Mélange de distributions des valeurs extrêmes généralisées

Pascal Alain Dkengne Sielenou

Travail en collaboration avec Stéphane Girard (INRIA)

Réunion de synchronisation du 12 janvier 2024

Rappels : Loi des valeurs extremes généralisées

- Soit X une variable aléatoire de fonction de répartion F.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des copies indépendantes de X.
- Soit $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, la suite des maximums de X.

Theorem

S'il existent des suites de constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} = \lim_{n \to +\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1}$$

pour une fonction non dégénérée G, alors G appartient à la famille des lois des valeurs extrêmes généralisées (GEV)

$$G(x) = G(x; \gamma, \sigma, \mu) = \exp\left\{-\left[1 + \gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}, \tag{2}$$

définies sur $\left\{x \in \mathbb{R} : 1 + \gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0\right\}$, où $\gamma \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Si F vérifie (1), on dit qu'il appartient au domaine d'attraction de la function G.

Résultats

Definition (Melange des distributions de probabilités)

Une loi de probabilités est dite **loi de mélange** si sa fonction de répartition est une **moyenne pondérée algébrique**, une **moyenne pondérée géométrique** ou une **moyenne pondérée harmonique** de plusieurs fonctions de répartition.

Example

Considérons une suite de p fonctions de répartition F_j de densité de probabilité f_j, $j = 1, \cdots, p$ et un vecteur $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ tel que $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.
Les lois de mélange moyennes pondérées algébriquement $F_{\$}$, géométriquement $F_{\mathbb{P}}$ et harmoniquement $F_{\mathbb{H}}$ ainsi que leurs densités de probabilités respectives $f_{\$}$, $f_{\mathbb{P}}$ et $f_{\mathbb{H}}$ sont définies par les formules (3) et (4) ci-dessous

$$F_{\$}(x;\omega) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x), \quad F_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x), \quad F_{\mathbb{H}}(x;\omega) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x)} \right)^{-1}, \tag{3}$$

$$f_{\$}(x) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j f_j(x), \; f_{\mathbb{P}}(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} \omega_j \frac{f_j(x)}{F_j(x)} \right) \cdot F_{\mathbb{P}}(x;\omega), \; f_{\mathbb{H}}(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} \omega_j \frac{f_j(x)}{F_j^2(x)} \right) \cdot F_{\mathbb{H}}^2(x;\omega). \tag{4}$$

Résultats

Definition (Mélange de distributions GEV)

- Désignons par $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ un vecteur tel que $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.
- Désignons par G_j une fonction de répartition de la loi GEV définie par (2).
- Désignons par $\Theta = (\Theta_j, j = 1, \cdots, p)$ où $\Theta_j = (\gamma_j, \sigma_j, \mu_j)$ un vecteur des paramètres de la distribution GEV nommée G_j.

On définit les modèles de mélange $G_{\mathbb{S}}$, $G_{\mathbb{P}}$ et $G_{\mathbb{H}}$ des lois GEV nommées G_j par

$$
\begin{aligned}
G_{\mathbb{S}}(x;\omega,\Theta) &= \sum_{j=1}^{p} \omega_j G_j(x;\Theta_j), \\
G_{\mathbb{P}}(x;\omega,\Theta) &= \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j), \\
G_{\mathbb{H}}(x;\omega,\Theta) &= \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{G_j(x;\Theta_j)} \right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Résultats

Definition

Considérons une suite de p fonctions de répartition G_j de la loi GEV définie par

$$G_j(x) = G(x; \gamma_j, \sigma_j, \mu_j) = \exp\left\{-\left[1 + \gamma_j\left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma_j}}\right\}, \tag{6}$$

sur l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} : \ 1 + \gamma_j\left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right) > 0\right\}$, où $\gamma_j \neq 0$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_j > 0$.

On définit les modèles de mélange $G_{\min}$, $G_{\max}$, $G_{\inf}$, et $G_{\sup}$ par

$$G_{\min}(x) = \min_{1\leq j\leq p} G_j(x), \tag{7}$$

$$G_{\max}(x) = \max_{1\leq j\leq p} G_j(x), \tag{8}$$

$$G_{\inf}(x) = G\left(x; \max_{1\leq j\leq p} \gamma_j, \max_{1\leq j\leq p} \sigma_j, \max_{1\leq j\leq p} \mu_j\right), \tag{9}$$

$$G_{\sup}(x) = G\left(x; \min_{1\leq j\leq p} \gamma_j, \min_{1\leq j\leq p} \sigma_j, \min_{1\leq j\leq p} \mu_j\right). \tag{10}$$

Propriétés 1

Theorem (Inégalités entre les modèles des distributions GEV)

Les inégalités suivantes sont satisfaites

$$G_{\inf}(x) \leq G_{\min}(x) \leq G_{\mathbb{H}}(x;\omega,\Theta) \leq G_{\mathbb{P}}(x;\omega,\Theta) \leq G_{\mathbb{S}}(x;\omega,\Theta) \leq G_{\max}(x) \leq G_{\sup}(x). \quad (11)$$

La preuve de ce résultat exploite les relations entre les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques disponibles sur les pages web suivantes
https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_mean

Propriétés 2

Theorem (Stabilité de la famille $\{G_{\mathbb{P}}(\cdot;\omega,\Theta)\}$)

