



現象数理III

第3回 2020年12月17日

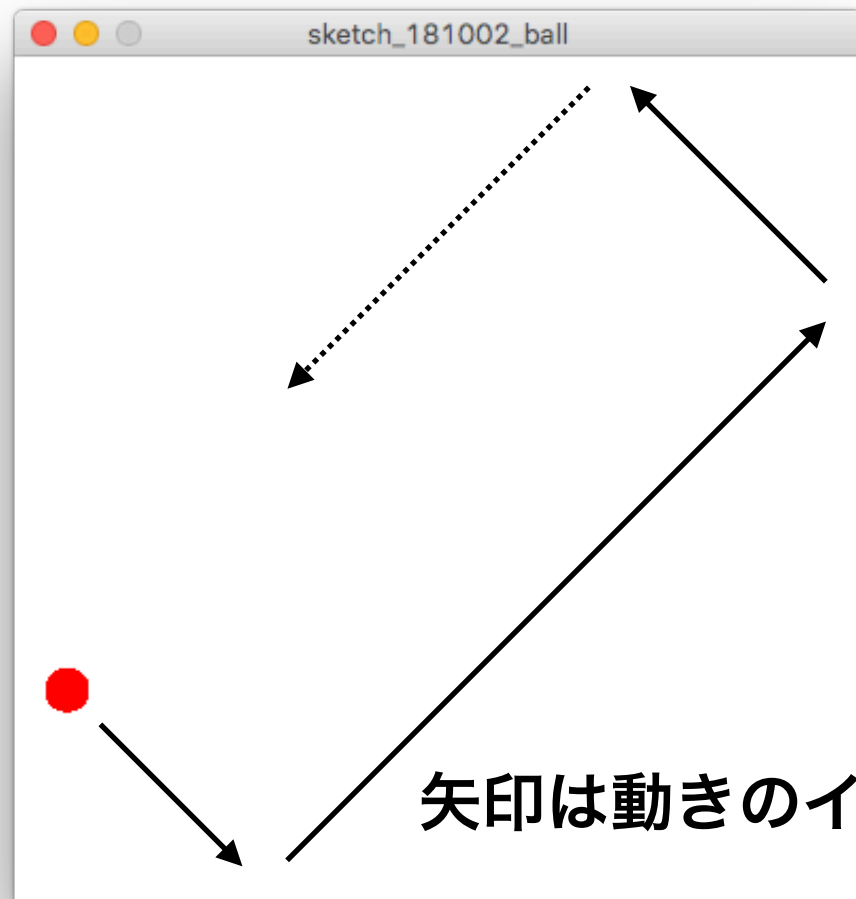
担当：岩本真裕子

「ball_20201217.pde」の中身→

(前回の続き)

