1 動機

次のような性質を持つ型理論が欲しい。

- より自然に property に関する subtyping が使える
  - 2 が自然数でもあり偶数でもある。Coq の場合は 2 と 2 が偶数であることの証明の組が偶数として型付けされる。
  - 部分集合が本当に部分集合になり、キャストが簡単（書かなくていい）
  - 結果として型付けの一意性はないと思うけど、それでもいい
- 証明項を真に区別する必要がない or 証明項を扱うことができない
  - 群が等しいとは群の演算が等しいこと、証明項まで等しいこととみなしたくない
  - 証明項を構成することもできるが、それの存在を覚えておくだけぐらいでいい
  - あと関数の外延性などの axiom をいい感じにしたい
- 構造に関する部分型（？）も使えると楽
  - 環は群の部分型とみなしたい（キャストを明示的に書きたくない）
  - これをやると部分空間の扱いが絶対にめんどくさい
  - 公称型みたいな感じで扱った方がいいかも
- 等式をもっと簡単に扱いたい、　well-definedness をもっと簡単に
  - 例として、商群からの写像の扱いが Coq ではめんどくさい
  - （部分集合系が扱えると良いなあ）

2　型理論 0

ただ単に証明木 + refinement type を扱えるようにしただけの体系を考える。subtyping はない。問題点としては、もしシステムとして実装するなら証明木を対話的に組んでいく必要があってめんどくさそう。なので、この方向は使わない（問題点を示すためのもの）

■項やコンテキストの定義　項とコンテキストを定義する。

$\langle term \rangle$ ::= $\langle variable \rangle$
| 'Prop'
| 'Type'
| 'Fun' $\langle variable \rangle$ 'of' $\langle term \rangle$ 'mapsto' $\langle term \rangle$
| 'Forall' $\langle variable \rangle$ 'of' $\langle term \rangle$ 'to' $\langle term \rangle$
| 'Apply' $\langle term \rangle$ 'and' $\langle term \rangle$
| 'Refined' $\langle term \rangle$ 'with' $\langle term \rangle$

$\langle context\text{-}snippet \rangle$ ::= $\langle variable \rangle$ ':' $\langle term \rangle$
| Hold $\langle term \rangle$

$\langle context \rangle$ ::= 'empty' | $\langle context \rangle$ ',' $\langle context\text{-}snippet \rangle$

`Refined` が refinement type の型コンテキストの Hold $\langle term \rangle$ は命題の仮定を表す。$\langle variable \rangle$ を x , $\langle term \rangle$ を t や A や P , $\langle context \rangle$ を Γ のように書く。t と A は同じ項だが、気持ちとしては項と型の分け方である。また `Sort` は `Prop` か `Type` を表す。

■項やコンテキストの評価　コンテキストと項の関係について。直観的にはコンテキストの well-def 性、型付け可能性、証明可能、を表す。

$$\vdash \Gamma$$
$$\Gamma \vdash t_1 : t_2$$
$$\Gamma \vDash t$$

これが関係の全部。自由変数とか subst とかはめんどくさいので書いてない。 conversion rule も定義していないが、 $M_1 \equiv_\beta M_2$ みたいなのが定義されていてほしい。Type : Type を避けるためにいろいろ書いている？

コンテキストの well-defined 性は次のようになる。

$$\frac{}{\vdash \mathit{empty}}\ \text{context empty}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)}{\vdash \Gamma, x : A}\ \text{context type}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash P : \texttt{Prop}}{\vdash \Gamma, \mathrm{Hold}\ P}\ \text{context prop}$$

Type と Prop に型付けされる項は次のようになる（ただし、 large elimination に相当するものをのぞく）

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{ Type} \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{ Type}}{\Gamma \vdash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ to } A_2 : \texttt{ Type}} \text{ forall formation(type)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{ Type} \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{ Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ to } A_2 : \texttt{ Prop}} \text{ forall formation(prop)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \texttt{ Type} \quad \Gamma \vdash P : \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A \texttt{ to } \texttt{ Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{ Refined } A \texttt{ with } P : \texttt{ Type}} \text{ refinement formation}$$

以下は β 同値に関するもの。application や conversion により 下二つはいらないかもしれないし、逆に強すぎるかもしれない。(subject reduction がうまくいくのかわからなかったのでとりあえずつけた。 ITT での equality rule みたいなのがないのでバグがありそう）

$$\frac{\Gamma \vdash x : A_1 \quad A_1 \equiv_\beta A_2 \quad \Gamma \vdash A_1 : \texttt{ Type}}{\Gamma \vdash x : A_2} \text{ conversion}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{ Type} \quad A_1 \equiv_\beta A_2}{\Gamma \vdash A_2 : \texttt{ Type}} \text{ conversion(type)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{ Prop} \quad A_1 \equiv_\beta A_2}{\Gamma \vdash A_2 : \texttt{ Prop}} \text{ conversion(prop)}$$

