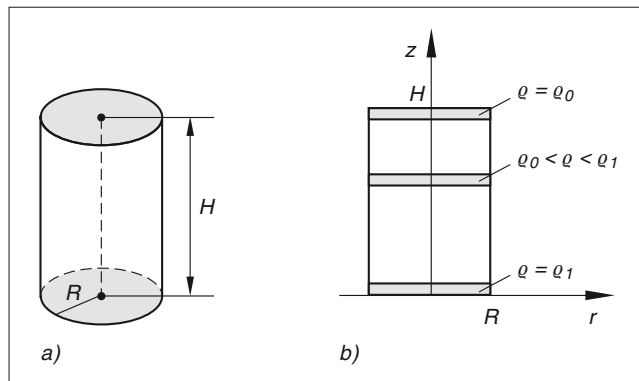
$$J_z = \varrho \cdot \frac{1}{10} \pi H R^4 = \frac{1}{10} \pi \varrho H R^4 = \frac{3}{10} \underbrace{\left(\varrho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H \right)}_{m = \varrho V} R^2 = \frac{3}{10} m R^2$$

Dabei ist $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ das Volumen und $m = \varrho V = \varrho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H$ die Masse des Kegels.

Beispiel 19: Silo (Großspeicher) mit inhomogener Füllmasse
Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten

Ein Silo (Großspeicher) in zylindrischer Form ist bis zum oberen Rand mit fein zermahlenem Gestein der Dichte ϱ_0 gefüllt (Bild VIII-22a). Infolge der Schwerkraft nimmt die Dichte ϱ der Füllung jedoch geringfügig von oben nach unten zu⁸⁾.

Bild VIII-22



⁸⁾ Beim Füllen des Silos wird jede Schicht durch das Gewicht der über ihr liegenden Schichten verdichtet.

- a) Welche Masse m befindet sich in dem Silo?
 b) Wo liegt der Schwerpunkt S der Füllung?
 c) Behandeln Sie den Sonderfall $\varrho = \text{const.}$ (keine Verdichtung der Gesteinsfüllung).

Innenmaße des Silos: Radius R , Höhe H ; Maximalwert der Dichte am Boden: $\varrho_1 > \varrho_0$

Lösungshinweis: Gehen Sie von der realistischen Annahme einer *linearen* Dichteänderung längs der Symmetrieachse des Silos aus.

Lehrbuch: Bd. 2, III.3.2.2.2 und III.3.2.3

Physikalische Grundlagen: A69

Lösung:

Wir gehen von dem linearen Ansatz $\varrho = \varrho(z) = \varrho_1 - az$ aus (die Dichte nimmt in der z -Richtung linear ab und zwar vom Maximalwert ϱ_1 am Boden bis zum Minimalwert ϱ_0 am oberen Rand, siehe Bild VIII-22b)). Die Konstante a bestimmen wir aus der Randbedingung $\varrho(z = H) = \varrho_0$ (die oberste Schicht erfährt keine Verdichtung):

$$\varrho(z = H) = \varrho_0 \Rightarrow \varrho_1 - aH = \varrho_0 \Rightarrow a = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{H}$$

Somit gilt für die Dichteverteilung längs der Symmetrieachse (z -Achse):

$$\varrho = \varrho(z) = \varrho_1 - az = \varrho_1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{H} z, \quad 0 \leq z \leq H$$

Für die Berechnung von Masse und Schwerpunkt durch Dreifachintegrale benötigen wir noch die Integrationsgrenzen. Sie lauten in Zylinderkoordinaten r , φ und z wie folgt:

z -Integration: Von $z = 0$ bis $z = H$

r -Integration: Von $r = 0$ bis $r = R$

φ -Integration: Von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten: $dV = r \, dz \, dr \, d\varphi$

a) Berechnung der Masse [A69]

$$m = \iiint_{(m)} dm = \iiint_{(V)} \varrho \, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^H (\varrho_1 - az) r \, dz \, dr \, d\varphi$$

Das Dreifachintegral lässt sich als Produkt dreier gewöhnlicher Integrale darstellen, da der Integrand unabhängig vom Winkel φ ist, der 1. Faktor $(\varrho_1 - az)$ nur von z , der 2. Faktor (r) nur von r abhängt und alle Integrationsgrenzen konstant sind:

$$m = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi \cdot \int_{r=0}^R r \, dr \cdot \int_{z=0}^H (\varrho_1 - az) \, dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^R \cdot \left[\varrho_1 z - \frac{1}{2} a z^2 \right]_{z=0}^H = \\
&= [2\pi] \cdot \left[\frac{1}{2} R^2 \right] \cdot \left[\varrho_1 H - \frac{1}{2} a H^2 \right] = \pi R^2 H \left(\varrho_1 - \frac{1}{2} a H \right) = \\
&= \pi R^2 H \left(\varrho_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{H} \cdot H \right) = \pi R^2 H \left(\varrho_1 - \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \right) = \\
&= \pi R^2 H \left(\varrho_1 - \frac{1}{2} \varrho_1 + \frac{1}{2} \varrho_0 \right) = \pi R^2 H \left(\frac{1}{2} \varrho_1 + \frac{1}{2} \varrho_0 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \pi R^2 H (\varrho_1 + \varrho_0) = \frac{1}{2} \pi R^2 H (\varrho_0 + \varrho_1) = \frac{(\varrho_0 + \varrho_1) \pi R^2 H}{2}
\end{aligned}$$

b) Berechnung des Schwerpunktes S [A69]

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse (z -Achse) somit ist $x_S = 0$ und $y_S = 0$. Für die z -Koordinate gilt:

$$z_S = \frac{1}{m} \cdot \iiint_{(V)} \varrho z \, dV = \frac{1}{m} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^H (\varrho_1 - a z) z \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi$$

Das Dreifachintegral lässt sich wiederum als Produkt dreier gewöhnlicher Integrale berechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^H (\varrho_1 - a z) z r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi \cdot \int_{r=0}^R r \, dr \cdot \int_{z=0}^H (\varrho_1 z - a z^2) \, dz = \\
&= \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^R \cdot \left[\frac{1}{2} \varrho_1 z^2 - \frac{1}{3} a z^3 \right]_{z=0}^H = \\
&= [2\pi] \cdot \left[\frac{1}{2} R^2 \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \varrho_1 H^2 - \frac{1}{3} a H^3 \right] = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} \varrho_1 - \frac{1}{3} a H \right) = \\
&= \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} \varrho_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{H} \cdot H \right) = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} \varrho_1 - \frac{1}{3} (\varrho_1 - \varrho_0) \right) = \\
&= \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} \varrho_1 - \frac{1}{3} \varrho_1 + \frac{1}{3} \varrho_0 \right) = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{6} \varrho_1 + \frac{2}{6} \varrho_0 \right) = \\
&= \frac{1}{6} \pi R^2 H^2 (\varrho_1 + 2\varrho_0) = \frac{(2\varrho_0 + \varrho_1) \pi R^2 H^2}{6}
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Schwerpunktskoordinate z_S :

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{m} \cdot \frac{(2\rho_0 + \rho_1)\pi R^2 H^2}{6} = \frac{1}{\frac{(\rho_0 + \rho_1)\pi R^2 H}{2}} \cdot \frac{(2\rho_0 + \rho_1)\pi R^2 H^2}{6} = \\ &= \frac{(2\rho_0 + \rho_1)H}{3(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2\rho_0 + \rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} H \end{aligned}$$

c) Unter der Annahme konstanter Dichte $\rho = \rho_0$ gilt $\rho_1 = \rho_0$ und somit für die Füllmasse

$$m = \frac{(\rho_0 + \rho_0)\pi R^2 H}{2} = \rho_0 \pi R^2 H = \rho_0 V_{\text{Silo}}$$

Dabei ist $V_{\text{Silo}} = \pi R^2 H$ das Volumen des zylindrischen Großspeichers. Auch der Schwerpunkt verschiebt sich (er muss wegen der Symmetrie auf halber Höhe liegen):

$$z_S = \frac{2\rho_0 + \rho_0}{3(\rho_0 + \rho_0)} H = \frac{3\rho_0}{6\rho_0} H = \frac{1}{2} H$$

Er hat sich weiter nach oben verschoben, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H &> \frac{2\rho_0 + \rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} H \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2\rho_0 + \rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} \Leftrightarrow \\ 3(\rho_0 + \rho_1) &> 2(2\rho_0 + \rho_1) \Leftrightarrow 3\rho_0 + 3\rho_1 > 4\rho_0 + 2\rho_1 \Leftrightarrow \\ 3\rho_1 - 2\rho_1 &> 4\rho_0 - 3\rho_0 \Leftrightarrow \rho_1 > \rho_0 \end{aligned}$$

Beispiel 20: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung in einer Kugel
Dreifachintegral in Kugelkoordinaten

Im Innenraum einer Kugel vom Radius R befindet sich ein elektrisches Feld, erzeugt durch eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der räumlichen Ladungsdichte $\varrho(r) = kr$, wobei r der Abstand vom Kugelmittelpunkt und k eine positive Konstante bedeuten. Welche Ladung Q befindet sich in der Kugel?

Lehrbuch: Bd. 3, I.6.3

Lösung:

Die im Innern der Kugel befindliche Ladung ist definitionsgemäß durch das Dreifachintegral

$$Q = \iiint_{(V)} \varrho(r) dV$$

gegeben.

Wir verwenden zweckmäßigerweise Kugelkoordinaten r , ϑ und φ . Der Integrationsbereich lautet dann (Kugel vom Radius R):

r -Integration: Von $r = 0$ bis $r = R$

ϑ -Integration: Von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$

φ -Integration: Von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Mit der Ladungsdichte $\varrho(r) = kr$ und dem Volumenelement $dV = r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$ ist

$$\begin{aligned} Q &= \iiint_{(V)} \varrho(r) \, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R kr \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= k \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^3 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \end{aligned}$$

Da der Integrand $r^3 \cdot \sin \vartheta$ ein Produkt ist, dessen Faktoren nur von r (Faktor r^3) bzw. ϑ (Faktor $\sin \vartheta$) abhängen, lässt sich das Dreifachintegral auch als Produkt dreier gewöhnlicher Integrale darstellen:

$$\begin{aligned} Q &= k \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot \int_{r=0}^R r^3 \, dr = \\ &= k \cdot \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[-\cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^R = \\ &= k \cdot (2\pi) \cdot \underbrace{(-\cos \pi + \cos 0)}_1 \cdot \left(\frac{1}{4} R^4 \right) = k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} R^4 = k\pi R^4 \end{aligned}$$

IX Gewöhnliche Differentialgleichungen

Hinweis: Alle in den Lösungen angegebenen Integralnummern beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors. Die Abkürzung Dgl bedeutet *Differentialgleichung*.

Beispiel 1: Raketengleichung

Dgl 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x)$ (Integration mittels Substitution)

Der Antrieb einer senkrecht nach oben startenden *Rakete* erfolgt nach dem *Rückstoßprinzip* durch Treibstoffgase, die nach der Verbrennung mit hoher Geschwindigkeit zum Erdboden hin ausgestoßen werden (Bild IX-1). Bei der mathematischen Behandlung dieses Problems werden dabei die folgenden Begriffe und Größen benötigt:

- u : Ausströmgeschwindigkeit der Gase
- v : Geschwindigkeit der Rakete
- μ : Massenstrom (in der *Zeiteinheit* ausgestoßene Masse an Treibstoffgasen)
- m_R : Masse der Rakete *ohne* Treibstoff (Endmasse)
- m_T : Masse des mitgeführten und schließlich verbrauchten Treibstoffs
- m_0 : Startmasse der Rakete ($m_0 = m_R + m_T$)
- τ : Brennschlussdauer (in dieser Zeit, vom Start aus gerechnet, wird die mitgeführte Treibstoffmenge *vollständig* verbraucht)

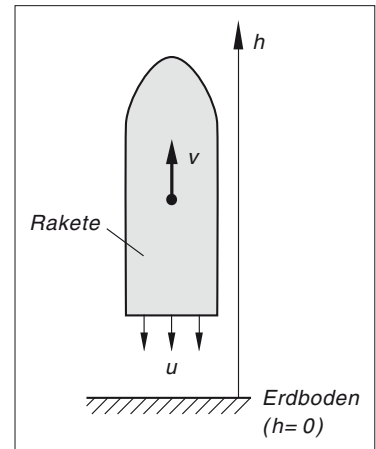


Bild IX-1

- a) Bestimmen Sie *Höhe h* und *Geschwindigkeit v* der Rakete zur Zeit t , wenn die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Erdoberfläche aus und aus der Ruhe heraus erfolgt.
- b) Welche *Höhe* hat die Rakete unmittelbar nach *Brennschluss* erreicht, wie groß ist dann ihre *Geschwindigkeit*?
- c) Welche *Höhe H* erreicht die Rakete *maximal*?

Lösungshinweis: Die Ausströmgeschwindigkeit u der Gase und der Massenstrom μ werden während der gesamten Brennzeit τ als *konstant* angenommen. Die Rakete erfährt dann die *konstante* Schubkraft $F_{\text{Schub}} = \mu u$. Ebenso wird die Erdbeschleunigung g als eine *Kon-*

stante angesehen, Reibungskräfte bleiben *unberücksichtigt*. Die Dgl der Raketenbewegung (auch *Raketengleichung* genannt) erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.1.5

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

- a) Durch die ausströmenden Gase erfährt die Rakete nach dem Rückstoßprinzip die *konstante Schubkraft* $F_{\text{Schub}} = \mu u$. Ihr wirkt die *Schwerkraft* (das Gewicht) $G = m g$ entgegen. Somit gilt nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]

$$m a = F_{\text{Schub}} - G = \mu u - m g$$

Die Rakete erfährt daher die nach *oben* gerichtete Beschleunigung

$$a = \dot{v} = \frac{\mu u}{m} - g > 0$$

sofern die Schubkraft μu das anfängliche Gewicht $m_0 g$ übersteigt! Dabei ist zu beachten, dass die Gesamtmasse m der Rakete in der Zeit vom Start bis zum Brennschluss τ *linear abnimmt* und zwar vom Anfangswert $m_0 = m_R + m_T$ auf den Endwert m_R (Bild IX-2):

$$m = m(t) = m_0 - \mu t, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

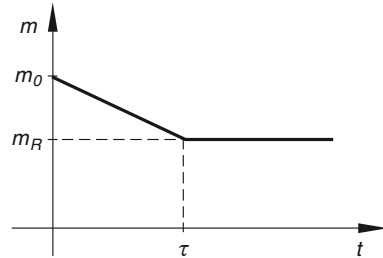


Bild IX-2

μt ist dabei die in der Zeit t *verbrauchte* Treibstoffmasse.

Die *Raketengeschwindigkeit* v genügt somit der Dgl 1. Ordnung

$$\dot{v} = \frac{\mu u}{m} - g = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g$$

die durch *direkte Integration* lösbar ist. Wir erhalten zunächst

$$v = \int \dot{v} dt = \int \left(\frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g \right) dt = \mu u \cdot \int \frac{1}{m_0 - \mu t} dt - g t$$

Mit Hilfe der *Substitution*

$$z = m_0 - \mu t, \quad \frac{dz}{dt} = -\mu, \quad dt = -\frac{dz}{\mu}$$

folgt weiter

$$v = \mu u \cdot \int \frac{1}{z} \cdot \left(-\frac{dz}{\mu} \right) - g t = -u \cdot \int \frac{1}{z} dz - g t = -u \cdot \ln |z| - g t + C_1$$

Nach *Rücksubstitution* ergibt sich

$$v(t) = -u \cdot \ln(m_0 - \mu t) - g t + C_1$$

Die Integrationskonstante C_1 wird aus der *Anfangsgeschwindigkeit* $v(0) = 0$ berechnet:

$$v(0) = 0 \Rightarrow -u \cdot \ln m_0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = u \cdot \ln m_0$$

Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* der Raketenbewegung bis zum Brennschluss τ lautet damit wie folgt:

$$\begin{aligned} v(t) &= -u \cdot \ln(m_0 - \mu t) - g t + u \cdot \ln m_0 = \\ &= -u [\ln(m_0 - \mu t) - \ln m_0] - g t = -u \cdot \ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) - g t \end{aligned}$$

Durch *Integration* dieser Gleichung gewinnt man das *Weg-Zeit-Gesetz* der Rakete für den gleichen Zeitraum:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int v(t) dt = -u \cdot \int \ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) dt - g \cdot \int t dt = \\ &= -u \cdot \underbrace{\int \ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) dt}_I - \frac{1}{2} g t^2 = -u \cdot I - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral I lässt sich zunächst mit Hilfe der *Substitution*

$$z = \frac{m_0 - \mu t}{m_0}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\mu}{m_0}, \quad dt = -\frac{m_0}{\mu} dz$$

vereinfachen und anschließend mit Hilfe der *Integraltafel* der Formelsammlung wie folgt lösen (Integral Nr. 332):

$$\begin{aligned} I &= \int \ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) dt = \int \ln z \cdot \left(-\frac{m_0}{\mu} dz \right) = -\frac{m_0}{\mu} \cdot \int \ln z dz = \\ &= -\frac{m_0}{\mu} \cdot z (\ln z - 1) + C_2 \end{aligned}$$

Durch *Rücksubstitution* folgt

$$\begin{aligned} I &= -\frac{m_0}{\mu} \cdot \frac{m_0 - \mu t}{m_0} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) - 1 \right] + C_2 = \\ &= -\frac{m_0 - \mu t}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) - 1 \right] + C_2 \end{aligned}$$

und somit

$$h(t) = -u \cdot I - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{u(m_0 - \mu t)}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) - 1 \right] - u C_2 - \frac{1}{2} g t^2$$

Aus der Anfangshöhe $h(0) = 0$ lässt sich die Integrationskonstante C_2 bestimmen:

$$h(0) = 0 \Rightarrow \frac{u m_0}{\mu} \underbrace{(\ln 1 - 1)}_0 - u C_2 = -\frac{u m_0}{\mu} - u C_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-u \left(\frac{m_0}{\mu} + C_2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{m_0}{\mu} + C_2 = 0 \quad (\text{da } u \neq 0) \Rightarrow C_2 = -\frac{m_0}{\mu}$$

Die Rakete befindet sich daher zum Zeitpunkt $t \leq \tau$ in der Höhe

$$h(t) = \frac{u(m_0 - \mu t)}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) - 1 \right] + \frac{u m_0}{\mu} - \frac{1}{2} g t^2$$

- b) Im Zeitpunkt des Brennschlusses, d. h. zur Zeit $t = \tau$ ist der gesamte Treibstoff $m_T = m_0 - m_R$ verbraucht (siehe hierzu auch Bild IX-2):

$$m(\tau) = m_0 - \mu \tau = m_R$$

Für die Brennschlussdauer τ folgt hieraus

$$\mu \tau = m_0 - m_R \Rightarrow \tau = \frac{m_0 - m_R}{\mu}$$

Die Raketenhöhe beträgt dann unter Berücksichtigung von $m_R = m_0 - \mu \tau$:

$$h(\tau) = \frac{u(m_0 - \mu \tau)}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \mu \tau}{m_0} \right) - 1 \right] + \frac{u m_0}{\mu} - \frac{1}{2} g \tau^2 =$$

$$= \frac{u m_R}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_R}{m_0} \right) - 1 \right] + \frac{u m_0}{\mu} - \frac{1}{2} g \left(\frac{m_0 - m_R}{\mu} \right)^2 =$$

$$= \frac{u m_R}{\mu} \left[\ln \left(\frac{m_R}{m_0} \right) + \frac{m_0}{m_R} - 1 \right] - \frac{1}{2} g \left(\frac{m_0 - m_R}{\mu} \right)^2$$

Die Rakete erreicht im Augenblick des Brennschlusses, d. h. zur Zeit $t = \tau$ ihre größte Geschwindigkeit. Sie beträgt

$$v_{\max} = v(\tau) = -u \cdot \ln \left(\frac{m_0 - \mu \tau}{m_0} \right) - g \tau = -u \cdot \ln \left(\frac{m_R}{m_0} \right) - g \left(\frac{m_0 - m_R}{\mu} \right) =$$

$$= u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_R} \right) - g \left(\frac{m_0 - m_R}{\mu} \right)$$

- c) Nach Erreichen der Brennschlussdauer τ fällt die Schubkraft $F_{\text{Schub}} = \mu u$ weg und die Rakete unterliegt nur noch der (als weiterhin konstant angenommenen) Schwerkraft $G = mg$. Die Bewegung der Rakete kann daher von diesem Zeitpunkt an modellmäßig als ein Wurf senkrecht nach oben mit der „Anfangsgeschwindigkeit“ $v(\tau)$ und der „Anfangshöhe“ $h(\tau)$ interpretiert werden (Bild IX-3).

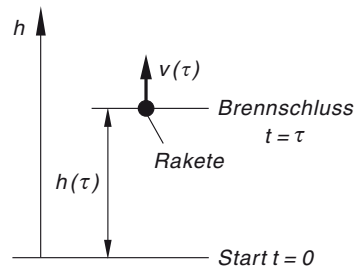


Bild IX-3

Somit gilt für den Zeitraum $t \geq \tau$:

$$h(t) = h(\tau) + v(\tau)(t - \tau) - \frac{1}{2} g(t - \tau)^2, \quad t \geq \tau$$

Dabei bedeuten:

$h(\tau)$: Anfangshöhe zur Zeit $t = \tau$

$v(\tau)(t - \tau)$: Im Zeitintervall $t - \tau > 0$ aufgrund der konstanten Anfangsgeschwindigkeit $v(\tau)$ zurückgelegter Weg nach oben

$\frac{1}{2} g(t - \tau)^2$: Fallstrecke im Zeitintervall $t - \tau > 0$

Für das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* im gleichen Zeitraum gilt dann

$$v(t) = \dot{h}(t) = 0 + v(\tau)(1 - 0) - \frac{1}{2} g \cdot 2(t - \tau) \cdot 1 = v(\tau) - g(t - \tau)$$

Die Rakete erreicht ihren höchsten Punkt (*Umkehrpunkt*) zur Zeit $t = T$, wenn die Geschwindigkeit den Wert null besitzt. Aus der Bedingung $v(T) = \dot{h}(T) = 0$ folgt dann:

$$v(T) = 0 \Rightarrow v(\tau) - g(T - \tau) = v(\tau) - gT + g\tau = 0 \Rightarrow$$

$$gT = v(\tau) + g\tau \Rightarrow T = \frac{v(\tau) + g\tau}{g} = \frac{v(\tau)}{g} + \tau$$

Die *maximal* erreichbare Höhe beträgt somit:

$$\begin{aligned} H = h_{\max} &= h(T) = h(\tau) + v(\tau)(T - \tau) - \frac{1}{2} g(T - \tau)^2 = \\ &= h(\tau) + v(\tau) \left(\frac{v(\tau)}{g} + \tau - \tau \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v(\tau)}{g} + \tau - \tau \right)^2 = \\ &= h(\tau) + v(\tau) \frac{v(\tau)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v(\tau)}{g} \right)^2 = h(\tau) + \frac{v^2(\tau)}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2(\tau)}{g} = \\ &= h(\tau) + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2(\tau)}{g} = h(\tau) + \frac{v^2(\tau)}{2g} \end{aligned}$$

Für $t > T$ fällt die Rakete (aus der Ruhe heraus) nach den Gesetzen des *freien Falls*.

Beispiel 2: RL-Schaltkreis mit einer Gleichstromquelle

Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)

Eine *Reihenschaltung* aus einem ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L wird von einer Gleichstromquelle mit dem konstanten Strom I_0 gespeist und zur Zeit $t = 0$ durch Schließen des Schalters S kurzgeschlossen (Bild IX-4).

Bestimmen Sie

- den zeitlichen Verlauf der *Stromstärke* i im *RL-Zweig*,
- den zeitlichen Verlauf der am Widerstand R und an der Induktivität L liegenden *Teilspannungen* u_R und u_L .

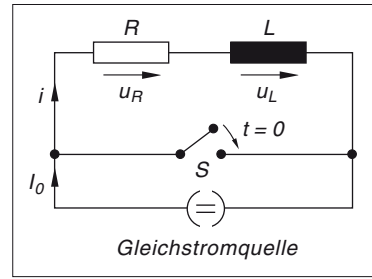


Bild IX-4

Lösungshinweis: Die Dgl des *RL-Schaltkreises* erhalten Sie durch Anwendung der *Maschenregel* [A32].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.2.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A45

Lösung:

- Nach der *Maschenregel* [A32] ist

$$u_R + u_L = 0 \quad \text{oder} \quad u_L + u_R = 0$$

Mit $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ [Induktionsgesetz A45] und $u_R = Ri$ [Ohmsches Gesetz A14] wird hieraus die *homogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

Diese Dgl lösen wir wie folgt durch „*Trennung der Variablen*“:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad \text{oder} \quad \frac{1}{i} di = -\frac{1}{\tau} dt$$

($\tau = L/R$: Zeitkonstante). Beiderseitige Integration liefert

$$\int \frac{1}{i} di = -\frac{1}{\tau} \cdot \int 1 dt \quad \Rightarrow \quad \ln i = -\frac{t}{\tau} + \ln K$$

und somit

$$\ln i - \ln K = \ln \left(\frac{i}{K} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

Durch *Entlogarithmierung* folgt hieraus schließlich

$$\frac{i}{K} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{oder} \quad i = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Integrationskonstante K wird aus dem *Anfangswert* $i(t = 0) = I_0$ berechnet:

$$i(t = 0) = I_0 \quad \Rightarrow \quad K \cdot 1 = I_0 \quad \Rightarrow \quad K = I_0$$

Die *Stromstärke* i im RL -Zweig nimmt somit im Laufe der Zeit *exponentiell* ab:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0$$

Bild IX-5 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser *Abklingfunktion*.

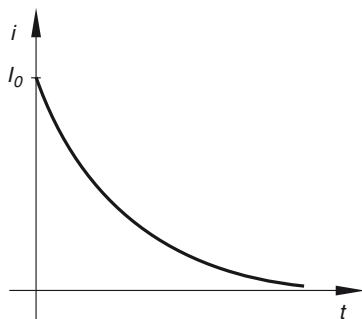


Bild IX-5

b) Aus dem *ohmschen Gesetz* [A14] erhalten wir für die Teilspannung u_R das Zeitgesetz

$$u_R(t) = R i(t) = R I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = R I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0$$

Die an der Induktivität L abfallende Spannung u_L erhalten wir aus dem *Induktionsgesetz* [A45] unter Verwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} \left[I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = L I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \\ &= L I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) = -R I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -R I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Mit dem Strom i klingen auch die beiden Teilspannungen u_R und u_L *exponentiell* mit der Zeit auf den Wert 0 ab (Bild IX-6). Sie sind ferner zu jedem Zeitpunkt *entgegengesetzt* gleich groß.

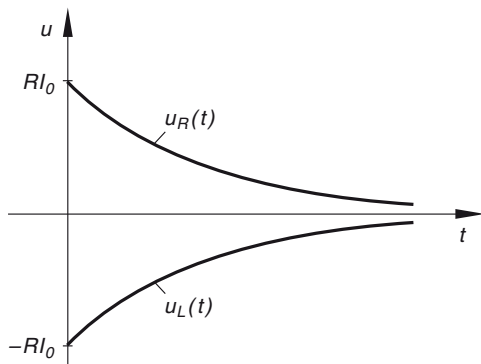
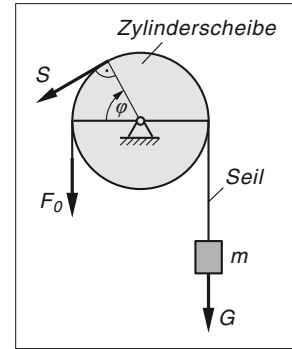


Bild IX-6

Beispiel 3: Seilkräfte und Seilreibung***Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)***

Eine *arretierte* Zylinderscheibe wird in der aus Bild IX-7 ersichtlichen Weise von einem *biegsamen* Seil umschlungen, das am rechten Ende durch eine Gewichtskraft $G = mg$ belastet wird.

- a) Mit welcher Kraft F_0 muss man am *linken* Seilende einwirken, um ein Abgleiten der Masse m zu *verhindern*, wenn der Haftreibungskoeffizient den Wert $\mu_0 = 0,5$ besitzt?
- b) Wie groß darf die am *rechten* Seilende befestigte Last F werden, wenn man das *linke* Seilende mit der Kraft $F_0 = 100 \text{ N}$ festhält und das Seil die Zylinderscheibe genau 2,5 mal umschlingt?

**Bild IX-7**

Lösungshinweis: Infolge der Haftreibung zwischen Seil und Zylinderscheibe ist die Seilkraft S *nicht* konstant, sondern eine noch vom *Zentriwinkel* φ abhängige Größe $S = S(\varphi)$. Im Gleichgewichtszustand genügt dabei die Seilkraft der Dgl

$$\frac{dS}{d\varphi} = \mu_0 S$$

Lehrbuch: Bd. 2, IV.2.2

Lösung:

- a) Wir lösen zunächst die Dgl der *winkelabhängigen* Seilkraft nach der Methode „*Trennung der Variablen*“:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varphi} = \mu_0 S &\Rightarrow \frac{dS}{S} = \frac{1}{S} dS = \mu_0 d\varphi \Rightarrow \int \frac{1}{S} dS = \mu_0 \cdot \int 1 d\varphi \Rightarrow \\ \ln S = \mu_0 \varphi + \ln C &\Rightarrow \ln S - \ln C = \ln \left(\frac{S}{C} \right) = \mu_0 \varphi \end{aligned}$$

Entlogarithmierung führt schließlich zu

$$\frac{S}{C} = e^{\mu_0 \varphi} \quad \text{oder} \quad S = C \cdot e^{\mu_0 \varphi}$$

Die Integrationskonstante C wird dabei aus dem *Anfangswert* $S(\varphi = 0) = F_0$ bestimmt:

$$S(\varphi = 0) = F_0 \Rightarrow C \cdot 1 = F_0 \Rightarrow C = F_0$$

Somit wächst die Seilkraft S *exponentiell* mit dem „Umschlingwinkel“ φ nach der Gleichung

$$S(\varphi) = F_0 \cdot e^{\mu_0 \varphi}$$

Am *rechten* Seilende, d. h. für $\varphi = \pi$ ist

$$S(\varphi = \pi) = F_0 \cdot e^{\mu_0 \pi} = G$$

Aus dieser Beziehung folgt (mit $\mu_0 = 0,5$)

$$F_0 = e^{-\mu_0 \pi} \cdot G = e^{-0,5\pi} \cdot G = 0,208 \cdot G$$

Ein Abgleiten der Masse m wird somit *verhindert*, wenn die am *linken* Seilende wirkende Seilkraft rund 21 % des am *rechten* Seilende angehängten Gewichtes beträgt.

- b) Der „Umschlingwinkel“ ist jetzt $\varphi = 2,5 \cdot 2\pi = 5\pi$. Die Belastung F am *rechten* Seilende kann daher den Wert

$$\begin{aligned} F &= S(\varphi = 5\pi) = F_0 \cdot e^{\mu_0 \cdot 5\pi} = 100 \text{ N} \cdot e^{0,5 \cdot 5\pi} = 100 \text{ N} \cdot e^{2,5\pi} = \\ &= 257\,597 \text{ N} \approx 257,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

erreichen.

Beispiel 4: Fallbewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit

Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)

Eine homogene *Kugel* mit dem Radius r und der Dichte ϱ_K wird in einer *zähen Flüssigkeit* mit der Dichte ϱ_F und der Zähigkeit η aus der Ruhe heraus frei fallengelassen (Bild IX-8). Bestimmen Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]

- a) das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$,

- b) das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$

unter Berücksichtigung des *Auftriebs* [A35] und der *Stokesschen Reibung* [A59].

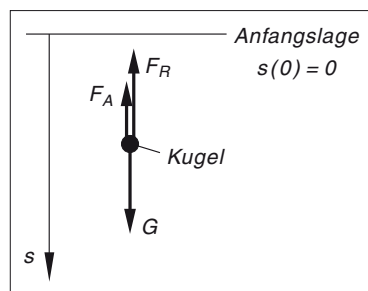


Bild IX-8

Lösung:

a) Auf die Kugel wirken nach Bild IX-8 folgende Kräfte ein (m : Masse der Kugel; g : Erdbeschleunigung; $V_K = 4\pi r^3/3$: Kugelvolumen):

1. Die nach unten gerichtete *Schwerkraft* $G = mg$;
2. Der nach oben gerichtete *Auftrieb* [A35] $F_A = \varrho_F V_K g$;
3. Die nach oben gerichtete *Stokessche Reibungskraft* [A59] $F_R = 6\pi\eta r v$.

Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann für die beschleunigende Kraft

$$ma = G - F_A - F_R = mg - \varrho_F V_K g - 6\pi\eta r v$$

und somit für die Beschleunigung

$$a = g - \frac{\varrho_F V_K g}{m} - \frac{6\pi\eta r}{m} v = g \left(1 - \frac{\varrho_F V_K}{m}\right) - \frac{6\pi\eta r}{m} v$$

Mit $a = \dot{v}$ und $m = \varrho_K V_K = 4\pi\varrho_K r^3/3$ wird daraus eine *inhomogene lineare Dgl*

1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Geschwindigkeit v :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= g \left(1 - \frac{\varrho_F V_K}{\varrho_K V_K}\right) - \frac{6\pi\eta r}{4\pi\varrho_K r^3/3} v = g \left(1 - \frac{\varrho_F}{\varrho_K}\right) - \frac{9\eta}{2\varrho_K r^2} v = \\ &= \frac{(\varrho_K - \varrho_F)g}{\varrho_K} - \frac{9\eta}{2\varrho_K r^2} v \end{aligned}$$

Zur Abkürzung und der besseren Übersicht wegen setzen wir noch

$$\alpha = \frac{9\eta}{2\varrho_K r^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{(\varrho_K - \varrho_F)g}{\varrho_K}$$

und erhalten die Dgl

$$\dot{v} = \beta - \alpha v \quad \text{oder} \quad \dot{v} + \alpha v = \beta$$

die wir durch „*Variation der Konstanten*“ lösen¹⁾. Zunächst wird die zugehörige *homogene Dgl*

$$\dot{v} + \alpha v = 0$$

mit dem *Lösungsansatz* $v = K \cdot e^{\lambda t}$, $\dot{v} = \lambda K \cdot e^{\lambda t}$ gelöst:

$$\lambda K \cdot e^{\lambda t} + \alpha K \cdot e^{\lambda t} = (\lambda + \alpha) \underbrace{K \cdot e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha$$

Somit ist $v = K \cdot e^{-\alpha t}$ die allgemeine Lösung der *homogenen Dgl*. Für die *inhomogene Dgl* wird daher der *Lösungsansatz*

$$v = K(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

gewählt (K wird durch die Funktion $K(t)$ ersetzt; *Variation der Konstanten*).

¹⁾ Die Dgl ist auch durch „*Trennung der Variablen*“ oder durch „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*“ lösbar.

Mit der Ableitung

$$\dot{v} = \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} - \alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t} \quad (\text{Produkt- und Kettenregel})$$

erhalten wir dann durch Einsetzen des Lösungsansatzes und seiner Ableitung in die *inhomogene* Dgl $\dot{v} + \alpha v = \beta$ die folgende Dgl 1. Ordnung für die noch unbekannte *Faktorfunktion* $K(t)$:

$$\dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} - \underbrace{\alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t} + \alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t}}_0 = \beta \Rightarrow \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} = \beta \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = \beta \cdot e^{\alpha t}$$

Durch *unbestimmte Integration* folgt (Integral Nr. 312 mit $a = \alpha$)

$$K(t) = \int \dot{K}(t) dt = \beta \cdot \int e^{\alpha t} dt = \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + C_1 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + C_1$$

Somit lautet die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl wie folgt:

$$\begin{aligned} v &= K(t) \cdot e^{-\alpha t} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + C_1 \right) \cdot e^{-\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \underbrace{e^{\alpha t} \cdot e^{-\alpha t}}_{e^0 = 1} + C_1 \cdot e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} + C_1 \cdot e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante C_1 bestimmen wir aus *der Anfangsgeschwindigkeit* $v(0) = 0$:

$$v(0) = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} + C_1 \cdot 1 = \frac{\beta}{\alpha} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* der Fallbewegung der Kugel in einer zähen Flüssigkeit lautet damit

$$v(t) = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad t \geq 0$$

Die Kugel erreicht dabei (theoretisch nach unendlich langer Zeit, d. h. für $t \rightarrow \infty$) die *Endgeschwindigkeit*

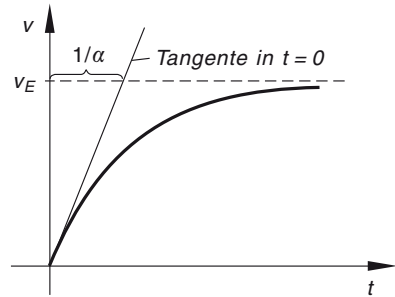
$$\begin{aligned} v_E &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{\beta}{\alpha} (1 - 0) = \frac{\beta}{\alpha} = \\ &= \frac{\frac{(\varrho_K - \varrho_F) g}{\varrho_K}}{\frac{9\eta}{2\varrho_K r^2}} = \frac{(\varrho_K - \varrho_F) g}{\varrho_K} \cdot \frac{2\varrho_K r^2}{9\eta} = \frac{2(\varrho_K - \varrho_F) g r^2}{9\eta} \end{aligned}$$

Die Zeitabhängigkeit der Sinkgeschwindigkeit v kann daher auch durch die Gleichung

$$v(t) = v_E (1 - e^{-\alpha t}), \quad t \geq 0$$

beschrieben werden (Bild IX-9).

Bild IX-9



- b) Das Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$ erhalten wir durch *Integration* der bereits bekannten Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v = v(t) = \dot{s}(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int v(t) dt = v_E \cdot \int (1 - e^{-\alpha t}) dt = \\ &= v_E \left(\int 1 dt - \int e^{-\alpha t} dt \right) = v_E \left(t + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + C_2 \right) \end{aligned}$$

(Integral Nr. 312 mit $a = -\alpha$). Die Integrationskonstante C_2 bestimmen wir aus dem Anfangswert $s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} s(0) = 0 &\Rightarrow v_E \left(\frac{1}{\alpha} \cdot 1 + C_2 \right) = v_E \left(\frac{1}{\alpha} + C_2 \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{\alpha} + C_2 &= 0 \quad (\text{da } v_E \neq 0) \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

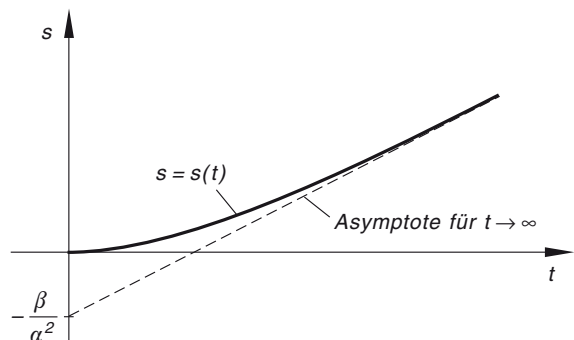
Das Weg-Zeit-Gesetz lautet somit im Zeitraum $t \geq 0$ wie folgt:

$$s(t) = v_E \left(t + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha t + e^{-\alpha t} - 1}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$$

Bild IX-10 zeigt den Verlauf dieser Funktion, die für großes t nahezu linear verläuft (da $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} s(t) &\approx \frac{\beta}{\alpha^2} (\alpha t + 0 - 1) = \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2} (\alpha t - 1) = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \cdot t - \frac{\beta}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Bild IX-10



Beispiel 5: RC-Schaltkreis mit einer Gleichspannungsquelle***Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)***

Die in Bild IX-11 dargestellte *RC-Reihenschaltung* mit dem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ über einen Schalter S an eine Spannungsquelle mit der *konstanten* Spannung U_0 angeschlossen.

Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf

- der am *Kondensator* liegenden *Teilspannung* u_C ,
- der *Stromstärke* i ,
- der am *ohmschen Widerstand* R liegenden *Teilspannung* u_R ,

wenn der Kondensator im Einschaltaugenblick $t = 0$ *energielos*, d. h. *un geladen* ist.

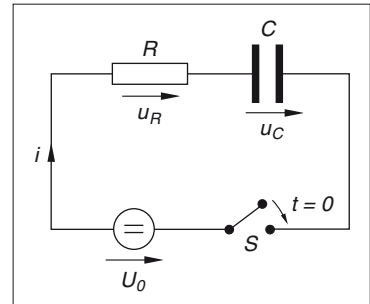


Bild IX-11

Lösungshinweis: Durch Anwendung der Maschenregel [A32] auf den *RC-Schaltkreis* lässt sich eine *Dgl* für die am Kondensator abfallende *Teilspannung* u_C gewinnen.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.2.5.3.1

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40, A43

Lösung:

- a) Aus der *Maschenregel* [A32] folgt

$$u_R + u_C - U_0 = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_C = U_0$$

Nach dem *ohmschen Gesetz* [A14] ist $u_R = Ri$, wobei sich die Stromstärke i noch wie folgt durch die Kondensatorspannung u_C ausdrücken lässt [A43]:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C u_C] = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \dot{u}_C$$

(q : Kondensatorladung; $q = C u_C$ [A40]). Daher gilt für die am ohmschen Widerstand liegende Teilspannung

$$u_R = Ri = RC \dot{u}_C = \tau \dot{u}_C$$

mit der *Zeitkonstanten* $\tau = RC$. Die *Maschenregel* führt damit auf die folgende *inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$\tau \dot{u}_C + u_C = U_0 \quad \text{oder} \quad \dot{u}_C + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \frac{U_0}{\tau}$$

Wir lösen diese Dgl durch „*Variation der Konstanten*“.

Die zugehörige homogene Dgl

$$\dot{u}_C + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = 0$$

wird bekanntlich durch den *Exponentialansatz*

$$u_{C0} = K \cdot e^{\lambda t}, \quad \dot{u}_{C0} = \lambda K \cdot e^{\lambda t}$$

gelöst (mit $K \in \mathbb{R}$):

$$\dot{u}_{C0} + \frac{1}{\tau} \cdot u_{C0} = \lambda K \cdot e^{\lambda t} + \frac{K}{\tau} \cdot e^{\lambda t} = \left(\lambda + \frac{1}{\tau} \right) \cdot \underbrace{K \cdot e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

Somit ist

$$u_{C0} = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

die Lösung der homogenen Dgl. Für die inhomogene Dgl wählen wir daher den *Lösungsansatz*

$$u_C = K(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

wobei $K(t)$ eine noch unbekannte, zeitabhängige Funktion bedeutet (*Variation der Konstanten*). Mit diesem Ansatz und der zugehörigen Ableitung (unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel)

$$\dot{u}_C = \dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) \cdot K(t) = \dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{K(t)}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein:

$$\dot{u}_C + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{K(t)}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K(t)}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{\tau} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{K(t)}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K(t)}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_0 = \frac{U_0}{\tau}$$

$$\dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{\tau} \Rightarrow \dot{K}(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$

Durch *unbestimmte Integration* erhalten wir hieraus die gesuchte *Faktorfunktion* $K(t)$:

$$K(t) = \int \dot{K}(t) dt = \frac{U_0}{\tau} \cdot \int e^{\frac{t}{\tau}} dt = \frac{U_0}{\tau} \cdot \tau \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + K_1 = U_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + K_1$$

(Integral Nr. 312 mit $a = 1/\tau$; $K_1 \in \mathbb{R}$). Somit ist

$$u_C = K(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \left(U_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + K_1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot \underbrace{e^{\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{e^0 = 1} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= U_0 + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Integrationskonstante K_1 bestimmen wir aus dem Anfangswert $u_C(0) = 0$ (der Kondensator ist zu Beginn *ungeladen*):

$$u_C(0) = 0 \Rightarrow U_0 + K_1 \cdot 1 = U_0 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = -U_0$$

Die *Kondensatorspannung* genügt daher dem folgenden Zeitgesetz:

$$u_C(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

Bild IX-12 zeigt den Verlauf dieser *Sättigungsfunktion*, die *asymptotisch* gegen den Endwert U_0 strebt.

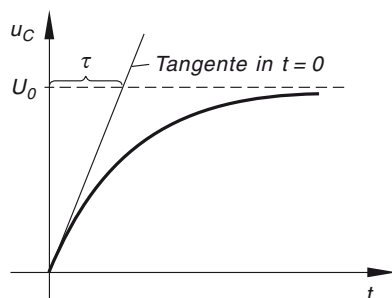


Bild IX-12

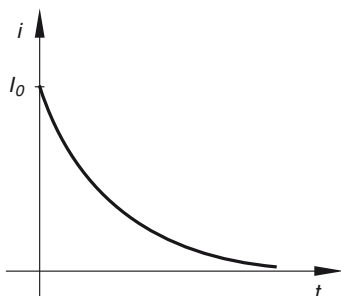
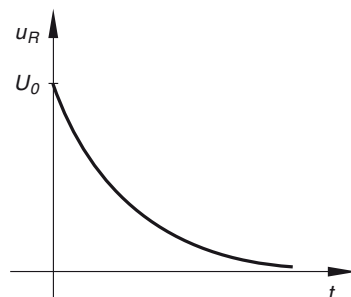
b) Für die *Stromstärke* i ergibt sich damit für $t \geq 0$ die folgende Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \dot{u}_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} \left[U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right] = C U_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \\ &= C U_0 \left[0 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \right] = \frac{C U_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{C U_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \\ &= \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

($I_0 = U_0/R$). Der Strom i nimmt daher im Laufe der Zeit *exponentiell* ab (Bild IX-13).

c) Die am ohmschen Widerstand liegende *Spannung* u_R klingt ebenfalls mit der Zeit *exponentiell* ab (Bild IX-14). Aus dem *ohmschen Gesetz* [A14] folgt nämlich

$$u_R(t) = R i(t) = R I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0 \quad (\text{mit } U_0 = R I_0)$$

Bild IX-13 Stromstärke $i(t)$ Bild IX-14 Teilspannung $u_R(t)$

Beispiel 6: RC-Wechselstromkreis***Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Aufsuchen einer partikulären Lösung)***

An eine *Reihenschaltung* aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine *sinusförmige* Wechselspannung mit der Gleichung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ angelegt (Bild IX-15).

Wie lautet der zeitliche Verlauf

- a) der *Kondensatorspannung* u_C ,
 - b) der *Stromstärke* i ,
 - c) der am *ohmschen Widerstand* R abfallenden *Teilspannung* u_R ,
- wenn der Kondensator im Einschaltaugenblick $t = 0$ *energieelos*, d. h. *ungeladen* ist?

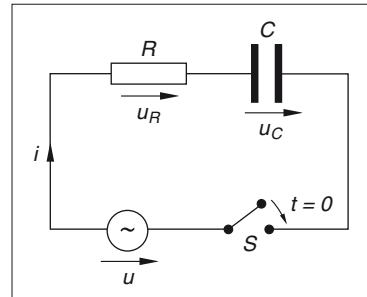


Bild IX-15

Lösungshinweis: Die Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf den RC-Wechselstromkreis liefert eine Dgl für die *Kondensatorspannung* u_C .

Anmerkung: Diese Aufgabe wird in Kapitel XII, Beispiel 2 mit Hilfe der *Laplace-Transformation* gelöst. *Vergleichen* Sie die beiden doch sehr unterschiedlichen Lösungsmethoden miteinander und bilden Sie sich somit ein *eigenes* Urteil über deren Leistungsfähigkeit.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.2.5.3.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40, A43

Lösung:

- a) Nach der *Maschenregel* [A32] ist

$$u_R + u_C - u = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_C = u$$

Für die Teilspannung u_R gilt ferner nach dem *ohmschen Gesetz* [A14] $u_R = Ri$. Die Stromstärke i lässt sich dabei noch wie folgt durch die Kondensatorspannung u_C ausdrücken [A43]:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [Cu_C] = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C\dot{u}_C$$

(q : Kondensatorladung; $q = Cu_C$ [A40]). Somit ist

$$u_R = Ri = RC\dot{u}_C = \tau\dot{u}_C$$

wobei wir noch die *Zeitkonstante* $\tau = RC$ eingeführt haben.

Die *Maschengleichung* führt damit zu der folgenden *inhomogenen linearen Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$\tau \dot{u}_C + u_C = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Wir lösen diese Dgl durch „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*“. Zunächst wird die zugehörige *homogene Dgl*

$$\tau \dot{u}_C + u_C = 0$$

gelöst. Ihre mit dem *Exponentialansatz* $u_{C0} = K \cdot e^{-\lambda t}$ gewonnene *Lösung* lautet

$$u_{C0} = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{mit } K \in \mathbb{R})$$

Für die *partikuläre Lösung* u_{Cp} der *inhomogenen Dgl* wählen wir aufgrund der *sinusförmigen Störfunktion* $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ den *Lösungsansatz*

$$u_{Cp} = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.2.6, Tabelle 1). Mit diesem Ansatz und der zugehörigen Ableitung

$$\dot{u}_{Cp} = \omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega C_2 \cdot \sin(\omega t)$$

gehen wir in die *inhomogene Dgl* ein und erhalten

$$\begin{aligned} \tau [\omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega C_2 \cdot \sin(\omega t)] + C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) &= \\ = \tau \omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \tau \omega C_2 \cdot \sin(\omega t) + C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) &= \\ = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Ordnen der Glieder führt zu der Gleichung

$$(C_1 - \omega \tau \cdot C_2) \cdot \sin(\omega t) + (\omega \tau \cdot C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Auf der *rechten Seite* dieser Gleichung ergänzen wir noch den *verschwindenden Kosinusterm* $0 \cdot \cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} (C_1 - \omega \tau \cdot C_2) \cdot \sin(\omega t) + (\omega \tau \cdot C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega t) &= \\ = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) + 0 \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Durch *Koeffizientenvergleich* der Sinus- bzw. Kosinusterme gewinnen wir hieraus das folgende *lineare Gleichungssystem* für die noch unbekannten Konstanten C_1 und C_2 :

$$(I) \quad C_1 - \omega \tau \cdot C_2 = \hat{u}$$

$$(II) \quad \omega \tau \cdot C_1 + C_2 = 0$$

Aus Gleichung (II) folgt zunächst $C_2 = -\omega \tau \cdot C_1$. Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (I) ein und erhalten für C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 - \omega \tau (-\omega \tau \cdot C_1) &= C_1 + (\omega \tau)^2 \cdot C_1 = C_1 [1 + (\omega \tau)^2] = \hat{u} \Rightarrow \\ C_1 &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \end{aligned}$$

Damit ist auch C_2 bestimmt:

$$C_2 = -\omega \tau \cdot C_1 = -\omega \tau \cdot \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} = -\frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2}$$

Die *partikuläre* Lösung besitzt daher die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} u_{Cp} &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit

$$u_C(t) = u_{C0} + u_{Cp} = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)]$$

Die Integrationskonstante K bestimmen wir aus der *Anfangsbedingung* $u_C(0) = 0$ (der Kondensator ist zu Beginn *ungeladen*):

$$\begin{aligned} u_C(0) = 0 &\Rightarrow K \cdot 1 + \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} [\underbrace{\sin 0}_0 - \omega \tau \cdot \underbrace{\cos 0}_1] = 0 \Rightarrow \\ K - \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} &= 0 \Rightarrow K = \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \end{aligned}$$

Die *Kondensatorspannung* u_C besitzt daher den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$u_C(t) = \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)], \quad t \geq 0$$

Die in der eckigen Klammer stehende Funktion beschreibt die *Überlagerung* zweier *gleichfrequenter* Sinus- und Kosinusfunktionen und ist auch als *phasenverschobene* Sinusfunktion *gleicher* Frequenz in der Form

$$\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

darstellbar. Im *Zeigerdiagramm* nach Bild IX-16 sind die beiden Schwingungskomponenten $y_1 = \sin(\omega t)$ und $y_2 = -\omega \tau \cdot \cos(\omega t)$ durch (reelle) *Zeiger* bildlich dargestellt. *Amplitude* A und *Nullphasenwinkel* φ lassen sich dann wie folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck berechnen:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t - \varphi) \\ A^2 &= 1^2 + (\omega \tau)^2 \Rightarrow A = \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \\ \tan \varphi &= \frac{\omega \tau}{1} = \omega \tau \Rightarrow \varphi = \arctan(\omega \tau) \end{aligned}$$

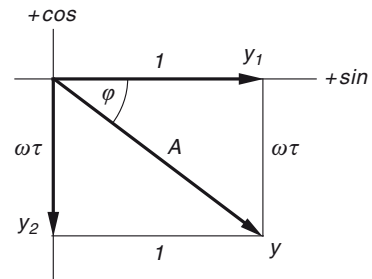


Bild IX-16

Somit ist

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t) &= A \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau))\end{aligned}$$

und die *Spannung* am Kondensator genügt dem Zeitgesetz

$$\begin{aligned}u_C(t) &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi)\end{aligned}$$

mit $\varphi = \arctan(\omega \tau) > 0$. Die Kondensatorspannung u_C enthält somit einen *exponentiell* abklingenden „*flüchtigen*“ Anteil, der nach einer kurzen „Einschwingphase“ praktisch *keine* Rolle mehr spielt (siehe Bild IX-17) und einen „*stationären*“ Anteil, der eine *sinusförmige* Wechselspannung mit dem *Scheitelwert* $\hat{u}_0 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$, der *Kreisfrequenz* ω und dem *Nullphasenwinkel* $\varphi = \arctan(\omega \tau)$ darstellt (Bild IX-18)²⁾.

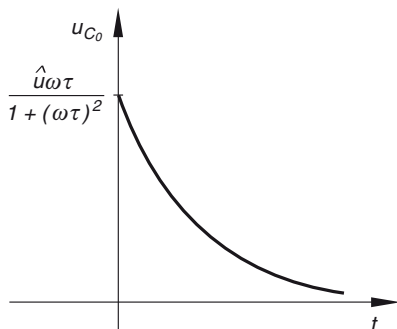


Bild IX-17 „Flüchtiger“ Anteil

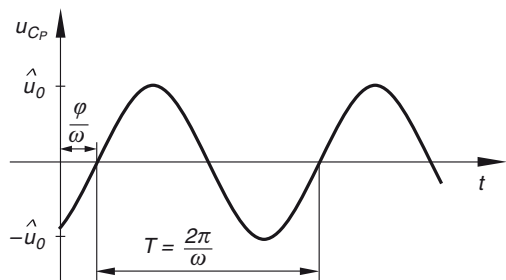


Bild IX-18 „Stationärer“ Anteil

b) Aus der zu Beginn hergeleiteten Beziehung $i = C \dot{u}_C$ erhalten wir damit für die *Stromstärke* i den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$i(t) = C \dot{u}_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \right] =$$

²⁾ Der „*flüchtige*“ Anteil ist die Lösung der *homogenen* Dgl, der „*stationäre*“ Anteil die *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl. Die *angelegte* Wechselspannung eilt dabei dem *stationären* Anteil um den Winkel $\varphi = \arctan(\omega \tau)$ voraus.

$$\begin{aligned}
 &= C \left[\frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) + \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \cdot \omega \right] = \\
 &= -\frac{\hat{u} \omega C}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u} \omega C}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Der „stationäre“ Anteil ist ein (kosinusförmiger) Wechselstrom mit dem Scheitelwert $\hat{i}_0 = \frac{\hat{u} \omega C}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$, der Kreisfrequenz ω und dem Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan(\omega \tau)$.

- c) Aus dem ohmschen Gesetz [A14] erhalten wir für die am ohmschen Widerstand R liegende Teilspannung u_R die folgende Zeitabhängigkeit (mit $\tau = RC$):

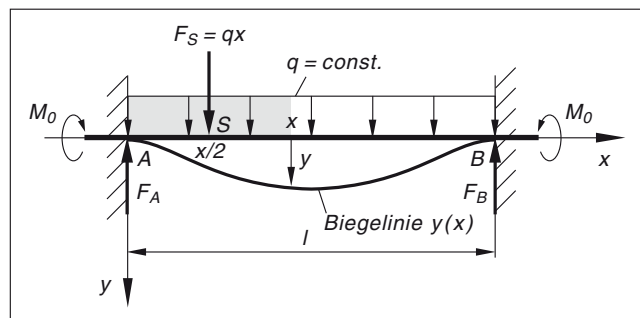
$$\begin{aligned}
 u_R(t) = Ri(t) &= -\frac{\hat{u} \omega RC}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u} \omega RC}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \\
 &= -\frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{u} \omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 7: Biegelinie eines beidseitig eingespannten Balkens bei konstanter Streckenlast

Dgl 2. Ordnung vom Typ $y'' = f(x)$ (direkte Integration)

Bestimmen Sie die Gleichung der *Biegelinie* [A28] eines beidseitig eingespannten homogenen Balkens der Länge l bei konstanter Streckenlast q und konstanter Biegesteifigkeit EI (Bild IX-19). An welcher Stelle ist die Durchbiegung am größten?

