# 1　動機

次のような性質を持つ型理論が欲しい。

- より自然に property に関する subtyping が使える
  - 2 が自然数でもあり偶数でもある。Coq の場合は 2 と 2 が偶数であることの証明の組が偶数として型付けされる。
  - 部分集合が本当に部分集合になり、キャストが簡単（書かなくていい）
  - 結果として型付けの一意性はないと思うけど、それでもいい
- 証明項を真に区別する必要がない or 証明項を扱うことができない
  - 群が等しいとは群の演算が等しいこと、証明項まで等しいこととみなしたくない
  - 証明項を構成することもできるが、それの存在を覚えておくだけぐらいでいい
  - あと関数の外延性などの axiom をいい感じにしたい
- 構造に関する部分型（？）も使えると楽
  - 環は群の部分型とみなしたい（キャストを明示的に書きたくない）
  - これをやると部分空間の扱いが絶対にめんどくさい
  - 公称型みたいな感じで扱った方がいいかも
- 等式をもっと簡単に扱いたい、　well-definedness をもっと簡単に
  - 例として、商群からの写像の扱いが Coq ではめんどくさい
  - （部分集合系が扱えると良いなあ）

## 2　型理論１

証明項に対応するものを微妙に導入して、型システムが自動的に判定できる証明を増やした形。

**■項やコンテキストの定義**

$\langle term \rangle$ ::= $\langle variable \rangle$
　|　'`Prop`'
　|　'`Type`'
　|　'`Fun`' $\langle variable \rangle$ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
　|　'`For`' $\langle variable \rangle$ $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
　|　'`App`' $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
　|　'`Ref`' $\langle term \rangle$ $\langle term \rangle$
　|　'`Prf`' $\langle term \rangle$

$\langle context\text{-}snippet \rangle$ ::= $\langle variable \rangle$ '`:`' $\langle term \rangle$
　|　Hold $\langle term \rangle$

$\langle context \rangle$ ::= '`empty`' | $\langle context \rangle$ '`,`' $\langle context\text{-}snippet \rangle$

`Proof` は証明項を陽に扱うためのもの。命題 $P$ が示せるときに `Proof` $P$ を証明項として扱ってよいとすることで簡単にならないだろうか？あるいは、(証明が必要となるところでのみ用いたい)

**■項やコンテキストの評価**　ここでコンテキストや項の関係を定義していく。

コンテキストと項の関係

$\vdash \Gamma$ , コンテキストの well-def 性
$\Gamma \vdash t_1 : t_2$ , 項の型付け性
$\Gamma \vDash t$ , 項の証明可能性

コンテキストの well-def

$$\frac{}{\vdash \mathit{empty}}\ \text{context empty}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Sort} \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)}{\vdash \Gamma, x : A}\ \text{context start}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash P : \texttt{Prop}}{\vdash \Gamma, \mathrm{Hold}\ P}\ \text{context prop}$$

コンテキスト 自明

$$\frac{}{\mathit{empty} \vdash \texttt{Sort}_1 : \texttt{Sort}_2}\ \text{axiom}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ \text{variable}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \_ \quad \Gamma \vdash t : A_2}{\Gamma, \_ \vdash t : A_2}\ \text{weakning}$$

formation

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Sort}_1 \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{Sort}_2}{\Gamma \vdash \texttt{For}\, x\, A_1\, A_2 : \texttt{Sort}_2}\ \text{forall formation}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad \Gamma \vdash P : \texttt{For}\, x\, A\, \texttt{Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{Ref}\, A\, P : \texttt{Type}}\ \text{refinement formation}$$

$\beta$ 同値について

$$\frac{\Gamma \vdash x : A_1 \quad A_1 \equiv_\beta A_2 \quad \Gamma \vdash A_2 : \texttt{Sort}}{\Gamma \vdash x : A_2}\ \text{conversion}$$

introduction と elimination

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2 \quad \Gamma \vdash \texttt{For}\, x\, A_1\, A_2 : \texttt{Type}}{\Gamma \vdash \texttt{Fun}\, x\, A_1\, t : \texttt{For}\, x\, A_1\, A_2}\ \text{for intro} \frac{\Gamma \vdash t_1 : \texttt{For}\, x\, A_1\, A_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_1}{\Gamma \vdash \texttt{App}\, t_1\, t_2 : A_2\{x \leftarrow t_2\}}\ \text{for elim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash \texttt{Ref}\, A\, P : \texttt{Type} \quad \Gamma \vDash \texttt{App}\, P\, t}{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\, A\, P}\ \text{ref intro} \frac{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\, A\, P}{\Gamma \vdash t : A}\ \text{ref elim}$$