ボールを動かす。

🌀 **練習1** (前回の課題1) 赤いボールがビリヤードのように動くようにしてください。



矢印は動きのイメージです

```
float x;
float y;
float r;
float dx;

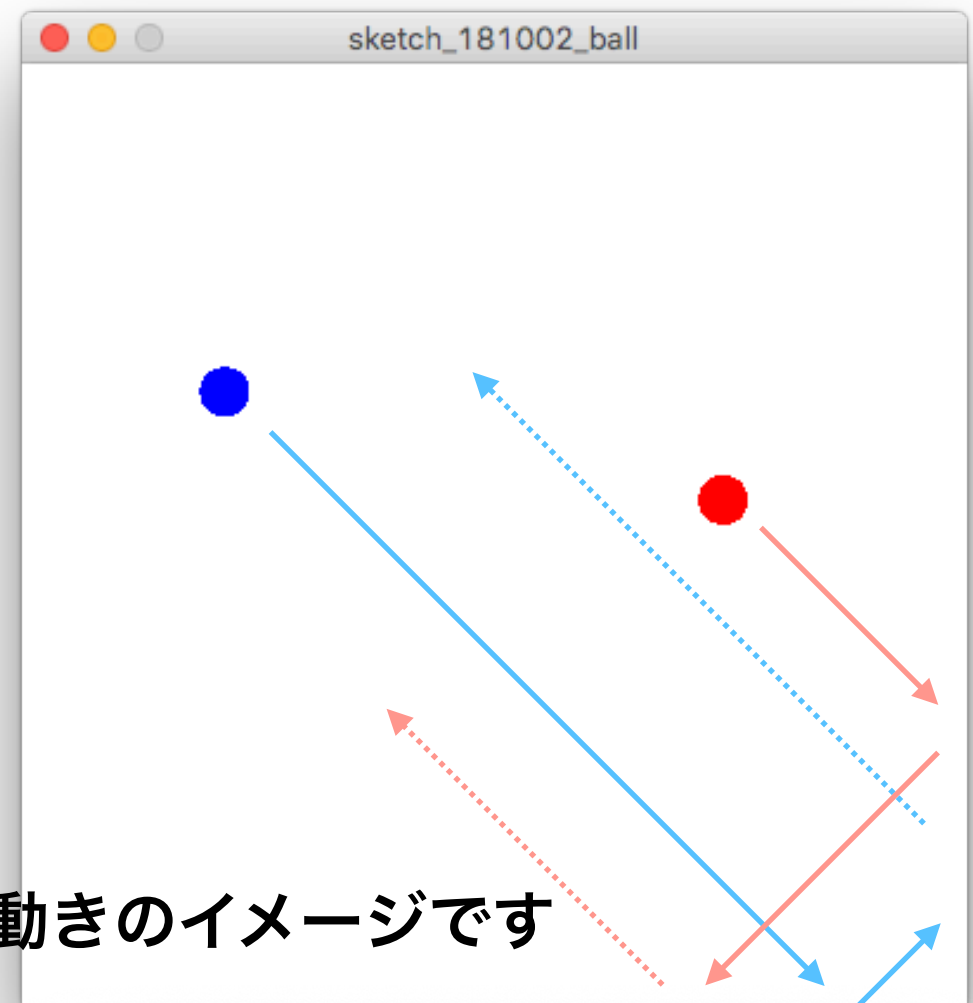
void setup()
{
  size(400,400);
  background(255);
  fill(255,0,0);
  noStroke();
  smooth();

  r = 10;
  x = random(0+r, width-r);
  y = random(0+r, height-r);
  dx = 1;
}

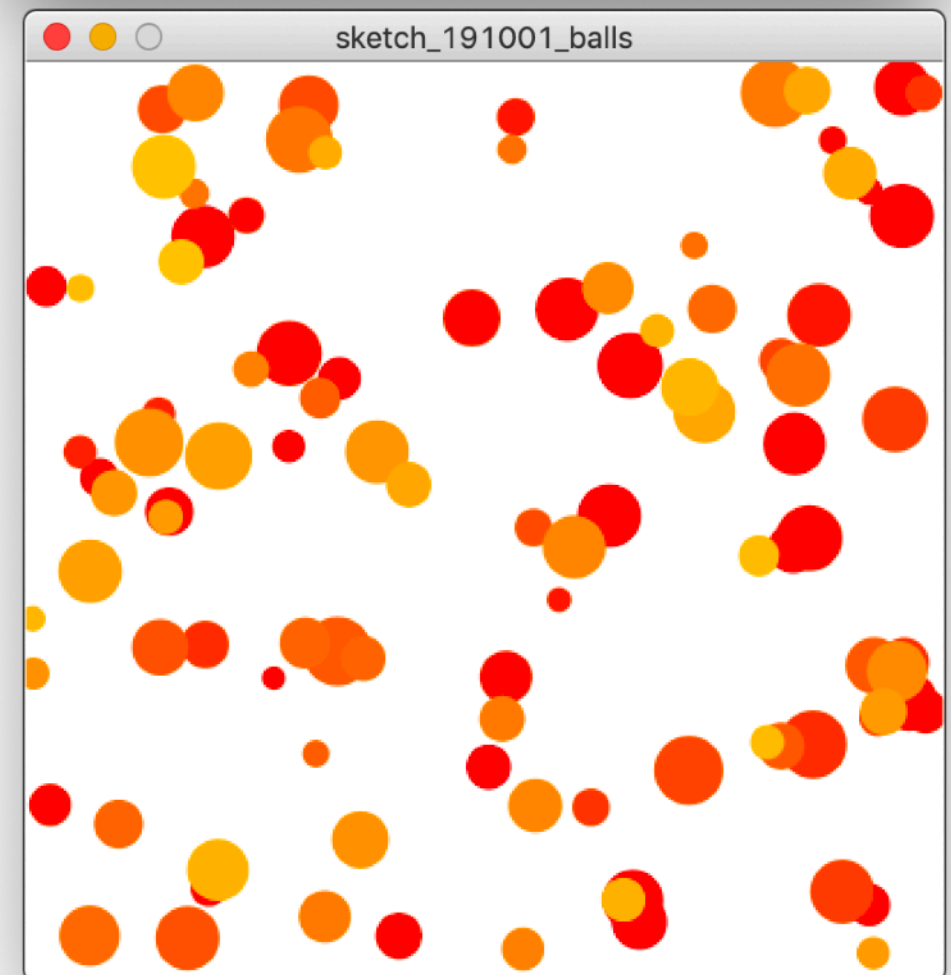
void draw()
{
  ellipse(x, y, 2*r, 2*r);
}
```