Bild IX-19



Lösungshinweis: Ermitteln Sie zunächst das Biegemoment $M_b(x)$ an der Schnittstelle x . Beachten Sie dabei das Auftreten eines Einspannmomentes M_0 an den beiden Einspannstellen $x = 0$ und $x = l$.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst das *Biegemoment* $M_b(x)$ an der Schnittstelle x . Es setzt sich wie folgt aus drei *Teilmomenten* zusammen:

1. Infolge der Einspannung tritt beiderseits ein (statisch unbestimmtes) *Einspannmoment* M_0 auf.
2. Die *Gesamtbelastung* des Balkens ist $F = ql$ und verteilt sich *gleichmäßig* auf die beiden Lager A und B . Für die *Lagerkräfte* gilt somit aufgrund der *statischen Gleichgewichtsbedingungen* [A1]

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

Die *Lagerkraft* F_A erzeugt damit an der Stelle x das *Moment* [A7]

$$M_A = F_A x = \frac{ql}{2} x$$

3. Ein weiteres Moment entsteht durch die konstante *Streckenlast* q . Der Balken wird dabei im Bereich vom Auflager A bis zur Schnittstelle x durch die Kraft $F_S = qx$ *gleichmäßig* belastet (*grau* unterlegtes Teilstück in Bild IX-19). Diese Kraft greift aus *Symmetriegründen* genau in der *Mitte* dieser Strecke, d. h. im *Schwerpunkt* S des Teilstückes und somit im Abstand $x/2$ von der Schnittstelle x an, und erzeugt daher das Moment [A7]

$$M_S = -F_S \cdot \frac{x}{2} = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{q}{2} x^2$$

Damit erhalten wir das folgende *Biegemoment*:

$$M_b(x) = M_0 + M_A + M_S = M_0 + \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2, \quad 0 \leq x \leq l$$

Die *Biegegleichung*, d. h. die *Dgl der Biegelinie* lautet dann (für *kleine* Durchbiegungen) *näherungsweise* [A28] wie folgt:

$$y'' = -\frac{M_b(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \cdot M_b(x) = -\frac{1}{EI} \left(M_0 + \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right)$$

Diese Dgl lässt sich durch *zweimalige* (unbestimmte) Integration leicht lösen:

$$\begin{aligned} y' &= \int y'' dx = -\frac{1}{EI} \cdot \int \left(M_0 + \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) dx = \\ &= -\frac{1}{EI} \left(M_0 x + \frac{ql}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right) \\ y &= \int y' dx = -\frac{1}{EI} \cdot \int \left(M_0 x + \frac{ql}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right) dx = \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_0}{2} x^2 + \frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sowie das Einspannmoment M_0 bestimmen wir aus den folgenden *Anfangsbedingungen*:

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (\text{keine Durchbiegung in den beiden Lagern})$$

$$y'(0) = y'(l) = 0 \quad (\text{waagerechte Tangenten in den beiden Lagern})$$

Sie liefern drei Bestimmungsgleichungen für die drei Unbekannten³⁾:

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{EI} \cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{EI} \cdot C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} y(l) = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_0}{2} l^2 + \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} \right) = 0 \Rightarrow \frac{M_0}{2} l^2 + \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{M_0}{2} l^2 + \frac{2ql^4 - ql^4}{24} = 0 \Rightarrow \frac{M_0}{2} l^2 + \frac{ql^4}{24} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{M_0}{2} l^2 = -\frac{ql^4}{24} \Rightarrow M_0 = -\frac{ql^2}{12} \end{aligned}$$

Die *Biegelinie* lautet damit

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{EI} \left(-\frac{ql^2}{24} x^2 + \frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 \right) = \frac{q}{24EI} (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) = \\ &= \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^2 x^2), \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Die *größte* Durchbiegung erfolgt aus *Symmetriegründen* genau in der *Balkenmitte*. Sie beträgt

$$y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{24EI} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{4} \right) = \frac{q}{24EI} \cdot \frac{l^4}{16} = \frac{ql^4}{384EI}$$

Beispiel 8: Knicklast nach Euler

Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)

Lange, schlanke *Stäbe*, die in *axialer* Richtung durch *Druckkräfte* belastet werden, zeigen bereits *vor* Überschreiten der Materialfestigkeit ein *seitliches* Ausbiegen, das bis zur Zerstörung der Stäbe führen kann. Man bezeichnet diesen Vorgang als *Knickung*. In diesem Beispiel soll das Verhalten eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge l untersucht werden, der durch eine Druckkraft F *axial* belastet wird (Bild IX-20).

³⁾ Wir benötigen nur *drei* der vier Bedingungen. Wir wählen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ und $y(l) = 0$. Die vierte Randbedingung ist dann aus *Symmetriegründen* automatisch erfüllt.

Bestimmen Sie die *Eulersche Knickkraft* F_K , bei der die Zerstörung des Stabes infolge seitlichen Ausknickens *erstmal* einsetzt.

EI : konstante Biegesteifigkeit des Stabes

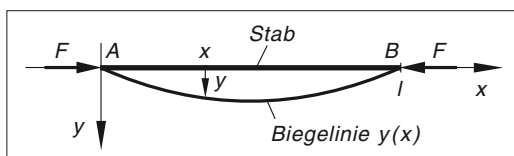


Bild IX-20

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst das Biegemoment $M_b(x)$ und untersuchen Sie dann, unter welchen Voraussetzungen die sog. *Biegegleichung*, d. h. die Dgl der Biegelinie [A28] *nichttriviale* Lösungen besitzt.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3 und IV.4.1.2

Physikalische Grundlagen: A7, A28

Lösung:

Die *axiale* Druckkraft F erzeugt an der Schnittstelle x die *ortsabhängige* Durchbiegung $y = y(x)$ und somit (bezüglich des *linken* Auflagerpunktes A) ein *Biegemoment* [A7] vom Betrag

$$M_b(x) = Fy$$

Die *Dgl der Biegelinie*, d. h. die sog. *Biegegleichung* lautet dann [A28]

$$y'' = -\frac{M_b(x)}{EI} = -\frac{F}{EI}y \quad \text{oder} \quad y'' + \frac{F}{EI}y = 0$$

Wir setzen noch zur Abkürzung $a^2 = F/(EI)$ und erhalten die als *Schwingungsgleichung* bezeichnete *homogene lineare Dgl 2. Ordnung*

$$y'' + a^2y = 0$$

Ihre *allgemeine* Lösung ist nach Band 2, Abschnitt IV.4.1.2 in der Form

$$y = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax)$$

darstellbar. In den beiden *Randpunkten* (Auflager A und B an den Stellen $x = 0$ und $x = l$) ist die Durchbiegung jeweils *null*: $y(0) = y(l) = 0$. Dies führt zu dem folgenden *homogenen linearen Gleichungssystem* für die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 0$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \sin(al) + C_2 \cdot \cos(al) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(al) \cdot C_1 + \cos(al) \cdot C_2 = 0$$

Eine *nichttriviale* Lösung, d. h. eine von $C_1 = C_2 = 0$ *verschiedene* Lösung existiert bekanntlich nur dann, wenn die *Koeffizientendeterminante* des Gleichungssystems *verschwindet* ⁴⁾:

⁴⁾ Für $C_1 = C_2 = 0$ ist $y = 0$ (keine Durchbiegung und somit kein seitliches Ausknicken).

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(al) & \cos(al) \end{vmatrix} = 0 \cdot \cos(al) - 1 \cdot \sin(al) = -\sin(al) = 0$$

Diese Bedingung ist nur erfüllbar für $al = k\pi$ und somit $a = k\pi/l$ (mit $k \in \mathbb{Z}$).

Unter Berücksichtigung von $a^2 = F/(EI)$ folgt hieraus für die Druckkraft

$$F = EIa^2 = EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 = k^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Die *kleinstmögliche* Druckkraft, bei der seitliches Ausbiegen, d. h. *Knickung* eintritt, erhält man für $k = 1$ ⁵⁾. Die gesuchte *Eulersche Knickkraft* beträgt somit

$$F_K = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Die *Biegelinie* besitzt dann die Gestalt eines *Sinusbogens* mit der Gleichung

$$y = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right), \quad 0 \leq x \leq l$$

(siehe Bild IX-21).

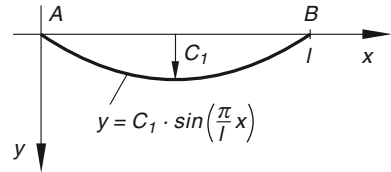


Bild IX-21

Denn das lineare Gleichungssystem für die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 besitzt für $k = 1$ und damit $al = \pi$ die spezielle Form

$$0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 0$$

$$(\sin \pi) \cdot C_1 + (\cos \pi) \cdot C_2 = 0 \cdot C_1 - 1 \cdot C_2 = 0$$

und wird für $C_2 = 0$ und *beliebige* Werte von C_1 gelöst. Die Konstante C_1 bleibt somit *unbestimmt*!

Beispiel 9: Radialbewegung einer Masse in einer geraden, rotierenden Führung

Homogene lineare Dgl 2. Ordnung

Bild IX-22 zeigt eine mit *konstanter* Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Zylinderscheibe vom Radius R , auf der sich eine Masse m in einer *radialen Führungsschiene* reibungsfrei nach außen bewegt.

⁵⁾ Für $k = -1$ erhalten wir dieselbe Lösung, da $F \sim k^2$ ist. Die Knickung erfolgt lediglich in der *Gegenrichtung* (also nach oben), die Gestalt der Biegelinie bleibt jedoch erhalten. Wir können uns somit auf die *positiven* k -Werte beschränken ($k \in \mathbb{N}^*$).

- a) Wie lautet das *Weg-Zeit-Gesetz* $r = r(t)$ sowie das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = \dot{r}(t)$ dieser *Radialbewegung* für die Anfangswerte $r(0) = a$, $v(0) = 0$?
- b) Nach welcher Zeit τ verlässt die Masse die Scheibe?

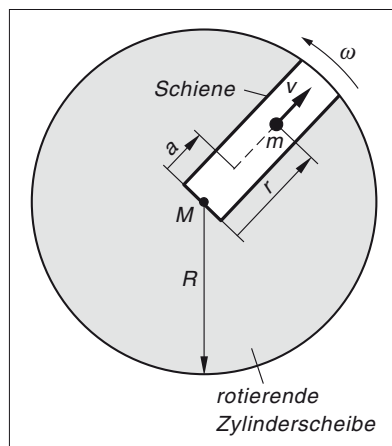


Bild IX-22

Lösungshinweis: Die Dgl der Radialbewegung erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3

Physikalische Grundlagen: A15, A27

Lösung:

- a) Für die radiale Bewegung ist die *Zentrifugalkraft* [A15] $F_Z = m\omega^2 r$ verantwortlich. Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann

$$ma = m\ddot{r} = m\omega^2 r \quad \text{oder} \quad \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (\text{mit } a = \ddot{r})$$

Dies ist eine *homogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Sie wird durch den *Exponentialansatz*

$$r = e^{\lambda t}, \quad \dot{r} = \lambda \cdot e^{\lambda t}, \quad \ddot{r} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} = \lambda^2 \cdot r$$

gelöst und führt zu der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm \omega$. Die *allgemeine Lösung* der Dgl lautet damit

$$r = C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den beiden *Anfangswerten*:

$$r(0) = a \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = a$$

$$\dot{r} = \omega C_1 \cdot e^{\omega t} - \omega C_2 \cdot e^{-\omega t} = \omega (C_1 \cdot e^{\omega t} - C_2 \cdot e^{-\omega t})$$

$$\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \omega (C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 1) = \omega (C_1 - C_2) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \quad (\text{da } \omega \neq 0) \Rightarrow C_2 = C_1$$

Aus den Gleichungen $C_1 + C_2 = a$ und $C_2 = C_1$ folgt dann

$$C_1 + C_1 = 2C_1 = a \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}a$$

Das *Weg-Zeit-Gesetz* der Bewegung lautet somit im Zeitintervall $0 \leq t \leq \tau$:

$$r(t) = \frac{1}{2}a \cdot e^{\omega t} + \frac{1}{2}a \cdot e^{-\omega t} = a \cdot \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = a \cdot \cosh(\omega t)$$

Durch *Differentiation* nach der Zeit t erhalten wir hieraus das Zeitgesetz der *Radialgeschwindigkeit*:

$$v(t) = \dot{r}(t) = a\omega \cdot \sinh(\omega t), \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Der zeitliche Verlauf beider Funktionen im Intervall $0 \leq t \leq \tau$ ist in den Bildern IX-23 und IX-24 dargestellt.

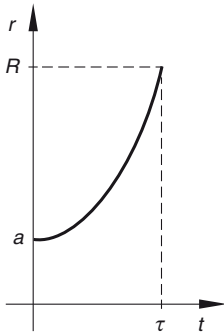


Bild IX-23 Weg-Zeit-Gesetz

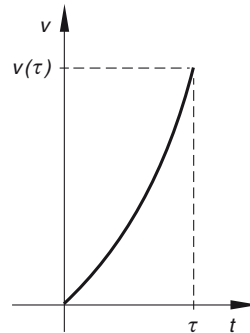


Bild IX-24 Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

- b) Im Zeitpunkt τ ist $r(\tau) = R$ (die Masse befindet sich am Rand der Scheibe) und somit

$$a \cdot \cosh(\omega \tau) = R \quad \text{oder} \quad \cosh(\omega \tau) = \frac{R}{a}$$

Durch *Umkehrung* erhalten wir hieraus schließlich die gesuchte *Zeitgröße* τ :

$$\omega \tau = \operatorname{arcosh}\left(\frac{R}{a}\right) \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{R}{a}\right)$$

Beispiel 10: Elektromagnetischer Schwingkreis

Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)

Ein *Kondensator* mit der Kapazität $C = 1 \mu\text{F}$ wird zunächst durch eine Spannungsquelle auf die Spannung $U_0 = 100 \text{ V}$ *aufgeladen* (Bild IX-25). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Kondensator durch Umlegen des Schalters S von der Spannungsquelle *getrennt* und einer Spule mit der Induktivität $L = 1 \text{ H}$ zugeschaltet.

Beschreiben Sie die im LC -Stromkreis entstehende *elektromagnetische Schwingung* durch den Verlauf der *Stromstärke* $i = i(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

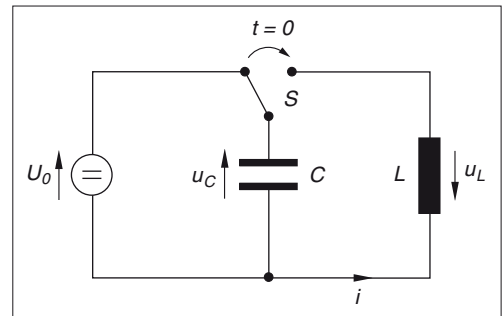


Bild IX-25

Lösungshinweis: Die Dgl der elektromagnetischen Schwingung erhalten Sie aus der *Maschenregel* [A32].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3 und IV.4.2.2

Physikalische Grundlagen: A32, A40, A43, A45

Lösung:

Nach der *Maschenregel* [A32] ist

$$u_L + u_C = 0$$

Mit $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ [A45] und $u_C = \frac{q}{C}$ [A40] wird hieraus

$$L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$

(q : Kondensatorladung). Wir *differenzieren* diese Gleichung gliedweise nach der Zeit t , beachten dabei die Beziehung $i = \frac{dq}{dt}$ [A43] und erhalten schließlich die folgende *Dgl* einer *freien, ungedämpften elektromagnetischen Schwingung*:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega^2 \cdot i = 0 \quad \left(\text{mit } \omega^2 = \frac{1}{LC} \right)$$

Diese *Schwingungsgleichung* besitzt bekanntlich die *allgemeine Lösung*

$$i(t) = K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t)$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.4.2.2). Die Integrationskonstanten K_1 und K_2 lassen sich aus den folgenden *Anfangsbedingungen* bestimmen:

1. Der Strom i ist zu Beginn der Schwingung, d. h. zur Zeit $t = 0$ gleich *null*: $i(0) = 0$;
2. Die Kondensatorspannung hat zu Beginn den Wert $u_C(0) = U_0$.

Aus der Maschengleichung folgt dann für den Zeitpunkt $t = 0$:

$$u_L(0) + u_C(0) = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} + U_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{U_0}{L}$$

Für die Integrationskonstanten ergeben sich aus diesen Anfangswerten dann folgende Werte:

$$\begin{aligned} i(0) = 0 &\Rightarrow K_1 \cdot \sin 0 + K_2 \cdot \cos 0 = K_1 \cdot 0 + K_2 \cdot 1 = 0 + K_2 = 0 \\ &\Rightarrow K_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} [K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t)] = \omega K_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega K_2 \cdot \sin(\omega t) = \\ &= \omega [K_1 \cdot \cos(\omega t) - K_2 \cdot \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} &= -\frac{U_0}{L} \Rightarrow \omega [K_1 \cdot \cos 0 - K_2 \cdot \sin 0] = \omega (K_1 \cdot 1 - K_2 \cdot 0) = \\ &= \omega K_1 = -\frac{U_0}{L} \Rightarrow K_1 = -\frac{U_0}{\omega L} = -\frac{U_0 \sqrt{LC}}{L} = -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned}$$

Im LC -Schwingkreis fließt somit der *sinusförmige* Wechselstrom

$$i(t) = -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega t) = -i_0 \cdot \sin(\omega t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \pi), \quad t \geq 0 \text{ s}$$

mit dem *Scheitelwert* $i_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$, der *Kreisfrequenz* $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und dem *Nullphasenwinkel* $\varphi = \pi$.

Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten wir schließlich

$$i(t) = 0,1 \text{ A} \cdot \sin(1000 \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi), \quad t \geq 0$$

Der zeitliche Verlauf dieser Schwingung ist in Bild IX-26 dargestellt.

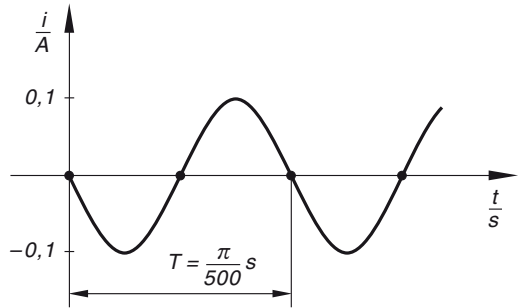


Bild IX-26

Beispiel 11: Biegeschwingung einer elastischen Blattfeder

Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)

Eine einseitig fest eingespannte elastische *Blattfeder* der Länge l trägt am anderen Ende eine Masse m und wird durch seitliches Auslenken in *Biegeschwingungen* versetzt (Bild IX-27).

- a) Wie lautet die Dgl dieser Schwingung?
 b) Bestimmen Sie die Lösung der Schwingungsgleichung für die Anfangswerte $y(0) = y_0$ und $v(0) = \dot{y}(0) = 0$.

$y = y(t)$: Auslenkung zur Zeit t

A, B: Umkehrpunkte der Schwingung

C: Gleichgewichtslage der Feder

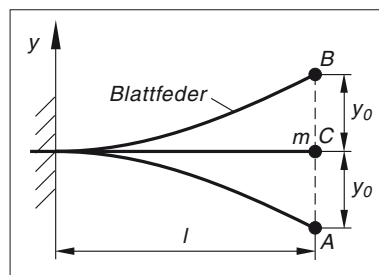


Bild IX-27

Lösungshinweis: Verwenden Sie bei der Bestimmung der Rückstellkraft F_R der Blattfeder den folgenden Sachverhalt: Ein einseitig eingespannter elastischer Träger (wie die Blattfeder), der am freien Ende durch eine Kraft F belastet wird, erfährt dort die Durchbiegung $y = Fl^3/(3EI)$ (EI : konstante Biegesteifigkeit des Trägers; E : Elastizitätsmodul; I : Flächenträgheitsmoment). Die Dgl der Biegeschwingung erhalten Sie dann aus dem Newtonschen Grundgesetz [A27].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3 und IV.4.1.2

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

- a) Bild IX-28 zeigt die Lage der Blattfeder zum Zeitpunkt t , die Auslenkung der Masse m zu dieser Zeit ist durch die Koordinate y gegeben.

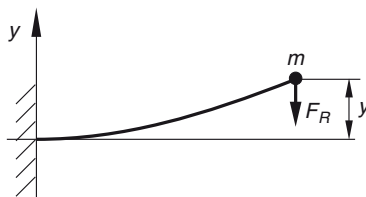


Bild IX-28

Die auf die Masse einwirkende, rücktreibende Kraft F_R ist (betragsmäßig) gleich jener äußeren Kraft F , die am freien Ende der Blattfeder die Durchbiegung y hervorruft. Zwischen dieser Kraft und der von ihr erzeugten Durchbiegung besteht aber laut **Lösungshinweis** der folgende Zusammenhang:

$$y = \frac{Fl^3}{3EI} \quad \text{oder} \quad F = \frac{3EI}{l^3} y$$

Somit ist

$$F_R = -F = -\frac{3EI}{l^3} y$$

(die Rückstellkraft F_R wirkt der Durchbiegung y entgegen). Die Federkonstante c der Blattfeder hat daher den Wert

$$c = \left| \frac{F_R}{y} \right| = \left| -\frac{3EI}{l^3} \right| = \frac{3EI}{l^3}$$

Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann (mit $a = \ddot{y}$)

$$m a = m \ddot{y} = F_R = -\frac{3EI}{l^3} y \quad \text{oder} \quad \ddot{y} = -\frac{3EI}{ml^3} y$$

Wir stellen diese *homogene lineare Dgl 2. Ordnung* noch geringfügig um und erhalten die bekannte *Schwingungsgleichung* in der Form

$$\ddot{y} + \frac{3EI}{ml^3} y = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{3EI}{ml^3} \right).$$

b) Die *allgemeine Lösung* dieser Dgl ist aus Band 2, Abschnitt IV.4.1.2 bekannt. Sie lautet

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Anfangswerten* $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = \dot{y}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &\Rightarrow C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 + C_2 = y_0 \\ &\Rightarrow C_2 = y_0 \end{aligned}$$

$$\dot{y} = \omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega C_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) = 0 &\Rightarrow \omega C_1 \cdot \cos 0 - \omega C_2 \cdot \sin 0 = \omega C_1 \cdot 1 - \omega C_2 \cdot 0 = \omega C_1 = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{da } \omega \neq 0) \end{aligned}$$

Die *Biegeschwingung* verläuft daher *harmonisch* nach der Gleichung

$$y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega t), \quad t \geq 0$$

mit der *Schwingungsamplitude* y_0 und der *Kreisfrequenz* $\omega = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$ bzw. der *Schwingungsdauer* $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{ml^3}{3EI}}$ (siehe Bild IX-29).

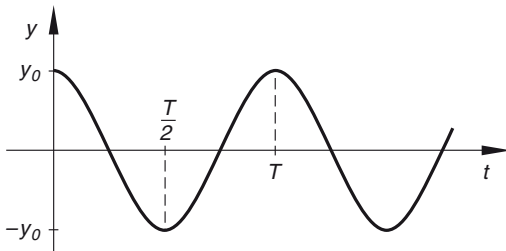


Bild IX-29

Beispiel 12: Scheibenpendel (physikalisches Pendel)**Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)**

Eine homogene *Zylinderscheibe* mit der Masse m und dem Radius R schwingt um eine Achse A , die *parallel* zur Symmetrieachse (Zylinderachse) durch den Scheibenumfang verläuft (Bild IX-30).

- Wie lautet die Dgl dieser Schwingung?
- Lösen Sie die Schwingungsgleichung für *kleine* Winkel φ unter den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

A : Drehachse (senkrecht zur Zeichenebene)

S : Schwerpunkt (= Mittelpunkt der Scheibe)

φ : Auslenkwinkel zur Zeit t

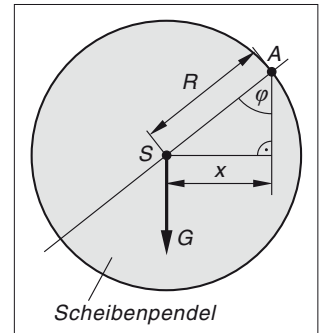


Bild IX-30

Lösungshinweis: Das Massenträgheitsmoment der Scheibe bezüglich der *Symmetrieachse* (Schwerpunktachse) beträgt $J_S = \frac{1}{2} m R^2$. Das benötigte Massenträgheitsmoment J_A bezüglich der *Drehachse* A lässt sich dann aus dem *Steinerschen Satz* [A31] bestimmen. Die Dgl der Schwingung erhalten Sie aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3 und IV.4.1.2

Physikalische Grundlagen: A7, A31, A36

Lösung:

- Das im *Schwerpunkt* S angreifende Gewicht $G = m g$ erzeugt ein *rücktreibendes* Moment [A7]

$$M_R = -G x = -m g (R \cdot \sin \varphi) = -m g R \cdot \sin \varphi$$

$$(\sin \varphi = x/R \Rightarrow x = R \cdot \sin \varphi; \text{ siehe Bild IX-30})$$

Aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36] folgt

$$J_A \alpha = J_A \ddot{\varphi} = M_R = -m g R \cdot \sin \varphi \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{m g R}{J_A} \cdot \sin \varphi = 0$$

Dabei ist α die Winkelbeschleunigung ($\alpha = \ddot{\varphi}$) und J_A das Massenträgheitsmoment der Scheibe bezüglich der Drehachse A . Dieses lässt sich nach dem *Steinerschen Satz* [A31] wie folgt berechnen:

$$J_A = J_S + m R^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

Die Pendelbewegung genügt somit der *nichtlinearen Dgl 2. Ordnung*

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2} \cdot \sin \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2g}{3R} \cdot \sin \varphi = 0$$

- b) Für *kleine Winkel*⁶⁾ ist $\sin \varphi \approx \varphi$ und die Dgl des Scheibenpendels geht dann über in eine *homogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*, die unter der Bezeichnung *Schwingungsgleichung* allgemein bekannt ist:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3R} \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \left(\omega_0^2 = \frac{2g}{3R} \right)$$

Ihre *allgemeine Lösung* lautet (siehe Band 2, Abschnitt IV.4.1.2)

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Anfangsbedingungen* $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi_0 &\Rightarrow C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 + C_2 = \varphi_0 \\ &\Rightarrow C_2 = \varphi_0 \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(0) = 0 &\Rightarrow \omega_0 C_1 \cdot \cos 0 - \omega_0 C_2 \cdot \sin 0 = \omega_0 C_1 \cdot 1 - \omega_0 C_2 \cdot 0 = 0 \\ &\Rightarrow \omega_0 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{da } \omega_0 \neq 0) \end{aligned}$$

Das *Scheibenpendel* schwingt somit für *kleine* Auslenkwinkel φ *nahezu harmonisch* nach der Gleichung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

Bild IX-31 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser Schwingung mit dem maximalen Auslenkwinkel (der Winkelamplitude) φ_0 , der *Kreisfrequenz* $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ und der *Schwingungsdauer* $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{3R}{2g}}$.

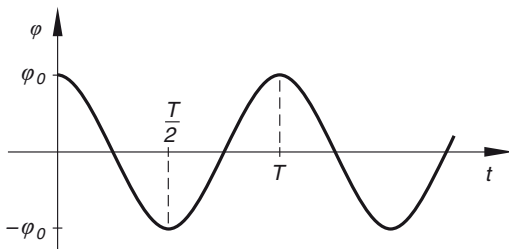


Bild IX-31

⁶⁾ Für Winkel *unter* 14° beträgt der maximale *prozentuale Fehler* rund 1 %, für Winkel *unter* 20° rund 2 %.

Beispiel 13: Vertikale Schwingungen eines Körpers in einer Flüssigkeit
Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (gedämpfte Schwingung)

Ein homogener *zylindrischer* Körper mit der Masse m und der Querschnittsfläche A taucht in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ zur Hälfte ein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Körper aus der Ruhe heraus kurz nach *unten* angestoßen und beginnt dann um die Gleichgewichtslage zu *schwingen*. Die augenblickliche Position des schwingenden Körpers soll durch die Schwerpunktskoordinate x beschrieben werden (siehe Bild IX-32).

- a) Wie lautet die Dgl dieser Schwingung unter Berücksichtigung des *Auftriebs* [A35] und einer der Geschwindigkeit v proportionalen (schwachen) *Reibungskraft*?
- b) Lösen Sie diese Schwingungsgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0 > 0$.

k : Reibungskoeffizient

ϱ : Dichte der Flüssigkeit

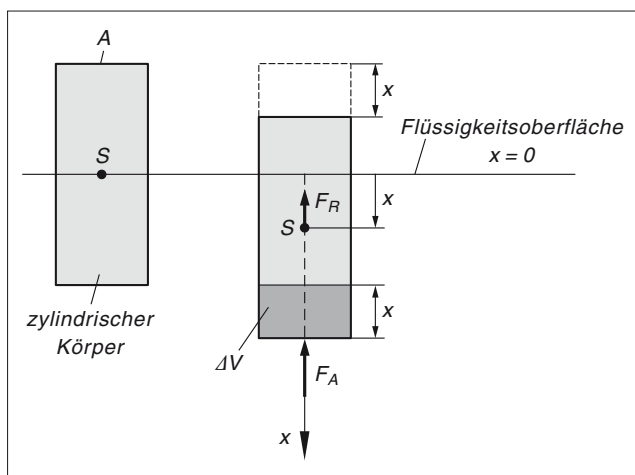


Bild IX-32

Lösungshinweis: Die Schwingungsgleichung lässt sich aus dem Newtonschen Grundgesetz [A27] herleiten.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.3 und IV.4.1.3

Physikalische Grundlagen: A27, A35

Lösung:

- a) In der *Gleichgewichtslage* ($x = 0$) wird die *Gewichtskraft* $G = mg$ gerade durch die nach *oben* gerichtete *Auftriebskraft* kompensiert. Der Schwerpunkt S des Körpers liegt dann genau in der *Flüssigkeitsoberfläche* (siehe Bild IX-32). Durch das kurze Anstoßen nach *unten* taucht der Körper weiter unter und erfährt daher eine *zusätzliche* Auftriebskraft F_A nach *oben*, die von der augenblicklichen Eintauchtiefe abhängt und als *rücktreibende* Kraft wirkt. Nach dem *Archimedischen Prinzip* [A35] entspricht diese zusätzliche Auftriebskraft F_A dem *Gewicht* der *verdrängten* Flüssigkeitsmenge vom Volumen $\Delta V = Ax$ und der Masse $\Delta m = \varrho \Delta V = \varrho Ax$ (in Bild IX-32 *dunkelgrau* unterlegt). Somit ist

$$F_A = -\Delta m g = -\varrho \Delta V g = -\varrho (Ax) g = -\varrho g Ax$$

(das *Minuszeichen* bringt dabei zum Ausdruck, dass der Auftrieb dem Gewicht *entgegen* wirkt).

Die in der *gleichen* Richtung wirkende *Reibungskraft* setzen wir in der Form

$$F_R = -k v = -k \dot{x} \quad (\text{mit } v = \dot{x})$$

an. Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann (mit $a = \ddot{x}$)

$$m a = m \ddot{x} = F_A + F_R \quad \text{oder} \quad m \ddot{x} = -\varrho g A x - k \dot{x}$$

Wir bringen diese *homogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* noch auf eine spezielle Form:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + \varrho g A x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\left(\delta = \frac{k}{2m}; \omega_0^2 = \frac{\varrho g A}{m} \right)$. Dies ist die *Dgl einer freien (schwach) gedämpften Schwingung*.

b) Die *allgemeine* Lösung dieser Dgl lässt sich in der Form

$$x(t) = C \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d)$$

darstellen (siehe Band 2, Abschnitt IV.4.1.3.1 und IV.4.1.3.4). Darin bedeuten:

δ : *Dämpfungsfaktor* oder *Abklingkonstante*

ω_d : *Eigenkreisfrequenz* des *gedämpften* Systems

C, φ_d : *Integrationskonstanten*, die aus den *Anfangsbedingungen* bestimmt werden müssen ($C > 0$; $0 \leq \varphi_d < 2\pi$)

Die *Eigenkreisfrequenz* ω_d ist dabei durch den Ausdruck

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

gegeben. Die Integrationskonstanten C und φ_d bestimmen wir aus den vorgegebenen *Anfangsbedingungen* wie folgt:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C \cdot 1 \cdot \sin \varphi_d = 0 \Rightarrow \sin \varphi_d = 0 \quad (\text{da } C > 0)$$

Als Lösungen kommen wegen $0 \leq \varphi_d < 2\pi$ nur die Winkel $\varphi_d = 0$ und $\varphi_d = \pi$ infrage. Eine Entscheidung darüber treffen wir etwas später anhand einer weiteren Bedingung. Zunächst aber erfüllen wir noch die *zweite* Anfangsbedingung $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Die benötigte Ableitung $\dot{x}(t)$ erhalten wir mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$\dot{x}(t) = C [e^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d) + e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi_d) \cdot \omega_d] =$$

$$= C \cdot e^{-\delta t} [-\delta \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d t + \varphi_d)]$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C \cdot 1 \cdot \underbrace{[-\delta \cdot \sin \varphi_d + \omega_d \cdot \cos \varphi_d]}_0 = C \omega_d \cdot \cos \varphi_d = v_0$$

(der Faktor $\sin \varphi_d$ verschwindet für die möglichen Winkelwerte $\varphi_d = 0$ und $\varphi_d = \pi$)

Da C , ω_d und v_0 positive Größen sind, gilt dies auch für den Faktor $\cos \varphi_d$. Damit kommt von den beiden *zunächst* möglichen Winkelwerten $\varphi_d = 0$ und $\varphi_d = \pi$ nur der *erste* Wert infrage. Somit ist $\varphi_d = 0$ ⁷⁾. Für die Integrationskonstante C erhalten wir dann den folgenden Wert:

$$C \omega_d \cdot \cos 0 = C \omega_d \cdot 1 = C \omega_d = v_0 \Rightarrow C = \frac{v_0}{\omega_d}$$

Der eingetauchte Körper schwingt daher *gedämpft* nach der Gleichung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0$$

mit dem Dämpfungsfaktor $\delta = k/(2m)$ und der Kreisfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{g A}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4 g A m - k^2}{4m^2}} = \frac{\sqrt{4 g A m - k^2}}{2m}$$

Bild IX-33 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser Schwingung.

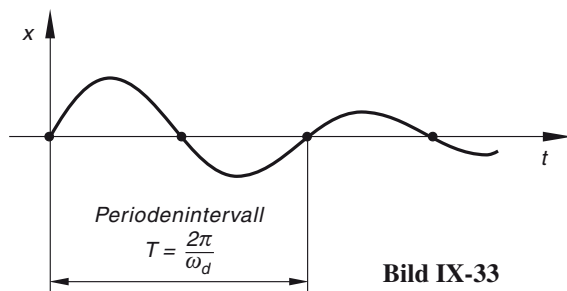


Bild IX-33

Beispiel 14: Schwingung eines rotierenden Federpendels

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)

Ein zylindrisches *Hohlrohr* rotiert mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω_0 in einer *horizontalen* Ebene. In dem Rohr befindet sich ein *Federpendel* mit der Masse m und der Federkonstanten c (Bild IX-34). Die Länge der Feder im *entspannten* Zustand ist l . Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt das Federpendel die Auslenkung x_0 und ist *relativ* zum Rohr in Ruhe.

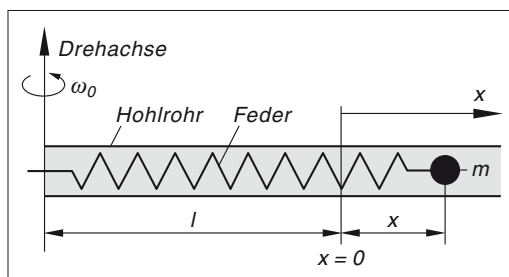


Bild IX-34

⁷⁾ $\cos 0 = 1 > 0$, aber $\cos \pi = -1 < 0$.

Nach welchem *Weg-Zeit-Gesetz* $x = x(t)$ erfolgt die *Schwingung* des rotierenden Federpendels bei *Vernachlässigung* der Reibungskräfte?

Lösungshinweis: Die Dgl der Schwingung erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]. Die Federmasse wird als vernachlässigbar angesehen.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.4 und IV.4.1

Physikalische Grundlagen: A15, A27

Lösung:

Auf das *rotierende* Pendel wirken folgende Kräfte ein:

1. Die nach *außen* gerichtete *Zentrifugalkraft* [A15] $F_Z = m\omega_0^2 r = m\omega_0^2(l + x)$;
2. Die *rücktreibende* elastische Kraft der Feder (*Rückstellkraft*) $F_R = -cx$.

Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann (mit $a = \ddot{x}$)

$$ma = m\ddot{x} = F_Z + F_R = m\omega_0^2(l + x) - cx = m\omega_0^2 l + m\omega_0^2 x - cx$$

Wir stellen diese Gleichung noch wie folgt um:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx - m\omega_0^2 x &= m\ddot{x} + (c - m\omega_0^2)x = m\omega_0^2 l \Rightarrow \\ \ddot{x} + \left(\frac{c - m\omega_0^2}{m}\right)x &= \omega_0^2 l \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \omega_0^2 l \quad \left(\omega^2 = \frac{c - m\omega_0^2}{m}\right) \end{aligned}$$

Dies ist eine *inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Wir lösen sie nach der Methode „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*“ (Band 2, Abschnitt IV.3.4). Die zugehörige *homogene Dgl*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ist die bekannte *Schwingungsgleichung* und besitzt die *allgemeine Lösung*

$$x_h = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)$$

Die *Störfunktion* der *inhomogenen Dgl* ist die *konstante Funktion* $g(t) = \omega_0^2 l = \text{const.}$ Daher wählen wir für die *partikuläre Lösung* der *inhomogenen Dgl* den Lösungsansatz ⁸⁾

$$x_p = A = \text{const.}, \quad \dot{x}_p = 0, \quad \ddot{x}_p = 0$$

Durch Einsetzen in die *inhomogene Dgl* erhalten wir dann

$$0 + \omega^2 A = \omega_0^2 l \Rightarrow \omega^2 A = \omega_0^2 l \Rightarrow A = \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}$$

Somit ist $x_p = \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}$ die gesuchte *partikuläre Lösung* und die *allgemeine Lösung* der *inhomogenen Dgl* lautet wie folgt:

⁸⁾ Lösungsansatz nach Band 2, Abschnitt IV.3.4, Tabelle 2.

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}$$

Die Berechnung der beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 erfolgt aus den *Anfangsbedingungen* $x(0) = x_0$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} = x_0$$

$$\Rightarrow C_2 + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} = x_0 \Rightarrow C_2 = x_0 - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}$$

$$\dot{x}(t) = \omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega C_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \omega C_1 \cdot \cos 0 - \omega C_2 \cdot \sin 0 = \omega C_1 \cdot 1 - \omega C_2 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \omega C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{da } \omega \neq 0)$$

Das *rotierende* Federpendel schwingt somit *harmonisch* nach der Gleichung

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} \right) \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}, \quad t \geq 0$$

Amplitude A , *Kreisfrequenz* ω und *Schwingungsdauer* T betragen dabei der Reihe nach

$$A = x_0 - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} = \frac{\omega^2 x_0 - \omega_0^2 l}{\omega^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c - m\omega_0^2}{m}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c - m\omega_0^2}}$$

Bild IX-35 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser *harmonischen* Schwingung.

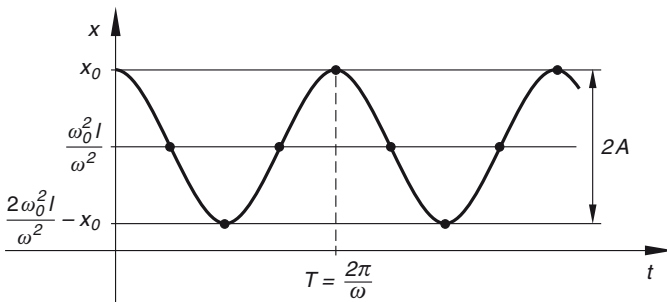


Bild IX-35

Beispiel 15: Drehspulinstrument

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)

Bild IX-36 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines *Drehspulinstrumentes* zur Messung von Gleichstrom.

Das Magnetfeld im Luftspalt zwischen den äußeren Polschuhen und dem inneren (festgehaltenen) Weicheisenzylinder verläuft nahezu *radial* und der Betrag der magnetischen Flussdichte \vec{B} darf in diesem Spalt als nahezu *konstant* angenommen werden. Um den Zylinder ist eine *rechteckige* Leiterschleife drehbar gelagert (Länge: l ; Breite: $2r$). Sie wird durch eine *Spiralfeder* in Ruhelage gehalten.

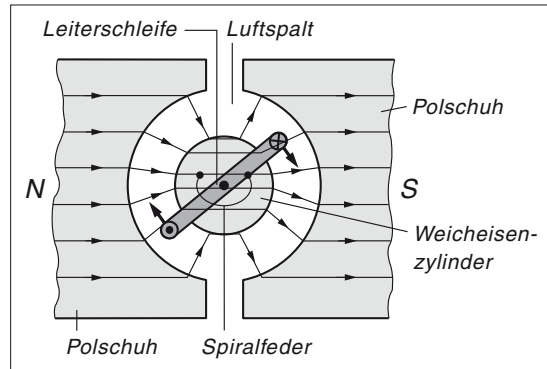


Bild IX-36

Fließt ein *konstanter Messstrom* I durch die Leiterschleife, so erfährt diese im Magnetfeld \vec{B} eine *Kraft* \vec{F} und somit ein *Drehmoment* \vec{M} . Das System ist dabei so stark *gedämpft*, dass der mit der Drehachse starr verbundene Zeiger *asymptotisch* seiner Endlage zustrebt (Drehung um den Winkel φ aus der Ruhelage $\varphi = 0$).

- Durch welche *Dgl* wird diese *aperiodische* Zeigerbewegung beschrieben?
- Wie lautet die *Lösung* dieser Schwingungsgleichung für die Anfangswerte $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$?

Lösungshinweis: Das *Rückstellmoment* M_R der Spiralfeder ist dem Drehwinkel φ *proportional* (Federkonstante: $c > 0$), die *Dämpfung* des Systems wird durch ein der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ *proportionales* Drehmoment M_D beschrieben (Reibungskoeffizient: $k > 0$). Das als bekannt vorausgesetzte *Massenträgheitsmoment* der Leiterschleife ist J . Die *Dgl* der aperiodischen Bewegung erhalten Sie aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.4 und IV.4.1.3.2

Physikalische Grundlagen: A6, A7, A36

Lösung:

- Die stromdurchflossene Leiterschleife erfährt ein *Gesamtmoment*, das sich aus den folgenden drei *Teilmomenten* zusammensetzt:
 - Ein stromdurchflossener Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft [A6]. Von Bedeutung sind in unserem Beispiel allerdings nur die beiden im Luftspalt liegenden *Längsseiten* der Leiterschleife⁹⁾. Sie erfahren eine Kraft vom Betrag $F = BIl$. Der

⁹⁾ In den *Längsseiten* der Leiterschleife fließt der Strom *senkrecht* zu den magnetischen Feldlinien, in den beiden übrigen Teilen jedoch *parallel* zum Magnetfeld.

Kraftvektor steht dabei sowohl auf dem Magnetfeld als auch zur Stromrichtung *senkrecht* und verläuft somit auch *senkrecht* zum Dreharm der Länge r . Diese Kraft erzeugt somit das *konstante* Drehmoment [A7]

$$M = Fr = B l r = B l r I$$

2. Die *Rückstellkraft* der Spiralfeder erzeugt nach Voraussetzung ein dem Drehwinkel φ proportionales *Rückstellmoment*

$$M_R = -c \varphi \quad (c: \text{Federkonstante})$$

3. Die *Dämpfung* wird nach Voraussetzung durch ein der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ *proportionales* Drehmoment beschrieben:

$$M_D = -k \dot{\varphi} \quad (k: \text{Reibungskoeffizient})$$

Nach dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36] gilt dann (mit $\alpha = \ddot{\varphi}$)

$$J \alpha = M + M_R + M_D \Rightarrow J \ddot{\varphi} = B l r I - c \varphi - k \dot{\varphi}$$

(J : Massenträgheitsmoment der Leiterschleife). Wir bringen diese *inhomogene lineare Dgl* 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten noch auf eine übersichtlichere Gestalt:

$$J \ddot{\varphi} + k \dot{\varphi} + c \varphi = B l r I \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{k}{J} \dot{\varphi} + \frac{c}{J} \varphi = \frac{B l r I}{J} \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{B l r I}{J} \quad \left(\delta = \frac{k}{2J}; \omega_0^2 = \frac{c}{J} \right)$$

- b) Wir lösen die in a) hergeleitete *Schwingungsgleichung* durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“ (Band 2, Abschnitt IV.3.4). Zuerst wird die zugehörige *homogene Dgl*

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

gelöst. Mit dem *Lösungsansatz* (*Exponentialansatz*) $\varphi = e^{\lambda t}$, $\dot{\varphi} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $\ddot{\varphi} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ folgt dann

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\delta \lambda \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Wir dividieren durch $e^{\lambda t} \neq 0$ und erhalten die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den *reellen* Lösungen¹⁰⁾

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \underbrace{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{\mu^2} = -\delta \pm \mu$$

¹⁰⁾ Wegen der vorausgesetzten *starken* Dämpfung ist $\delta > \omega_0$ und somit $\mu^2 = \delta^2 - \omega_0^2 > 0$.

Da $\mu < \delta$ ist, sind *beide* Lösungen *negativ*: $\lambda_{1/2} < 0$. Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl setzt sich somit aus zwei *streng monoton fallenden* e-Funktionen zusammen:

$$\varphi_0 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = C_1 \cdot e^{(-\delta+\mu)t} + C_2 \cdot e^{(-\delta-\mu)t}$$

Eine *partikuläre* Lösung φ_p der *inhomogenen* Dgl gewinnen wir durch den Lösungsansatz

$$\varphi_p = A = \text{const}, \quad \dot{\varphi}_p = 0, \quad \ddot{\varphi}_p = 0$$

da die *Störfunktion* $g(t) = \frac{BlrI}{J}$ *konstant* ist (Band 2, Abschnitt IV.3.4, Tabelle 2). Durch Einsetzen in die *inhomogene* Dgl folgt dann (mit $\omega_0^2 = c/J$)

$$0 + 0 + \omega_0^2 A = \frac{BlrI}{J} \Rightarrow \omega_0^2 A = \frac{BlrI}{J} \Rightarrow A = \frac{BlrI}{\omega_0^2 J} = \frac{BlrI}{\frac{c}{J} J} = \frac{BlrI}{c}$$

Somit ist die *konstante* Funktion

$$\varphi_p = A = \frac{BlrI}{c}$$

eine *partikuläre* Lösung der gegebenen Schwingungsgleichung. Die *allgemeine* Lösung besitzt somit die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_p = C_1 \cdot e^{(-\delta+\mu)t} + C_2 \cdot e^{(-\delta-\mu)t} + \frac{BlrI}{c}$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 lassen sich aus den *Anfangsbedingungen* wie folgt bestimmen:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + \frac{BlrI}{c} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{BlrI}{c} = 0$$

$$\dot{\varphi}(t) = (-\delta + \mu) C_1 \cdot e^{(-\delta+\mu)t} + (-\delta - \mu) C_2 \cdot e^{(-\delta-\mu)t}$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow (-\delta + \mu) C_1 \cdot 1 + (-\delta - \mu) C_2 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow (-\delta + \mu) C_1 - (\delta + \mu) C_2 = 0$$

Das *lineare Gleichungssystem*

$$C_1 + C_2 = -\frac{BlrI}{c}$$

$$(-\delta + \mu) C_1 - (\delta + \mu) C_2 = 0$$

lösen wir nach der *Cramerschen Regel* (Band 2, Abschnitt I.5.4.3).

Mit der *Koeffizientendeterminante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-\delta + \mu) & -(\delta + \mu) \end{vmatrix} = -(\delta + \mu) - (-\delta + \mu) = \\ = -\delta - \mu + \delta - \mu = -2\mu$$

und den beiden *Hilfsdeterminanten*

$$D_1 = \begin{vmatrix} -(BlrI)/c & 1 \\ 0 & -(\delta + \mu) \end{vmatrix} = \frac{(\delta + \mu) BlrI}{c},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -(BlrI)/c \\ (-\delta + \mu) & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-\delta + \mu) BlrI}{c}$$

erhalten wir schließlich

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\frac{(\delta + \mu) BlrI}{c}}{-2\mu} = -\frac{(\delta + \mu) BlrI}{2c\mu},$$

$$C_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\frac{(-\delta + \mu) BlrI}{c}}{-2\mu} = -\frac{(-\delta + \mu) BlrI}{2c\mu}$$

Die gesuchte *Lösung* lautet damit

$$\varphi(t) = -\frac{(\delta + \mu) BlrI}{2c\mu} \cdot e^{(-\delta + \mu)t} - \frac{(-\delta + \mu) BlrI}{2c\mu} \cdot e^{(-\delta - \mu)t} + \frac{BlrI}{c} = \\ = \frac{BlrI}{c} \left[1 - \frac{\mu + \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta + \mu)t} - \frac{\mu - \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta - \mu)t} \right], \quad t \geq 0$$

Der zeitliche Verlauf dieser *aperiodischen* Bewegung ist in Bild IX-37 dargestellt. Die *Dämpfung* des Drehspulinstrumentes lässt sich dabei so einstellen, dass die beiden Exponentialfunktionen rasch gegen *null* abklingen und der *Endwert* (*Messwert*) φ_E somit schnell erreicht wird¹¹⁾:

$$\varphi_E = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{BlrI}{c} \left[1 - \frac{\mu + \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta + \mu)t} - \frac{\mu - \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta - \mu)t} \right] = \\ = \frac{BlrI}{c} (1 - 0 - 0) = \frac{BlrI}{c} = \frac{Blr}{c} \cdot I \sim I$$

Der Zeiger des Messinstrumentes strebt somit in kurzer Zeit *asymptotisch* gegen seinen *Endwert* φ_E . Wegen $\varphi_E \sim I$ ist die Skala *linear* unterteilt.

¹¹⁾ Da $\delta > \mu$ gilt $(-\delta \pm \mu) < 0$.

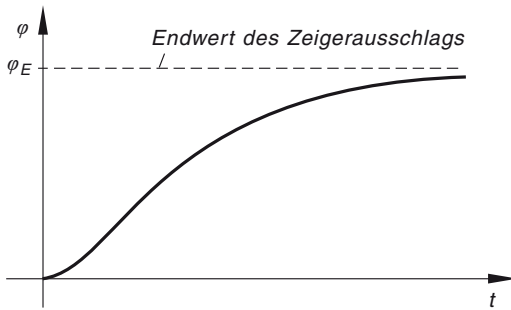


Bild IX-37

Anmerkung: Die Lösung lässt sich damit auch in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \varphi_E \left[1 - \frac{\mu + \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta + \mu)t} - \frac{\mu - \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta - \mu)t} \right] = \\
 &= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\frac{\mu + \delta}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\mu - \delta}{2} \cdot e^{-\mu t} \right) \right] = \\
 &= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\frac{\mu}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\delta}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu t} - \frac{\delta}{2} \cdot e^{-\mu t} \right) \right] = \\
 &= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\underbrace{\mu \cdot \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2}}_{\cosh(\mu t)} + \underbrace{\delta \cdot \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2}}_{\sinh(\mu t)} \right) \right] = \\
 &= \frac{\varphi_E}{\mu} [\mu - e^{-\delta t} (\mu \cdot \cosh(\mu t) + \delta \cdot \sinh(\mu t))]
 \end{aligned}$$

Beispiel 16: Erzwungene mechanische Schwingung

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (erzwungene Schwingung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)

Ein *schwach gedämpftes schwingungsfähiges mechanisches System* mit dem Dämpfungsfaktor δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0 (des *ungedämpften Systems*) wird von *außen* durch eine *periodische Kraft* mit derselben Kreisfrequenz ω_0 zu *erzwungenen Schwingungen* angeregt. Lösen Sie die *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (\text{mit } \delta < \omega_0)$$

für die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$x = x(t)$: Auslenkung des Systems zur Zeit t ; $F = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$: periodische äußere Kraft mit $F_0 > 0$; m : Schwingungsmasse; $a = F_0/m$

Lösung:

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

durch den *Lösungsansatz* (*Exponentialansatz*) $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und erhalten die Gleichung

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\delta\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ führt schließlich zu der *charakteristischen* Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Diese besitzt bei der vorausgesetzten *schwachen* Dämpfung ($\delta < \omega_0$) *konjugiert komplexe* Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \underbrace{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{< 0} = -\delta \pm \underbrace{\sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)}}_{\omega_d^2 > 0} = -\delta \pm \sqrt{-\omega_d^2} = -\delta \pm j\omega_d$$

Wir erhalten somit eine *gedämpfte* Schwingung mit der Gleichung

$$x_0(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)] \quad \text{mit} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.4.1.3.1). Eine *partikuläre* Lösung x_p der *inhomogenen* Schwingungsgleichung findet man mit dem *Lösungsansatz*

$$x_p = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.3.4, Tabelle 2; Störfunktion: $g(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$).

Mit diesem Ansatz und den zugehörigen Ableitungen

$$\dot{x}_p = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein:

$$\begin{aligned} & -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta[\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)] + \\ & + \omega_0^2 [A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)] = a \cdot \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \\ & -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\delta\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) + \\ & + \omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Diese Gleichung reduziert sich wie folgt:

$$2\delta\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\delta\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + 0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Auf der *rechten* Seite haben wir dabei den *verschwindenden Sinusterm* $0 \cdot \sin(\omega_0 t)$ addiert. Durch *Koeffizientenvergleich* der Kosinus- bzw. Sinusterme beiderseits lassen sich dann die gesuchten Koeffizienten A und B bestimmen:

$$2\delta\omega_0 A = a \Rightarrow A = \frac{a}{2\delta\omega_0} \quad \text{und} \quad -2\delta\omega_0 B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Somit lautet die *partikuläre* Lösung

$$x_p = \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Schwingungsgleichung ist dann die Summe aus x_0 und x_p :

$$x(t) = x_0 + x_p = e^{-\delta t} [C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 berechnen wir aus den *Anfangsbedingungen* $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ wie folgt:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 1 [C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin 0 = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 + C_2 + 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Zwischenergebnis: $x(t) = C_1 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$

Die benötigte Ableitung $\dot{x}(t)$ erhalten wir mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\dot{x}(t) = C_1 [e^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \cdot \omega_d \cdot e^{-\delta t}] + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0 =$$

$$= C_1 \cdot e^{-\delta t} [-\delta \cdot \sin(\omega_d t) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\delta} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 1 [-\delta \cdot \sin 0 + \omega_d \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\delta} \cdot \cos 0 = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 [-\delta \cdot 0 + \omega_d \cdot 1] + \frac{a}{2\delta} \cdot 1 = 0 \Rightarrow C_1 \omega_d + \frac{a}{2\delta} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{a}{2\delta\omega_d}$$

Die *erzwungene* Schwingung wird somit durch die Gleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{a}{2\delta\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) = \\ &= \frac{a}{2\delta} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right], \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

beschrieben.

Sie besitzt den in Bild IX-38 dargestellten Verlauf.



Bild IX-38

Im Laufe der Zeit *stabilisiert* sich diese Schwingung, da der zweite Term *exponentiell gegen null abklingt*, zu einer reinen Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Schwingungsamplitude $A = \frac{a}{2\delta\omega_0}$ (siehe Bild IX-39):

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{a}{2\delta} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - 0 \right] = \\ &= \frac{a}{2\delta\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (t \gg 1/\delta) \end{aligned}$$

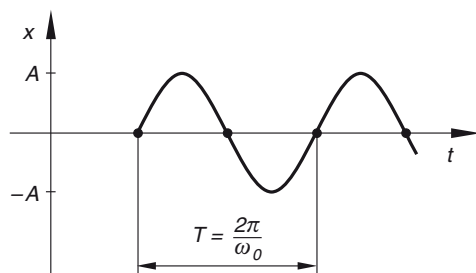


Bild IX-39

Beispiel 17: Gleichung einer Seilkurve (Kettenlinie)

*Nichtlineare Dgl 2. Ordnung (Substitutionsmethode,
Trennung der Variablen)*

Die Kurvengleichung $y = y(x)$ eines an zwei Punkten A und B befestigten freihängenden Seiles, das ausschließlich durch sein *Eigengewicht* belastet wird, genügt der *nichtlinearen Dgl 2. Ordnung*

$$y'' = \frac{q}{F_H} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$$

q : Eigengewicht des Seils pro Längeneinheit

F_H : Konstante Horizontalkomponente der Seilkraft

$$k = F_H/q$$

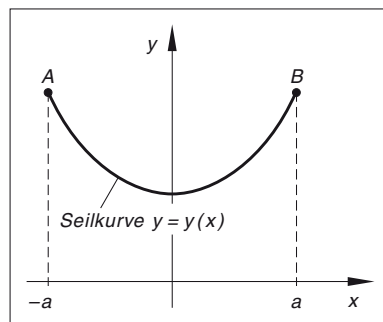


Bild IX-40

Bestimmen Sie die *Gleichung* dieser *Seilkurve* (auch *Kettenlinie* genannt) bei *symmetrischer* Aufhängung und einer Spannweite von $2a$ (Bild IX-40).

Lösungshinweis: Die Dgl der Seilkurve lässt sich mit Hilfe der *Substitution* $u = y'$ auf eine elementar lösbare Dgl 1. Ordnung zurückführen.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.2.2

Lösung:

Durch die *Substitution*

$$u = y', \quad u' = y''$$

überführen wir die Dgl der Seilkurve in eine solche 1. Ordnung:

$$u' = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + u^2} \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + u^2}$$

Diese Dgl lässt sich durch „*Trennung der Variablen*“ leicht lösen (*Grundintegrale!*):

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du = \frac{1}{k} dx \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du}_{\text{Integral Nr. 123 mit } a = 1} = \frac{1}{k} \cdot \int 1 dx \Rightarrow$$

$$\operatorname{arsinh} u = \frac{1}{k} \cdot x + C_1 = \frac{x}{k} + C_1$$

Wir lösen diese Funktionsgleichung nach der Variablen u auf und erhalten

$$u = \sinh \left(\frac{x}{k} + C_1 \right)$$

Da die Seilkurve bei *symmetrischer* Aufhängung im *tiefsten* Punkt, d. h. an der Stelle $x = 0$ eine *waagerechte* Tangente besitzt, ist $y'(0) = u(0) = 0$. Aus dieser Eigenschaft berechnen wir die Integrationskonstante C_1 :

$$u(0) = 0 \Rightarrow \sinh C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \operatorname{arsinh} 0 = 0$$

Die 1. Ableitung der Seilkurve lautet somit

$$u = y' = \sinh \left(\frac{x}{k} \right)$$

Durch *Integration* dieser Gleichung erhalten wir die gesuchte *Seilkurve* (Integral Nr. 349 mit $a = 1/k$):

$$y = \int y' dx = \int \sinh \left(\frac{x}{k} \right) dx = k \cdot \cosh \left(\frac{x}{k} \right) + C_2$$

Über die Integrationskonstante C_2 können wir *frei* verfügen, da sie lediglich eine *Verschiebung* der Seilkurve längs der y -Achse bewirkt. Wir wählen daher zweckmäßigerweise das Koordinatensystem so, dass $C_2 = 0$ wird. Die Seilkurve schneidet dann die y -Achse bei $y(0) = k \cdot \cosh 0 = k \cdot 1 = k$.

Damit ist die Gleichung der *Seilkurve* (auch *Kettenlinie* genannt) *eindeutig* bestimmt. Sie lautet wie folgt:

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right), \quad -a \leq x \leq a$$

Beispiel 18: Torsionsschwingungen einer zweifach besetzten elastischen Welle

System linearer Dgln 2. Ordnung

Bild IX-41 zeigt einen einfachen *Torsionsschwinger*, bestehend aus einer nahezu masselosen *elastischen Welle* mit zwei gleichen starren *Zylinderscheiben* vom Massenträgheitsmoment J . Ein solches System lässt sich zu sog. *Torsionsschwingungen* anregen, z. B. dadurch, dass man die Scheiben gegeneinander *verdreh*t.

Die zeitabhängigen Drehwinkel φ_1 und φ_2 der beiden Scheiben genügen dabei zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ dem folgenden System zweier miteinander gekoppelter linearer Dgln 2. Ordnung:

$$J\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

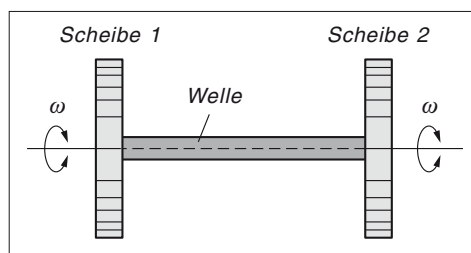


Bild IX-41

$c > 0$ ist die *Torsionsfederkonstante* der elastischen Welle, $c(\varphi_1 - \varphi_2)$ und $c(\varphi_2 - \varphi_1)$ sind die jeweiligen *Rückstellmomente* der elastischen Welle¹²⁾. Bestimmen Sie die *Eigenschwingungen* dieses Torsionsschwingers mit den zugehörigen *Eigenkreisfrequenzen* ω mit Hilfe des folgenden Lösungssatzes:

$$\varphi_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t), \quad \varphi_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t)$$

($A_1 > 0$, $A_2 > 0$: maximale Drehwinkel)

Lösungshinweis: Der vorgegebene Lösungsansatz führt zu einem *linearen Gleichungssystem* für die Größen A_1 und A_2 . Die *Eigenkreisfrequenzen* des Torsionsschwingers ergeben sich aus der Forderung, dass dieses Gleichungssystem *nichttrivial* lösbar sein soll.

