課題 14-2

課題 1 で提出した各問題について**解答例を確認し、完全理解のために必要な学習、および採点**を行うこと。**満点以外は学習後の採点となるので、全ての問題の得点が 6 点以上となるよう学習することが望ましい**。これらの学習の跡（ノート）を全て写真に撮り、PDF 化（1 ファイル化）して moodle で提出せよ。

(1) 解答例

```
n = int(input("自然数を入力して下さい："))
for i in range(1,n+1):
  print(2*n-2*i+1)
```

初項が $2n-1$、公差が -2 の等差数列であり、i を変数としたときの一般項は $(2n-1)+(-2)(i-1) = 2n-2i+1$ となる。他にも別解があるが、どのような自然数 n が入力されても正しく動作することが求められる。`for` 文を用いるので、インデントが適切かどうかを確認すること。

採点基準	得点
本質的に解答例と同じか、別解の正答だった。	10
概ね正解だが小さなミスがあった。何も見ずに正答できるほど理解している。	8
全く判らなかった、あるいは本質的なミスをしていた。（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
解答は間違っていて、解説を読んだが、自力で正答できる自信がない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(2)(a) 解答例

`(i) 1, (ii) 2, (iii) b=c, (iv) a=c`

この状況は授業中にやっていないこともあり、必ず関数 $f(x) = x^2 + x - 5$ の概形を描きながら解答すること。2 つの解 $\alpha < \beta$ のうち β を求めるので、(i), (ii) では $a < b$, $f(a) < 0 < f(b)$ となる a, b を選べば正解である。(iii), (iv) の解答でも十分に注意する必要がある。$c = (a+b)/2$ のとき，$f(c) > 0$ ならば $f(a) < 0 < f(c)$ のため区間 $[a, c]$ 内に解があることが中間値の定理から判るので、区間の右端 b を c とする。つまり (iii) は `b=c` とするのが適切である。同様に $f(c) < 0$ ならば $f(c) < 0 < f(b)$ のため区間 $[c, b]$ 内に解があるので、区間の左端 a を c とする。つまり (iv) は `a=c` とするのが適切である。

採点基準	得点
全て正解だった。	10
1 つ以上本質的なミスをしていたが、解説を見て理解し、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに正答できるほどの理解をしている。	6
解答は間違いで、解説を読んでみたが、現時点では何も見ずに必ず正答できるほどの理解をしていない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(2)(b) 解答例

```
def f(x):
   return x*x+x-5
a = 1
b = 2
c = (a + b) / 2
e = 0.000001
while f(c)!=0 and b-a>2*e:
   if f(c) > 0:
      b = c
   else:
      a = c
   c = (a + b) / 2
print(c, f(c))
```

採点時には以下に注意する

- 関数が正しく書かれていること
- `a`, `b` の初期値および `if` 文の分岐時の実行内容が、(2)(a) の正答に沿って書かれていること
- もし (2)(a)(i)〜(iv) のいずれかの解答が間違っていた場合には（様々な間違いが想定され、全ての採点基準を列挙することが出来ないため、ここでは申し訳ないが）最大でも 8 点以下として採点すること
- `if` 文において、条件分岐が `else` ではなく `elif` を用いて書いた場合や、条件分岐させず 2 つの `if` 文を用いて書いた場合も、適切に書かれていれば正解とする（が通常は解答例の書き方の方が良い）
- `while` 文や `if` 文におけるインデントが適切かどうかを注意深く確認すること

採点基準	得点
最初から本質的に正解だった。	10
ささいなミスがあった。次にやったら正答が得られる程度の理解をした。	8
本質的なミスをしていた。あるいは全く判らなかった。（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次にやったら正答が得られる程度の理解をした。	6
本質的なミスをしていた。あるいは全く判らなかった。解説を読んだが、現時点では次にやっても正答が得られる自信がない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(2)(c) 解答例