🌀 **練習2**（前回の課題2） 練習1
のプログラムを変更して、赤い
ボールと青いボールが**ビリヤード**
のように動くようにしてくだ
さい。

矢印は動きのイメージです



🌀 **練習3**（前回の課題3） 練習2の
プログラムをコピーして、新しく
「balls_20201217」を作成し、
100個のボールがバラバラに動
くアニメーションを作成してくだ
さい。（配列を使うこと）



配列の宣言

float型の変数xを5つ用意する

```
float x[] = new float[5]
```

✻ 上の宣言で、5つの変数

$x[0]$, $x[1]$, $x[2]$, $x[3]$, $x[4]$

が作られた。

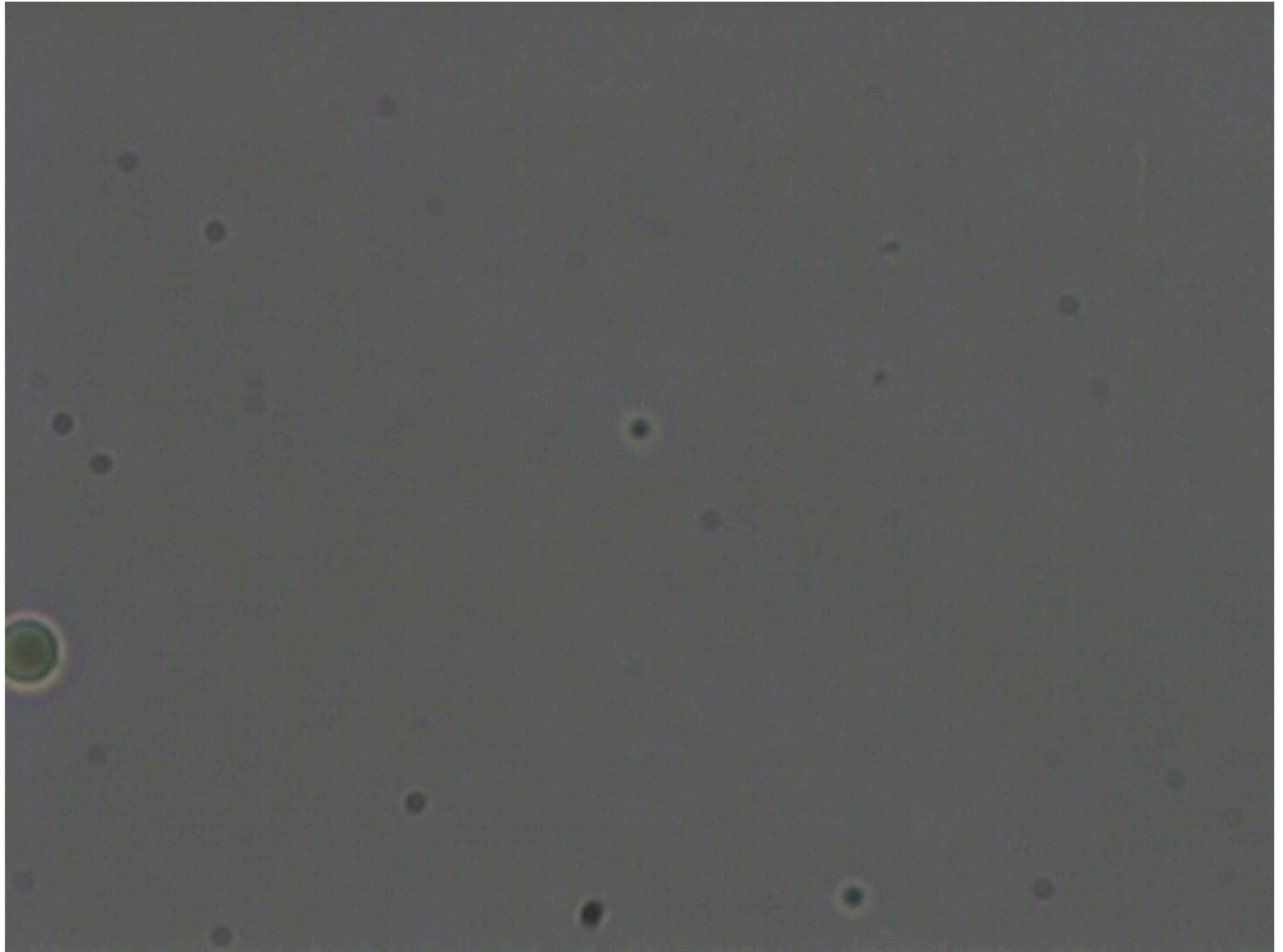
✻ 1つ目の変数 $x[0]$ に3を代入するときは

$x[0]=3$

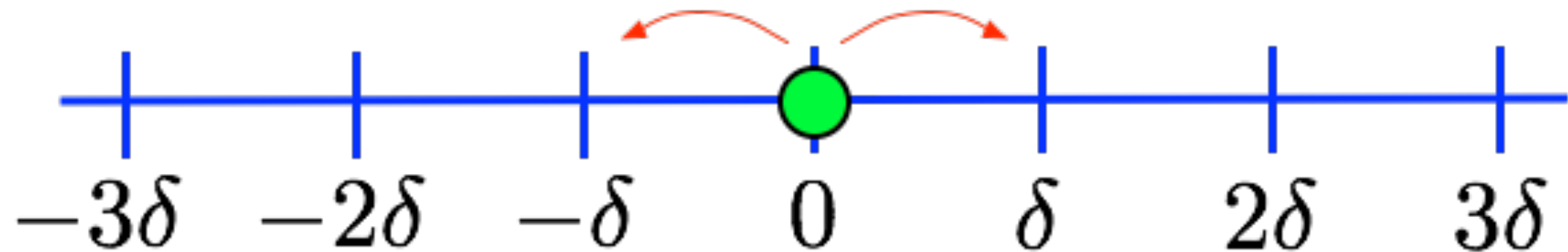
ブラウン運動