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3 und IV.7.2

¹²⁾ Diese sind dem jeweiligen *relativen Drehwinkel proportional*. Die Dgln selbst erhält man aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36].

Lösung:

Mit dem vorgegebenen *Lösungsansatz* und den zugehörigen Ableitungen

$$\dot{\varphi}_1 = \omega A_1 \cdot \cos(\omega t), \quad \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 A_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega A_2 \cdot \cos(\omega t), \quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 A_2 \cdot \sin(\omega t)$$

gehen wir in das *Dgl-System* ein und erhalten

$$-J\omega^2 A_1 \cdot \sin(\omega t) + c(A_1 - A_2) \cdot \sin(\omega t) = 0$$

$$-J\omega^2 A_2 \cdot \sin(\omega t) + c(A_2 - A_1) \cdot \sin(\omega t) = 0$$

Wir *kürzen* beide Gleichungen noch durch $\sin(\omega t)$ und *ordnen* anschließend die Glieder. Dies führt zu dem *homogenen linearen Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} (c - J\omega^2) A_1 - c A_2 &= 0 \\ -c A_1 + (c - J\omega^2) A_2 &= 0 \end{aligned}$$

das nur dann *nichttrivial* lösbar ist (d. h. von $A_1 = A_2 = 0$ *verschiedene* Lösungen hat), wenn die Koeffizientendeterminante *verschwindet*:

$$\begin{vmatrix} (c - J\omega^2) & -c \\ -c & (c - J\omega^2) \end{vmatrix} = (c - J\omega^2)^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (c - J\omega^2)^2 = c^2 \Rightarrow$$

$$c - J\omega^2 = \pm c \Rightarrow J\omega^2 = c \mp c \Rightarrow \omega^2 = \frac{c \mp c}{J}$$

Wir erhalten zunächst folgende Lösungen:

$$\omega^2 = 0 \quad (\text{oberes Vorzeichen}) \Rightarrow \omega_{1/2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2c}{J} \quad (\text{unteres Vorzeichen}) \Rightarrow \omega_{3/4} = \pm \sqrt{\frac{2c}{J}}$$

Da ω eine *Kreisfrequenz* darstellt, kommen jedoch als Lösungen nur *positive* Werte infrage.

Es gibt somit *genau eine* Eigenschwingung mit der *Eigenkreisfrequenz* $\omega_0 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2c}{J}}$.

Diesen Wert setzen wir in das homogene lineare Gleichungssystem ein und erhalten für die Koeffizienten A_1 und A_2 zwei *identische* Gleichungen

$$\left(c - J \cdot \frac{2c}{J}\right) A_1 - c A_2 = (c - 2c) A_1 - c A_2 = -c A_1 - c A_2 = 0$$

$$-c A_1 + \left(c - J \cdot \frac{2c}{J}\right) A_2 = -c A_1 + (c - 2c) A_2 = -c A_1 - c A_2 = 0$$

Somit gilt

$$-c A_1 - c A_2 = -c(A_1 + A_2) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0 \quad (\text{da } c \neq 0)$$

mit der Lösung $A_2 = -A_1$.

Die gesuchte *Lösung* lautet somit für $t \geq 0$ wie folgt¹³⁾:

$$\varphi_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_0 t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\varphi_2(t) = -A_1 \cdot \sin(\omega_0 t) = A_1 \cdot \sin(\omega_0 t + \pi) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \pi)$$

Die Scheiben schwingen somit mit *gleicher* Winkelamplitude, d. h. mit dem gleichen *maximalen* Drehwinkel φ_0 , jedoch in *Gegenphase* (Phasenverschiebung: 180° bzw. π , siehe Bild IX-42). Die *Kreisfrequenz* dieser *Eigenschwingung* beträgt $\omega_0 = \sqrt{2c/J}$.

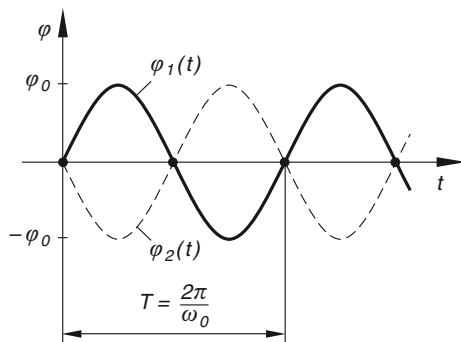


Bild IX-42

Beispiel 19: Elektronenbahn im homogenen Magnetfeld

System linearer Dgln 2. Ordnung

Ein *Elektron* mit der Ruhemasse m_0 und der Elementarladung e bewegt sich in einem *homogenen* Magnetfeld mit dem Fluss-

dichtevektor $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$. Zu Beginn der Bewegung ($t = 0$)

befindet sich das Elektron im Koordinatenursprung, der Geschwindigkeitsvektor zu dieser Zeit ist $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ mit $v_0 > 0$ (Bild IX-43).

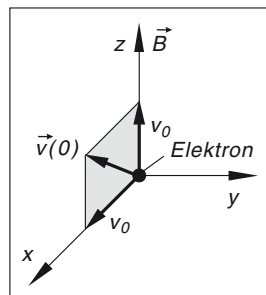


Bild IX-43

- Wie lautet die *Dgl* der Elektronenbewegung?
- Bestimmen Sie den *Ortsvektor* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ und den *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v} = \vec{v}(t)$ der Elektronenbahn. Wie lässt sich das Ergebnis physikalisch deuten?

Lösungshinweis: Die *Schwerkraft* darf infolge der *geringen* Elektronenmasse *vernachlässigt* werden. Das Elektron unterliegt somit *ausschließlich* der *Lorentz-Kraft* [A9]. Die *Dgl* der Bewegung erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* in *vektorieller Form* [A27].

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3

Physikalische Grundlagen: A9, A27

¹³⁾ Um deutlich zu machen, dass A_1 der *maximale Drehwinkel* ist, setzen wir $A_1 = \varphi_0$. Der Wert von φ_0 wird durch die *Anfangsbedingungen* festgelegt (bleibt somit in diesem Beispiel *unbestimmt*).

Lösung:

- a) Das Elektron erfährt im Magnetfeld die *Lorentz-Kraft* [A9] (unter Berücksichtigung von $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$):

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = -e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \\ &= -eB_0 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -eB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} - 0 \\ 0 - \dot{x} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = -eB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] folgt dann (mit $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$)

$$\begin{aligned}m_0 \vec{a} &= m_0 \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L \Rightarrow \\ m_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -eB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(mit $\omega = eB_0/m_0$). In der *Komponentenschreibweise* lautet dieses System aus drei gekoppelten Dgln 2. Ordnung wie folgt:

$$\begin{aligned}\text{(I)} \quad \ddot{x} &= -\omega \dot{y} \\ \text{(II)} \quad \ddot{y} &= \omega \dot{x} \\ \text{(III)} \quad \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

- b) Wir lösen dieses System linearer Dgln 2. Ordnung für die vorgegebenen Anfangswerte des Orts- und Geschwindigkeitsvektors. Dgl (III) lässt sich durch *2-malige Integration* direkt lösen:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \int \ddot{z} dt = \int 0 dt = C_1 \\ z &= \int \dot{z} dt = C_1 \cdot \int 1 dt = C_1 t + C_2\end{aligned}$$

Aus den *Anfangswerten* $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_0$ bestimmen wir die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 :

$$\begin{aligned}z(0) = 0 &\Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \dot{z}(0) = v_0 &\Rightarrow C_1 = v_0\end{aligned}$$

Somit gilt für die *z-Komponente* der Elektronenbewegung

$$z(t) = v_0 t$$

Die Ortskoordinaten x und y sind durch die Dgln (I) und (II) miteinander *gekoppelt*. Wir *integrieren* zunächst Dgl (II) beiderseits und erhalten:

$$\int \ddot{y} dt = \omega \cdot \int \dot{x} dt \Rightarrow \dot{y} = \omega x + K_1$$

Die Integrationskonstante K_1 lässt sich dabei aus den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ bestimmen:

$$\omega \cdot 0 + K_1 = 0 + K_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0$$

Somit ist

$$\dot{y} = \omega x$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Dgl (I) ein und erhalten eine *homogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* für die Ortskoordinate x :

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega(\omega x) = -\omega^2 x \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Die *allgemeine* Lösung dieser *Schwingungsgleichung* ist bekanntlich in der Form

$$x = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$$

darstellbar (Band 2, Abschnitt IV.4.1.2). Die Koeffizienten A und B lassen sich dabei aus den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ leicht bestimmen:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cdot \cos(\omega t) - \omega B \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \omega A \cdot \cos 0 - \omega B \cdot \sin 0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad \omega A \cdot 1 - \omega B \cdot 0 = v_0$$

$$\Rightarrow \quad \omega A - 0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad \omega A = v_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega}$$

Somit erhalten wir für die Ortskoordinate x das Zeitgesetz

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t)$$

Den zeitlichen Verlauf der Ortskoordinate y bestimmen wir aus der Beziehung $\dot{y} = \omega x$ durch Einsetzen des gefundenen Ausdrucks und anschließender *Integration*:

$$\dot{y} = \omega x = \omega \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t) = v_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$y = \int \dot{y} dt = v_0 \cdot \int \sin(\omega t) dt = v_0 \cdot \frac{\cos(\omega t)}{-\omega} + K_2 = -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \cos(\omega t) + K_2$$

(Integral Nr. 204 mit $a = \omega$). Die Integrationskonstante K_2 wird aus dem Anfangswert $y(0) = 0$ berechnet:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \cos 0 + K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot 1 + K_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{v_0}{\omega} + K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

Für die y -Koordinate erhalten wir damit die folgende Zeitabhängigkeit:

$$y(t) = -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)]$$

Die *Elektronenbewegung* im homogenen Magnetfeld wird damit durch den zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \frac{v_0}{\omega} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ 1 - \cos(\omega t) \\ \omega t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0 \quad \left(z(t) = v_0 t = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \omega t \right)$$

beschrieben. Durch *komponentenweise Differentiation* dieser Vektorgleichung nach der Zeit t gewinnen wir den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{v_0}{\omega} \begin{pmatrix} \omega \cdot \cos(\omega t) \\ \omega \cdot \sin(\omega t) \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{v_0}{\omega} \omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Physikalische Deutung

- (1) Projiziert man die durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ beschriebene Bahnkurve in die x, y -Ebene, so erhält man eine *Kreisbahn* mit dem Radius $R = v_0/\omega$. Um dies zu zeigen, lösen wir die beiden Koordinatengleichungen

$$x = x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t) = R \cdot \sin(\omega t)$$

$$y = y(t) = \frac{v_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] = R [1 - \cos(\omega t)]$$

zunächst nach der jeweiligen *trigonometrischen* Funktion auf und setzen die Ausdrücke anschließend in den „*trigonometrischen Pythagoras*“ ein (Formelsammlung, Abschnitt III.7.5):

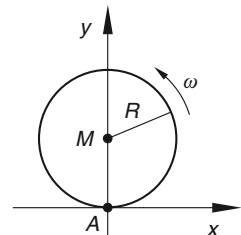
$$\sin(\omega t) = \frac{x}{R}, \quad \frac{y}{R} = 1 - \cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = 1 - \frac{y}{R} = \frac{R - y}{R}$$

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = \frac{x^2}{R^2} + \frac{(R - y)^2}{R^2} = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + (R - y)^2 = R^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Dies aber ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Mittelpunkt $M = (0; R)$ und dem Radius R (Bild IX-44). Das Elektron bewegt sich dabei aus der *Anfangsposition* $A = (0; 0)$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den *Uhrzeigersinn*.

Bild IX-44



- (2) Die Elektronenbewegung in der *Feldrichtung* (z-Richtung) verläuft *gleichförmig* mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v_z = v_0$.
- (3) Das Elektron bewegt sich somit insgesamt auf einer *Schraubenlinie* um das Magnetfeld (*Rotation* um die Feldrichtung und gleichzeitige *Translation* in Feldrichtung).

Beispiel 20: 2-stufige chemische Reaktion vom Typ $X \rightarrow Y \rightarrow Z$

*System homogener linearer Dgln 1. Ordnung,
Matrizeneigenwertproblem, Lineares Gleichungssystem*

Eine chemische Reaktion verlaufe in zwei Stufen nach dem Schema $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, d. h. ein Molekül der Sorte X wird zunächst in ein Molekül der Sorte Y und dieses schließlich in ein Molekül der Sorte Z umgewandelt. Bezeichnet man die *Molekülkonzentrationen* zur Zeit t der Reihe nach mit $c_X(t)$, $c_Y(t)$, $c_Z(t)$, so kennzeichnen ihre Differentialquotienten $\dot{c}_X(t)$, $\dot{c}_Y(t)$, $\dot{c}_Z(t)$ die Konzentrationsänderungen der drei Stoffe in der Zeiteinheit. Die 2-stufige chemische Reaktion lässt sich dann durch das folgende System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben (in Matrizenform):

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_X \\ \dot{c}_Y \\ \dot{c}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_X \\ c_Y \\ c_Z \end{pmatrix}$$

$k_1 > 0$ und $k_2 > 0$ sind dabei stoffabhängige sog. *Geschwindigkeitskonstanten* ($k_1 \neq k_2$).

- Interpretieren Sie die drei Differentialgleichungen. Welche Annahmen liegen den Gleichungen zugrunde?
- Bestimmen Sie die *Konzentrationen* der drei Stoffe (Molekülsorten) in Abhängigkeit von der Zeit für die Anfangsbedingungen $c_X(0) = a$, $c_Y(0) = 0$, $c_Z(0) = 0$ (Anfangskonzentrationen zur Zeit $t = 0$; $a > 0$).
- Wann kommt die chemische Reaktion zum Stillstand, welche Werte besitzen dann die Molekülkonzentrationen?

Lehrbuch: Bd. 2, I.7.3 und IV.7.1

Lösung:

- a) **1. Dgl:** $\dot{c}_X = -k_1 c_X$

Die Konzentrationsänderung pro Zeiteinheit der Molekülsorte X ist der augenblicklichen Konzentration dieser Sorte *proportional* (eine durchaus plausible Annahme, denn je mehr Moleküle vorhanden sind, umso größer ist die Anzahl der umgewandelten Moleküle; das Minuszeichen kennzeichnet die *Abnahme* der Konzentration durch die Umwandlung $X \rightarrow Y$).

2. Dgl: $\dot{c}_Y = k_1 c_X - k_2 c_Y$

Zwei Prozesse bestimmen die Konzentrationsänderung pro Zeiteinheit der Sorte Y : der Term $k_1 c_X$ beschreibt die Umwandlung von X in Y (*Zunahme* der Konzentration), der Term $-k_2 c_Y$ die Umwandlung von Y in Z (*Abnahme* der Konzentration).

3. Dgl: $\dot{c}_Z = k_2 c_Y$

Die *Zunahme* der Konzentration pro Zeiteinheit der Molekülsorte Z ist der augenblicklichen Konzentration der Molekülsorte Y *proportional*.

b) Mit den Vektoren bzw. Matrizen

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_X \\ c_Y \\ c_Z \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \dot{c}_X \\ \dot{c}_Y \\ \dot{c}_Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

lässt sich die 2-stufige chemische Reaktion $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ auch in der Kurzform $\mathbf{Kc} = \dot{\mathbf{c}}$ darstellen. Wir lösen diese Matrixgleichung durch den Ansatz

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad \dot{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}}_{\mathbf{c}} = \lambda \mathbf{c}$$

(A_1, A_2, A_3 sind reelle Konstanten). Die Gleichung $\mathbf{Kc} = \dot{\mathbf{c}}$ führt dann auf das folgende Eigenwertproblem:

$$\mathbf{Kc} = \dot{\mathbf{c}} = \lambda \mathbf{c} = \lambda \mathbf{Ec} \Rightarrow \mathbf{Kc} - \lambda \mathbf{Ec} = (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

(\mathbf{E} : 3-reihige Einheitsmatrix; $\mathbf{c} = \mathbf{Ec}$). Da die Komponenten des Lösungsvektors \mathbf{c} den gemeinsamen Exponentialfaktor $e^{\lambda t}$ besitzen, können wir die Eigenwertgleichung noch durch diesen Faktor dividieren und erhalten schließlich das folgende Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Den gesuchten Lösungsvektor \mathbf{c} erhalten wir dann durch (komponentenweise) Multiplikation des Eigenvektors \mathbf{a} mit dem zugehörigen Exponentialfaktor $e^{\lambda t}$, d. h. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot e^{\lambda t}$.

Berechnung der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix \mathbf{K}

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix \mathbf{K} werden aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} (-k_1 - \lambda) & 0 & 0 \\ k_1 & (-k_2 - \lambda) & 0 \\ 0 & k_2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-k_1 - \lambda)(-k_2 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

berechnet (Determinantenberechnung nach der Regel von Sarrus). Sie lauten: $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = -k_2$, $\lambda_3 = 0$.

Berechnung der Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix \mathbf{K}

Die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren erfolgt aus dem homogenen linearen Gleichungssystem $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

$$\text{Eigenwert } \lambda_1 = -k_1 \quad (\mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{a} = (\mathbf{K} + k_1 \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 & (-k_2 + k_1) & 0 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 A_1 + (k_1 - k_2) A_2 \\ k_2 A_2 + k_1 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komponentenschreibweise führt zu zwei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} k_1 A_1 + (k_1 - k_2) A_2 &= 0 \\ k_2 A_2 + k_1 A_3 &= 0 \end{aligned}$$

Eine der drei Unbekannten ist frei wählbar, wir wählen A_2 und setzen $A_2 = 1$. Für die übrigen Unbekannten erhalten wir dann die folgenden Werte:

$$k_1 A_1 + (k_1 - k_2) \cdot 1 = 0 \Rightarrow k_1 A_1 + k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{k_2 - k_1}{k_1}$$

$$k_2 \cdot 1 + k_1 A_3 = 0 \Rightarrow k_2 + k_1 A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = -\frac{k_2}{k_1}$$

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = -k_1$ gehörige Eigenvektor lautet somit (unter Berücksichtigung des zugehörigen Exponentialfaktors $e^{-k_1 t}$):

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)/k_1 \\ 1 \\ -k_2/k_1 \end{pmatrix} e^{-k_1 t} = \frac{1}{k_1} \begin{pmatrix} k_2 - k_1 \\ k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix} e^{-k_1 t}$$

$$\text{Eigenwert } \lambda_2 = -k_2 \quad (\mathbf{K} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{a} = (\mathbf{K} + k_2 \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} (-k_1 + k_2) & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1) A_1 \\ k_1 A_1 \\ k_2 A_2 + k_2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1) A_1 &= 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ k_1 A_1 &= 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ k_2 A_2 + k_2 A_3 &= 0 \Rightarrow k_2 (A_2 + A_3) = 0 \Rightarrow A_3 = -A_2 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt jeweils $A_1 = 0$, aus der dritten Gleichung $A_3 = -A_2$. Dabei können wir über A_2 oder A_3 frei verfügen. Wir wählen A_2 und

setzen $A_2 = 1$. Somit ist $A_3 = -A_2 = -1$. Der zum Eigenwert $\lambda_2 = -k_2$ gehörige Eigenvektor lautet somit (unter Berücksichtigung des zugehörigen Exponentialfaktors $e^{-k_2 t}$):

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-k_2 t}$$

$$\text{Eigenwert } \lambda_3 = 0 \quad (\mathbf{K} - \lambda_3 \mathbf{E}) \mathbf{a} = (\mathbf{K} - 0 \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 A_1 \\ k_1 A_1 - k_2 A_2 \\ k_2 A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} -k_1 A_1 &= 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ k_1 A_1 - k_2 A_2 &= 0 \\ k_2 A_2 &= 0 \Rightarrow A_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung folgt $A_1 = 0$, aus der 3. Gleichung $A_2 = 0$. Die 2. Gleichung ist für diese Werte erfüllt. Die Unbekannte A_3 ist in den drei Gleichungen überhaupt nicht enthalten und daher frei wählbar. Wir setzen daher $A_3 = 1$ und erhalten den folgenden (zeitunabhängigen) Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$:

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (e^{0t} = 1 \text{ ist der zugehörige Exponentialfaktor})$$

Berechnung der zeitabhängigen Molekülkonzentrationen

Der gesuchte allgemeine Lösungsvektor \mathbf{c} ist als Linearkombination der drei Eigenvektoren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ darstellbar (A, B, C sind reelle Konstanten):

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= A \mathbf{c}_1 + B \mathbf{c}_2 + C \mathbf{c}_3 = \\ &= \frac{A}{k_1} \begin{pmatrix} k_2 - k_1 \\ k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix} e^{-k_1 t} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-k_2 t} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In komponentenweiser Darstellung:

$$\begin{aligned} c_X(t) &= \frac{A}{k_1} (k_2 - k_1) \cdot e^{-k_1 t} = \frac{A(k_2 - k_1)}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} \\ c_Y(t) &= \frac{A}{k_1} \cdot k_1 \cdot e^{-k_1 t} + B \cdot 1 \cdot e^{-k_2 t} = A \cdot e^{-k_1 t} + B \cdot e^{-k_2 t} \\ c_Z(t) &= \frac{A}{k_1} \cdot (-k_2) \cdot e^{-k_1 t} + B(-1) \cdot e^{-k_2 t} + C \cdot 1 = -\frac{A k_2}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} - B \cdot e^{-k_2 t} + C \end{aligned}$$

Aus den vorgegebenen Anfangswerten $c_X(0) = a$, $c_Y(0) = c_Z(0) = 0$ lassen sich die noch unbekannten Koeffizienten A , B , C wie folgt bestimmen:

$$c_X(0) = a \Rightarrow \frac{A(k_2 - k_1)}{k_1} \cdot 1 = a \Rightarrow A = \frac{ak_1}{k_2 - k_1}$$

$$c_Y(0) = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 1 = A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -\frac{ak_1}{k_2 - k_1}$$

$$c_Z(0) = 0 \Rightarrow -\frac{Ak_2}{k_1} \cdot 1 - B \cdot 1 + C = -\frac{Ak_2}{k_1} - B + C = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= \frac{Ak_2}{k_1} + B = \frac{ak_1 k_2}{k_1(k_2 - k_1)} - \frac{ak_1}{k_2 - k_1} = \\ &= \frac{ak_2}{k_2 - k_1} - \frac{ak_1}{k_2 - k_1} = \frac{a(k_2 - k_1)}{k_2 - k_1} = a \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet somit (unter Berücksichtigung von $B = -A$ bei der Zwischenrechnung):

$$c_X(t) = \frac{A(k_2 - k_1)}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} = \frac{ak_1(k_2 - k_1)}{k_1(k_2 - k_1)} \cdot e^{-k_1 t} = a \cdot e^{-k_1 t}$$

$$\begin{aligned} c_Y(t) &= A \cdot e^{-k_1 t} + B \cdot e^{-k_2 t} = A \cdot e^{-k_1 t} - A \cdot e^{-k_2 t} = A(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) = \\ &= \frac{ak_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_Z(t) &= -\frac{Ak_2}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} - B \cdot e^{-k_2 t} + C = -\frac{Ak_2}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} + A \cdot e^{-k_2 t} + a = \\ &= A \left(-\frac{k_2}{k_1} \cdot e^{-k_1 t} + e^{-k_2 t} \right) + a = \\ &= \frac{ak_1}{k_2 - k_1} \left(\frac{-k_2 \cdot e^{-k_1 t} + k_1 \cdot e^{-k_2 t}}{k_1} \right) + a = \\ &= \frac{a}{k_2 - k_1} (k_1 \cdot e^{-k_2 t} - k_2 \cdot e^{-k_1 t}) + a \end{aligned}$$

- c) Die 2-stufige chemische Reaktion kommt zum Stillstand, wenn alle Moleküle der Sorte X über das „Zwischenprodukt“ Y in die Sorte Z (Endprodukt) umgewandelt worden sind. Dies ist (theoretisch) nach unendlich langer Reaktionszeit der Fall:

$$c_X(t = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_X = \lim_{t \rightarrow \infty} a \cdot e^{-k_1 t} = 0$$

$$c_Y(t = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ak_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) = 0$$

$$c_Z(t = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_Z = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{k_2 - k_1} (k_1 \cdot e^{-k_2 t} - k_2 \cdot e^{-k_1 t}) + a \right] = a$$

(alle Exponentialfunktionen sind streng monoton fallend und gehen für $t \rightarrow \infty$ gegen null). Erwartungsgemäß sind dann keine Moleküle der Sorten X und Y mehr vorhanden ($c_X(\infty) = c_Y(\infty) = 0$), sondern nur noch Moleküle der Sorte Z ($c_Z(\infty) = a$).

X Fehler- und Ausgleichsrechnung

Hinweise zur Fehlerrechnung

- 1) Wir verwenden die in der **DIN-NORM 1319** empfohlenen Bezeichnungen, obwohl sich diese in der Praxis nur sehr langsam durchzusetzen scheinen. Um Missverständnisse zu vermeiden, setzen wir die jeweiligen „alten“ (aber noch weitgehend üblichen) Bezeichnungen in Klammern.
- 2) Bei der Fehlerfortpflanzung nach Gauß wird das Messergebnis einer *unabhängigen*, d. h. *direkt* gemessenen Größe x stets in der Form $x = \bar{x} \pm \Delta x$ vorgegeben. Dabei ist \bar{x} der (arithmetische) *Mittelwert* und Δx die sog. *Messunsicherheit*, für die man üblicherweise die *Standardabweichung des Mittelwertes* heranzieht.
- 3) Bei der „linearen Fehlerfortpflanzung“ unter Verwendung des *totalen oder vollständigen Differentials* werden für die meist unbekannten Messunsicherheiten der unabhängigen Größen *Schätzwerte* verwendet (sog. „Überschlagsrechnungen“).

Beispiel 1: Widerstandsmoment eines kreisringförmigen Rohrquerschnittes gegen Torsion (Verdrehung)
Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)

Das *Widerstandsmoment* eines Rohres mit einem kreisringförmigen Querschnitt gegen *Verdrehung (Torsion)* wird nach der Formel

$$W_t = W_t(d; D) = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

berechnet, wobei d und D den Innen- bzw. Außendurchmesser des Rohres bedeuten (Bild X-1). Eine Messung dieser Größen ergab dabei folgende Werte:

$$d = (60,5 \pm 0,4) \text{ mm}, \quad D = (75,2 \pm 0,5) \text{ mm}$$

Bestimmen Sie das *Widerstandsmoment* des Rohres. Wie groß ist die *absolute* bzw. *prozentuale maximale Messunsicherheit* (d. h. der *absolute* bzw. *prozentuale Maximalfehler*)?

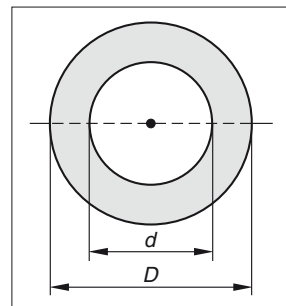


Bild X-1

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.5.5

Lösung:

Für das Widerstandsmoment erhalten wir den (arithmetischen) *Mittelwert*

$$\begin{aligned}\bar{W}_t &= W_t(\bar{d}; \bar{D}) = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{\bar{D}^4 - \bar{d}^4}{\bar{D}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(75,2 \text{ mm})^4 - (60,5 \text{ mm})^4}{75,2 \text{ mm}} = \\ &= 4,852 \cdot 10^4 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Die Berechnung der *absoluten maximalen Messunsicherheit* (d. h. des *absoluten Maximalfehlers*) erfolgt definitionsgemäß nach der Formel

$$\Delta W_{t, \max} = \left| \frac{\partial W_t}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial W_t}{\partial D} \Delta D \right|$$

Die dabei benötigten *partiellen Ableitungen* bestimmen wir mit Hilfe der *Potenz-* bzw. *Quotientenregel*. Sie lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_t}{\partial d} &= \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \right) = \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{-4d^3}{D} \right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^3}{D} \\ \frac{\partial W_t}{\partial D} &= \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \right) = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4D^3 \cdot D - 1 \cdot (D^4 - d^4)}{D^2} = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4D^4 - D^4 + d^4}{D^2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3D^4 + d^4}{D^2}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\Delta W_{t, \max} &= \left| \frac{\partial W_t}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial W_t}{\partial D} \Delta D \right| = \left| -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\bar{d}^3}{\bar{D}} \Delta d \right| + \left| \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3\bar{D}^4 + \bar{d}^4}{\bar{D}^2} \Delta D \right| = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(60,5 \text{ mm})^3}{75,2 \text{ mm}} \cdot 0,4 \text{ mm} + \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3(75,2 \text{ mm})^4 + (60,5 \text{ mm})^4}{(75,2 \text{ mm})^2} \cdot 0,5 \text{ mm} = \\ &= 2,82 \cdot 10^3 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Widerstandsmoment das folgende (indirekte) *Messergebnis*:

$$\begin{aligned}W_t &= \bar{W}_t \pm \Delta W_{t, \max} = 4,852 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 \pm 2,82 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = \\ &= 48,52 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \pm 2,82 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = (48,52 \pm 2,82) \cdot 10^3 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Die *prozentuale maximale Messunsicherheit* (d. h. der *prozentuale Maximalfehler*) beträgt

$$\left| \frac{\Delta W_{t, \max}}{\bar{W}_t} \right| \cdot 100 \% = \frac{2,82 \cdot 10^3 \text{ mm}^3}{48,52 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} \cdot 100 \% \approx 5,8 \%$$

Beispiel 2: Kombinierte Parallel-Reihenschaltung elastischer Federn
Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)

Bild X-2 zeigt eine kombinierte *Parallel-Reihenschaltung* dreier elastischer *Federn*, deren Federkonstanten nach Angabe des Herstellers der Reihe nach die Werte

$$c_1 = 500 \text{ N/cm}, \quad c_2 = 300 \text{ N/cm} \quad \text{und} \quad c_3 = 200 \text{ N/cm}$$

haben bei einer Toleranz (Genauigkeit) von jeweils $\pm 1\%$. Berechnen Sie die *Federkonstante* c der *Ersatzfeder* [A26] und die *absolute* bzw. *prozentuale maximale Messunsicherheit* (d. h. den *absoluten* bzw. *prozentualen Maximalfehler*) dieser Größe.

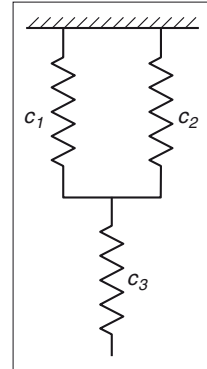


Bild X-2

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.5.5

Physikalische Grundlagen: A26

Lösung:

Bei einer Parallelschaltung *addieren* sich die Federkonstanten [A26]. Wir dürfen daher die Federn c_1 und c_2 durch *eine* Feder mit der Federkonstanten $c_{12} = c_1 + c_2$ *ersetzen*. Diese wiederum ist mit c_3 in *Reihe* geschaltet. Daher *addieren* sich diesmal die *Kehrwerte* der einzelnen Federkonstanten zum *Kehrwert* der Federkonstanten c der Ersatzfeder [A26]:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{c_1 + c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{(c_1 + c_2) c_3} \Rightarrow$$

$$c = c(c_1; c_2; c_3) = \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3}$$

Die *Ersatzfeder* besitzt somit die *Federkonstante*

$$\bar{c} = c(\bar{c}_1; \bar{c}_2; \bar{c}_3) = \frac{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) \bar{c}_3}{\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3} = \frac{\left(500 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 300 \frac{\text{N}}{\text{cm}}\right) \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}{500 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 300 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 200 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 160 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Die *absolute maximale Messunsicherheit* (d. h. der *absolute Maximalfehler*) wird nach der Formel

$$\Delta c_{\max} = \left| \frac{\partial c}{\partial c_1} \Delta c_1 \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial c_2} \Delta c_2 \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial c_3} \Delta c_3 \right|$$

berechnet. Wir bilden zunächst mit Hilfe der *Quotientenregel* die benötigten *partiellen Ableitungen* 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial c_1} &= \frac{\partial}{\partial c_1} \left(\frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3} \right) = \frac{1 \cdot c_3 (c_1 + c_2 + c_3) - 1 \cdot (c_1 + c_2) c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \\ &= \frac{c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_3^2 - c_1 c_3 - c_2 c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \frac{c_3^2}{(c_1 + c_2 + c_3)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial c}{\partial c_2} = \frac{c_3^2}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} \quad (\text{aus Symmetriegründen!})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial c_3} &= \frac{\partial}{\partial c_3} \left(\frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3} \right) = \frac{(c_1 + c_2) \cdot 1 \cdot (c_1 + c_2 + c_3) - 1 \cdot (c_1 + c_2) c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \\ &= \frac{(c_1 + c_2) (c_1 + c_2 + c_3) - (c_1 + c_2) c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \\ &= \frac{(c_1 + c_2) (c_1 + c_2 + c_3 - c_3)}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \frac{(c_1 + c_2) (c_1 + c_2)}{(c_1 + c_2 + c_3)^2} = \frac{(c_1 + c_2)^2}{(c_1 + c_2 + c_3)^2}\end{aligned}$$

Mit $\Delta c_1 = 5 \text{ N/cm}$, $\Delta c_2 = 3 \text{ N/cm}$ und $\Delta c_3 = 2 \text{ N/cm}$ erhalten wir für die *absolute maximale Messunsicherheit* (d. h. den *absoluten Maximalfehler*) den folgenden Wert:

$$\begin{aligned}\Delta c_{\max} &= \left| \frac{\partial c}{\partial c_1} \Delta c_1 \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial c_2} \Delta c_2 \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial c_3} \Delta c_3 \right| = \\ &= \left| \frac{\bar{c}_3^2}{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3)^2} \Delta c_1 \right| + \left| \frac{\bar{c}_3^2}{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3)^2} \Delta c_2 \right| + \left| \frac{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)^2}{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3)^2} \Delta c_3 \right| = \\ &= \frac{\bar{c}_3^2 \Delta c_1 + \bar{c}_3^2 \Delta c_2 + (\bar{c}_1 + \bar{c}_2)^2 \Delta c_3}{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3)^2} = \frac{\bar{c}_3^2 (\Delta c_1 + \Delta c_2) + (\bar{c}_1 + \bar{c}_2)^2 \Delta c_3}{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3)^2} = \\ &= \frac{\left(200 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \right)^2 \cdot \left(5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 3 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \right) + \left(500 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 300 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \right)^2 \cdot 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}{\left(500 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 300 \frac{\text{N}}{\text{cm}} + 200 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \right)^2} = 1,6 \frac{\text{N}}{\text{cm}}\end{aligned}$$

Die *prozentuale maximale Messunsicherheit* (d. h. der *prozentuale Maximalfehler*) ist dann

$$\left| \frac{\Delta c_{\max}}{\bar{c}} \right| \cdot 100 \% = \frac{1,6 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}{160 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} \cdot 100 \% = 1 \%$$

$$\text{Messergebnis: } c = \bar{c} \pm \Delta c_{\max} = (160 \pm 1,6) \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Beispiel 3: Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Eine *elektrische Doppelleitung* besteht aus zwei *parallelen* Leitern (Drähten) mit der Länge l und dem Leiterradius r . Der Mittelpunktabstand der beiden Leiter beträgt a (Bild X-3). Die *Selbstinduktivität* L dieser Doppelleitung in Luft wird dabei nach der Formel

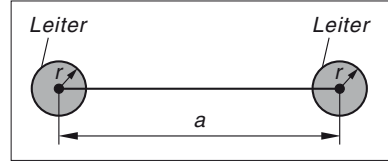


Bild X-3

$$L = L(l; r; a) = \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a - r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right)$$

berechnet (magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$).

- a) Welche *Selbstinduktivität* L besitzt eine Doppelleitung, deren Dimensionen wie folgt gemessen wurden?

$$l = (2000 \pm 10) \text{ m}; \quad r = (2 \pm 0,05) \text{ mm}; \quad a = (30 \pm 0,3) \text{ cm}$$

- b) Wie groß ist die *absolute* bzw. *prozentuale Messunsicherheit des Mittelwertes* von L (d. h. der *absolute* bzw. *prozentuale mittlere Fehler des Mittelwertes* von L)?

Lehrbuch: Bd. 3, IV.4

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{L} &= L(\bar{l}; \bar{r}; \bar{a}) = \frac{\mu_0}{\pi} \bar{l} \left(\ln \left(\frac{\bar{a} - \bar{r}}{\bar{r}} \right) + \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \cdot 2000 \text{ m} \cdot \left(\ln \left(\frac{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right) + \frac{1}{4} \right) = \\ &= 0,004203 \text{ H} = 4,203 \text{ mH} \end{aligned}$$

- b) Definitionsgemäß gilt für die *absolute Messunsicherheit des Mittelwertes* (d. h. den *absoluten mittleren Fehler des Mittelwertes*) nach Gauß:

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l} \Delta l \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial r} \Delta r \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial a} \Delta a \right)^2}$$

Wir bilden die benötigten *partiellen Ableitungen* unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a - r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a - r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial l} (l) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \cdot 1 = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \\
\frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln(a-r) - \ln r + \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{1}{a-r} \cdot (-1) - \frac{1}{r} + 0 \right) = -\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{1}{a-r} + \frac{1}{r} \right) = \\
&= -\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{r+a-r}{(a-r)r} \right) = -\frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{a}{(a-r)r} = -\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{al}{(a-r)r} \\
\frac{\partial L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \left(\frac{a-r}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0}{\pi} l \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left(\ln(a-r) - \ln r + \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\frac{1}{a-r} \cdot 1 - 0 + 0 \right) = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{l}{a-r}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Mittelwerte $\bar{l} = 2000 \text{ m} = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}$, $\bar{r} = 2 \text{ mm}$ und $\bar{a} = 30 \text{ cm} = 300 \text{ mm}$ folgt daraus weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial l}(\bar{l}; \bar{r}; \bar{a}) &= \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{a} - \bar{r}}{\bar{r}} \right) + \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \left(\ln \left(\frac{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right) + \frac{1}{4} \right) = 2,1016 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\
\frac{\partial L}{\partial r}(\bar{l}; \bar{r}; \bar{a}) &= -\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{\bar{a}\bar{l}}{(\bar{a} - \bar{r})\bar{r}} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \cdot \frac{300 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ mm}}{(300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}) 2 \text{ mm}} = \\
&= -0,4027 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\
\frac{\partial L}{\partial a}(\bar{l}; \bar{r}; \bar{a}) &= \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{\bar{l}}{\bar{a} - \bar{r}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \text{ mm}}{300 \text{ mm} - 2 \text{ mm}} = 2,6846 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die *absolute Messunsicherheit* (d. h. den *mittleren Fehler*) des *Mittelwertes* der Selbstinduktivität L (mit $\Delta l = 10 \text{ m}$, $\Delta r = 0,05 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ und $\Delta a = 0,3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$):

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l} \Delta l \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial r} \Delta r \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial a} \Delta a \right)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(2,1016 \cdot 10^{-6} \cdot 10)^2 + (-0,4027 \cdot 5 \cdot 10^{-5})^2 + (2,6846 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3})^2} \frac{V_s}{A_m} = \\
&= \sqrt{(2,1016 \cdot 10^{-5})^2 + (-2,0135 \cdot 10^{-5})^2 + (0,80538 \cdot 10^{-5})^2} \frac{V_s}{A_m} = \\
&= \sqrt{[2,1016^2 + (-2,0135)^2 + 0,80538^2] \cdot (10^{-5})^2} \frac{V_s}{A_m} = 3,0199 \cdot 10^{-5} \frac{V_s}{A_m} \\
&= 3,0199 \cdot 10^{-5} \text{ H} \approx 0,030 \text{ mH}
\end{aligned}$$

Dies entspricht einer *prozentualen Messunsicherheit* (d. h. einem *prozentualen mittleren Fehler*) von

$$\left| \frac{\Delta L}{\bar{L}} \right| \cdot 100 \% = \frac{0,030 \text{ mH}}{4,203 \text{ mH}} \cdot 100 \% \approx 0,71 \%$$

Messergebnis: $L = \bar{L} \pm \Delta L = (4,203 \pm 0,030) \text{ mH}$

Beispiel 4: Wirkleistung eines Wechselstroms

Maximale Messunsicherheit (Maximalfehler, maximaler oder größtmöglicher Fehler)

Die *Wirkleistung* eines *sinusförmigen* Wechselstroms lässt sich nach der Formel

$$P = UI \cdot \cos \varphi$$

berechnen. Dabei sind U und I die *Effektivwerte* von Wechselspannung und Wechselstrom und φ der *Phasenwinkel* zwischen Strom und Spannung

- a) Berechnen Sie zunächst den sog. *Leistungsfaktor* $\lambda = \cos \varphi$ und dessen *absolute Messunsicherheit* (d. h. dessen *absoluten Maximalfehler*) $\Delta \lambda_{\max}$ für einen Wechselstromkreis, bei dem die Größen U , I und P wie folgt gemessen wurden:

$$U = (200 \pm 2) \text{ V}; \quad I = (5 \pm 0,1) \text{ A}; \quad P = (800 \pm 20) \text{ W}$$

- b) Bestimmen Sie aus der Lösung a) den zugehörigen *Phasenwinkel* φ und dessen *absolute Messunsicherheit* (d. h. dessen *absoluten Maximalfehler*) $\Delta \varphi_{\max}$.

Lehrbuch: Bd. 2, III.2.5.5

Lösung:

- a) Aus $P = UI \cdot \cos \varphi = UI \lambda$ folgt $\lambda = \lambda(U; I; P) = \frac{P}{UI}$ und somit

$$\bar{\lambda} = \lambda(\bar{U}; \bar{I}; \bar{P}) = \frac{\bar{P}}{\bar{U} \bar{I}} = \frac{800 \text{ W}}{200 \text{ V} \cdot 5 \text{ A}} = 0,8$$

Für die Berechnung der *absoluten maximalen Messunsicherheit* (d. h. des *absoluten Maximalfehlers*) $\Delta\lambda_{\max}$ benötigen wir noch die folgenden *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{P}{UI} \right) = \frac{P}{I} \cdot \frac{\partial}{\partial U} (U^{-1}) = \frac{P}{I} \cdot (-1) U^{-2} = -\frac{P}{U^2 I}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{P}{UI} \right) = -\frac{P}{UI^2} \quad (\text{aus Symmetriegründen})$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P}{UI} \right) = \frac{1}{UI} \cdot \frac{\partial}{\partial P} (P) = \frac{1}{UI} \cdot 1 = \frac{1}{UI}$$

Definitionsgemäß gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\max} &= \left| \frac{\partial\lambda}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial\lambda}{\partial I} \Delta I \right| + \left| \frac{\partial\lambda}{\partial P} \Delta P \right| = \\ &= \left| -\frac{\bar{P}}{U^2 I} \Delta U \right| + \left| -\frac{\bar{P}}{UI^2} \Delta I \right| + \left| \frac{1}{UI} \Delta P \right| \end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine *absolute maximale Messunsicherheit* (d. h. ein *absoluter Maximalfehler*) von

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{800 \text{ W} \cdot 2 \text{ V}}{(200 \text{ V})^2 \cdot 5 \text{ A}} + \frac{800 \text{ W} \cdot 0,1 \text{ A}}{200 \text{ V} \cdot (5 \text{ A})^2} + \frac{20 \text{ W}}{200 \text{ V} \cdot 5 \text{ A}} = 0,044$$

Messergebnis: $\lambda = \bar{\lambda} \pm \Delta\lambda_{\max} = 0,8 \pm 0,044$

- b) Wir lösen die Gleichung $\lambda = \cos \varphi$ nach φ auf und erhalten $\varphi = \arccos \lambda$. Zum *Leistungsfaktor* $\bar{\lambda} = 0,8$ gehört somit der *Phasenwinkel* $\bar{\varphi} = \arccos 0,8 = 0,6435$ (im Bogenmaß). Zwischen den *absoluten maximalen Messunsicherheiten* (d. h. den *absoluten Maximalfehlern*) von φ und λ besteht dabei der folgende Zusammenhang¹⁾:

$$\Delta\varphi_{\max} = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \cdot \Delta\lambda_{\max} \right| = \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda_{\max} \right|$$

Mit der Ableitung

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (\arccos \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

folgt daraus

$$\Delta\varphi_{\max} = \left| -\frac{1}{\sqrt{1-\bar{\lambda}^2}} \cdot \Delta\lambda_{\max} \right| = \frac{\Delta\lambda_{\max}}{\sqrt{1-\bar{\lambda}^2}} = \frac{0,044}{\sqrt{1-0,8^2}} = 0,0733$$

Messergebnis: $\varphi = \bar{\varphi} \pm \Delta\varphi_{\max} = 0,6435 \pm 0,0733$ oder $\varphi = 36,9^\circ \pm 4,2^\circ$

¹⁾ φ hängt nur von λ ab, ist also eine Funktion von einer Variablen: $\varphi = \varphi(\lambda)$. Das *totale Differential*, das der Berechnung der *absoluten Messunsicherheit* (d. h. des *absoluten Maximalfehlers*) zugrunde liegt, *reduziert* sich somit auf *einen* Summand. Ferner besteht kein Unterschied zwischen der partiellen und der gewöhnlichen Ableitung.

Beispiel 5: Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke

*Mittelwert und Standardabweichung des Mittelwertes
(mittlerer Fehler des Mittelwertes), Fehlerfortpflanzung
nach Gauß*

Mit der in Bild X-4 dargestellten *Wheatstone-schen Brücke* lässt sich ein *unbekannter* elektrischer Widerstand R_x bequem bestimmen. Bei *vorgegebenem* Widerstand R wird der Schleifkontakt S solange auf dem homogenen Schleifdraht der Länge l verschoben, bis die Brücke A – S *stromlos* ist: $I_A = 0$ ²⁾. Der Schleifkontakt S teilt dabei den Schleifdraht im Verhältnis $x : (l - x)$. Der Widerstand R_x lässt sich dann aus der *Proportion* $R_x : R = x : (l - x)$ berechnen:

$$R_x = R \cdot \frac{x}{l - x}$$

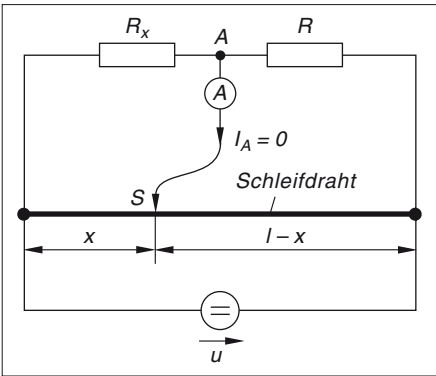


Bild X-4

In einem speziellen Versuch erhielt man bei einer Schleifdrahtlänge von $l = 100\text{ cm}$ und einem festen Widerstand von $R = 600\,\Omega$ die folgende aus zehn Einzelmessungen *gleicher* Genauigkeit bestehende *Messreihe* für die Positionsgröße x des Schleifkontaktes:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{x_i}{\text{cm}}$	40,0	40,2	39,8	39,7	40,3	40,1	39,8	39,9	40,4	39,8

- a) Berechnen Sie zunächst den *Mittelwert* \bar{x} und die *Standardabweichung des Mittelwertes* (d. h. den *mittleren Fehler des Mittelwertes*), die als Maß für die *Messunsicherheit* dienen soll.
- b) Welcher *Messwert* (Mittelwert) ergibt sich daraus für den unbekannten Widerstand R_x und mit welcher *Messunsicherheit* (d. h. welchem *mittleren Fehler*) ΔR_x ist diese Größe versehen?

Lehrbuch: Bd. 3, IV.3 und IV.4

Lösung:

- a) Zunächst berechnen wir den Mittelwert \bar{x} , dann die Abweichungen $x_i - \bar{x}$ vom Mittelwert \bar{x} und schließlich deren Quadrate.

²⁾ Das in die Brücke A – S geschaltete *Amperemeter* \textcircled{A} dient lediglich als *Nullindikator*.

i	$\frac{x_i}{\text{cm}}$	$\frac{x_i - \bar{x}}{\text{cm}}$	$\frac{(x_i - \bar{x})^2}{\text{cm}^2}$
1	40,0	0,0	0,00
2	40,2	0,2	0,04
3	39,8	-0,2	0,04
4	39,7	-0,3	0,09
5	40,3	0,3	0,09
6	40,1	0,1	0,01
7	39,8	-0,2	0,04
8	39,9	-0,1	0,01
9	40,4	0,4	0,16
10	39,8	-0,2	0,04
Σ	400	0	0,52

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{400 \text{ cm}}{10} = 40 \text{ cm}$$

Standardabweichung des Mittelwertes (d. h. mittlerer Fehler des Mittelwertes):

$$\begin{aligned} \Delta x = s_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{0,52 \text{ cm}^2}{90}} = \\ &= 0,076 \text{ cm} \approx 0,08 \text{ cm} \end{aligned}$$

- b) Der Widerstand R_x ist als eine Funktion der Länge x aufzufassen: $R_x = R_x(x)$. Sein Messwert (Mittelwert) beträgt damit

$$\bar{R}_x = R_x(\bar{x}) = R \cdot \frac{\bar{x}}{l - \bar{x}} = 600 \, \Omega \cdot \frac{40 \text{ cm}}{100 \text{ cm} - 40 \text{ cm}} = 400 \, \Omega$$

Die Messunsicherheit des Mittelwertes (d. h. der mittlere Fehler des Mittelwertes) wird dann nach der Formel

$$\Delta R_x = \left| \frac{dR_x}{dx} \Delta x \right|$$

berechnet. Mit der nach der Quotientenregel gebildeten Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(R \cdot \frac{x}{l-x} \right) = R \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{l-x} \right) = R \cdot \frac{1(l-x) - (-1)x}{(l-x)^2} = \\ &= R \cdot \frac{l-x+x}{(l-x)^2} = R \cdot \frac{l}{(l-x)^2} = \frac{Rl}{(l-x)^2} \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\Delta R_x = \left| \frac{Rl}{(l-\bar{x})^2} \Delta x \right| = \frac{600 \, \Omega \cdot 100 \text{ cm}}{(100 \text{ cm} - 40 \text{ cm})^2} \cdot 0,08 \text{ cm} \approx 1,3 \, \Omega$$

Messergebnis: $R_x = \bar{R}_x \pm \Delta R_x = (400 \pm 1,3) \, \Omega$

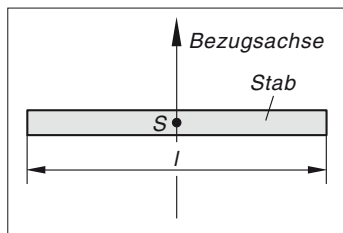
Beispiel 6: Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes

Auswertung von Messreihen, Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Das *Massenträgheitsmoment* J eines dünnen homogenen *Zylinderstabes* bezüglich einer durch den Schwerpunkt S gehenden und senkrecht zur Stabachse verlaufenden Bezugsachse wird nach der Formel

$$J = J(m; l) = \frac{1}{12} m l^2$$

berechnet (Bild X-5).



m : Masse des Stabes
 l : Länge des Stabes

Bild X-5

In einem Experiment wurden dabei für die Masse m und die Länge l des Stabes die folgenden *Messwerte* ermittelt (jeweils zehn Einzelmessungen *gleicher* Genauigkeit):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m_i}{\text{g}}$	119,5	119,2	121,0	119,7	120,3	120,4	119,8	120,4	119,2	120,5
$\frac{l_i}{\text{cm}}$	20,2	19,9	19,7	19,7	20,0	19,6	20,2	20,5	19,8	20,4

- a) Werten Sie die beiden Messreihen in der üblichen Weise aus (Angabe des jeweiligen *Mittelwertes* und der zugehörigen *Standardabweichung des Mittelwertes*, d. h. des *mittleren Fehlers des Mittelwertes*).
- b) Welcher *Mittelwert* ergibt sich daraus für das Massenträgheitsmoment J , wie groß ist die *Messunsicherheit* (d. h. der *mittlere Fehler*) dieser Größe?

Lehrbuch: Bd. 3, IV.3 und IV.4

Lösung:

- a) Auswertung der beiden Messreihen: Zunächst werden die Mittelwerte \overline{m} und \overline{l} berechnet, dann die Abweichungen der einzelnen Messwerte vom jeweiligen Mittelwert und schließlich deren Abweichungsquadrate.

i	$\frac{m_i}{\text{g}}$	$\frac{m_i - \bar{m}}{\text{g}}$	$\frac{(m_i - \bar{m})^2}{\text{g}^2}$	$\frac{l_i}{\text{cm}}$	$\frac{l_i - \bar{l}}{\text{cm}}$	$\frac{(l_i - \bar{l})^2}{\text{cm}^2}$
1	119,5	-0,5	0,25	20,2	0,2	0,04
2	119,2	-0,8	0,64	19,9	-0,1	0,01
3	121,0	1,0	1,00	19,7	-0,3	0,09
4	119,7	-0,3	0,09	19,7	-0,3	0,09
5	120,3	0,3	0,09	20,0	0,0	0,00
6	120,4	0,4	0,16	19,6	-0,4	0,16
7	119,8	-0,2	0,04	20,2	0,2	0,04
8	120,4	0,4	0,16	20,5	0,5	0,25
9	119,2	-0,8	0,64	19,8	-0,2	0,04
10	120,5	0,5	0,25	20,4	0,4	0,16
Σ	1200,0	0,0	3,32	200,0	0,0	0,88

Mittelwerte von Masse m und Länge l :

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} m_i}{10} = \frac{1200 \text{ g}}{10} = 120 \text{ g},$$

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} l_i}{10} = \frac{200 \text{ cm}}{10} = 20 \text{ cm}$$

Messunsicherheiten der beiden Mittelwerte (Standardabweichungen oder mittlere Fehler der Mittelwerte):

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (m_i - \bar{m})^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{3,32 \text{ g}^2}{90}} = 0,192 \text{ g} \approx 0,2 \text{ g}$$

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (l_i - \bar{l})^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{0,88 \text{ cm}^2}{90}} = 0,099 \text{ cm} \approx 0,1 \text{ cm}$$

Messergebnisse:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m = (120 \pm 0,2) \text{ g}, \quad l = \bar{l} \pm \Delta l = (20 \pm 0,1) \text{ cm}$$

b) Für den Mittelwert \bar{J} des Massenträgheitsmomentes erhalten wir den Wert

$$\bar{J} = J(\bar{m}; \bar{l}) = \frac{1}{12} \bar{m} \bar{l}^2 = \frac{1}{12} \cdot 120 \text{ g} \cdot (20 \text{ cm})^2 = 4000 \text{ g cm}^2$$

Für die Berechnung der Messunsicherheit (d. h. des mittleren Fehlers) ΔJ benötigen wir noch die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $J(m; l)$. Sie lauten:

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{12} m l^2 \right) = \frac{1}{12} l^2, \quad \frac{\partial J}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{12} m l^2 \right) = \frac{1}{6} m l$$

Damit erhalten wir nach dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* die folgende *Messunsicherheit* (d. h. den folgenden *mittleren Fehler*) für das Massenträgheitsmoment J :

$$\begin{aligned} \Delta J &= \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m} \Delta m \right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial l} \Delta l \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{12} \bar{l}^2 \Delta m \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \bar{m} \bar{l} \Delta l \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{12} (20 \text{ cm})^2 \cdot 0,2 \text{ g} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot 120 \text{ g} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} \right)^2} = \\ &= 40,55 \text{ g cm}^2 \approx 41 \text{ g cm}^2 \end{aligned}$$

Das „*Messergebnis*“ für das Massenträgheitsmoment lautet damit

$$J = \bar{J} \pm \Delta J = (4000 \pm 41) \text{ g cm}^2$$

Die *prozentuale Messunsicherheit* (d. h. der *prozentuale mittlere Fehler*) beträgt rund 1 %.

Beispiel 7: Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)
Ausgleichskurve (Exponentialfunktion)

Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand R mit *zunehmender* absoluter Temperatur T nach der Gleichung

$$R(T) = A \cdot e^{\frac{B}{T}}, \quad T > 0$$

stark abnimmt (gute Leitfähigkeit im „heißen“ Zustand, schlechte Leitfähigkeit im „kalten“ Zustand). Bestimmen Sie mit den Methoden der *Ausgleichsrechnung* die Parameter A und B für einen Heißleiter, bei dem die folgenden Messwerte gefunden wurden (ϑ : Temperatur des Heißleiters in °C):

$\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}}$	20	40	60	80	100
$\frac{R}{\Omega}$	510	290	178	120	80

Zeichnen Sie die *Ausgleichskurve* mitsamt den vorgegebenen Messwerten (Messpunkten).

Lösungshinweise:

- (1) Beachten Sie, dass die Temperaturwerte zunächst aus der Einheit °C in die Einheit Kelvin (K) umzurechnen sind. Die *Umrechnungsformel* lautet

$$T = \vartheta \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} + 273,15 \text{ K}$$

- (2) Führen Sie das Problem auf den aus Band 3, Abschnitt IV.5.3 bekannten Fall der *Ausgleichsgeraden* zurück, indem Sie die Gleichung zunächst beidseitig *logarithmieren* und anschließend durch Einführung von geeigneten Hilfsvariablen auf die *Geradenform* $y = ax + b$ bringen.

Lehrbuch: Bd. 3, IV.5

Lösung:

Die *logarithmierte* Gleichung

$$\begin{aligned}\ln R &= \ln \left(A \cdot e^{\frac{B}{T}} \right) = \ln A + \ln \left(e^{\frac{B}{T}} \right) = \ln A + \frac{B}{T} \cdot \ln e = \ln A + \frac{B}{T} \cdot 1 = \\ &= \ln A + \frac{B}{T} = B \cdot \frac{1}{T} + \ln A\end{aligned}$$

erhält mit $y = \ln R$, $x = \frac{1}{T}$, $a = B$ und $b = \ln A$ die gewünschte Form $y = ax + b$.

