# 現象数理1（2020年度 第10回授業）

黒岩大史 kuroiwa@riko.shimane-u.ac.jp

**今回の授業日と課題〆切**

| |
|---|
| 対面：12月10日　オンデマンド推奨期間：12月3日〜12月16日　課題〆切：12月16日 |

## 1　誤差の限界

我々が普段扱う数値には、ほとんどの場合で「誤差」が付きまとっています。例えば皆さんは自分の「身長」や「体重」を正確に知っていますか？ミリメートルや100グラム単位までは知っていても、それ以下の数値は**許容できる誤差である**として気にも留めていないのが普通だと思います。

しかし誤差が繰り返し加算される場合、一つずつの誤差は小さくとも、それが積もりに積もって、予想以上の大きな誤差が生じる可能性があります。予期せぬ大きな誤差は、トラブルの原因となります。

**「誤差は、大きくてもこれくらいである」**という値のことを**誤差の限界**と言います。誤差の限界を知ることで、誤差を許容範囲内に抑えることが可能となります。

今回、次回の授業では、$e^x$ や $\log(1+x)$ などのよく知られた関数を、**マクローリンの定理**によって**多項式近似**した際の**誤差の限界**を数学的に論じながらプログラミングすることが目的です。

【余談】有効数字

10進数表示（普通の表示）の場合のみを説明します。ある実数を $n$ 桁の有効数字で表すとは、先頭から $n$ 個分の数字のみを書くことをいいます。以下は $\pi$、$\sqrt{3}$、アボガドロ定数、1ユーロの円換算を、5桁の有効数字で書いた例です。（ここでは四捨五入しています）

$$3.1416 \qquad 1.7321 \qquad 6.0221\times 10^{23} \qquad 1.2484\times 10^{2}$$

我々が実数を表現する際には、日常生活では有効数字3、4桁、かなり精度が必要とされるような場合においても、せいぜい5、6桁くらいあれば足りるようです。

## 2　マクローリンの定理と関数の多項式近似

まずは微分積分学等で学習するマクローリンの定理を述べます（証明はこのプリントの最後の方）。

**【マクローリンの定理】**

関数 $f(x)$ は0を含むある開区間で $n+1$ 回微分可能とする。この区間内の $x$ を決めると、次をみたす $\theta\in(0,1)$ が存在する。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1}$$

(1) の最後の項を剰余項と呼びます。(1) より

$$f(x)-\left\{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right\}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$\therefore\ \left|f(x)-\left\{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right\}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

となるので、剰余項の絶対値 $\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$ が十分に小さければ

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

は $f(x)$ の近似値とみなすことができます。すなわち、（十分小さな）正の数 $\varepsilon$ に対して

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\varepsilon \tag{2}$$

となっていれば、誤差の絶対値は $\varepsilon$ 以下、つまり $\varepsilon$ が誤差の限界となります。

この考え方に基いて、今回と次回の授業にて、関数 $f(x)$ を $e^x$, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ として多項式近似を考えています。微分可能な関数ならば同じように考えることができます。

## 3　$e^x$ の近似

$f(x)=e^x$ のとき、$f'(x)=e^x$ が成立します。つまり、$f$ は何回でも微分できます。従って、自然数 $n$ と実数 $x$ を与えたとき、マクローリンの定理より次をみたす $\theta\in(0,1)$ が存在します。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

これに上の状況を当てはめていくと、次式が得られます。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{3}$$

このことを用いて、誤差の絶対値を抑えながら $e^x$ を近似することが可能となります。

**例題 1.**　自然対数の底 $e$ を

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

で近似するとき、どのような条件をみたす自然数 $n$ を選べば、誤差の絶対値が正の数 $\varepsilon$ 以下となるか数学的に説明して下さい。ただし $2<e<3$ であることを用いてよいとします。

**[解]**　$x=1$ のとき、任意の自然数 $n$ に対して、マクローリンの定理から次をみたす $\theta\in(0,1)$ が存在します。

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

ここで

$$\left|e-\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}\right|=\left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right|=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

であることから、$\frac{3}{(n+1)!} \leq \varepsilon$ となる $n$ を選べば、その $n$ に対して

$$\left| e - \left\{ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right\} \right| < \varepsilon$$

が成立することが判ります。（問題の答え：$\frac{3}{(n+1)!} \leq \varepsilon$ をみたす $n$）

**例題 2.** 誤差の絶対値が 0.000001 以下であるような $e$ の近似値を求めるプログラムを作成して下さい。ただし $2 < e < 3$ であることは用いてよいとします。

**考え方.** 例題 1 のようにして、

$$\left| e - \left\{ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right\} \right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

であることが判ります。よって、$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0.000001$ をみたす自然数 $n$ を見つければ、そのときの $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ は、$e$ の誤差の絶対値が 0.000001 以下となります。