- ✻ 1827年ロバート・ブラウンが、花粉から出た微粒子が水中でランダムな運動をすることを観察した。しかし、この現象のメカニズムはわからないままであった。
- ✻ 20世紀初頭、アルベルト・アインシュタインが、原子の存在を仮定し、溶液の浸透圧の式と流体力学の式や確率過程の統計的な解法を用いて、**原子の存在があれば、顕微鏡で観察可能な程度の大きさの粒子のランダムな運動が観察されるはずであり、また逆も然り、**ということを提起した。
- ✻ アインシュタインの導いた式とブラウン運動の観察結果からアボガドロ定数を求めることができる。

水中の微粒子がブラウン運動する様子



粒子のランダムウォーク (1次元)



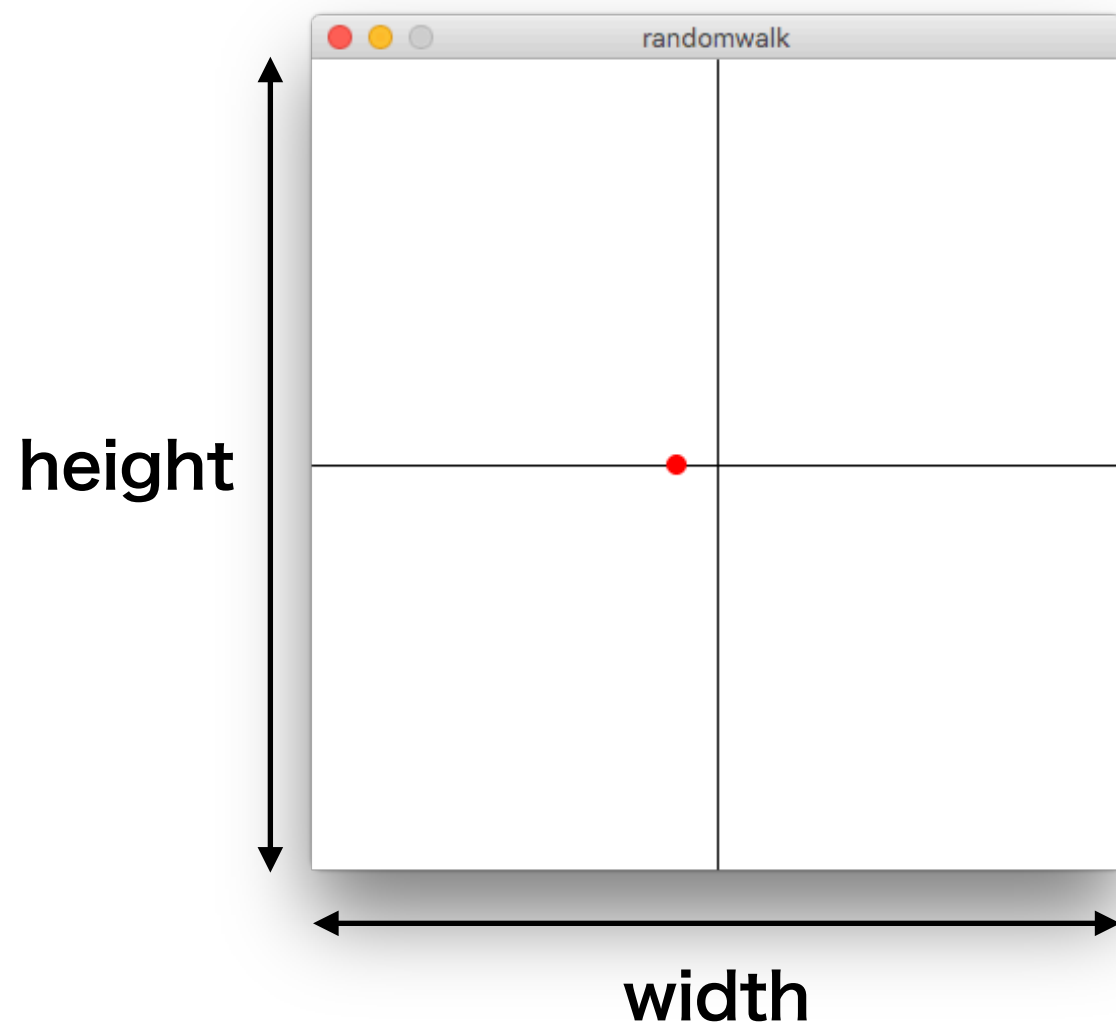
- ⊙ 直線上に1つの粒子がある。この粒子が時間とともに左右に移動するのであるが、その**移動が完全にでたらめ**である場合、その運動を**ランダムウォーク**（または、酔歩、乱歩）と呼ぶ。