Die Umrechnung der Variablen ϑ bzw. T und R in die Hilfsvariablen x und y erfolgt nach dem folgenden Schema (ohne Einheiten):

$$\vartheta \rightarrow T = \vartheta + 273,15 \rightarrow x = 1/T$$

$$R \rightarrow y = \ln R$$

Die Berechnung der *Koeffizienten* a und b erfolgt dabei mit Hilfe des folgenden *Rechen-schemas* (Formeln für a und b : siehe Band 3, Abschnitt IV.5.3):

i	T_i	$\frac{x_i}{10^{-3}}$	y_i	$\frac{x_i^2}{10^{-6}}$	$\frac{x_i y_i}{10^{-3}}$
1	293,15	3,4112	6,2344	11,6363	21,2668
2	313,15	3,1934	5,6699	10,1978	18,1063
3	333,15	3,0017	5,1818	9,0102	15,5542
4	353,15	2,8317	4,7875	8,0185	13,5568
5	373,15	2,6799	4,3820	7,1819	11,7433
Σ		15,1179	26,2556	46,0447	80,2274

In den nachfolgenden Summen wird jeweils von $i = 1$ bis $i = 5$ summiert. Wir berechnen zunächst den Nenner Δ in den Formeln der beiden Koeffizienten:

$$\Delta = n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 5 \cdot 46,0447 \cdot 10^{-6} - (15,1179 \cdot 10^{-3})^2 = 1,6726 \cdot 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{\Delta} = \\ &= \frac{5 \cdot 80,2274 \cdot 10^{-3} - 15,1179 \cdot 10^{-3} \cdot 26,2556}{1,6726 \cdot 10^{-6}} = 2515,52\end{aligned}$$

$$b = \frac{(\sum x_i^2) \cdot (\sum y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{\Delta} =$$

$$= \frac{46,0447 \cdot 10^{-6} \cdot 26,2556 - 15,1179 \cdot 10^{-3} \cdot 80,2274 \cdot 10^{-3}}{1,6726 \cdot 10^{-6}} = -2,3548$$

Für die Parameter A und B ergeben sich somit folgende Werte:

$$\ln A = b \Rightarrow A = e^b = e^{-2,3548} = 0,0949 \text{ (in } \Omega)$$

$$B = a = 2515,52 \text{ (in K)}$$

Die *Widerstandskennlinie* des Heißeleiters wird damit durch die Gleichung

$$R(T) = 0,0949 \Omega \cdot e^{\frac{2515,52 \text{ K}}{T}}$$

oder

$$R(\vartheta) = 0,0949 \Omega \cdot e^{\left(\frac{2515,52^\circ\text{C}}{\vartheta + 273,15^\circ\text{C}}\right)}$$

beschrieben.

Bild X-6 zeigt den Verlauf dieser Kennlinie im Temperaturbereich $10^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 110^\circ\text{C}$. Die vorgegebenen Messwerte sind als Punkte eingezeichnet.

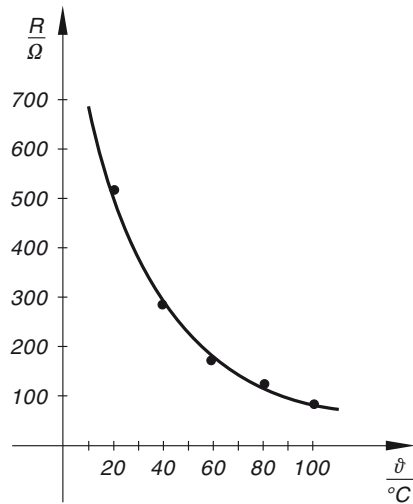


Bild X-6

Beispiel 8: Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes (Glühlampe)
Ausgleichskurve (kubische Funktion)

Eine *Glühlampe* stellt einen *nichtlinearen* Widerstand dar, d. h. ihr Widerstand ist *keine* Konstante, sondern noch vom durchflossenen *Strom* abhängig. Die *Spannung-Strom-Kennlinie* $U = f(I)$ einer Glühlampe verläuft somit nicht geradlinig, lässt sich aber in guter Näherung durch eine *kubische* Funktion vom Typ

$$U = f(I) = aI^3 + bI$$

beschreiben, wobei die noch *unbekannten* Koeffizienten a und b aus n vorliegenden *Messpunkten* $(I_k; U_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) mit Hilfe der *Ausgleichsrechnung* bestimmt werden können³⁾.

³⁾ Die Kennlinie ist *punktsymmetrisch*, da eine *Umkehrung* der *Stromrichtung* lediglich eine *Richtungsumkehr* der abfallenden *Spannung* bewirkt.

- a) Bestimmen Sie zunächst nach dem *Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadratsumme* diejenige *kubische* Ausgleichskurve, die sich diesen Messwerten „*optimal*“ anpasst. Gehen Sie dabei analog vor wie im Lehrbuch bei der Herleitung der *Ausgleichsgeraden* (siehe Band 3, Abschnitt IV.5.3).
- b) Für eine spezielle Glühlampe wurde die folgende Messreihe ermittelt (fünf Einzelmessungen):

k	1	2	3	4	5
$\frac{I_k}{A}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\frac{U_k}{V}$	51	101	174	288	446

Berechnen Sie die *Koeffizienten* a und b der kubischen Ausgleichskurve und *zeichnen* Sie diese.

Lehrbuch: Bd. 3, IV.5

Lösung:

- a) Der *Abstand* eines Messpunktes $P_k = (I_k; U_k)$ von der Ausgleichskurve $U = f(I) = aI^3 + bI$ beträgt nach Bild X-7

$$v_k = U_k - f(I_k) = U_k - (aI_k^3 + bI_k) = U_k - aI_k^3 - bI_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

($v_k > 0$, falls P_k oberhalb der Kennlinie liegt, sonst $v_k \leq 0$)

Wir *quadrieren* und *addieren* und erhalten die *Summe der Abstandsquadrate*, die noch von den beiden Parametern a und b abhängt:

$$S(a; b) = \sum_{k=1}^n v_k^2 = \sum_{k=1}^n (U_k - aI_k^3 - bI_k)^2$$

Diese werden nach *Gauß* nun so bestimmt, dass die Funktion $S(a; b)$ ein *Minimum* annimmt. Daher müssen die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung *verschwinden*. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir die folgenden sog. *Normalgleichungen*:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n (U_k - aI_k^3 - bI_k) \cdot (-I_k^3) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n (U_k - aI_k^3 - bI_k) \cdot (-I_k) = 0$$

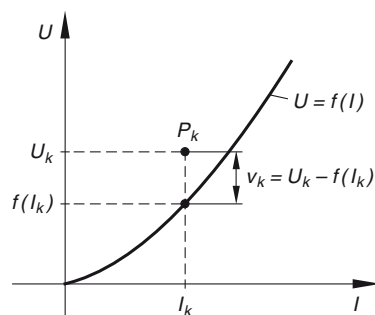


Bild X-7

Sie führen zu dem *inhomogenen linearen Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}(\sum I_k^6) \cdot a + (\sum I_k^4) \cdot b &= \sum U_k I_k^3 \\ (\sum I_k^4) \cdot a + (\sum I_k^2) \cdot b &= \sum U_k I_k\end{aligned}$$

das wir nach der *Cramerschen Regel* lösen (summiert wird jeweils von $k = 1$ bis $k = n$). Die dabei benötigten Determinanten lauten:

Koeffizientendeterminante D:

$$D = \begin{vmatrix} \sum I_k^6 & \sum I_k^4 \\ \sum I_k^4 & \sum I_k^2 \end{vmatrix} = (\sum I_k^6) \cdot (\sum I_k^2) - (\sum I_k^4)^2$$

Hilfsdeterminante D₁:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum U_k I_k^3 & \sum I_k^4 \\ \sum U_k I_k & \sum I_k^2 \end{vmatrix} = (\sum U_k I_k^3) \cdot (\sum I_k^2) - (\sum U_k I_k) \cdot (\sum I_k^4)$$

Hilfsdeterminante D₂:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum I_k^6 & \sum U_k I_k^3 \\ \sum I_k^4 & \sum U_k I_k \end{vmatrix} = (\sum I_k^6) \cdot (\sum U_k I_k) - (\sum I_k^4) \cdot (\sum U_k I_k^3)$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt dann die folgende *Lösung*:

$$a = \frac{D_1}{D}, \quad b = \frac{D_2}{D} \quad (D \neq 0)$$

- b) Aus der vorliegenden Messreihe ermitteln wir die benötigten Potenzen und Potenzprodukte der Messgrößen *I* und *U* und stellen diese Werte in einer Tabelle zusammen:

<i>k</i>	$\frac{I_k}{A}$	$\frac{U_k}{V}$	$\frac{I_k^2}{A^2}$	$\frac{I_k^4}{A^4}$	$\frac{I_k^6}{A^6}$	$\frac{U_k I_k}{VA}$	$\frac{U_k I_k^3}{VA^3}$
1	0,2	51	0,04	0,0016	0,000 064	10,2	0,408
2	0,3	101	0,09	0,0081	0,000 729	30,3	2,727
3	0,4	174	0,16	0,0256	0,004 096	69,6	11,136
4	0,5	288	0,25	0,0625	0,015 625	144,0	36,000
5	0,6	446	0,36	0,1296	0,046 656	267,6	96,336
Σ			0,90	0,2274	0,067 170	521,7	146,607

Für die Determinanten ergeben sich damit die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 D &= (\sum I_k^6) \cdot (\sum I_k^2) - (\sum I_k^4)^2 = \\
 &= (0,067\,170\,\text{A}^6) \cdot (0,90\,\text{A}^2) - (0,2274\,\text{A}^4)^2 = 0,008\,742\,\text{A}^8 \\
 D_1 &= (\sum U_k I_k^3) \cdot (\sum I_k^2) - (\sum U_k I_k) \cdot (\sum I_k^4) = \\
 &= (146,607\,\text{VA}^3) \cdot (0,90\,\text{A}^2) - (521,7\,\text{VA}) \cdot (0,2274\,\text{A}^4) = 13,311\,720\,\text{VA}^5 \\
 D_2 &= (\sum I_k^6) \cdot (\sum U_k I_k) - (\sum I_k^4) \cdot (\sum U_k I_k^3) = \\
 &= (0,067\,170\,\text{A}^6) \cdot (521,7\,\text{VA}) - (0,2274\,\text{A}^4) \cdot (146,607\,\text{VA}^3) = 1,704\,157\,\text{VA}^7
 \end{aligned}$$

Somit ist

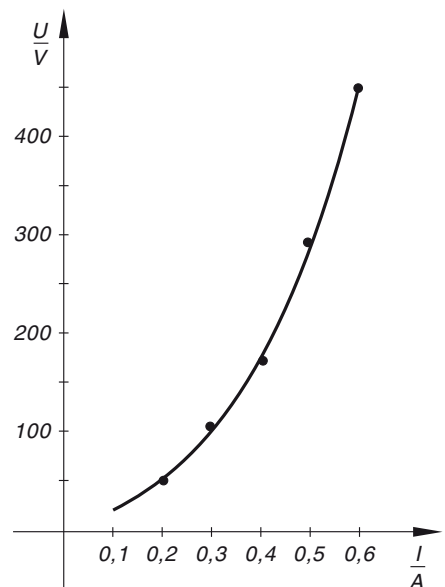
$$\begin{aligned}
 a &= \frac{D_1}{D} = \frac{13,311\,720\,\text{VA}^5}{0,008\,742\,\text{A}^8} = 1522,73 \frac{\text{V}}{\text{A}^3}, \\
 b &= \frac{D_2}{D} = \frac{1,704\,157\,\text{VA}^7}{0,008\,742\,\text{A}^8} = 194,94 \frac{\text{V}}{\text{A}}
 \end{aligned}$$

Die gesuchte U - I -Kennlinie der Glühlampe lautet damit wie folgt:

$$U = f(I) = aI^3 + bI = 1522,73 \frac{\text{V}}{\text{A}^3} \cdot I^3 + 194,94 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot I$$

Ihr Verlauf ist in Bild X-8 dargestellt und zeigt deutlich die gute Übereinstimmung mit den vorgegebenen Messwerten (als Punkte eingetragen).

Bild X-8



XI Fourier-Transformationen

Hinweis: Alle in den Lösungen angegebenen Nummern für *Integrale* bzw. *Fourier-Transformationen* beziehen sich auf die *Integraltafel* bzw. *Fourier-Transformationstabelle* (Tabelle 1) der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors. Die Abkürzung *Dgl* bedeutet *Differentialgleichung*.

Beispiel 1: Spektraldichte eines \cos^2 -Impulses
Fourier-Integral, Fourier-Kosinus-Transformation

Bestimmen Sie die *Spektraldichte* des in Bild XI-1 skizzierten zeitabhängigen \cos^2 -Impulses mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \cos^2(\omega_0 t) & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases}$$

$A > 0$; $\omega_0 > 0$: Kreisfrequenz

$T = \pi/(2\omega_0)$

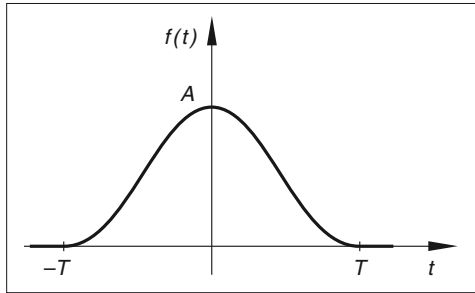


Bild XI-1

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.2 und V.2.1

Lösung:

Die Spektraldichte $F(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* des Impulses $f(t)$, d. h. es ist $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kurve ($f(t)$ ist eine *gerade* Funktion) können wir $F(\omega)$ mit Hilfe der *Fourier-Kosinus-Transformation* bestimmen:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = 2 \cdot F_c(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \\ &= 2A \cdot \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formel

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \quad \text{mit} \quad x = \omega_0 t$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.4) lässt sich das Integral in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= 2A \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T [1 + \cos(2\omega_0 t)] \cdot \cos(\omega t) dt = \\
 &= A \left(\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t) dt}_{I_2} \right) = A(I_1 + I_2)
 \end{aligned}$$

Auswertung der Teilintegrale mit der Integraltafel (Integral Nr. 228 mit $a = \omega$ und Integral Nr. 252 mit $a = 2\omega_0$, $b = \omega$) und unter Berücksichtigung von $\sin 0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^T \cos(\omega t) dt = \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{\sin(\omega T)}{\omega} - \frac{\sin 0}{\omega} = \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \\
 I_2 &= \int_0^T \cos(2\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t) dt = \left[\frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)t]}{2(2\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin[(2\omega_0 + \omega)t]}{2(2\omega_0 + \omega)} \right]_0^T = \\
 &= \frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)T]}{2(2\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin[(2\omega_0 + \omega)T]}{2(2\omega_0 + \omega)} - \frac{\sin 0}{2(2\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin 0}{2(2\omega_0 + \omega)} = \\
 &= \frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)T]}{2(2\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin[(2\omega_0 + \omega)T]}{2(2\omega_0 + \omega)}
 \end{aligned}$$

Den Zähler der beiden Teilbrüche können wir noch mit Hilfe des Additionstheorems des Sinus vereinfachen (unter Berücksichtigung von $2\omega_0 T = \pi$):

$$\begin{aligned}
 \sin[(2\omega_0 \pm \omega)T] &= \sin(2\omega_0 T \pm \omega T) = \sin(\pi \pm \omega T) = \\
 &= \sin \pi \cdot \cos(\omega T) \pm \cos \pi \cdot \sin(\omega T) = \\
 &= 0 \cdot \cos(\omega T) \pm (-1) \cdot \sin(\omega T) = \mp \sin(\omega T) \Rightarrow \\
 \sin[(2\omega_0 + \omega)T] &= -\sin(\omega T), \quad \sin[(2\omega_0 - \omega)T] = \sin(\omega T)
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$I_2 = \frac{\sin(\omega T)}{2(2\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin(\omega T)}{2(2\omega_0 + \omega)}$$

Die *Spektraldichte* lautet damit wie folgt (für $\omega \neq 0$, $\omega \neq \pm 2\omega_0$):

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= A(I_1 + I_2) = A \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega} + \frac{\sin(\omega T)}{2(2\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin(\omega T)}{2(2\omega_0 + \omega)} \right) = \\
 &= A \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2(2\omega_0 - \omega)} - \frac{1}{2(2\omega_0 + \omega)} \right) \cdot \sin(\omega T)
 \end{aligned}$$

Der Kurvenverlauf der Spektraldichte $F(\omega)$ ist in Bild XI-2 dargestellt. An den Stellen $\omega = 0$ und $\omega = \pm 2\omega_0$ ist $F(\omega)$ nicht definiert, besitzt dort jedoch die folgenden Grenzwerte:

$$F(0) = AT, \quad F(\pm 2\omega_0) = AT/2$$

(mit der Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital berechnet).

Nullstellen: $\pm 4\omega_0, \pm 6\omega_0, \pm 8\omega_0, \dots$

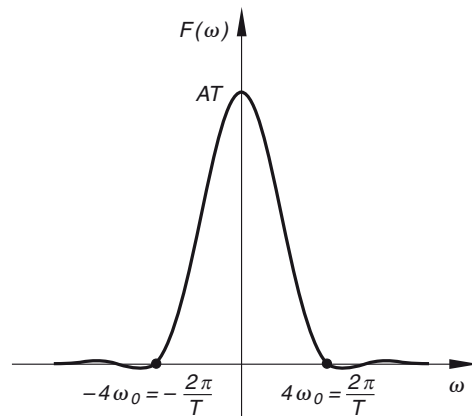


Bild XI-2 Spektraldichte des \cos^2 -Impulses

Beispiel 2: Amplituden- und Phasengang eines DT_1 -Regelkreisgliedes
Fourier-Transformation, Frequenzspektrum

Die *Impulsantwort* eines DT_1 -Regelkreisgliedes, d. h. die Reaktion des Übertragungssystems auf einen *Dirac-Impuls* $\delta(t)$ im Eingang lautet wie folgt:

$$g(t) = K \cdot \delta(t) - \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$$

t : Zeit; $\sigma(t)$: Sprungfunktion; $K > 0$: Übertragungsfaktor; $T > 0$: Zeitkonstante

Bestimmen Sie zunächst den *Frequenzgang* (das Frequenzspektrum) $G(\omega)$ des Systems und daraus den *Amplituden-* und *Phasengang*.

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.2 und V.4.1

Physikalische Grundlagen: A68

Lösung:

Der *Frequenzgang* (das Frequenzspektrum) $G(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* der Impulsantwort $g(t)$ [A68]:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\left\{K \cdot \delta(t) - \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)\right\} = \\ &= K \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{\delta(t)\}}_1 - \frac{K}{T} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)\right\}}_{\frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}} = K \cdot 1 - \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= K - \frac{K}{T \left(\frac{1}{T} + j\omega \right)} = K - \frac{K}{1 + j\omega T} = K \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega T} \right) = \\
 &= K \left(\frac{1 + j\omega T - 1}{1 + j\omega T} \right) = \frac{jK\omega T}{1 + j\omega T}
 \end{aligned}$$

Die Transformationen wurden der Tabelle 1 entnommen (Nr. 18 und Nr. 9 mit $a = 1/T$).

Der *Amplitudengang* (das Amplitudenspektrum) $A(\omega)$ ist der *Betrag* des Frequenzganges $G(\omega)$ [A68]:

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \left| \frac{jK\omega T}{1 + j\omega T} \right| = \frac{|jK\omega T|}{|1 + j\omega T|} = \frac{K|\omega|T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = \frac{KT|\omega|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

Bild XI-3 zeigt den Verlauf des Amplitudenganges $A(\omega)$.

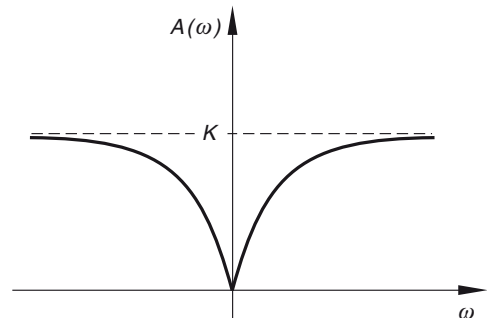


Bild XI-3 Amplitudengang eines DT_1 -Regelkreisgliedes

Der *Phasengang* $\varphi(\omega)$ ist das *Argument* (der Winkel) des Frequenzganges $G(\omega)$ [A68]. Die komplexe Funktion $G(\omega)$ muss daher zunächst auf die *kartesische* Form gebracht werden (Zerlegung in Real- und Imaginärteil; $j^2 = -1$ beachten):

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \frac{jK\omega T}{1 + j\omega T} = \frac{jK\omega T(1 - j\omega T)}{\underbrace{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)}} = \frac{jK\omega T - j^2 K(\omega T)^2}{1 - j^2(\omega T)^2} = \\
 &\quad \text{3. Binom: } 1 - j^2(\omega T)^2 \\
 &= \frac{jK\omega T + K(\omega T)^2}{1 + (\omega T)^2} = \frac{K(\omega T)^2}{1 + (\omega T)^2} + j \frac{K(\omega T)}{1 + (\omega T)^2}
 \end{aligned}$$

Der *Phasenwinkel* $\varphi = \varphi(\omega)$ wird nach [A68] aus der Gleichung

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}[G(\omega)]}{\operatorname{Re}[G(\omega)]} = \frac{\frac{K(\omega T)}{1 + (\omega T)^2}}{\frac{K(\omega T)^2}{1 + (\omega T)^2}} = \frac{K(\omega T)}{1 + (\omega T)^2} \cdot \frac{1 + (\omega T)^2}{K(\omega T)^2} = \frac{1}{\omega T}$$

wie folgt berechnet:

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega T} \Rightarrow \varphi = \varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{1}{\omega T} \right)$$

Der Verlauf des Phasengangs $\varphi(\omega)$ ist in Bild XI-4 dargestellt.

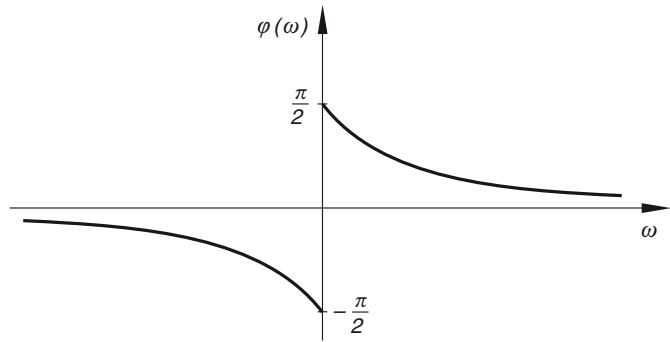


Bild XI-4

Phasengang eines
DT₁-Regelkreisgliedes

**Beispiel 3: Beidseitig gedämpfte Sinusschwingung
(amplitudenmodulierte Sinusschwingung)**
Fourier-Integral, Fourier-Sinus-Transformation

Die in Bild XI-5 skizzierte *beidseitig* gedämpfte (amplitudenmodulierte) mechanische Sinusschwingung wird durch die Gleichung

$$x(t) = e^{-\delta|t|} \cdot \sin(\omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty \quad (\delta < \omega_0)$$

beschrieben.

$x(t)$: Auslenkung zur Zeit t ; $\delta > 0$: Dämpfungsfaktor; $\omega_0 > 0$: Kreisfrequenz

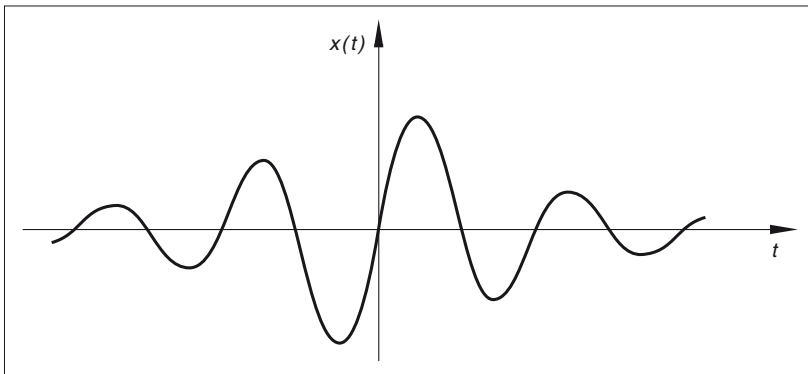


Bild XI-5

Bestimmen Sie auf dem direkten Wege über das Fourier-Integral das *Frequenzspektrum* $X(\omega)$ sowie das *Amplitudenspektrum* $A(\omega) = |X(\omega)|$ dieser Schwingung.

Lösung:

$x(t)$ ist eine *ungerade* Funktion (punktsymmetrischer Kurvenverlauf). Daher lässt sich das gesuchte Frequenzspektrum $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ mit Hilfe der *Fourier-Sinus-Transformation* bestimmen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -2j \cdot F_s(\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} x(t) \cdot \sin(\omega t) dt = \\ &= -2j \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

(für $t \geq 0$ gilt $|t| = t$ und somit $e^{-\delta|t|} = e^{-\delta t}$). Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega t) &= \frac{1}{2} \left[\cos(\omega_0 t - \omega t) - \cos(\omega_0 t + \omega t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos[(\omega_0 - \omega)t] - \cos[(\omega_0 + \omega)t] \right] \end{aligned}$$

(siehe Formelsammlung, Abschnitt III.7.6.6) folgt weiter (Aufspaltung des Integrals in zwei Teilintegrale):

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -2j \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos[(\omega_0 - \omega)t] - \cos[(\omega_0 + \omega)t] \right] dt = \\ &= -j \cdot \left(\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \cos[(\omega_0 - \omega)t] dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \cos[(\omega_0 + \omega)t] dt}_{I_2} \right) = \\ &= -j(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

Auswertung der Teilintegrale I_1 und I_2 mit der Integraltafel (Integral Nr. 324 mit $a = -\delta$ und $b = \omega_0 - \omega$ bzw. $b = \omega_0 + \omega$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \cos[(\omega_0 - \omega)t] dt = \\ &= \left[\frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \left[-\delta \cdot \cos[(\omega_0 - \omega)t] + (\omega_0 - \omega) \cdot \sin[(\omega_0 - \omega)t] \right] \right]_0^{\infty} = \\ &= -\frac{e^0}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \left[-\delta \cdot \underbrace{\cos 0}_1 + (\omega_0 - \omega) \cdot \underbrace{\sin 0}_0 \right] = \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \end{aligned}$$

Hinweis: Wegen $e^{-\delta t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ verschwindet die Stammfunktion an der oberen Grenze.

$$\text{Analog: } I_2 = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \cos[(\omega_0 + \omega)t] dt = \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2}$$

Damit erhalten wir das folgende *Frequenzspektrum*:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -j(I_1 - I_2) = -j \left(\frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2} - \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right) = \\ &= -j\delta \left(\frac{1}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2} - \frac{1}{\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right) = \\ &= -j\delta \frac{\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2 - \delta^2 - (\omega_0 - \omega)^2}{[\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2][\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2]} = \\ &= -j\delta \frac{\delta^2 + \omega_0^2 + 2\omega_0\omega + \omega^2 - \delta^2 - \omega_0^2 + 2\omega_0\omega - \omega^2}{[\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2][\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2]} = \\ &= -j\delta \frac{4\omega_0\omega}{[\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2][\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2]} = \\ &= -j \frac{4\delta\omega_0\omega}{[\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2][\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2]} \end{aligned}$$

Amplitudenspektrum [A68]

Das Amplitudenspektrum $A(\omega)$ ist der Betrag des Frequenzspektrums $X(\omega)$:

$$A(\omega) = |X(\omega)| = \frac{4\delta\omega_0|\omega|}{[\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2][\delta^2 + (\omega_0 + \omega)^2]}$$

Das Minimum dieser spiegelsymmetrischen Funktion liegt bei $\omega_1 = 0$, die beiden Maxima bei $\omega_{2/3} = \pm \omega_0$ (siehe Bild XI-6).

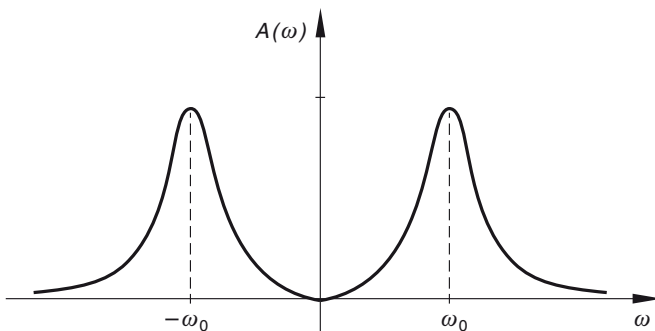


Bild XI-6 Amplitudenspektrum einer beidseitig gedämpften Sinusschwingung

Beispiel 4: Spektraldichte (Frequenzspektrum) eines modulierten Rechteckimpulses

Fourier-Integral, Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)

Der in Bild XI-7 skizzierte mit einer Kosinusfunktion *modulierte* zeitabhängige Rechteckimpuls lässt sich durch die Gleichung

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

beschreiben ($\omega_0 > 0$: Kreisfrequenz).

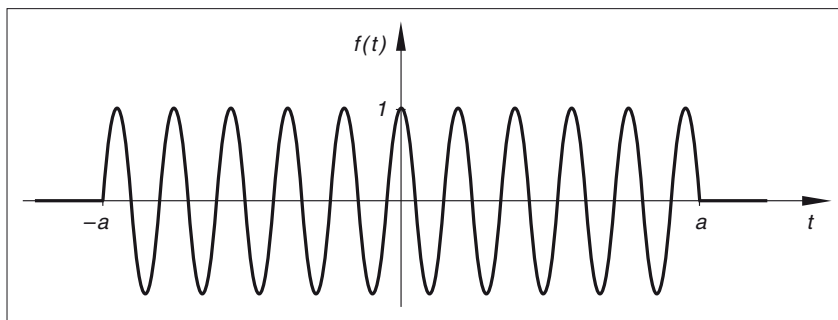


Bild XI-7

Bestimmen Sie die *Spektraldichte* (das Frequenzspektrum) $F(\omega)$ des Impulses $f(t)$

- auf direktem Wege über das *Fourier-Integral*,
- aus der als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten des Rechteckimpulses unter Verwendung des *Dämpfungssatzes* (*Frequenzverschiebungssatzes*).
- Skizzieren Sie den Verlauf der *Spektraldichte* $F(\omega)$ und das zugehörige *Amplitudenspektrum* $A(\omega) = |F(\omega)|$.

Lösungshinweis: Die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses entnehmen Sie der Transformationstabelle (Tabelle 1).

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.2, V.2.1 und V.4.4

Lösung:

Die Spektraldichte $F(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* des modulierten Rechteckimpulses $f(t)$, d. h. es gilt $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

- Da $f(t)$ eine *gerade* Funktion ist (spiegelsymmetrischer Kurvenverlauf), lässt sich die Fourier-Transformierte von $f(t)$ über die *Fourier-Kosinus-Transformation* berechnen:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = 2 \cdot F_c(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \\
 &= 2 \cdot \int_0^a \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \cdot \underbrace{\int_0^a \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt}_{\text{Integral Nr. 252 mit } a = \omega, b = \omega_0} = \\
 &= 2 \left[\frac{\sin[(\omega - \omega_0)t]}{2(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)t]}{2(\omega + \omega_0)} \right]_0^a = \\
 &= \frac{\sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)a]}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin 0}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin 0}{\omega + \omega_0} = \\
 &= \frac{\sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)a]}{\omega + \omega_0}
 \end{aligned}$$

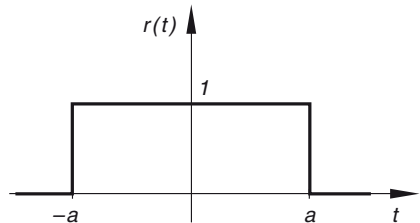
b) Ausgangspunkt ist der in Bild XI-8 skizzierte *Rechteckimpuls* mit der Gleichung

$$r(t) = \sigma(t+a) - \sigma(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

und der *Fourier-Transformierten*

$$R(\omega) = \mathcal{F}\{r(t)\} = \frac{2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega}$$

Bild XI-8



(aus der Tabelle 1 entnommen, Nr. 2). Die Gleichung des mit der Kosinusfunktion $\cos(\omega_0 t)$ *modulierten* Rechteckimpulses $r(t)$ lässt sich dann auch wie folgt schreiben, wobei wir die Kosinusfunktion noch durch komplexe Exponentialfunktionen nach der Gleichung

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \quad \text{mit} \quad x = \omega_0 t$$

ausdrücken (siehe Formelsammlung, Abschnitt VIII.7.3.2):

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \cos(\omega_0 t) \cdot r(t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \cdot r(t) = \\
 &= \frac{1}{2} (r(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + r(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}), \quad |t| \leq a
 \end{aligned}$$

Die beiden Summanden in der Klammer beschreiben mit $e^{j\omega_0 t}$ bzw. $e^{-j\omega_0 t}$ *modulierte* Rechteckimpulse, deren Fourier-Transformierte nach dem *Dämpfungs-* oder *Frequenz-*

verschiebungssatz der Fourier-Transformation aus der (bekannten) Fourier-Transformierten des Rechteckimpulses durch *Frequenzverschiebung* hervorgehen. Somit gilt (in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Teil a):

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \left(r(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + r(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \right)\right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mathcal{F}\{r(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\}}_{R(\omega - \omega_0)} + \underbrace{\mathcal{F}\{r(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}\}}_{R(\omega + \omega_0)} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(R(\omega - \omega_0) + R(\omega + \omega_0) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot \sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0} + \frac{2 \cdot \sin[(\omega + \omega_0)a]}{\omega + \omega_0} \right) = \\
 &= \frac{\sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)a]}{\omega + \omega_0}
 \end{aligned}$$

c) Bild XI-9 zeigt den Verlauf der *Spektraldichte* $F(\omega)$.

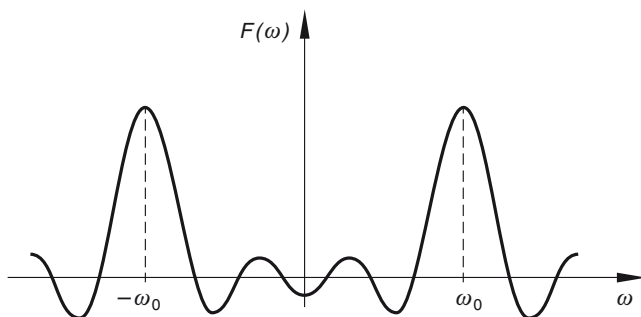


Bild XI-9
Spektraldichte $F(\omega)$

Das *Amplitudenspektrum* wird durch die Gleichung

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \left| \frac{\sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)a]}{\omega + \omega_0} \right|$$

beschrieben (siehe Bild XI-10).

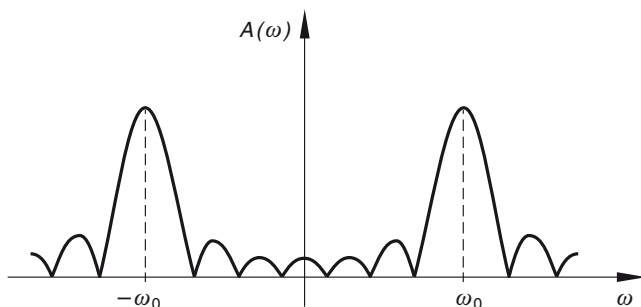


Bild XI-10
Amplituden-
spektrum $A(\omega)$

Beispiel 5: Impulsantwort eines PT₁-Übertragungssystems
*Inverse Fourier-Transformation, Zeitverschiebungssatz,
 Faltungssatz*

Durch die Gleichung

$$G(\omega) = \frac{K \cdot e^{-j\omega T_L}}{1 + j\omega T}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

wird der *Frequenzgang* eines PT₁-Regelkreisgliedes beschrieben.

$K > 0$: Übertragungsfaktor; $T > 0$: Zeitkonstante; $T_L > 0$: Laufzeit; ω : Kreisfrequenz
 Bestimmen Sie die *Impulsantwort* $g(t)$ dieses Übertragungssystems, d. h. die Reaktion des Systems auf einen *Dirac-Impuls* als Eingangssignal

- a) unter Verwendung der Transformationstabelle (Tabelle 1) und des *Verschiebungssatzes* (*Zeitverschiebungssatzes*),
- b) mit Hilfe des *Faltungssatzes*.

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.3, V.4.3 und V.4.7

Physikalische Grundlagen: A68

Lösung:

Der Frequenzgang $G(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* der Impulsantwort $g(t)$. Somit gilt:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad \text{und} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$$

- a) Wir zerlegen $G(\omega)$ wie folgt in ein Produkt:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{K \cdot e^{-j\omega T_L}}{1 + j\omega T} = \frac{K}{1 + j\omega T} \cdot e^{-j\omega T_L} = F(\omega) \cdot e^{-j\omega T_L}$$

$$\left(\text{mit } F(\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \right)$$

Der *linke Faktor* $F(\omega)$ ist die *Bildfunktion* (Fourier-Transformierte) einer zunächst noch unbekannten Originalfunktion (Zeitfunktion) $f(t)$, d. h. es ist $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. Damit gilt:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega) \cdot e^{-j\omega T_L} = \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot e^{-j\omega T_L}$$

Aus dem *Zeitverschiebungssatz* folgt dann, dass der Frequenzgang $G(\omega)$ die Fourier-Transformierte der um T_L *verschobenen* Originalfunktion $f(t)$ ist:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega) \cdot e^{-j\omega T_L} = \mathcal{F}\{f(t - T_L)\}$$

Aus dieser Gleichung folgt (inverse Fourier-Transformation):

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = f(t - T_L)$$

Die noch unbekannte Zeitfunktion $f(t)$ bestimmen wir aus der bekannten Bildfunktion $F(\omega)$ mit Hilfe der Tabelle 1 (*inverse* Fourier-Transformation):

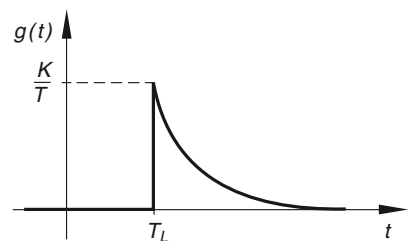
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= F(\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = K \cdot \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \Rightarrow \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{K}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}\right\} = \frac{K}{T} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}\right\} = \\ &= \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)\end{aligned}$$

(Nr. 9 mit $a = 1/T$). Die *Impulsantwort* des PT_1 -Übertragungssystems lautet somit:

$$g(t) = f(t - T_L) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t - T_L}{T}} \cdot \sigma(t - T_L)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Bild XI-11 dargestellt.

Bild XI-11 Impulsantwort eines PT_1 -Übertragungssystems



- b) Der Frequenzgang $G(\omega)$ lässt sich wie folgt als *Produkt* zweier Bildfunktionen $G_1(\omega)$ und $G_2(\omega)$ darstellen:

$$\begin{aligned}G(\omega) &= \frac{K \cdot e^{-j\omega T_L}}{1 + j\omega T} = K \cdot \frac{e^{-j\omega T_L}}{T\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)} = \frac{K}{T} \cdot \frac{e^{-j\omega T_L}}{\frac{1}{T} + j\omega} \\ &= \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \cdot e^{-j\omega T_L} = \frac{K}{T} \cdot G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)\end{aligned}$$

mit $G_1(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}$ und $G_2(\omega) = e^{-j\omega T_L}$.

Durch *inverse* Fourier-Transformation folgt dann mit Hilfe des *Faltungssatzes*:

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{K}{T} \cdot G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)\right\} = \\ &= \frac{K}{T} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)\} = \frac{K}{T} \cdot g_1(t) * g_2(t)\end{aligned}$$

Die gesuchte Impulsantwort $g(t)$ ist demnach (vom konstanten Faktor K/T abgesehen) das *Faltungsprodukt* zweier zunächst noch unbekannter Zeitfunktionen (Originalfunktionen) $g_1(t)$ und $g_2(t)$, deren Fourier-Transformierte jedoch *bekannt* sind:

$$\mathcal{F}\{g_1(t)\} = G_1(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}, \quad \mathcal{F}\{g_2(t)\} = G_2(\omega) = e^{-j\omega T_L}$$

Die beiden Zeitfunktionen lassen sich aus der Transformationstabelle (Tabelle 1) leicht bestimmen:

$$g_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}\right\} = e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$$

(Fourier-Transformation Nr. 9 mit $a = 1/T$)

$$g_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega T_L}\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega T_L}\} = \delta(t - T_L)$$

(Fourier-Transformation Nr. 20 mit $a = T_L$)

Wir berechnen jetzt das *Faltungsprodukt* (*Faltungsintegral*) $g_1(t) * g_2(t)$. Definitionsgemäß gilt:

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) \cdot g_2(t - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u}{T}} \cdot \sigma(u) \cdot \delta(t - u - T_L) du$$

Die Diracsche Deltafunktion $\delta(t - u - T_L)$ lässt sich unter Berücksichtigung ihrer Symmetrieeigenschaft noch wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \delta(t - u - T_L) &= \delta(-(t - u - T_L)) = \delta(-t + u + T_L) = \delta(u - t + T_L) = \\ &= \delta(u - \underbrace{(t - T_L)}_{\alpha}) = \delta(u - \alpha) \end{aligned}$$

(mit $\alpha = t - T_L$). Somit ist

$$\begin{aligned} g_1(t) * g_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u}{T}} \cdot \sigma(u) \cdot \delta(u - \alpha) du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \alpha) \cdot e^{-\frac{u}{T}} \cdot \sigma(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \alpha) \cdot f(u) du \quad (\text{mit } f(u) = e^{-\frac{u}{T}} \cdot \sigma(u)) \end{aligned}$$

Dieses Integral ist kein Integral im herkömmlichen Sinne, sondern ein sog. „verallgemeinertes Integral“. Die Auswertung erfolgt daher nach der sog. *Ausblendvorschrift*

$$\int_a^b \delta(u - \alpha) \cdot f(u) du = \begin{cases} f(\alpha) & \text{für } a \leq \alpha \leq b \\ 0 & \text{alle übrigen } \alpha \end{cases}$$

In unserem Fall liegt der Parameter $\alpha = t - T_L$ im Integrationsintervall (d. h. zwischen $-\infty$ und $+\infty$) und die Integralauswertung führt zu dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} g_1(t) * g_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \alpha) \cdot f(u) du = f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{T}} \cdot \sigma(\alpha) = \\ &= e^{-\frac{t-T_L}{T}} \cdot \sigma(t - T_L) \end{aligned}$$

Die *Impulsantwort* lautet somit wie folgt (in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Teil a)):

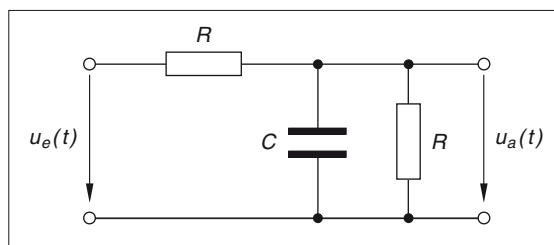
$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot g_1(t) * g_2(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-T_L}{T}} \cdot \sigma(t - T_L)$$

Beispiel 6: Lineares zeitinvariantes Übertragungssystem (LTI-System)
Inverse Fourier-Transformation

Das *Übertragungsverhalten* eines LTI-Systems lässt sich durch die sog. *Impulsantwort*, d. h. die Reaktion des Systems auf einen *Dirac-Stoß* als Eingangssignal, vollständig charakterisieren. Das in Bild XI-12 skizzierte System besitzt die *Übertragungsfunktion* (den *Frequenzgang*)

$$G(\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

Bild XI-12



R : ohmscher Widerstand; C : Kapazität; ω : Kreisfrequenz; $u_e(t)$: Eingangsspannung; $u_a(t)$: Ausgangsspannung

Bestimmen Sie die *Impulsantwort* $g(t) = u_a(t)$ des Übertragungssystems unter Verwendung der Transformationstabelle (Tabelle 1).

Lösung:

Der Frequenzgang $G(\omega)$ ist *Fourier-Transformierte* der Impulsantwort $g(t)$ [A68]:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1}{RC \left(\frac{2}{RC} + j\omega \right)}$$

Aus dieser Gleichung gewinnen wir durch *Rücktransformation* (d. h. *inverse Fourier-Transformation*) mit Hilfe der Transformationstabelle (Tabelle 1) die gesuchte *Impulsantwort* $g(t)$ des Systems:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{RC \left(\frac{2}{RC} + j\omega \right)} \right\} = \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{\frac{2}{RC} + j\omega} \right\} = \\ &= \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \cdot \sigma(t) \quad (\text{Nr. 9 mit } a = 2/(RC)) \end{aligned}$$

Bild XI-13 zeigt den Verlauf der exponentiell abklingenden Impulsantwort $g(t) = u_a(t)$.

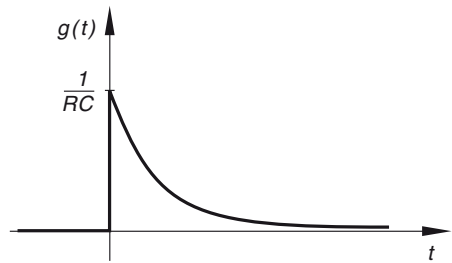


Bild XI-13 Impulsantwort des Übertragungssystems

Beispiel 7: Übertragungsverhalten einer RC-Schaltung

Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung, Ableitungssatz für Originalfunktionen, inverse Fourier-Transformation

Das in Bild XI-14 skizzierte *Übertragungssystem* enthält einen ohmschen Widerstand R und einen Kondensator mit der Kapazität C (RC-Schaltung). Eingangssignal ist die angelegte Eingangsspannung $u_e = u_e(t)$, Ausgangssignal der Spannungsabfall $u_a = u_a(t)$ am Kondensator.

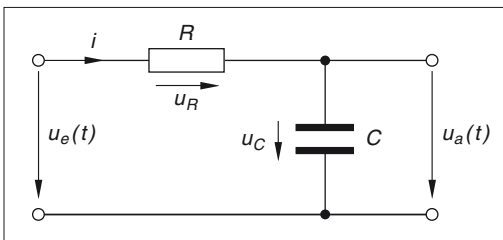


Bild XI-14

- Leiten Sie aus der Maschenregel [A32] die *Differentialgleichung* für $u_a(t)$ her.
- Unterwerfen Sie diese Differentialgleichung der *Fourier-Transformation* und bestimmen Sie die *Übertragungsfunktion* (den Frequenzgang) $G(\omega)$ des Systems. Wie lautet das zugehörige *Amplitudenspektrum* $A(\omega)$?
- Bestimmen Sie die *Impulsantwort* $g(t)$ sowie die *Sprungantwort* $h(t)$ des Übertragungsgliedes.

Lösungshinweis: Die Sprungantwort $h(t)$ lässt sich durch Integration aus der Impulsantwort $g(t)$ bestimmen:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t g(z) dz$$

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.3 und V.4.5.1

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40, A68

Lösung:

- Fließt der Strom $i = i(t)$, so ist $u_R = Ri$ der Spannungsabfall am ohmschen Widerstand R (Ohmsches Gesetz [A14]). Aus der *Maschenregel* [A32] folgt dann:

$$u_R + u_a - u_e = 0 \quad \text{oder} \quad Ri + u_a = u_e \quad (u_a = u_C)$$

Die Stromstärke i ist dabei die zeitliche Ableitung der Kondensatorladung $q = Cu_a$ ¹⁾:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_a) = C \cdot \frac{du_a}{dt} = C \dot{u}_a$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Maschengleichung ein und erhalten die gesuchte *Differentialgleichung* für die Ausgangsspannung u_a :

$$RC \dot{u}_a + u_a = u_e \quad \text{oder} \quad \tau \dot{u}_a + u_a = u_e$$

(mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$). Es handelt sich dabei um eine inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- Die Dgl wird gliedweise unter Verwendung des *Ableitungssatzes für Originalfunktionen* der Fourier-Transformation unterworfen. Mit

$$U_e(\omega) = \mathcal{F}\{u_e(t)\} \quad \text{und} \quad U_a(\omega) = \mathcal{F}\{u_a(t)\}$$

erhalten wir:

$$\tau(j\omega) \cdot U_a(\omega) + U_a(\omega) = U_e(\omega) \Rightarrow$$

$$(j\omega\tau) \cdot U_a(\omega) + U_a(\omega) = U_e(\omega) \Rightarrow (1 + j\omega\tau) \cdot U_a(\omega) = U_e(\omega) \Rightarrow$$

$$U_a(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \cdot U_e(\omega) = G(\omega) \cdot U_e(\omega)$$

¹⁾ Definitionsgemäß gilt $C = \frac{q}{u_C} = \frac{q}{u_a}$ und somit $q = Cu_a$ [A40].

Die gesuchte *Übertragungsfunktion*, d. h. der *Frequenzgang* des Übertragungssystems lautet somit wie folgt:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Das *Amplitudenspektrum* $A(\omega)$ ist der *Betrag* des Frequenzganges [A68]:

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{1}{|1 + jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Bild XI-15 zeigt den Verlauf dieser Funktion.

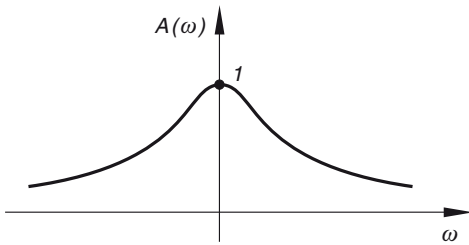


Bild XI-15 Amplitudenspektrum eines RC-Übertragungsgliedes

- c) Die *Impulsantwort* $g(t) = u_a(t)$ ist die Reaktion des Übertragungssystems auf das Eingangssignal $u_e(t) = \delta(t)$ (angelegter Spannungsstoß in Form eines *Dirac-Stoßes*). Mit $U_e(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (siehe Tabelle 1, Nr. 18) gilt daher:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= G(\omega) \cdot U_e(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot U_e(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot 1 = \frac{1}{1 + jRC\omega} \end{aligned}$$

Durch *Rücktransformation* (inverse Fourier-Transformation) folgt nach Tabelle 1 (Nr. 9 mit $a = 1/(RC)$):

$$\begin{aligned} u_a(t) &= g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U_a(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + jRC\omega}\right\} = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{RC\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right)}\right\} = \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}\right\} = \\ &= \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t) \end{aligned}$$

Der Spannungsabfall am Kondensator klingt somit im Laufe der Zeit *exponentiell* auf null ab (siehe Bild XI-16)

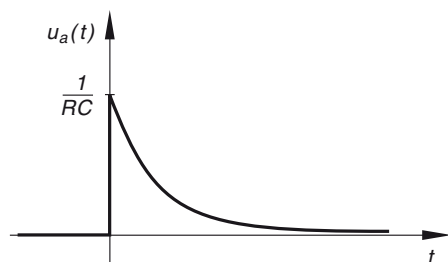


Bild XI-16 Spannungsabfall am Kondensator (Impulsantwort)

Die *Sprungantwort* $h(t)$ ist die Reaktion des Übertragungssystems auf das Eingangssignal $u_e(t) = \sigma(t)$ (zur Zeit $t = 0$ wird die konstante Spannung $u_e = 1$ angelegt, siehe Bild XI-17a)). Sie lässt sich durch *Integration* aus der inzwischen bekannten Impulsantwort $g(t)$ wie folgt bestimmen [A68] (z : Integrationsvariable):

$$\begin{aligned} u_a(t) = h(t) &= \int_{-\infty}^t g(z) dz = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{z}{RC}} \cdot \sigma(z) dz = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t e^{-\frac{z}{RC}} dz = \\ &= \frac{1}{RC} \left[\frac{e^{-\frac{z}{RC}}}{-\frac{1}{RC}} \right]_0^t = \frac{1}{RC} \left[-RC \cdot e^{-\frac{z}{RC}} \right]_0^t = \frac{-RC}{RC} \left[e^{-\frac{z}{RC}} \right]_0^t = \\ &= - \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) = -e^{-\frac{t}{RC}} + 1 = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Schreibweise unter Verwendung der Sigmafunktion (Sprungfunktion):

$$u_a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot \sigma(t)$$

Die Spannung am Kondensator steigt somit vom Anfangswert $u_a(0) = 0$ im Laufe der Zeit auf den Endwert $u_a(\infty) = 1$ an (siehe Bild XI-17b))

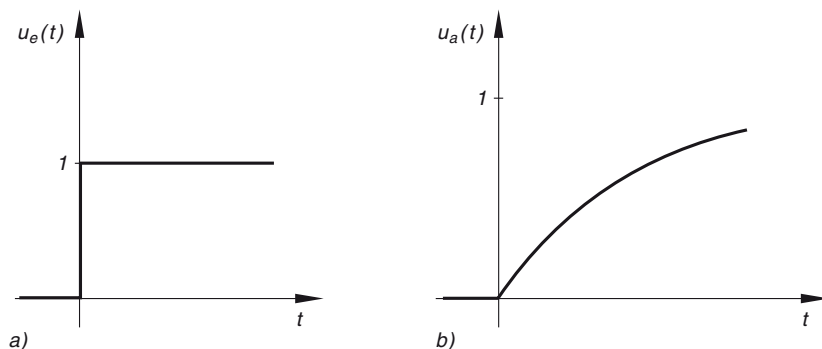


Bild XI-17 Sprungantwort eines RC-Übertragungsgliedes

a) Eingangssignal (Einheitssprung) $u_e(t) = \sigma(t)$

b) Ausgangssignal (Sättigungsfunktion) $u_a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot \sigma(t)$

Beispiel 8: Fourier-Analyse einer gedämpften mechanischen Schwingung
Fourier-Integral, Amplituden- und Phasenspektrum

Durch die Gleichung

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \quad (\text{mit } \delta < \omega_0)$$

wird eine *gedämpfte* Schwingung in einem mechanischen Schwingkreis (Feder-Masse-Schwinger) beschrieben (Bild XI-18).

$\delta > 0$: Dämpfungsfaktor; $\omega_0 > 0$: Kreisfrequenz; $\sigma(t)$: Sprungfunktion;
 $x(t)$: von der Zeit t abhängige Auslenkung

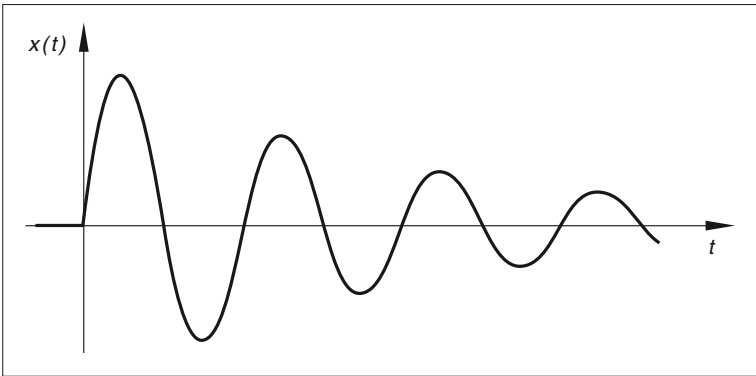


Bild XI-18

- a) Bestimmen Sie das *Frequenzspektrum* $X(\omega)$ dieser Schwingung auf dem direkten Wege über das *Fourier-Integral*.
- b) Welches *Amplituden-* und *Phasenspektrum* liefert die Fourier-Analyse?

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.2

Lösung:

- a) Das *Frequenzspektrum* $X(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* der Zeitfunktion $x(t)$ [A68]:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$(\sigma(t) = 0 \text{ für } t < 0, \sigma(t) = 1 \text{ für } t \geq 0)$$

Die Sinusfunktion drücken wir noch mit Hilfe der Formel

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

durch komplexe Exponentialfunktionen aus (siehe Formelsammlung, Abschnitt VIII.7.3.2):

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\infty} \left(\underbrace{e^{-\delta t} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-j(\omega - \omega_0)t}} - \underbrace{e^{-\delta t} \cdot e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-j(\omega + \omega_0)t}} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\infty} \left(\underbrace{e^{-\delta t} \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t}}_{e^{-[\delta + j(\omega - \omega_0)]t}} - \underbrace{e^{-\delta t} \cdot e^{-j(\omega + \omega_0)t}}_{e^{-[\delta + j(\omega + \omega_0)]t}} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\infty} \left(e^{-[\delta + j(\omega - \omega_0)]t} - e^{-[\delta + j(\omega + \omega_0)]t} \right) dt \end{aligned}$$

Der besseren Übersicht wegen setzen wir vorübergehend

$$\alpha = \delta + j(\omega - \omega_0) \quad \text{und} \quad \beta = \delta + j(\omega + \omega_0)$$

und erhalten:

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\infty} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) dt = \frac{1}{2j} \left(\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\beta t} dt}_{I_2} \right) = \frac{1}{2j} (I_1 - I_2)$$

Auswertung der Teilintegrale I_1 und I_2 mit der Integraltafel (Nr. 312 mit $a = -\alpha$ bzw. $a = -\beta$):

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{0 - 1}{-\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\delta + j(\omega - \omega_0)}$$

Hinweis: Wegen $\delta > 0$ und somit $e^{-\delta t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ verschwindet die Stammfunktion an der oberen Integralgrenze ($t = \infty$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-[\delta + j(\omega - \omega_0)]t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} = 0$$

$$\text{Analog: } I_2 = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\delta + j(\omega + \omega_0)}$$

Damit erhalten wir das folgende *Frequenzspektrum* ($j^2 = -1$ beachten):

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{1}{2j} (I_1 - I_2) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{\delta + j(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{\delta + j(\omega + \omega_0)} \right) = \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{\delta + j(\omega + \omega_0) - \delta - j(\omega - \omega_0)}{[\delta + j(\omega - \omega_0)][\delta + j(\omega + \omega_0)]} = \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{j\omega + j\omega_0 - j\omega + j\omega_0}{\delta^2 + j\delta(\omega + \omega_0) + j\delta(\omega - \omega_0) + \underbrace{j^2(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}_{\substack{\text{3. Binom: } \omega^2 - \omega_0^2}}} = \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega_0}{\delta^2 + j\delta(\omega + \omega_0 + \omega - \omega_0) - (\omega^2 - \omega_0^2)} = \\
 &= \frac{\omega_0}{\underbrace{\delta^2 + 2j\delta\omega - \omega^2}_{\substack{\text{1. Binom.: } (\delta + j\omega)^2}} + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

b) Das *Amplitudenspektrum* $A(\omega)$ ist der *Betrag* des Frequenzspektrums $X(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= |X(\omega)| = \left| \frac{\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2} \right| = \frac{\omega_0}{|\delta^2 + 2j\delta\omega - \omega^2 + \omega_0^2|} = \\
 &= \frac{\omega_0}{|(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}
 \end{aligned}$$

Bild XI-19 zeigt den Verlauf des Amplitudenspektrums. Das Minimum liegt bei $\omega_1 = 0$, die beiden Maxima an den Stellen $\omega_{2/3} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

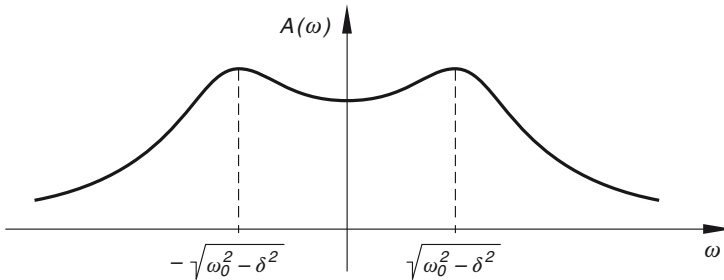


Bild XI-19 Amplitudenspektrum einer (schwach) gedämpften Schwingung ($\delta < \omega_0$)

Um das *Phasenspektrum* $\varphi(\omega)$ zu bestimmen, müssen wir das Frequenzspektrum $X(\omega)$ zunächst in die *kartesische* Form bringen:

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{\delta^2 + 2j\delta\omega - \omega^2 + \omega_0^2} = \\
 &= \frac{\omega_0}{\underbrace{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)}_a + j\underbrace{2\delta\omega}_b} = \frac{\omega_0}{a + jb} = \frac{\omega_0(a - jb)}{\underbrace{(a + jb)(a - jb)}_{\substack{\text{3. Binom: } a^2 - j^2 b^2}}} = \\
 &= \frac{\omega_0 a - j\omega_0 b}{a^2 - j^2 b^2} = \frac{\omega_0 a - j\omega_0 b}{a^2 + b^2} = \underbrace{\frac{\omega_0 a}{a^2 + b^2}}_{\text{Re}[X(\omega)]} + j \underbrace{\frac{-\omega_0 b}{a^2 + b^2}}_{\text{Im}[X(\omega)]}
 \end{aligned}$$

(mit $a = \delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2$ und $b = 2\delta\omega$)

Der *Phasenwinkel* (das Argument) φ der komplexen Funktion $X(\omega)$ wird aus der folgenden Gleichung berechnet:

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}[X(\omega)]}{\text{Re}[X(\omega)]} = \frac{\frac{-\omega_0 b}{a^2 + b^2}}{\frac{\omega_0 a}{a^2 + b^2}} = \frac{-\omega_0 b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\omega_0 a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\text{Phasenspektrum: } \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Der Kurvenverlauf ist in Bild XI-20 dargestellt (Sprungunstetigkeiten bei $\omega_{1/2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}$).