Pour tout entier positif m et pour tout réel x, la propriété suivante est satisfaite

$$G_{\mathbb{P}}^{m}(x;\omega,\Theta) = \prod_{j=1}^{p}\left[G_j(x;\Theta_j(m))\right]^{\omega_j} = G_{\mathbb{P}}(x;\omega,\Theta(m)). \tag{12}$$

Ici, $\Theta(m) = (\Theta_j(m), j = 1,\cdots,p)$ *où* $\Theta_j(m) = (\gamma_j(m), \sigma_j(m), \mu_j(m))$
avec $\gamma_j(m) = \gamma_j, \quad \sigma_j(m) = \sigma_j\, m^{\gamma_j}, \quad \mu_j(m) = \mu_j + \sigma_j\left(\frac{m^{\gamma_j}-1}{\gamma_j}\right).$

La propriété (12) montre que si la loi d'une v.a. X appartient à la famille des lois de probabilités $\{G_{\mathbb{P}}(\cdot;\omega,\Theta)\}$, alors la loi du maximum de m copies indépendantes de X appartient également à cette même famille des lois de probabilités.

Propriétés 3

Theorem (Equivalence des queues de distributions)

On considère les distributions de probabilités $F_{\mathbb{S}}$, $F_{\mathbb{P}}$ *et* $F_{\mathbb{H}}$ *définies resp. par (**??**), (**??**) et (**??**). S'ils existent des constantes* $\tau_j > 0$ *telles que pour tout* $j = 1, \cdots, p$ *nous avons*

$$\lim_{x \to x_{F_j}} \frac{1 - F_j(x)}{1 - G_j(x; \Theta_j)} = \tau_j, \tag{13}$$

où $x_{F_j} = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F_j(x) < 1\}$ *est la borne supérieure du support de la distribution* F_j, *alors les limites suivantes sont satisfaites*

$$\lim_{x \to x^\star} \frac{1 - F_{\mathbb{H}}(x; \omega)}{1 - G_{\mathbb{P}}(x; \omega, \Theta(\tau))} = 1, \ \lim_{x \to x^\star} \frac{1 - F_{\mathbb{S}}(x; \omega)}{1 - G_{\mathbb{P}}(x; \omega, \Theta(\tau))} = 1, \ \lim_{x \to x^\star} \frac{1 - F_{\mathbb{P}}(x; \omega)}{1 - G_{\mathbb{P}}(x; \omega, \Theta(\tau))} = 1, \tag{14}$$

où $x^\star = \max\{x_{F_j}, j = 1, \cdots, p\}$ *et* $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_p)$.

Ici, $\Theta(\tau) = (\Theta_j(\tau_j), j = 1, \cdots, p)$ *où* $\Theta_j(\tau_j) = (\gamma_j(\tau_j), \sigma_j(\tau_j), \mu_j(\tau_j))$

avec $\gamma_j(\tau_j) = \gamma_j, \quad \sigma_j(\tau_j) = \sigma_j \, \tau_j^{\gamma_j}, \quad \mu_j(\tau_j) = \mu_j + \sigma_j \left(\frac{\tau_j^{\gamma_j} - 1}{\gamma_j} \right).$

Preuve de la Propriété 3 (1/3)

Quand x tend vers $x^\star$, on peut effectuer les équivalents suivants

$$\begin{aligned}
1-F_{\mathbb{S}}(x) &= 1-\sum_{j=1}^{p}\omega_j F_j(x) = \sum_{j=1}^{p}\omega_j\,(1-F_j(x)) \\
&\sim \sum_{j=1}^{p}\omega_j\tau_j\,(1-G_j(x;\Theta_j))\,, \quad \text{(faisant usage de (13))} \\
&\sim -\sum_{j=1}^{p}\omega_j \log G_j^{\tau_j}(x;\Theta_j) = -\sum_{j=1}^{p}\log G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \\
&= -\log\prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \\
&\sim 1-\prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \\
&= 1-G_{\mathbb{P}}(x;\omega,\Theta(\tau)).
\end{aligned}$$

Preuve de la Propriété 3 (2/3)

Quand x tend vers $x^\star$, on peut effectuer les équivalents suivants

$$\begin{aligned}
1 - F_{\mathbb{P}}(x) &\sim -\log F_{\mathbb{P}}(x) = -\log \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(-\log F_j(x)\right) \sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(1 - F_j(x)\right) \\
&\sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \tau_j \left(1 - G_j(x;\Theta_j)\right), \quad \text{(faisant usage de (13))} \\
&\sim -\sum_{j=1}^{p} \omega_j \log G_j^{\tau_j}(x;\Theta_j) = -\sum_{j=1}^{p} \log G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \\
&= -\log \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \sim 1 - \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x;\Theta_j(\tau_j)) \\
&= 1 - G_{\mathbb{P}}(x;\omega,\Theta(\tau)).
\end{aligned}$$

Preuve de la Propriété 3 (3/3)

Quand x tend vers $x^\star$, on peut effectuer les équivalents suivants

$$\begin{aligned}
1 - F_{\mathbb{H}}(x) &\sim -\log F_{\mathbb{H}}(x) = \log \sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x)} \sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(\frac{1}{F_j(x)} - 1 \right) \\
&\sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(-\log F_j(x) \right) \sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(1 - F_j(x) \right) \\
&\sim \sum_{j=1}^{p} \omega_j \tau_j \left(1 - G_j(x; \Theta_j) \right), \quad \text{(faisant usage de (13))} \\
&\sim -\sum_{j=1}^{p} \omega_j \log G_j^{\tau_j}(x; \Theta_j) = -\sum_{j=1}^{p} \log G_j^{\omega_j}(x; \Theta_j(\tau_j)) \\
&= -\log \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x; \Theta_j(\tau_j)) \sim 1 - \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x; \Theta_j(\tau_j)) \\
&= 1 - G_{\mathbb{P}}(x; \omega, \Theta(\tau)).
\end{aligned}$$

Propriétés 4

Theorem

- *On considère une suite de* p *fonctions de répartition* F_j, $j = 1, \cdots, p$.
- *On considère un vecteur* $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ *tel que* $\sum_{j=1}^p \omega_j = 1$.
- *On désigne par* $x^\star = \max\left\{x_{F_1}, x_{F_2}, \cdots, x_{F_p}\right\}$, *où* $x_{F_j} \leq +\infty$ *est la borne supérieure du support de la distribution* F_j.

