現象数理 1（2020 年度 第 13 回授業）

黒岩大史 kuroiwa@riko.shimane-u.ac.jp

今回の授業日と課題〆切

対面：1 月 14 日　オンデマンド推奨期間：12 月 24 日〜1 月 20 日　課題〆切：1 月 20 日

1 ニュートン法

ニュートン法は、次の幾何的イメージに基づいて考えられたアルゴリズムです。

幾何的イメージ

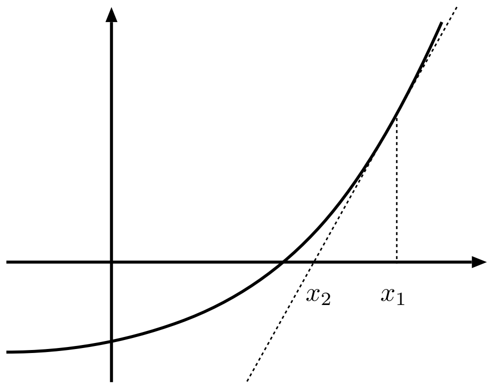
$(x_1, f(x_1))$ における f の接線の方程式は

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

であり、これと x 軸の交点を $(x_2, 0)$ とおくと $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ であり、

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

となる。この操作を



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

として繰り返すと、得られた数列 $\{x_k\}$ が $f(x) = 0$ の解に収束することが期待される。

このアイディアに基づいて、以下にアルゴリズムを示します。前提として関数 f は微分可能とし、また停止条件に関係する $\varepsilon > 0$ および自然数 N を事前に与えます。

アルゴリズム (ニュートン法)

(I) $k = 1$ とする。与えられた x_1 から $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ を求め、(II) へ。

(II) $|f(x_{k+1})| > \varepsilon$ かつ $k \leq N$ ならば (III) へ。そうでなければ (IV) へ。

(III) k の値を 1 増やし、$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ とおく。(II) へ。

(IV) $k \leq N$ ならば x_{k+1} を $f(x) = 0$ の近似解とする。$k > N$ ならば近似解は求められなかったとする。

※本来ならば $f'(x_k) = 0$ のときを考慮する必要がありますが、ここでは省略しています。

例題 1. ニュートン法を用いて $x^2 = 2$ の近似解を求めて下さい。ただし $x_1 = 3$, $\varepsilon = 0.000001$, $N = 100$ として下さい。

[ファイル名 2020-13-1.py]

```
def f(x):
  return x * x - 2
def next(x):
  return x - f(x)/(2 * x)
e = 0.000001
N = 100
k = 1
x = 3
x = next(x)
while (f(x)<-e or e<f(x)) and (k <= N):
   print(k, x)
   k = k + 1
   x = next(x)
if(k <= N):
   print("近似解は",x,"です。")
else:
   print("近似解は求まりませんでした。")
```

このプログラムでは $x^2 - 2 = 0$ を解きたいので、関数 `f(x)` の戻り値は $x^2 - 2$ と与えます。またアルゴリズムの (III) に対応する部分として関数 `next(x)` の戻り値を $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ として与えます。これは x_k から x_{k+1} の作り方を表しています。分母の $f'(x)$ の部分は手計算で求め分母に書きます。

実行すると驚きますが、数回で終わることがほとんどです。収束する場合には、二分法と比較してとんでもない速さで解に収束します。

【ニュートン法は二分法と比べてめちゃくちゃ速い！しかし停止するとは限らない！】
ニュートン法では、初期値 x_1 が $f(x) = 0$ の解の近くにあれば、非常に速い速度で近似解に収束する（→ 2 次収束）ことが知られていますが、二分法とは違って、必ずしも近似解が求まることが保証されません。例えば $f(x) = x^3 - x$ のとき、$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ とすると、$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となり、近似解は求まりません。このことを次の例題で試してみましょう。

例題 2. ニュートン法を用いて $x^3 - x = 0$ の近似解を求めて下さい。ただし $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\varepsilon = 0.000001$, $N = 100$ として下さい。（ここでは $\sqrt{5}$ の計算は `import math` とトしてから `math.sqrt(5)` として与えます。2020-13-2.py）

[ファイル名 2020-13-3.py]

```
import math
def f(x):
  return x * x * x - x
def next(x):
  return x - f(x)/(3 * x * x - 1)
e = 0.000001
N = 100
k = 1
x = 1/math.sqrt(5)
x = next(x)
while (f(x)<-e or e<f(x)) and (k <= N):
   print(k, x)
   k = k + 1
   x = next(x)
if(k <= N):
   print("近似解は",x,"です。")
else:
   print("近似解は求まりませんでした。")
```

基本、例題 1 の関数部分と x の初期値を変えるだけです（今回は import math も必要ですが)。このプログラムは理論的には収束しません（もし誤差が生じるようならば結局は収束すると思います)。

練習 1. 次の方程式の近似解 1 つを、ニュートン法を用いて求めて下さい。ただし、正の数 $\varepsilon > 0$、自然数 N、x_1 は適当に与えて下さい。

1. $x^2 = 5$ (2020-13-4.py)
2. $x^3 = 5$ ($x = 1.709975946676697\cdots$, 2020-13-5.py)
3. $\cos x = 0$ (例題 2 と同じように、先頭などに「import math」とすれば、$\sin x, \cos x$ はそれぞれ math.sin(x), math.cos(x) で求められます。2020-13-6.py)

今日のまとめ

- ニュートン法のアルゴリズムとアイディアは理解しましたか？
- ニュートン法の速さ、およびニュートン法が必ずしも収束しないことを、例を通じて学ぶことができましたか？

2 確認問題

第 10 回授業の復習にあたり、第 14 回授業時に問われるような形式で書かれた問題ですので、自身の理解定着度をはかりながら問いてみて下さい。提出の際、筆記部分 (3)(a)–(b) は写真に撮り、1 ファイルの PDF にして提出して下さい。

(1) input 文で自然数を入力し、以下のように表示するプログラムを作成せよ。(`2020-13-7.py`)

```
数を入力して下さい：3
1
3
5
```

```
数を入力して下さい：5
1
3
5
7
9
```

(2) キーボードから 10 個の整数を入力したとき、これらの最大値でも最小値でもない数の個数を表示するプログラムを作成せよ。ただしメソッド `sorted()` は使わないこと。（例：入力の 10 数が $-4,-2,0,2,4,-4,-2,0,2,4$ であるとき、最小値が -4、最大値が 4 であるので、6 が表示される。`2020-13-8.py`）

(3) 次の問いに答えよ。

(a) 実数値関数 $f(x)$ のマクローリンの定理を、条件も含めて正確に述べよ。

(b) e を自然対数の底とするとき、e^3 と $1+3+\dfrac{3^2}{2!}+\cdots+\dfrac{3^n}{n!}$ の差の絶対値が 0.000001 未満となるような n のみたす条件を答えよ。ただし $2<e<3$ であることは用い、条件を導出する際に (a) をどのように使ったのかを判るように書くこと。

(c) e^3 と $1+3+\dfrac{3^2}{2!}+\cdots+\dfrac{3^n}{n!}$ の差の絶対値が 0.000001 未満となるような n とそのときの $1+3+\dfrac{3^2}{2!}+\cdots+\dfrac{3^n}{n!}$ の値を表示するプログラムを作成して下さい。(`2020-13-9.py`)