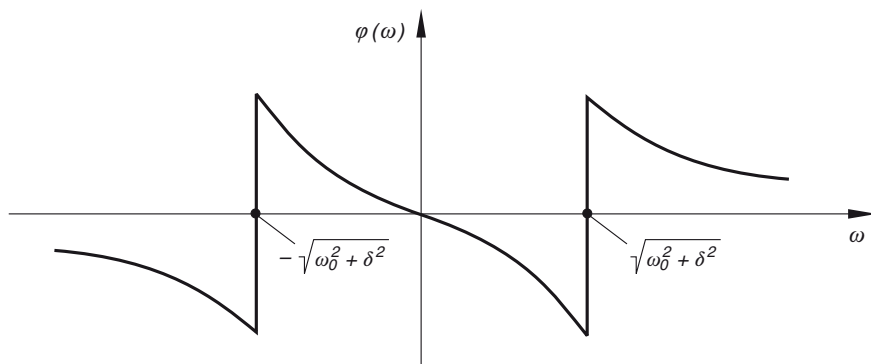


Bild XI-20 Phasenspektrum einer gedämpften Schwingung

Beispiel 9: Frequenzgang und Impulsantwort eines linearen Übertragungssystems

Inverse Fourier-Transformation, Faltungsprodukt (Faltungsintegral), Partialbruchzerlegung

Der *Frequenzgang* eines bestimmten linearen Übertragungssystems wird durch die echt gebrochenrationale Funktion

$$G(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)} \quad (\alpha > 0; \beta > 0; \alpha \neq \beta)$$

beschrieben (ω : Kreisfrequenz).

Wie reagiert dieses System auf einen „Dirac-Impuls“ $\delta(t)$ im Eingang?

Bestimmen Sie die sog. *Impulsantwort* $g(t)$

- a) unter Verwendung des *Faltungsproduktes* (Faltungsintegrals),
- b) mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* von $G(\omega)$ und Rücktransformation (*inverse* Fourier-Transformation).

Lösungshinweis: Der Frequenzgang $G(\omega)$ ist die *Fourier-Transformierte* der Impulsantwort $g(t)$ [A68].

Lehrbuch: Bd. 2, V.1.3, V.4.7 und V.5.1

Physikalische Grundlagen: A68

Lösung:

Die *Impulsantwort* $g(t)$ lässt sich aus dem Frequenzgang $G(\omega)$ durch *Rücktransformation* (*inverse* Fourier-Transformation) gewinnen:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \Rightarrow g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$$

- a) Wir zerlegen zunächst den Frequenzgang $G(\omega)$ in ein *Produkt* aus zwei Faktoren $G_1(\omega)$ und $G_2(\omega)$:

$$G(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)} = \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right)}_{G_1(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\beta + j\omega}\right)}_{G_2(\omega)} = G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)$$

Die zugehörigen *Originalfunktionen* $g_1(t)$ und $g_2(t)$ der beiden Faktoren ermitteln wir aus der Transformationstabelle (Tabelle 1, Nr. 9 mit $a = \alpha$ bzw. $a = \beta$):

$$G_1(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad g_1(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)$$

$$G_2(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad g_2(t) = e^{-\beta t} \cdot \sigma(t)$$

Nach dem *Faltungssatz* lässt sich die gesuchte Impulsantwort $g(t)$ aus dem *Faltungsprodukt* der Originalfunktionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ ermitteln:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) \cdot g_2(t-u) du = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u} \cdot \sigma(u) \cdot e^{-\beta(t-u)} \cdot \sigma(t-u) du = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u} \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{\beta u} \cdot \sigma(u) \cdot \sigma(t-u) du = \\
 &= e^{-\beta t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta-\alpha)u} \cdot \sigma(u) \cdot \sigma(t-u) du
 \end{aligned}$$

Bevor wir das Faltungsintegral berechnen, müssen wir klären, welchen Wert das Produkt $\sigma(u) \cdot \sigma(t-u)$ im Integranden annimmt. $\sigma(u)$ ist die Sprungfunktion (Einheitssprung) mit $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ im Intervall $u < 0$ (siehe Bild XI-21a)). Der zweite Faktor $\sigma(t-u)$ ist die zunächst an der vertikalen Achse *gespiegelte* und dann um die Strecke t nach *rechts* verschobene Sprungfunktion:

$$\sigma(u) \xrightarrow{\text{Spiegelung}} \sigma(-u) \xrightarrow{\text{Verschiebung}} \sigma(-u+t) = \sigma(t-u)$$

Spiegelung und Verschiebung sind in Bild XI-21 anschaulich dargestellt.

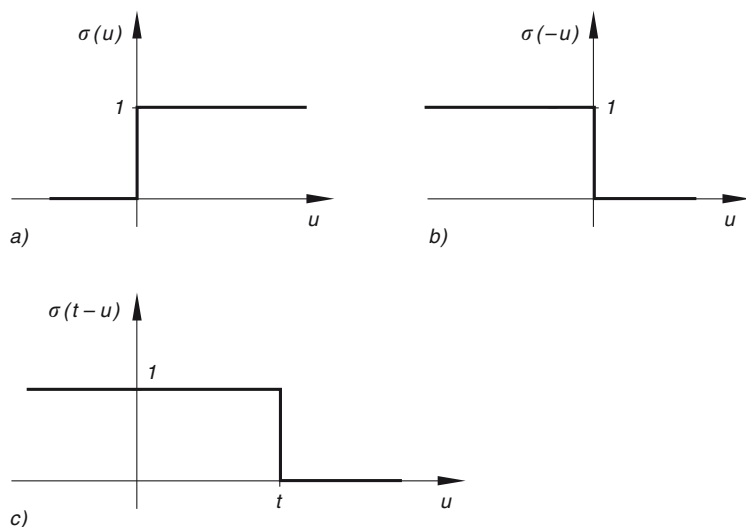


Bild XI-21 Zur Spiegelung und Verschiebung der Sprungfunktion (Einheitssprung) $\sigma(u)$

a) $\sigma(u)$ b) $\sigma(-u)$ c) $\sigma(t-u)$

Das Produkt $\sigma(u) \cdot \sigma(t-u)$ *verschwindet* überall dort, wo einer der beiden Faktoren verschwindet, d. h. also für $u < 0$ bzw. $u > t$. Im „Überlappungsbereich“ $0 \leq u \leq t$ haben beide Faktoren und somit auch das Produkt den Wert 1 (siehe Bild XI-22).

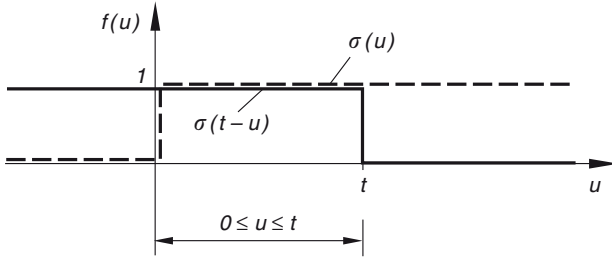


Bild XI-22

Somit gilt:

$$\sigma(u) \cdot \sigma(t-u) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{für alle übrigen } u \end{cases}$$

Damit *verschwindet* der Integrand des Faltungsintegrals *außerhalb* des Intervalls $0 \leq u \leq t$, d. h. die Integration beschränkt sich auf das Intervall von $u = 0$ bis $u = t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\beta t} \cdot \int_0^t e^{(\beta-\alpha)u} \cdot 1 \, du = e^{-\beta t} \cdot \int_0^t e^{(\beta-\alpha)u} \, du = e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)u}}{\beta-\alpha} \right]_0^t = \\ &= e^{-\beta t} \cdot \frac{e^{(\beta-\alpha)t} - 1}{\beta-\alpha} = \frac{e^{-\beta t} \cdot e^{(\beta-\alpha)t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} = \frac{e^{-\beta t} \cdot e^{\beta t - \alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} = \\ &= \frac{e^{-\beta t + \beta t - \alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt nur für $t \geq 0$, für negative t verschwindet $g(t)$. Mit Hilfe der Sprungfunktion $\sigma(t)$ lässt sich die *Impulsantwort* auch wie folgt darstellen:

$$g(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \cdot \sigma(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right) \cdot \sigma(t)$$

- b) Vor der Rücktransformation wird der Frequenzgang $G(\omega)$ wie folgt in *Partialbrüche* zerlegt:

$$G(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)} = \frac{A}{\alpha + j\omega} + \frac{B}{\beta + j\omega} = \frac{A(\beta + j\omega) + B(\alpha + j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)}$$

Die Brüche stimmen im Nenner überein und müssen somit auch im Zähler übereinstimmen:

$$\begin{aligned} A(\beta + j\omega) + B(\alpha + j\omega) &= 1 \quad \Rightarrow \quad \beta A + j\omega A + \alpha B + j\omega B = 1 \quad \Rightarrow \\ (\beta A + \alpha B) + j\omega(A + B) &= 1 = 1 + j0 \end{aligned}$$

Auf der *rechten* Seite haben wir den Summand $j0 = 0$ ergänzt. Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil beiderseits erhalten wir zwei einfache Gleichungen für die unbekannten Konstanten A und B :

$$(I) \quad \beta A + \alpha B = 1$$

$$(II) \quad \omega(A + B) = 0 \mid : \omega \neq 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

Einsetzen von $B = -A$ in Gleichung (I) führt zu:

$$(I) \quad \beta A + \alpha B = \beta A - \alpha A = (\beta - \alpha)A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\beta - \alpha},$$

$$B = -A = -\frac{1}{\beta - \alpha}$$

Somit gilt (unter Berücksichtigung von $B = -A$ bei der Zwischenrechnung):

$$G(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} + \frac{B}{\beta + j\omega} = \frac{A}{\alpha + j\omega} + \frac{-A}{\beta + j\omega} = \frac{A}{\alpha + j\omega} - \frac{A}{\beta + j\omega} =$$

$$= A \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right)$$

Durch *Rücktransformation* unter Verwendung der Transformationstabelle (Tabelle 1) erhalten wir schließlich aus $G(\omega)$ die gesuchte *Impulsantwort* $g(t)$ in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Teil a):

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha + j\omega}\right\}}_{\text{Nr. 9 mit } a = \alpha} - \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\beta + j\omega}\right\}}_{\text{Nr. 9 mit } a = \beta} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t) - e^{-\beta t} \cdot \sigma(t) \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right) \cdot \sigma(t)$$

XII Laplace-Transformationen

Hinweis: Alle in den Lösungen angegebenen *Nummern* für *Integrale* bzw. *Laplace-Transformationen* beziehen sich auf die *Integraltafel* bzw. *Laplace-Transformationstabelle* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors. Die Abkürzung *Dgl* bedeutet *Differentialgleichung*.

Beispiel 1: Ausschaltvorgang in einem RL-Schaltkreis

Homogene lineare Dgl 1. Ordnung
(*Ableitungssatz für Originalfunktionen*)

An eine *Spule* mit dem ohmschen Widerstand R und der Induktivität L wird zunächst eine *konstante* Spannung U angelegt. Nach einer gewissen Zeit fließt dann in diesem Kreis ein *Gleichstrom* der Stärke $I = U/R$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Spule durch Umlegen des Schalters S von der Spannungsquelle *getrennt* und gleichzeitig mit dem ohmschen Widerstand R_0 verbunden. Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Stromstärke* i im Zeitintervall $t \geq 0$ mit Hilfe der *Laplace-Transformation*.

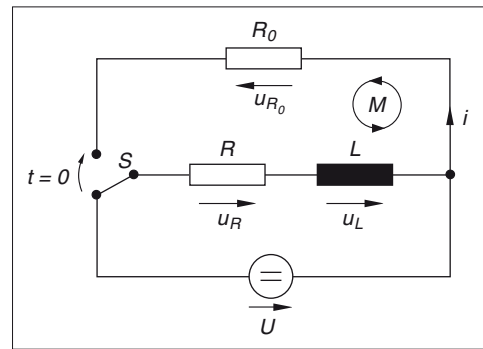


Bild XII-1

Lösungshinweis: Die *Dgl* für die Stromstärke i erhalten Sie durch Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die in Bild XII-1 eingezeichnete Masche M .

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A45

Lösung:

Für $t \geq 0$ gilt nach der *Maschenregel* [A32]

$$u_R + u_L + u_{R_0} = 0$$

Mit den aus dem *ohmschen Gesetz* [A14] bzw. dem *Induktionsgesetz* [A45] gewonnenen Beziehungen

$$u_R = Ri, \quad u_{R_0} = R_0 i \quad \text{und} \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

erhalten wir hieraus die folgende *homogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$R i + L \cdot \frac{di}{dt} + R_0 i = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R + R_0}{L} i = 0$$

Wir führen noch die *Zeitkonstante* $\tau = L/(R + R_0)$ ein. Das *Anfangswertproblem* lässt sich dann in der Form

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i = 0, \quad \text{Anfangswert: } i(0) = \frac{U}{R}$$

darstellen. Die Lösung erfolgt dabei in drei Schritten.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$$

$$\left[s \cdot I(s) - \frac{U}{R} \right] + \frac{1}{\tau} \cdot I(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen die algebraische Gleichung nach der *Bildfunktion* $I(s)$ auf:

$$\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot I(s) = \frac{U}{R} \Rightarrow I(s) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Die *Bildfunktion* ist vom *allgemeinen* Typ $F(s) = \frac{1}{s - a}$. Aus der *Laplace-Transformationstabelle* entnehmen wir (Nr. 3 mit $a = -1/\tau$):

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} = \frac{U}{R} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die *Stromstärke* i klingt somit im Laufe der Zeit vom Anfangswert $i(0) = U/R$ *exponentiell* gegen null ab (*Abklingfunktion*, siehe Bild XII-2).

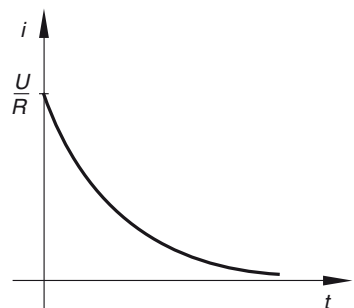
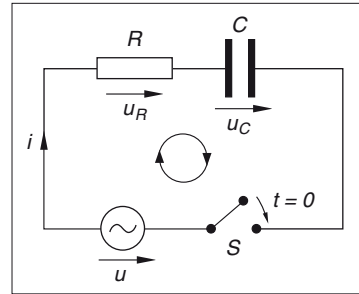


Bild XII-2

Beispiel 2: RC-Wechselstromkreis***Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung******(Ableitungssatz für Originalfunktionen, Faltungssatz)***

An eine *Reihenschaltung* aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine *sinusförmige* Wechselspannung mit der Gleichung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ angelegt (Bild XII-3). Bestimmen Sie mit Hilfe der *Laplace-Transformation* den *zeitlichen* Verlauf der *Kondensatorspannung* u_C , wenn der Kondensator im Einschaltaugenblick $t = 0$ *energieelos*, d. h. *un geladen* ist.

\hat{u} : Scheitelwert der Spannung; ω : Kreisfrequenz

**Bild XII-3**

Lösungshinweis: Leiten Sie zunächst aus der *Maschenregel* [A32] die Dgl für die Kondensatorspannung u_C her und lösen Sie diese dann mit Hilfe der *Laplace-Transformation* unter Verwendung des *Faltungssatzes*.

Anmerkung: Diese Aufgabe wird in Kapitel IX, Beispiel 6 mit der *klassischen* Methode „Aufsuchen einer partikulären Lösung“ gelöst.

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1, VI.2.7 und VI.5.1.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40

Lösung:

Nach der *Maschenregel* [A32] gilt

$$u_R + u_C - u = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_C = u$$

Ferner ist nach dem *ohmschen Gesetz* [A14] $u_R = Ri$, wobei die Stromstärke i mit der Kondensatorladung q und der Kondensatorspannung u_C noch wie folgt verknüpft ist:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C\dot{u}_C$$

($q = Cu_C$ [A40]). Somit gilt

$$u_R = Ri = RC\dot{u}_C = \tau\dot{u}_C \quad (\tau = RC: \text{Zeitkonstante})$$

Die Maschengleichung geht dabei unter Berücksichtigung von $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ in die folgende *inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* über:

$$\tau\dot{u}_C + u_C = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{oder} \quad \dot{u}_C + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \sin(\omega t)$$

Zu Beginn, d. h. zur Zeit $t = 0$ ist der Kondensator *ungeladen*: $u_C(0) = 0$. Wir lösen dieses *Anfangswertproblem* schrittweise wie folgt.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} = U_C(s)$$

$$\begin{aligned} [s \cdot U_C(s) - 0] + \frac{1}{\tau} \cdot U_C(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \sin(\omega t)\right\} = \\ &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(Laplace-Transformation Nr. 24 mit $a = \omega$)

(2) Lösung im Bildbereich

Die algebraische Gleichung wird nach der *Bildfunktion* $U_C(s)$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{1}{\tau}\right) \cdot U_C(s) &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \\ U_C(s) &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \underbrace{\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right)}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right)}_{F_2(s)} = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot F_1(s) \cdot F_2(s) \end{aligned}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Es ist

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{u}}{\tau} \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)\right\} = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$$

Nach dem *Faltungssatz* gilt weiter

$$u_C(t) = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot (f_1(t) * f_2(t)) = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx$$

wobei $f_1(t)$ und $f_2(t)$ die zunächst noch unbekannten *Originalfunktionen* der beiden *Bildfunktionen* $F_1(s)$ und $F_2(s)$ bedeuten. Diese aber lassen sich anhand der *Laplace-Transformationstabelle* leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = \\ &= \omega \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = \sin(\omega t) \quad (\text{Nr. 24 mit } a = \omega) \end{aligned}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right\} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = -1/\tau)$$

Für die gesuchte *Originalfunktion* $u_C(t)$ erhalten wir damit die *Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot (f_1(t) * f_2(t)) = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx = \\ &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \int_0^t \sin(\omega x) \cdot e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \int_0^t \sin(\omega x) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{x}{\tau}} dx = \\ &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int_0^t e^{\frac{x}{\tau}} \cdot \sin(\omega x) dx \end{aligned}$$

(sog. *Faltungsintegral*). Die Auswertung des Integrals soll hier mit der *Integraltafel der Formelsammlung* erfolgen. Das Integral ist dabei vom Integraltyp Nr. 322:

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)]$$

Mit $a = 1/\tau$ und $b = \omega$ folgt hieraus für das *Faltungsintegral* (ohne den Faktor vor dem Integral):

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{x}{\tau}} \cdot \sin(\omega x) dx &= \left[\frac{e^{\frac{x}{\tau}}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega x) - \omega \cdot \cos(\omega x) \right) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left[e^{\frac{x}{\tau}} \cdot \frac{\sin(\omega x) - \omega \tau \cdot \cos(\omega x)}{\tau} \right]_0^t = \\ &= \frac{\tau^2}{1 + (\omega \tau)^2} \left[e^{\frac{x}{\tau}} [\sin(\omega x) - \omega \tau \cdot \cos(\omega x)] \right]_0^t = \\ &= \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[e^{\frac{t}{\tau}} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] - 1(0 - \omega \tau \cdot 1) \right] = \\ &= \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[e^{\frac{t}{\tau}} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] + \omega \tau \right] \end{aligned}$$

Für die *Kondensatorspannung* erhalten wir damit die für $t \geq 0$ gültige *Zeitabhängigkeit*

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int_0^t e^{\frac{x}{\tau}} \cdot \sin(\omega x) dx = \\ &= \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[e^{\frac{t}{\tau}} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] + \omega \tau \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left[e^{\frac{t}{\tau}} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] + \omega \tau \right] = \\
 &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \left[\underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}}_{e^0 = 1} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)] \right] + \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \underbrace{[\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t)]}_{A \cdot \sin(\omega t - \varphi)} + \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}$$

Wie in Kapitel IX, Beispiel 6 bereits gezeigt wurde, lässt sich der *trigonometrische* Ausdruck, der eine Überlagerung *frequenzgleicher* Sinus- und Kosinusschwingungen darstellt, in die folgende *phasenverschobene Sinusschwingung gleicher Frequenz* umformen:

$$\sin(\omega t) - \omega \tau \cdot \cos(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

Somit liegt am Kondensator die *Spannung*

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{\hat{u}}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau)) + \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau)) + \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Sie enthält einen *exponentiell* rasch gegen null abklingenden „*flüchtigen*“ Anteil (2. Summand, streng monoton fallende Exponentialfunktion), der nach einer kurzen „Einschwingphase“ praktisch *keine* Rolle mehr spielt (siehe Bild XII-4) und einen „*stationären*“ Anteil (1. Summand), der eine *sinusförmige* Wechselspannung mit dem *Scheitelwert*

$\hat{u}_0 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$ und dem *Nullphasenwinkel* $\varphi = \arctan(\omega \tau)$ beschreibt, wobei die

Frequenz die der angelegten Wechselspannung ist (Bild XII-5).

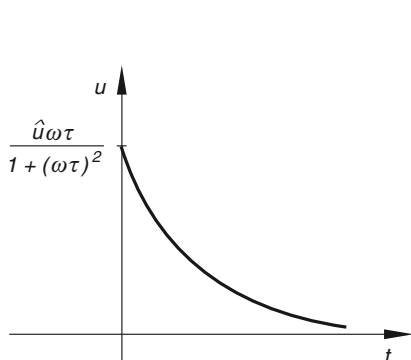


Bild XII-4 „Flüchtiger Anteil“

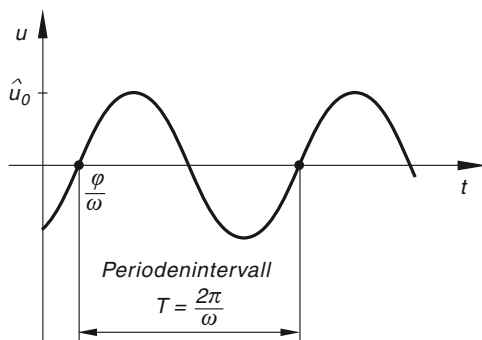


Bild XII-5 „Stationärer Anteil“

Beispiel 3: RL-Schaltkreis mit Rampenspannung
Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen)

An eine Spule mit dem ohmschen Widerstand R und der Induktivität L wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine mit der Zeit t linear ansteigende Spannung mit der Gleichung

$$u(t) = kt, \quad t \geq 0 \quad (k > 0)$$

angelegt (Bild XII-6). Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation den zeitlichen Verlauf der Stromstärke i im Zeitintervall $t \geq 0$, wenn der Stromkreis zu Beginn, d. h. zur Zeit $t = 0$ stromlos ist.

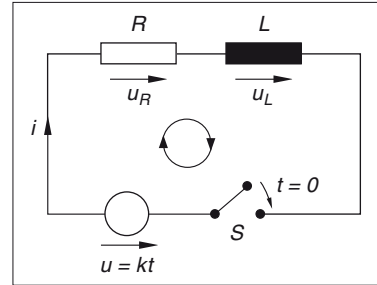


Bild XII-6

Lösungshinweis: Die Anwendung der Maschenregel [A32] auf den RL -Schaltkreis führt auf eine Dgl für die Stromstärke i , die sich mit Hilfe der Laplace-Transformation lösen lässt.

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A45

Lösung :

Für $t \geq 0$ gilt nach der Maschenregel [A32]

$$u_R + u_L - u = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_L = u$$

Dabei ist $u = kt$ und ferner nach dem ohmschen Gesetz [A14] $u_R = Ri$ und nach dem Induktionsgesetz [A45] $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Die Maschengleichung führt dann zu der folgenden inhomogenen linearen Dgl 1. Ordnung:

$$Ri + L \cdot \frac{di}{dt} = kt \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{k}{L}t$$

Wir führen noch die Zeitkonstante $\tau = L/R$ ein. Das Anfangswertproblem lautet dann

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i = \frac{k}{L} \cdot t, \quad \text{Anfangswert: } i(0) = 0$$

und wird schrittweise wie folgt gelöst.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$$

$$\left[s \cdot I(s) - 0 \right] + \frac{1}{\tau} \cdot I(s) = \mathcal{L}\left\{ \frac{k}{L} \cdot t \right\} = \frac{k}{L} \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{k}{L} \cdot \frac{1}{s^2} \quad (\text{Nr. 4})$$

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen die algebraische Gleichung nach der *Bildfunktion* $I(s)$ auf:

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) \cdot I(s) = \frac{k}{L} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{k}{L} \cdot \frac{1}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Die *Bildfunktion* ist vom *allgemeinen* Typ $F(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$. Aus der *Laplace-Transformationstabelle* entnehmen wir (Nr. 11 mit $a = -1/\tau$):

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{L} \cdot \frac{1}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \frac{k}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \\ &= \frac{k}{L} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1}{\frac{1}{\tau^2}} = \frac{k\tau^2}{L} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1\right) = \frac{k\tau^2}{L} \cdot \frac{\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + t - \tau}{\tau} = \\ &= \frac{k\tau}{L} \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Der zeitliche Verlauf der *Stromstärke* i ist in Bild XII-7 wiedergegeben. Für *große* t -Werte, d. h. für $t \gg \tau$ ist der Stromverlauf *nahezu linear*:

$$i(t) \approx \frac{k\tau}{L} (t - \tau), \quad t \gg \tau$$

Begründung: Die Exponentialfunktion $e^{-\frac{t}{\tau}}$ ist wegen $\tau > 0$ für große t -Werte vernachlässigbar klein und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen null.

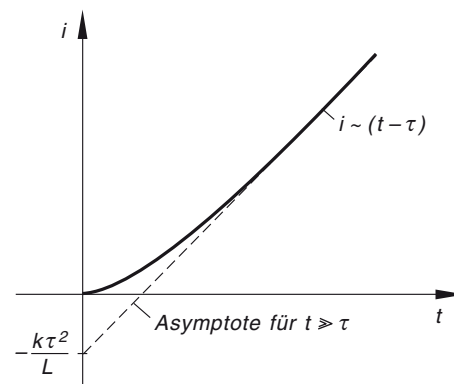


Bild XII-7

Beispiel 4: RC-Schaltkreis mit einem rechteckigen Spannungsimpuls
Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen, 1. Verschiebungssatz)

An eine *Reihenschaltung* aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S ein *rechteckiger Spannungsimpuls* mit der Gleichung

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{für } t > a \end{cases} \quad (a > 0)$$

angelegt (Bild XII-8). Bestimmen Sie mit Hilfe der *Laplace-Transformation* unter Verwendung des 1. *Verschiebungssatzes* den *zeitlichen Verlauf* der *Kondensatorspannung* u_C .

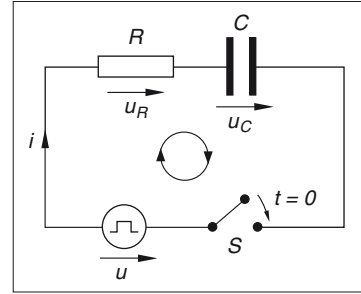


Bild XII-8

Lösungshinweis: Die *Dgl* für die Kondensatorspannung u_C erhalten Sie mit Hilfe der *Maschenregel* [A32].

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.3.1, VI.2.5.1 und VI.5.1.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40

Lösung:

Nach der *Maschenregel* [A32] ist

$$u_R + u_C - u = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_C = u$$

Für den im Schaltkreis fließenden *Strom* der Stärke i gilt unter Berücksichtigung der Kondensatorladung $q = Cu_C$ [A40]:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C\dot{u}_C$$

Nach dem *ohmschen Gesetz* [A14] beträgt die am ohmschen Widerstand R abfallende Spannung

$$u_R = Ri = RC\dot{u}_C = \tau\dot{u}_C$$

($\tau = RC$: *Zeitkonstante*). Die *Maschengleichung* geht damit über in

$$\tau\dot{u}_C + u_C = u \quad \text{oder} \quad \dot{u}_C + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \frac{u}{\tau}$$

Dies ist eine *inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* mit der Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$ (der Kondensator ist zu diesem Zeitpunkt ungeladen). Den von außen angelegten *Rechteckimpuls* nach Bild XII-9a) können wir auch als *Differenz zweier zeitlich versetzter Sprungimpulse* auffassen (Bild XII-9b)):

$$u = u(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

$$\text{mit } u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ U_0 & t \geq a \end{cases}$$

oder unter Verwendung der *Sprungfunktion* (Sigmafunktion)

$$u_1(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad \text{und} \quad u_2(t) = U_0 \cdot \sigma(t - a)$$

(*Sprungstellen* bei $t = 0$ bzw. $t = a$, siehe Bild XII-9b)).

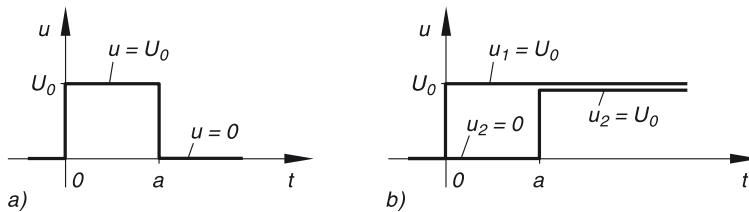


Bild XII-9 Rechteckimpuls als Differenz zweier zeitlich versetzter Sprungimpulse

Die Lösung dieser *Anfangswertaufgabe* erfolgt in drei Schritten.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} = U_C(s)$$

$$\left[s \cdot U_C(s) - 0\right] + \frac{1}{\tau} \cdot U_C(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{u(t)}{\tau}\right\} = \frac{1}{\tau} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \mathcal{L}\{u_1(t) - u_2(t)\} = \mathcal{L}\{u_1(t)\} - \mathcal{L}\{u_2(t)\} = \\ &= \mathcal{L}\{U_0 \cdot \sigma(t)\} - \mathcal{L}\{U_0 \cdot \sigma(t - a)\} = U_0 \cdot \mathcal{L}\{\sigma(t)\} - U_0 \cdot \mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} = \\ &= U_0 \cdot \frac{1}{s} - U_0 \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-as} = U_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}\right) = U_0 \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

(Laplace-Transformation Nr. 2 in Verbindung mit dem 1. Verschiebungssatz, Verschiebung auf der Zeitachse um a nach rechts). Somit gilt

$$\left[s \cdot U_C(s) - 0\right] + \frac{1}{\tau} \cdot U_C(s) = \frac{1}{\tau} \cdot U_0 \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s} = \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s}$$

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen die algebraische Gleichung nach der *Bildfunktion* $U_C(s)$ auf:

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) \cdot U_C(s) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s} \quad \Rightarrow \quad U_C(s) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-as}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \\
 &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} - \frac{e^{-as}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \\
 &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}}_{F(s)}\right\} - \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{e^{-as}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}}_{e^{-as} \cdot F(s)}\right\} = \\
 &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} - \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \cdot F(s)\}
 \end{aligned}$$

Die Originalfunktion $f(t)$ zur Bildfunktion $F(s)$ entnehmen wir der *Laplace-Transformationstabelle* (Nr. 5 mit $a = -1/\tau$):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} - 1}{-\frac{1}{\tau}} = \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Nach dem 1. Verschiebungssatz ist dann

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \cdot F(s)\} = f(t - a)$$

Somit erhalten wir bei der Rücktransformation des zweiten Summanden eine um a nach rechts verschobene Funktion:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \cdot F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \tau\left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}}\right), \quad t \geq a$$

Die gesuchte Kondensatorsspannung $u_C(t)$ entsteht somit durch Überlagerung zweier zeitlich versetzter Teilspannungen $u_{C1}(t)$ und $u_{C2}(t)$, deren Gleichungen wie folgt lauten:

$$u_{C1}(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{U_0}{\tau} \cdot \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

$$u_{C2}(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \cdot F(s)\} = \frac{U_0}{\tau} \cdot \tau\left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}}\right) =$$

$$= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}} \right), \quad t \geq a$$

Mit Hilfe der Sprungfunktion lassen sich die Teilspannungen auch wie folgt beschreiben:

$$u_{C1}(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \sigma(t)$$

$$u_{C2}(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}} \right) \cdot \sigma(t-a)$$

Bild XII-10 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser Teilspannungen.

Die Gesamtlösung lautet somit:

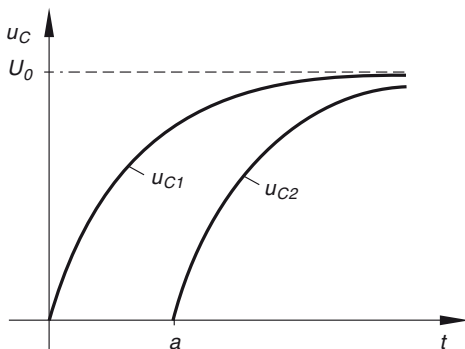


Bild XII-10

Im Zeitintervall $0 \leq t \leq a$ liefert nur $u_{C1}(t)$ einen Beitrag:

$$u_C(t) = u_{C1}(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad 0 \leq t \leq a$$

Vom Zeitpunkt $t = a$ an gilt dagegen

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{C1}(t) - u_{C2}(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - U_0 \left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}} \right) = \\ &= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 + e^{-\frac{t-a}{\tau}} \right) = U_0 \left(e^{-\frac{t-a}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= U_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{a}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = U_0 \left(e^{\frac{a}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq a \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir den folgenden Spannungsverlauf am Kondensator:

$$u_C(t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & 0 \leq t \leq a \\ U_0 \left(e^{\frac{a}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq a \end{cases} \quad \text{für}$$

Bild XII-11 zeigt den zeitlichen Spannungsverlauf am Kondensator. Die Spannung *steigt* zunächst nach einer Sättigungsfunktion bis zum Maximalwert

$$u_C(a) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{a}{\tau}}\right)$$

im Zeitpunkt $t = a$ an und fällt anschließend im Laufe der Zeit *exponentiell* gegen null ab.

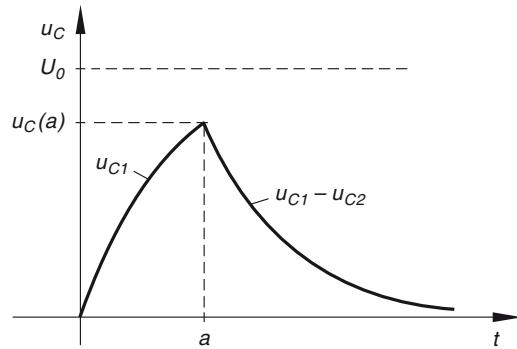


Bild XII-11

Beispiel 5: Rohrzuckerinversion

Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Ableitungssatz für Originalfunktionen)

Die *Inversion* des Rohrzuckers liefert ein wichtiges Beispiel für eine chemische Reaktion *1. Ordnung*. Sie wird durch die folgende *inhomogene* lineare Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben:

$$\dot{x} = k(a - x) \quad \text{oder} \quad \dot{x} + kx = ka$$

Dabei bedeuten:

a : Anzahl der Rohrzuckermoleküle zu Beginn der chemischen Reaktion (Zeitpunkt $t = 0$)

$x = x(t)$: Umsatzvariable (Anzahl der invertierten Moleküle pro Zeiteinheit) zur Zeit t

$k > 0$: Geschwindigkeitskonstante der chemischen Reaktion

Somit ist $a - x$ die Anzahl der Rohrzuckermoleküle zur Zeit t . Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Umsatzvariablen* x unter Verwendung der *Laplace-Transformation*.

Hinweis: Bei der Herleitung dieser Dgl geht man davon aus, dass die Anzahl dx der im Zeitintervall dt invertierenden Rohrzuckermoleküle sowohl der augenblicklichen Anzahl $a - x$ als auch dem Zeitintervall dt direkt *proportional* ist:

$$dx \sim (a - x) dt \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x} \sim (a - x)$$

Durch Einführen des *Proportionalitätsfaktors* $k > 0$ entsteht aus dieser Proportion die obige Dgl.

Lösung :

Zu Beginn der chemischen Reaktion, d. h. zur Zeit $t = 0$ hat noch *kein* Umsatz stattgefunden. Somit gilt $x(0) = 0$. Wir lösen das vorliegende *Anfangswertproblem* schrittweise wie folgt.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$[s \cdot X(s) - 0] + k \cdot X(s) = \mathcal{L}\{ka\} = ka \cdot \mathcal{L}\{1\} = ka \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{Nr. 2})$$

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen die Gleichung nach der *Bildfunktion* $X(s)$ auf:

$$(s + k) \cdot X(s) = ka \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow X(s) = ka \cdot \frac{1}{s(s + k)}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ka \cdot \frac{1}{s(s + k)}\right\} = ka \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + k)}\right\} = \\ &= ka \cdot \frac{e^{-kt} - 1}{-k} = -a(e^{-kt} - 1) \end{aligned}$$

(Laplace-Transformation Nr. 5 mit $a = -k$)

Die *Umsatzvariable* x hängt damit wie folgt von der Zeit t ab:

$$x(t) = -a(e^{-kt} - 1) = a(1 - e^{-kt}), \quad t \geq 0$$

Nach (theoretisch) unendlich langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) ist die Rohrzuckerinversion *abgeschlossen*. Der Umsatz beträgt dann erwartungsgemäß (alle Rohrzuckermoleküle wurden umgewandelt):

$$x(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(1 - e^{-kt}) = a(1 - 0) = a$$

Bild XII-12 zeigt den Verlauf dieser „Sättigungsfunktion“.

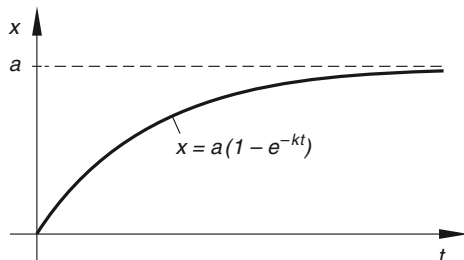


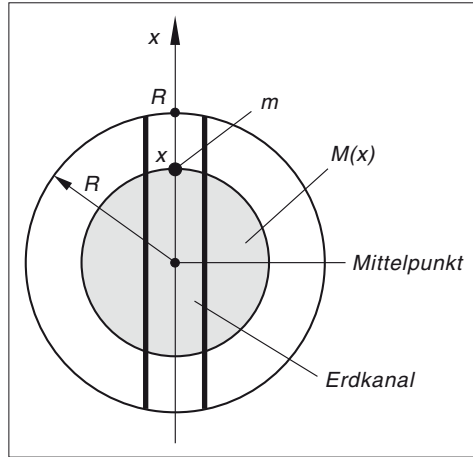
Bild XII-12

Beispiel 6: Bewegung einer Masse im Erdkanal

*Homogene lineare Dgl 2. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen)*

Bild XII-13 zeigt die Erdkugel mit einem durch den Erdmittelpunkt verlaufenden Kanal. Zur Zeit $t = 0$ wird aus der Ruhe heraus eine Punktmasse m von der Erdoberfläche aus in den Erdkanal fallengelassen. Die augenblickliche Position dieser Masse lässt sich durch die eingezeichnete Koordinate $x = x(t)$ beschreiben (Abstand der Punktmasse vom Erdmittelpunkt, nach oben hin positiv gerechnet).

- Wie lautet die Dgl dieser Bewegung?
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Weg-Zeit-Gesetz $x = x(t)$ der Bewegung.

**Bild XII-13**

R : Erdradius; ϱ : konstant angenommene Dichte der Erdkugel; γ : Gravitationskonstante

Lösungshinweis: Reibungskräfte sollen unberücksichtigt bleiben. Für die Bewegung der Punktmasse ist *ausschließlich* die Gravitationskraft verantwortlich [A18]. Die Anziehung der Punktmasse in der durch die Koordinate x eindeutig beschriebenen Position erfolgt dabei durch die Masse $M(x)$ der „reduzierten“ Erdkugel vom Radius $r = |x|$, in Bild XII-13 grau unterlegt! Diese Masse nimmt zunächst *ab* und dann nach dem Erreichen des Erdmittelpunktes wieder *zu*. Bestimmen Sie zunächst die Abhängigkeit der „reduzierten“ Erdmasse $M(x)$ von der Lagekoordinate x .

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.3

Physikalische Grundlagen: A18, A27

Lösung:

- Zunächst bestimmen wir die reduzierte Erdmasse $M(x) = \varrho \cdot V(x)$, wobei ϱ die konstante Dichte der Erdkugel und $V(x)$ das von der Koordinate x abhängende Volumen der „reduzierten“ Erdkugel mit dem Radius $r = |x|$ bedeuten:

$$M(x) = \varrho \cdot V(x) = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi |x|^3 = \frac{4}{3} \pi \varrho |x|^3$$

Die Punktmasse m erfährt dann nach dem *Gravitationsgesetz von Newton* [A18] die folgende *Anziehungskraft* (der Schwerpunkt der „reduzierten“ Erdmasse liegt im Erdmittelpunkt):

$$F = F(x) = \gamma \cdot \frac{m \cdot M(x)}{|x|^2} = \gamma \cdot \frac{m \cdot \frac{4}{3} \pi \varrho |x|^3}{|x|^2} = \frac{4}{3} \pi \gamma \varrho m \cdot |x|$$

(mit $|x| \leq R$)

Die Kraft $F(x)$ ist also *betragsmäßig dem Abstand $|x|$ direkt proportional*. Sie ist stets auf den Mittelpunkt der Erde gerichtet. Die *Richtung* der Kraft wird üblicherweise durch ein *Vorzeichen* geregelt. Für $x > 0$ dürfen wir $|x|$ durch x ersetzen, die Kraft ist aber der positiven Zählrichtung *entgegengerichtet* und muss daher ein *negatives* Vorzeichen tragen. Diese Regelung gilt auch für $x < 0$. Damit erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen der *Gravitationskraft $F(x)$* und der *Lagekoordinate x* :

$$F(x) = -\frac{4}{3} \pi \gamma \varrho m \cdot x, \quad -R \leq x \leq R$$

Kontrolle (siehe hierzu Bild XII-14):

$x > 0 \Rightarrow F(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ ist nach *unten* gerichtet (Bild XII-14a))

$x < 0 \Rightarrow F(x) > 0 \Rightarrow F(x)$ ist nach *oben* gerichtet (Bild XII-14b))

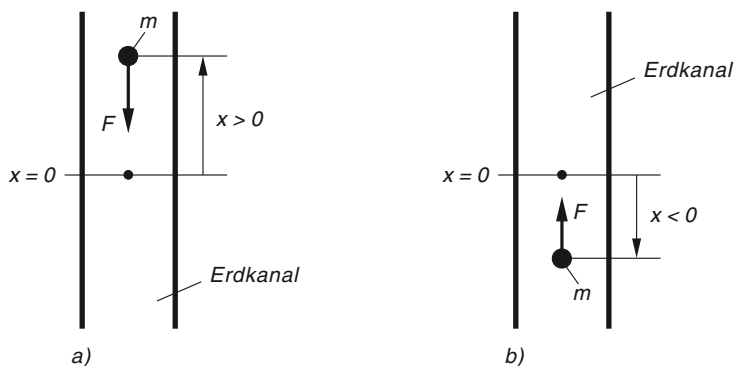


Bild XII-14

Aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] erhalten wir dann die folgende *Dgl* für die Bewegung der Punktmasse im Erdkanal:

$$ma = F(x) \quad \text{oder} \quad m\ddot{x} = -\frac{4}{3} \pi \gamma \varrho m \cdot x \quad (\text{mit } a = \ddot{x})$$

Wir dividieren die Gleichung noch durch m und stellen geringfügig um:

$$\ddot{x} + \frac{4}{3} \pi \gamma \varrho \cdot x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\text{mit } \omega^2 = \frac{4}{3} \pi \gamma \varrho \right)$$

- b) Wir lösen diese *homogene* lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der *Laplace-Transformation* für die *Anfangswerte* $x(0) = R$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ schrittweise wie folgt.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$[s^2 \cdot X(s) - s \cdot R - 0] + \omega^2 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

(2) Lösung im Bildbereich

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot R + \omega^2 \cdot X(s) = 0 \Rightarrow (s^2 + \omega^2) \cdot X(s) = R \cdot s \Rightarrow$$

$$X(s) = R \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{R \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = R \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = \\ &= R \cdot \cos(\omega t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Die Rücktransformation erfolgte dabei mit Hilfe der *Laplace-Transformationstabelle* der Formelsammlung (Nr. 25 mit $a = \omega$).

Physikalische Interpretation: Die Punktmasse führt eine harmonische Schwingung aus mit der Amplitude $A = R$ und der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}} \pi \gamma Q$.

Beispiel 7: Schwingung eines rotierenden Federpendels

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen)

Ein zylindrisches *Hohlrohr* rotiert mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit ω_0 in einer *horizontalen* Ebene. In dem Rohr befindet sich ein *Federpendel* mit der Masse m und der Federkonstanten c (siehe Bild XII-15). Die Länge der Feder im *entspannten* Zustand ist l . Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt das Federpendel die Auslenkung x_0 und ist *relativ* zum Rohr in Ruhe.

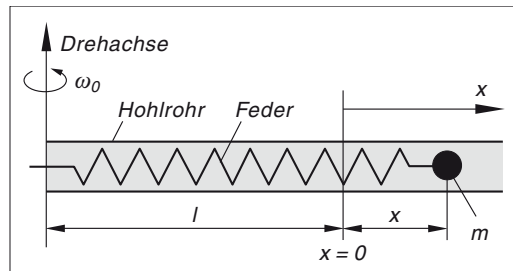


Bild XII-15

Nach welchem *Weg-Zeit-Gesetz* $x = x(t)$ erfolgt die *Schwingung* des rotierenden Federpendels bei *Vernachlässigung* der Federmasse und der Reibungskräfte?

Lösungshinweis: Die Dgl der Schwingung erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27]. Dieses Beispiel wurde bereits in Kapitel IX behandelt (Beispiel 14) und dort nach der „klassischen Methode“ durch *Aufsuchen einer partikulären Lösung* der Schwingungsgleichung gelöst.

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.3

Physikalische Grundlagen: A15, A27

Lösung:

Die Dgl dieser Schwingung wurde bereits in Kapitel IX, Beispiel 14 hergeleitet. Sie lautet:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega_0^2 l \quad \left(\text{mit } \omega^2 = \frac{c - m\omega_0^2}{m} > 0 \text{ vorausgesetzt} \right)$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } x(0) = x_0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Wir lösen dieses *Anfangswertproblem* in drei Schritten.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$[s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - 0] + \omega^2 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{\omega_0^2 l\} = \omega_0^2 l \cdot \mathcal{L}\{1\} = \omega_0^2 l \cdot \frac{1}{s}$$

(Laplace-Transformation Nr. 2)

(2) Lösung im Bildbereich

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 + \omega^2 \cdot X(s) = (s^2 + \omega^2) \cdot X(s) - s \cdot x_0 = \omega_0^2 l \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$(s^2 + \omega^2) \cdot X(s) = x_0 \cdot s + \omega_0^2 l \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \omega_0^2 l \cdot \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{x_0 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \omega_0^2 l \cdot \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\} =$$

$$= x_0 \cdot \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\}}_{F_1(s)} + \omega_0^2 l \cdot \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\}}_{F_2(s)} =$$

$$= x_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \omega_0^2 l \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Für die beiden Bildfunktionen $F_1(s)$ und $F_2(s)$ entnehmen wir der *Laplace-Transformationstabelle* der Formelsammlung folgende Originalfunktionen:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = \cos(\omega t) \quad (\text{Nr. 25 mit } a = \omega)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\} = \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \quad (\text{Nr. 36 mit } a = \omega)$$

Die Schwingung des rotierenden Federpendel wird somit durch das folgende *Weg-Zeit-Gesetz* beschrieben ($t \geq 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \omega_0^2 l \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega t) + \omega_0^2 l \cdot \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} = \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) = \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} \cdot \cos(\omega t) = \left(x_0 - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2}\right) \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $K = \omega_0^2 l / \omega^2$ lässt sich diese Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$x(t) = \underbrace{(x_0 - K)}_A \cdot \cos(\omega t) + K = A \cdot \cos(\omega t) + K, \quad t \geq 0$$

Es handelt sich also um eine *harmonische* Kosinusschwingung, der sich eine *konstante* Auslenkung (Summand K) überlagert. Kreisfrequenz ω , Schwingungsdauer T , Amplitude $A = x_0 - K$ und die Konstante K hängen dabei noch wie folgt von den bekannten Größen c , m , l , ω_0 und x_0 ab:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{c - m\omega_0^2}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c - m\omega_0^2}}, \\ K &= \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 l}{\frac{c - m\omega_0^2}{m}} = \frac{ml\omega_0^2}{c - m\omega_0^2}, \quad A = x_0 - K = x_0 - \frac{ml\omega_0^2}{c - m\omega_0^2} \end{aligned}$$

Bild XII-16 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser harmonischen Schwingung.

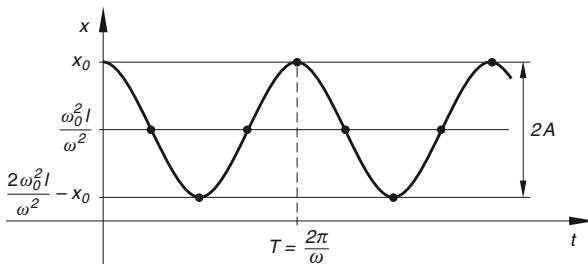


Bild XII-16

Beispiel 8: Erzwungene mechanische Schwingung im Resonanzfall
Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen)

Ein *ungedämpftes schwingungsfähiges mechanisches System* mit der *Eigenkreisfrequenz* ω_0 wird durch eine *äußere periodische Kraft* mit *derselben Kreisfrequenz* ω_0 zu *erzwungenen Schwingungen* angeregt (*Resonanzfall*). Lösen Sie die *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

für die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ mit Hilfe der *Laplace-Transformation*. Dabei sind $x = x(t)$ und $v = v(t)$ Lagekoordinate und Geschwindigkeit der schwingenden Masse zur Zeit t ¹⁾.

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.3

Lösung :

Die Lösung dieses *Anfangswertproblems* erfolgt in drei Schritten.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= X(s) \\ [s^2 \cdot X(s) - s \cdot 0 - 0] + \omega_0^2 \cdot X(s) &= \mathcal{L}\{a_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \\ &= a_0 \cdot \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = a_0 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

(Laplace-Transformation Nr. 25 mit $a = \omega_0$)

(2) Lösung im Bildbereich

Die algebraische Gleichung wird nach der *Bildfunktion* $X(s)$ aufgelöst:

$$\begin{aligned}s^2 \cdot X(s) + \omega_0^2 \cdot X(s) &= (s^2 + \omega_0^2) \cdot X(s) = a_0 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \\ X(s) &= a_0 \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\end{aligned}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Die *Bildfunktion* ist vom *allgemeinen* Typ $F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$ (Laplace-Transformation Nr. 38). Wir erhalten daher mit $a = \omega_0$ die folgende *Originalfunktion*:

¹⁾ Die erregende Kraft ist $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$. Sie erzeugt eine *maximale* Beschleunigung von $a_0 = F_0/m$, wobei m die schwingende Masse bedeutet.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{a_0 \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\right\} = a_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\right\} = \\
 &= a_0 \cdot \frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} = \frac{a_0}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Der zeitliche Verlauf dieser *Schwingung* ist in Bild XII-17 dargestellt. Die „Schwingungsamplitude“ $A = \frac{a_0}{2\omega_0} \cdot t$ vergrößert sich dabei *proportional* mit der Zeit t . Das schwingende System wird somit allmählich *zerstört*, es kommt zur sog. *Resonanzkatastrophe*.

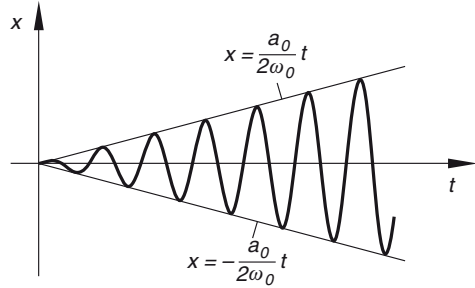


Bild XII-17

Beispiel 9: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen)

Bild XII-18 zeigt ein *schwingungsfähiges mechanisches System*, bestehend aus zwei *gleichen*, mit einer Fundamentplatte fest verbundenen elastischen Federn und einer Masse m . Die Verbindung der Federn mit der Masse erfolgt dabei über ein biegsames, jedoch nicht dehnbares Seil, das über eine Zylinderscheibe gespannt ist. Die Fundamentplatte führt in *vertikaler* Richtung eine *periodische* Bewegung nach der Gleichung

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega t), \quad t \geq 0 \quad (y_0 > 0)$$

aus und erregt das System zu *erzwungenen* Schwingungen.

- Wie lautet die *Dgl* dieser Schwingung?
- Bestimmen Sie die *Lösung* der Schwingungsgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 0$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ mit Hilfe der *Laplace-Transformation*.

$y(t)$: Lagekoordinate der schwingenden Fundamentplatte zur Zeit t

ω : Kreisfrequenz der Schwingung

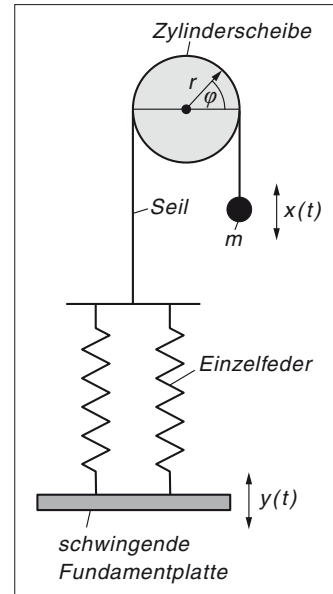


Bild XII-18

$x(t)$: Lagekoordinate der Masse zur Zeit t ; c : Federkonstante der beiden *Einzelfedern*;
 r : Radius der Zylinderscheibe; J_S : Massenträgheitsmoment der Zylinderscheibe;
 $\varphi(t)$: Drehwinkel der Zylinderscheibe zur Zeit t

Lösungshinweis: Ersetzen Sie zunächst das Federsystem durch eine *Ersatzfeder* [A26]. Die *Rückstellkraft* des Federsystems bzw. der Ersatzfeder erzeugt ein *Rückstellmoment* M_R , das der augenblicklichen *relativen* Auslenkung der beiden Federn *proportional* ist. *Reibungskräfte* sollen *unberücksichtigt* bleiben, der *Resonanzfall* wird *ausgeschlossen*. Die Dgl der erzwungenen Schwingung erhalten Sie dann aus dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36].

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.3

Physikalische Grundlagen: A7, A26, A36

Lösung:

- a) Die beiden *parallelgeschalteten* Federn können durch *eine* Feder mit der *doppelten* Federkonstanten $c^* = 2c$ ersetzt werden [A26]. Die Ortskoordinate der *Masse* m zur Zeit t bezeichnen wir mit x (gemessen gegenüber der Gleichgewichtslage). Zu dieser Zeit hat die *Fundamentplatte* die Ortskoordinate y , sodass die Ersatzfeder um die Strecke $x - y$ *gedehnt* bzw. *gestaucht* ist. Die elastische *Rückstellkraft* der Feder ist somit nach dem Hookeschen Gesetz $F_R = -c^*(x - y) = -2c(x - y)$. Sie erzeugt am Hebelarm r das *Rückstellmoment* [A7]

$$M_R = rF_R = -2rc(x - y) = -2rcx + 2rcy = -2rcx + 2rcy_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Nach dem *Grundgesetz der Drehbewegung* [A36] gilt dann

$$J\alpha = J\ddot{\varphi} = M_R = -2rcx + 2rcy_0 \cdot \sin(\omega t)$$

($\alpha = \ddot{\varphi}$: Winkelbeschleunigung). Das Massenträgheitsmoment J des Systems setzt sich dabei additiv aus dem Massenträgheitsmoment J_S der Scheibe und dem Massenträgheitsmoment $J_m = mr^2$ der Masse m zusammen:

$$J = J_S + J_m = J_S + mr^2$$

Für die Umfangsgeschwindigkeit v der Scheibe gilt die Beziehung $v = \dot{x} = r\dot{\varphi}$, woraus durch *Differentiation*

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

folgt. Die Bewegung der Masse wird daher durch die folgende *Schwingungsgleichung* beschrieben:

$$J\ddot{\varphi} = (J_S + mr^2) \frac{\ddot{x}}{r} = -2rcx + 2rcy_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Wir dividieren noch durch r und stellen die Gleichung geringfügig um:

$$(J_S + mr^2) \frac{\ddot{x}}{r^2} + 2cx = \underbrace{\left(\frac{J_S}{r^2} + m \right)}_{m^*} \ddot{x} + 2cx = 2cy_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$m^* \ddot{x} + 2c x = 2c y_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \frac{2c}{m^*} x = \frac{2c y_0}{m^*} \cdot \sin(\omega t)$$

m^* ist dabei die sog. *reduzierte* Masse. Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{2c}{m^*} \quad \text{und} \quad k = \frac{2c y_0}{m^*}$$

lässt sich diese *inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* auch wie folgt schreiben:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = k \cdot \sin(\omega t)$$

b) Das *Anfangswertproblem*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = k \cdot \sin(\omega t), \quad \text{Anfangswerte: } x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

wird schrittweise wie folgt gelöst.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$\begin{aligned} [s^2 \cdot X(s) - s \cdot 0 - 0] + \omega_0^2 \cdot X(s) &= \mathcal{L}\{k \cdot \sin(\omega t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \\ &= k \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = k \omega \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{Nr. 24 mit } a = \omega) \end{aligned}$$

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen die Gleichung nach der *Bildfunktion* $X(s)$ auf:

$$\begin{aligned} s^2 \cdot X(s) + \omega_0^2 \cdot X(s) &= (s^2 + \omega_0^2) \cdot X(s) = k \omega \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \\ X(s) &= k \omega \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{k \omega \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}\right\} = \\ &= k \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}\right\} \end{aligned}$$

Die *Bildfunktion* ist vom allgemeinen Typ $F(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$. Aus der *Laplace-Transformationstabelle* entnehmen wir die folgende Lösung (Nr. 43 mit $a = \omega_0$ und $b = \omega$):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= k \omega \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right\} = k \omega \cdot \frac{\omega_0 \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0 \omega (\omega_0^2 - \omega^2)} = \\
 &= \frac{k}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\omega_0 \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega_0 t) \right), \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Die *erzwungene* Schwingung der Masse m beschreibt somit eine *Überlagerung* zweier *Sinusschwingungen* mit den Kreisfrequenzen ω_0 (*Eigenkreisfrequenz* des Systems) und ω (*Kreisfrequenz des Erregers*, d. h. der schwingenden Fundamentplatte; $\omega \neq \omega_0$).

