α同値関係がα同値決定で計算できること

定義. 初めに証明木の長さを定義しておいたとする。

$\texttt{prooflengthOf}\, M_1\, M_2 : \texttt{isAlphaEquiv}\, M_1\, M_2 \to \mathbb{N}$

$:=$ *by natural definition*

$|\cdot|$ で表す。これらは明示的に使うことはないが、帰納法に使う。

定理. 補題を示す。形式化するならもっと多くの補題が必要である。例えば証明木の長さを減らす関数がいっぱい必要かも。

！ $x_1 =_\alpha x_2$ の証明は refl や sym や trans を使わなくてよく、特に $x_1 =_\alpha x_2$ なら $x_1 = x_2$

∵ これは証明木の長さによる。木の長さが 0 なら Var conversion しかないのでよい。木の長さが 0 でないとする。もし $x_1 =_\alpha x_2$ が証明できるなら証明木は Var conversion か refl か trans か sym で始まる。当然 Var conversion による場合は使ってない。refl の場合は、 Var conversion で代用できる。sym の場合については

！ もし $x_2 \notin \texttt{valueOf}\, M$ なら $M\{x_1 \leftarrow x_3\} = M\{x_1 \leftarrow x_2\}\{x_2 \leftarrow x_3\}$

！ もし $c \notin \texttt{boundvalueOf}\, M_i$ なら $(M_1\{x \leftarrow c\} =_\alpha ?M_2\{x \leftarrow c\}) = (M_1 =_\alpha ?M_2)$

！ もし $c_1, c_2 \notin \texttt{valueOf}\, M_i$ なら $(M_1\{x \leftarrow c_1\} =_\alpha ?M_2\{x \leftarrow c_1\}) = (M_1\{x \leftarrow c_2\} =_\alpha ?M_2\{x \leftarrow c_2\})$

∵ 上の系。

！ `isAlphaEquiv?` は**反射的対称的推移的**（意味は自然な定義で）である。

∵ 反射性については明らか。対称性についても明らか。推移性は明らかでないので証明する。項の長さに関する帰納法によると思う。$M_1 =_\alpha ?M_2) = (M_2 =_\alpha ?M_3) = \texttt{true}$ として $(M_1 =_\alpha ?M_3) = \texttt{true}$ を示す。場合分けがそれぞれ同じ形だけでよいことに注意する。M_1, M_2, M_3 について

- x_1, x_2, x_3 のとき。$x_1 = ?x_2 = x_2 = ?x_3$ より $x_1 = ?x_3$ である。
- $\texttt{Fun}\, x_1\, M_1, \texttt{Fun}\, x_2\, M_2, \texttt{Fun}\, x_3\, M_3$ のとき。$M_1\{x_1 \leftarrow c\} =_\alpha ?M_2\{x_2 \leftarrow c\} = \texttt{true}$ かつ $M_2\{x_2 \leftarrow c'\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c'\} = \texttt{true}$ となっている。

$$\begin{aligned} M_1\{x_1 \leftarrow c''\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c''\} &= M_1\{x_1 \leftarrow c\}\{c \leftarrow c''\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c''\} \\ &= M_2\{x_2 \leftarrow c\}\{c \leftarrow c''\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c''\} \\ &= M_2\{x_2 \leftarrow c''\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c''\} \\ &= M_2\{x_2 \leftarrow c'\} =_\alpha ?M_3\{x_3 \leftarrow c'\} \end{aligned}$$

  おそらく一行目から二行目の変形で、「 $M_1 =_\alpha M_2? = \texttt{true}$ なら $(M_1 =_\alpha ?M_3) = (M_2 =_\alpha ?M_3)$」の証明に項の長さの帰納法の仮定が必要。それ以外は補題と仮定から。

！ もし $c \notin \texttt{valueOf}\, M_1$ かつ $c \notin \texttt{valueOf}\, M_2$ なら $M_1 =_\alpha ?M_2 = M_1\{x \leftarrow c\} =_\alpha ?M_2\{x \leftarrow c\}$