Alors, les lois de mélange moyennes pondérées ci-dessous

$$F_{\mathbb{S}}(x;\omega) = \sum_{j=1}^p \omega_j F_j(x), \quad F_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \prod_{j=1}^p F_j^{\omega_j}(x), \quad F_{\mathbb{H}}(x;\omega) = \left(\sum_{j=1}^p \frac{\omega_j}{F_j(x)}\right)^{-1}$$

satisfont la propriété suivante :

$$\lim_{x \to x^\star} F_{\mathbb{S}}(x;\omega) = \lim_{x \to x^\star} F_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \lim_{x \to x^\star} F_{\mathbb{H}}(x;\omega). \tag{15}$$

Preuve de la Propriété 4 (1/2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x^\star} F_{\mathbb{S}}(x;\omega) &= \lim_{x\to x^\star} \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x) = \lim_{x\to x^\star} \exp\left\{\log\left(\sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x)\right)\right\} \\
&= \lim_{x\to x^\star} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x) - 1\right\} = \lim_{x\to x^\star} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(F_j(x) - 1\right)\right\} \\
&= \lim_{x\to x^\star} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \omega_j \log F_j(x)\right\} = \lim_{x\to x^\star} \exp\left\{\log\left(\prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x)\right)\right\} \\
&= \lim_{x\to x^\star} \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x) = \lim_{x\to x^\star} F_{\mathbb{P}}(x;\omega).
\end{aligned}$$

Preuve de la Propriété 4 (2/2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x^\star} F_{\mathbb{H}}(x;\omega) &= \lim_{x\to x^\star}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{\omega_j}{F_j(x)}\right)^{-1} = \lim_{x\to x^\star}\exp\left\{-\log\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{\omega_j}{F_j(x)}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to x^\star}\exp\left\{1-\sum_{j=1}^{p}\frac{\omega_j}{F_j(x)}\right\} = \lim_{x\to x^\star}\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\omega_j\left(1-\frac{1}{F_j(x)}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to x^\star}\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\omega_j\log F_j(x)\right\} = \lim_{x\to x^\star}\exp\left\{\log\left(\prod_{j=1}^{p}F_j^{\omega_j}(x)\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to x^\star}\prod_{j=1}^{p}F_j^{\omega_j}(x) = \lim_{x\to x^\star}F_{\mathbb{P}}(x;\omega).
\end{aligned}$$

Propriétés 5

Theorem

On considère les distributions de probabilités $F_{\mathbb{S}}$ *et* $F_{\mathbb{P}}$ *définies resp. par (**??**) et (**??**). S'ils existent des suites* $a_{n,j} > 0$ *et* $b_{n,j} \in \mathbb{R}$ *telles que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[1 - F_j\left(a_{n,j}x + b_{n,j}\right)\right] = -\log G_j(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F_j^n\left(a_{n,j}x + b_{n,j}\right) = G_j(x), \tag{16}$$

alors les limites suivantes sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n\left(v_n(x)\right) \leq G_{\mathbb{P}}(x) \leq \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n\left(u_n(x)\right), \tag{17}$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{S}}^n\left(v_n(x)\right) \leq G_{\mathbb{P}}(x) \leq \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{S}}^n\left(u_n(x)\right), \quad \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{H}}^n\left(v_n(x)\right) \leq G_{\mathbb{P}}(x) \leq \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{H}}^n\left(u_n(x)\right),$$

où les suites $u_n(x)$ *et* $v_n(x)$ *sont définies par*

$$u_n(x) = \max_{1\leq j\leq p}\left\{a_{n,j}x + b_{n,j}\right\}, \quad v_n(x) = \min_{1\leq j\leq p}\left\{a_{n,j}x + b_{n,j}\right\}. \tag{18}$$

De plus, il existe trois suites non linéaires $p_n(x), s_n(x), h_n(x) \in [v_n(x), u_n(x)]$ *qui sont strictement croissantes et satisfont*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n\left(p_n(x)\right) = G_{\mathbb{P}}(x) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{S}}^n\left(s_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{H}}^n\left(h_n(x)\right). \tag{19}$$

Preuve de la Propriété 5

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n(v_n(x);\omega) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(v_n(x))\right)^n \leq \lim_{n\to+\infty}\prod_{j=1}^{p}\left[F_j^n\left(a_{n,j}x+b_{n,j}\right)\right]^{\omega_j} \\
&= \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x), \quad \text{(faisant usage de (16)).} \qquad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n(u_n(x);\omega) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(u_n(x))\right)^n \geq \lim_{n\to+\infty}\prod_{j=1}^{p}\left[F_j^n\left(a_{n,j}x+b_{n,j}\right)\right]^{\omega_j} \\
&= \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x), \quad \text{(faisant usage de (16)).} \qquad (21)
\end{aligned}$$

Faisant usage des égalités (15) et des inégalités (20-21), on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{S}}^n\left(v_n(x);\omega\right) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{H}}^n\left(v_n(x);\omega\right) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n\left(v_n(x);\omega\right) \leq G_{\mathbb{P}}(x;\omega),$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{S}}^n\left(u_n(x);\omega\right) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{H}}^n\left(u_n(x);\omega\right) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}^n\left(u_n(x);\omega\right) \geq G_{\mathbb{P}}(x;\omega).$$

Propriétés 6

Theorem

- *On considère une suite de* p *fonctions de répartition* F_j, $j = 1, \cdots, p$.
- *On considère un vecteur* $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ *tel que* $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.

