現象数理III

第6回　２０２０年１２月２４日

担当：岩本真裕子

写像（座標変換）

写像（座標変換）
map(x, a, b, c, d)

Processingにおいて、座標はピクセル数なので、実際に方程式を解いた求まる値をそのまま描画すると小さすぎたり、また縦方向は正の方向が逆向きになってしまう。そこで、**map()関数を使うと、変数xの取りうる範囲が[a,b]のところを[c,d]の範囲へ変換**してくれる。

mapの使い方

入力例１

```
float value = 100;
float m = map(value, 0, 100, -1, 1);
println(m);
```

練習１　valueに異なる値を代入すると出力結果がどのように変わるか確認せよ。

練習２　map関数の２つ目から５つ目までの値を変更すると出力がどのように変化するか確認せよ。

常微分方程式の差分法
オイラー法

1 階常微分方程式の初期値問題

次のような 1 階常微分方程式の初期値問題を数値的に解き、結果をグラフにしたい。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\
x(0) = x_0
\end{cases}
$$

求めたいのは、$t > 0$ の範囲の関数 $x(t)$ であり、関数 $f(t, x)$ および定数x_0は与えられているとする。また、$f(t, x)$ の値はtとx が与えられればいつでも計算できるものとする。

コンピュータでは数値を離散的にしか扱うことができないので、上記の微分方程式式をコンピューターで扱えるようにする必要がある。今回は、その方法として最も代表的な**オイラー法**を学ぶ。

差分商

$x(t)$をtの関数としたとき、$x(t)$の$t=a$における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(a+h)-x(a)}{h} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

で定義される。ここで、定義中の極限操作を取り払い、hを有限にとどめた

$$D=\frac{x(a+h)-x(a)}{h} \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

を考えると、hを十分小さな正の実数にとれば、②式は①式の近似となっていると考えられる。このDのように、関数のいくつかの点における値の差を用いてその関数の微分係数を近似することを差分近似といい、②式の右辺のような量を**差分商**という。

差分方程式

差分商を用いて１階常微分方程式を**離散化**してみよう。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

③の微分係数を差分商で置き換えると、

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x) \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

ただし、hは正の数とする。

④式のように差分を含む方程式を**差分方程式**という。

- **③式と④式は異なる方程式なので、③式の解は一般に④式を満たさないことに注意。**

差分方程式の初期値問題

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

差分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

オイラー法

差分方程式

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t, x(t))$$

を変形すると

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t))$$

$t = 0$ を代入すると

$$x(h) = x(0) + hf(0,\ x(0))$$

$$= x_0 + hf(0,\ x_0)$$

となり、 x_0 からただちに $x(h)$ が求まる。

オイラー法つづき

同様の操作により

$t = h$ を代入　$$x(h + h) = x(2h) = x(h) + hf(h, x(h))$$

$t = 2h$ を代入　$$x(2h + h) = x(3h) = x(2h) + hf(2h, x(2h))$$

$t = 3h$ を代入　$$x(3h + h) = x(4h) = x(3h) + hf(3h, x(3h))$$

というように、$i = 1,2,3,\cdots$とすると $x((i + 1)h)$ を$x(ih)$から計算できる。

- **hをいったん決めると、$t = ih$ 以外の時刻の$x(t)$の値は求めることができないので注意。**

オイラー法つづき

このように、差分方程式を解くと**従属変数はとびとびの時刻で値が定まる。**そのようなとびとびの時刻を**格子点**と呼ぶ。

$x(t)$は格子点でのみ意味があるので、そのことを明示するために$x(ih)$をx_iと書き換え、$t_i = ih$とすると、④式と初期条件は、

$$\begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h} = f(t_i, x_i) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

となり、常微分方程式の初期値問題が、x_iに関する漸化式の問題に置き換えられる。この方法を**オイラー法**と呼ぶ。

オイラー法を用いて
微分方程式を数値的に（近似的に）解く

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

差分方程式（漸化式）の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h} = f(t_i, x_i) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

数値解法では、オイラー法を次の式の形で用いて、現在の値から少し先の未来を計算することを繰り返すことで、解を求める。

$$\overset{\text{未来}}{x_{i+1}} = \overset{\text{現在}}{x_i} + h\overset{\text{現在}}{f(t_i, x_i)}$$