proof term について

$$\frac{}{\Gamma, \mathrm{Hold}\, P \vDash P}\ \text{assumption} \frac{\Gamma \vDash P}{\Gamma, \_ \vDash P}\ \text{weakning}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vdash t : P}{\Gamma \vDash P}\ \text{implicit proof} \frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vDash P}{\Gamma \vdash \texttt{Prf}\, P : P}\ \text{explicit proof}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \texttt{Ref}\, A\, P}{\Gamma \vDash \texttt{App}\, P\, t}\ \text{refinement inversion}$$

具体例を出したい。

- $A : \texttt{Prop}, B : \texttt{Prop}, \mathrm{Hold}\,(\texttt{for}\,x\,A\,B), \mathrm{Hold}\,A \vDash B$
- $A, B : \texttt{Type}$ , $f : A \to B$ とする。$P, Q : A, B$ 上の述語に対して 「任意の $x : A$ について、 $P(x)$ が成り立つなら $Q(f(x))$ が成り立つ」とする。このとき $f : \texttt{Ref}\,A\,P \to \texttt{Ref}\,B\,Q$ と型付けられるはず。

一つ目は省略（カリーハワードと Proof を使う）コンテキストとしては、

$$\Gamma := A : \texttt{Type}, B : \texttt{Type}, f : A \to B, P : A \to \texttt{Prop}, Q : B \to \texttt{Prop}$$

をまず考え、これに命題に対応する項がくっつく。$K := \texttt{For}\,x\,A\,((\texttt{App}\,P\,x) \to (\texttt{App}\,Q\,(\texttt{App}\,f\,x))))$ なる $\texttt{Prop}$ 型の項が 「任意の $x : A$ について、 $P(x)$ が成り立つなら ...」に対応する。改めて $\Gamma \leftarrow \Gamma, \mathrm{Hold}\ K$ と置き直して、 $\Gamma \vdash f : \texttt{Ref}\,A\,P \to \texttt{Ref}\,B\,Q$ を示す。eta-conversion が必要になっちゃった。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash f : A \to B \quad \Gamma_1 \vdash x : A}{\Gamma_1 \vdash \texttt{App}\,f\,x : B}\text{for intro} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash \texttt{Ref}\,B\,Q : \texttt{Type}}\,\textit{hello} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \vDash \texttt{App}\,Q\,(\texttt{App}\,f\,x)}\,X_1}{\Gamma_1 := \Gamma, x : \texttt{Ref}\,A\,P \vdash \texttt{App}\,f\,x : \texttt{Ref}\,B\,Q}}{\Gamma \vdash \texttt{Fun}\,x\,(\texttt{App}\,f\,x) : \texttt{Ref}\,A\,P \to \texttt{Ref}\,B\,Q}\text{for elim}}{\Gamma \vdash f : \texttt{Ref}\,A\,P \to \texttt{Ref}\,B\,Q}\text{eta-conversion}$$

$X_1$ は app 省略して

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vDash K}\text{assumption}}{\Gamma_1 \vdash \texttt{Prf}\,K : K}\text{exp prf}}{\Gamma_1 \vdash ((\texttt{Prf}\,K)\,x) : (P\,x) \to (Q\,(f\,x))}\text{for elim} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : \texttt{Ref}\,A\,P}\text{var term}}{\Gamma_1 \vDash P\,x}\text{ref inv}}{\Gamma_1 \vdash \texttt{Prf}\,(P\,x) : P\,x}\text{exp prf}}{\Gamma_1 \vdash ((\texttt{Prf}\,K)\,x)\,(\texttt{Prf}\,(P\,x)) : \texttt{App}\,Q\,(\texttt{App}\,f\,x)}\text{for elim}}{\Gamma_1 \vDash \texttt{App}\,Q\,(\texttt{App}\,f\,x)}\text{imp prf}$$

$\_ \vDash \_$ が必要になったときのほとんどは自動的に推論できそう