La variable aléatoire X *associée à la fonction de répartition* $F_{\mathbb{P}}(x) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x)$ *est définie par*

$$X = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ F_j^{-1} \left(\exp\{-Y_j\} \right) \right\}, \tag{22}$$

où Y_j *est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre* ω_j.

Simulation

La formule (22) suggère les deux étapes suivantes pour simuler une observation x de la distribution $F_{\mathbb{P}}$.

1. Générer les valeurs indépendantes y_j, $j = 1, 2, \cdots, p$ à l'aide de la loi exponentielle de paramètre ω_j.
2. Prendre comme valeur simulée de la distribution $F_{\mathbb{P}}$ la quantité x définie par

$$x = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ F_j^{-1} \left(\exp\{-y_j\} \right) \right\}. \tag{23}$$

Preuve de la Propriété 6

Soit X_j la variable aléatoire associée à la distribution $F_j^{\omega_j}$.

La variable aléatoire $U_j = F_j^{\omega_j}(X_j)$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Ainsi $X_j = F_j^{-1}\left(U_j^{1/\omega_j}\right) = F_j^{-1}\left(\exp\left\{\frac{1}{\omega_j}\log U_j\right\}\right)$.

La variable aléatoire $Y_j = -\frac{1}{\omega_j}\log U_j$ suit la loi exponentielle de paramètre ω_j.

En effet pour tout réel $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Y_j \leq y\} &= \mathbb{P}\left\{-\frac{1}{\omega_j}\log U_j \leq y\right\} \\
&= \mathbb{P}\{U_j > \exp\{-\omega_j y\}\} \\
&= 1 - \exp\{-\omega_j y\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X \leq x\} &= \prod_{j=1}^{p} \mathbb{P}\{X_j \leq x\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \leq x, \cdots, X_p \leq x\} \\
&= \mathbb{P}\{\max\{X_1, \cdots, X_p\} \leq x\}.
\end{aligned}$$

Propriétés 7

Theorem

Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ *un vecteur de poids, c'est-à-dire* $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.
On considère les distributions de probabilités $F_{\mathbb{S}}$, $F_{\mathbb{H}}$ *et* $F_{\mathbb{P}}$ *définies par*

$$F_{\mathbb{S}}(x;\omega) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x), \quad F_{\mathbb{H}}(x;\omega) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x)} \right)^{-1}, \quad F_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x).$$

Si $x_j(\alpha)$ *désigne le quantile d'ordre* $\alpha \in [0, 1]$ *de la distribution* F_j, *i.e.* $F_j(x_j(\alpha)) = 1 - \alpha$, *alors les quantités* $x_1(\alpha) = \min_{1 \le j \le p} \{x_j(\alpha)\}$, $x_2(\alpha) = \max_{1 \le j \le p} \{x_j(\alpha)\}$ *satisfont pour tout vecteur de poids* ω *les inégalités suivantes :*

$$F_{\mathbb{S}}(x_1(\alpha);\omega) \le 1 - \alpha \le F_{\mathbb{S}}(x_2(\alpha);\omega) \iff x_1(\alpha) \le F_{\mathbb{S}}^{-1}(1-\alpha;\omega) \le x_2(\alpha),$$

$$F_{\mathbb{H}}(x_1(\alpha);\omega) \le 1 - \alpha \le F_{\mathbb{H}}(x_2(\alpha);\omega) \iff x_1(\alpha) \le F_{\mathbb{H}}^{-1}(1-\alpha;\omega) \le x_2(\alpha),$$

$$F_{\mathbb{P}}(x_1(\alpha);\omega) \le 1 - \alpha \le F_{\mathbb{P}}(x_2(\alpha);\omega) \iff x_1(\alpha) \le F_{\mathbb{P}}^{-1}(1-\alpha;\omega) \le x_2(\alpha).$$

Preuve de la Propriété 7 (1/2)

Par hypothèse, pour tout $j = 1, \cdots, p$ on a les deux égalités suivantes vraies

$$F_j^{\omega_j}(x_j(\alpha)) = (1-\alpha)^{\omega_j}, \quad \omega_j F_j(x_j(\alpha)) = \omega_j(1-\alpha), \quad \frac{\omega_j}{F_j(x_j(\alpha))} = \frac{\omega_j}{1-\alpha}.$$

Par définition, pour tout $j = 1, \cdots, p$ on a les inégalités suivantes :

$$F_j\left(\max_{1\le k\le p}\{x_k(\alpha)\}\right) \ge F_j(x_j(\alpha)), \quad F_j\left(\min_{1\le k\le p}\{x_k(\alpha)\}\right) \le F_j(x_j(\alpha)).$$