Beispiel 10: Elektromagnetischer Reihenschwingkreis

Integro-Differentialgleichung

(Ableitungs- und Integrationssatz für Originalfunktionen)

Der in Bild XII-19 dargestellte *elektromagnetische Reihenschwingkreis* enthält eine Spule mit der Induktivität L und dem ohmschen Widerstand R sowie einen Kondensator mit der Kapazität C .

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Laplace-Transformation* unter Verwendung des *Ableitungs-* und des *Integrationssatzes für Originalfunktionen* den zeitlichen Verlauf der *Stromstärke* i unter der Voraussetzung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Schließen des Schalters S eine *konstante* Spannung U_0 angelegt wird und der Reihenschwingkreis in diesem Augenblick *energielos* ist.

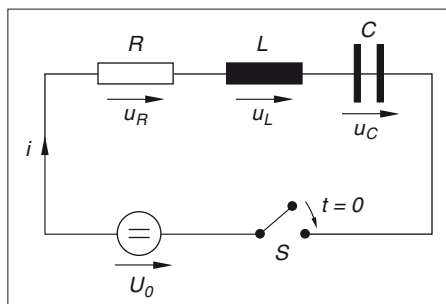


Bild XII-19

Lösungshinweis: Die Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf den Reihenschwingkreis führt zu einer *Integro-Differentialgleichung* für die Stromstärke i .

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.2.6.1

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A40, A43, A45

Lösung:

Nach der *Maschenregel* [A32] ist

$$u_R + u_L + u_C - U_0 = 0 \quad \text{oder} \quad u_R + u_L + u_C = U_0$$

Für die *Teilspannungen* u_R , u_L und u_C gelten dabei folgende Beziehungen [A14, A45, A40]:

$$u_R = R i, \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{q}{C}$$

Die Kondensatorladung q ist das *Zeitintegral* der Stromstärke $i = i(t)$ [A43]. Da der Reihenschwingkreis zum Einschaltzeitpunkt $t = 0$ *energieelos* ist, gilt $q(0) = 0$. Somit ist

$$q = \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot q = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Die *Maschenregel* [A32] führt damit zu der folgenden *Integro-Differentialgleichung*:

$$Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau = U_0$$

Wir dividieren diese Gleichung durch L , vertauschen noch die ersten beiden Glieder und erhalten schließlich mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

das *Anfangswertproblem*

$$\frac{di}{dt} + 2\delta \cdot i + \omega_0^2 \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{U_0}{L}, \quad i(0) = 0$$

(der Schwingkreis ist zu Beginn *energieelos*, daher fließt in diesem Augenblick *kein* Strom). Die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der *Laplace-Transformation* erfolgt in drei Schritten.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation)

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$$

Unter Verwendung des *Ableitungs-* und des *Integrationssatzes* für *Originalfunktionen* erhalten wir aus der *Integro-Dgl* die *algebraische* Gleichung

$$[s \cdot I(s) - 0] + 2\delta \cdot I(s) + \omega_0^2 \cdot \frac{I(s)}{s} = \mathcal{L}\left\{\frac{U_0}{L}\right\} = \frac{U_0}{L} \cdot \mathcal{L}\{1\} = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{s}$$

(Laplace-Transformation Nr. 2)

(2) Lösung im Bildbereich

Wir multiplizieren diese Gleichung mit s und lösen sie dann nach der *Bildfunktion* $I(s)$ auf:

$$s^2 \cdot I(s) + 2\delta s \cdot I(s) + \omega_0^2 \cdot I(s) = (s^2 + 2\delta s + \omega_0^2) \cdot I(s) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Die *Rücktransformation* soll unter Verwendung der *Laplace-Transformationstabelle* der Formelsammlung erfolgen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2}\right\} = \\
 &= \frac{U_0}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2}}_{F(s)}\right\} = \frac{U_0}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}
 \end{aligned}$$

Die Bildfunktion $F(s)$ bringen wir noch durch *quadratische Ergänzung* des Nenners auf eine spezielle Form (wir addieren und subtrahieren zugleich δ^2):

$$\begin{aligned}
 s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 &= s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 + \delta^2 - \delta^2 = \\
 &= \underbrace{(s^2 + 2\delta s + \delta^2)}_{\text{1. Binom: } (s + \delta)^2} + \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega_d^2} = (s + \delta)^2 + \omega_d^2
 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega_d^2} \quad (\text{mit } \omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2)$$

Diese Funktion ist somit vom *allgemeinen* Typ $\frac{1}{(s - b)^2 + a^2}$ (Nr. 28). Mit $a = \omega_d$ und $b = -\delta$ erhalten wir damit für den zeitlichen Verlauf der *Stromstärke* i die Gleichung

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_0}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{U_0}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega_d^2}\right\} = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d} = \\
 &= \frac{U_0}{L\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

In dem Reihenschwingkreis fließt also ein im Laufe der Zeit t *exponentiell* abklingender Wechselstrom (siehe Bild XII-20). Es handelt sich somit um eine *gedämpfte elektromagnetische Schwingung* mit dem *Dämpfungsfaktor* $\delta = \frac{R}{2L}$ und der *Kreisfrequenz* $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

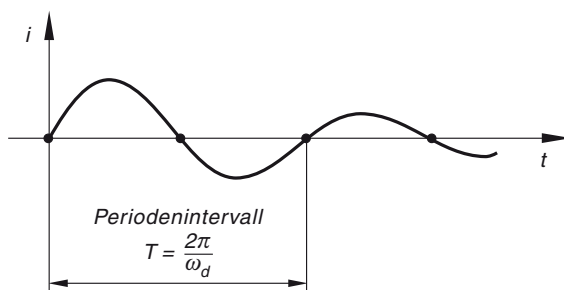


Bild XII-20

Beispiel 11: Spannungsübertragung bei einem Vierpol

*System von linearen Dgln 1. Ordnung
(Ableitungssatz für Originalfunktionen,
Partialbruchzerlegung der Bildfunktion)*

Unter einem *Vierpol* versteht man ein elektrisches Netzwerk mit einem Eingangs- und einem Ausgangsklemmenpaar. Der in Bild XII-21 dargestellte Vierpol enthält einen ohmschen Widerstand R und eine Induktivität L . An die Eingangsklemmen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die *sinusförmige* Wechselspannung

$$u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

angelegt.

$\hat{u} > 0$: Scheitelwert; $\omega > 0$: Kreisfrequenz

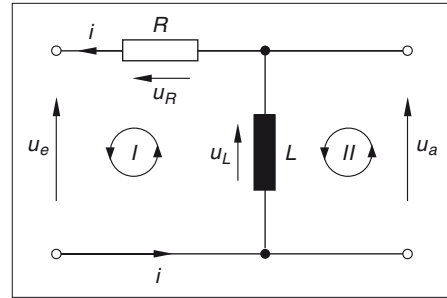


Bild XII-21

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Laplace-Transformation* den zeitlichen Verlauf der *Ausgangsspannung* $u_a(t)$, wenn das Netzwerk im Einschaltzeitpunkt $t = 0$ *stromlos* ist.

Lösungshinweis: Die Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf die beiden in Bild XII-21 gekennzeichneten Maschen führt zu einem *System* aus zwei *gekoppelten* linearen Dgln 1. Ordnung für die Stromstärke i und die Ausgangsspannung u_a . Unterwerfen Sie dieses System der *Laplace-Transformation* und *eliminieren* Sie die Bildfunktion $I(s)$ der Stromstärke $i(t)$. Zerlegen Sie die Bildfunktion $U_a(s)$ der Ausgangsspannung $u_a(t)$ *vor* der Rücktransformation zunächst in *Partialbrüche*.

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1, VI.4.1 und VI.5.1.2

Physikalische Grundlagen: A14, A32, A45

Lösung:

Die *Maschenregel* [A32] liefert für die beiden eingezeichneten Maschen (I) und (II) und den vorgegebenen Umlaufsinn die folgenden Gleichungen:

$$(I) \quad u_L + u_R - u_e = 0 \quad \text{oder} \quad u_L + u_R = u_e$$

$$(II) \quad -u_L + u_a = 0 \quad \text{oder} \quad u_L = u_a$$

Die Teilspannungen u_R und u_L genügen dabei den physikalischen Gesetzen

$$u_R = Ri \quad \text{und} \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

(*ohmsches Gesetz* [A14] bzw. *Induktionsgesetz* [A45]).

Die *Maschengleichungen* lauten damit unter Berücksichtigung der Eingangsspannung $u_e = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ und der Stromlosigkeit zu Beginn

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \\ \text{(II)} \quad L \cdot \frac{di}{dt} = u_a \end{array} \right\} \text{Anfangswert: } i(0) = 0$$

Dies sind zwei *gekoppelte lineare Dgln 1. Ordnung* für die (noch unbekannten) Funktionen $i = i(t)$ und $u_a = u_a(t)$. Wir lösen sie mit Hilfe der *Laplace-Transformation* wie folgt.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s), \quad \mathcal{L}\{u_a(t)\} = U_a(s)$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad L[s \cdot I(s) - 0] + R \cdot I(s) &= \mathcal{L}\{\hat{u} \cdot \sin(\omega t)\} = \hat{u} \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \\ &= \hat{u} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{Nr. 24 mit } a = \omega) \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \quad L[s \cdot I(s) - 0] = U_a(s)$$

(2) Lösung im Bildbereich

Zunächst *ordnen* wir die beiden Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad Ls \cdot I(s) + R \cdot I(s) = (Ls + R) \cdot I(s) = \frac{\hat{u} \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{(II)} \quad Ls \cdot I(s) = U_a(s)$$

Gleichung (I) wird nun nach $I(s)$ aufgelöst und anschließend geringfügig umgeformt:

$$I(s) = \frac{\hat{u} \omega}{(Ls + R)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\hat{u} \omega}{L \left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)} = \frac{\hat{u} \omega}{L \left(s + \frac{1}{\tau}\right) (s^2 + \omega^2)}$$

($\tau = L/R$: *Zeitkonstante*). Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (II) ein und erhalten für $U_a(s)$:

$$U_a(s) = Ls \cdot I(s) = Ls \cdot \frac{\hat{u} \omega}{L \left(s + \frac{1}{\tau}\right) (s^2 + \omega^2)} = \hat{u} \omega \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right) (s^2 + \omega^2)}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Es ist

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_a(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{u} \omega \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right) (s^2 + \omega^2)}\right\} =$$

$$= \hat{u} \omega \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \underbrace{\frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)}}_{F(s)} \right\} = \hat{u} \omega \cdot \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

Vor der Rücktransformation zerlegen wir die echt gebrochenrationale Bildfunktion $F(s)$ wie folgt in *Partialbrüche* (A , B und C sind Konstanten):

$$F(s) = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B + Cs}{s^2 + \omega^2}$$

Wir bringen die Brüche zunächst auf den *Hauptnenner* (Nenner der linken Seite):

$$\frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A(s^2 + \omega^2) + (B + Cs)\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)}$$

Ein Vergleich der Zähler auf beiden Seiten führt auf die Gleichung

$$s = A(s^2 + \omega^2) + (B + Cs)\left(s + \frac{1}{\tau}\right)$$

oder (seitenvertauscht)

$$(s^2 + \omega^2)A + \left(s + \frac{1}{\tau}\right)(B + Cs) = s$$

Die drei Konstanten A , B und C lassen sich dabei durch Einsetzen *spezieller* Werte für die Bildvariable s wie folgt bestimmen (wir wählen der Reihe nach $s = -1/\tau$, $s = 0$ und $s = 1/\tau$):

$$\boxed{s = -\frac{1}{\tau}} \quad \left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)A = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\tau^2} \cdot A = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = -\frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2}$$

$$\boxed{s = 0} \quad \omega^2 A + \frac{1}{\tau} \cdot B = 0 \mid \cdot \tau \Rightarrow \omega^2 \tau A + B = 0 \Rightarrow$$

$$B = -\omega^2 \tau A = -\omega^2 \tau \cdot \left(-\frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2}\right) = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \frac{(\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{\tau}} \quad \left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)A + \frac{2}{\tau} \left(B + \frac{1}{\tau} \cdot C\right) = \frac{1}{\tau} \mid \cdot \tau^2 \Rightarrow$$

$$(1 + \omega^2 \tau^2)A + 2\tau \left(B + \frac{1}{\tau} \cdot C\right) = \tau \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
[1 + (\omega \tau)^2] A + 2 \tau B + 2 C &= \tau \Rightarrow \\
2 C &= \tau - [1 + (\omega \tau)^2] A - 2 \tau B \Rightarrow \\
2 C &= \tau - [1 + (\omega \tau)^2] \cdot \left(-\frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \right) - 2 \tau \cdot \frac{(\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \\
&= \tau + \frac{[1 + (\omega \tau)^2] \tau}{1 + (\omega \tau)^2} - \frac{2 \tau (\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \\
&= \tau + \tau - \frac{2 \tau (\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = 2 \tau - \frac{2 \tau (\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} \Rightarrow \\
C &= \tau - \frac{\tau (\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \frac{\tau + \tau (\omega \tau)^2 - \tau (\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2}
\end{aligned}$$

Die Konstanten A und B lassen sich noch wie folgt durch die Konstante C ausdrücken (der grau markierte Ausdruck ist die Konstante C):

$$A = -\frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} = -C, \quad B = \frac{(\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} = \omega^2 \tau \cdot \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} = \omega^2 \tau \cdot C$$

Die *Partialbruchzerlegung* der Bildfunktion $F(s)$ hat damit die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B + Cs}{s^2 + \omega^2} = \frac{-C}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\omega^2 \tau C + Cs}{s^2 + \omega^2} = \\
&= C \left[-\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\omega^2 \tau + s}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[-\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\omega^2 \tau + s}{s^2 + \omega^2} \right]
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
u_a(t) &= \hat{u} \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \hat{u} \omega \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[-\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\omega^2 \tau + s}{s^2 + \omega^2} \right] \right\} = \\
&= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\omega^2 \tau}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \\
&= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left[-\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} + \omega^2 \tau \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \right]
\end{aligned}$$

Die dabei auftretenden *Bildfunktionen* der rechten Seite sind der Reihe nach vom *allgemeinen* Typ $\frac{1}{s-a}$ (Nr. 3 mit $a = -1/\tau$), $\frac{1}{s^2+a^2}$ (Nr. 24 mit $a = \omega$) und $\frac{s}{s^2+a^2}$ (Nr. 25 mit $a = \omega$). Die gesuchte *Lösung* lautet daher wie folgt:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(-e^{-\frac{t}{\tau}} + \omega^2 \tau \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \cos(\omega t) \right) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(-e^{-\frac{t}{\tau}} + \omega \tau \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(\underbrace{\omega \tau \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t)}_{K \cdot \sin(\omega t + \varphi)} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(K \cdot \sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

Die *gleichfrequenten* Summanden $u_1 = \omega \tau \cdot \sin(\omega t)$ und $u_2 = \cos(\omega t) = 1 \cdot \cos(\omega t)$ lassen sich noch mit Hilfe des (reellen) *Zeigerdiagramms* zu einer phasenverschobenen *Sinusschwingung* gleicher Frequenz zusammenfassen:

$$u = u_1 + u_2 = \omega \tau \cdot \sin(\omega t) + 1 \cos(\omega t) = K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Aus dem Zeigerdiagramm XII-22 folgt dann unmittelbar (Satz des Pythagoras):

$$K^2 = 1 + (\omega \tau)^2 \Rightarrow K = \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$$

$$\tan \varphi = \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) \Rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{1}{\omega \tau} \right)$$

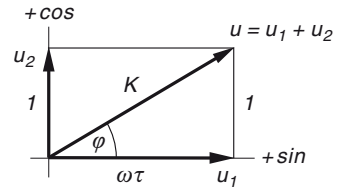


Bild XII-22

Die *Ausgangsspannung* $u_a(t)$ besitzt daher den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(K \cdot \sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left(\sqrt{1 + (\omega \tau)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= \frac{\hat{u} \omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi) - \frac{\hat{u} \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\tau = L/R$ wird daraus schließlich (bitte nachrechnen)

$$u_a(t) = \frac{\omega L \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi) - \frac{R \omega L \hat{u}}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0$$

mit $\varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) > 0$. Nach einer gewissen „Einschwingphase“ spielt der durch die *streng monoton fallende* Exponentialfunktion beschriebene „flüchtige“ Anteil *keine* nennenswerte Rolle mehr und es verbleibt der folgende „stationäre“ Anteil:

$$u_a(t) \approx \frac{\omega L \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad t \gg \tau = L/R$$

Die Ausgangsspannung $u_a(t)$ eilt somit der angelegten Eingangsspannung $u_e(t)$ in der Phase um den Nullphasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)$ voraus (Bild XII-23). Der Scheitelwert beträgt $\hat{u}_a = \frac{\omega L \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, die Kreisfrequenz ω ist die der Eingangsspannung.

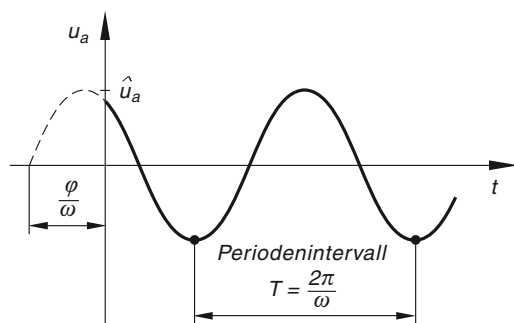


Bild XII-23

Beispiel 12: Gekoppelte mechanische Schwingungen

System linearer Dgln 2. Ordnung

(Ableitungssatz für Originalfunktionen)

Unter einem *harmonischen Oszillator* versteht man ein Federpendel mit der Masse m und der Federkonstanten c (Feder-Masse-Schwinger). Das in Bild XII-24 dargestellte schwingungsfähige System besteht aus zwei *gleichen* harmonischen Oszillatoren, die durch eine Feder mit der Federkonstanten c_k miteinander *gekoppelt* sind. Bei einer Anregung dieses Systems (z. B. durch Anstoßen einer Masse oder Dehnen einer Feder) entstehen sog. *gekoppelte Schwingungen*.

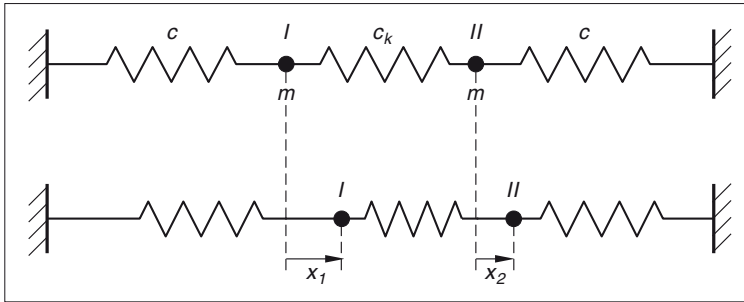


Bild XII-24

- a) Durch welche Dgln lassen sich die Schwingungen der beiden Massen beschreiben?
 b) Lösen Sie diese Dgln für die Anfangswerte

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0 \quad \text{und} \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = -v_0$$

mit Hilfe der *Laplace-Transformation* und deuten Sie das Ergebnis.

Lösungshinweis: Die Dgln für die zeitabhängigen Auslenkungen $x_1 = x_1(t)$ und $x_2 = x_2(t)$ der beiden Massen erhalten Sie aus dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27].

Lehrbuch: Bd. 2, VI.2.5.1 und VI.5.1.3

Physikalische Grundlagen: A27

Lösung:

- a) Auf jede der beiden Massen wirken gleichzeitig *zwei* Rückstellkräfte ein. Die *linke* Feder erzeugt infolge ihrer *Dehnung* um die Strecke x_1 die *rücktreibende* Kraft $F_1 = -c x_1$, während die *Kopplungsfeder* infolge ihrer *Stauchung* um die Strecke $\Delta x = x_1 - x_2$ mit der *Rückstellkraft* $F_2 = -c_k \Delta x = -c_k (x_1 - x_2)$ auf die Masse I einwirkt (in Bild XII-24 wurde $x_1 > x_2$ angenommen). Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* [A27] gilt dann

$$(I) \quad m a_1 = m \ddot{x}_1 = F_1 + F_2 = -c x_1 - c_k (x_1 - x_2) = -c x_1 - c_k x_1 + c_k x_2$$

oder

$$(I) \quad m \ddot{x}_1 + (c + c_k) x_1 = c_k x_2$$

($a_1 = \ddot{x}_1$: Beschleunigung der Masse I). Analoge Überlegungen führen bei der Masse II zu der Bewegungsgleichung

$$(II) \quad m \ddot{x}_2 + (c + c_k) x_2 = c_k x_1$$

(\ddot{x}_2 : Beschleunigung der Masse II). Wir *dividieren* beide Gleichungen noch durch die Masse m und erhalten schließlich mit den *Abkürzungen*

$$\alpha = \frac{c + c_k}{m} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{c_k}{m} \quad (\alpha > \beta > 0)$$

das folgende System aus zwei gekoppelten linearen Dgln 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$(I) \quad \ddot{x}_1 + \alpha x_1 = \beta x_2$$

$$(II) \quad \ddot{x}_2 + \alpha x_2 = \beta x_1$$

b) Das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad \ddot{x}_1 + \alpha x_1 = \beta x_2 \\ (II) \quad \ddot{x}_2 + \alpha x_2 = \beta x_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Anfangswerte: } x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0 \\ x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = -v_0 \end{array}$$

wird schrittweise wie folgt gelöst.

(1) Transformation vom Original- in den Bildbereich (Laplace-Transformation) unter Verwendung des Ableitungssatzes für Originalfunktionen

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s), \quad \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$$

$$(I) \quad [s^2 \cdot X_1(s) - s \cdot 0 - v_0] + \alpha \cdot X_1(s) = \beta \cdot X_2(s)$$

$$(II) \quad [s^2 \cdot X_2(s) - s \cdot 0 + v_0] + \alpha \cdot X_2(s) = \beta \cdot X_1(s)$$

Nach Ordnen der Glieder folgt weiter

$$(I) \quad (s^2 + \alpha) \cdot X_1(s) - \beta \cdot X_2(s) = v_0$$

$$(II) \quad -\beta \cdot X_1(s) + (s^2 + \alpha) \cdot X_2(s) = -v_0$$

oder – in der Matrizenform –

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (s^2 + \alpha) & -\beta \\ -\beta & (s^2 + \alpha) \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix } \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -v_0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit den beiden Unbekannten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

(2) Lösung im Bildbereich

Wir lösen dieses System nach der *Cramerschen Regel*. Die dabei benötigte *Koeffizientendeterminante* $D = \det \mathbf{A}$ sowie die beiden *Hilfsdeterminanten* D_1 und D_2 lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} D = \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} (s^2 + \alpha) & -\beta \\ -\beta & (s^2 + \alpha) \end{vmatrix} = \underbrace{(s^2 + \alpha)^2 - \beta^2}_{\substack{\text{3. Binom: } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ mit } a = s^2 + \alpha, \quad b = \beta}} = \\ &= [(s^2 + \alpha) + \beta][(s^2 + \alpha) - \beta] = (s^2 + \alpha + \beta)(s^2 + \alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} v_0 & -\beta \\ -v_0 & (s^2 + \alpha) \end{vmatrix} = v_0(s^2 + \alpha) - v_0\beta = v_0(s^2 + \alpha - \beta)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (s^2 + \alpha) & v_0 \\ -\beta & -v_0 \end{vmatrix} = -v_0(s^2 + \alpha) + v_0\beta = -v_0(s^2 + \alpha - \beta)$$

Nach der *Cramerschen Regel* ist dann

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{D_1}{D} = \frac{v_0(s^2 + \alpha - \beta)}{(s^2 + \alpha + \beta)(s^2 + \alpha - \beta)} = \frac{v_0}{s^2 + \alpha + \beta} = \\ &= v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + (\alpha + \beta)} = v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dabei wurde zur *Abkürzung* $\omega^2 = \alpha + \beta$ gesetzt. Analog erhalten wir für die *zweite* Bildfunktion:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{D_2}{D} = \frac{-v_0(s^2 + \alpha - \beta)}{(s^2 + \alpha + \beta)(s^2 + \alpha - \beta)} = \frac{-v_0}{s^2 + \alpha + \beta} = \\ &= -v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \alpha + \beta} = -v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{mit } \omega^2 = \alpha + \beta) \end{aligned}$$

(3) Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich (inverse Laplace-Transformation)

Beide *Bildfunktionen* sind vom allgemeinen Typ $F(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$ (Nr. 24). Wir erhalten daher mit $a = \omega$ die folgenden *Originalfunktionen*:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = v_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = \\ &= v_0 \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t) \\ x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = -v_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = \\ &= -v_0 \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t + \pi) \end{aligned}$$

(unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin(x + \pi) = -\sin x$ mit $x = \omega t$)

Die Auslenkungen der beiden Massen unterscheiden sich somit nur im Vorzeichen, d. h. es gilt zu jedem Zeitpunkt $x_2(t) = -x_1(t)$.

Beide Massen schwingen bei dieser sog. *Normalschwingung* mit *gleicher* Amplitude

$$A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha + \beta}} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{c + c_k}{m} + \frac{c_k}{m}}} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{c + 2c_k}{m}}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{c + 2c_k}}$$

und *gleicher* Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{a + \beta} = \sqrt{\frac{c + c_k}{m} + \frac{c_k}{m}} = \sqrt{\frac{c + 2c_k}{m}}$$

bzw. gleicher Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c + 2c_k}{m}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c + 2c_k}}$$

jedoch in *Gegenphase* (Phasenverschiebung = π , siehe Bild XII-25).

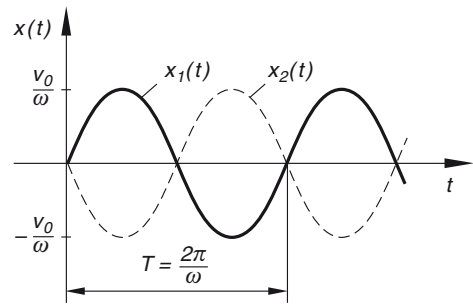


Bild XII-25

Bild XII-26 verdeutlicht nochmals diesen *speziellen* Typ einer *gekoppelten Schwingung*, bei der die Kopplungsfeder *maximal* beansprucht wird.

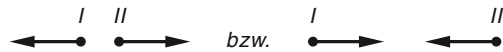


Bild XII-26

XIII Vektoranalysis

Hinweis: Alle in den Lösungen angegebenen Integralnummern beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors.

Beispiel 1: Temperaturverteilung auf einer dünnen Zylinderscheibe
Niveaulinien (Äquipotentiallinien), Gradient

Die 2-dimensionale *Temperaturverteilung* auf einer (wärmeleitfähigen) dünnen Zylinderscheibe wird durch die Gleichung

$$T(x; y) = \frac{T_0}{1 + x^2 + y^2}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$$

beschrieben (Bild XIII-1).

R : Radius der Zylinderscheibe

T_0 : konstante Temperatur in der Scheibenmitte

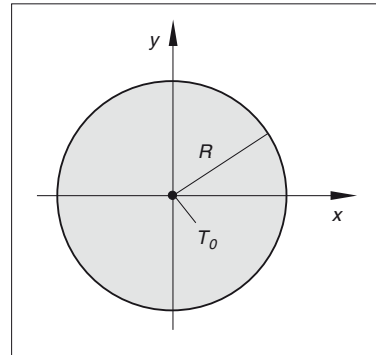


Bild XIII-1

- a) Bestimmen Sie die Kurven *gleicher* Temperatur.
- b) In welcher Richtung findet die *größte* Temperaturänderung statt?

Lehrbuch: Bd. 3, I.3.2 und I.4

Lösung:

Wegen der *Zylinder-* bzw. *Kreissymmetrie* gehen wir zweckmäßigerweise zu *Polarkoordinaten* r und φ über. Mit den Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

erhalten wir die folgende Abhängigkeit der Temperatur T von der Abstandskoordinate r :

$$T = T(r) = \frac{T_0}{1 + r^2}, \quad 0 \leq r \leq R$$

- a) Die Kurven gleicher (*konstanter*) Temperatur sind die *Niveau-* oder *Äquipotentiallinien* der Funktion $T = T(r)$:

$$T = \text{const.} \Rightarrow r^2 = \text{const.} \Rightarrow r = \text{const.}$$

Es handelt sich demnach um *konzentrische Kreise* um die Scheibenmitte ($r = 0$) mit Radien von $r = 0$ (Scheibenmitte) bis hin zu $r = R$ (Scheibenrand, siehe Bild XIII-2).

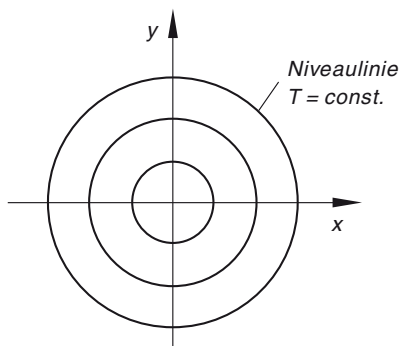


Bild XIII-2

- b) Die *größte* Temperaturänderung erfolgt in Richtung des *Gradienten* von T . Da die Temperatur nur von r , nicht aber vom Polarwinkel φ abhängt, gilt (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned} \text{grad } T &= \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_0}{1 + r^2} \right) \vec{e}_r = T_0 \cdot \frac{\partial}{\partial r} (1 + r^2)^{-1} \vec{e}_r = \\ &= T_0 (-1) (1 + r^2)^{-2} \cdot 2r \vec{e}_r = - \frac{2T_0 r}{(1 + r^2)^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$

\vec{e}_r ist dabei der radiale Einheitsvektor.

Physikalische Deutung: Die *größte* Änderung erfährt die Temperatur in *radialer* Richtung, sie nimmt dabei von innen nach außen von $T(r = 0) = T_0$ auf $T(r = R) = \frac{T_0}{1 + R^2}$ ab (siehe Bild XIII-3).

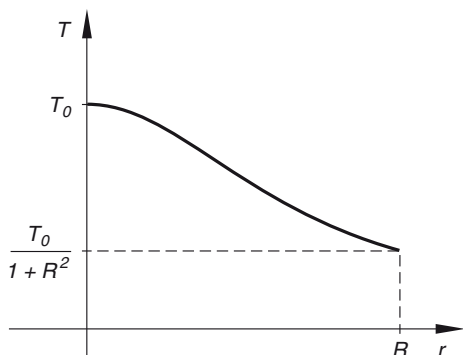


Bild XIII-3

Temperaturverteilung auf einer Zylinderscheibe

Beispiel 2: Quellströmung einer Flüssigkeit
Niveaulinien, Gradient

Eine ebene Flüssigkeitsströmung mit dem Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = \Phi(x; y) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0$$

beschreibt eine sog. *Quellströmung* mit einer Quelle der Stärke (Ergiebigkeit) $Q > 0$ im Koordinatenursprung. Sie ist ein Sonderfall der *Potentialströmung* [A66]. Bestimmen Sie

- a) die *Potentiallinien* (Niveaulinien) des Strömungsfeldes,
- b) das *Geschwindigkeitsfeld* $\vec{v} = \text{grad } \Phi$ der strömenden Flüssigkeit (in kartesischen und Polarkoordinaten),
- c) die *Stromlinien* (Feldlinien) des Geschwindigkeitsfeldes.

Lehrbuch: Bd. 3, I.3.2 und I.4.1

Physikalische Grundlagen: A66

Lösung:

- a) Die *Potentiallinien* sind die *Niveaulinien* der Potentialfunktion:

$$\Phi(x; y) = \text{const.} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \text{const.} = C > 0$$

Wir erhalten *konzentrische* Kreise um die im Ursprung liegende Quelle mit den Radien $R = \sqrt{C} > 0$ (siehe Bild XIII-4).

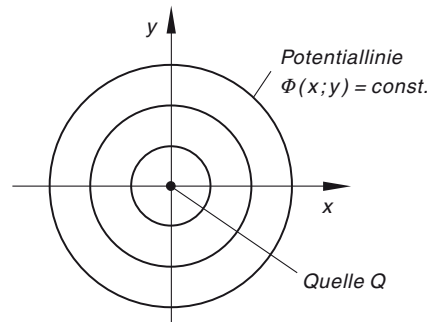


Bild XIII-4

- b) Die *Geschwindigkeitskomponenten* sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Potentialfunktion Φ , die wir zunächst noch auf eine für das Differenzieren bequemere Form bringen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2 + y^2) = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Die gesuchten Ableitungen erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{4\pi} \cdot \ln(x^2 + y^2) \right) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2) = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Analog: $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$

Das *Geschwindigkeitsfeld* lautet damit in kartesischen Koordinaten wie folgt:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_y \right), \quad x^2 + y^2 > 0$$

In Polarkoordinaten ausgedrückt ($x^2 + y^2 = r^2$):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x}{r^2} \vec{e}_x + \frac{y}{r^2} \vec{e}_y \right) = \frac{Q}{2\pi r^2} \underbrace{(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)}_{\vec{r}} = \frac{Q}{2\pi r^2} \vec{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} (r \vec{e}_r) = \\ &= \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r, \quad r > 0 \end{aligned}$$

$\vec{r} = r \vec{e}_r$ ist dabei der Ortsvektor des Punktes $P = (x; y)$, \vec{e}_r der radiale Einheitsvektor.

Längs einer Potentiallinie, d. h. längs eines konzentrischen Kreises um die Quelle ist die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} dem Betrage nach *konstant*:

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r \right| = \frac{Q}{2\pi r} \cdot \underbrace{|\vec{e}_r|}_1 = \frac{Q}{2\pi r} = \text{const.} \quad (\text{für } r = \text{const.})$$

- c) Die *Stromlinien* sind die Feldlinien des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r$. Da dieses Feld nur eine *Radialkomponente* $v_r = \frac{Q}{2\pi r}$ besitzt, verlaufen die Stromlinien *strahlenförmig* von der Quelle aus radial nach außen und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit ($v_r \sim 1/r$). Potentiallinien und Stromlinien stehen somit *aufeinander senkrecht*, d. h. sie schneiden sich unter einem *rechten Winkel* (siehe Bild XIII-5).

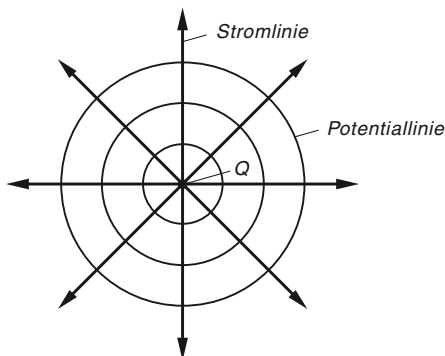


Bild XIII-5

Beispiel 3: Potential und Feldstärke des elektrischen Feldes in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel
Äquipotentialfläche (Niveaufläche), Gradient

Eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R und der positiven Ladung Q besitzt im Außenraum das radialsymmetrische *elektrische Potential*

$$V = V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; r : Abstand vom Kugelmittelpunkt

- a) Bestimmen Sie die *Äquipotentialflächen* (Niveauflächen) des elektrischen Feldes.
 b) Beschreiben Sie das elektrische Feld durch den *Feldstärkevektor* $\vec{E} = -\text{grad } V$.

Lehrbuch: Bd. 3, I.3.2 und I.4.1

Physikalische Grundlagen: A55, A57

Lösung:

- a) Auf einer *Äquipotentialfläche* (Niveaufläche) nimmt das Potential V einen *konstanten* (festen) Wert an:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const.} \Rightarrow r = \text{const.} = C \geq R$$

Die Äquipotentialflächen sind somit die *Oberflächen konzentrischer Kugeln* mit den Radien $r = C \geq R$ (die Mittelpunkte der Kugeln fallen mit dem Mittelpunkt der geladenen Kugel zusammen). Bild XIII-6 zeigt einen ebenen Schnitt durch den Kugelmittelpunkt. Beim Verschieben einer Probeladung q auf einer dieser Äquipotentialflächen (Kugeloberflächen) wird somit *keine* Arbeit verrichtet.

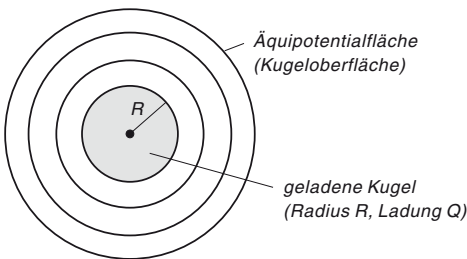


Bild XIII-6

- b) In Kugelkoordinaten r , ϑ und φ besitzt der *Gradient* des elektrischen Potentials V eine besonders einfache Form, da V nur von r , nicht aber von den Winkelkoordinaten ϑ und φ abhängt (daher besteht kein Unterschied zwischen der partiellen und der gewöhnlichen Ableitung):

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \quad \left(\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} \right)$$

\vec{e}_r ist dabei der radiale Einheitsvektor.

Wir bestimmen noch die benötigte (gewöhnliche) Ableitung von V nach r :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dr} (r^{-1}) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1) r^{-2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad r \geq R$$

die gesuchte *elektrische Feldstärke* im Außenraum der homogen geladenen Kugel. Das elektrische Feld ist (erwartungsgemäß) *radialsymmetrisch* nach *außen* gerichtet, wobei der Betrag der Feldstärke

$$E = |\vec{E}| = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \underbrace{|\vec{e}_r|}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq R$$

von innen nach außen proportional zu $1/r^2$ *abnimmt* (siehe Bild XIII-7).

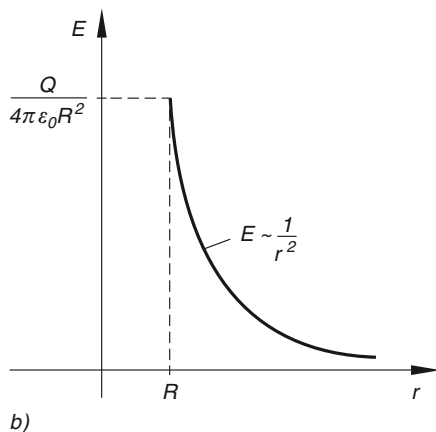
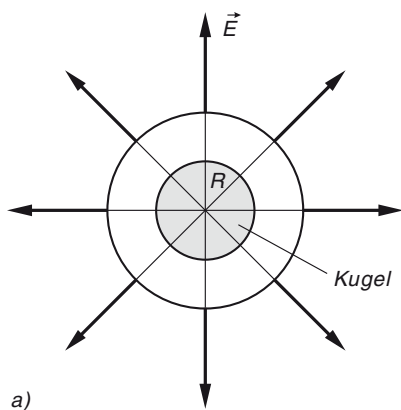


Bild XIII-7 Elektrisches Feld in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel

- a) Radial- oder kugelsymmetrisches elektrisches Feld
- b) Der Betrag der elektrischen Feldstärke nimmt nach außen hin ab

Beispiel 4: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Kugel

Rotation

Eine homogene Kugel vom Radius R rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um einen Kugeldurchmesser (z -Achse). Bestimmen Sie das *Geschwindigkeitsfeld* der Massenpunkte auf der Kugeloberfläche und zeigen Sie, dass es sich dabei um ein *Wirbelfeld* handelt. Die Rechnung soll

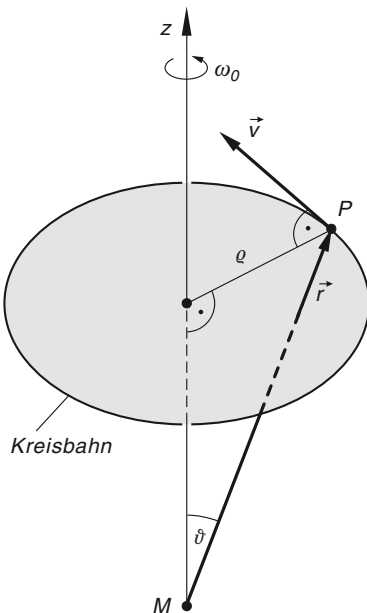
- in Kugelkoordinaten,
- in kartesischen Koordinaten durchgeführt werden.

Lehrbuch: Bd. 3, I.5.2.1 und I.6.3.3

Physikalische Grundlagen: A8

Lösung:

- Wir betrachten einen beliebigen Massenpunkt P auf der Kugeloberfläche, dessen augenblickliche Position durch den Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ beschrieben wird (M ist der Kugelmittelpunkt und zugleich der Koordinatenursprung, siehe Bild XIII-8). Er bewegt sich in einer Ebene *senkrecht* zur Drehachse (z -Achse) auf einer Kreisbahn mit dem Radius $\varrho = r \cdot \sin \vartheta$ mit *konstanter* Geschwindigkeit¹⁾.



$$\sin \vartheta = \frac{\varrho}{|\vec{r}|} = \frac{\varrho}{r}$$

$$\varrho = r \cdot \sin \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi)$$

Bild XIII-8

¹⁾ Der Massenpunkt bewegt sich auf dem zum Winkel ϑ gehörigen *Breitenkreis*.

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} hat *tangentiale* Richtung, d. h. er hat nur eine Tangentialkomponente v_φ in Richtung des Tangenteneinheitsvektors \vec{e}_φ . Somit gilt: $\vec{v} = v_\varphi \vec{e}_\varphi$.

Diese Komponente lässt sich wie folgt bestimmen. Für einen vollen Umlauf auf der Kreisbahn benötigt der Massenpunkt die Zeit $T = 2\pi/\omega_0$, der dabei zurückgelegte Weg s entspricht dem Kreisumfang $2\pi\rho$. Somit gilt:

$$v_\varphi = \frac{s}{T} = \frac{2\pi\rho}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot \rho = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \rho = \omega_0 \rho = \omega_0 (r \cdot \sin \vartheta) = \omega_0 r \cdot \sin \vartheta$$

Damit erhalten wir das folgende *Geschwindigkeitsfeld* für die Massenpunkte auf der Kugeloberfläche:

$$\vec{v} = v_\varphi \vec{e}_\varphi = (\omega_0 r \cdot \sin \vartheta) \vec{e}_\varphi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Man beachte: \vec{v} hat die Komponenten $v_r = 0$, $v_\vartheta = 0$ und $v_\varphi = v_\varphi(r; \vartheta) = \omega_0 r \cdot \sin \vartheta$, d. h. v_φ ist nur von r und ϑ , nicht aber von φ abhängig. Wir bestimmen nun die *Rotation* des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} (in Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot v_\varphi) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi) \vec{e}_\vartheta + 0 \vec{e}_\varphi = \\ &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot \omega_0 r \cdot \sin \vartheta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \omega_0 r \cdot \sin \vartheta) \vec{e}_\vartheta = \\ &= \frac{\omega_0 r}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta) \vec{e}_r - \frac{\omega_0 \cdot \sin \vartheta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \vec{e}_\vartheta = \\ &= \frac{\omega_0}{\sin \vartheta} (2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) \vec{e}_r - \frac{\omega_0 \cdot \sin \vartheta}{r} (2r) \vec{e}_\vartheta = \\ &= (2\omega_0 \cdot \cos \vartheta) \vec{e}_r - (2\omega_0 \cdot \sin \vartheta) \vec{e}_\vartheta = \\ &= 2\omega_0 (\underbrace{\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta}_{\vec{e}_z}) = 2 \underbrace{\omega_0 \vec{e}_z}_{\vec{\omega}} = 2\vec{\omega} \end{aligned}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist genau der Einheitsvektor \vec{e}_z in Richtung der positiven z -Achse (siehe Bd. 3, Abschnitt I.6.3.2). Der Vektor $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$ ist die Winkelgeschwindigkeit (siehe Bild XIII-8). Das Geschwindigkeitsfeld ist somit wegen $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ein *Wirbelfeld*.

b) Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ist das *Vektorprodukt* der Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{r} [A8]:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_0 \vec{e}_z \times \vec{r} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 - y \\ x - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da \vec{v} ein *ebener* Vektor ist ($v_z = 0$, d. h. die z -Komponente verschwindet), verschwinden die x - und y -Komponenten der Rotation von \vec{v} *automatisch*:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_x = (\operatorname{rot} \vec{v})_y = 0$$

Für die z -Komponente erhalten wir mit $v_x = -\omega_0 y$ und $v_y = \omega_0 x$:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega_0 x) - \frac{\partial}{\partial y} (-\omega_0 y) = \omega_0 - (-\omega_0) = 2\omega_0 \neq 0$$

Wegen

$$\operatorname{rot} \vec{v} = (\operatorname{rot} \vec{v})_x \vec{e}_x + (\operatorname{rot} \vec{v})_y \vec{e}_y + (\operatorname{rot} \vec{v})_z \vec{e}_z = 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + \underbrace{2\omega_0 \vec{e}_z}_{\vec{\omega}} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$$

ist das Geschwindigkeitsfeld ein *Wirbelfeld*.

Beispiel 5: Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und der räumlichen Ladungsdichte in einem elektrischen Feld (Maxwellsche Gleichung)

Divergenz, Rotation

Die *elektrische Feldstärke* \vec{E} im Innern einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius R und der positiven Ladung Q nimmt nach der Gleichung

$$\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r, \quad 0 \leq r \leq R$$

von innen ($r = 0$) nach außen ($r = R$) dem Betrage nach *linear* zu.

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; r : Abstand vom Kugelmittelpunkt;

\vec{e}_r : Einheitsvektor in radialer Richtung

- a) Zeigen Sie: Zwischen der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} und der *räumlichen Ladungsdichte* ρ_{el} der homogen geladenen Kugel (Ladung pro Volumeneinheit) besteht die Beziehung ²⁾

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{el}} / \epsilon_0$$

- b) Ist das elektrische Feld im Innern der Kugel ein *Wirbelfeld*?

Lehrbuch: Bd. 3, I.5 und I.6.3.3

Lösung:

Der in Kugelkoordinaten r , ϑ und φ dargestellte elektrische Feldstärkevektor \vec{E} besitzt nur eine *Radialkomponente* E_r , die beiden übrigen Komponenten in den Winkelrichtungen ϑ und φ verschwinden:

$$E_r = E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad E_\vartheta = E_\varphi = 0$$

²⁾ Es handelt sich um eine der vier *Maxwellschen Gleichungen*, die die Grundlage der Elektrodynamik bilden. Diese spezielle Gleichung besagt, dass die Ladungen die *Quellen* und *Senken* des elektrischen Feldes sind (die Feldlinien beginnen und enden an den Ladungen).

a) Für die *Divergenz* der Feldstärke \vec{E} erhalten wir (in Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot E_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot 3r^2 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\end{aligned}$$

Die Definitionsformel der Ladungsdichte ϱ_{el} liefert die Möglichkeit, die Ladung Q durch die (konstante) Ladungsdichte ϱ_{el} und den Kugelradius R auszudrücken:

$$\varrho_{\text{el}} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow 3Q = 4\pi R^3 \varrho_{\text{el}}$$

Damit erhalten wir für die *Divergenz der Feldstärke* \vec{E} den folgenden Ausdruck (in Übereinstimmung mit *Maxwell*):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{4\pi R^3 \varrho_{\text{el}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\epsilon_0}$$

b) Wegen $E_\vartheta = 0$ und $E_\varphi = 0$ reduziert sich der Vektor $\operatorname{rot} \vec{E}$ zunächst wie folgt (in Kugelkoordinaten):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi$$

Da die Radialkomponente E_r weder von φ noch von ϑ abhängt (sondern nur von der Abstandskoordinate r), *verschwinden* die partiellen Ableitungen von E_r nach φ bzw. ϑ und es gilt somit:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot 0 \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \cdot 0 \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_\vartheta - 0 \vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

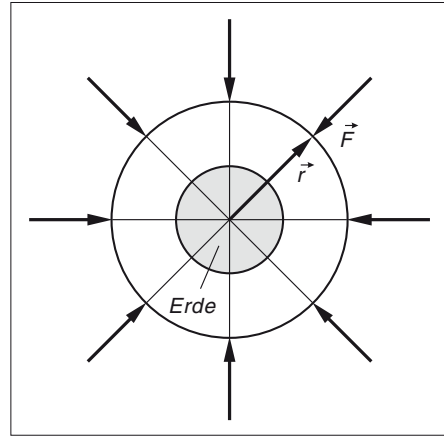
Das elektrische Feld im Innern der Kugel ist daher *wirbelfrei*.

Beispiel 6: Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)
Divergenz, Rotation

In Naturwissenschaft und Technik spielen die *kugel-* oder *radialsymmetrischen* Vektorfelder eine besondere Rolle. Sie werden auch als *Zentralfelder* bezeichnet und lassen sich in der allgemeinen Form $\vec{F} = f(r) \vec{r}$ darstellen, wobei $f(r)$ eine nur vom Abstand r zum Zentrum abhängige skalare Funktion bedeutet und \vec{r} der Ortsvektor eines Raumpunktes ist.

Beispiele für Zentralfelder:

Gravitationsfeld einer Masse (z. B. der Erde, siehe Bild XIII-9), elektrisches Feld einer Punktladung oder einer homogen geladenen Kugel

**Bild XIII-9**

- a) Zeigen Sie durch *komponentenweise* Rechnung in Kugelkoordinaten, dass ein Zentralfeld immer *wirbelfrei* ist.
 b) Welche speziellen Zentralfelder sind zugleich auch *quellenfrei*?

Lehrbuch: Bd. 3, I.5 und I.6.3.3

Lösung :

- a) Wir zerlegen zunächst das Zentralfeld in Komponenten (unter Verwendung der symmetriegerechten Kugelkoordinaten r , ϑ und φ):

$$\vec{F} = f(r) \vec{r} = f(r) \cdot r \vec{e}_r = F_r(r) \vec{e}_r$$

(mit $F_r(r) = f(r) \cdot r = r \cdot f(r)$; \vec{e}_r ist der *radiale* Einheitsvektor mit $\vec{r} = r \vec{e}_r$). Das radialsymmetrische Vektorfeld besitzt nur eine *Radialkomponente* $F_r = F_r(r) = r \cdot f(r)$, die restlichen beiden Komponenten dagegen *verschwinden*: $F_\vartheta = 0$ und $F_\varphi = 0$. Berücksichtigen wir ferner, dass die Radialkomponente nur vom Abstand r , nicht aber von den Winkeln ϑ und φ abhängt, so erhalten wir für die Komponenten der *Rotation* (in Kugelkoordinaten) das folgende Ergebnis:

$$(\text{rot } \vec{F})_r = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\varphi)}_0 - \underbrace{\frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi}}_0 \right) = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} (0 - 0) = 0$$

$$(\text{rot } \vec{F})_\vartheta = \frac{1}{r} \left(\underbrace{\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}}_0 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi)}_0 \right) = \frac{1}{r} \left(\underbrace{\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot 0}_0 - 0 \right) = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_{\varphi} = \frac{1}{r} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_{\vartheta})}_0 - \underbrace{\frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}}_0 \right) = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0$$

Alle drei Komponenten *verschwinden*, somit gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ und ein Zentralfeld ist daher stets *wirbelfrei*.

- b) Ein Zentralfeld mit der Radialkomponente $F_r(r) = r \cdot f(r)$ ist *quellenfrei*, wenn die Divergenz des Feldes *verschwindet*:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $r^2 \cdot F_r$ eine *Konstante* ist. Wir erhalten somit folgendes Ergebnis:

$$r^2 \cdot F_r = r^2 \cdot r \cdot f(r) = r^3 \cdot f(r) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{\text{const.}}{r^3}$$

Quellenfrei sind also die folgenden Zentralfelder:

$$\vec{F} = f(r) \vec{r} = \frac{\text{const.}}{r^3} \vec{r} = \frac{\text{const.}}{r^3} \cdot r \vec{e}_r = \frac{\text{const.}}{r^2} \vec{e}_r$$

Der *Betrag* eines quellenfreien Zentralfeldes ist dabei dem Quadrat des Abstandes r umgekehrt proportional: $F = |\vec{F}| \sim 1/r^2$.

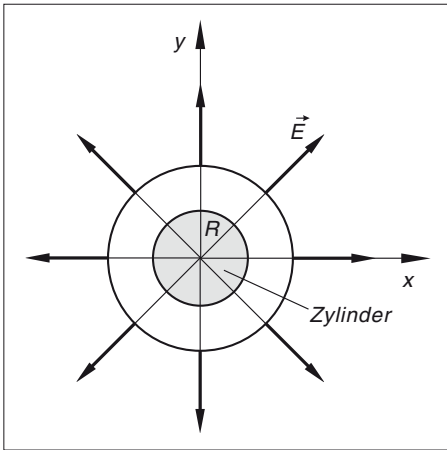
Beispiel 7: Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders
Divergenz, Rotation

Das *elektrische Feld* in der Umgebung eines langen homogen geladenen Zylinders ist *axial-* oder *zylindersymmetrisch* und lässt sich in jeder Schnittebene senkrecht zur Zylinderachse (z -Achse) durch den (ebenen) *Feldstärkevektor*

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 (x^2 + y^2)} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y), \quad x^2 + y^2 \geq R^2$$

beschreiben (Bild XIII-10)³⁾.

³⁾ Wegen der Zylindersymmetrie verschwindet die z -Komponente: $E_z = 0$. Daher können wir uns auf eine beliebige Schnittebene senkrecht zur Zylinderachse (z -Achse) beschränken. Wir wählen als Schnittebene die x, y -Ebene (siehe hierzu auch Bild XIII-10).



ε_0 : elektrische Feldkonstante

R : Zylinderradius

ϱ_{el} : konstante Ladungsdichte des Zylinders
(Ladung pro Volumeneinheit)

Bild XIII-10

- a) Beschreiben Sie das elektrische Feld im *Außenraum* des Zylinders durch den Feldstärkevektor \vec{E} in Zylinder- bzw. Polarkoordinaten.
- b) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld im *Außenraum* des Zylinders *quellen-* und *wirbelfrei* ist.

Lehrbuch: Bd. 3, I.5 und I.6.1

Lösung :

- a) Da die z -Komponente der elektrischen Feldstärke \vec{E} *verschwindet* und somit ein *ebenes* Feld vorliegt, können wir den Feldstärkevektor auch in den (symmetriegerechten) *Polar-*koordinaten r und φ ausdrücken. Mit den Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi$$

erhalten wir dann die gewünschte (und einfache) Darstellung des Feldstärkevektors \vec{E} in Polarkoordinaten (\vec{e}_r , \vec{e}_φ : radialer bzw. tangentialer Einheitsvektor):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 (x^2 + y^2)} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r^2} \left(r \cdot \cos \varphi (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + r \cdot \sin \varphi (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \right) = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r^2} \cdot r (\cos^2 \varphi \vec{e}_r - \cos \varphi \cdot \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \sin^2 \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \vec{e}_\varphi) = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 \vec{e}_r = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \vec{e}_r, \quad r \geq R \end{aligned}$$

Wegen der Zylinder- bzw. Kreissymmetrie existiert (erwartungsgemäß) nur eine *Radialkomponente*:

$$E_r = E_r(r) = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r}, \quad r \geq R$$

- b) Wir berechnen zunächst die *Divergenz* und dann die *Rotation* des Feldes, das nur eine *Radialkomponente* E_r , jedoch *keine* Tangentialkomponente E_φ besitzt ($E_\varphi = 0$):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left(\frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \right)}_{\text{const.}} = 0$$

Das elektrische Feld ist somit im Außenraum des geladenen Zylinders *quellenfrei* (im Außenraum befinden sich *keine* Ladungen).

Bei einem *ebenen* Vektorfeld verschwinden bekanntlich die x - und y -Komponenten der Rotation *automatisch*. Für die verbleibende z -Komponente erhalten wir, da $E_\varphi = 0$ ist und E_r nur von r , nicht aber von φ abhängt (in der Polarkoordinatendarstellung):

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_z = \frac{1}{r} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi)}_0 - \underbrace{\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}}_0 \right) = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0$$

Somit gilt $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (alle drei Komponenten verschwinden), das elektrische Feld ist daher *wirbelfrei*.

Fazit: Das elektrische Feld im Außenraum eines homogen geladenen Zylinders ist *quellen-* und *wirbelfrei*.

Beispiel 8: Staupunktströmung einer Flüssigkeit

*Rotation, Divergenz, Gradient, Differentialgleichung
(Trennung der Variablen)*

Die in Bild XIII-11 skizzierte ebene *Staupunktströmung* einer Flüssigkeit lässt sich durch das *Geschwindigkeitsfeld*

$$\vec{v} = \vec{v}(x; y) = \begin{pmatrix} ax \\ -ay \end{pmatrix} \quad (a > 0; -\infty < x < \infty; y \geq 0)$$

beschreiben (der Staupunkt befindet sich im Koordinatenursprung).

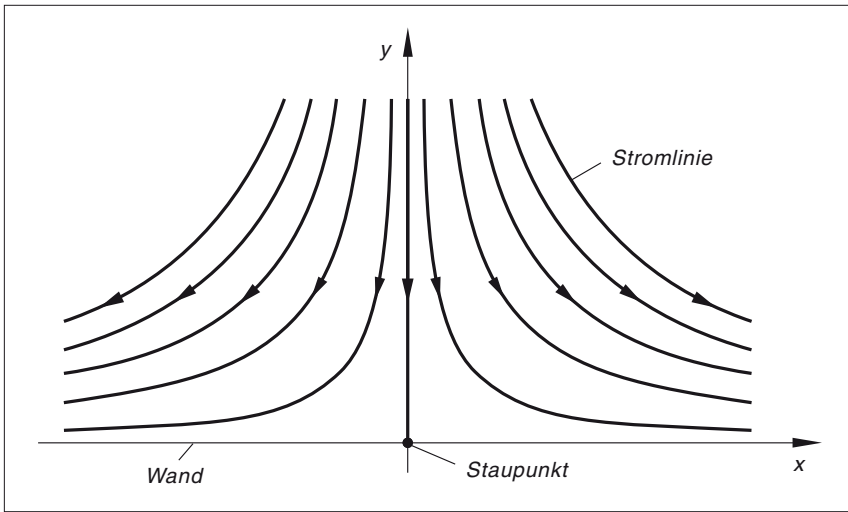


Bild XIII-11

- a) Zeigen Sie, dass es sich um ein *quellen-* und *rotationsfreies* Feld und somit um eine *Potentialströmung* handelt [A66].
- b) Bestimmen Sie das *Geschwindigkeitspotential* $\Phi = \Phi(x; y)$ und die zugehörigen *Potentiallinien*.
- c) Durch welche Gleichungen werden die in Bild XIII-11 skizzierten *Stromlinien* beschrieben?