つまりこの問題は、「$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0.000001$ をみたす（最小の）$n$ について $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ の値を求め表示するプログラムを作成せよ。」となります。

以下のプログラムでは、`p` は $\frac{1}{n!}$ を表す変数として用いているため、$\frac{3}{(n+1)!}$ は `3*p/(n+1)` で表されます。

2020-10-1.py

```
n = 0
p = 1
sum = 1
while(3*p/(n+1) > 0.000001):
    n = n + 1
    p = p / n
    sum = sum + p
print(n, sum)
```

**練習 1.** $e^2$ を

$$1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}$$

で近似するとき、誤差の絶対値が 0.000001 以下となるような $n$ とそのときの $1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}$ の値を求め表示するプログラムを作成して下さい。ただし $2 < e < 3$ であることは用いてよいとします。(`2020-10-2.py`)

**練習 1 の考え方.** 通常は (3)、すなわち $f(x) = e^x$ に対して $x = 2$ のときのマクローリンの定理を用います。あとは例題 1 と同じ要領で、剰余項の評価を正しく行う必要があります。もちろん $x$ の値が変わっているので剰余項が少し違うことに注意が必要です。プログラミングの際には `p` を $\frac{2^n}{n!}$ を表す変数として用いると楽です。解答例は授業時に与え、説明します。

**練習 2.** $e^{-1}$ を

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

で近似するとき、誤差の絶対値が 0.000001 以下となるような $n$ とそのときの $1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$ の値を求め表示するプログラムを作成して下さい。ただし $2<e<3$ であることは用いてよいとします。(`2020-10-3.py`)

**練習 2 の考え方．** 練習 1 と同様に (3)、すなわち $f(x)=e^x$ に対して $x=-1$ のときのマクローリンの定理を用います。これまでと同じ要領で剰余項の評価を正しく行う必要がありますが、$x<0$ であるため、例題 1, 練習 1 で行った方法と若干異なることに注意が必要です。またプログラミングする際には $(-1)^n$ が現れるので、`while` 文の条件に注意が必要な場合があります。解答例は授業時に与え、説明します。

## 今日のまとめ

- マクローリンの定理は正しく書けるようにしましょう。
- マクローリンの定理に基づいた近似のアイディアを正しく理解しましょう。
- 例題 1, 例題 2, 練習 1, 練習 2 は何も見ず出来る程度に理解しましょう。
- （特に数理の学生は）テイラーの定理の証明を理解し、いつでも導出できるようにしましょう。

## 付録：テイラーの定理の証明

ここからはテイラーの定理の証明について学び、最後にマクローリンの定理の導出方法を簡単に説明します。微分積分学等の授業で過去に取り組んだことがある人も多いはずですが、その場合は復習のつもりで取り組んで下さい。余裕が無ければこの証明はスキップしても良いですが、理工系の学生は使いこなす必要がある（と思う）ので一度はトライし、下記の空欄を埋めてテイラーの定理の証明を完成させて下さい。なお次のロルの定理は、証明なしで用います。

**【ロルの定理】**

$[a,b]$ で連続、$(a,b)$ で微分可能な関数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ について、もし $g(a)=g(b)$ ならば、$g'(c)=0$ をみたす $c\in(a,b)$ が存在する。

若干余談ですが、ロルの定理を用いることで、平均値の定理、すなわち

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$$

をみたす $c\in(a,b)$ が存在することが示されます。これは $n=0$ の場合のテイラーの定理の (4) の等式に一致します。

**【テイラーの定理】**

関数 $f(x)$ はある開区間で $n+1$ 回微分可能とする。この区間内の $a,b(a<b)$ を決めると、次をみたす $c\in(a,b)$ が存在する。

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (4)$$

**証明.**　関数 $g(x)$ を次のように定義する（この定義がミソ）。

$$g(x)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n+D(b-x)^{n+1} \quad (5)$$

ただし、定数 $D$ は $g(a)=f(b)$ となるように定める。すなわち

$D=$

とする（$g(a)=f(b)$ として $D$ について解けば判る）。また、(5) の式において $x=b$ を代入すると

$g(b)=$

であるので、ロルの定理から $g'(c)=0$ を満たす $c\in(a,b)$ が存在する。いま、$g'(x)$ を計算すると

$g'(x) =$

となるので、$g'(c) = 0$ より

$D =$

を得る。最後に、(5) の式において $x = a$ とし、この $D$ の値を代入すると

$f(b) =$

となり、証明は終わる。 □

この定理において $a = 0$, $b = x$ とするとマクローリンの定理が得られます。各自で確認してみましょう。（マクローリンの定理には $0 < x$ などという制約はありませんが、詳細は省略します。）