Ce qui implique

$$F_j^{\omega_j}(x_2(\alpha)) \ge (1-\alpha)^{\omega_j}, \quad \omega_j F_j(x_2(\alpha)) \ge \omega_j(1-\alpha), \quad \frac{\omega_j}{F_j(x_2(\alpha))} \le \frac{\omega_j}{1-\alpha}.$$

$$F_j^{\omega_j}(x_1(\alpha)) \le (1-\alpha)^{\omega_j}, \quad \omega_j F_j(x_1(\alpha)) \le \omega_j(1-\alpha), \quad \frac{\omega_j}{F_j(x_1(\alpha))} \ge \frac{\omega_j}{1-\alpha}.$$

Preuve de la Propriété 7 (2/2)

$$F_{\mathbb{P}}(x_2(\alpha)) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x_2(\alpha)) \geq \prod_{j=1}^{p} (1-\alpha)^{\omega_j} = (1-\alpha)^{\sum_{j=1}^{p} \omega_j} = 1-\alpha.$$

$$F_{\mathbb{P}}(x_1(\alpha)) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x_1(\alpha)) \leq \prod_{j=1}^{p} (1-\alpha)^{\omega_j} = (1-\alpha)^{\sum_{j=1}^{p} \omega_j} = 1-\alpha.$$

$$F_{\mathbb{S}}(x_2(\alpha)) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x_2(\alpha)) \geq (1-\alpha) \sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1-\alpha.$$

$$F_{\mathbb{S}}(x_1(\alpha)) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x_2(\alpha)) \leq (1-\alpha) \sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1-\alpha.$$

$$\frac{1}{F_{\mathbb{H}}(x_2(\alpha))} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x_2(\alpha))} \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

$$\frac{1}{F_{\mathbb{H}}(x_1(\alpha))} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x_1(\alpha))} \geq \sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Propriétés 8

Theorem

Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ *un vecteur de poids, c'est-à-dire* $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.
On considère les distributions de probabilités $F_{\mathbb{S}}$, $F_{\mathbb{H}}$ *et* $F_{\mathbb{P}}$ *définies par*

$$F_{\mathbb{S}}(x;\omega) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j F_j(x), \quad F_{\mathbb{H}}(x;\omega) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{F_j(x)} \right)^{-1}, \quad F_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x)$$

de densités de probabilités respectives $f_{\mathbb{S}}(\cdot;\omega)$, $f_{\mathbb{H}}(\cdot;\omega)$, $f_{\mathbb{P}}(\cdot;\omega)$, *où* F_j *est une fonction de répartition de densité de probabilités* f_j.

- *Soit* $x_j(\alpha) \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha \in (0, 1)$ *tel que* $F_j(x_j(\alpha)) = 1 - \alpha$.
- *Soit* $j_0 = \arg\max_{1 \le j \le p} \{x_j(\alpha)\}$, *i.e.* $x_{j_0}(\alpha) = \max_{1 \le j \le p} \{x_j(\alpha)\}$.

Alors la quantité $x(\alpha) \in \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* $\alpha = 0$ *par*

$$x(\alpha) = x_{j_0}(\alpha) + \alpha \left[\frac{1}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha)\right)} - \frac{1}{f_{\mathbb{S}}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)} \right]$$

est une fonction qui croît avec $x_{j_0}(\alpha)$ *et qui satisfait les conditions ci-dessous*

$$\lim_{\alpha \to 0} x(\alpha) = x_{j_0}(\alpha), \quad \lim_{\alpha \to 0} F_{\mathbb{S}}(x(\alpha);\omega) = \lim_{\alpha \to 0} F_{\mathbb{H}}(x(\alpha);\omega) = \lim_{\alpha \to 0} F_{\mathbb{P}}(x(\alpha);\omega) = 1 - \alpha.$$

Preuve de la Propriété 8 (1/3)

L'équation

$$F_{\$}(x(\alpha);\omega) = 1 - \alpha$$

peut encore s'écrire de la manière suivante

$$F_{\$}(x(\alpha);\omega) - F_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right) = 1 - \alpha - F_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right).$$

A l'aide du dévelpoppement limité de Taylor à l'ordre 1 on en déduit que

$$\left[x(\alpha) - x_{j_0}(\alpha)\right] \cdot f_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right) \sim 1 - \alpha - F_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)$$

au voisinage de $\alpha = 0$ car $\lim_{\alpha\to 0} x(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} x_{j_0}(\alpha)$.
Ainsi au voisinage de $\alpha = 0$ on a

$$x(\alpha) \sim x_{j_0}(\alpha) + \frac{1 - \alpha - F_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)} = x_{j_0}(\alpha) + \frac{1 - F_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)} - \frac{\alpha}{f_{\$}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}.$$

Preuve de la Propriété 8 (2/3)

$$\frac{1-F_\$\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_\$\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\omega_j\left[1-F_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)\right]}{\sum_{j=1}^{p}\omega_j f_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}$$

$$= \frac{1-F_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}\cdot\frac{\omega_{j_0}+\sum_{j\neq j_0}^{p}\omega_j\frac{1-F_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{1-F_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}}{\omega_{j_0}+\sum_{j\neq j_0}^{p}\omega_j\frac{f_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}}$$

$$\text{(Hospital rule)} \sim \frac{1-F_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}\cdot\frac{\omega_{j_0}+\sum_{j\neq j_0}^{p}\omega_j\left(\frac{\mathrm{d}x_{j_0}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x_{j_0}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{-1}\cdot\frac{f_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}}{\omega_{j_0}+\sum_{j\neq j_0}^{p}\omega_j\frac{f_j\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}}$$

$$\sim \frac{1-F_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}{f_{j_0}\left(x_{j_0}(\alpha);\omega\right)}.$$