オイラー法のアルゴリズム

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

T：数値計算時間

N：時間の刻み数

h：時間の刻み幅

x0：xの初期値

```
必要な変数の宣言（T, h, x0, x, x_new, tは実数型(float)、Nは整数型(int)）


void setup()
{
ウィンドウサイズの設定
背景色の設定
T,N,x0を設定
刻み幅の設定　h = T/N
初期値の設定　x = x0
}

void draw()
{
t = frameCount*h;
x_new = x + h*f(t, x)
x = x_new

座標変換（次のページ参照）
色指定
描画


 if(t >= T) noLoop();
}

float f(float t, float x)
{
関数を返す
}
```

常微分方程式の初期値問題

放射性炭素年代測定のための数理モデル

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -\lambda x}$$

$x(t)$ ：時刻 t における放射性同位体の量

λ ：崩壊定数

x_0 ：初期時刻($t = 0$)における放射性同位体の量

練習３　上記の微分方程式をオイラー法を用いて0≦ｔ≦20の範囲での解を求めるプログラムを作成し、0≦ｔ≦20の範囲を2000等分割して、グラフ化せよ。λ=1とせよ。

グラフは横軸が時間、縦軸がxの値

常微分方程式の初期値問題
放射性炭素年代測定のための数理モデル
つづき

❋ **練習４**　時間の刻み幅hを変えてみよ。

❋ **練習５**　崩壊定数λの値を変更せよ。

ロジスティック方程式

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)\\ u(0) = u_0 \geq 0\end{gathered}}$$

K : 環境収容力 (Carrying capacity)