より一般の項の型付けは次のようになる。

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{ Type}}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ start}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, x : A_1 \quad \Gamma \vdash t : A_2}{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2} \text{ weakning}$$

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2 \quad \Gamma \vdash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ to } A_2 : \texttt{ Type}}{\Gamma \vdash \texttt{ Fun } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ mapsto } t : \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ to } A_2} \text{ forall introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A_1 \texttt{ to } A_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_1}{\Gamma \vdash \texttt{ Apply } t_1 \texttt{ and } t_2 : A_2\{x \leftarrow t_2\}} \text{ forall elimination}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash \texttt{ Refined } A \texttt{ with } P : \texttt{ Type} \quad \Gamma \vDash (\texttt{ Apply } P \texttt{ and } t)}{\Gamma \vdash t : \texttt{ Refined } A \texttt{ with } P} \text{ refinement introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \texttt{ Refined } A \texttt{ with } P}{\Gamma \vdash t : A} \text{ refinement elimination}$$

次に証明木とか証明周りのやつを書く。

$$\frac{\Gamma \vdash P_1 : \texttt{ Prop} \quad P_1 \equiv_\beta P_2 \quad \Gamma \vDash P_1}{\Gamma \vDash P_2} \text{ prop conversion}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A \texttt{ to } P : \texttt{ Prop} \quad \Gamma, x : A \vDash \texttt{ Apply } P \texttt{ and } x}{\Gamma \vDash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A \texttt{ to } P} \text{ prop forall intro}$$

$$\frac{\Gamma \vDash \texttt{ Forall } x \texttt{ of } A \texttt{ to } P \quad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vDash P\{x \leftarrow t\}} \text{ prop forall elim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \texttt{ Refined } A \texttt{ with } P}{\Gamma \vDash \texttt{ Apply } P \texttt{ and } x} \text{ prop refinement elim}$$

これで終わり。この型理論を検討することはないと思うが、例を後で挙げたい。Prop と Type で別々の型付けが必要になることがありめんどくさい。

3　型理論１

証明項に対応するものを微妙に導入して、型システムが自動的に判定できる証明を増やした形。

■項やコンテキストの定義

$\langle \textit{term} \rangle$ ::= $\langle \textit{variable} \rangle$
| ‘`Prop`’
| ‘`Type`’
| ‘`Fun`’ $\langle \textit{variable} \rangle$ ‘`of`’ $\langle \textit{term} \rangle$ ‘`mapsto`’ $\langle \textit{term} \rangle$
| ‘`Forall`’ $\langle \textit{variable} \rangle$ ‘`of`’ $\langle \textit{term} \rangle$ ‘`to`’ $\langle \textit{term} \rangle$
| ‘`Apply`’ $\langle \textit{term} \rangle$ ‘`and`’ $\langle \textit{term} \rangle$
| ‘`Refined`’ $\langle \textit{term} \rangle$ ‘`with`’ $\langle \textit{term} \rangle$
| ‘`Proof`’ $\langle \textit{term} \rangle$

$\langle \textit{context-snippet} \rangle$ ::= $\langle \textit{variable} \rangle$ ‘`:`’ $\langle \textit{term} \rangle$
| Hold $\langle \textit{term} \rangle$

$\langle \textit{context} \rangle$ ::= ‘`empty`’ | $\langle \textit{context} \rangle$ ‘`,`’ $\langle \textit{context-snippet} \rangle$

`Proof` は証明項を陽に扱うためのもの。命題 P が示せるときに `Proof` P を証明項として扱ってよいとすることで簡単にならないだろうか？あるいは、(証明が必要となるところでのみ用いたい)

■項やコンテキストの評価　ここでコンテキストや項の関係を定義していく。

コンテキストと項の関係

$\vdash \Gamma$, コンテキストの well-def 性
$\Gamma \vdash t_1 : t_2$, 項の型付け性
$\Gamma \vDash t$, 項の証明可能性