Preuve de la Propriété 8 (3/3)

Soit $x^\star = \max\left\{x_{F_1}, x_{F_2}, \cdots, x_{F_p}\right\}$, où $x_{F_j} \leq +\infty$ est la borne supérieure du support de la distribution F_j. Soient x_1 et x_2 deux valeurs assez proches de $x^\star$ telles que $x_1 < x_2$.

$$\left(\frac{1}{f_{j_0}(x_2)} - \frac{1}{f_\mathbb{S}(x_2)}\right)\left(\frac{1}{f_{j_0}(x_1)} - \frac{1}{f_\mathbb{S}(x_1)}\right)^{-1} = \left(\frac{f_\mathbb{S}(x_2) - f_{j_0}(x_2)}{f_{j_0}(x_2)\, f_\mathbb{S}(x_2)}\right)\left(\frac{f_\mathbb{S}(x_1) - f_{j_0}(x_1)}{f_{j_0}(x_1)\, f_\mathbb{S}(x_1)}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{f_\mathbb{S}(x_2) - f_{j_0}(x_2)}{f_\mathbb{S}(x_1) - f_{j_0}(x_1)}\right)\left(\frac{f_{j_0}(x_1)\, f_\mathbb{S}(x_1)}{f_{j_0}(x_2)\, f_\mathbb{S}(x_2)}\right).$$

On peut écrire

$$\frac{f_\mathbb{S}(x_2) - f_{j_0}(x_2)}{f_\mathbb{S}(x_1) - f_{j_0}(x_1)} = \frac{f_{j_0}(x_2)}{f_{j_0}(x_1)} \cdot \frac{(\omega_{j_0} - 1) + \sum_{j!=j_0}^{p} \omega_j \frac{f_j(x_2)}{f_{j_0}(x_2)}}{(\omega_{j_0} - 1) + \sum_{j!=j_0}^{p} \omega_j \frac{f_j(x_1)}{f_{j_0}(x_1)}} \sim \frac{f_{j_0}(x_2)}{f_{j_0}(x_1)}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{1}{f_{j_0}(x_2)} - \frac{1}{f_\mathbb{S}(x_2)}\right)\left(\frac{1}{f_{j_0}(x_1)} - \frac{1}{f_\mathbb{S}(x_1)}\right)^{-1} \sim \frac{f_{j_0}(x_2)}{f_{j_0}(x_1)} \cdot \frac{f_{j_0}(x_1)\, f_\mathbb{S}(x_1)}{f_{j_0}(x_2)\, f_\mathbb{S}(x_2)} = \frac{f_\mathbb{S}(x_1)}{f_\mathbb{S}(x_2)} > 1.$$

D'où la croissance stricte avec $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de $x^\star$ de la function $\frac{1}{f_{j_0}(x)} - \frac{1}{f_\mathbb{S}(x;\omega)}$.

Propriétés 9

Corollary

Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0,1]^p$ *un vecteur de poids, c'est-à-dire* $\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1$.
On considère les distributions de probabilités $G_{\mathbb{S}}$, $G_{\mathbb{H}}$ *et* $G_{\mathbb{P}}$ *définies par*

$$G_{\mathbb{S}}(x;\omega) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j G_j(x), \quad G_{\mathbb{H}}(x;\omega) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\omega_j}{G_j(x)} \right)^{-1}, \quad G_{\mathbb{P}}(x;\omega) = \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x)$$

de densités de probabilités respectives $g_{\mathbb{S}}(\cdot;\omega)$, $g_{\mathbb{H}}(\cdot;\omega)$, $g_{\mathbb{P}}(\cdot;\omega)$, *où* G_j *est une distribution GEV de paramètre* $(\gamma_j, \sigma_j, \mu_j) \in \mathbb{R}^3$ *et de densité* g_j.
Soit $x_j(\alpha) = \mu_j + \sigma_j \left\{ \frac{[-\log(1-\alpha)]^{-\gamma_j} - 1}{\gamma_j} \right\} \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha \in (0,1)$, *i.e.* $G_j(x_j(\alpha)) = 1 - \alpha$.
Si $j_0 = \arg\max_{1 \le j \le p} \{\gamma_j\}$, *alors la fonction* $x(\alpha) \in \mathbb{R}$ *définie par (24) croît simultanément avec* γ_{j_0}, σ_{j_0} *et* μ_{j_0}

$$x(\alpha) = x_{j_0}(\alpha) + \alpha \left[\frac{1}{g_{j_0}(x_{j_0}(\alpha))} - \frac{1}{g_{\mathbb{S}}(x_{j_0}(\alpha);\omega)} \right]. \tag{24}$$

De plus, les conditions ci-dessous sont satisfaites

$$\lim_{\alpha \to 0} x(\alpha) = x_{j_0}(\alpha), \quad \lim_{\alpha \to 0} G_{\mathbb{S}}(x(\alpha);\omega) = \lim_{\alpha \to 0} G_{\mathbb{H}}(x(\alpha);\omega) = \lim_{\alpha \to 0} G_{\mathbb{P}}(x(\alpha);\omega) = 1 - \alpha.$$

Estimation de la distribution de mélange $F_{\mathbb{P}}$ (1/2)