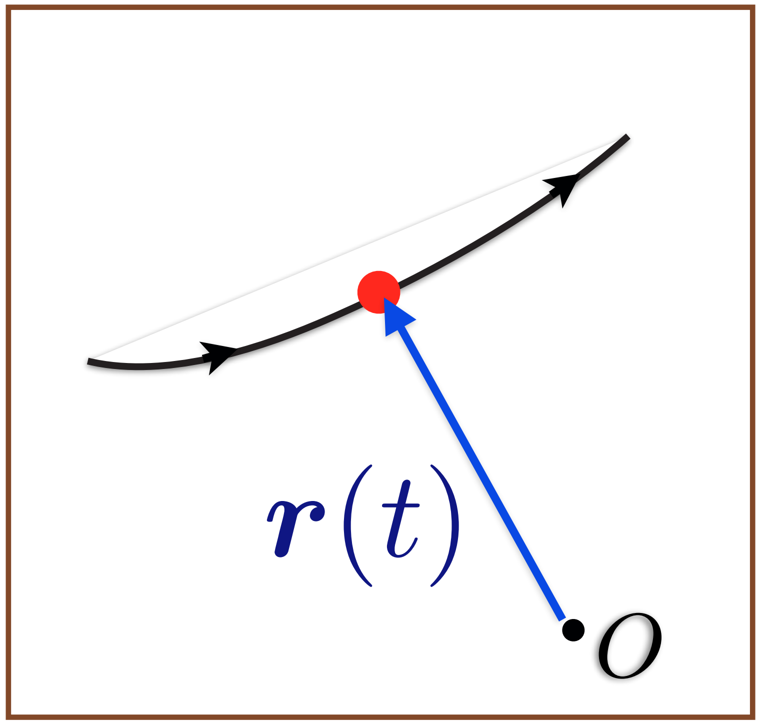
r : 内的増加率

練習６　ロジスティック方程式をオイラー法を用いて数値解を求め、グラフを表示せよ。K = 2.0, r = 1.0, u0 = 4.0 とせよ。

グラフは横軸が時間、縦軸がuの値

練習７　uの初期値u0をu0=0.1に変えるとどのように解の振る舞いが変化するか観察せよ。

質点の運動の記述



$\boldsymbol{r}(t)$: 時刻 t における
質点の位置ベクトル

⇨ 質点の運動の記述

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

⇨ 速度

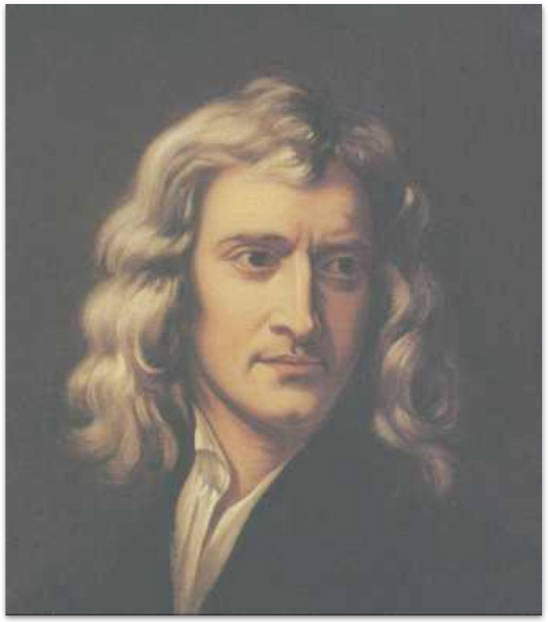
$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

⇨ 加速度

ニュートンの運動の第２法則

質点に加わっている力は, 質点の質量と加速度の積に等しい.

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}}$$



Isaac NEWTON (1642 - 1727)

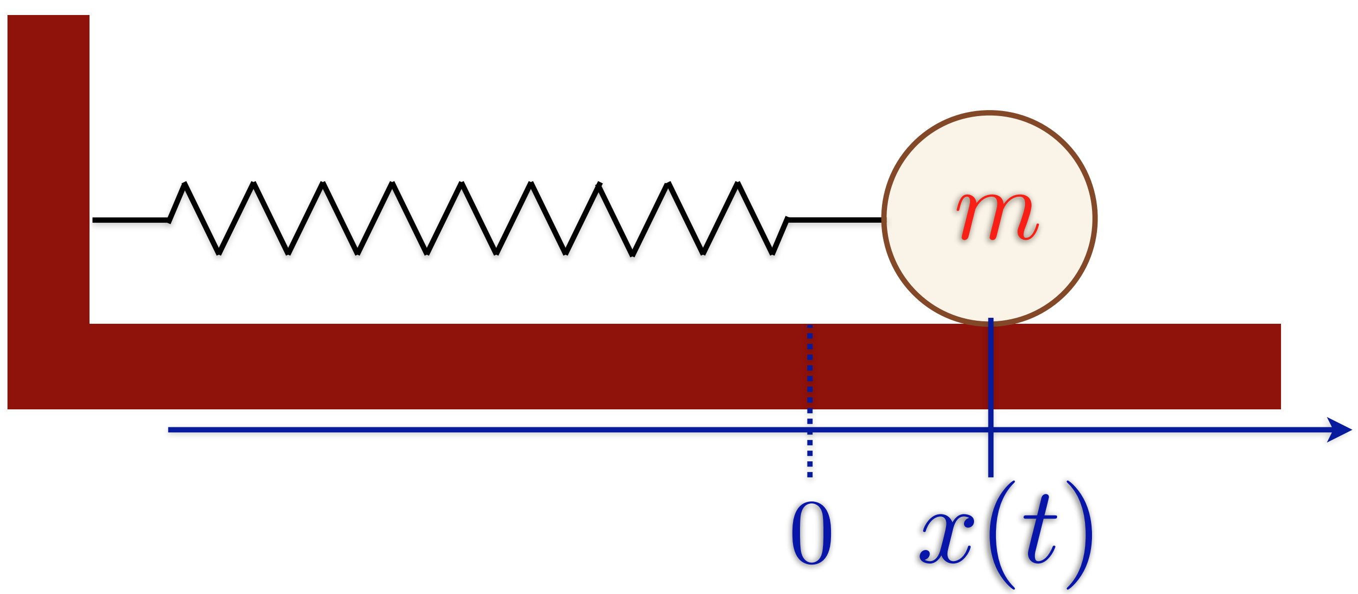
微分方程式で書くと

$$\boxed{m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f}} \quad \text{または} \quad \boxed{m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}}$$