コンテキストの well-def

$$\frac{}{\vdash \textit{empty}}\ \text{context empty}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad x \notin \texttt{FV}(\Gamma)}{\vdash \Gamma, x : A}\ \text{context type}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash P : \texttt{Prop}}{\vdash \Gamma, \text{Hold } P}\ \text{context prop}$$

formation

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Type} \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{Type}}{\Gamma \vdash \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{to}\ A_2 : \texttt{Type}} \text{ forall formation(type)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Type} \quad \Gamma, x : A_1 \vdash A_2 : \texttt{Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{to}\ A_2 : \texttt{Prop}} \text{ forall formation(prop)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \texttt{Type} \quad \Gamma \vdash P : \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A\ \texttt{to}\ \texttt{Prop}}{\Gamma \vdash \texttt{Refined}\ A\ \texttt{with}\ P : \texttt{Type}} \text{ refinement formation}$$

large elimination に相当するものは除く

β 同値について

$$\frac{\Gamma \vdash x : A_1 \quad A_1 \equiv_\beta A_2 \quad \Gamma \vdash A_2 : \texttt{Type}}{\Gamma \vdash x : A_2} \text{ conversion}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Type} \quad A_1 \equiv_\beta A_2}{\Gamma \vdash A_2 : \texttt{Type}} \text{ conversion(type)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 : \texttt{Prop} \quad A_1 \equiv_\beta A_2}{\Gamma \vdash A_2 : \texttt{Prop}} \text{ conversion(prop)}$$

下二つは application と conversion があればいらないかもしれない。subject reduction 用につけた

よくあるコンテキストのやつ

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \Gamma \vdash A : \texttt{Type}}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ start}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, x : A_1 \quad \Gamma \vdash t : A_2}{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2} \text{ weakning}$$

introduction と elimination

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2 \quad \Gamma \vdash \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{to}\ A_2 : \texttt{Type}}{\Gamma \vdash \texttt{Fun}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{mapsto}\ t : \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{to}\ A_2} \text{ forall introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \texttt{Forall}\ x\ \texttt{of}\ A_1\ \texttt{to}\ A_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_1}{\Gamma \vdash \texttt{Apply}\ t_1\ \texttt{and}\ t_2 : A_2\{x \leftarrow t_2\}} \text{ forall elimination}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash \texttt{Refined}\ A\ \texttt{with}\ P : \texttt{Type} \quad \Gamma \vDash \texttt{Apply}\ P\ \texttt{and}\ t}{\Gamma \vdash t : \texttt{Refined}\ A\ \texttt{with}\ P} \text{ refinement introduction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \texttt{Refined}\ A\ \texttt{with}\ P}{\Gamma \vdash t : A} \text{ refinement elimination}$$

proo term について

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vdash t : P}{\Gamma \vDash P} \text{ proof implicity}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vDash P}{\Gamma \vdash \texttt{Proof}\ \ P : P} \text{ proof explicity}$$

$$\frac{\Gamma \vDash P_1 \quad P_1 \equiv_\beta P_2}{\Gamma \vDash P_2} \text{ proof conversion}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \texttt{Prop} \quad \Gamma \vdash t : \texttt{Refined}\ \ A\ \ \texttt{with}\ \ P}{\Gamma \vDash \texttt{Apply}\ \ P\ \ \texttt{and}\ \ t} \text{ refinement inversion}$$

具体例を出したい。$f : A \to B$ とする。$P, Q :\ A, B$ 上の述語に対して $P(x)$ が成り立つなら $Q(f(x))$ が成り立つとする。このとき $f : \texttt{Refined}\ A\ \texttt{with}\ P \to \texttt{Refined}\ B\ \texttt{with}\ Q$ と型付けられるはず。仮定としては、

$$\Gamma := A : \texttt{Type}, B : \texttt{Type}, f : A \to B, P : A \to \texttt{Prop}, Q : A \to \texttt{Prop}$$

をまず考え、これに命題に対応する項がくっつく。$K := \texttt{Forall}\, x\, A\, \{(\texttt{Apply}\, P\, x) \to (\texttt{Apply}\, Q\, (\texttt{Apply}\, f\, x))\}$ なる Prop 型の項が 「 $P(x)$ が成り立つなら ... 」に対応する。改めて $\Gamma \leftarrow \Gamma, \mathrm{Hold}\ K$ と置き直して、$\Gamma \vdash f : \texttt{Ref}\ A\ P \to \texttt{Ref}\ B\ Q$ を示す。

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, x : \texttt{Ref}\ A\ P \vdash \texttt{Apply}\ f\ x : \texttt{Ref}\ B\ Q}}{\Gamma \vdash \texttt{Fun}\ x\ (\texttt{Apply}\ f\ x) : \texttt{Ref}\ A\ P \to \texttt{Ref}\ B\ Q}\ \text{forall elim}}{\Gamma \vdash f : \texttt{Ref}\ A\ P \to \texttt{Ref}\ B\ Q}\ \text{conversion}$$