8173102 朴 東均

No.

. . ( )

§13.

3. (a) ＜マクローリンの定理＞

関数 $f(x)$ : 0を含むある開区間 $I=(a, b)$ で $C^{n+1}$ 級関数

このとき, $\forall x \in (a, b)$ に対して

$$\exists \theta \in (0, 1) \text{ s.t. } f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(b) マクローリンの定理より

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

このとき, $x=3$ とすると

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{1}{2!} \cdot 3^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot 3^n + \frac{e^{3\theta}}{(n+1)!} \cdot 3^{n+1}$$

ここで

$$\left| e^3 - \left\{ 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} \right\} \right| = \left| \frac{e^{3\theta} \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e^3 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} < 100$$

であることから $100 \leq \varepsilon$ となる $n$ を選べば, その $n$ に対して

$$\left| e^3 - \left\{ 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} \right\} \right| < \varepsilon$$

が成立することが判ります