Hinweis: Die Potentialfunktion verschwindet im Staupunkt, d. h. $\Phi(x = 0; y = 0) = 0$.

Lehrbuch: Bd. 3, I.4.1 und I.5

Physikalische Grundlagen: A66

Lösung:

- a) Das ebene Geschwindigkeitsfeld ist *quellenfrei*, da die Divergenz von \vec{v} verschwindet:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (ax) + \frac{\partial}{\partial y} (-ay) = a - a = 0$$

Es ist zugleich *rotations-* oder *drehungsfrei*, also *wirbelfrei*, da auch die Rotation von \vec{v} verschwindet. Denn als *ebenes* Vektorfeld verschwinden die x - und y -Komponenten der Rotation *automatisch*. Auch die 3. Komponente (z -Komponente) hat den Wert null:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (-ay) - \frac{\partial}{\partial y} (ax) = 0 - 0 = 0$$

Somit ist $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und das Geschwindigkeitsfeld *wirbelfrei*. Es handelt sich demnach um eine *Potentialströmung*.

b) Es existiert also ein Potential $\Phi = \Phi(x; y)$ mit $\vec{v} = \text{grad } \Phi$ und somit

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ax \quad \text{und} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -ay$$

Wir integrieren die erste Gleichung nach x und beachten dabei, dass die „Integrationskonstante“ noch von der zweiten Variablen y abhängen kann:

$$\Phi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \int ax dx = \frac{1}{2} ax^2 + K(y)$$

Die partielle Ableitung dieser Funktion nach y ist bereits bekannt (es ist die Geschwindigkeitskomponente $v_y = -ay$). Daher gilt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} ax^2 + K(y) \right) = 0 + K'(y) = K'(y) = -ay$$

Durch unbestimmte Integration nach y folgt weiter:

$$K'(y) = -ay \Rightarrow K(y) = \int K'(y) dy = \int (-ay) dy = -\frac{1}{2} ay^2 + C$$

Somit:

$$\Phi = \frac{1}{2} ax^2 + K(y) = \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{2} ay^2 + C = \frac{1}{2} a(x^2 - y^2) + C$$

Da das Potential im Staupunkt (Koordinatenursprung) verschwindet, hat auch die Integrationskonstante C den Wert null:

$$\Phi(x=0; y=0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} a(0-0) + C = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Das *Potential* des Geschwindigkeitsfeldes lautet daher:

$$\Phi = \Phi(x; y) = \frac{1}{2} a(x^2 - y^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

Die *Potentiallinien* sind die Äquipotentiallinien der Potentialfunktion. Sie lassen sich aus der Bedingung $\Phi(x; y) = \text{const.}$ bestimmen und führen auf die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2} a(x^2 - y^2) = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad x^2 - y^2 = \text{const.}$$

Es handelt sich dabei um gleichseitige oder rechtwinklige Hyperbeln oberhalb der x -Achse (da $y \geq 0$ ist, siehe Bild XIII-12).

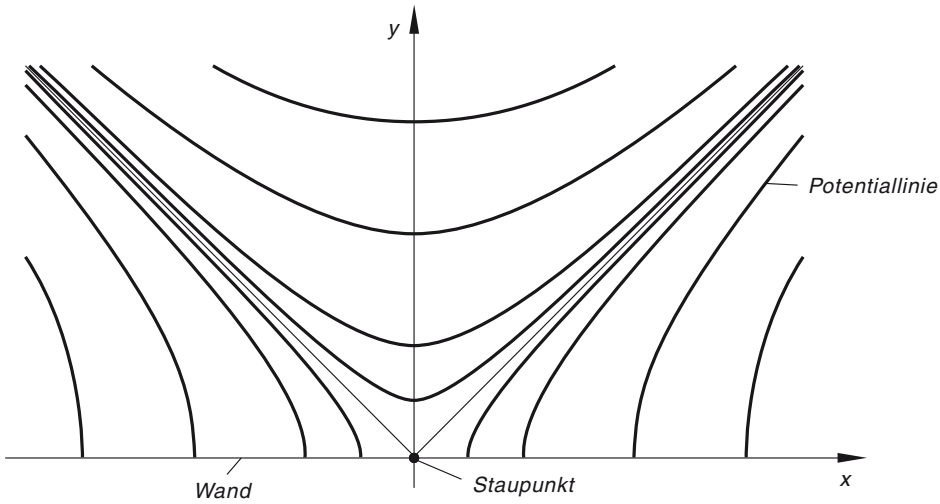


Bild XIII-12 Potentiallinien einer ebenen Staupunktströmung

- c) Der *qualitative* Verlauf der Stromlinien (Feldlinien) des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(x; y)$ ist uns bereits aus Bild XIII-11 bekannt. Sie lassen sich exakt aus der Gleichung $\vec{v} \times d\vec{r} = \vec{0}$ bestimmen. Die Vektoren \vec{v} und $d\vec{r}$ müssen wir dabei als 3-dimensionale Vektoren darstellen (mit einer jeweils *verschwindenden* z -Komponente):

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ax \\ -ay \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ ax dy + ay dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ax dy + ay dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$ax dy + ay dx = 0 \mid : a \Rightarrow x dy + y dx = 0$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch *Trennung der Variablen* ($x \neq 0, y > 0$):

$$x dy + y dx = 0 \Rightarrow x dy = -y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + \ln |C| = \ln \left| \frac{C}{x} \right| \Rightarrow$$

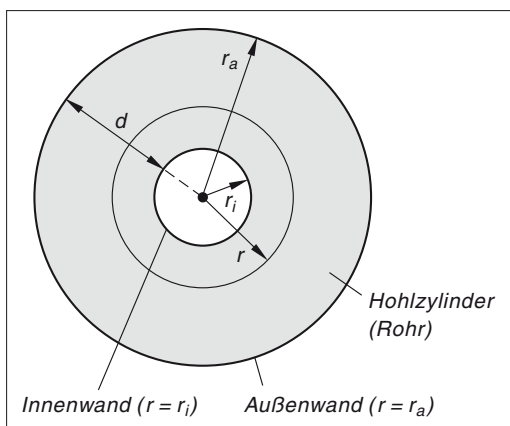
$$|y| = y = \left| \frac{C}{x} \right| = \frac{|C|}{|x|} = \frac{K}{|x|} \quad (K > 0; \text{ wegen } y > 0 \text{ gilt } |y| = y)$$

Die *Stromlinien* sind somit ebenfalls rechtwinklige Hyperbeln, sie schneiden die Potentiallinien des Strömungsfeldes unter einem *rechten* Winkel.

Beispiel 9: Stationäre (zeitunabhängige) Wärmeleitung durch eine Rohrwand

*Laplace-Gleichung, Differentialgleichung
(Trennung der Variablen)*

Bild XIII-13 zeigt den Querschnitt eines langen Rohres (Hohlzylinders) mit der Wandstärke d . Bringt man Innen- und Außenwand auf konstante, aber *unterschiedliche* Temperaturen, so findet eine *Wärmeströmung* längs des Temperaturgefälles in *radialer* Richtung statt. Die Temperaturverteilung von innen nach außen genügt dabei der *Laplace-Gleichung* $\Delta T = 0$.



r_i, r_a : Innen- bzw. Außenradius

$d = r_a - r_i$: Wandstärke

T_i, T_a : Innen- bzw. Außentemperatur
($T_a > T_i$)

Bild XIII-13

Bestimmen Sie den *Temperaturverlauf* in der Rohrwand.

Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass die Wandstärke im Vergleich zu den Krümmungsradien der beiden Wände sehr klein ist. Der Wärmeleitungsprozess kann dann als ein 1-dimensionaler Prozess in *radialer* Richtung betrachtet werden, d. h. die Temperatur in der Rohrwand hängt nur vom senkrechten Abstand r zur Symmetrieachse des Hohlzylinders (z -Achse) ab: $T = T(r)$. Verwenden Sie daher *Zylinder-* bzw. *Polarkoordinaten*.

Lehrbuch: Bd. 3, I.5.3.3, I.6.1.3 und I.6.2.3

Physikalische Grundlagen: A65

Lösung:

Die Laplace-Gleichung lautet in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten r und φ wie folgt (da T nur von der einen Variablen r abhängt, besteht kein Unterschied zwischen den partiellen und den gewöhnlichen Ableitungen):

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{oder} \quad T''(r) + \frac{1}{r} \cdot T'(r) = 0$$

Die Temperaturverteilung unterliegt dabei den *Randbedingungen* $T(r = r_i) = T_i$ und $T(r = r_a) = T_a$. Zunächst verwandeln wir die vorliegende Differentialgleichung 2. Ordnung mit Hilfe der Substitution

$$u = u(r) = T'(r), \quad u' = u'(r) = T''(r)$$

in eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die dann durch *Trennung der Variablen* gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} T''(r) + \frac{1}{r} \cdot T'(r) &= 0 \Rightarrow u' + \frac{1}{r} \cdot u = 0 \Rightarrow u' = \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r} \cdot u \Rightarrow \\ \frac{du}{u} &= -\frac{dr}{r} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln u = -\ln r + \ln C_1 = \ln \left(\frac{C_1}{r} \right) \Rightarrow \\ u &= \frac{C_1}{r} \quad (C_1: \text{positive Konstante}) \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution $T'(r) = u(r)$ und einer sich anschließenden (unbestimmten) Integration folgt weiter:

$$T'(r) = \frac{C_1}{r} \Rightarrow T(r) = \int T'(r) dr = C_1 \cdot \int \frac{1}{r} dr = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Die noch unbekannten Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den beiden *Randwerten* wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} T(r = r_a) &= T_a \Rightarrow \text{(I)} \quad C_1 \cdot \ln r_a + C_2 = T_a \\ T(r = r_i) &= T_i \Rightarrow \text{(II)} \quad C_1 \cdot \ln r_i + C_2 = T_i \end{aligned} \right\} -$$

Durch Differenzbildung erhalten wir dann eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannte C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \ln r_a - C_1 \cdot \ln r_i &= T_a - T_i \Rightarrow C_1 (\ln r_a - \ln r_i) = T_a - T_i \Rightarrow \\ C_1 \cdot \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) &= T_a - T_i \Rightarrow C_1 = \frac{T_a - T_i}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (II) folgt weiter:

$$C_2 = T_i - C_1 \cdot \ln r_i$$

Damit erhalten wir in der Rohrwand die folgende *Temperaturverteilung*:

$$\begin{aligned} T(r) &= C_1 \cdot \ln r + C_2 = C_1 \cdot \ln r + T_i - C_1 \cdot \ln r_i = C_1 (\ln r - \ln r_i) + T_i = \\ &= C_1 \cdot \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) + T_i = \frac{T_a - T_i}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) + T_i, \quad r_i \leq r \leq r_a \end{aligned}$$

Bild XIII-14 zeigt den Verlauf dieser Verteilung. Die Temperatur nimmt dabei von innen nach außen zu und zwar von T_i bis T_a .

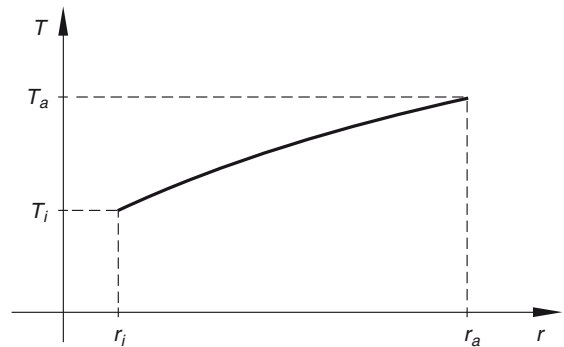


Bild XIII-14

Beispiel 10: Gravitationspotential und Fallbeschleunigung Gradient, Laplace-Gleichung (Potentialgleichung)

Das Gravitationsfeld der Erdkugel vom Radius R ist ein *konservatives* Zentralfeld und besitzt somit ein *Potential* Φ (auch Gravitationspotential genannt), das sich aus der *Laplace-Gleichung* (Potentialgleichung) $\Delta\Phi = 0$ bestimmen lässt.

- Wie lautet diese kugel- oder radialsymmetrische *Potentialfunktion* $\Phi = \Phi(r)$?
- Bestimmen Sie durch Gradientenbildung aus dem Potential Φ die *Erd- oder Fallbeschleunigung* $\vec{g} = -\text{grad } \Phi$.

Hinweis: Das Potential Φ verschwindet im Unendlichen: $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$. Die *Erdbeschleunigung* an der Erdoberfläche ($r = R$) hat den Betrag $g_0 \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Lehrbuch: Bd. 3, I.4.1, I.5.3.3 und I.6.3.3

Lösung:

- Wegen der *Kugelsymmetrie* des Feldes verwenden wir Kugelkoordinaten r , ϑ und φ . Das *Gravitationspotential* hängt dabei nur vom Abstand r zum Erdmittelpunkt, nicht aber von den Winkeln ϑ und φ ab: $\Phi = \Phi(r)$. Die *Laplace-Gleichung* (Potentialgleichung) reduziert sich damit auf

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) = 0$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck muss eine *Konstante* sein, da die Ableitung verschwindet. Daher gilt:

$$r^2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} = r^2 \cdot \frac{d\Phi}{dr} = r^2 \cdot \Phi'(r) = \text{const.} = C_1$$

(Φ hängt nur von der einen Variablen r ab, daher besteht kein Unterschied zwischen der partiellen und der gewöhnlichen Ableitung)

Wir lösen diese einfache Differentialgleichung nach $\Phi'(r)$ auf und integrieren dann unbestimmt:

$$\begin{aligned}\Phi'(r) = \frac{C_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(r) &= \int \Phi'(r) dr = C_1 \cdot \int \frac{1}{r^2} dr = C_1 \cdot \int r^{-2} dr = \\ &= C_1 \cdot \frac{r^{-1}}{-1} + C_2 = -\frac{C_1}{r} + C_2\end{aligned}$$

Im Unendlichen verschwindet das Potential:

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{C_1}{r} + C_2 \right) = -0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Das *Gravitationspotential* lautet also wie folgt:

$$\Phi(r) = -\frac{C_1}{r}, \quad r \geq R$$

Die Integrationskonstante C_1 bestimmen wir später.

- b) Die Erdbeschleunigung \vec{g} besitzt wegen der Kugelsymmetrie des Gravitationsfeldes nur eine *Radialkomponente* g_r . Es gilt

$$\vec{g} = -\text{grad } \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{d\Phi}{dr} \vec{e}_r = g_r \vec{e}_r$$

und somit

$$\begin{aligned}g_r &= -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{C_1}{r} \right) = C_1 \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = C_1 \cdot \frac{d}{dr} (r^{-1}) = \\ &= C_1 (-1) r^{-2} = -\frac{C_1}{r^2}\end{aligned}$$

An der Erdoberfläche ($r = R$) hat die Radialkomponente den Wert $g_r(r = R) = -g_0$. Aus diesem speziellen Wert bestimmen wir die noch unbekannte Konstante C_1 :

$$g_r(r = R) = -\frac{C_1}{R^2} = -g_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = g_0 R^2$$

Die Radialkomponente g_r lautet damit wie folgt:

$$g_r = -\frac{C_1}{r^2} = -\frac{g_0 R^2}{r^2}, \quad r \geq R$$

Für die *Erd-* oder *Fallbeschleunigung* gilt dann:

$$\vec{g} = -\text{grad } \Phi = g_r \vec{e}_r = -\frac{g_0 R^2}{r^2} \vec{e}_r, \quad r \geq R$$

Der Betrag $g = |\vec{g}|$ der Erdbeschleunigung \vec{g} nimmt dabei mit zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche wie folgt ab (siehe Bild XIII-15):

$$g = |\vec{g}| = |g_r| = \left| -\frac{g_0 R^2}{r^2} \right| = \frac{g_0 R^2}{r^2} = g_0 R^2 \cdot \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r^2}, \quad r \geq R$$

Das *Gravitationspotential* Φ lautet damit in Abhängigkeit vom Abstand r :

$$\Phi(r) = -\frac{C_1}{r} = -\frac{g_0 R^2}{r} = -g_0 R^2 \cdot \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}, \quad r \geq R$$

Der Betrag des Gravitationspotentials nimmt dabei mit zunehmender Entfernung von der Erdkugel ab (siehe Bild XIII-16):

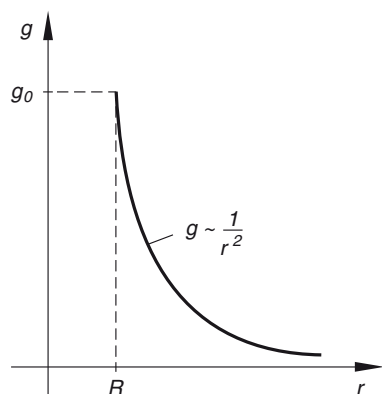


Bild XIII-15

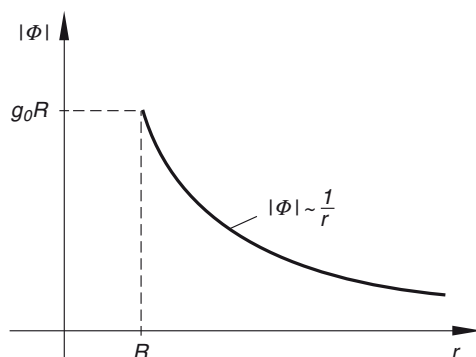


Bild XIII-16

**Beispiel 11: Potential und Feldstärke des elektrischen Feldes
im Innenraum eines homogen geladenen Zylinders**
Gradient, Potentialgleichung (Laplace-Gleichung)

Ein langer homogen geladener Zylinder mit dem Radius R und der konstanten (positiven) Ladungsdichte ϱ_{el} (Ladung pro Volumeneinheit) erzeugt ein *axial-* oder *zylindersymmetrisches* elektrisches Feld.

- Bestimmen Sie aus der Potentialgleichung [A67] das *elektrische Potential* V des Feldes im *Innern* des Zylinders.
- Beschreiben Sie das elektrische Feld im Innenraum des Zylinders durch den *elektrischen Feldstärkevektor* \vec{E} .

Hinweis: Verwenden Sie *symmetriegerechte* Koordinaten, d. h. hier *Zylinderkoordinaten* ϱ , φ und z . Die Symmetrieachse des Zylinders fällt in die z -Achse. Das Potential V verschwindet auf dieser Achse, d. h. es gilt $V(\varrho = 0) = 0$.

Lösung :

- a) Das *Potential* V des elektrischen Feldes hängt wegen der Zylindersymmetrie des Feldes nur von der Abstandskoordinate ϱ ab (ϱ ist der senkrechte Abstand zur Symmetrieachse): $V = V(\varrho)$. Die *Potentialgleichung* [A67] reduziert sich daher (in Zylinderkoordinaten) wie folgt:

$$\Delta V = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} \right) = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit ϱ und beachten, dass die partiellen Ableitungen auch als *gewöhnliche* Ableitungen geschrieben werden können, da V nur von *einer* Variablen (der Abstandskoordinate ϱ) abhängt:

$$\frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \cdot \frac{dV}{d\varrho} \right) = \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot V'(\varrho)) = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \varrho$$

Unbestimmte Integration beiderseits liefert dann:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot V'(\varrho)) d\varrho &= -\frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \int \varrho d\varrho \Rightarrow \\ \varrho \cdot V'(\varrho) &= -\frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \varrho^2 + C_1 = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho^2 + C_1 \end{aligned}$$

Für $\varrho = 0$ folgt aus dieser Gleichung:

$$-0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Somit ist

$$\varrho \cdot V'(\varrho) = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho^2 \quad \text{bzw.} \quad V'(\varrho) = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho$$

(nach Division durch ϱ). Wir integrieren abermals auf beiden Seiten:

$$V(\varrho) = \int V'(\varrho) d\varrho = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \int \varrho d\varrho = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \varrho^2 + C_2 = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{4\varepsilon_0} \cdot \varrho^2 + C_2$$

Auf der Zylinderachse (z -Achse) verschwindet das Potential:

$$V(\varrho = 0) = 0 \Rightarrow -0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Das *elektrische Potential* im Innenraum des geladenen Zylinders lautet damit wie folgt:

$$V = V(\varrho) = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{4\varepsilon_0} \cdot \varrho^2, \quad \varrho \leq R$$

- b) Aus dem Potential V erhalten wir durch Bildung des Gradienten die gesuchte *elektrische Feldstärke* \vec{E} [A57]. Da das Potential nur von ϱ , nicht aber von φ und z abhängt, erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho = -\frac{dV}{dQ} \vec{e}_\varrho = -\frac{d}{dQ} \left(-\frac{Q_{\text{el}}}{4\varepsilon_0} \cdot Q^2 \right) \vec{e}_\varrho = \\ &= \frac{Q_{\text{el}}}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{dQ} (Q^2) \vec{e}_\varrho = \frac{Q_{\text{el}}}{4\varepsilon_0} \cdot 2Q \vec{e}_\varrho = \frac{Q_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot Q \vec{e}_\varrho, \quad Q \leq R\end{aligned}$$

Der *Betrag* der Feldstärke nimmt also *linear* mit zunehmenden Abstand Q von der Zylinderachse zu (siehe Bild XIII-17):

$$E = |\vec{E}| = \left| \frac{Q_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot Q \vec{e}_\varrho \right| = \frac{Q_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot Q$$

($Q \leq R$)

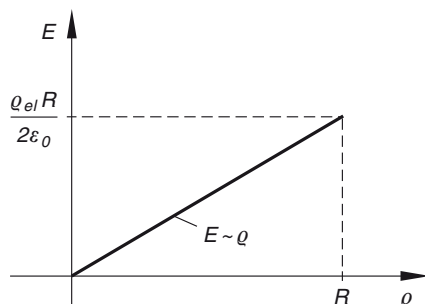


Bild XIII-17

Beispiel 12: Wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung
Divergenz, Rotation, Gradient

Das stationäre *Geschwindigkeitsfeld* einer ebenen Strömung laute in Polarkoordinaten r und φ wie folgt:

$$\vec{v} = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi, \quad r > 0 \quad (\vec{e}_\varphi: \text{tangentialer Einheitsvektor})$$

- a) Bestimmen Sie die *Stromlinien* (Feldlinien) des Geschwindigkeitsfeldes.
- b) Zeigen Sie: Das Geschwindigkeitsfeld ist *rotationsfrei* (d. h. wirbelfrei).
- c) Wie lautet die Darstellung des Feldes in (ebenen) *kartesischen* Koordinaten? Prüfen Sie, ob das Feld auch *quellenfrei* ist (Rechnung in kartesischen Koordinaten).
- d) Handelt es sich um eine *Potentialströmung*? Bestimmen Sie gegebenenfalls das *Potential* des Feldes.

Lehrbuch: Bd. 3, I.4.1, I.5 und I.6.1.3

Physikalische Grundlagen: A66

Lösung :

- a) Das Geschwindigkeitsfeld besitzt nur eine *Tangentialkomponente* $v_\varphi = v_\varphi(r) = 1/r$. Die Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens erfolgt daher in *tangentialer* Richtung, d. h. auf einem *Kreis* und zwar mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v = 1/r$.

Die *Stromlinien* sind somit *konzentrische Kreise* um den Koordinatenursprung (siehe Bild XIII-18). Die Geschwindigkeit nimmt dabei dem Betrage nach in *radialer* Richtung nach außen hin ab (proportional zu $1/r$).

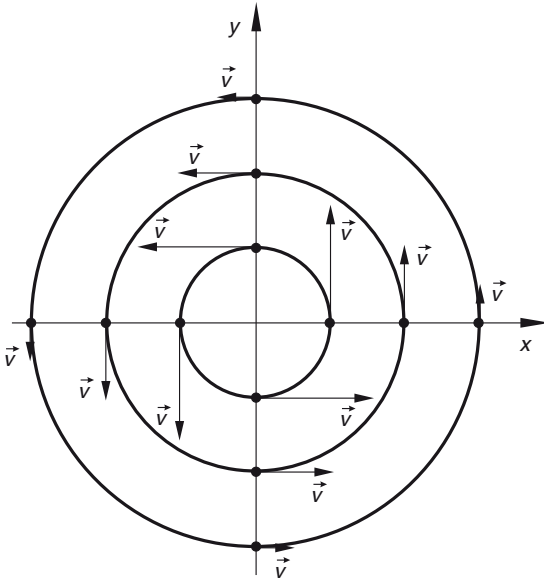


Bild XIII-18

- b) Da ein *ebenes* Geschwindigkeitsfeld vorliegt, kann es nur eine z -Komponente der Rotation von \vec{v} geben. Für diese erhalten wir mit $v_r = 0$ und $v_\varphi = 1/r$:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi) - \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}}_0 \right] = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} (1)}_0 = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

Somit gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, das Geschwindigkeitsfeld ist *wirbel-* und damit *rotationsfrei*.

- c) Mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

erhalten wir die gewünschte Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes in *kartesischen* Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = \frac{1}{r} \left(-\frac{y}{r} \vec{e}_x + \frac{x}{r} \vec{e}_y \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten lauten somit:

$$v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Das Feld ist quellenfrei, wenn die Divergenz von \vec{v} *verschwindet*. Die dabei benötigten partiellen Ableitungen erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel* (Substitution: $u = x^2 + y^2$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} + x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = \\ &= -y(-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x + x(-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist somit *quellenfrei*.

- d) Das Geschwindigkeitsfeld ist *quellen-* und *wirbelfrei* und damit ein *Potentialfeld*, dessen Potential Φ (hier als Geschwindigkeitspotential bezeichnet) aus der Gleichung $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$ wie folgt bestimmt werden kann [A66]:

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Wir integrieren die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = -y \cdot \underbrace{\int \frac{1}{x^2 + y^2} dx}_{\text{Integral Nr. 29 mit } a = y} = -y \cdot \frac{1}{y} \cdot \arctan \left(\frac{x}{y} \right) + K(y) = \\ &= -\arctan \left(\frac{x}{y} \right) + K(y) \end{aligned}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die „Integrationskonstante“ noch von y abhängen kann (also eine Funktion von y ist). Jetzt differenzieren wir Φ mit Hilfe der Kettenregel partiell nach y , das Ergebnis ist die bereits bekannte Geschwindigkeitskomponente v_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctan \left(\frac{x}{y} \right) + K(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctan(xy^{-1}) + K(y) \right) = \\ &= -\frac{1}{1 + (xy^{-1})^2} \cdot x(-1)y^{-2} + K'(y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{x}{y^2} + K'(y) = \\ &= \frac{x}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)y^2} + K'(y) = \frac{x}{y^2 + x^2} + K'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + K'(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} + K'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow K'(y) = 0$$

Aus $K'(y) = 0$ folgt $K(y) = \text{const.}$. Das *Geschwindigkeitspotential* lautet daher:

$$\Phi = \Phi(x; y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \text{const.}$$

Beispiel 13: Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters
Linienintegral

Durch einen langen zylindrischen Leiter mit dem Querschnittsradius R fließe in Längsrichtung ein über den Leiterquerschnitt gleichmäßig verteilter Strom der Stärke I_0 (Bild XIII-19; Zylinderachse (z -Achse) senkrecht zur Zeichenebene nach oben gerichtet). Er erzeugt ein *axial-symmetrisches* Magnetfeld mit einer ortsabhängigen *magnetischen Feldstärke* \vec{H} .

Bestimmen Sie die Abhängigkeit des Betrags $H = |\vec{H}|$ der Feldstärke vom senkrechten Abstand r gegenüber der Leitermitte

- a) *innerhalb* des Leiters,
- b) *außerhalb* des Leiters

mit Hilfe des *Durchflutungsgesetzes* [A64].

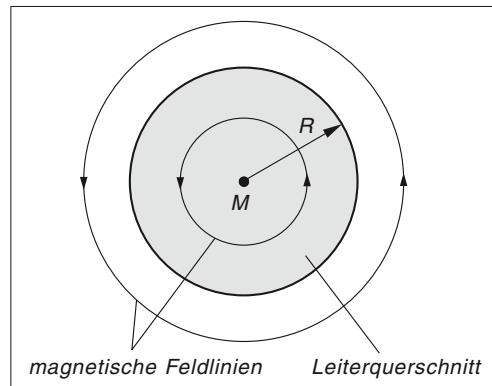


Bild XIII-19

Lehrbuch: Bd. 3, I.7

Physikalische Grundlagen: A19, A64

Lösung:

Sowohl im Innen- als auch im Außenbereich des Leiters gilt: In *jeder* Ebene senkrecht zur Leiterachse (z -Achse) verlaufen die magnetischen Feldlinien wegen der Kreis- bzw. Zylindersymmetrie in Form von *konzentrischen Kreisen* um die Leiterachse, wobei der *Betrag* H des magnetischen Feldstärkevektors \vec{H} längs einer jeden Feldlinie *konstant* ist. H ist somit eine reine Funktion der Abstandscoordinate r : $H = H(r)$.

- a) Im *Innenbereich* $0 \leq r \leq R$ hat die *Stromdichte* S [A19] wegen der *gleichmäßigen* Stromverteilung an jeder Stelle des Leiters den *gleichen* Wert

$$S = \frac{\text{Stromstärke}}{\text{Querschnittsfläche}} = \frac{I_0}{\pi R^2} = \text{const.}$$

Durch die in Bild XIII-20 *dunkelgrau* unterlegte Kreisfläche vom Radius r und Flächeninhalt $A(r) = \pi r^2$ fließt somit ein Strom der Stärke

$$I(r) = S \cdot A(r) = \frac{I_0}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{I_0}{R^2} \cdot r^2$$

Nach dem *Durchflutungsgesetz* [A64] gilt dann:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = I(r) = \frac{I_0}{R^2} \cdot r^2$$

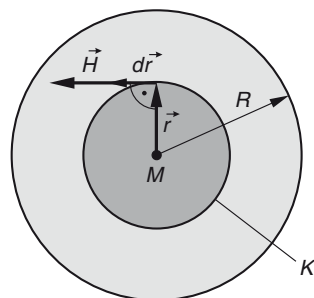


Bild XIII-20

Die Integration erfolgt dabei längs einer magnetischen Feldlinie, d. h. längs eines konzentrischen Kreises K vom Radius r . Der Verschiebungsvektor $d\vec{r}$ hat *tangentiale* Richtung wie auch der Feldstärkevektor \vec{H} . Daher gilt für das skalare Produkt dieser Vektoren im geschlossenen Linienintegral:

$$\vec{H} \cdot d\vec{r} = H \cdot dr \cdot \cos 0^\circ = H \cdot dr \cdot 1 = H \cdot dr$$

Beim Umlauf längs der (konzentrischen) Kreisbahn K vom Radius r bleibt H *konstant*, der dabei zurückgelegte Weg entspricht dem Kreisumfang $2\pi r$. Somit ist

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_K H \cdot dr = H \cdot \underbrace{\oint_K dr}_{2\pi r} = H \cdot 2\pi r = \frac{I_0}{R^2} \cdot r^2$$

und daher

$$H = H(r) = \frac{I_0}{2\pi R^2} \cdot r \sim r, \quad 0 \leq r \leq R$$

Die magnetische Feldstärke H nimmt also im *Inneren* des Leiters proportional zum Leiterabstand r zu und zwar vom Minimalwert $H(r=0) = 0$ bis zum Maximalwert $H(r=R) = I_0/(2\pi R)$ (siehe hierzu auch Bild XIII-21).

- b) Im *Außenbereich* des zylindrischen Leiters gilt: Durch *jede* Kreisfläche vom Radius $r \geq R$ fließt der *gleiche* Strom I_0 . Nach dem *Durchflutungsgesetz* [A64] gilt somit nach analogen Überlegungen wie im Lösungsteil a)

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_K H \cdot dr = H \cdot \oint_K dr = H \cdot 2\pi r = I_0$$

Die magnetische Feldstärke H nimmt damit *außerhalb* des Leiters nach der Gleichung

$$H = H(r) = \frac{I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}, \quad r \geq R$$

reziprok zum Abstand r ab (siehe Bild XIII-21).

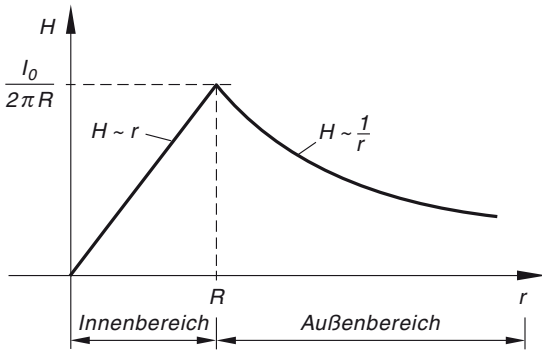


Bild XIII-21

Beispiel 14: Elektrisches Feld einer Linienquelle

Gradient, Rotation, Linienintegral

Das *Potential* des elektrischen Feldes in der Umgebung einer Linienquelle⁴⁾ lässt sich in Abhängigkeit vom (senkrechten) Abstand r zur Leitermitte durch die Gleichung

$$V = V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad r > 0$$

beschreiben.

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; λ : Ladung pro Längeneinheit;

$r_0 > 0$: Lage des Bezugspunktes mit dem Nullpotential, d. h. $V(r_0) = 0$

- Wie lauten die kartesischen Komponenten E_x , E_y und E_z sowie der Betrag $E = |\vec{E}|$ des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E} ?
- Zeigen Sie: Das elektrische Feld ist *konservativ*, d. h. die Arbeit beim Verschieben einer Ladung im Feld hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, *nicht* aber vom eingeschlagenen Weg.
- Welche *Arbeit* W wird beim Verschieben einer Ladung Q vom Punkt A zum Punkt B verrichtet, wenn die senkrechten Abstände dieser Punkte von der Linienquelle r_1 bzw. r_2 betragen?

Hinweis: Die Linienquelle liegt in der z -Achse. Beachten Sie die *Zylindersymmetrie* des elektrischen Feldes.

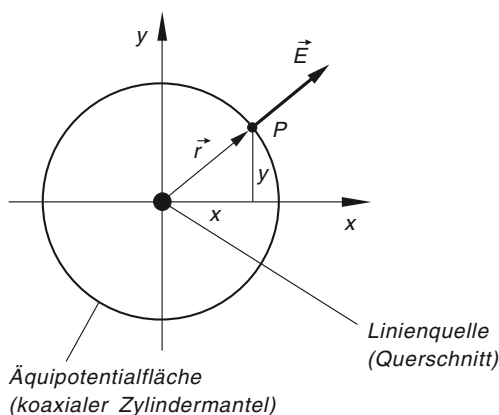
Lehrbuch: Bd. 3, I.4.1, I.5.2 und I.7.3

Physikalische Grundlagen: A10, A55, A57

⁴⁾ Linienquelle: Extrem dünner (unendlich) langer zylindrischer Leiter mit homogener (konstanter) Ladungsverteilung.

Lösung :

- a) Die Äquipotentialflächen [A55] des elektrischen Feldes sind wegen der Zylindersymmetrie *koaxiale* Zylinderflächen (Mantelflächen koaxialer Zylinder). Der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} ist daher (bei einer angenommenen positiven Linienladung) *radial* nach außen gerichtet. Es gibt somit *keine* Komponente in Richtung der z -Achse, d. h. es ist $E_z = 0$. Der Vektor \vec{E} kann also als *ebener* Vektor aufgefasst werden. Jeder ebene Schnitt *senkrecht* zur Linienquelle (z -Achse) liefert das *gleiche* radialsymmetrische elektrische Feld (siehe Bild XIII-22; Schnittebene ist die x, y -Ebene, die z -Achse ist senkrecht zur Zeichenebene nach oben gerichtet).

**Bild XIII-22**

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist der *negative* Gradient des Potentials V [A57]:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y$$

Die Feldstärkekomponenten E_x und E_y sind somit die mit -1 multiplizierten partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Potentialfunktion $V(r) = V(x, y)$. Bevor wir diese Ableitungen bilden können, müssen wir das Potential in kartesischen Koordinaten ausdrücken. Den im Potential auftretenden logarithmischen Term bringen wir unter Verwendung der Beziehung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Logarithmen auf eine für das Differenzieren günstigere Form:

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \ln r - \ln r_0 = \ln(x^2 + y^2)^{1/2} - \ln r_0 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) - \ln r_0$$

Somit ist

$$V = V(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) - \ln r_0\right)$$

Mit der *Kettenregel* erhalten wir hieraus die gesuchten *Feldkomponenten* E_x und E_y :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) - \ln r_0 \right) \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) - \ln r_0 \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x - 0 \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^2} \quad (\text{mit } x^2 + y^2 = r^2) \end{aligned}$$

Analog: $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^2}$

Der *elektrische Feldstärkevektor* lautet somit in kartesischen Koordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^2} \vec{e}_x + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^2} \vec{e}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für den *Betrag* der Feldstärke erhalten wir (in Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned} E &= |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}, \quad r > 0 \end{aligned}$$

Er nimmt nach außen hin ab und zwar umgekehrt proportional zum Abstand r von der Leitermitte (z -Achse; siehe hierzu Bild XIII-23).

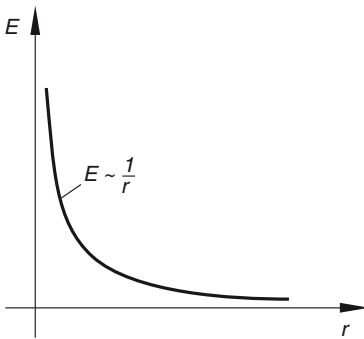


Bild XIII-23

- b) Das elektrische Feld ist *konservativ*, wenn der Vektor $\text{rot } \vec{E}$ *verschwindet*. Bei einem *ebenen* Feld wie in diesem Beispiel verschwinden bekanntlich die x - und y -Komponenten der Rotation *automatisch*. Die z -Komponente verschwindet, wenn die sog. *Integrabilitätsbedingung*

$$(\text{rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

erfüllt ist. Die benötigten partiellen Ableitungen lauten (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot x \cdot (-1) (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Die partiellen Ableitungen stimmen überein, das elektrische Feld ist somit *konservativ*.

- c) Das elektrische Feld ist *konservativ*, die Arbeit ist daher *wegunabhängig*, hängt also nur vom Anfangspunkt A und dem Endpunkt B ab. Wir wählen den in Bild XIII-24 skizzierten Weg C , der zunächst von A aus *radial* nach A^* (Weg C_1) und von dort auf dem *Kreisbogen* vom Radius r_2 weiter nach B^* verläuft (Weg C_2). Der Punkt B^* liegt dabei oberhalb oder unterhalb des Endpunktes B (in Richtung der z -Achse betrachtet) oder er fällt mit B zusammen. Bei der Verschiebung der Ladung Q von B^* nach B (parallel zur z -Achse) wird keine Arbeit verrichtet, da beide Punkte in einer gemeinsamen Äquipotentialfläche (Zylinderfläche) liegen. Die vom elektrischen Feld an der Ladung Q längs des Weges $C = C_1 + C_2$ verrichtete *Arbeit* W wird durch das *Arbeitsintegral*

$$\begin{aligned}W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= W_1 + W_2\end{aligned}$$

berechnet. Dabei ist \vec{F} die auf die Ladung einwirkende Kraft und $d\vec{r}$ das Wegelement in Richtung des Weges (Verschiebung der Ladung um $d\vec{r}$ in Wegerichtung).

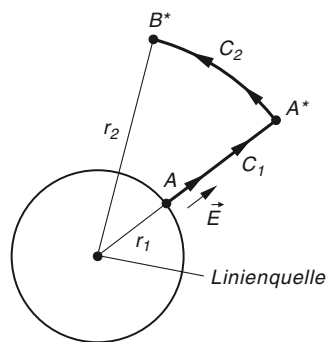


Bild XIII-24

Arbeit W_1 längs des Weges C_1 von A nach A^* :

Die Verschiebung der Ladung Q erfolgt in *radial*er Richtung (Feldrichtung). Daher gilt unter Berücksichtigung von $\vec{F} = Q\vec{E}$ [A10]:

$$\begin{aligned}dW_1 &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = (Q\vec{E}) \cdot d\vec{r} = Q(\vec{E} \cdot d\vec{r}) = Q(E \cdot dr \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_1) = QE dr = \\ &= Q \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr \\ W_1 &= \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln r \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)\end{aligned}$$

Arbeit W_2 längs des Weges C_2 von A^* nach B^* :

Der Verschiebungsvektor $d\vec{r}$ hat diesmal *tangentiale* Richtung und steht damit *senkrecht* auf den Vektoren \vec{E} und $\vec{F} = Q\vec{E}$. Somit gilt auf diesem kreisförmigen Wegstück:

$$dW_2 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (Q\vec{E}) \cdot d\vec{r} = Q(\vec{E} \cdot d\vec{r}) = Q(E \cdot dr \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_0) = 0$$

Durch Aufsummieren (Integration) folgt schließlich:

$$W_2 = \int_{C_2} dW_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Die Verschiebung erfolgt auf diesem Teilstück erwartungsgemäß *ohne* Arbeitsaufwand, da der Kreisbogen $\widehat{A^*B^*}$ in einer Äquipotentialfläche liegt.

Gesamtarbeit $W = W_1 + W_2$:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 0 = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

**Beispiel 15: Magnetische Feldstärke in der Achse
eines stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters**
Linienintegral

Ein kreisförmiger Leiter vom Radius R wird von einem konstanten Strom der Stärke I durchflossen (Bild XIII-25; der Kreisring liegt in einer Ebene senkrecht zur Zeichenebene).

a) Bestimmen Sie den Betrag H der magnetischen Feldstärke \vec{H} in einem Punkt P der Kreisringachse (x -Achse) durch Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes [A49].

b) Wie stark ist das Magnetfeld in der Ringmitte M bzw. in großer Entfernung von der Ringmitte?

x : Lagekoordinate des Punktes P
($-\infty < x < \infty$)

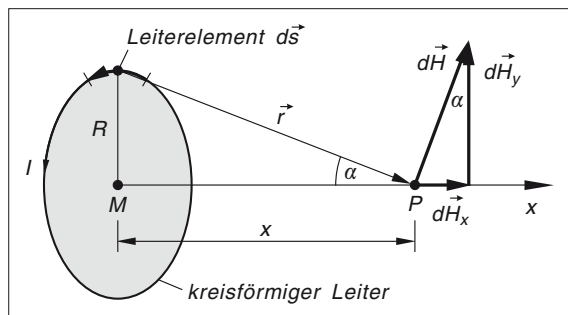


Bild XIII-25

Lösung :

- a) Wir betrachten ein im Kreisring gelegenes *Leiterelement* $d\vec{s}$ und einen Punkt P auf der Kreisringachse (das Leiterelement liegt in einer Ebene senkrecht zur Zeichenebene). \vec{r} ist der vom Leiterelement zum Punkt P führende Abstandsvektor der Länge $r = |\vec{r}|$, mit x bezeichnen wir den Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt M des Kreisringes (siehe Bild XIII-25). Das vom Strom I durchflossene Leiterelement $d\vec{s}$ erzeugt dann in P nach dem *Biot-Savartschen* Gesetz [A49] ein magnetisches Feld mit dem *Feldstärkevektor*

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

vom Betrage

$$dH = |d\vec{H}| = \frac{I}{4\pi} \cdot \left| \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \right| = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{|d\vec{s} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{r^3}$$

Da die Vektoren \vec{r} und $d\vec{s}$ einen *rechten* Winkel miteinander bilden, gilt

$$|\vec{r} \times d\vec{s}| = |\vec{r}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \sin 90^\circ = r \cdot ds \cdot 1 = r ds$$

und somit

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{r ds}{r^3} = \frac{I}{4\pi r^2} ds$$

Für die Komponente dH_x der magnetischen Feldstärke in *Achsenrichtung* (x -Richtung) erhalten wir dann aus den aus Bild XIII-25 ersichtlichen Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{|d\vec{H}_x|}{|d\vec{H}|} = \frac{dH_x}{dH} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{R}{|\vec{r}|} = \frac{R}{r}$$

den folgenden Ausdruck:

$$dH_x = dH \cdot \sin \alpha = \frac{I}{4\pi r^2} ds \cdot \frac{R}{r} = \frac{IR}{4\pi r^3} ds$$

Wegen der *Kreisymmetrie* gilt dann: In Achsenrichtung *addieren* sich die Beiträge dH_x aller Leiterelemente, während sich die dazu senkrechten Komponenten dH_y insgesamt in ihrer Wirkung *aufheben*⁵⁾.

Das *resultierende* Magnetfeld \vec{H} im Achsenpunkt P besitzt daher nur eine Komponente H_x in *Achsenrichtung*, d. h. es ist $H = H_x$. Durch Summation, d. h. Integration über sämtliche im Kreisring gelegenen Leiterelemente erhalten wir schließlich die resultierende magnetische Feldstärke im Achsenpunkt P (die Integration führt auf ein *Linienintegral*):

$$H = \oint dH_x = \oint \frac{IR}{4\pi r^3} ds = \frac{IR}{4\pi r^3} \cdot \underbrace{\oint ds}_{2\pi R} = \frac{IR}{4\pi r^3} \cdot 2\pi R = \frac{IR^2}{2r^3} = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{r^3}$$

⁵⁾ Die Komponenten dH_y *diametral* gegenüberliegender Leiterelemente haben *entgegengesetzte* Richtungen und heben sich somit paarweise auf.

Berücksichtigt haben wir dabei, dass das Linienintegral $\oint ds$ dem Umfang $2\pi R$ des stromdurchflossenen Kreises entspricht.

Die magnetische Feldstärke H lässt sich mit Hilfe der aus dem Satz des Pythagoras gewonnenen Beziehung $r^2 = R^2 + x^2$ (siehe Bild XIII-25) auch wie folgt durch die Koordinate x ausdrücken⁶⁾:

$$H(x) = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}$$

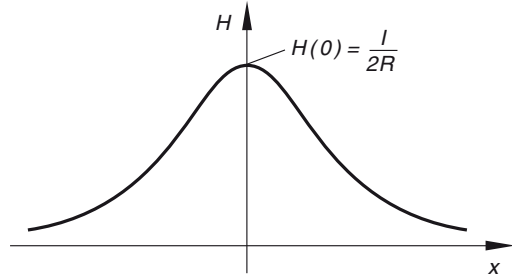


Bild XIII-26

$(-\infty < x < \infty)$. Der Verlauf dieser Funktion ist in Bild XIII-26 dargestellt.

- b) In der Ringmitte ($x = 0$) erreicht die magnetische Feldstärke (betragsmäßig) ihren *größten* Wert:

$$H_{\max} = H(x = 0) = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R^2)^3}} = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^6}} = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{R^3} = \frac{I}{2R}$$

In *großer* Entfernung von der Ringmitte, d. h. für $|x| \gg R$ ist $R^2 + x^2 \approx x^2$ und für die Feldstärke gilt dann (näherungsweise)

$$H(x) \approx \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2)^3}} = \frac{IR^2}{2} \cdot \frac{1}{|x|^3}, \quad |x| \gg R$$

Je weiter wir uns von der Ringmitte entfernen, umso *schwächer* wird das Magnetfeld (siehe Bild XIII-26).

Beispiel 16: Gravitationspotential der Erde

Rotation, konservatives Feld, Linienintegral

Im Gravitationsfeld der Erde erfährt eine Masse m eine Anziehungskraft nach dem von Newton stammenden *Gravitationsgesetz* [A18]

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r, \quad r \geq R$$

γ : Gravitationskonstante; M : Erdmasse; R : Erdradius; \vec{e}_r : radialer Einheitsvektor;

r : Abstand der Masse m vom Erdmittelpunkt

⁶⁾ Das Magnetfeld ist *spiegelsymmetrisch* zur Ebene des Kreistrings, daher kann die Koordinate x auch negative Werte annehmen.

- a) Zeigen Sie, dass dieses Kraftfeld *konservativ* und somit ein *Potentialfeld* ist.
- b) Bestimmen Sie das *Gravitationspotential* Φ , d. h. diejenige Arbeit, die man an der Einheitsmasse $m = 1$ verrichten muss, um diese aus dem Unendlichen in den Abstand r vom Erdmittelpunkt zu bringen ($r \geq R$).

Lehrbuch: Bd. 3, I.5.2, I.6.3.3 und I.7.4

Physikalische Grundlagen: A18

Lösung :

- a) Das kugelsymmetrische (radialsymmetrische) Gravitationsfeld \vec{F} ist *konservativ*, wenn es *wirbelfrei* ist, d. h. $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ gilt. Der in *Kugelkoordinaten* r , ϑ und φ ausgedrückte Vektor $\text{rot } \vec{F}$ reduziert sich zunächst auf

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi$$

da das Gravitationsfeld nur eine *Radialkomponente* F_r besitzt:

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad F_\vartheta = 0, \quad F_\varphi = 0$$

F_r hängt nur von r , nicht aber von den Winkeln ϑ und φ ab. Daher verschwinden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}$ und es gilt:

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot 0 \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \cdot 0 \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_\vartheta - 0 \vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

Das Gravitationsfeld ist somit *wirbelfrei* und *konservativ*.

- b) Das Gravitationspotential Φ ist definitionsgemäß durch das *weg-unabhängige* Linienintegral

$$\Phi = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

gegeben, wobei wir die Integration in *radialer* Richtung ausführen dürfen (siehe Bild XIII-27).

\vec{F} ist dabei die Gravitationskraft für die Einheitsmasse $m = 1$:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{e}_r = -\gamma M \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Da die Vektoren \vec{F} und $d\vec{r}$ gleiche Richtung haben, gilt

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos 0 = F \cdot dr \cdot 1 = F dr$$

Damit erhalten wir das folgende Gravitationspotential:

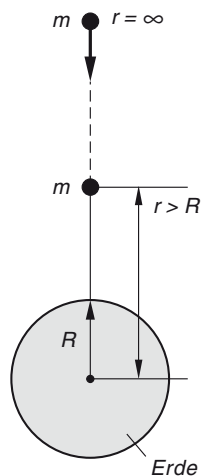


Bild XIII-27

$$\begin{aligned}
 \Phi &= - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \gamma M \cdot \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \gamma M \cdot \int_{\infty}^r r^{-2} dr = \gamma M \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{\infty}^r = \\
 &= \gamma M \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \gamma M \left(-\frac{1}{r} + 0 \right) = -\frac{\gamma M}{r} \sim \frac{1}{r}, \quad r \geq R
 \end{aligned}$$

Der Betrag des Gravitationspotentials hängt nur vom Abstand r ab und nimmt mit zunehmendem Abstand proportional zu $1/r$ ab (siehe Bild XIII-28).

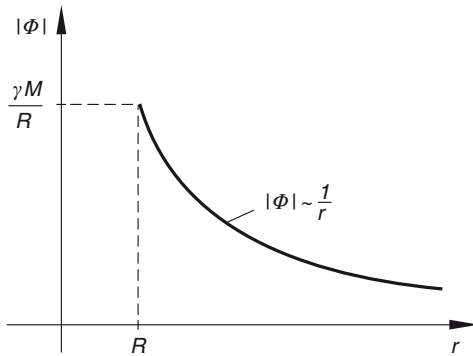


Bild XIII-28

Beispiel 17: Fluss eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche

*Oberflächenintegral, Volumenintegral,
Integralsatz von Gauß*

Ein *zylindrischer* Leiter mit dem Querschnittsradius R , der Länge (Höhe) H und der konstanten räumlichen Ladungsdichte $\varrho_{\text{el}} > 0$ (Ladung pro Volumeneinheit) erzeugt im Innen- und Außenraum ein *zylinder- oder axialsymmetrisches* elektrisches Feld mit der *elektrischen Feldstärke* (in Zylinderkoordinaten)

$$\vec{E} = \vec{E}(\varrho) = \begin{cases} \frac{\varrho_{\text{el}} \varrho}{2 \varepsilon_0} \vec{e}_{\varrho} & \varrho \leq R \quad (\text{Innenraum}) \\ \text{für} & \\ \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 \varrho} \vec{e}_{\varrho} & \varrho > R \quad (\text{Außenraum}) \end{cases}$$

ε_0 : elektrische Feldkonstante; ϱ : senkrechter Abstand eines Raumpunktes von der Zylinderachse (z -Achse); \vec{e}_{ϱ} : Einheitsvektor, senkrecht zur Zylinderachse nach außen gerichtet

Nach einer von *Maxwell* stammenden Beziehung sollte der *Fluss* dieses Feldes durch die (geschlossene) Oberfläche eines *koaxialen* Zylinders mit dem Radius $r > R$ den Wert Q/ϵ_0 besitzen, wobei Q die Ladung des zylindrischen Leiters bedeutet⁷⁾. Überprüfen Sie diese Aussage

- auf direktem Wege über das „Flussintegral“ (Oberflächenintegral),
- mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes*.

Hinweis: Wegen der vorgegebenen Symmetrie verwendet man zweckmäßigerweise *Zylinderkoordinaten* ϱ , φ und z .

Lehrbuch: Bd. 3, I.8 und I.9.1

Lösung :

- Der *Fluss* des elektrischen Feldes durch die Oberfläche A des koaxialen Zylinders mit dem Radius $r > R$ ist durch das Oberflächenintegral („Flussintegral“)

$$\oiint\limits_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \iint\limits_{(M)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA$$

gegeben (M : Mantelfläche des koaxialen Zylinders, siehe Bild XIII-29).

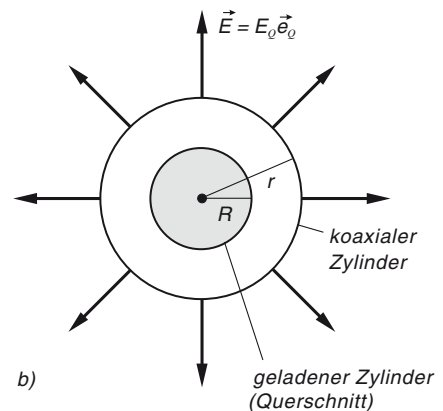
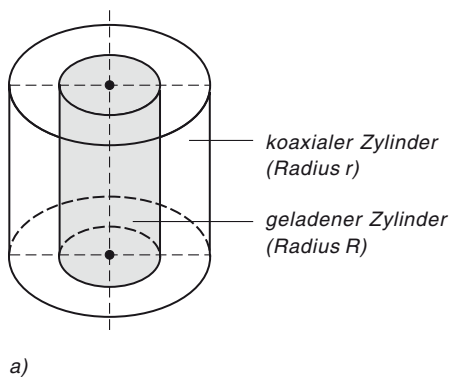


Bild XIII-29

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass weder der „Boden“ noch der „Deckel“ des Zylinders Beiträge liefern, da das elektrische Feld *keine* Komponente in Achsenrichtung hat ($E_z = 0$; es existiert nur eine *senkrecht* zur Achse gerichtete *axiale* Komponente $E_\varrho \neq 0$, siehe Bild XIII-29b)). Der Fluss des Feldes erfolgt also ausschließlich durch die *Mantelfläche* M des koaxialen Zylinders.

⁷⁾ Es handelt sich bei dieser Beziehung um eine der vier *Maxwellschen Gleichungen*.

Im Integrand $\vec{E} \cdot \vec{N}$ des Flussintegrals ist \vec{E} die elektrische Feldstärke auf der Mantelfläche, also für den Zylinderradius $\varrho = r > R$, und \vec{N} die Flächennormale, identisch mit dem nach außen gerichteten Einheitsvektor \vec{e}_ϱ . Wir erhalten damit für das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{N}$ auf der Mantelfläche den *konstanten* Wert

$$\vec{E} \cdot \vec{N} = \vec{E} \cdot \vec{e}_\varrho = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \underbrace{(\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho)}_1 = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r}$$

Der *Fluss* des elektrischen Feldes durch die Oberfläche des coaxialen Zylinders vom Radius $r > R$ beträgt dann:

$$\begin{aligned} \oiint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA &= \iint_{(M)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(M)} \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} dA = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \cdot \underbrace{\iint_{(M)} dA}_{2 \pi r H} \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 r} \cdot 2 \pi r H = \frac{\varrho_{\text{el}} (\pi R^2 H)}{\varepsilon_0} = \frac{\varrho_{\text{el}} V_z}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass das Oberflächenintegral $\iint_{(M)} dA$ die Mantelfläche

$M = 2 \pi r H$ des *coaxialen* Zylinders beschreibt, $V_z = \pi R^2 H$ das Volumen und $Q = \varrho_{\text{el}} V_z$ die Ladung des *zylindrischen* Leiters ist.

- b) Der *Integralsatz von Gauß* ermöglicht die Berechnung des gesuchten „Flussintegrals“ (Oberflächenintegrals) durch ein *Volumenintegral* (Dreifachintegral). Es gilt nach Gauß:

$$\oiint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{E} dV$$

Die Integration erfolgt dabei über das Volumen V des *coaxialen* Zylinders vom Radius $r > R$. Zunächst aber berechnen wir die *Divergenz* des \vec{E} -Feldes und zwar getrennt für den Innen- bzw. Außenbereich des zylindrischen Leiters, beachten dabei, dass in beiden Fällen nur eine (von null verschiedene) *axiale* Feldkomponente E_ϱ existiert, während die beiden restlichen Komponenten E_φ und E_z *verschwinden* ($E_\varrho \neq 0$; $E_\varphi = E_z = 0$).

Im *Innenraum* ($\varrho \leq R$) gilt:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot E_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \cdot \frac{\varrho_{\text{el}} \varrho}{2 \varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\varrho_{\text{el}}}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2) = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}}}{2 \varepsilon_0 \varrho} \cdot 2 \varrho = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Im *Außenraum* ($\varrho > R$) dagegen verschwindet die Divergenz:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot E_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \cdot \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 \varrho} \right) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \underbrace{\left(\frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \right)}_{\text{const.}} = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 = 0$$

Für die Integration bedeutet dies: Da die Divergenz im *Außenraum* des zylindrischen Leiters verschwindet, können wir den Integrationsbereich auf das Volumen V_z des *zylindrischen* Leiters beschränken (keine Beiträge außerhalb des Leiters, siehe hierzu Bild XIII-30).