（最初に与えた a, b の初期値が $1, 2$ の場合の解答例を与える。）
STEP3 では a、b のどちらかが c（a と b の中点）となり、このことで$b-a$ の値は元の値の半分となる。従って $b-a$ は初項 $2-1=1$、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となるので、$b-a=\frac{1}{2^{k-1}}$となっている。$\frac{1}{2^{k-1}} \to 0\ (k \to \infty)$より、$k$ の値が大きくなっていくといずれ $b-a \leq 0.000002$が成り立ち、プログラムが終了する。

a, b の初期値が異なると $b-a$ も変わることに注意せよ。

採点基準	得点
4 下線部が含まれ使われた文章も適切であった。あるいは別解で正解だった。	10
少し説明不足があった。（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次に解答したら正答が得られる程度に十分に理解した。	8
著しく説明不足または無回答であったが、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次に解答したら正答が得られる程度に十分に理解した。	6
説明不足または無回答であった。解説を読んでみたが、現時点では次にやっても正答が得られる自信がない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(2)(d) 解答例

（図で説明することも出来るが、ここでは説明と数式による解答例を与える。）
終了時点（STEP4）で $f(c)=0$ または $b-a \leq 0.000002$ が成立する。$f(c)=0$ のときは $\beta=c$ より $|\beta-c|=0 \leq 0.000001$ は明らか。$b-a \leq 0.000002$ のとき、$f(a)<0<f(b)$ であるので中間値の定理より $f(\bar{x})=0$ となる $\bar{x} \in (a, b)$ が存在するが、ここでは $\bar{x}=\beta$ となっている。つまり $\beta \in (a, b)$、すなわち $a<\beta<b$ より、両辺から c を引いて、$-\frac{b-a}{2}=a-c<\beta-c<b-c=\frac{b-a}{2}$ となり、$|\beta-c|<\frac{b-a}{2} \leq 0.0000001$ が示される。

採点基準	得点
解答例とほぼ同等、あるいは説明内容は適切で正答と判断される。	10
少し説明不足があった。（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次に解答したら正答が得られる程度に十分に理解した。	8
著しく説明不足または無回答であったが、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次に解答したら正答が得られる程度に十分に理解した。	6
説明不足または無回答であった。解説を読んでみたが、現時点では次にやっても正答が得られる自信がない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(3)(a) 解答例

$f(x)$ は原点を含むある区間で $n+1$ 回微分可能であるとする。この区間内の x に対して、ある $\theta \in (0,1)$ が存在して次の等式が成立する。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

採点基準	得点
条件および式全てが正しく書かれていた。	10
（ささいなミスを含め）一つ以上のミスがあった。（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）次は何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
不正解で、解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(3)(b) 解答例

$\underline{f(x) = e^x}$とおく。$f(x)$ は $\mathbb{R}$ において何回でも微分可能であるので、自然数 n と$\underline{x=-2}$に対してマクローリンの定理<u>(a) を用いると</u>、<u>ある $\theta \in (0,1)$ が存在して</u>次の等式が成立する。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

従って、

$$e^{-2} = 1 - 2 + \frac{1}{2!}2^2 - \frac{1}{3!}2^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(-2)^n + \frac{e^{-2\theta}}{(n+1)!}(-2)^{n+1}$$

$$\underline{\left| e^{-2} - \left\{ 1 - 2 + \frac{1}{2!}2^2 - \frac{1}{3!}2^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(-2)^n \right\} \right| = \left| \frac{e^{-2\theta}}{(n+1)!}(-2)^{n+1} \right|}$$

ここで

$$\underline{\left| \frac{e^{-2\theta}}{(n+1)!}(-2)^{n+1} \right| = \frac{e^{-2\theta}}{(n+1)!}2^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}2^{n+1}}$$

であるので、<u>$\frac{1}{(n+1)!}2^{n+1} \leq 0.000001$ をみたす自然数 n を取れば</u>、e^{-2} と $1-2+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!}$ の差の絶対値が 0.000001 未満となる。$e^{-2\theta} < 1$ を示すために $1 < e$ が用いられている。