1次元ランダムウォークのルール (最も簡単な場合)

- ・ 粒子は、次のステップで距離 δ だけ右か左に動く
- ・ 各ステップで左右に行く確率はそれぞれ $1/2$ であり、前のステップでどちらに動いたかは記憶していない。
- ・ 各粒子は他の粒子と独立に動き、相互作用することはない。(重なってOK)
- ・ **練習 4** 配布されたプログラム「randomwalk」をコピーして、「randomwalk20201217_1」とし、10個の粒子が1次元上をランダムウォークするプログラムを作成せよ。

(復習) width と height

sizeでウィンドウのサイズを決めると、widthに横幅のピクセル数が、heightに高さのピクセル数が自動的に代入される。



☼ randomwalk.pdeでは、

```
size(400,400);
```

としたので、

```
width = 400
```

```
height = 400
```

が自動的に代入されており、

```
width/2
```

と書くと、それはこの場合200を意味する。

(復習) 乱数の発生

乱数の発生

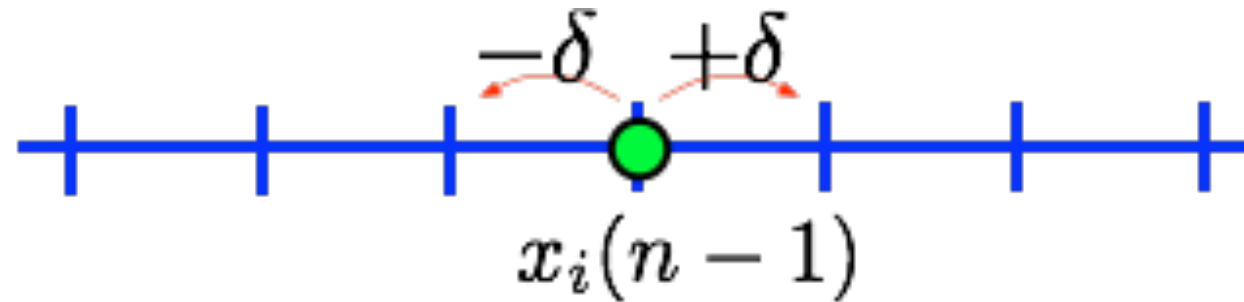
`random(low, high)`

- ✻ ランダムな数字を使いたい場合は、random関数をつかう。
- ✻ 指定した範囲 ($\text{low} \leq x < \text{high}$) の乱数を発生させる。
- ✻ 発生する乱数はfloat型 (実数値) であるので注意。

粒子の平均位置

- ✻ 粒子を100ステップランダムウォークさせたときに、はじめの位置からどのくらい遠くまで移動できるだろうか？（当然、はじめの位置から $100 \times \delta$ 以上離れたところには移動できないが、 $100 \times \delta$ 離れたところに移動する可能性もかなり低いそう）
- ✻ **練習 5** 複数の粒子（例えば1万個）を1次元でランダムウォークさせ、100ステップ目のランダムウォークでどの格子点に到達するかを観察し、100ステップ目に各粒子がいる位置の平均を計算するプログラムを作成せよ。
- ✻ ヒント：ステップの回数は、frameCountで取得できる

