Metodología de investigación cuantitativa

Conceptos de probabilidad

Pablo Geraldo Bastías
pdgerald@uc.cl

Estructura

1. Preámbulo
    1.1 Álgebra de conjuntos
    1.2 Espacio muestral y eventos
2. Probabilidad
    2.1 Definición de Probabilidad
    2.2 Propiedades de la Probabilidad
    2.3 Probabilidad Conjunta
3. Variable aleatoria y distribuciones
    3.1 Concepto de variable aleatoria
    3.2 Función de masa, densidad y distribución
4. Ejercicios
5. Referencias

Propósito de la sesión

- Formalizar intuiciones adquiridas previamente (experiencia cotidiana, análisis de datos)
- Familiarizarse con algunos conceptos básicos de teoría de la probabilidad
- Adquirir conceptos necesarios para trabajar con variables aleatorias en el contexto del estudios cuantitativos

Operaciones de conjuntos

- Contención:

  $A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$
- Igualdad:

  $A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$
- Unión:

  $A \cup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \}$
- Intersección:

  $A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$
- Complemento:

  $A^c = \{ x : x \notin A \}$

Algunas definiciones...

La probabilidad es el constructo matemático utilizado para representar fenómenos o procesos aleatorios (?). Algunas definiciones nos ayudarán a formalizar su tratamiento:

- **Espacio muestral**: Conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio (Ω o S).
- **Punto muestral**: Un resultado en particular del espacio muestral ($\omega \in \Omega$).
- **Evento**: Cualquier subconjunto de resultados posibles ($A = \{\omega \in \Omega \colon \omega \text{ es un número par}\}$).

Espacio de eventos

Una colección de eventos (subconjuntos) de Ω, denotada $\mathscr{A}$, se denomina espacio de eventos si cumple con ciertas propiedades:

- **No vacío**:
  $\mathscr{A} \neq \varnothing$ (Alternativamente: $\Omega \in \mathscr{A}$)
- **Cerrado bajo complementos**:
  si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$
- **Cerrado bajo uniones**:
  si $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathscr{A}$, entonces $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \in \mathscr{A}$

Definición Axiomática

Axiomas de Kolmogorov

Sean Ω un espacio muestral, $\mathscr{A}$ un espacio de eventos, y P una medida de probabilidad. Entonces, la tríada $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ es un espacio de probabilidad si satisface las siguientes condiciones:

1. **No negatividad**:
   $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$
2. **Aditividad contable**:
   Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ son disjuntos de a pares, entonces:
   $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$
3. **Unitaridad**:
   $P(\Omega) = 1$

Definición Axiomática

Axiomas de Kolmogorov

Un ejemplo puede ayudar a entender mejor...
¿Cómo representar el lanzamiento de una moneda, en tanto fenómeno aleatorio, con estos conceptos?

Definición Axiomática

Axiomas de Kolmogorov

Un ejemplo puede ayudar a entender mejor...

¿Cómo representar el lanzamiento de una moneda, en tanto fenómeno aleatorio, con estos conceptos?

Lanzar una moneda

Ω = {Cara, Sello} = {C,S}

$\mathscr{A} = \{\emptyset, \{C\}, \{S\}, \Omega\}$

$$P(E) = \begin{cases} 0 & \\ 1/2 & : E = \{C\} \text{ o } E = \{S\} \\ 1 & : E = \{C, S\} \end{cases}$$

Propiedades de la Probabilidad

Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces:

- **Monotonicidad**:
  $\forall A, B \in \mathscr{A}$, si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- **Regla de sustracción**:
  $\forall A, B \in \mathscr{A}$, si $A \subseteq B$, entonces $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- **Evento imposible**:
  $P(\varnothing) = 0$
- **Intervalo o límites**:
  $\forall A \in \mathscr{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- **Complemento**:
  $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

Probabilidad conjunta

También es posible derivar una serie de condiciones que se cumplen cuando lo que nos interesa es estudiar la (probabilidad de) ocurrencia conjunta de distintos eventos.

Definición

La probabilidad conjunta de dos eventos A y B corresponde a la probabilidad de que ocurra su intersección, que a su vez es un evento en $\mathscr{A}$: $P(A \cap B)$
Por su parte, la probabilidad de que ocurra A ó B se denota como $P(A \cup B)$

Algunos teoremas

- **Regla de Adición**:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  ¿Qué ocurre si A y B son disjuntos?
- **Probabilidad condicional**:
  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
- **Ley Multiplicativa**:
  $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$
- **Teoremas de Bayes**:
  $P(A|B) = P(B|A)P(A) / P(B)$
- **Probabilidad Total**:
  $P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

¿Qué condición debe cumplir A_i?

Independencia

Dos eventos se dicen estadísticamente independientes si tener información sobre uno de ellos *no nos dice nada* sobre la probabilidad de ocurrencia del otro. Formalmente:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Probabilidad condicional e independencia

Para $A, B \in \mathscr{A}$, con $P(B) > 0$, A y B son independientes si y sólo si $P(A|B) = P(A)$

Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es una función

Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es una función

Una función que transforma en valores numéricos los resultados posibles de un “experimento aleatorio".

Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es una función

Una función que transforma en valores numéricos los resultados posibles de un “experimento aleatorio".

Definición

Una variable aleatoria X es una variable cuyo valor es dado por $X = \mathscr{X}(\omega)$, donde $\mathscr{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Por ejemplo:

$A = \{\omega \in \Omega: \mathscr{X}(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega: X = 1\} = \{X = 1\}$

$B = \{\omega \in \Omega: \mathscr{X}(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega: X \geq 4\} = \{X \geq 4\}$

Función de masa (PMF) y densidad (PDF)

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas, de acuerdo a si los valores que puede tomar son contables o no.
Para las variables aleatorias discretas, es posible definir su distribución de probabilidad del siguiente modo:

Función de masa de probabilidad (PMF)

$f(x) = Pr(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$

Probabilidad de un evento

$Pr(A) = \sum_{x \in \mathscr{X}(\mathscr{A})} f(x)$

PDF: La función de densidad de probabilidad es el equivalente al PMF para las variables continuas.

Función de distribución acumulada (CDF)

Otra manera de definir la distribución de una variable aleatoria es a través de su función de distribución acumulada.

Función de distribución acumulada (CDF)

$F(x) = Pr(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$

En palabras, la CDF nos indica la probabilidad de que la variables aleatoria tome un valor menor o igual a cierto número; además, cualquier evento puede ser descrito en términos de CDF, por lo que su probabilidad puede derivarse únicamente con F(x).

Propiedades de la CDF

Algunas propiedades que se desprenden de los axiomas y propiedades de la probabilidad:

- **No decreciente**:
  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$
- **Probabilidad 0**:
  $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- **Probabilidad 1**:
  $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- **Complemento**:
  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - F(x) = Pr(X > x)$

Ejercicios

1. Calcule la probabilidad de obtener los siguientes resultados en un único lanzamiento de dados. Considere que el dado tiene 6 caras y no está cargado.
   - A = {1,2,3}
   - B = {2,4,6}
   - C = {6}
   - D = {3,6}
2. Calcule la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones de resultados al retirar una carta de una baraja de 52 cartas.
   - A = {Que la pinta sea pica}
   - B = {Que la pinta sea diamante o corazones}
   - C = {Retirar un rey y diamante}
   - D = {Retirar un rey o diamente}

Ejercicios

Imagine que tenemos un censo de estudiantes de 4° básico, donde fueron observadas sin error las siguientes variables.

Por un lado, el grupo socioeconónico al que pertenece el estudiante, una variable aleatoria denotada X, que toma valor 1 si éste es bajo, 2 si es medio, y 3 si es alto.

Por otro lado, su puntaje Simce, denotado como Y, que toma valor 1 si es bajo, 2 si es medio y 3 si es alto.

Ejercicios

La siguiente tabla expresa las probabilidades marginales de ambas variables.

	X = 1	X = 2	X = 3	
Y = 1				0.4
Y = 2				0.5
Y= 3				0.1
	0.4	0.3	0.3	

Ejercicios

A partir de la tabla presentada, calcule las siguientes probabilidades.

- La probabilidad de cada combinación, asumiendo independencia entre ambas variables.
- Observar $(X \leq 2)$.
- Observar $(Y = 3)$.
- Observar $(X = 2, Y \geq 2)$.
- Observar $(Y = 3 | X = 1)$.

Ejercicios

La siguiente tabla expresa las probabilidades marginales y conjuntas de ambas variables, bajo un nuevo escenario.

	X = 1	X = 2	X = 3	
Y = 1	0.25	0.11	0.04	0.4
Y = 2	0.13	0.16	0.21	0.5
Y = 3	0.02	0.03	0.05	0.1
	0.4	0.3	0.3	

Ejercicios

A partir de la tabla presentada, calcule las siguientes probabilidades.

- Observar $(X \leq 2)$.
- Observar $(Y = 3)$.
- Observar $(X = 2, Y \geq 2)$.
- Observar $(Y = 3|X = 1)$.
- Observar $(Y = 1|X = 3)$
- ¿Siguen siendo independientes ambas variables? ¿Por qué?
- **Reflexione**: ¿Por qué es importante considerar que los datos fueron obtenidos de un censo, y que las variables fueron medidas sin error?

Referencias

- Aronow, P., & Miller, B. (2015) Theory of Agnostic Statistics
- Capinski, M., & Zastawniak, T. (2000) Probability Through Problems.
- Carsey, T. y Harden, J. (2014) Monte Carlo Simulations and Resampling Methods for Social Science
- Medina, F. (2015) Razonamiento Estadístico, Magíster en Bioestadística, U. de Chile.
- Olea, R. (2013) Nivelación Probabilidad, Magíster en Sociología, PUC.
- Rincón, L. (2014) Introducción a la Probabilidad, UNAM.