Cadre de travail

Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ un vecteur de poids, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^p \omega_j = 1$.
On considère la distribution de probabilités $F_{\mathbb{P}}$ définie pout tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_{\mathbb{P}}(x; \omega) = \prod_{j=1}^{p} F_j^{\omega_j}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad -\log F_{\mathbb{P}}(x; \omega) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j(-\log F_j(x)).$$

Soit $X_{\mathbb{P}}$ la variable aléatoire associée à la distribution $F_{\mathbb{P}}$.
La relation suivante

$$-\log F_{\mathbb{P}}\left(X_{\mathbb{P}}; \omega\right) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j \left(-\log F_j\left(X_{\mathbb{P}}\right)\right)$$

montre que la variable aléatoire $Y_{\mathbb{P}} = -\log F_{\mathbb{P}}\left(X_{\mathbb{P}}; \omega\right)$ est à la fois la loi exponentielle standard et une distribution de mélange arithmétique de la loi exponentielle standard $Y_j = -\log F_j\left(X_{\mathbb{P}}\right)$.

Cette remarque suggère la stratégie suivante pour l'estimation des paramètres de la distribution $F_{\mathbb{P}}$ à partir d'un échantillon $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de fonction de répartition empirique F_n.

Estimation de la distribution de mélange $F_{\mathbb{P}}$ (2/2)

Stratégie

1. Utiliser par exemple l'algorithme appelé **kmeans** pour partitionner l'échantillon $\mathcal{E} = \{-\log F_n(x_1), \cdots, -\log F_n(x_n)\}$ en p clusters nommés $\mathcal{E}_j$, $j = 1, \cdots, p$.
2. Estimer les poids $\omega_j = \frac{n_j}{\sum_{k=1}^{p} n_k}$, où n_j est le nombre d'éléments dans le cluster $\mathcal{E}_j$.
3. Estimer les paramètres de la distribution F_j à l'aide des observations du cluster $\mathcal{X}_j = \{x_i \in \mathcal{X} \; : \; -\log F_n(x_i) \in \mathcal{E}_j\}$.

Cas des valeurs extrêmes

Pour modéliser les valeurs extrêmes d'une variable aléatoire X dont on connait un échantillon $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on peut appliquer la stratégie ci-dessus en utilisant :

1. la distribution $G_{\mathbb{P}}(x; \omega) = \prod_{j=1}^{p} G_j^{\omega_j}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, où G_j est une distribution GEV,
2. l'échantillon $\mathcal{X}(\alpha) = \{x_i \in \mathcal{X} \; : \; x_i > x(\alpha)\}$, où $x(\alpha) = F_n^{-1}(\alpha)$ avec $\alpha \geq 0.5$, F_n étant la fonction de répartition empirique estimée sur l'échantillon $\mathcal{X}$.

Distribution des extrêmes et mélange des lois GEV

- Soit X une v.a. de fonction de répartition F et de borne supérieure x_F.
- Soient $b_1, \cdots, b_p$ une suite de p entiers positifs suffisamment grands.
- On suppose que pour tout $j = 1, \cdots, p$ et pour toute grande valeur $x \in \mathbb{R}$, l'approximation suivante est satisfaite

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} \sim G_j^{1/b_j}(x; \Theta_j) = G_j(x; \Theta_j(b_j)), \tag{25}$$

où G_j est une distribution GEV de paramètre $\Theta_j = (\gamma_j, \sigma_j, \mu_j) \in \mathbb{R}^3$.

Alors, **quel que soit** le vecteur $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p) \in [0, 1]^p$ tel que $\sum_{j=1}^p \omega_j = 1$ et pour toute grande valeur $x \in \mathbb{R}$, on peut faire les approximations suivantes

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}^{\sum_{j=1}^p \omega_j} = \prod_{j=1}^p \left(\mathbb{P}\{X \leq x\}\right)^{\omega_j} \sim \prod_{j=1}^p \left[G_j\left(x; \Theta_j(b_j)\right)\right]^{\omega_j} = G_{\mathbb{P}}\left(x; \omega, \Theta(b)\right).$$

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} \sum_{j=1}^p \omega_j = \sum_{j=1}^p \omega_j \mathbb{P}\{X \leq x\} \sim \sum_{j=1}^p \omega_j G_j\left(x; \Theta_j(b_j)\right) = G_{\mathbb{S}}\left(x; \omega, \Theta(b)\right).$$

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{\sum_{j=1}^p \omega_j}{\mathbb{P}\{X \leq x\}} = \sum_{j=1}^p \frac{\omega_j}{\mathbb{P}\{X \leq x\}} \sim \sum_{j=1}^p \frac{\omega_j}{G_j\left(x; \Theta_j(b_j)\right)} = \frac{1}{G_{\mathbb{H}}\left(x; \omega, \Theta(b)\right)}.$$

Estimation du paramètre Θ : Cas IID

Soit $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ un échantillon d'une une variable aléatoire X ayant une distribution de probabilité **inconnue**.

- Soit $b = \{b_j \in \mathbb{N}^\star, j = 1, \cdots, p\}$ un ensemble de p tailles de blocs assez grandes.
- Soit $(\gamma_j, \sigma_j, \mu_j)$ le vecteur des paramètres de la loi GEV nommée $G_j(\cdot)$ caractérisant la distribution des maximums de b_j obs. consécutives de la v.a. X.