粒子の平均位置（理論）



- ✻ 1次元ランダムウォークを考える。初期時刻にN個のすべての粒子が原点にいるとする。
- ✻ 第i番目の粒子のnステップ目の位置を $x_i(n)$ 、1ステップに進む距離を δ とすると、

$$x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta$$

- ✻ nステップ目のN個の粒子の位置の平均（平均位置）は

$$E(x(n)) = \langle x(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n)$$

粒子の平均位置（理論つづき）

✻ 粒子数Nが十分大きいとき、

$$\begin{aligned}\langle x(n) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i(n-1) \pm \delta \right) \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n-1) = \langle x(n-1) \rangle\end{aligned}$$

✻ 初期位置が原点なので、 $\langle x(0) \rangle = 0$ である。

✻ よって、 $\langle x(n) \rangle = 0$

✻ つまり、**粒子の数が十分大きい場合、平均の位置は初期位置から動かない。**

粒子の位置の分散（理論）

1次元ランダムウォークを考える。初期時刻にN個のすべての粒子が原点にいるとする。

第*i*番目の粒子の*n*ステップ目の位置を $x_i(n)$ 、1ステップに進む距離を δ とすると、

$$x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta$$

*n*ステップ目におけるN個の粒子の位置の分散 $V(x(n))$ は、

$$V(x(n)) = \langle (x(n) - E(x(n)))^2 \rangle = \langle x(n)^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n)^2$$

粒子の位置の分散

(1次元シミュレーション)

✻ **練習6** 前回の1次元ランダムウォークのプログラムに**位置の分散**を計算するコードを追加せよ。位置の分散は次で求まる。

$$\langle x(n)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n)^2$$

粒子の位置の分散（理論続き）

ここで、 $x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta$ より、

$$x_i(n)^2 = x_i(n-1)^2 \pm 2\delta x_i(n-1) + \delta^2$$

Nが十分大きいとき、

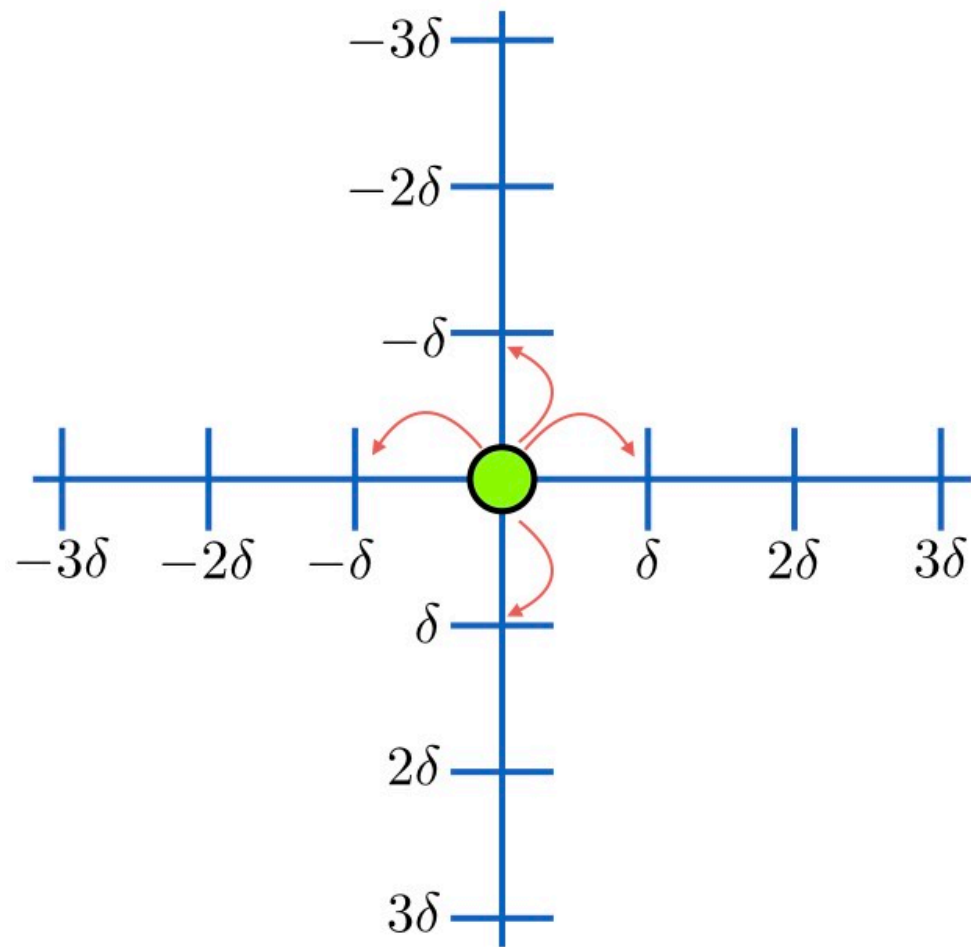
$$\begin{aligned} \langle x_i(n)^2 \rangle &= \langle x_i(n-1)^2 \rangle \pm 2\delta \langle x_i(n-1) \rangle + \delta^2 \\ &= \langle x_i(n-1)^2 \rangle + \delta^2 = \langle x_i(n-2)^2 \rangle + 2\delta^2 \\ &\dots = \langle x_i(0)^2 \rangle + n\delta^2 = n\delta^2 \end{aligned}$$