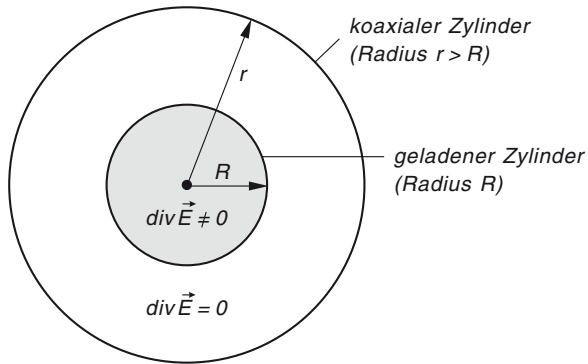


Bild XIII-30

Damit erhalten wir mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes den folgenden *Fluss* durch die Oberfläche des koaxialen Zylinders:

$$\begin{aligned} \oiint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA &= \iiint_{(V_z)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_{(V_z)} \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} dV = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\iiint_{(V_z)} dV}_{V_z} = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot V_z = \frac{\varrho_{\text{el}} V_z}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass das Dreifachintegral $\iiint_{(V_z)} dV$ das Volumen V_z und $Q = \varrho_{\text{el}} V_z$ die Ladung des zylindrischen Leiters darstellt.

Fazit: Beide Berechnungen bestätigen die Aussage (Maxwellsche Gleichung).

Beispiel 18: Fluss eines Zentralfeldes durch eine konzentrische Kugeloberfläche
Divergenz, Oberflächenintegral, Integralsatz von Gauß

Bestimmen Sie den *Fluss* des speziellen Zentralfeldes $\vec{F} = r^2 \vec{r}$ durch eine konzentrische Kugeloberfläche vom Radius R

- auf direktem Wege über ein *Oberflächenintegral* („Flussintegral“),
- mit Hilfe eines *Volumenintegrals* unter Verwendung des *Integralsatzes von Gauß*.

Hinweis: \vec{r} ist der Ortsvektor eines Raumpunktes, r sein Betrag. Verwenden Sie Kugelkoordinaten r , ϑ , und φ .

Lehrbuch: Bd. 3, I.5.1, I.6.3.3, I.8 und I.9.1

Lösung:

Darstellung des *Zentralfeldes* in Kugelkoordinaten (mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$; \vec{e}_r ist der Einheitsvektor in *radialer* Richtung):

$$\vec{F} = r^2 \vec{r} = r^2 (r\vec{e}_r) = r^3 \vec{e}_r = F_r \vec{e}_r$$

Das radialsymmetrische Vektorfeld besitzt nur die *Radialkomponente* $F_r = r^3$, die Komponenten F_ϑ und F_φ dagegen *verschwinden*: $F_\vartheta = F_\varphi = 0$.

- a) Auf der *Kugeloberfläche* gilt $r = R$ und somit $\vec{F} = R^3 \vec{e}_r$. Die Flächennormale \vec{N} ist *identisch* mit dem radialen Einheitsvektor \vec{e}_r . Damit erhalten wir für den *Fluss* des Vektorfeldes \vec{F} durch die Oberfläche A der Kugel vom Radius R den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} \oint\oint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \oint\oint_{(A)} R^3 \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_1 dA = \oint\oint_{(A)} R^3 dA = R^3 \cdot \underbrace{\oint\oint_{(A)} dA}_{4\pi R^2} \\ &= R^3 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^5 \end{aligned}$$

Denn das Oberflächenintegral $\oint\oint_{(A)} dA$ entspricht der Kugeloberfläche $A = 4\pi R^2$.

- b) Das gesuchte *Flussintegral* (Oberflächenintegral) lässt sich mit Hilfe des *Integralsatzes von Gauß* auf ein *Volumenintegral* der Divergenz von \vec{F} zurückführen:

$$\oint\oint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

Für das skalare Feld $\operatorname{div} \vec{F}$ erhalten wir (in Kugelkoordinaten), da \vec{F} nur die *Radialkomponente* $F_r = r^3$ besitzt:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r^3) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^5) = \frac{1}{r^2} \cdot 5r^4 = 5r^2$$

Die Integration erstreckt sich dabei über das gesamte Volumen der Kugel vom Radius R . Der *Integrationsbereich* lautet somit:

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Mit dem *Volumenelement*

$$dV = r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

erhalten wir schließlich das folgende Dreifachintegral:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R 5 r^2 \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= 5 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^4 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Dieses Integral kann auch als *Produkt* dreier *gewöhnlicher* Integrale berechnet werden (der Integrand $r^4 \cdot \sin \vartheta$ ist ein Produkt aus zwei Faktoren r^4 und $\sin \vartheta$, die nur von r bzw. ϑ , d. h. einer einzigen Variablen abhängen):

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV &= 5 \cdot \int_{r=0}^R r^4 dr \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi = \\ &= 5 \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \cdot \left[-\cos \vartheta \right]_0^{\pi} \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot (-\cos \pi + \cos 0) \cdot 2\pi = R^5 (1 + 1) 2\pi = 4\pi R^5 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist (natürlich) das gleiche wie im Lösungsteil a).

Beispiel 19: Elektrische Ladung und Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugel

Integralsatz von Gauß, Oberflächenintegral

Das elektrische Feld in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel vom Radius R lässt sich durch den *elektrischen Feldstärkevektor*

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r, \quad r \geq R$$

mit $k > 0$ beschreiben.

r : Abstand vom Kugelmittelpunkt

\vec{e}_r : radialer Einheitsvektor

Bild XIII-31 zeigt einen ebenen Schnitt durch das nach außen gerichtete *Radialfeld* (Schnitt durch den Kugelmittelpunkt).

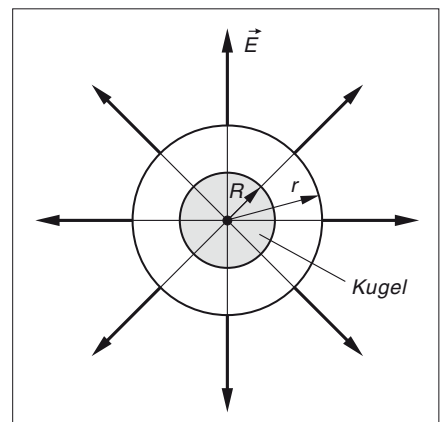


Bild XIII-31

Zwischen der (hier konstanten) *Ladungsdichte* ϱ_{el} der Kugel (Ladung pro Volumeneinheit) und dem erzeugten elektrischen Feld mit der *Feldstärke* \vec{E} besteht dabei nach *Maxwell* der folgende fundamentale Zusammenhang:

$$\varrho_{\text{el}} = \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E}$$

(ε_0 : elektrische Feldkonstante). Bestimmen Sie die felderzeugende *Ladung* Q sowie die *Ladungsdichte* ϱ_{el} der Kugel unter Verwendung des *Integralsatzes von Gauß*.

Lehrbuch: Bd. 3, I.8 und I.9.1

Lösung:

Ein Volumenelement dV der geladenen Kugel enthält die Ladung $dQ = \varrho_{\text{el}} dV$. Wir summieren (d. h. integrieren) über die Beiträge aller in der Kugel gelegenen Volumenelemente und erhalten für die gesuchte Ladung Q der Kugel die folgende Integraldarstellung, wobei wir noch die *Maxwellsche Beziehung* $\varrho_{\text{el}} = \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E}$ berücksichtigen:

$$Q = \iiint_{(V)} dQ = \iiint_{(V)} \varrho_{\text{el}} dV = \iiint_{(V)} \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} dV = \varepsilon_0 \cdot \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV$$

Da wir weder die Ladungsdichte ϱ_{el} noch die elektrische Feldstärke \vec{E} im *Inneren* der Kugel kennen, können wir diese Dreifachintegrale nicht auf direktem Wege berechnen⁸⁾. Mit Hilfe des *Integralsatzes von Gauß* jedoch lässt sich das letzte Dreifachintegral über die Divergenz des Feldes \vec{E} auf ein *Oberflächenintegral* zurückführen. Es gilt nämlich nach *Gauß*

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \oiint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA$$

Die Integration ist dabei über *Kugeloberfläche* zu erstrecken. Die Flächennormale \vec{N} ist identisch mit dem radialen Einheitsvektor \vec{e}_r . Auf der Kugeloberfläche hat der Integrand des Oberflächenintegrals den folgenden *konstanten* Wert (es ist $r = R$):

$$\vec{E} \cdot \vec{N} = \frac{k}{R^2} \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_1 = \frac{k}{R^2}$$

Damit erhalten wir für das Oberflächenintegral:

$$\oiint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \oiint_{(A)} \frac{k}{R^2} dA = \frac{k}{R^2} \cdot \underbrace{\oiint_{(A)} dA}_{4\pi R^2} = \frac{k}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k$$

⁸⁾ Wir kennen nur die elektrische Feldstärke *außerhalb* der Kugel!

Denn das Integral $\oint\oint_{(A)} dA$ beschreibt den Flächeninhalt der Kugeloberfläche: $A = 4\pi R^2$.

Für die *Ladung* Q und die *Ladungsdichte* ϱ_{el} ergeben sich somit folgende Formeln:

$$Q = \varepsilon_0 \cdot \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \varepsilon_0 \cdot \oint\oint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \varepsilon_0 \cdot 4\pi k = 4\pi \varepsilon_0 k$$

$$\varrho_{\text{el}} = \frac{\text{Ladung } Q}{\text{Kugelvolumen } V} = \frac{4\pi \varepsilon_0 k}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\varepsilon_0 k}{R^3}$$

Beispiel 20: Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen zylindrischen Leiters

Rotation, Integralsatz von Stokes

Ein sehr langer zylindrischer Leiter mit dem Querschnittsradius R wird in Längsrichtung (z -Achse) von einem Strom der *konstanten* Stromdichte $\vec{S} = S_0 \vec{e}_z$ durchflossen. Zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{H} des *ring-* bzw. *kreisförmigen* Magnetfeldes und dem Stromdichtevektor \vec{S} besteht die nach *Maxwell* benannte Beziehung $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{S}$ (es handelt sich hierbei um eine der vier *Maxwellschen Gleichungen* aus der Elektrodynamik). Der *Betrag* H der magnetischen Feldstärke \vec{H} hängt dabei aus Symmetriegründen nur vom senkrechten Abstand ϱ zur Leiterachse (z -Achse) ab: $H = H(\varrho)$. Bestimmen Sie diese Abhängigkeit

- im *Innenraum* des Zylinders ($\varrho \leq R$) unter ausschließlicher Verwendung der *Maxwellschen Gleichung* $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{S}$,
- im *Außenraum* des Zylinders ($\varrho \geq R$) mit Hilfe des *Integralsatzes* von Stokes.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe *Zylinderkoordinaten* ϱ , φ und z .

Lehrbuch: Bd. 3, I.5.2, I.6.2.3 und I.9.2

Lösung :

In *jeder* Schnittebene senkrecht zur Zylinderachse (z -Achse) verlaufen die (geschlossenen) magnetischen Feldlinien in Form von *konzentrischen Kreisen* um die Leiterachse. Der Feldstärkevektor \vec{H} besitzt daher nur eine *Tangentialkomponente* H_φ , jedoch keine Komponenten in radialer Richtung bzw. in Richtung der z -Achse (Leiterachse): $H_\varrho = H_z = 0$ (siehe Bild XIII-32). Somit gilt:

$$\vec{H} = H_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \text{mit} \quad H = |\vec{H}| = H_\varphi$$

Die Komponente H_φ und damit der Betrag H der magnetischen Feldstärke \vec{H} hängen nur von der Abstandskoordinate ϱ , nicht aber von φ und z ab:

$$H = H(\varrho) = H_\varphi(\varrho)$$

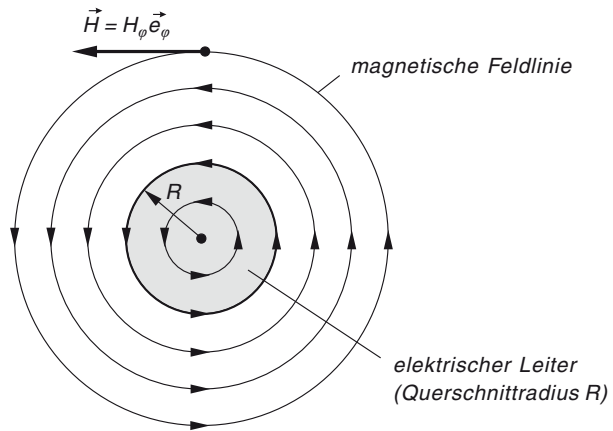


Bild XIII-32

- a) In Zylinderkoordinaten ausgedrückt reduziert sich die *Rotation* des Vektors \vec{H} wegen $H_\varrho = H_z = 0$ und der Unabhängigkeit der Komponente H_φ von φ und z auf

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot H_\varphi) \vec{e}_z = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot H) \vec{e}_z \quad (\text{mit } H_\varphi = H)$$

(es besteht kein Unterschied zwischen der partiellen und der gewöhnlichen Ableitung). Die Maxwellsche Gleichung führt dann im *Innenraum* des Leiters ($\varrho \leq R$) zu einer einfachen Differentialgleichung, die wir durch Integration wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} = \vec{S} = S_0 \vec{e}_z &\Rightarrow \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot H) \vec{e}_z = S_0 \vec{e}_z \Rightarrow \\ \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot H) &= S_0 \Big| \cdot \varrho \Rightarrow \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot H) = S_0 \varrho \Rightarrow \\ \int \frac{d}{d\varrho} (\varrho \cdot H) d\varrho &= \int S_0 \varrho d\varrho \Rightarrow \varrho \cdot H = \frac{1}{2} S_0 \varrho^2 + C_1 \end{aligned}$$

Auf der Leiterachse ist $\varrho = 0$ und somit $C_1 = 0$. Damit erhalten wir für den *Betrag* der magnetischen Feldstärke im *Innenraum* des Zylinders:

$$H = H(\varrho) = \frac{1}{2} S_0 \cdot \varrho, \quad \varrho \leq R$$

Die *Stärke* des Magnetfeldes nimmt somit von innen nach außen *linear* zu: $H \sim \varrho$ (siehe Bild XIII-33).

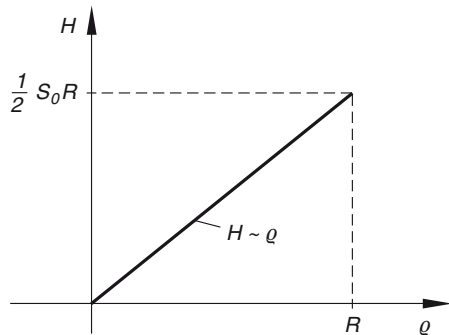


Bild XIII-33

b) Im *Außenraum* des zylindrischen Leiters ($\varrho \geq R$) verwenden wir den *Integralsatz von Stokes*:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\text{rot } \vec{H}) \cdot \vec{N} dA$$

Dabei bedeuten (siehe Bild XIII-34):

K : Ringförmige (kreisförmige) magnetische Feldlinie mit dem Radius ϱ

A : Kreisfläche, von der Feldlinie K umrandet

\vec{N} : Flächennormale (identisch mit dem Einheitsvektor \vec{e}_z in Richtung der Zylinderachse)

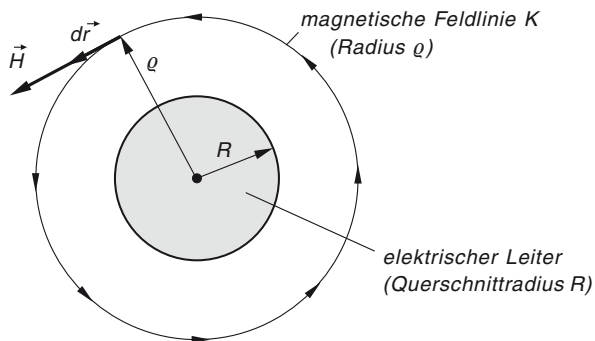


Bild XIII-34

Berechnung des Linienintegrals (sog. „Zirkulation“)

Die Vektoren \vec{H} und $d\vec{r}$ verlaufen jeweils *tangential* und sind somit *parallel* (siehe Bild XIII-34). Somit gilt für das Skalarprodukt $\vec{H} \cdot d\vec{r}$ im Linienintegral:

$$\vec{H} \cdot d\vec{r} = H \cdot dr \cdot \cos 0^\circ = H \cdot dr \cdot 1 = H dr$$

Die Tangentialkomponente $H_\varphi = H$ hängt nur von ϱ ab und ist daher längs der kreisförmigen Feldlinie K *konstant*. Wir erhalten für das als *Zirkulation* bezeichnete Linienintegral den folgenden Ausdruck:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_K H dr = H \cdot \underbrace{\oint_K dr}_{2\pi\varrho} = H \cdot 2\pi\varrho = 2\pi\varrho H$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass das geschlossene Linienintegral $\oint_K dr$ dem Kreisumfang $2\pi\varrho$ entspricht.

Berechnung des Oberflächenintegrals (sog. „Wirbelfluss“)

Innerhalb des zylindrischen Leiters gilt $\text{rot } \vec{H} = S_0 \vec{e}_z$, *außerhalb* dagegen $\text{rot } \vec{H} = 0$ (hier fließt kein Strom; siehe Bild XIII-35). Die für den *Wirbelfluss* wirksame Fläche beschränkt sich daher auf die Querschnittsfläche A^* des Leiters. Somit erhalten wir den folgenden *Wirbelfluss*:

$$\begin{aligned}
 \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dA &= \iint_{(A^*)} (S_0 \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z dA = S_0 \cdot \iint_{(A^*)} \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_1 dA = S_0 \cdot \underbrace{\iint_{(A^*)} dA}_{\pi R^2} = \\
 &= S_0 \cdot \pi R^2 = \pi R^2 S_0
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt wurde dabei, dass die Flächennormale \vec{N} mit dem Einheitsvektor \vec{e}_z identisch ist und das Oberflächenintegral $\iint_{(A^*)} dA$ die Querschnittsfläche $A^* = \pi R^2$ des Leiters darstellt.

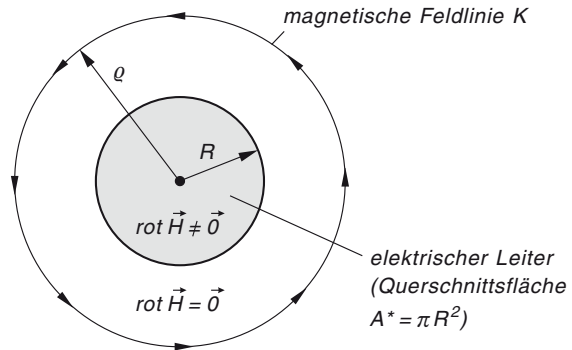


Bild XIII-35

Integralsatz von Stokes

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dA \Rightarrow 2\pi \varrho H = \pi R^2 S_0 \quad \text{oder} \quad 2\varrho H = R^2 S_0$$

Damit erhalten wir im *Außenraum* ein Magnetfeld, dessen Stärke nach der Gleichung

$$H = H(\varrho) = \frac{R^2 S_0}{2\varrho} = \frac{R^2 S_0}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} \sim \frac{1}{\varrho}, \quad \varrho \geq R$$

reziprok zum Abstand ϱ nach außen hin *abnimmt*.

Der Verlauf des Betrages H der magnetischen Feldstärke \vec{H} innerhalb und außerhalb des Leiters ist in Bild XIII-36 dargestellt.

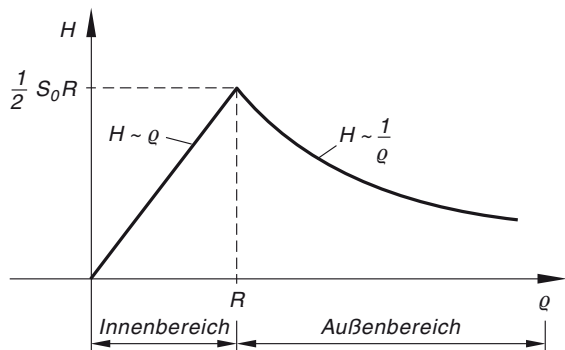


Bild XIII-36

Anhang: Physikalische Grundlagen

A 1

Statische Gleichgewichtsbedingungen

a) Allgemeiner Fall

Ein (ebenes oder räumliches) *Kräfte*system $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ist im *Gleichgewicht*, wenn sowohl die *Summe* aller Kräfte \vec{F}_i als auch die *Summe* aller von diesen Kräften erzeugten Momente \vec{M}_i *verschwindet*:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$$

Diesen beiden *Vektorgleichungen* entsprechen die folgenden sechs *skalaren* Gleichungen (*Komponentengleichungen*):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \end{aligned}$$

F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} : *Kraftkomponenten* ($i = 1, 2, \dots, n$)

M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} : *Komponenten der Momente* ($i = 1, 2, \dots, n$)

b) Kräftesystem mit einem gemeinsamen Angriffspunkt

Die Gleichgewichtsbedingung *reduziert* sich auf

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

oder (in der Komponentendarstellung)

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

A 2

Schwerpunkt eines Massenpunktsystems

Ein *Massenpunktsystem* enthalte n *punktförmige* Massen m_1, m_2, \dots, m_n , deren räumliche Lage durch die *Ortsvektoren* $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ festgelegt sei. Der *Ortsvektor* \vec{r}_S des *Schwerpunktes* S genügt dann der Vektorgleichung

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{r}_S = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

A 3**Elektrische Feldstärke in der Umgebung einer elektrischen Punktladung**

Eine *elektrische Punktladung* Q erzeugt im Abstand r ein elektrisches Feld mit der *elektrischen Feldstärke* vom Betrag

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad r > 0$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; ϵ : Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums

A 4**Magnetische Feldstärke in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters**

Ein vom Strom I durchflossener *linearer elektrischer Leiter* erzeugt im senkrechten Abstand r von der Leiterachse ein magnetisches Feld mit der *magnetischen Feldstärke* vom Betrag

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad r > 0$$

A 5**Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte und der magnetischen Feldstärke**

Zwischen der *magnetischen Flussdichte* \vec{B} und der *magnetischen Feldstärke* \vec{H} besteht der folgende Zusammenhang:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

μ_0 : magnetische Feldkonstante; μ : Permeabilität

A 6**Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen linearen Leiter in einem Magnetfeld**

Ein vom Strom I durchflossener *linearer elektrischer Leiter* mit dem Längenvektor \vec{l} erfährt in einem Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} die *Kraft*

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad \text{vom Betrag} \quad F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \varphi$$

$l = |\vec{l}|$: Länge des Leiters; φ : Winkel zwischen Leiter und Magnetfeld

A 7

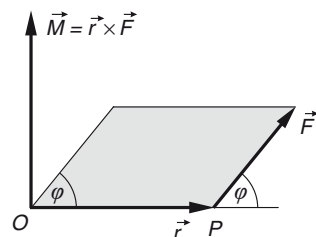
Moment einer Kraft

Das *Moment* \vec{M} einer Kraft \vec{F} , die in einem Punkt P mit dem Ortsvektor \vec{r} angreift, ist definitionsgemäß das *Vektorprodukt* aus dem Ortsvektor \vec{r} und dem Kraftvektor \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Betrag des Momentes:

$$\begin{aligned} M &= |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi = \\ &= r \cdot F \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$



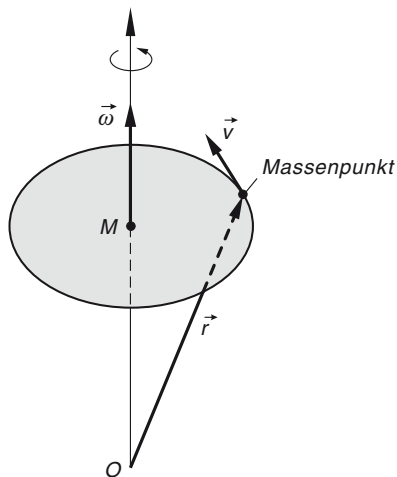
Sonderfall: Die Komponenten M_x und M_y des Momentenvektors \vec{M} *verschwinden*, wenn Ortsvektor \vec{r} und Kraftvektor \vec{F} in der x, y -Ebene liegen. Es verbleibt dann nur die z -Komponente $M_z = xF_y - yF_x$.

A 8

Zusammenhang zwischen der Bahn- und der Winkelgeschwindigkeit

Die *Bahngeschwindigkeit* \vec{v} eines Massenpunktes, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt M rotiert, ist das *Vektorprodukt* aus der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem (augenblicklichen) Ortsvektor \vec{r} des Massenpunktes:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



A 9

Kraftwirkung auf eine bewegte elektrische Punktladung in einem Magnetfeld (Lorentzkraft)

Eine *elektrische Punktladung* q , die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} bewegt, erfährt dort die sog. *Lorentzkraft*

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

A 10

Kraftwirkung auf eine elektrische Punktladung in einem elektrischen Feld

Eine *elektrische Punktladung* q erfährt in einem elektrischen Feld mit der elektrischen Feldstärke \vec{E} die *Kraft*

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{vom Betrag} \quad F = |q| \cdot E$$

A 11

Magnetischer Fluss durch eine ebene Fläche

Wird eine *ebene* Fläche mit dem Flächeninhalt A von einem *homogenen* Magnetfeld mit der (konstanten) magnetischen Flussdichte \vec{B} durchflutet, so ist der *magnetische Fluss* durch diese Fläche durch das *Skalarprodukt*

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

gegeben. Dabei ist \vec{A} ein *senkrecht* auf der Fläche stehender Vektor, dessen Betrag dem *Flächeninhalt* A entspricht.

Sonderfall: Wird die Fläche A *senkrecht* von einem Magnetfeld mit der konstanten Flussdichte B durchflutet, so ist $\Phi = B \cdot A$.

A 12

Induktionsgesetz

Wird eine *Leiterschleife* mit N Windungen (*Spule*) von einem *zeitlich veränderlichen* magnetischen Fluss $\Phi = \Phi(t)$ durchflutet, so entsteht durch *elektromagnetische Induktion* eine *Induktionsspannung* vom Betrag

$$U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \dot{\Phi}(t)$$

A 13

Kirchhoffsche Regeln (Auszug)

Die hier für *Gleichstromkreise* formulierten *Kirchhoffschen Regeln* gelten *sinngemäß* auch für *Wechselstromkreise*, wenn man die Gleichstromgrößen durch die entsprechenden *komplexen* Wechselstromgrößen ersetzt.

a) Gesetze der Reihenschaltung

Die Einzelwiderstände R_1, R_2, \dots, R_n einer Reihenschaltung addieren sich zum *Gesamtwiderstand* R :

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Die Teilspannungen U_1, U_2, \dots, U_n an den Einzelwiderständen R_1, R_2, \dots, R_n addieren sich zur *Gesamtspannung* U (angelegte Spannung):

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

b) Gesetze der Parallelschaltung

Die *Kehrwerte* der Einzelwiderstände R_1, R_2, \dots, R_n einer Parallelschaltung *addieren* sich zum *Kehrwert* des *Gesamtwiderstandes* R :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Die *Einzelleitwerte* G_1, G_2, \dots, G_n *addieren* sich zum *Gesamtleitwert* G :

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

(Leitwert = Kehrwert des Widerstandes)

An *jedem* der *parallel* geschalteten Stromzweige liegt dabei die *gleiche* Spannung U :

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U = \text{const.}$$

A 14**Ohmsches Gesetz**

Bei einem *metallischen Leiter* sind Stromstärke I und Spannung U *einander proportional*. Es gilt das *ohmsche Gesetz*

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.}$$

R ist der *ohmsche Widerstand* des Leiters. Diese *lineare* Beziehung gilt auch für *zeitabhängige* Ströme und Spannungen und deren Effektivwerte.

A 15**Zentrifugalkraft**

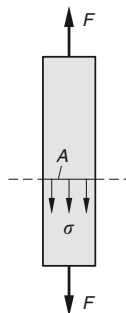
Ein *punktförmiger Körper* der Masse m , der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt, erfährt eine nach *außen* gerichtete *Zentrifugalkraft* vom Betrag

$$F_Z = m \omega^2 r$$

A 16**Zugspannung in einem Zugstab**

Eine an einem *Zugstab* in *axialer* Richtung angreifende Kraft F erzeugt bei *konstanter* Querschnittsfläche A an jeder Schnittstelle die *Zugspannung*

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



A 17**Fallgesetze im luftleeren Raum**

Für *Fallweg* s und *Fallgeschwindigkeit* v gelten im *luftleeren* Raum folgende Zeitabhängigkeiten:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \quad \text{und} \quad v = g t + v_0$$

t : Zeit; g : Erdbeschleunigung; v_0 : Anfangsgeschwindigkeit; s_0 : Anfangsweg

A 18**Gravitationsgesetz von Newton**

Zwischen zwei *punktförmigen* Massen m_1 und m_2 im gegenseitigen Abstand r wirkt stets *eine Anziehungskraft* (*Gravitationskraft*) vom Betrag

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad r > 0$$

γ : Gravitationskonstante

A 19**Definition der Stromdichte**

Die *Stromdichte* \vec{S} ist ein *Vektor*, der die *Verteilung* des elektrischen Stroms in einem Leiter beschreibt und somit i. Allg. eine von Ort zu Ort verschiedene Größe darstellt. Die *Richtung* des Vektors \vec{S} fällt mit der *Strömungsrichtung* zusammen, der *Betrag* der Stromdichte ist definitionsgemäß

$$S = \frac{dI}{dA}$$

Dabei ist dA ein Flächenelement *senkrecht* zur Strömungsrichtung und dI der durch dieses Flächenelement fließende Strom.

Sonderfall: Bei *gleichmäßiger* (homogener) Stromverteilung gilt

$$S = \frac{I}{A} = \text{const.}$$

I : Stromstärke; A : Querschnittsfläche des Leiters

A 20**Kapazität eines Plattenkondensators**

Ein *Plattenkondensator* mit der Plattenfläche A (Fläche *einer* Platte) und dem Plattenabstand d besitzt die *Kapazität*

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d}$$

ε_0 : elektrische Feldkonstante; ε : Dielektrizitätskonstante des Isolators, mit dem der Kondensator *vollständig* gefüllt ist

A 21**Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren (Kapazitäten)****a) Reihenschaltung**

Die *Kehrwerte* der Einzelkapazitäten C_1, C_2, \dots, C_n einer Reihenschaltung *addieren* sich zum *Kehrwert* der *Gesamtkapazität* C :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

b) Parallelschaltung

Die Einzelkapazitäten C_1, C_2, \dots, C_n einer Parallelschaltung *addieren* sich zur *Gesamtkapazität* C :

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

A 22**Energieerhaltungssatz der Mechanik**

In einem *abgeschlossenen* mechanischen System bleibt die *Gesamtenergie* E *erhalten*:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{sp}} + E_{\text{rot}} = \text{const.}$$

Es findet lediglich eine *Umwandlung* zwischen den einzelnen *Energieformen* statt.

$$E_{\text{pot}} = m g h: \quad \text{Potentielle Energie (Lageenergie)}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2: \quad \text{Kinetische Energie (Bewegungsenergie)}$$

$$E_{\text{sp}} = \frac{1}{2} c s^2: \quad \text{Spannungsenergie einer Feder}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_S \omega^2: \quad \text{Rotationsenergie (bei Drehung um den Schwerpunkt } S)$$

m : Masse; g : Erdbeschleunigung; h : Höhe; v : Geschwindigkeit; c : Federkonstante; s : Auslenkung der Feder; J_S : Massenträgheitsmoment des rotierenden Körpers bezüglich der Schwerpunktschwerachse; ω : Winkelgeschwindigkeit

A 23**Impuls einer punktförmigen Masse**

Unter dem *Impuls* \vec{p} einer *punktförmigen* Masse m , die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, versteht man definitionsgemäß die *Vektorgroße*

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \text{vom Betrag} \quad p = m v$$

A 24

Impulserhaltungssatz

In einem *abgeschlossenen* mechanischen System ist der *Gesamtimpuls* \vec{p} , d. h. die *Summe* der *Einzelimpulse* \vec{p}_i *konstant*:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{const.}}$$

A 25

Elektrische Feldstärke in einem Plattenkondensator

Wird ein *Plattenkondensator* mit dem Plattenabstand d auf die Spannung U aufgeladen, so besitzt das Kondensatorfeld die konstante *elektrische Feldstärke* vom Betrag

$$E = \frac{U}{d}$$

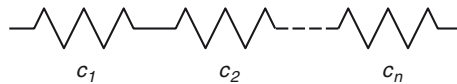
A 26

Reihen- und Parallelschaltung von elastischen Federn

a) Reihenschaltung

Die *Kehrwerte* der Einzelfederkonstanten c_1, c_2, \dots, c_n *addieren* sich zum *Kehrwert* der *resultierenden Federkonstanten* c (Federkonstante der *Ersatzfeder*):

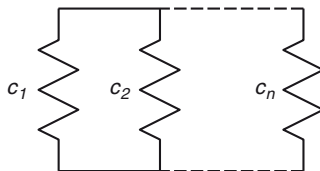
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$$



b) Parallelschaltung

Die Einzelfederkonstanten c_1, c_2, \dots, c_n *addieren* sich zur *resultierenden Federkonstanten* c (Federkonstante der *Ersatzfeder*):

$$c = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$



A 27**Newtonsches Grundgesetz**

Ein Körper mit der *konstanten* Masse m erfährt durch das gleichzeitige Einwirken der Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ eine *Beschleunigung* \vec{a} , die nach dem *Newtonschen Grundgesetz* der *resultierenden* Kraft $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ *proportional* ist. Es gilt:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

A 28**Biegegleichung (Differentialgleichung einer Biegelinie)**

Für *kleine* Durchbiegungen genügt die *Biegelinie* $y = y(x)$ eines elastischen Balkens der *Differentialgleichung* 2. Ordnung

$$y'' = -\frac{M_b(x)}{EI}$$

$M_b(x)$ ist dabei das *Biegemoment* an der Stelle x .

EI : *Biegesteifigkeit* des Balkens; E : Elastizitätsmodul; I : Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment) des Balkenquerschnitts

A 29**Zusammenhang zwischen Biegemoment, Querkraft und Streckenlast bei einem elastischen Balken**

Bei einem *elastischen Balken* bestehen zwischen dem *Biegemoment* $M_b(x)$, der *Querkraft* $Q(x)$ und der *Streckenlast* $q(x)$ die folgenden Beziehungen:

$$Q(x) = M'_b(x), \quad q(x) = -Q'(x) = -M''_b(x)$$

bzw.

$$Q(x) = -\int q(x) dx, \quad M_b(x) = \int Q(x) dx$$

A 30**Zusammenhang zwischen Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung**

Bei einer *Drehbewegung* lässt sich die augenblickliche Lage des rotierenden Massenpunktes durch einen *zeitabhängigen* Drehwinkel $\varphi = \varphi(t)$ beschreiben. Durch *ein-* bzw. *zweimalige* Differentiation nach der Zeit t erhält man daraus die *Winkelgeschwindigkeit* $\omega = \omega(t)$ bzw. die *Winkelbeschleunigung* $\alpha = \alpha(t)$:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t), \quad \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

Die Punkte über φ und ω kennzeichnen die Ableitung nach der Zeit t .

A 31**Satz von Steiner für Massenträgheitsmomente**

$$J = J_S + m d^2$$

J_S : Massenträgheitsmoment bezüglich der *Schwerpunktachse*

J : Massenträgheitsmoment bezüglich einer zur Schwerpunktachse *parallelen* Achse

d : Abstand der beiden Achsen

m : Masse des Körpers

A 32**Maschenregel**

In jeder *Netzmasche* ist die *Summe* der Spannungen gleich *null*:

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad (U_i: \text{Teilspannung; } i = 1, 2, \dots, n)$$

A 33**Leistung eines Gleichstroms**

Ein *Gleichstrom* der Stärke I erzeugt in einem ohmschen Widerstand R die *Leistung*

$$P = UI = RI^2$$

$U = RI$: Spannungsabfall am ohmschen Widerstand

A 34**Elektrische Feldstärke in der Umgebung eines geladenen linearen Leiters (Linienquelle)**

Ein *linearer elektrischer Leiter* mit der Länge l und der Ladung Q erzeugt im senkrechten Abstand r von der Leiterachse ein elektrisches Feld mit der *elektrischen Feldstärke* vom Betrag

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l r}, \quad r > 0$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; ϵ : Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums.

Diese Formel gilt auch für den *Außenraum* eines geladenen *Zylinders*.

A 35**Archimedisches Prinzip (Auftrieb in einer Flüssigkeit)**

Ein Körper erfährt beim *Eintauchen* in eine Flüssigkeit eine der Schwerkraft *entgegen* gerichtete *Auftriebskraft*. Diese ist gleich dem *Gewicht* der vom *eingetauchten* Körper *verdrängten* Flüssigkeitsmenge.

A 36**Grundgesetz der Drehbewegung**

Ein Körper rotiere infolge der von *außen* einwirkenden *Momente* $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ mit der *Winkelbeschleunigung* $\vec{\alpha}$ um eine Achse. Die Winkelbeschleunigung ist dann dem *resultierenden* äußeren Moment $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ *proportional*. Es gilt:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = J \vec{\alpha}$$

J : *Massenträgheitsmoment* des Körpers bezüglich der Drehachse

A 37**Induktionsspannung in einem durch ein Magnetfeld bewegten elektrischen Leiter**

Wird ein *elektrischer Leiter* der Länge l mit der konstanten Geschwindigkeit v *senkrecht* zu den Feldlinien eines *homogenen* Magnetfeldes der konstanten Flussdichte B bewegt, so beträgt die im Leiter durch *elektromagnetische Induktion* erzeugte *Spannung*

$$U = B l v$$

A 38**Magnetischer Fluss durch eine ebene Fläche**

Eine *ebene* Fläche mit dem Flächeninhalt A werde *senkrecht* von einem Magnetfeld mit einer *ortsabhängigen* magnetischen Flussdichte vom Betrag B durchflutet. Der *magnetische Fluss* durch diese Fläche ist dann durch das *Doppelintegral*

$$\Phi = \iint_{(A)} d\Phi = \iint_{(A)} B dA$$

gegeben. $d\Phi = B dA$ ist dabei der magnetische Fluss durch das *Flächenelement* dA .

Sonderfall: In einem homogenen Feld ist $B = \text{const.}$ und somit $\Phi = B A$.

A 39**Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes mit Kreis- oder Zylindersymmetrie**

In einem elektrischen Feld mit *Kreis-* oder *Zylindersymmetrie* ist der Betrag der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} eine reine Funktion $E = E(r)$ der *Abstands-kordinate* r (*senkrechter* Abstand zur Symmetrieachse). Die *Spannung* U zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit den Abstands-kordinaten r_1 und r_2 ist dann durch das *Integral*

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr$$

gegeben.

A 40**Definitionsgleichung der Kapazität eines Kondensators**

Die Ladung Q eines *Kondensators* ist der angelegten Spannung U *proportional*. Seine *Kapazität* C ist dann definitionsgemäß durch die Gleichung

$$C = \frac{Q}{U}$$

gegeben. Diese Beziehung gilt auch für *zeitabhängige* Spannungen und Ladungen.

A 41**Zusammenhang zwischen der Stromdichte und der elektrischen Feldstärke in einem elektrischen Leiter**

In einem *elektrischen Leiter* mit der Leitfähigkeit κ besteht zwischen der *Stromdichte* \vec{S} und der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} der folgende Zusammenhang:

$$\vec{S} = \kappa \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad S = |\vec{S}| = \kappa E$$

A 42**Ohmscher Widerstand eines zylinderförmigen Drahtes**

Ein *zylinderförmiger* Draht mit der Länge l und der Querschnittsfläche A besitzt den *ohmschen Widerstand*

$$R = \varrho \frac{l}{A}$$

ϱ : *spezifischer* Widerstand des Drahtes

A 43**Zusammenhang zwischen Stromstärke und Ladung**

In einem *elektrischen Leiter* besteht zwischen der zeitabhängigen *Stromstärke* $i(t)$ und der (ebenfalls zeitabhängigen) *Ladung* $q(t)$ der folgende Zusammenhang:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t) \quad \text{bzw.} \quad q(t) = \int i(t) dt$$

A 44**Stromarbeit bei zeitabhängiger Stromstärke**

Ein *zeitabhängiger* Strom $i(t)$ verrichtet in einem *ohmschen* Widerstand R im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ die *Stromarbeit*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} [i(t)]^2 dt = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

$p(t) = R \cdot i^2(t)$ ist dabei die *zeitabhängige Momentanleistung*.

A 45**Selbstinduktion in einer Spule**

Wird eine *Spule* mit der Induktivität L von einem *zeitlich veränderlichen* Strom $i(t)$ durchflossen, so beträgt die in ihr durch *elektromagnetische Induktion* erzeugte *Spannung*

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

A 46**Leistung eines periodischen Wechselstroms**

Der *Momentantwert* der *Leistung* eines periodischen Wechselstroms $i(t)$ bei der Spannung $u(t)$ beträgt

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (\text{für } t \geq 0)$$

Die *durchschnittliche* Leistung während einer Periode $T = 2\pi/\omega$ ist dann durch das *Integral*

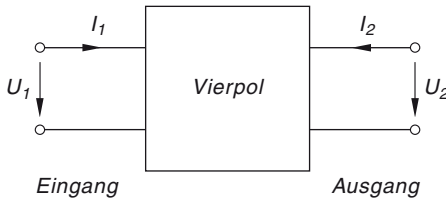
$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

gegeben (ω : Kreisfrequenz des Wechselstroms).

A 47

Vierpolgleichungen

Unter einem *Vierpol* versteht man ein elektrisches Netzwerk mit einem *Eingangsklemmenpaar* und einem *Ausgangsklemmenpaar*. Zwischen den *Eingangsgrößen* (Eingangsspannung U_1 , Eingangsstrom I_1) und den *Ausgangsgrößen* (Ausgangsspannung U_2 , Ausgangsstrom I_2) bestehen dabei die folgenden Beziehungen:



a) Widerstandsform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Widerstandsmatrix } \mathbf{Z}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

b) Leitwertform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Leitwertmatrix } \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}$$

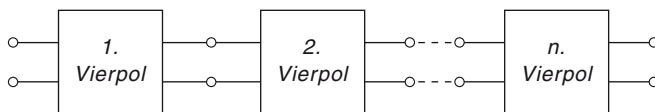
c) Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Kettenmatrix } \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

A 48**Kettenschaltung von Vierpolen**

Bei der *Kettenschaltung* von n Vierpolen mit den *Kettenmatrizen* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ werden die *Ausgangsklemmen* des *ersten* Vierpols mit den *Eingangsklemmen* des *zweiten* Vierpols *zusammengeschaltet* usw. Die Kettenmatrizen der einzelnen Vierpole *multiplizieren* sich dabei zur Kettenmatrix \mathbf{A} des *Ersatzvierpols*:

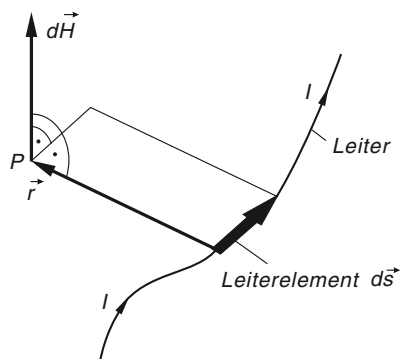
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_n$$

**A 49****Biot-Savartsches Gesetz**

Ein vom Strom I durchflossenes *Leiterelement* $d\vec{s}$ erzeugt im Punkt P ein Magnetfeld mit dem *magnetischen Feldstärkevektor*

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

(*Biot-Savartsches Gesetz*). Dabei ist \vec{r} der vom Leiterelement $d\vec{s}$ zum Punkt P führende Vektor der Länge r . Durch Summation, d. h. *Integration* über alle Leiterelemente des linienförmigen dünnen Leiters erhält man das *Gesamtfeld* im Punkt P .

**A 50****Knotenpunktregel**

In jedem *Knotenpunkt* ist die *Summe* der zu- und abfließenden Ströme gleich *null*:

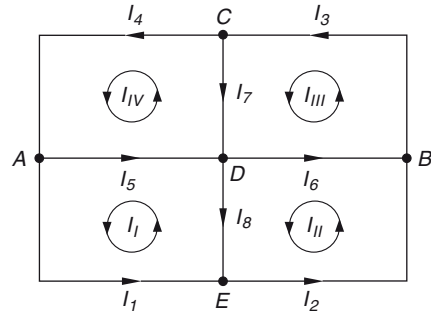
$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (I_i: \text{Strom im } i\text{-ten Zweig; } i = 1, 2, \dots, n)$$

Zufließende Ströme werden dabei *positiv*, *abfließende* Ströme *negativ* gerechnet.

A 51

Maschenstromverfahren

Die nebenstehende Abbildung zeigt den *Streckenkomplex* eines elektrischen Netzwerkes mit 5 Knotenpunkten und 8 Zweigen (Spannungsquellen, Widerstände usw. wurden dabei nicht eingezeichnet).



In einem *elektrischen Netzwerk* mit k Knotenpunkten und z Zweigen gibt es genau $m = z - (k - 1)$ *unabhängige Maschen* (im gezeichneten Beispiel gilt: $k = 5$, $z = 8$, $m = 8 - (5 - 1) = 4$). Beim *Maschenstromverfahren* geht man schrittweise wie folgt vor:

- (1) Es werden m *unabhängige Maschen* ausgewählt. Jeder dieser Maschen wird ein *fiktiver Maschenstrom* zugeordnet, dessen Richtung *willkürlich* festgelegt wird (im Beispiel sind dies die Maschenströme I_I bis I_{IV}).
- (2) Die Anwendung der *Maschenregel* [A32] auf *jede* der m unabhängigen Maschen führt zu einem *linearen Gleichungssystem* mit m Gleichungen und ebensovielen unbekannten Maschenströmen (im Beispiel: vier Gleichungen mit den vier unbekannten Maschenströmen I_I bis I_{IV}).
- (3) Berechnung der *Maschenströme* z. B. mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus*.
- (4) Die *Zweigströme* lassen sich aus den (jetzt *bekannten*) Maschenströmen berechnen. Gehört dabei ein Zweig gleichzeitig *zwei* Maschen an, so ist der entsprechende Zweigstrom durch *Überlagerung* der beiden zugehörigen Maschenströme zu ermitteln (im Beispiel: die Zweigströme I_I bis I_4 sind mit den Maschenströmen I_I bis I_{IV} identisch, während die Zweigströme I_5 bis I_8 jeweils durch Überlagerung *zweier* Maschenströme entstehen: $I_5 = I_{IV} - I_I$, $I_6 = I_{III} - I_{II}$, $I_7 = I_{III} - I_{IV}$, $I_8 = I_{II} - I_I$).

A 52

Ohmsches Gesetz der Wechselstromtechnik

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

\underline{U} und \underline{I} sind die *komplexen Effektivwerte* von Spannung und Strom, \underline{Z} der *komplexe Gesamt Widerstand* und \underline{Y} der *komplexe Gesamtleitwert* des Wechselstromkreises.

A 53

Komplexe Wechselstromwiderstände und Wechselstromleitwerte (Widerstands- und Leitwertgrößen)

In einem Wechselstromkreis werden die drei Grundschaltelemente R (ohmscher Widerstand), C (Kapazität) und L (Induktivität) durch die folgenden komplexen Widerstands- bzw. Leitwertgrößen (komplexe Zeiger) dargestellt:

Schaltelement	Komplexer Widerstand	Komplexer Leitwert
R	R	$\frac{1}{R}$
C	$-j \frac{1}{\omega C}$	$j \omega C$
L	$j \omega L$	$-j \frac{1}{\omega L}$

A 54

Komplexe Scheinleistung, Wirk- und Blindleistung eines sinusförmigen Wechselstroms

Sind \underline{U} und \underline{I} die komplexen Effektivwerte von Wechselspannung und Wechselstrom, so ist die komplexe Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

\underline{I}^* ist dabei die zu \underline{I} konjugiert komplexe Größe.

Wirkleistung P und Blindleistung Q sind der Real- bzw. Imaginärteil von \underline{S} :

$$\left. \begin{array}{l} P = \operatorname{Re}(\underline{S}) \\ Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

A 55

Äquipotentialfläche

Unter einer Äquipotentialfläche versteht man eine Fläche im Raum, die alle Punkte eines elektrischen Feldes mit dem gleichen elektrostatischen Potential verbindet. Der Feldstärkevektor \vec{E} steht dabei in jedem Punkt der Äquipotentialfläche senkrecht auf dieser Fläche.

A 56**Elektrostatisches Potential in der Umgebung einer elektrischen Punktladung**

Eine *elektrische Punktladung* Q erzeugt im Abstand r ein elektrisches Feld mit dem *elektrostatischen Potential*

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad r > 0$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante; ϵ : Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums

A 57**Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und dem elektrostatischen Potential**

Zwischen der *elektrischen Feldstärke* \vec{E} bzw. den *Komponenten* E_x , E_y und E_z der Feldstärke und dem *elektrostatischen Potential* V besteht der folgende Zusammenhang:

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{oder} \quad (\text{in der Komponentendarstellung})$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Bei *ebenen* Problemen ist $E_z = 0$.

A 58**Satz von Castigliano (Anwendung auf einen statisch unbestimmt gelagerten Balken)**

Bei einem *statisch unbestimmt* gelagerten Balken ist die Anzahl m der statischen Gleichgewichtsbedingungen [Al] *kleiner* als die Anzahl n der unbekannten Auflagergrößen (Kräfte und Momente). Die fehlenden $n - m$ Gleichungen erhält man durch Berücksichtigung der *Formänderung* des Balkens. Nach *Castigliano* stellen sich die *statisch unbestimmten* Auflagergrößen (ihre Anzahl ist $n - m$) stets so ein, dass die durch das Integral

$$W = \int_0^l \frac{[M_b(x)]^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{M_b^2(x)}{2EI} dx$$

definierte *Formänderungsarbeit* ein *Minimum* annimmt.

$M_b(x)$: Biegemoment des Balkens an der Stelle x ; l : Länge des Balkens;

EI : Biegesteifigkeit des Balkens; E : Elastizitätsmodul; I : Flächenmoment

Die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* der Formänderungsarbeit W nach den *statisch unbestimmten* Auflagergrößen müssen daher *verschwinden* und liefern die noch fehlenden $n - m$ Gleichungen.

A 59**Stokessche Reibungskraft**

Eine *Kugel* vom Radius r , die sich mit der Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit mit der Viskosität (Zähigkeit) η bewegt, erfährt dort nach *Stokes* die *Widerstands-* oder *Reibungskraft* vom Betrag

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

A 60**Wirkleistung eines (sinusförmigen) Wechselstroms**

Die von einem *sinusförmigen* Wechselstrom mit dem *Effektivwert* I in einem ohmschen Widerstand R erzeugte *Leistung* beträgt

$$P = R \cdot I^2$$

A 61**Stromstärke bei ortsabhängiger Stromdichte**

Wird ein *linearer elektrischer Leiter* mit der Querschnittsfläche A von einem Strom mit der *ortsabhängigen* Stromdichte vom Betrag S durchflossen, so ist die *Stromstärke* I durch das *Doppelintegral*

$$I = \iint_{(A)} dI = \iint_{(A)} S dA$$

gegeben. $dI = S dA$ ist dabei der durch das *Flächenelement* dA fließende Strom.

A 62**Satz von Steiner für Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)**

$$I = I_S + A d^2$$

I_S : Flächenmoment bezüglich der *Schwerpunktachse*

I : Flächenmoment bezüglich einer zur Schwerpunktachse *parallelen* Achse

d : Abstand der beiden Achsen

A : Flächeninhalt

A 63

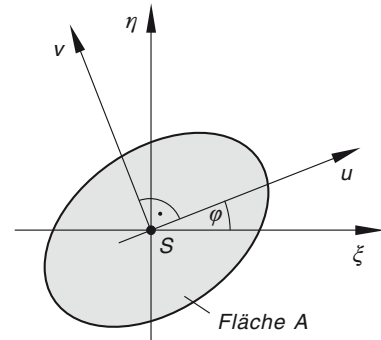
Hauptachsen und Hauptflächenmomente einer Fläche

a) Hauptachsen

Unter den *Hauptachsen* u, v einer homogenen Fläche A versteht man zwei aufeinander *senkrecht* stehende Achsen durch den Flächenschwerpunkt S , für die das *gemischte* Flächenmoment 2. Grades (auch *Zentrifugalmoment* genannt) I_{uv} *verschwindet*. Sie entstehen durch *Drehung* des kartesischen ξ, η -Koordinatensystems um den Winkel φ , der sich aus der Gleichung

$$\tan(2\varphi) = -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_{\xi} - I_{\eta}}$$

berechnen lässt. I_{ξ}, I_{η} und $I_{\xi\eta}$ sind dabei die Flächenmomente 2. Grades im ξ, η -Koordinatensystem.



b) Hauptflächenmomente

Die auf die *Hauptachsen* u, v bezogenen axialen Flächenmomente I_u und I_v heißen *Hauptflächenmomente*. Ihre Berechnung erfolgt nach der Formel

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left(I_{\xi} + I_{\eta} \pm \sqrt{(I_{\xi} - I_{\eta})^2 + 4I_{\xi\eta}^2} \right)$$

wobei I_{ξ}, I_{η} und $I_{\xi\eta}$ die entsprechenden Flächenmomente 2. Grades im ξ, η -Koordinatensystem darstellen.

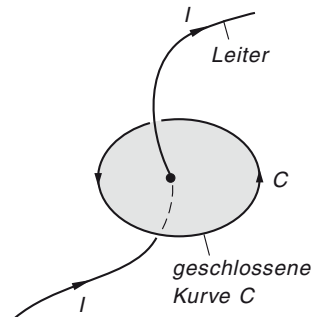
A 64

Durchflutungsgesetz (spezielle Form)

In einem dünnen *elektrischen Leiter* beliebiger Form fließe ein Strom der Stärke I . Er erzeugt ein Magnetfeld mit der *ortsabhängigen* magnetischen Feldstärke \vec{H} .

Für jede den Leiterstrom I *umfassende geschlossene* Kurve C ist dann das *Linienintegral* der magnetischen Feldstärke \vec{H} gleich der Stromstärke I :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$



A 65

Wärmeleitung

a) Stationäre Wärmeleitung

Bei einem *stationären*, d. h. zeitunabhängigen Wärmetransport (Energietransport) genügt das ortsabhängige Temperaturfeld T der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta T = 0 \quad (\Delta: \text{Laplace-Operator})$$

b) Instationäre Wärmeleitung

Das Temperaturfeld T verändert sich im Laufe der Zeit t , hängt also vom Ort und der Zeit ab und genügt der *Poisson-Gleichung*

$$a \cdot \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a > 0: \text{Temperaturleitfähigkeit})$$

A 66

Potentialströmung einer Flüssigkeit

a) Grundbegriffe

Inkompressible Strömung: Die Dichte der Flüssigkeit ändert sich *nicht* bei einer Druckänderung und konstant bleibender Temperatur.

Stationäre Strömung: Das Strömungsverhalten verändert sich *nicht* im Laufe der Zeit, d. h. das Geschwindigkeitsfeld der Strömung ist *zeitunabhängig*.

Potentialströmung: Die Strömung ist inkompressibel, reibungs- und drehtungsfrei (wirbelfrei) sowie stationär.

b) Ebene Potentialströmung einer Flüssigkeit

Das *Geschwindigkeitsfeld*

$$\vec{v} = \vec{v}(x; y) = v_x(x; y) \vec{e}_x + v_y(x; y) \vec{e}_y$$

einer *ebenen* Potentialströmung ist *wirbel-* und *quellenfrei*, d. h. es gilt

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

Es besitzt ein *Potential* $\Phi = \Phi(x; y)$, auch *Geschwindigkeitspotential* genannt, das der sog. *Potentialgleichung* (Kontinuitätsgleichung, Laplace-Gleichung)

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\Delta: \text{Laplace-Operator})$$

genügt. Das Geschwindigkeitsfeld der Strömung ist dann als *Gradient* des Potentials Φ darstellbar, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Potentialfunktion:

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi \quad \Leftrightarrow \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Stromlinien: *Feldlinien* des Geschwindigkeitsfeldes (Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt der Flüssigkeitsströmung die dort vorhandene Geschwindigkeitsrichtung angeben).

A 67

Potentialgleichung (Poisson-Gleichung)

Das *elektrische Potential* V eines elektrischen Feldes, das durch eine räumliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte ϱ_{el} erzeugt wird, genügt der sog. *Potentialgleichung (Poisson-Gleichung)*

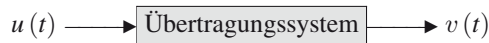
$$\Delta V = -\frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0}$$

Δ : Laplace-Operator; ε_0 : elektrische Feldkonstante

A 68

Übertragungssysteme

Ein zeitabhängiges *Eingangssignal* $u = u(t)$ wird durch das Übertragungssystem in ein zeitabhängiges *Ausgangssignal* $v = v(t)$ umgewandelt:



Lineares System: $c_1 u_1 + c_2 u_2 \rightarrow c_1 v_1 + c_2 v_2$

u_1, u_2 : Eingangssignale; v_1, v_2 : entsprechende Ausgangssignale; c_1, c_2 : Konstanten

Zeitinvariantes System: $u(t - t_0) \rightarrow v(t - t_0)$

Eine Verschiebung des Eingangssignals um die Zeitspanne t_0 bewirkt eine *gleich große* Verschiebung des Ausgangssignals.

LTI-System (Linear Time Invariant): Lineares und zeitinvariantes Übertragungssystem.

Impulsantwort $g(t)$: Reaktion des Übertragungssystems auf einen *Dirac-Stoß* (Impulsfunktion) $\delta(t)$ im Eingang.



Sprungantwort $h(t)$: Reaktion des Übertragungssystems auf eine *Sprungfunktion* $\sigma(t)$ im Eingang.



Zusammenhang zwischen *Impulsantwort* $g(t)$ und *Sprungantwort* $h(t)$:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \dot{h}(t), \quad h(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Zusammenhang zwischen den *Fourier-Transformierten* des Eingangs- und Ausgangssignals:

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = G(\omega) \cdot \mathcal{F}\{u(t)\} \quad \text{oder} \quad V(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$

mit $\mathcal{F}\{u(t)\} = U(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\{v(t)\} = V(\omega)$

$G(\omega)$ ist der **Frequenzgang** (die Übertragungsfunktion) des Systems und zugleich die *Fourier-Transformierte* der *Impulsantwort* $g(t)$, d. h. es gilt

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad \text{und} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$$

(die Impulsantwort $g(t)$ erhält man aus dem Frequenzgang $G(\omega)$ mit Hilfe der *inversen* Fourier-Transformation).

Amplitudengang (Amplitudenspektrum): $A(\omega) = |G(\omega)|$

Phasengang (Phasenspektrum): $\varphi(\omega) = \arg(G(\omega))$

Frequenzgang: $G(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

A 69

Masse und Schwerpunkt eines räumlichen Körpers mit einer ortsabhängigen Dichte

Bei ortsabhängiger Dichte ϱ gilt:

$$\textbf{Masse: } m = \iiint_{(m)} dm = \iiint_{(V)} \varrho dV$$

Schwerpunkt $S = (x_S; y_S; z_S)$:

$$x_S = \frac{1}{m} \cdot \iiint_{(V)} \varrho x dV$$

Ersetzt man beiderseits x durch y bzw. z , so erhält man analoge Formeln für die beiden übrigen Schwerpunktkoordinaten.