Nous avons adoptés les notations ci-dessous pour désigner l'ensemble des paramètres qui figurent dans les modèles de mélange qui précèdent

- $b = (b_1, \cdots, b_p)$,
- $\Theta(b) = (\Theta_j(b_j), j = 1, \cdots, p)$,
- $\Theta_j(b_j) = (\gamma_j(b_j), \sigma_j(b_j), \mu_j(b_j))$,
- $\gamma_j(b_j) = \gamma_j, \quad \sigma_j(b_j) = \sigma_j\, b_j^{-\gamma_j}, \quad \mu_j(b_j) = \mu_j + \sigma_j \left(\frac{b_j^{-\gamma_j} - 1}{\gamma_j} \right).$

Estimation du paramètre Θ : Cas Stationnaire

Soit X_t, $t = 1, 2, \cdots$ une série temporelle **stationnaire** de processus aléatoire **inconnu**.

- Soit $b = \{b_j \in \mathbb{N}^\star, j = 1, \cdots, p\}$ un ensemble de p tailles de blocs assez grandes.
- Soit $(\gamma_j, \sigma_j, \mu_j)$ le vecteur des paramètres de la loi GEV nommée $G_j(\cdot)$ caractérisant la distribution des maximums de b_j obs. consécutives de la serie X_t.
- Soit $\nu_j \in [0, 1]$ l'**indice extremal** associé au seuil défini par le quantile empirique $x_{n,1/b_j}$ d'ordre $1/b_j$ estimé sur une séquence $\mathcal{X}_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de la série X_t.

Indice extremal

Un indice extremal ν quantifie le degré de dépendance entre l'occurrence des valeurs extrêmes consécutives. Cette dépendance est **forte** lorsque ν tend vers 0 et **faible** lorsque ν tend vers 1.

Nous avons adoptés les notations ci-dessous pour désigner l'ensemble des paramètres qui figurent dans les modèles de mélange qui précèdent

- $b = (b_1, \cdots, b_p)$, $\Theta(b) = (\Theta_j(b_j), j = 1, \cdots, p)$, $\Theta_j(b_j) = (\gamma_j(b_j), \sigma_j(b_j), \mu_j(b_j))$,
- $\gamma_j(b_j) = \gamma_j, \quad \sigma_j(b_j) = \sigma_j\,(\nu_j b_j)^{-\gamma_j}, \quad \mu_j(b_j) = \mu_j + \sigma_j \left(\frac{(\nu_j b_j)^{-\gamma_j} - 1}{\gamma_j}\right)$.

Estimation du paramètre Θ : Cas Non-Stationnaire (1/2)

Soit X_t, $t = 1, 2, \cdots$ une série temporelle **non-stationnaire** de processus **inconnu**.
Soit $Y_t = (Y_{1,t}, \cdots, Y_{q,t})$ une série temporelle de q covariables pour la série X_t.
Soit $x_1, \cdots, x_n$ une séquence de n obs. de la série X_t.
On suppose que chaque obs. x_ℓ est associée à un vecteur de q cov. $y_\ell = (y_{1,\ell}, \cdots, y_{q,\ell})$.

- Soit $b = \{b_j \in \mathbb{N}^\star, j = 1, \cdots, p\}$ un ensemble de p tailles de blocs assez grandes.
- Soit $(\gamma_j(y_t), \sigma_j(y_t), \mu_j(y_t))$ le vecteur des paramètres de la loi GEV nommée $G_j(\cdot \mid Y_t = y_t)$ caractérisant la distribution conditionelle des maximums de b_j obs. consécutives de la série X_t.
- Soit $\nu_j \in [0, 1]$ l'**indice extremal** associé au seuil défini par le quantile empirique $x_{n,1/b_j}$ d'ordre $1/b_j$ estimé sur une séquence $\mathcal{X}_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de la série X_t.

Structure des paramètres

- $\mu_j(y_t) = \mu_{0,j} + \mu_{1,j}\, f_1(y_t) + \cdots + \mu_{q,j}\, f_q(y_t)$,
- $\sigma_j(y_t) = \exp\left\{\phi_{0,j} + \phi_{1,j}\, g_1(y_t) + \cdots + \phi_{q,j}\, g_q(y_t)\right\}$,
- $\gamma_j(y_t) = \gamma_{0,j} + \gamma_{1,j}\, h_1(y_t) + \cdots + \gamma_{q,j}\, h_q(y_t)$,

où f_ℓ, g_ℓ, h_ℓ sont des fonctions continues de supports dans $\mathbb{R}^q$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Estimation du paramètre Θ : Cas Non-Stationnaire (2/2)

Nous avons adoptés les notations ci-dessous pour désigner l'ensemble des paramètres qui figurent dans les modèles de mélange qui précèdent

- $b = (b_1, \cdots, b_p)$,
- $\Theta(b) = \left(\Theta_j(b_j, y_t), j = 1, \cdots, p, t = 1, \cdots, n\right)$,
- $\Theta_j(b_j, y_t) = \left(\gamma_j(b_j, y_t), \sigma_j(b_j, y_t), \mu_j(b_j, y_t)\right)$,
- $\gamma_j(b_j, y_t) = \gamma_j(y_t)$,
- $\sigma_j(b_j, y_t) = \sigma_j(y_t) \cdot (\nu_j b_j)^{-\gamma_j(y_t)}$,
- $\mu_j(b_j, y_t) = \mu_j(y_t) + \sigma_j(y_t) \cdot \left(\frac{(\nu_j b_j)^{-\gamma_j(y_t)} - 1}{\gamma_j(y_t)}\right)$.