よって、分散は、

$$\langle x(n)^2 \rangle = n\delta^2$$

練習6のプログラムの位置の分散が左の式と同じような値になっていることを確かめよう！

粒子のランダムウォーク (2次元)



- ❁ 1次元ランダムウォークモデルと同様に、粒子の2次元ランダムウォークを考える。
- ❁ 今、二次元**格子**状に粒子があるとし、その粒子の運動はでたらめであるとする。
- ❁ つまり、次の時間、右に移動する、左に移動する、下に移動する、上に移動することが同確率 $1/4$ で起こるとする。

✻ **練習7** 配布されたプログラム「randomwalk」をコピーして、「randomwalk20201217-2」として保存し、2次元上をランダムウォークするプログラムを作成せよ。

本日の課題 1

🌀 **練習7**のプログラムをコピーして

「randomwalk20201217-3」として保存し、**2次元で、100粒子が同時にランダムウォークするシミュレーション**を完成せよ。

🌀 ただし、**粒子間の相互作用はない**と仮定する。この場合、一つの格子上に複数の粒子があってもよい。（粒子同士の衝突などは全く考えない。）

本日の課題 2

- 🌀 課題 1 を変更して、壁まで行ったときに跳ね返るようなプログラムに変更せよ。

本日の課題 3

- ❁ 複数の粒子（例えば 1 万個）を 2 次元ランダムウォークさせ、各ステップで全粒子がいる**位置の平均**を計算するプログラムを作成せよ。

本日の課題4

- 複数の粒子（例えば1万個）を2次元ランダムウォークさせ、各ステップで全粒子がいる**位置の分散**を計算するプログラムを作成せよ。

分散と拡散係数

分散は、粒子のばらつき具合を表す。ここで、**時間に対するばらつき具合**を表すことができれば、粒子のひろがり具合を考えることができる。そこで、時間変数 t を導入する。

$$t = \tau n$$

$$\langle x(n)^2 \rangle = n\delta^2 \quad \Longrightarrow \quad \langle x(t)^2 \rangle = \frac{\delta^2}{\tau} t$$

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau} \text{ とおくと}$$

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt$$

分散と拡散係数(続き)

標準偏差 $\sigma(t)$ (標準偏差の2乗が分散) は、粒子のひろがり具合を表す指標で、

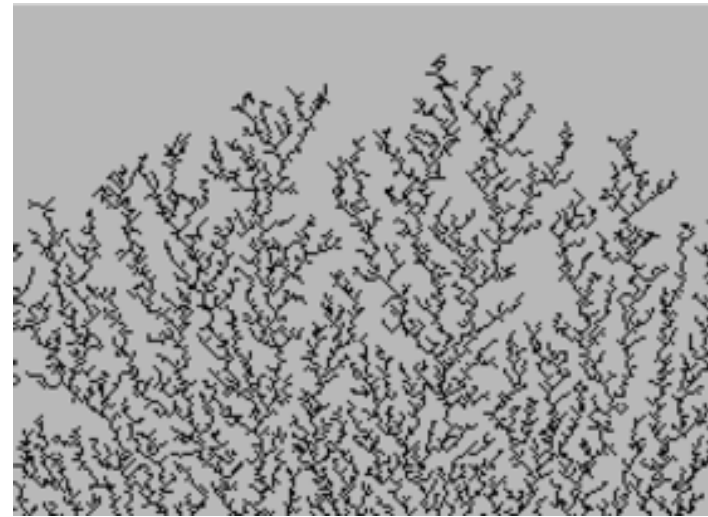
$$\sigma = \sqrt{2Dt}$$

このときDを**拡散係数**という。

拡散係数は、微分方程式の一つ、**拡散方程式**の係数である。
拡散方程式は**偏微分方程式**なので、講義の後半でもう一度出てくる。

🌀 **練習8** 本日の課題4を変更して、半径 $\sqrt{2Dt}$ の円を描画せよ。

デタラメが作り出すパターン (DLA)



- DLAのシミュレーションを実行・観察できる iPhone, iPad アプリ TheDLA は、遊びながら、でたらめな運動がどのようにして自然界に見られるような樹枝状の形を作り上げるのかを学ぶことができます。遊ぶには、iPhone , iPad や iPad touch等の iOS 機器が必要です。The DLAの製作者ページは[こちら](#)。