主定理は次のものである。$M_1 =_\alpha M_2$ と $M_1 =_\alpha ?M_2 = \texttt{true}$ は同値。

Proof. 左から右を示す。M_1, M_2 の構造と $\texttt{isAlphaEquiv}\, M_1\, M_2$ の証明木の長さについての帰納法を用いる。$M_1, M_2, p : \texttt{isAlphaEquiv}\, M_1\, M_2$ について、形と証明木の長さを考えると次のような場合分けで十分である。

- $|p| = 0$ であり $x_1, x_2, \mathrm{Var\ conversion}$ のとき、 $x_1 =? x_2 = \mathtt{true}$ が成り立つ。

$$(x_1 =_\alpha ? x_2) = (x_1 =? x_2) = \mathtt{true}$$

- $|p| = 0$ であり $\mathtt{Fun}\, x_1\, M, \mathtt{Fun}\, x_2\, M\{x_1 \leftarrow x_2\}, \mathrm{alpha}$ のとき、 $x_2 \notin \mathtt{valueOf}\, M$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}(\mathtt{Fun}\, x_1\, M =_\alpha ? \mathtt{Fun}\, x_2\, M\{x_1 \leftarrow x_2\}) &= (M\{x_1 \leftarrow c\} =_\alpha ? M\{x_1 \leftarrow x_2\}\{x_2 \leftarrow c\}) \\ &= (M\{x_1 \leftarrow c\} =_\alpha ? M\{x_1 \leftarrow c\}) = \mathtt{true}\end{aligned}$$

  一行目から二行目と最後の変形で補題を用いた。

- $|p| > 0$ であり $\mathtt{Fun}\, x\, M_1, \mathtt{Fun}\, x\, M_2, \mathrm{Fun\ conversion}$ のとき、 $M_1 =_\alpha M_2$ が成り立つ。帰納法の仮定より $M_1 =_\alpha ? M_2 = \mathtt{true}$ である。c の取り方を考えれば補題より、

$$(\mathtt{Fun}\, x\, M_1 =_\alpha ? \mathtt{Fun}\, x\, M_2) = (M_1\{x \leftarrow c\} =_\alpha ? M_2\{x \leftarrow c\}) = (M_1 =_\alpha ? M_2) = \mathtt{true}$$

  であるからよい。

- $|p| > 0$ であり $\mathtt{App}\, M_1\, N, \mathtt{App}\, M_2\, N, \mathrm{App\ conversion\ 1}$ のとき、 $M_1 =_\alpha M_2$ が成り立つ。帰納法の仮定より $M_1 =_\alpha ? M_2 = \mathtt{true}$ であるから、

$$(\mathtt{App}\, M_1\, N =_\alpha ? \mathtt{App}\, M_2\, N) = (M_1 =_\alpha ? M_2 \wedge N =_\alpha ? N) = \mathtt{true}$$

  よりよい。

- $|p| > 0$ であり $\mathtt{App}\, M\, N_1, \mathtt{App}\, M\, N_2, \mathrm{App\ conversion\ 2}$ のとき、 $N_1 =_\alpha N_2$ が成り立つ。帰納法の仮定より $N_1 =_\alpha ? N_2 = \mathtt{true}$ であるから、

$$(\mathtt{App}\, M\, N_1 =_\alpha ? \mathtt{App}\, M\, N_2) = (M =_\alpha ? M \wedge N_1 =_\alpha ? N_2) = \mathtt{true}$$

  よりよい。

- $|p| > 0$ であり、M, M, refl のとき、$M =_\alpha M$ である。これは $=_\alpha ?$ の反射性から、 $M =_\alpha ? M = \mathrm{true}$ である。
- $|p| > 0$ であり、 M_1, M_2, sym のとき、 $M_2 =_\alpha M_1$ である。帰納法の仮定から $(M_2 =_\alpha ? M_1) = \mathrm{true}$ であるから、 $=_\alpha ?$ の対称性からよい。
- $|p| > 0$ であり、 M_1, M_2, trans のとき、 $M_1 =_\alpha M_3 =_\alpha M_2$ なる M_3 が存在する。帰納法の仮定から $(M_1 =_\alpha ? M_3) = (M_3 =_\alpha ? M_2) = \mathtt{true}$ なので $=_\alpha ?$ の推移性より良い。

$\square$