現象数理1（2020年度 第11回授業）

黒岩大史 kuroiwa@riko.shimane-u.ac.jp

今回の授業日と課題〆切

対面：12月17日　オンデマンド推奨期間：12月10日〜12月23日　課題〆切：12月23日

1　$\log(1+x)$ の近似

各自で計算し、以下の空欄を埋めて下さい。$f(x) = \log(1+x)$ とするとき、

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

であるので

$f''(x) =$　　　　　　$f'''(x) =$　　　　　　$f''''(x) =$

となり、一般に次が得られます。（厳密には帰納法で示すが省略）

$f^{(k)}(x) =$

従って自然数 n と実数 $x > -1$ を与えたとき、マクローリンの定理から次をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在します。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

これに上の状況を当てはめていくと、次式が得られます。

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \tag{1}$$

ここまでの議論は、マクローリンの定理さえ覚えていれば出来るので、何も見ずに自力で計算できるようにすることが望ましいです（枠内の式は最終ページに書いています）。このことを利用して、$\log(1+1)$ の近似値（収束がかなり遅い）を求めてみます。

例題 1.　$\log 2$ を

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

で近似するとき、誤差の絶対値が 0.000001 以下となるような n とそのときの $1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ の値を求め表示するプログラムを作成して下さい。

考え方． $f(x) = \log(1+1)$ に対して、自然数 n と $x = 1$ を与えたとき、マクローリンの定理より (1) をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在する。$1^k = 1$ であるので次が得られる。

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$$

従って、

$$\begin{aligned}\left|\log 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right| &= \left|(-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}\right| \\ &= \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

従って、$\frac{1}{n+1} \leq 0.000001$ をみたす自然数 n に対する和 $1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ を求めれば良いことが判る。以下のプログラムでは、`q` は $(-1)^{n-1}$ を表す変数として用います。

2020-11-1.py

```
n = 0
q = -1
sum = 0
while(1/(n+1) > 0.000001):
    n = n + 1
    q = -q
    sum = sum + q/n
print(n, sum)
```

例題 1 と同じようにして、次の問題（収束は例題 1 より早い）にトライしてみて下さい。

練習 1． $\log(1+\frac{1}{2})$ の近似値を、誤差の絶対値が 0.000001 以下となるように求めるプログラムを作成して下さい。(`2020-11-2.py`)

練習 1 の考え方． 通常は (1)、すなわち $f(x) = \log(1+x)$ に対して $x = \frac{1}{2}$ のときのマクローリンの定理を用います。あとは前回学習の例題 1 等と同じ要領で、剰余項の評価を正しく行う必要があります。プログラミングの際には、例えば `p` を $\frac{1}{2^n}$ を表す変数、`q` を $(-1)^{n-1}$ を表す変数として用いると楽だと思います。解答例は授業時に与えます。

練習 2． $\log(1-\frac{1}{2})$ の近似値を、誤差の絶対値が 0.000001 以下となるように求めるプログラムを作成して下さい。(`2020-11-3.py`)

o **練習 2 の考え方．** 練習 1 と同様に (1)、すなわち $f(x) = \log(1+x)$ に対して $x = -\frac{1}{2}$ のときのマクローリンの定理を用います。あとはこれまでと同じ要領で剰余項の評価を正しく行う必要がありますが、$x < 0$ であることには注意が必要です。ここまでできればプログラミングは同様です。解答例は授業時に与えます。

2 その他の関数の近似（応用・発展）

他の応用として、$\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ の場合について述べます。実数 x および自然数 n を与えると、それぞれにおいて次をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在します。

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dfrac{\sin^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{\cos^{(2n+2)}(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
- $(1+x)^\alpha = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix}x^n + \begin{pmatrix}\alpha\\n+1\end{pmatrix}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

ただし、$\sin^{(k)}(x)$, $\cos^{(k)}(x)$ はそれぞれの k 次導関数（すなわち $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}k)$, $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}k)$）であり、また α は実数、$\begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = 1$ です（$\sin x$, $\cos x$ においては、それぞれ $2n+1$, $2n+2$ 項目を剰余項にしていますが、$2n$, $2n+1$ 項目を剰余項にする場合もあります）。いずれにせよ、これらを用いて誤差の限界を調整しながら近似値を求めることが可能となります。

以下では $\sin x$ について考察します。上の式から

$$\left|\sin x - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}\right| = \left|\frac{\sin^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|$$

が得られますが、$\sin^{(2n+1)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}(2n+1))$ であることから、

$$\left|\frac{\sin^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| = \frac{|\sin^{(2n+1)}(\theta x)|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

となります。従って、$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ を小さくすることで、誤差の絶対値を小さくすることが出来ます。

例題 2. $\sin 1$ を $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ で近似した際の誤差の絶対値が 0.000001 以下となるような n を一つ選び、n とそのときの $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ の値を表示するプログラムを作成して下さい。

2020-11-4.py

```
n = 1
p = 1
q = 1
sum = 1
while(p/(n+1)/(n+2) > 0.000001):
   n = n + 2
   p = p / (n-1) / n
   q = -q
   sum = sum +  p * q
print(n, sum)
```

※このプログラムにおいて、q は $(-1)^{n-1}$ を表す変数、p は $1/(2n-1)!$ を表す変数としています。

練習 3. $\cos 2$ を $1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}$ で近似した際の誤差の絶対値が 0.000001 以下となるような n を一つ選び、n とそのときの $1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}$ の値を表示するプログラムを作成して下さい。(2020-11-5.py)

今日のまとめ

- （前回に引き続き）マクローリンの定理は正しく書けるようにしましょう。そしてマクローリンの定理に基づいた近似のアイディアを正しく理解しましょう。
- 例題 1, 練習 1, 練習 2 は十分に理解しましょう。
- その他の関数の近似についてもトライしてみましょう。

$\log(1+x)$ の微分について

- $f''(x) = -(x+1)^{-2}$
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3}$
- $f''''(x) = -6(x+1)^{-4}$
- $f^k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(x+1)^{-k}$