拡散律速凝集 DLA

Diffusion Limited Aggregation

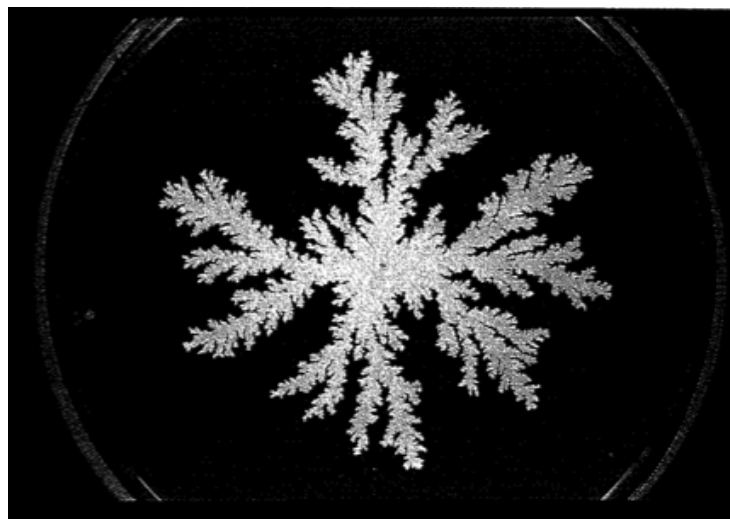
DLAは、日本語では、**拡散律速凝集**とよばれる。律速とは、その現象の時間スケールを決定づけるもっとも遅い事象を指す。拡散律速凝集は、私たちの身の回りにもよく見られる現象である。



例 1 : 電気分解 $\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Zn}$

硫酸亜鉛 (ZnSO_4) 水溶液に、亜鉛よりもイオン化傾向が小さい金属（例えばシャーペンの芯でOK）を刺して電気を流すと、水溶液中の亜鉛イオンは、電子 e^- を受け取って**亜鉛**となる。

このとき、水溶液中をランダムウォークしている亜鉛イオンが、シャーペンの芯にランダムにくっつきながら成長していくため、下のような樹状パターンができる。



例 2 : **枯草菌**のコロニーパターン（写真は Fujioka & Matsushita, 1989）

真性粘菌である枯草菌は、飢餓状態の時に凝集しパターンを作る。

DLAのアルゴリズム

では、どのようにしてDLAパターンは作られているのか。
それはとても簡単で、**ランダムウォークしている粒子が種粒子にくっついていく**、というだけである。

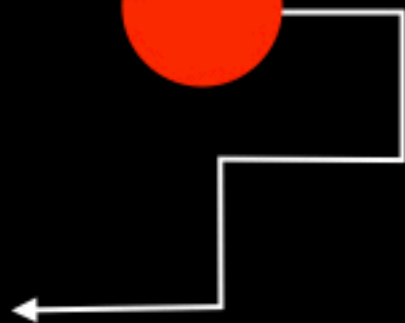
種粒子とよばれる粒子が平面上にあって固定されているとする（水色）。そこから少し離れたところにランダムウォークする粒子を（たくさん）置く（赤色）。この粒子を**自由粒子**とよぶ。

このランダムウォークする自由粒子は平面上を動き回り、**たまたま種粒子の隣にくる**場合があるでしょう。種粒子の隣に自由粒子がきたら**自由粒子は種粒子に付着**するとし、それ自身が種粒子と同等の粒子となるとする。

ランダムウォーク + 簡単なルール

ランダムウォーク

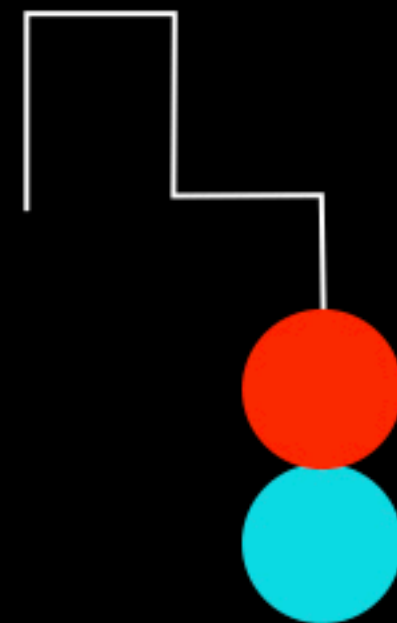
する粒子



種粒子



種粒子に隣接する
と取り込まれる



種粒子

参考文献：フラクタルの物理(I)(II), 松下貢, 裳華房

本日の課題（発展）

DLAのプログラムを作成せよ。