→ ニュートンの運動の第２法則

バネ質点系

バネの復元力



1 次元的運動

⇨ $x(t)$ で記述

バネの復元力はフックの法則から $-kx$

おもりの位置 $x(t)$ の満たす微分方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

オイラー法による
２回常微分方程式の解法

２階常微分方程式を連立１階常微分方程式へ書き換える

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

⇨

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

単振動の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

m :質量

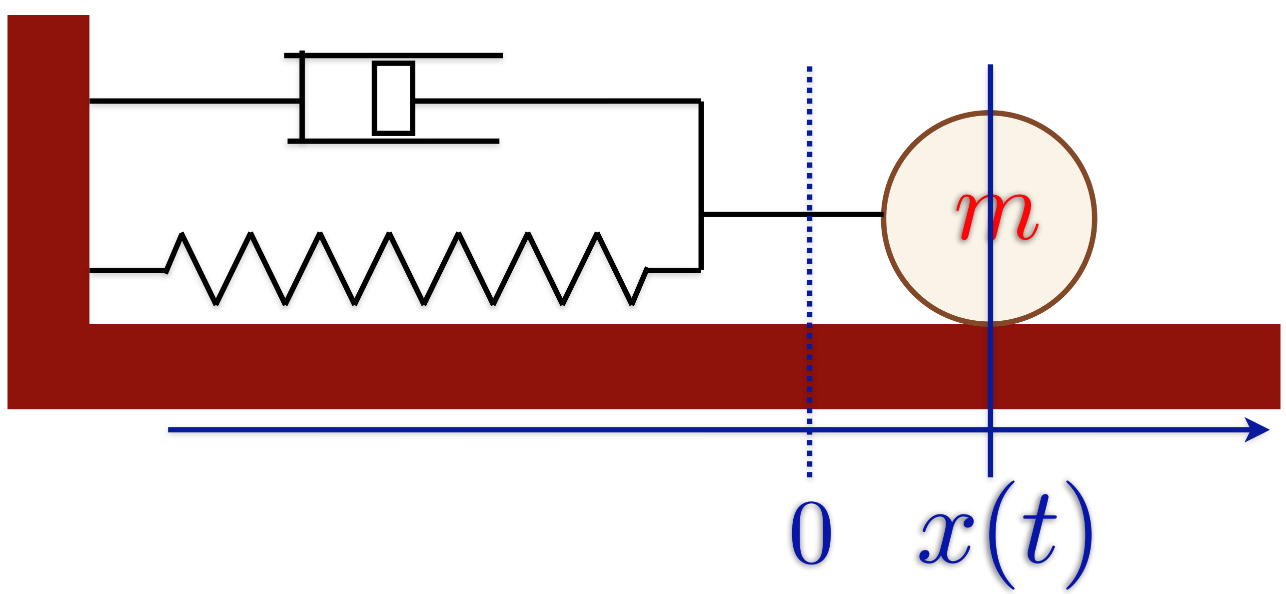
k : ばね定数

練習８　２階微分方程式をオイラー法で数値的に解く方法を考え、単振動の方程式をオイラー法を用いて解きグラフを表示せよ。

練習９　練習８でいろいろな異なる時間刻み幅 h について計算し、結果について考察せよ。

バネ - ダンパ系

バネの復元力＋ダンパの抵抗力



１次元的運動

⇒ $x(t)$ で記述

バネの復元力はフックの法則から $-kx$

ダンパからは速度に比例する抵抗力 $-c\dfrac{dx}{dt}$ を受ける.

おもりの位置 $x(t)$ の満たす微分方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

本日の課題１

次の常微分方程式の初期値問題をオイラー法で解き、横軸t、縦軸xのグラフを描け。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

本日の課題２（発展）

重力の作用のみを受けて運動する物体を考える（真空中でボールを投げるような状況）。ニュートンの運動の第二法則から物体の時刻 t での鉛直方向の位置を $y(t)$ とするとその物体の鉛直方向での運動は次のような常微分方程式で表される（下向きを正とする）。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

m は物体の質量、g は重力加速度である。色々な初期値 $y(0)$, $y'(0)$ を与えてシミュレーションしてみよ。

本日の課題３（発展）

さらに、上の問題に空気の抵抗のようなものを加味してみましょう。物体にかかる抵抗がそのときの物体の速度に比例するとすると、運動方程式は、

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - r\frac{dy}{dt}$$

となる。ただし、r は正の定数で抵抗の強さを表す。色々な初期値および m, r で計算してみよ。

＊なお、課題１、２、３は解析的に解ける問題なので、実際に解いてみて、今回のシミュレーション結果と見比べて理解を深めてください。