採点基準	得点
7 下線部が本質的に全て含まれ、使われた文章も適切である。	10
ささいなミスをしていたが、解答例を見て理解し、何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	8
本質的なミスがあった、あるいは全く判っていなかったが、解答例を見て理解し、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
不正解で、解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(3)(c) 解答例

```
n = 0
p = 1
q = 1
sum = 1
while(2*p/(n+1) > 0.000001):
    n = n + 1
    p = p * 2 / n
    q = -q
    sum = sum + p * q
print(n, sum)
```

ここで `p` は $\frac{2^n}{n!}$ を、`q` は $(-1)^n$ を表す変数として用いている。従って `while` 文の停止条件 $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0.000001$ に現れる $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ は、`2*p/(n+1)` で表現できる。もし 2^n や $n!$ を表すのに上記のような方法を用いず、例えば `2**n` や階乗の計算を python にさせている場合には 6 点以下で採点する。また `while` の不等式の向きが逆になっている場合や、`sum` の値が適切に計算できていない場合も 6 点以下で採点する。

採点基準	得点
本質的に正しく書かれている。	10
ささいなミスをしていたが、解答例を見て理解し、何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	8
本質的なミスがあった、あるいは全く判っていなかったが、解答例を見て理解し、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(4)(a) 解答例

点 $(x_k, f(x_k))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

である。この直線と x 軸の交点を $(x_{k+1}, 0)$ とすると

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\therefore x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

採点基準	得点
本質的に正しく書かれている。	10
間違っていたが、解答例を見て理解し、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

(4)(b) 解答例

数列 $\{x_k\}$ **が** $f(x) = 0$ **の解に収束する**ことが期待されている。

採点基準	得点
本質的に正しく書かれている。	10
間違っていたが、解答例を見て理解し、（その後何も見ずに書き直し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0

補足：数列 $\{x_k\}$ が a に収束するとは、x_k が限りなく a に近づくときをいい、$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ such that $\forall k > m, |x_k - a| < \varepsilon$ が成り立つときをいう。このとき $\lim_{k \to \infty} x_k = a$ と表す。

(5) 解答例

```
[0, 0, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 2]
[0, 1, 0]
[0, 1, 1]
[0, 1, 2]
[0, 2, 0]
[0, 2, 1]
[0, 2, 2]
[1, 0, 0]
```

プログラム（参考）

```
a = [0]*3
for i in range(0,10):
    print(a)
    k = 2
    a[k] = a[k] + 1
    while a[k]==3 and k > 0:
        a[k] = 0
        k = k - 1
        a[k] = a[k] + 1
```

【プログラムの動作について解説】最初に `a = [0]*3` が実行され、`a = [0, 0, 0]` となる。`for` 文で `i` は $0, 1, ..., 9$ と動く（以降 `i` に依存しないためこの `for` 文には 10 回実行されるという意味しかない）。`i=0` のとき、`[0, 0, 0]` が出力され、`k = 2`, `a[k] = a[k] + 1` が実行され、結果として `a[2] = 1` となる。`while` は条件をみたさず実行されない。`i=1` のとき、`[0, 0, 1]` が出力され、同様にして `a[2] = 2` となり、`while` は実行されない。`i=2` のとき、`[0, 0, 2]` が出力され、同様にして `a[2] = 3` となり、今度は `while` が実行され、`a[2] = 0`, `a[1] = 1` となる。`i=3` のとき、`[0, 1, 0]` が出力され、`a[2] = 1` となり、`while` は実行されない。これ以降は省略するが、注意深く観察しながら動作を追っていくことで、上記左側の実行結果が得られる。

採点基準	得点
数字が全て正しく書かれている。	10
数字が間違っていたが、解答例を見て理解し、（その後自力で解答し正答できたなど）何も見ずに自力で正答できるほど理解している。	6
解説も読んだが、まだ何も見ずに自力で正答できるほどではない。	3
不正解または無回答で、解説を読む意思がない。	0