項やコンテキストの定義

$\langle term \rangle$ ::= ‘`Var`’ $\langle variable \rangle$
| ‘`Sort`’ ‘`Prop`’
| ‘`Sort`’ ‘`Type`’
| ‘`Fun`’ $\langle variable \rangle$ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
| ‘`For`’ $\langle variable \rangle$ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
| ‘`App`’ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
| ‘`Ref`’ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
| ‘`Prf`’ $\langle term \rangle$

$\langle context\text{-}snippet \rangle$ ::= $\langle variable \rangle$ ‘`:`’ $\langle term \rangle$ | $\langle term \rangle$

$\langle context \rangle$ ::= ‘`empty`’ | $\langle context \rangle$ ‘`,`’ $\langle context\text{-}snippet \rangle$

`Ref` が refinement type の型。$\texttt{Ref}\,A\,P$ で型 A を述語 $P : A \to \texttt{Prop}$ で refine した型を表す。項が refinement type に型付けされるときには述語 P が満たされているかどうか、つまり inhabitants かどうかを解くことになる。

`Prf` は証明項を陽に扱うためのもの。命題 P が示せるときに $\texttt{Prf}\,P$ を証明項として扱ってよい。

代入、 β 変換、同値性の定義は普通に行う。$\mathrm{DV}(\Gamma)$ で context Γ で宣言された変数を表す。

項やコンテキストの評価

ここでコンテキストや項の関係を定義していく。

Judgement について

$\vdash \Gamma$, コンテキストの well-def 性
$\Gamma \vdash t_1 : t_2$, 項の型付け性
$\Gamma \vDash t$, 項の証明可能性

判断のなかに項の証明可能性を含めて定義するのは、どこで証明項の存在が要求されているかわかりやすくするため。

コンテキストの well-formed

$$\frac{}{\vdash \mathit{empty}}\ \text{context empty}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \texttt{Sort}\,s \quad x \notin \mathrm{DV}(\Gamma)}{\vdash \Gamma, x : A}\ \text{context Type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Sort}\,\texttt{Prop}}{\vdash \Gamma, P}\ \text{context Prop}$$

自然な型付け

$$\frac{}{\textit{empty} \vdash \texttt{Sort}\,\texttt{Prop} : \texttt{Sort}\,\texttt{Type}}\ \text{axiom}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Sort}\,s \quad x \notin \mathrm{DV}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash \texttt{Var}\,x : A}\ \text{variable}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \_ \quad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma, \_ \vdash t : A}\ \text{weakning}$$

formation introduction elimination

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Sort}\,s_1 \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{Sort}\,s_2}{\Gamma \vdash \texttt{For}\,x\,A_1\,A_2 : \texttt{Sort}\,s_2}\ \text{forall formation}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \texttt{For}\,x\,A_1\,A_2 : \texttt{Type} \quad \Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2}{\Gamma \vdash \texttt{Fun}\,x\,A_1\,t : \texttt{For}\,x\,A_1\,A_2}\ \text{for introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \texttt{For}\,x\,A_1\,A_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_1}{\Gamma \vdash \texttt{App}\,t_1\,t_2 : A_2\{x \leftarrow t_2\}}\ \text{for elimination}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad \Gamma \vdash P : \texttt{For}\,x\,A\,\texttt{Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{Ref}\,A\,P : \texttt{Type}}\ \text{refinement formation}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \texttt{Ref}\,A\,P : \texttt{Type} \quad \Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vDash \texttt{App}\,P\,t}{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\,A\,P}\ \text{ref introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\,A\,P}{\Gamma \vdash t : A}\ \text{ref elimination}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vDash P}{\Gamma \vdash \texttt{Prf}\,P : P}\ \text{proof abstraction}$$

β 同値について

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \quad \Gamma \vdash A_2 : \texttt{Sort}\,s \quad A_1 \equiv_\beta A_2}{\Gamma \vdash t : A_2}\ \text{conversion}$$

proof term について

$$\frac{\vdash \Gamma, P}{\Gamma, P \vDash P}\ \text{assumption}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vdash t : P}{\Gamma \vDash P}\ \text{proof existence}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\,A\,P}{\Gamma \vDash \texttt{App}\,P\,t}\ \text{refinement inversion}$$