Chapter 2.1 Random Variable and Expectation

먼저, Random Variable 을 정의한다.

Definition 2.1

Sample space Ω을 정의역으로하고, 결과값이 실수인 함수를 Random Variable X 이라고 한다. Discrete Random Variable 는 유한한 또는 셀 수 있는(countable) 무한 개의 수를 정의역으로 삼는 함수를 말한다.

Discrete Random Variable X 와 실수 a 에 대해서 “X=a”는 Random Variable 이 a 인 모든 event 를 포함한다. 즉, $\{\mathrm{s} \in \Omega \mid X(s) = a\}$ 이다.

Event 의 확률로 표현하면, 다음과 같다.

$$\Pr(X = a) = \sum_{s\in\Omega:X(s)=a} \Pr(s)$$

예를 들어, 주사위 2 개를 던졌을 때, 두 주사위의 합이 4 가 나오는 경우의 수는 {(1,3), (2,2), (3,1)} 이다.
주사위의 합이 4 가 나오는 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 이다.
따라서, $\Pr(X) = \frac{1}{12}$ 이다.

Definition 2.2

두 개의 Random Variable 이 독립적이라고 할 때, 모든 x, y 에 대하여 다음의 식을 만족한다.

$$\Pr\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \Pr(X = x) * \Pr(Y = y)$$

위의 식을 일반적으로 표현하자면, 각각 독립적인 Random Variable $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$에 대하여 다음의 식을 만족한다.

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i = x_i)$$

Random Variable 의 가장 기본적인 특징 중에 하나는 기대값(expectation)이다. Random Variable 의 기대값은 Event 가 발생할 확률을 가중치로 준 발생할 수 있는 Event 의 값의 평균이다. 이를 Definition 2.3 에서 식으로 표현한다.

Definition 2.3

Random Variable 을 X 라고 하고, E[X]를 Random Variable 의 기대값이라고 하면, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathrm{E[X]} = \sum_i i \Pr(X = i)$$

2.1.1 Linearity of Expectation

Random Variable Expectation 의 중요한 성질 중 하나. 이 성질을 이용하여 Random Variable 의 합을 매우 쉽게 계산할 수 있다.

Theorem 2.1 Linearity of Expectation

Discrete Random Variable $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$

$$E\left[\sum_i^n X_i\right] = \sum_i^n E[X_i]$$

Proof) W.L.G(Without Loss of Generality), X 와 Y 만을 이용해서 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E[X+Y]} &= \sum_i \sum_j (\mathrm{i}+\mathrm{j})\Pr\big((X=i)\cap(Y=j)\big) \\
&= \sum_i \sum_j \mathrm{i}\Pr\big((X=i)\cap(Y=j)\big) + \sum_i \sum_j \mathrm{j}\Pr\big((X=i)\cap(Y=j)\big) \\
&= \sum_i i \sum_j \Pr\big((X=i)\cap(Y=j)\big) + \sum_j j \sum_i \Pr\big((X=i)\cap(Y=j)\big) \\
&= \sum_i i \Pr(X=i) + \sum_j j \Pr(Y=j) \\
&= E[X] + E[Y]
\end{aligned}$$

이 특성은 X, Y 가 서로 dependent 한 Event 라도 만족한다!